На правах рукописи

НГУЕН ВАН ЛОЙ

Методы направляющих и ограничивающих функций и их приложения к некоторым задачам дифференциальных уравнений и включений

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном педагогическом университете.

Научный консультант: Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор,

Официальные оппоненты:

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет дружбы народов, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, заведующий кафедрой;

Фоменко Татьяна Николаевна, доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, кафедра общей математики, профессор;

Семенов Михаил Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е.Жуковского и Ю.А. Гагарина», кафедра теоретической гидрометеорологии, профессор.

Ведущая организация: Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

Защита состоится «15» декабря 2015 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, ВГУ, математический факультет, ауд. 335.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2776

Автореферат разослан “ ____ “ сентября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Ю. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Качественные и геометрические методы имеют давнюю традицию успешного применения к различным задачам теории дифференциальных уравнений. Эти методы и их приложения восходят к именам H. Poincaré, L.E.J. Brouwer'a, П.С. Александрова, H. Hopf'a, J. Leray, Ju. Schauder'a. Дальнейшие развития этих методов осуществлялись в трудах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, K. Deimling'a, J. Mawhin'a, W.V. Petryshyn'a, J.R.L. Webb'a и многих других исследователей.

Начиная со второй половины XX века, эти методы распространяются на теорию дифференциальных включений. Развитие теории дифференциальных включений связано с тем, что дифференциальные включения являются удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в различных разделах теории оптимального управления, математической физики, математической экономики и др. Различные задачи теории дифференциальных включений были изучены с помощью методов нелинейного и многозначного анализа в работах Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, М.И. Каменского, А.И. Поволоцкого, Ю.Е. Гликлиха, В.Г. Звягина, А.В. Арутюнова, В.Г. Задорожного, А.И. Булгакова, Е.Л. Тонкова, А.А. Толстоногова, В.В. Филиппова, J.-P. Aubin'a, A. Cellina, H. Frankowska, K. Deimling'a, C. Castaing'a, T. Pruszko, E. Tarafdar'a, S.K. Teo, L. Górniewicz'a, A. Granas'a, W. Kryszewski, D. Gabor'a, P. Nistri, S. Hu, N.P. Papageorgiou, P. Zecca, и других.

Важное место в исследовании дифференциальных уравнений и включений занимают краевые задачи, в том числе задача о существовании периодических решений. Весьма важной является также задача о глобальной структуре множества периодических решений.

Одним из наиболее эффективных средств решения задач о периодических колебаниях является метод направляющих функций, а для краевых задач - метод ограничивающих функций.

Метод направляющих функций был введен М.А. Красносельским, А.И.

Перовым в 1958г[1 2 3]. М.А. Красносельский и А.И. Перов обобщили понятие функции Ляпунова для изучения существования периодических, ограниченных и почти периодических решений дифференциальных уравнений. Являющийся геометрически ясным и простым в применении, метод направляющих функций стал популярен среди многих ученых. Среди большого количества работ, относящихся к этому методу, мы напомним: работу J. Mawhin'a[4], касающуюся функционально-дифференциальных уравнений; работу A. Fonda[5], где было введено понятие интегральных направляющих функций; работу L. Górniewicz'a и S. Plaskacz'a[6] с введением направляющих функций обобщеного вида для дифференциальных включений; работу Д. Рачинского[7] о многолистных направляющих функциях; понятие негладких направляющих функций для дифференциальных уравнений и включений было введено в работах F. de Blasi, L. Górniewicz, и G. Pianigiani[8]; M. Lewicka[9]; С. Корнева и В. Обуховского[10 11]; M. Filippakis, L. Gasiński, N. Papageorgiou[12]; негладкие многолистные функция были введены в работе[13]; отметим также работу A. Alonso, C. Núñez и R. Obaya[14] с изучением полных направляющих множеств для почти периодических дифференциальных уравнений.

Обобщая понятие направляющих функций, J. Mawhin в 1974г.[15] ввел метод ограничивающих функций для дифференциальных уравнений второго порядка в конечномерном пространстве (отметим, что ограничивающая функ-

[1] Красносельский М.А., Перов А.И. О некоторых принципах существования ограниченных, периодических и почти периодических решений для системы обычкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. -1958. -Т.123. -№.2. -С.235-238.

[2] Красносельский М. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. -М.: Наука. -1966.

[3] Красносельский М. Забрейко П. Геометрические методы нелинейного анализа. -М.: Наука. -1975.

[4] Mawhin J. Periodic solutions of nonlinear functional differential equations // J. Differential Equations. -1971. -V.10. -P.240-261.

[5] Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. -1987. -V.99. -No.1. -P.79-85.

[6] Górniewicz L., Plaskacz S. Periodic solutions of differential inclusions in $\mathbb{R}^n$ // Boll. U.M.I. -1993. -V.7-A. -P.409-420.

[7] Rachinskii D. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems // Nonlinear Analysis: TMA. -1996. -V.26. -No.3. -P.631-639.

[8] De Blasi F., Górniewicz, Pianigiani G. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions // Nonlinear Analysis: TMA. -1999. -V.37. -P.217-245.

[9] Lewicka M. Locally lipschitzian guiding function method for ODEs // Nonlinear Analysis: TMA. -1998. -V.33. -P.747-758.

[10] Kornev C., Obukhovskii V. On some developments of the method of integral guiding functions // Funct. Diff. Equ. -2005. -V.12. -No.3-4. -P.303-310.

[11] Корнев С., Обуховский В. Негладкие направляющие потенциалы в задачах вынужденных колебаний // АиТ. -2007. -№.1. -С.3-10.

[12] Filippakis M., Gasiński L., Papageorgiou N. Nonsmooth generalized guiding functions for periodic differential inclusions // Nonlinear Differ. Equ. Appl. -2006. -V.13. - P.43-66.

[13] Корнев С., Обуховский В. О негладких многолистных направляющих функциях // Дифф. уравнения. -2003. -Т.39. -№.11. -С.1497-1503.

[14] Alonso A., Núñez C. and Obaya R. Complete guiding sets for a class of almost-periodic differential equations // J. Differential Equations. -2005. -V.208. -P.124-146.

[15] Mawhin J. Boundary value problems for nonlinear second-order vector differential equations // J. Differential Equations. -1974. -V.16. -P.257-269.

ция вида $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(x) = \|x\|^2 - R^2$, была использована впервые P. Hartman'ом[16]). Этот метод затем был использован для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений в работе[17]. Отметим также некоторые важные вклады в развитие этого метода: работа V. Taddei[18] для негладких ограничивающих функций в конечномерном пространстве; работа G. Wang'a, M. Zhou и L. Sun'a[19] с применением метода ограничивающих функций для дифференциальных уравнений третьего порядка; работа J. Andres'a, L. Malaguti и V. Taddei[20] для ограничивающих функций в банаховом пространстве; работа I. Benedetti, L. Malaguti и V. Taddei[21] для ограничивающих функций в банаховом пространстве со слабой топологией.

Задача о существовании ветви нетривиальных решений операторных уравнений, выходящей из точки бифуркации была изучена М.А. Красносельским[22]. Теорема о глобальной структуре множества решений операторных уравнений была доказана в работе P. Rabinowitz'a[23]. Результаты М.А. Красносельского и P. Rabinowitz'a были обобщены в работе J.C. Alexander'a и P.M. Fitzpatrick'a[24] для включений с многомерными параметрами. Топологические методы в теории бифуркаций применяли в своих работах также Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, М.И. Каменский, А.М. Красносельский, Ю.И. Сапронов, J. Ize, E. Dancer, J. Pejsachowicz, J.A. Yorke, J. Marsden, J. Mawhin, L. Górniewicz, W. Kryszewski, D. Gabor, P. Benevieri, M. Furi, S.C. Welsh и многие другие исследователи.

Из отмеченного выше следует, что методы направляющих и ограничивающих функций являются эффективными средствами для изучения периодических и краевых задач. Однако до последнего времени в этих методах и их применениях можно было указать существенные пробелы. В частности,

[16] Hartman P. On boundary value problems for systems of ordinary, nonlinear, second-order differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. -1960. -V.96. -P.493-509.

[17] Gaines R., Mawhin J. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. -Berlin, New York: Springer-Verlag. -1977.

[18] Taddei V. Bound sets for Floquet boundary value problems: the nonsmooth case // Dis. Cont. Dyn. Sys. -2000. -V.6. -No.2. -P.459-473.

[19] Wang G., Zhou M., Sun L. Bounding functions methods for fully nonlinear boundary value problems // Nonlinear Analysis: TMA. -2006. -V.64. -P.696-705.

[20] Andres J., Malaguti L. , Taddei V. On boundary values problems in Banach spaces // Dyn. Sys. Appl. -2009. -V.18. -P.275-302.

[21] Benedetti I., Malaguti L., Taddei V. Semilinear differential inclusions via weak topologies // J. Math. Anal. Appl. -2010. -V.368. -P.90-102.

[22] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. -М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы. -1956.

[23] Rabinowitz P. Some global results for nonlinear eigenvalue problems // J. Funct. Anal. -1971. -V.7. -P.487-513

[24] Alexander J.C. and Fitzpatrick P.M. Global bifurcation for solutions of equations involving several parameter multivalued condensing mappings // Lect. Notes Math. -1981. -V.886. -P.1-19

метод ограничивающих функций не применялся к изучению дифференциальных уравнений и включений с нелокальными начальными условиями. Метод направляющих функций рассматривался только для дифференциальных уравнений и включений в конечномерном пространстве. Применение метода направляющих функций к изучению задачи бифуркации периодических решений семейства дифференциальных включений было только намечено. Приложение метода направляющих функций к изучению задачи существования периодических решений и задачи бифуркации периодических решений семейства включений с нелинейными фредгольмовыми отображениями ранее не изучалось. Все перечисленные выше ограничения этих методов в значительной степени сняты в данной диссертации.

Цель диссертационной работы. В диссертации исследуются следующие главные задачи:

- приложение метода направляющих функций к изучению дифференциальных включений с обобщенным периодическим условием и их применений в теории дифференциальных игр;

- систематическое приложение метода направляющих функций к изучению задачи бифуркации с многомерным параметром и его применение к исследованию бифуркации семейства периодических траекторий управляемых систем и дифференциальных вариационных неравенств;

- распространение метода направляющих функций на дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве;

- приложения метода направляющих функций к изучению задачи существования периодических траекторий и задачи бифуркации семейства периодических траекторий управляемых систем, описываемых в виде включений с нелинейными фредгольмовыми отображениями;

- приложение метода ограничивающих функций к изучению дифференциальных уравнений и включений с нелокальными начальными условиями;

- приложение метода ограничивающих функций к исследованию дифференциальных включений второго порядка.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, теории функционального анализа, теории много-

значных отображений, теории топологической степени и теории бифуркаций.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Введено понятие направляющей функции для дифференциальных включений с обобщенным периодическим условием. Получены достаточные условия существования решений изучаемой задачи. Исследованы применения полученных результатов в теории дифференциальных игр.

2. Метод направляющих функций распространен на дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

3. Осуществлено систематическое приложение метода направляющих функций к задаче бифуркации для семейства периодических решений дифференциально-операторных включений с CJ-мультиотображениями и многомерным параметром.

4. Описана глобальная структура множества периодических решений для двупараметрических семейств управляемых систем.

5. Описана глобальная структура множества периодических решений для дифференциальных вариационных неравенств с двумя параметрами.

6. Введено понятие направляющей функции для включения с нелинейным фредгольмовым оператором. Изучена взаимосвязь между ориентированным индексом совпадения и индексом направляющей функции.

7. Получены достаточные условия существования периодической траектории для управляемой системы, содержащей нелинейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $CJ-$мультиотображение.

8. Описана глобальная структура множества периодических траекторий для управляемой системы, содержащей нелинейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $CJ-$мультиотображение.

9. Распространен метод ограничивающих функций на случай дифференциальных уравнений и включений с нелокальными начальными условиям в конечномерном и бесконечномерном гильбертовом пространствах.

10. Распространен метод ограничивающих функций на случай дифференциальных включений второго порядка в конечномерном и бесконечномерном гильбертовом пространствах.

Практическая и теоретическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться в теории дифференциальных уравнений и включений, теории оптимального управления, теории ветвления семейства решений динамических систем. Они могут также найти приложения в задачах математической экономики и теории игр.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной научной конференции "Общие проблемы управления и их приложения"(Тамбов, 2013г.); научной конференции физико-математического факультета ВГПУ (2014г. и 2015г.); International workshop on nonlinear and variational analysis (Kaohsiung, Taiwan 2014); International workshop on equilibrium and fixed point problems: Theory and algorithms (Ha Noi, Viet Nam 2014); на научных семинарах профессора L. Malaguti (университет Реджо-Эмилии и Модены, Италия, 2013г.), профессора I. Benedetti (университет Перуджи, Италия, 2013г.) и профессора P. Nistri (университет Сиены, Италия, 2013г.); во время стажировки диссертанта в университете Реджо-Эмилии и Модены (Италия, апрель-июль 2013г.), в национальном университете имени Сун Ят-Сена (Тайвань, июнь-июль, 2014г.), а также на семинарах профессоров В.В. Обуховского и М.И. Каменского во время стажировки диссертанта в Воронежском государственном педагогическом университете (Воронеж, 2015г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 28 работ, из них 1 монография, 17 статей, опубликованных в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ и 6 тезисов докладов на международных научных конференциях. Из совместных работ [1], [3]-[9], [11]-[13], [15], [17]-[18] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 257 страницах и состоит из введения, пяти глав, разбитых в общей сложности на 19 параграфов, и списка цитируемой литературы, включающего 148 наименований.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Пусть X, Y - банаховы пространства; $P(Y)$ $[Cv(Y),\ Kv(Y),\ K(Y)]$ обозначает совокупность всех непустых [соответственно: непустых выпуклых замкнутых, непустых выпуклых компактных, непустых компактных] подмножеств Y. Символом $C([0,T];X)$ $[L^p([0,T];X)]$ обозначается пространство всех непрерывных [соответсвенно: $p-$суммируемых, $p \geq 1$] функций $x\colon [0,T] \to X$ с нормами

$$\|x\|_C = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t)\|_X \ \text{ и } \ \|x\|_p = \Big(\int_0^T \|x(t)\|_X^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим через $W^{k,p}([0,T];X)$ пространство Соболева с нормой

$$\|x\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^{k} \|x^{(i)}\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Пусть $W_T^{k,p}([0,T];X)$ - подпространство всех функций $x \in W^{k,p}([0,T];X)$ таких, что $x(0) = x(T)$ и $B_C(0,r) = \{x \in C([0,T];X)\colon \|x\|_C \leq r\}$.
Норма и скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$ обозначаются $|\cdot|$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$, соответственно. Пусть

$$B^n(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leq r\} \ \text{ и } S^{n-1}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = r\}.$$

Шар [сфера] $B^n(0,1)$ $[S^{n-1}(0,1)]$ обозначается символом B^n [соответственно, S^{n-1}]. Напомним, что множество $M \in K(Y)$ называется асферичным[25], если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любое непрерывное отображение $\sigma\colon S^n \to O_\delta(M)$, $n = 0,1,2,\cdots$, может быть продолжено до непрерывного отображения $\widetilde{\sigma}\colon B^{n+1} \to O_\varepsilon(M)$, где $O_\delta(M)$ $[O_\varepsilon(M)]$ обозначает δ-окрестность [соответственно, ε-окрестность] множества M.

Определение 1. *Полунепрерывное сверху мультиотображение $\Sigma : X \to K(Y)$ называется $J-$мультиотображением ($\Sigma \in J(X,Y)$), если каждое значение $\Sigma(x)$, $x \in X$, является асферичным множеством в Y.*

Отметим, что любое непрерывное однозначное отображение $f\colon X \to Y$ является $J-$мультиотображением.

[25] Мышкис А.Д. Обобщение теоремы о неподвижных точках динамической системы внутри замкнутой тракетории // Мат. Сб. -1954. -Т.34. -С.525-540

Определение 2. *Через $J^c(X,Y)$ обозначим множество всех мультиотображений $F\colon X \to K(Y)$, которые могут быть представлены в виде композиции $F = \Sigma_q \circ \cdots \circ \Sigma_1$, где $\Sigma_i \in J(X_{i-1}, X_i)$, $i = \overline{1..q}$, $X_0 = X$, $X_q = Y$, и X_i $(0 < i < q)$ - нормированные пространства. В частности, если $F = \varphi \circ \Sigma$, где Σ - $J-$мультиотображение и $\varphi-$непрерывное отображение, то F называется $CJ-$мультиотображением.*

Мультиотображение $F\colon [0,T]\times X \to Kv(X)$ называется *верхним Каратеодори*, если для любого $x \in X$ мультифункция $F(\cdot, x)\colon [0,T] \to Kv(X)$ имеет измеримое сечение и для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon X \to Kv(X)$ полунепрерывно сверху. В случае, когда верхнее Каратеодори мультиотображение F является однозначным отображением, мы будем называть F *отображением Каратеодори.*

Мультиотображение $F\colon [0,T] \times X \to Kv(X)$ называется *верхним Каратеодори мультиотображением с L^p-ростом*, если оно является верхним Каратеодори мультиотображением и для любого ограниченного множества $\Omega \subset X$ существует функция $\alpha_\Omega \in L^p_+[0,T]$ такая, что

$$\|F(t,x)\| := \max\{\|y\|_X \colon y \in F(t,x)\} \le \alpha_\Omega(t)$$

для всех $x \in \Omega$ и п.в. $t \in [0,T]$. Если существует функция $\alpha \in L^p_+[0,T]$ такая, что для всех $x \in X$ и п.в. $t \in [0,T]$ выполнено $\|F(t,x)\| \le \alpha(t)(1 + \|x\|_X)$, то F называется *верхним Каратеодори мультиотображением с L^p-подлинейным ростом.* Известно, что если $F\colon [0,T]\times X \to Kv(X)$ является верхним Каратеодори мультиотображением с L^p-ростом, то мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F\colon C([0,T];X) \to Cv\big(L^p([0,T];X)\big)$,

$$\mathcal{P}_F(x) = \big\{f \in L^p([0,T];X)\colon f(s) \in F(t,x(s)) \ \text{ для п.в. } \ s \in [0,T]\big\},$$

корректно определен и замкнут.

В дальнейшем, пусть H - бесконечномерное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, пусть H_n - $n-$мерное подпространство H с базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ и P_n - проекция на H_n, которая порождает оператор $\mathbb{P}_n\colon L^2([0,T];H) \to L^2([0,T];H_n)$, $(\mathbb{P}_n f)(t) = P_n f(t)$. Для любых $x, y \in H$, через $\langle x, y\rangle_H$ обозначим их скалярное произведение в H.

Нумерация определений и теорем в автореферате не совпадает с их нумерацией в диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер и посвящена изложению необходимых понятий и утверждений из теории дифференциальных уравнений, теории функционального анализа, теории многозначных отображений, теории топологической степени и фазового пространства.

Вторая глава состоит из четырех параграфа. **В первом параграфе** описан классический подход метода направляющих функций по М.А. Красносельскому и А.И. Перову и некоторые его обобщения. **Во втором параграфе** рассматривается обобщенная периодическая задача в конечномерном пространстве типа:

$$\begin{cases} u^{'}(t) \in F(t, u(t)), \text{ для п.в. } \ t \in [0, T], \\ u(T) \in M(u(0)), \end{cases} \tag{1}$$

при следующих предположениях:

$(A1)$ $F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ является верхним Каратеодори мультиотображением с L^1-подлинейным ростом;

$(A2)$ $M\colon \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является J^c-мультиотображением.

Под решением задачи (1) мы понимаем абсолютно непрерывную функцию $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую (1).

Определение 3. *Непрерывно дифференцируемая функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если существует $r_V > 0$ такое, что $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\right) \neq 0$ для всех $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| \geq r_V$.*

Определение 4. *Невырожденный потенциал $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется направляющей функцией для задачи (1) если существует $r_* > 0$ такое, что для каждого $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $|x| \geq r_*$ выполнены следующие отношения:*

(i) $\left\langle \nabla V(x), y \right\rangle \geq 0$ для хотя бы одного $y \in F(t,x)$;

(ii) $V(x) \geq V(w)$ для всех $w \in M(x)$;

(iii) $\left\langle \nabla V(x), x - w \right\rangle \geq 0$ для хотя бы одного $w \in M(x)$, если M принимает выпуклые значения, иначе для всех $w \in M(x)$.

Пусть $r = \max\{r_V, r_*\}$. Тогда топологическая степень $deg(\nabla V, B^n(0,R))$ определена и не зависит от выбора $R \geq r$. Это число называется *индексом направляющей функции* V и обозначается $Ind\, V$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $(A1)-(A2)$. *Если существует направляющая функция* V *для задачи (1) такая, что* $Ind\,V \neq 0$, *то задача (1) имеет решение.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* $(A1)-(A2)$ *и существует* $r>0$ *такое, что для* $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $|x|\geq r$:

a) $\langle x,y\rangle \geq 0$ *для хотя бы одного* $y\in F(t,x)$;

b) $\|M(x)\| = \max\{|w|\colon w\in M(x)\} \leq |x|$.

Тогда задача (1) имеет решение.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* $(A1)-(A2)$. *Если существует* $r>0$ *такое, что для* $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $|x|\geq r$, *найдется хотя бы один элемент* $y\in F(t,x)$ *такой, что* $\langle x,y\rangle\geq 0$, *то анти-периодическая задача*

$$\begin{cases} u^{'}(t)\in F(t,u(t)), \ \text{для п.в. } t\in[0,T], \\ u(T)=-u(0), \end{cases}$$

имеет решение.

В третьем параграфе излогается новый подход к распространению метода направляющих функций на дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве H.

Определение 5. *Пусть* $\mathcal{A}\colon W_T^{1,2}([0,T];H)\to L^2([0,T];H)$ *- линейный ограниченный оператор. Мультиотображение*

$$\mathcal{F}\colon C([0,T];H)\to P(L^2([0,T];H))$$

называется $\mathcal{A}-$*разрешимым, если из существования последовательностей* $\{n_k\}$ *и* $\{x_k\}$, $x_k\in W_T^{1,2}([0,T];H_{n_k})$ *таких, что*

$$\sup_k \|x_k\|_C < +\infty \quad \text{и} \quad \mathcal{A}x_k\in\mathbb{P}_{n_k}\mathcal{F}(x_k)$$

следует, что найдется функция $x_*\in W_T^{1,2}([0,T];H)$, *что* $\mathcal{A}x_*\in\mathcal{F}(x_*)$.

Рассмотрим теперь дифференциальное включение

$$\begin{cases} x'(t)\in F(t,x(t)), \\ x(0)=x(T), \end{cases} \tag{2}$$

где мультиотображение $F\colon[0,T]\times H\to Kv(H)$ удовлетворяет условию:

$(F1)$ F является верхним Каратеодори мультиотображением с L^2-подлинейным ростом.

Под решением задачи (2) мы понимаем функцию $x \in W_T^{1,2}([0,T];H)$, которая удовлетворяет (2). Заменим включение (2) включением

$$Ax \in \mathcal{P}_F(x),$$

где $A\colon W_T^{1,2}([0,T];H) \to L^2([0,T];H)$, $Ax = x'$, и
$\mathcal{P}_F\colon C([0,T];H) \to Cv(L^2([0,T],H))$ - мультиоператор суперпозиции.

Непрерывно дифференцируемый функционал $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если существует $r_V > 0$ такое, что

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \cdots\right)$$

не обращается в нуль при всех $\|x\|_H \geq r_V$, где $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in H$.

Определение 6. *Непрерывно дифференцируемый функционал V называется проекционно-однородным потенциалом, если существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $P_n\nabla V(x) = \nabla V(P_n x)$ для любого $n \geq n_0$ и всех $x \in H$.*

Для каждого n отождествим $H_n \cong \mathbb{R}^n$. Тогда сужение поля $P_n\nabla$ на H_n, мы можем рассматривать как непрерывное поле $P_n\nabla\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Из Определения 6 следует, что если V - невырожденный проекционно-однородный потенциал, то поле $P_n\nabla$ не обращается в нуль на $S^{n-1}(0,r)$ для всех $n \geq n_0$ и $r \geq r_V$. Тогда топологические степени $v_n = deg(P_n\nabla V, B^n(0,r))$, $n \geq n_0$, корректно определены и не зависят от $r \geq r_V$. Индекс невырожденного проекционно-однородного потенциала V определяется следующим образом

$$Ind\, V = (v_{n_0}, v_{n_0+1}, \cdots).$$

Под $Ind V \neq 0$ мы понимаем, что существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $v_{n_k} \neq 0$ для всех n_k.

Определение 7. *Проекционно-однородный потенциал $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для задачи (2), если существует $N > 0$ такое, что для любой функции $x \in W_T^{1,2}([0,T];H)$ из $\|x\|_2 \geq N$ следует, что для всех $f \in \mathcal{P}_F(x)$ выполнено*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \left\langle P_n\nabla V(x(s)), f(s)\right\rangle ds\right) = 1.$$

Если V является интегральной направляющей функцией для включения (2), то V является невырожденным потенциалом и поэтому определен его индекс.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* $(F1)$. *Предположим, что существует интегральная направляющая функция* V *для задачи* (2) *такая, что* $IndV \neq 0$. *Тогда если мультиоператор* $\mathcal{P}_F$ *обладает свойством* $A-$*разрешимости, то задача* (2) *имеет решение.*

Следующие утверждения демонстрируют некоторые достаточные условия $A-$разрешимости мультиоператора $\mathcal{P}_F$.

Теорема 3. *Пусть гильбертово пространство* H *компактно вложено в банахово пространство* Y *и мультиотображение* $\widetilde{F}\colon [0,T] \times Y \to P(Y)$ *удовлетворяет условию:*

$(\widetilde{F})$ *для п.в.* $t \in [0,T]$ *мультиотображение* $\widetilde{F}(t,\cdot)\colon Y \to P(Y)$ *полунепрерывно сверху.*

Дополнительно предположим, что сужение $\widetilde{F}_{|_{[0,T]\times H}}$ *принимает значения в* $Kv(H)$ *и мультиотображение* $F = \widetilde{F}_{|_{[0,T]\times H}}\colon [0,T] \times H \to Kv(H)$ *удовлетворяет* $(F1)$. *Тогда мультиоператор* $\mathcal{P}_F$ *обладает свойством* $A-$*разрешимости.*

Теорема 4. *Пусть мультиотображение* $F\colon [0,T] \times H \to Kv(H)$ *удовлетворяет условию* $(F1)$. *Тогда мультиоператор* $\mathcal{P}_F$ *обладает свойством* $A-$*разрешимости при выполнении хотя бы одного из следующих условий:*

$(1i)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$ *мультиотображение* $F(t,\cdot)\colon H \to Kv(H)$ *слабо полунепрерывно сверху в смысле, что: если* $x_n \xrightarrow{H} x_0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $N(\varepsilon,t) > 0$, *что* $F(t,x_n) \subset O_\varepsilon\big(F(t,x_0)\big)$ *для всех* $n > N(\varepsilon,t)$;

$(2i)$ *существует* $q_0 > 0$ *такое, что для каждого* $n \geq q_0$ *сужение мультиотображения* $F(t,\cdot)$ *на* H_n *принимает значения в* $Kv(H_n)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$.

В последнем параграфе рассматривается задача бифуркации для семейства включений с многомерным параметром типа

$$Lx \in \mathcal{Q}(x,\mu), \tag{3}$$

где $L\colon W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \to L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$, $Lx = x'$, и
$\mathcal{Q}\colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k \to K\big(L^2([0,T];\mathbb{R}^n)\big)$ - мультиотображение, удовлетворяющее условиям:

$(Q1)$ $\mathcal{Q}$ является $CJ-$мультиотображением и $0 \in \mathcal{Q}(0,\mu)$ при всех $\mu \in \mathbb{R}^k$;

$(Q2)$ для любого ограниченного множества $\Omega \subset C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$ множество $Q(\Omega)$ ограничено в $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$.

Под решением задачи (3) мы понимаем пару $(x,\mu) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$, удовлетворяющую (3). Ясно, что задача (3) имеет тривиальные решения $(0,\mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}^k$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных решений задачи (3).

Определение 8. *Точка* $(0,\mu_0) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$ *называется точкой бифуркации для включения* (3) *если для любого открытого множества* $U \subset W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$, *содержащего* $(0,\mu_0)$, *существует решение* $(x,\mu) \in U$ *задачи* (3) *такое, что* $x \neq 0$.

Определение 9. *Семейство непрерывно дифференцируемых функций* $V_\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^k$, *называется семейством локальных интегральных направляющих функций для включения* (3) *в* $(0,0)$, *если существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для каждого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *найдется число* $\delta_\varepsilon > 0$ *(которое непрерывно зависит от* ε*) такое, что для любой функции* $x \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ *из* $0 < \|x\|_C \leq \delta_\varepsilon$ *следует, что*

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s) \big\rangle \, ds > 0$$

для всех $\mu \in S^{k-1}(0,\varepsilon)$ *и всех* $f \in \mathcal{Q}(x,\mu)$.

Для каждого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, пусть $O_\varepsilon = B^{n+k}\big(0, \sqrt{\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon^2}\big)$. Определим отображение $\widetilde{V}_\varepsilon\colon O_\varepsilon \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\quad \widetilde{V}_\varepsilon(w,\mu) = \big\{ -\nabla V_\mu(w), \varepsilon^2 - |\mu|^2 \big\}$. Из Определения 9 следует, что $\widetilde{V}_\varepsilon$ не имеет нулей на сфере ∂O_ε. Отсюда, топологическая степень $deg(\widetilde{V}_\varepsilon, O_\varepsilon)$ корректно определена как элемент в гомотопической группе сфер $\pi_{n+k}(S^{n+1})$ и не зависит от выбора $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Этот элемент называется *локальным индексом семейства* V_μ и обозначается через $indV_\mu$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $(Q1) - (Q2)$. *Если существует семейство локальных интегральных направляющих функций* V_μ *для задачи*

(3) *в* $(0,0)$ *такое, что* $indV_\mu \neq 0$ *(нулевой элемент группы* $\pi_{n+k}(S^{n+1})$*), то* $(0,0)$ *является точкой бифуркации для задачи* (3). *Кроме того, существует связное множество* $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $\overline{\mathcal{R}} \ni (0,\mu_*)$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

В качестве примера рассматривается управляемая система:

$$\begin{cases} x'(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), y(t), \mu\big), \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ y'(t) \in G\big(t, x(t), y(t), \mu\big), \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ y(0) = 0, \ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{4}$$

где $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $G\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \to Kv(\mathbb{R}^m)$; $\mu \in \mathbb{R}^2$ - параметр и $A(\mu)$ - $(2\times 2)-$матрица, определенная так:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 2\mu_1 & 2\mu_2 \\ 2\mu_2 & -2\mu_1 \end{pmatrix}, \ \mu = (\mu_1, \mu_2).$$

Здесь $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$ является траекторией системы, $y\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$ - функция управления. Под решением системы мы понимаем пару $(x,\mu) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$, для которой существует функция $y \in W^{1,1}([0,T];\mathbb{R}^m)$ такая, что тройка (x,y,μ) удовлетворяет (4). Предположим, что

$(f1)$ f является отображением Каратеодори;

$(f2)$ существует $c > 0$ такое, что $|f(t,u,v,\mu)| \leq c|u|(|v|+|\mu|)$, для п.в. $t \in [0,T]$ и всех $(u,v,\mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$;

$(G1)$ G является верхним Каратеодори мультиотображением;

$(G2)$ существует $d > 0$ такое, что $\|G(t,u,v,\mu)\| \leq d(|u| + |v| + |\mu|)$, для п.в. $t \in [0,T]$ и всех $(u,v,\mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* $(f1)-(f2)$ *и* $(G1)-(G2)$. *Если*

$$c(1 + Tde^{Td}) < 2,$$

то $(0,0)$ *является единственной точкой бифуркации для задачи* (4) *и , кроме того, существует неограниченное связное подмножество* $\mathcal{R}$ *множества нетривиальных решений задачи* (4) *такое, что* $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$.

В этом параграфе рассматривается также задача бифуркации для семейства дифференциальных включений. Именно, изучается задача

$$\begin{cases} x'(t) \in \mathcal{F}(t, x(t), \mu), \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathcal{F}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^2-ростом такое, что $0 \in \mathcal{F}(t, 0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}^k$ и п.в. $t \in [0, T]$.

Семейство локальных направляющих функций для задачи (5) задается аналогично Определению 9 с замечанием, что вместо $f \in \mathcal{Q}(x, \mu)$ мы потребуем $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(x, \mu)$.

Теорема 7. *Если существует семейство локальных интегральных направляющих функций V_μ для задачи (5) в $(0,0)$ такое, что $indV_\mu \neq 0$, то существует связное подмножество $\mathcal{R}$ множества всех нетривиальных решений задачи (5) такое, что $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$ и либо $\mathcal{R}$ неограничено, либо $\overline{\mathcal{R}} \ni (0, \mu_*)$ для некоторого $\mu_* \neq 0$.*

Для иллюстрации рассматривается семейство дифференциальных вариационных неравенств типа:

$$\begin{cases} x'(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), u(t), \mu\big) \qquad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T], \\ \big\langle \widetilde{u} - u(t), G\big(t, x(t), \mu\big) + F(u(t))\big\rangle \geq 0 \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T], \forall \widetilde{u} \in K, \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{6}$$

где $K \subset \mathbb{R}^m$ - выпуклый замкнутый конус; $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, и $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ являются непрерывными отображениями и

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} c\mu_1 & c\mu_2 \\ c\mu_2 & -c\mu_1 \end{pmatrix}, \quad c > 0, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2).$$

Предположим, что

$(A3)$ для $(t, z, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ множество

$$f(t, z, \Omega, \mu) := \big\{ f(t, z, y, \mu) \colon y \in \Omega \big\}$$

выпукло для любого выпуклого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^m$;

$(A4)$ существует положительные числа $\alpha_f, \alpha_G, c_1, c_2$ такие, что $\alpha_f < c$ и

$$|f(t,z,y,\mu)| \le \alpha_f\,|z|\,(|y|+|\mu|),$$
$$|G(t,z,\mu)| \le \alpha_G\,|z|^{c_1}(1+|\mu|^{c_2}),$$

для $(t,z,y,\mu) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^2$;

$(A5)$ F монотоно на K и существует $a > 0$ такое, что $\langle w, F(w)\rangle \ge a\,|w|^2$ для всех $w \in K$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* $(A5)$. *Тогда*

(a) *для любого* $r \in \mathbb{R}^m$ *множество*

$$SOL(K, r+F) := \big\{w \in K\colon \langle \widetilde{w}-w, r+F(w)\rangle \ge 0,\ \forall \widetilde{w} \in K\big\}$$

непусто, выпукло и замкнуто;

(b) $|w| \le \frac{1}{a}|r|$ *для всех* $w \in SOL(K, r+F)$, $r \in \mathbb{R}^m$.

Определим мультиотображения $U\colon [0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to Cv(K)$,

$$U(t,z,\mu) = SOL(K, G(t,z,\mu)+F),$$

и $\Phi\colon [0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to Kv(\mathbb{R}^2)$,

$$\Phi(t,z,\mu) = \big\{A(\mu)z + f(t,z,y,\mu)\colon y \in U(t,z,\mu)\big\}.$$

Используя лемму Филиппова о неявной функции мы можем заменить систему (6) следующей задачей

$$\begin{cases} x'(t) \in \Phi(t, x(t), \mu) \ \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = x(T). \end{cases} \tag{7}$$

Определение 10. *Под решением системы* (6) *мы понимаем тройку* (x,u,μ), *состоящую из функции* $x \in W^{1,2}_T([0,T];\mathbb{R}^2)$, *интегрируемой функции* $u\colon [0,T] \to K$ *и вектора* $\mu \in \mathbb{R}^2$, *которые удовлетворяют* (6), *или эквивалентно, под решением системы* (6) *мы понимаем пару* $(x,\mu) \in W^{1,2}_T([0,T];\mathbb{R}^2)\times\mathbb{R}^2$, *удовлетворяющую* (7).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* $(A3)-(A5)$. *Тогда* $(0,0)$ *является единственной точкой бифуркации для задачи* (6) *и существует неограниченное связное подмножество* $\mathcal{R}$ *множества всех нетривиальных решений задачи* (6) *такое, что* $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$.

Третья глава состоит из двух параграфа. **В первом параграфе** ориентированный индекс совпадения и метод направляющих функций применяются для изучения задачи о существовании решений системы:

$$\begin{cases} A\big(t, x(t), x'(t)\big) = B\big(t, x(t), y(t)\big), \text{ для всех } \ t \in [0,1], \\ y'(t) \in C\big(t, x(t), y(t)\big), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{8}$$

где $A\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывные отображения; $C\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ - мультиотображение и $y_0 \in \mathbb{R}$; $x, y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Обозначим через $C^1[0,1]$ и $AC[0,1]$ совокупности всех непрерывно дифференцируемых и абсолютно непрерывных функций на $[0,1]$, соответственно. Пусть $C^1_{pr}[0,1] = \{x \in C^1[0,1]\colon x(0) = x(1)\}$.

Под решением задачи (8) мы понимаем пару функций $x \in C^1_{pr}[0,1]$ и $y \in AC[0,1]$, которые удовлетворяют (8). Предположим, что

$(A6)$ существуют непрерывные частные производные $A'_u(t,u,v)$, $A'_v(t,u,v)$ и кроме того, $A'_v(t,u,v) > 0$ для всех (t,u,v);

$(A7)$ существует функция $\alpha \in C_+[0,1]$ такая, что для $u, v, w \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in [0,1]$ из $(1-\lambda)v + \lambda A(t,u,v) = w$ вытекает, что $|v| \leq \alpha(t)(1 + |w| + |u|)$ для всех $t \in [0,1]$;

$(A8)$ найдется $c > 0$ такое, что $|B(t,u,v)| \leq c(1 + |u| + |v|)$, для всех $u, v \in \mathbb{R}$ и $t \in [0,1]$;

$(A9)$ C является верхним Каратеодори мультиотображением;

$(A10)$ существует $d > 0$ такое, что $\|C(t,u,v)\| \leq d(1+|u|+|v|)$, для всех $u, v \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,1]$.

Определение 11. *Непрерывно дифференцируемая функция $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для задачи* (8)*, если существует $N > 0$ такое, что для любой функции $x \in C^1_{pr}[0,1]$, из $\|x\|_2 \geq N$,*

следует, что

$$\int_0^1 A(t, x(t), x'(t))V'(x(t))\,dt \le 0;$$

$$\int_0^1 B(t, x(t), y(t))V'(x(t))\,dt > 0$$

для всех $y \in AC[0,1]$ *таких, что пара* (x, y) *удовлетворяет* (8).

Из Определения 11 следует, что если V является направляющей функцией для задачи (8), то $V'(a) \neq 0$ при $|a| \ge r \ge N$. Отсюда, топологическая степень $deg(V', [-r, r])$ корректно определена и не зависит от выбора $r \ge N$. Это число называется индексом направляющей функцией и обозначется через $Ind\,V$.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* $(A6) - (A10)$. *Если существует направляющая функция* V *для задачи* (8) *такая, что* $Ind\,V \neq 0$, *то задача* (8) *имеет решение.*

В последнем параграфе рассматривается задача о глобальной бифуркации семейства периодических траекторий следующей задачи управления:

$$\begin{cases} A\big(t, x(t), x'(t)\big) = B\big(t, x(t), y(t), \mu\big), \text{ для всех } t \in [0,1], \\ y'(t) \in C\big(t, x(t), y(t)\big), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{9}$$

где $A\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $B\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывные отображения; $C\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ - мультиотображение; $\mu, y_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть отображение A и мультиотображение C удовлетворяют условиям $(A6)$ и $(A9) - (A10)$, соответственно. Дополнительно предположим, что

$(A11)$ $A(t, 0, 0) = B(t, 0, v, \mu)$ для всех $(t, v, \mu) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{S}$ - множество всех нетривиальных решений задачи (9).

Определение 12. *Непрерывно дифференцируемая функция* $V\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *называется локальной интегральной направляющей функцией для задачи* (9) *в точке* $(0, \mu_0)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$, *если существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и непрерывная функция* $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такие, что для каждого* μ, $0 < |\mu - \mu_0| \le \varepsilon_0$ *и для любой функции*

$x \in C^1_{pr}[0,1]$, *из* $0 < \|x\|_2 \le \delta_\mu$ *следует, что*

$$\int_0^1 A\big(t, x(t), x'(t)\big) V_u'\big(x(t), \mu\big)\, dt \le 0,$$
$$\int_0^1 B\big(t, x(t), y(t), \mu\big) V_u'\big(x(t), \mu)\big)\, dt > 0$$

для всех $y \in AC[0,1]$ *таких, что тройка* (x, y, μ) *удовлетворяет* (9).

Из вышеуказанного определения следует, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и

$$0 < r < \min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon}, \delta_{\mu_0+\varepsilon}\},$$

векторное поле $V^\sharp\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$V^\sharp(u, \mu) = \big\{-V_u'(u, \mu), \varepsilon^2 - (\mu - \mu_0)^2\big\}$$

не имеет нулей на $\partial \overline{U}^0_{r,\varepsilon}$, где

$$\overline{U}^0_{r,\varepsilon} = \big\{(u, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon u^2 + (\mu - \mu_0)^2 \le r^2 + \varepsilon^2\big\}, \quad \text{и} \quad \delta_\mu = \delta(\mu).$$

Поэтому, топологическая степень $deg(V^\sharp, \overline{U}^0_{r,\varepsilon})$ корректно определена и не зависит от выбора $(\varepsilon, r) \in (0, \varepsilon_0) \times \big(0,\ \min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon}, \delta_{\mu_0+\varepsilon}\}\big)$. Это число обозначается символом $ind\, V^\sharp$.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия* $(A6)$, $(A9) - (A11)$. *Предположим, что существует локальная направляющая функция* V *для задачи* (9) *в точке* $(0, \mu_0)$ *такая , что* $ind\, V^\sharp \ne 0$. *Тогда* $(0, \mu_0)$ *является точкой бифуркации для задачи* (9) *и, кроме того, существует связное подмножество* $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0, \mu_0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $(0, \mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_* \ne \mu_0$.

Четвертая глава состоит их двух параграфа. **В первом параграфе** рассматривается метод ограничивающих функций для дифференциальных включений с нелокальным условием в конечномерном пространстве типа

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{10}$$

где $F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^2-ростом; $M\colon C([0,T]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ - линейное непрерывное отображение такое, что $\|M\| := \sup\{|Mx|\colon \|x\|_C = 1\} \le 1$.

Класс краевых задач с таким оператором M достаточно широк. В частности, он содержит следующие известные задачи:

(i) $Mx = 0$ (задача Коши);

(ii) $Mx = \pm x(T)$ (периодическая и анти-периодическая задачи);

(iii) $Mx = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ (задача о среднем значении);

(iv) $Mx = \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i x(t_i)$ при $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $\sum_{i=1}^{k_0} |\alpha_i| \leq 1$, где $0 < t_1 < \cdots < t_{k_0} \leq T$ (многоточечная краевая задача).

Под решением задачи (10) мы понимаем функцию $x \in W^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n)$ такую, что $x(0) = Mx$ и $x^{'}(t) = f(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$, для некоторой функции $f \in \mathcal{P}_F(x)$.

Определение 13. *Локально липщицева функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ограничивающей функцией для задачи* (10)*, если существуют $R_0 > r_0 > 0$ такие, что*

$(V1)$ $V(w) = 0$ *при* $|w| = R_0$ *и* $V(w) < 0$ *при* $r_0 < |w| < R_0$*;*

$(V2)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$ *выполнено отношение*

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hy\big) - V(w)}{h} < 0$$

для всех $y \in F(t,w)$ *и* $r_0 < |w| < R_0$.

в случае $V \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, условие $(V2)$ может быть переписано в виде

$(V2)'$ для п.в. $t \in [0,T]$ и $r_0 < |w| < R_0$: $\big\langle \nabla V(w), y\big\rangle < 0$ для всех $y \in F(t,w)$.

Теорема 11. *Если существует ограничивающая функция V для задачи* (10)*, то задача* (10) *имеет решение со значениями в $B^n(0,R_0)$.*

В качестве примера рассматривается дифференциальное уравнение с дополнением вида

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big) & \text{для п.в. } t \in [0,T], \\ K \ni u(t) \perp G(t,x(t)) + F(u(t)) \in K^* & \text{для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{11}$$

где $K \subset \mathbb{R}^m$ - выпуклый замкнутый конус; K^* - сопряженный конус; $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $G\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - непрерывные отображения; $M\colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ - линейный ограниченный оператор такой, что $\|M\| \leq 1$.

Предположим, что выполнены условие $(A5)$ и следующие условия:

$(A12)$ для $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ множество $f(t,z,\Omega) := \{f(t,z,y)\colon y \in \Omega\}$ выпукло для любого выпуклого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^m$;

$(A13)$ для любого ограниченного множества $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ существует $\alpha_Z > 0$ такое, что $|f(t,z,w)| \leq \alpha_Z$ для $(t,z,w) \in [0,T] \times Z$;

$(A14)$ для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует $\gamma_\Omega > 0$ такое, что $|G(t,z)| \leq \gamma_\Omega$ для $(t,z) \in [0,T] \times \Omega$.

Определим мультиотображения $U\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to Cv(K)$,

$$U(t,z) = SOL(K, G(t,z) + F),$$

и $\Phi\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(t,z) = \big\{f(t,z,w)\colon w \in U(t,z)\big\}$.
Тогда мы можем заменить задачу (11) следующей эквивалентной задачей

$$\begin{cases} x'(t) \in \Phi(t,x(t)) \ \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = Mx. \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 12. *Пусть выполнены условия* $(A5)$ *и* $(A12) - (A14)$. *Если существует ограничивающая функция* V *для задачи* (12), *то задача* (11) *имеет решение.*

Во втором параграфе метод ограничивающих функций объединяется с методом аппроксимационной разрешимости для изучения разрешимости дифференциальных уравнений и включений в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Пусть H - сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, компактно вложенное в банахово пространство E. Сначала, рассматривается задача

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{13}$$

где $f\colon [0,T] \times H \to H$ и $M\colon C([0,T];H) \to H$ удовлетворяют условиям:

$(f3)$ отображение f измеримо, где мера на $[0,T]\times H$ является произведением меры Лебега на $\mathbb{R}$ и меры Бореля на H;

$(f4)$ для п.в. $t\in[0,T]$ отображение $f(t,\cdot)\colon H\to H$ является $E-E$ непрерывным в смысле: для каждого $w\in H$, и $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из $w'\in B_E(w,\delta)$ следует, что $f(t,w')\in B_E\big(f(t,w),\varepsilon\big)$;

$(f5)$ для любого ограниченного множества $\Omega\subset H$ существует функция $v_\Omega\in L^1_+[0,T]$ такая, что $\|f(t,\omega)\|_H\le v_\Omega(t)$ для всех $\omega\in\Omega$ и п.в. $t\in[0,T]$;

(M) $M\colon C([0,T];H)\to H$ - линейный непрерывный оператор и $\|M\|\le 1$.

Под решением задачи (13) мы понимаем функцию $x\in W^{1,1}([0,T];H)$, удовлетворяющую (13).

Теорема 13. *Пусть выполнены условия* $(f3)-(f5)$ *и* (M). *Предположим, что существуют* $R_0>r_0>0$ *такие, что* $\big\langle w,f(t,w)\big\rangle_H<0$ *для п.в.* $t\in[0,T]$ *и всех* $w\in H$ *таких, что* $r_0<\|w\|_H<R_0$. *Тогда задача* (13) *имеет решение.*

В качестве примера рассматривается *интегро-дифференциальное уравнение*:

$$\begin{cases} u_t+a\int_\Omega u(t,\xi)d\xi=-bu(t,\xi)+f(t,u(t,\xi)),\\ u(0,\xi)=u(1,\xi),\end{cases}\tag{14}$$

для п.в. $t\in[0,1]$ и всех $\xi\in\Omega$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^k(k\ge 2)$ - открытое ограниченное множество с липщицевой границей; $a,b>0$ и $f\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

$(h1)$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial z}\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывны;

$(h2)$ существует $0<N<b$ такое, что $\left|\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\right|\le N$ для всех $(t,z)\in[0,1]\times\mathbb{R}$.

Под решением задачи (14) мы понимаем непрерывную функцию $u\colon[0,1]\times\Omega\to\mathbb{R}$, для которой частная производная $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t}$ существует и удовлетворяет (14). Кроме того, мы рассматриваем (14) как динамическую систему с функцией состояния $u(t,\xi)$.

Теорема 14. *Пусть выполнены условия* $(h1)-(h2)$. *Тогда задача* (14) *имеет решение. Кроме того, если* $f(t,0)\ne 0$ *при всех* $t\in[0,1]$, *то решение является ненулевым.*

Другим примером служит следующая задача о среднем значении для интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{cases} u_t(t,s) + au(t,s) = \displaystyle\int_0^1 k(s,\xi)\big(u(t,\xi)+b\big)\,d\xi, \\ u(0,s) = \int_0^1 u(t,s)\,dt, \end{cases} \tag{15}$$

для п.в. $t \in [0,1]$ и всех $s \in [0,1]$, где $k(\cdot,\cdot) \in C^1\big([0,1]\times[0,1];\mathbb{R}\big)$; $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$. Пусть $k = \max_{s,\xi\in[0,1]} |k(s,\xi)|$ и $k' = \max_{s,\xi\in[0,1]} \left|\frac{\partial k(s,\xi)}{\partial s}\right|$.

Теорема 15. *Если $a > k + \frac{k'}{2}$, то задача* (15) *имеет решение.*

Рассматривается также система интегро-дифференциальных уравнений типа

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t} + a\int_\Omega u(t,\xi)d\xi + bu(t,\xi) = f_1\big(t,u(t,\xi),v(t,\xi)\big), \\ \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} + cv(t,\xi) = f_2\big(t,u(t,\xi),v(t,\xi)\big), \\ u(0,\xi) = \sum_1^m \alpha_j u(t_j,\xi), \\ v(0,\xi) = \int_0^1 g(t)v(t,\xi)\,dt, \end{cases} \tag{16}$$

для п.в. $t \in [0,1]$ и для всех $\xi \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ - открытое ограниченное множество с липщицевой границей; $a,b,c > 0$; $\alpha_j \in \mathbb{R}$; $0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1$; $f_i\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ - непрерывные отображения и $g \in L^1[0,1]$.

Под решением задачи (16) мы понимаем пару (u,v), состоящую из непрерывных функций $u,v\colon [0,1]\times\Omega \to \mathbb{R}$, для которых частные производные $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t}$ и $\frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}$ существуют и удовлетворяют (16).

Предположим, что:

$(h1)'$ частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i,j = 1,2)$ непрерывны;

$(h2)'$ существуют числа $N_{ij} > 0$ $(i,j = 1,2)$ такие, что

$$N_{11} + \frac{N_{12}+N_{21}}{2} < b, \quad N_{22} + \frac{N_{12}+N_{21}}{2} < c \ \text{ и } \ \Big|\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t,z_1,z_2)\Big| \leq N_{ij},$$

для всех $(t,z_1,z_2) \in [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$;

$(h3)'$ $\big(\sum_{j=1}^m |\alpha_j|\big)^2 + \|g\|_1^2 \leq 1$, где $\|g\|_1 = \int_0^1 |g(t)|\,dt$.

Теорема 16. *Пусть выполнены условия $(h1)'-(h3)'$. Тогда задача* (16) *имеет решение.*

Устанавливаются также единственность решения задачи (13) и существование ограниченного решения задачи (13) при $t \in [0, \infty)$. Кроме того, построен метод негладких ограничивающих функций для изучения задачи (13).

Определение 14. *Локально липщицева функция $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется $(K, \varepsilon)-$ограничивающей функцией для задачи* (13), *если существуют $\varepsilon > 0$ и открытое ограниченное выпуклое множество $K \subset H$ такое, что*

$(V3)$ $V_{|\partial K} = 0$ *и* $V(w) \leq 0$ *для всех* $w \in O_\varepsilon^K(\partial K) = K \cap O_\varepsilon(\partial K)$, *где* $O_\varepsilon(\partial K)$ *- $\varepsilon-$окрестность множества ∂K в H;*

$(V4)$ *для п.в.* $t \in [0, T]$ *соотношение*

$$\liminf_{n\to\infty} sign \left(\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hP_n f(t,w)\big) - V(w)}{h} \right) = -1$$

выполнено для всех $w \in O_\varepsilon^{K_n}(\partial K_n)$, *где* $K_n = K \cap H_n$.

Условие $(V4)$ означает, что существует подпоследовательность пространств $\{H_{n_m}\}$ такая, что для любого n_m и всех $w \in O_\varepsilon^{K_{nm}}(\partial K_{n_m})$ выполнено

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hP_{n_m} f(t,w)\big) - V(w)}{h} < 0. \tag{17}$$

Отметим, что если $V \in C^1(H, \mathbb{R})$, т.е. V является непрерывно диффиренцируемой функцией, то для любого $w \in H$ производная Фреше $\nabla V(w)$ функции V в w может быть отождествлена с элементом из H. Отсюда, для $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$ и $w \in O_\varepsilon^{K_n}(\partial K_n)$:

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hP_n f(t,w)\big) - V(w)}{h} = \big\langle \nabla V(w), P_n f(t,w) \big\rangle_H.$$

Следовательно, в случае $V \in C^1(H, \mathbb{R})$, условие $(V4)$ эквивалентно следующему условию:

$(V4)'$ существует подпоследовательность пространств $\{H_{n_m}\}$ такая, что

$$\big\langle \nabla V(w), P_{n_m} f(t,w) \big\rangle_H < 0 \text{ для п.в. } t \in [0, T],$$

и для всех $w \in O_\varepsilon^{K_{nm}}(\partial K_{n_m})$.

Нетрудно проверить, что условие $(V4)'$ выполнено если

$(V4)''$ $\big\langle \nabla V(w), f(t,w) \big\rangle_H < 0$ для п.в. $t \in [0, T]$ и любого $w \in O_\varepsilon^K(\partial K)$.

Теорема 17. *Пусть выполнены условия* $(f1)-(f3)$. *Предположим, что существует* $(K,\varepsilon)-$*ограничивающая функция* V *для задачи* (13) *такая, что множество* K *содержит* 0. *Тогда задача* (13) *имеет решение со значениями в* $\overline{K}$ *при выполнении хотя бы одного из следующих условий:*

(*i*) $M(Q)\subseteq\overline{K}$, *где* $Q=C([0,T];\overline{K})$;

(*ii*) $\overline{K}$ *является шаром* $B_H(0,r)$ *(для некоторого* $r>0$*) и* $\|M\|\leq 1$.

Обозначаем через $Cbv(H)$ совокупность всех непустых замкнутых, ограниченных и выпуклых подмножество пространства H. Символ H^ω обозначает пространство H со слабой топологией. В конце второго параграфа четвертой главы, метод ограничивающих функций применяется для изучения дифференциальных включений с нелокальным начальным условием вида

$$\begin{cases} x'(t)\in F(t,x(t)) \text{ для п.в. } t\in[0,T],\\ x(0)=Mx, \end{cases} \tag{18}$$

где $M\colon C([0,T];H)\to H$ и $F\colon[0,T]\times H\to Cbv(H)$ удовлетворяют (M) и следующим условиям:

$(\mathcal{F}1)$ для каждого $w\in H$ мультифункция $F(\cdot,w)\colon[0,T]\to Cbv(H)$ измерима;

$(\mathcal{F}2)$ для п.в. $t\in[0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon H\to Cbv(H)$ является замкнутым относительно топологии $H\times H^\omega$;

$(\mathcal{F}3)$ для п.в. $t\in[0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon H\to Cbv(H)$ является $E-E$ полунепрерывным сверху в смысле: для каждого $w\in H$ и $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из $w'\in B_E(w,\delta)$ следует, что

$$F(t,w')\subset F(t,w)+B_E(0,\varepsilon);$$

$(\mathcal{F}4)$ для любого ограниченного множества $\Omega\subset H$ существует функция $v_\Omega\in L^1_+[0,T]$ такая, что $\|F(t,w)\|_H\leq v_\Omega(t)$ для всех $w\in\Omega$ и п.в. $t\in[0,T]$.

Теорема 18. *Пусть выполнены условия* $(\mathcal{F}1)-(\mathcal{F}4)$ *и* (M). *Предположим, что существуют числа* $R_0>r_0>0$ *такие, что для п.в.* $t\in[0,T]$ *и для любого* $w\in H\colon r_0<\|w\|_H<R_0$ *выполнено отношение*

$$\langle w,z\rangle_H\leq 0,$$

для хотя бы одного элемента $z \in F(t,w)$. Тогда задача (18) *имеет решение со значениями в $B_H(0,R_0)$.*

Последняя глава посвящена приложению метода ограничивающих функций к исследованию дифференциальных включений второго порядка вида:

$$\begin{cases} u'' \in Q(u), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где $Q\colon C[0,1] \to C(L^2[0,1])$ - мультиотображение. Пусть $j\colon L^2[0,1] \to C[0,1]$,

$$(jf)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \text{где}$$

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1) \ \ if \ \ 0 \le t \le s, \\ s(t-1) \ \ if \ \ s \le t \le 1. \end{cases}$$

Предположим, что

$(Q1)$ композиция $j \circ Q$ принадлежит классу $CJ\big(C[0,1]; C[0,1]\big)$;

$(Q2)$ существуют $p, q > 0$ такие, что для всех $u \in C[0,1]$ выполнено отношение $\|Q(u)\|_2 := \sup\{\|f\|_2 \colon f \in Q(u)\} \le q(1 + \|u\|_2^p)$.

Под решением задачи (19) мы понимаем функцию $u \in W^{2,2}[0,1]$ такую, что $u(0) = u(1) = 0$ и $u''(t) = f(t)$ для п.в. $t \in [0,1]$, для некоторой функции $f \in Q(u)$.

Теорема 19. *Пусть выполнены условия $(Q1) - (Q2)$. Предположим, что существует $N > 0$ такое, что для любой функции $u \in C[0,1]$ из $\|u\|_2 > N$ следует, что $\langle u, f\rangle_{L^2} = \int_0^1 u(s)f(s)ds > 0$ для всех $f \in Q(u)$. Тогда задача (19) имеет решение.*

Введем теперь понятие интегральной ограничивающей функции для задачи (19). Отметим, что любая непрерывная функция $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ порождает непрерывное отображение $V^\sharp\colon C[0,1] \to L^2[0,1]$, $V^\sharp(u)(t) = V(u(t))$.

Определение 15. *Непрерывная функция $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется интегральной ограничивающей функцией для задачи (19), если*

$(i1)$ *существуют $\alpha \ge 0$ и $\beta > 0$ такие, что $|V(t)| \le \alpha + \beta|t|$, $\forall t \in \mathbb{R}$;*

($i2$) *существует* $N > 0$ *такое, что для любой функции* $u \in C[0,1]$ *из* $\|u\|_2 > N$, *следует, что* $\left\langle V^\sharp(u), f \right\rangle_{L^2} > 0$ *для всех* $f \in Q(u)$,

($i3$) *для любой функции* $u \in W^{2,2}[0,1]$, *из* $u(0) = u(1) = 0$ *и* $\|u\|_2 > N$ *следует, что* $\left\langle u'', V^\sharp(u) \right\rangle_{L^2} \leq 0$, *где* N *- константа в* $(V2)$.

Теорема 20. *Пусть выполнены условия* $(Q1) - (Q2)$. *Предположим, что существует интегральная ограничивающая функция для задачи (19). Тогда задача (19) имеет решение.*

Указывается ряд применений Теорем 19 и 20. Установлены достаточные условия для разрешения задачи (19) в бесконечномерном гильбертовом пространстве. □

Публикации автора по теме диссертации

Монография

1. Nguyen Van Loi. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis /Valeri Obukhovskii, Pietro Zecca, Nguyen Van Loi, Sergei Kornev. -Berlin, Heidenberg: Springer-Verlag. -2013. -177p.

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

2. Nguyen Van Loi. On two-parameter global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities / Nguyen Van Loi // Nonlinear Analysis: TMA. - 2015. - V.122. -P.83-99.

3. Nguyen Van Loi. On an A-bifurcation theorem with application to a system of integro-differential equations / Nguyen Van Loi, Zhenhai Liu, Valeri Obukhovskii // Fixed Point Theory. -2015. -V.16. -No.1. -P.127-142.

4. Nguyen Van Loi. A multiparameter global bifurcation theorem with application to feedback control systems / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Jen-Chih Yao // Fixed Point Theory. -2015. -V.16. -No.2. -P.353-370.

5. Nguyen Van Loi. Nonlocal problems for differential inclusions in Hilbert spaces / I. Benedetti, N.V. Loi, L. Malaguti // Set-Valued Var. Anal. -2014. -V.22. -No.3. -P.639-656.

6. Nguyen Van Loi. A Bifurcation of Solutions of Nonlinear Fredholm Inclusions Involving CJ-multimaps with Applications to Feedback Control Systems / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Jen-Chih Yao // Set-Valued Var. Anal. -2013. -V.21. -P.247-269.

7. Nguyen Van Loi. On the Global Bifurcation of Periodic Solutions of Differential Inclusions in Hilbert Spaces / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Pietro Zecca // Nonlinear. Anal.: TMA. -2013. -V.76. - P.80-92.

8. Nguyen Van Loi. On Controllability of Duffing Equation / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // Appl. Math. Comp. -2013. -V.219. -P.10468-10474.

9. Nguyen Van Loi. Existence and Global Bifurcation of Periodic Solutions to Differential Variational Inequalities / Zhenhai Liu, Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // Int. J. Bifur. Chaos. -2013. -V.23. -No.7. 1350125.

10. Nguyen Van Loi. On nonlocal differential equations in Hilbert spaces / Nguyen Van Loi // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. –2013. – Т.18, вып.5. – С.2578-2580.

11. Nguyen Van Loi. On the Existence of Solutions for a Class of Second-order Differential Inclusions and Applications / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // J. Math. Anal. Appl. -2012. -V.385. -P.517-533.

12. Nguyen Van Loi. Non-smooth Guiding Functions and Periodic Solutions of Functional Differential Inclusions with Infinite Delay in Hilbert Spaces / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Pietro Zecca // Fixed Point Theory. - 2012. -V.13. -No.2. -P.565-582.

13. Nguyen Van Loi. Guiding Functions for Generalized Periodic Problems and Applications / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // Appl. Math. Comp. -2012. -V.218. -P.11719-11726.

14. Nguyen Van Loi. Guiding Functions and Global Bifurcations of Periodic Solutions of Functional Differential Inclusions with Infinite Delay / Nguyen

Van Loi // Topol. Meth. Nonl. Anal. -2012. -V.40. -P.359-370.

15. Nguyen Van Loi. Existence and Global Bifurcation of Solutions for a Class of Operator-Differential Inclusions / Valeri Obukhovskii, Nguyen Van Loi, Sergei Kornev // Differ. Equ. Dyn. Syst. -2012. - V.20. -No.3. -P.285-300.

16. Нгуен Ван Лой. Метод направляющих функций для дифференциальных включений в гильбертовом пространстве / Нгуен Ван Лой // Дифференциальные уравнения. –2010. –Т.46. –№10. – С.1433-1443.

17. Nguyen Van Loi. On the global bifurcation for solutions of linear fredholm inclusions with convex-valued perturbations / Nguyen Van Loi and Valeri Obukhovskii // Fixed Point Theory. –2009. –V.10. –No.2. –P.289-303.

18. Нгуен Ван Лой. О применении метода направляющих функций к задаче о бифуркации периодических решений дифференциальных включений / Нгуен Ван Лой, В.В. Обуховский // Вестник РУДН. Сер. Математика, Информатика, Физика. –2009. –№.4. –С.14-24.

Прочие публикации

19. Nguyen Van Loi. On two-parameter global bifurcation of periodic solutions for differential variational inequalities / Nguyen Van Loi // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Тезисов докладов. -Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". -2015. -вып.3. -С.6-7.

20. Nguyen Van Loi. Guiding function method for differential variational inequalities: The global bifurcation problem of periodic solutions / Nguyen Van Loi // Workshop on Equilibrium and Fixed Point Problems: Theory and Algorithm. Ha Noi. VIASM. -2014. -P.19.

21. Nguyen Van Loi. Bounding function method and its applications / Nguyen Van Loi // International Workshop on Nonlinear and Variational Analysis. Kaohsiung Medical University. Kaohsiung. Taiwan. -2014.

22. Nguyen Van Loi. Global behavior of solutions to a class of feedback control systems / Nguyen Van Loi // Research and Comm. in Math. and Math. Sci. -2013. -V.2. -No.2. -P.77-93.

23. Nguyen Van Loi. On periodic oscillations for a class of feedback control systems in Hilbert spaces / Nguyen Van Loi // Discussiones Mathematicae: Differ. Inclusion, Control, Opt. -2013. -V.13. -P.205-219.

24. Нгуен Ван Лой. Метод направляющих функций в гильбертовом пространстве / Нгуен Ван Лой // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2010. Тезисы докладов. – Воронеж: ВорГУ. –2010. –С.108.

25. Нгуен Ван Лой. Интегральные включения типа Гаммерштейна в банаховом пространстве / Нгуен Ван Лой // Дифференциальные уравнения и топология. Тезисы докладов. – Москва. –2009. –С.155.

26. Нгуен Ван Лой. Глобальная бифуркация положительных решений уравнений, содержащих линейные фредгольмовы операторы и разрывные нелинейности / Нгуен Ван Лой // Современные проблемы прикладной математики и математического моделировния. Материалы III международной научной конференции. – Часть 2. – Воронеж: “Научная книга”.– 2009. –С.155-156.

27. Нгуен Ван Лой. О применении метода интегральных направляющих функций к задаче о бифуркации периодических решений дифференциальных включений / Нгуен Ван Лой // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. –2009. –Т.14. вып.4. –С.738-740.

28. Нгуен Ван Лой. О существовании решений для некоторых классов интегральных включений типа Гаммерштейна / Нгуен Ван Лой // Вестник ВГУ. сер. физ.-мат. -2006. -№.2. -С.169-173.