

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Князева Дарья Валентиновна

**Аналитическая модель для описания  
надпороговой ионизации атомов в сильном  
лазерном поле**

01.04.02 – Теоретическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доц.

Фролов Михаил Владимирович

Воронеж – 2015

# Содержание

<b>Список сокращений и обозначений</b> . . . . .	5
<b>Введение</b> . . . . .	7
<b>Обзор литературы</b> . . . . .	13
<b>Глава 1. Основные теоретические методы для непертурбативного описания надпороговой ионизации атомных систем в сильном лазерном поле</b> . . . . .	21
1.1. Метод квазистационарных квазиэнергетических состояний . . . . .	21
1.1.1. Общий формализм . . . . .	21
1.1.2. Амплитуда многофотонной ионизации в формализме ККЭС . . . . .	27
1.2. Применение метода ККЭС к описанию НПИ систем в коротком лазерном импульсе . . . . .	30
1.3. Метод эффективного радиуса . . . . .	33
1.4. Выводы к первой главе . . . . .	37
<b>Глава 2. Надпороговая ионизация атомных систем в поле сильного лазерного импульса конечной длительности</b> . . . . .	38
2.1. Общая формулировка задачи . . . . .	38
2.2. Приближение МЭР для короткого лазерного импульса. . . . .	40
2.2.1. Квазиклассическое приближение. . . . .	40
2.2.2. Квазиклассический результат для функции $f_{\varepsilon}^{(l)}(t)$ . . . . .	42
2.2.3. Амплитуда отрыва в периодическом поле . . . . .	44
2.2.4. Квазиклассический результат для $\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n)$ . . . . .	45
2.2.5. Вероятность отрыва в единицу времени в периодическом поле . . . . .	49

2.3.	Дифференциальная вероятность НПО для случая короткого импульса и обобщение для нейтральных атомных систем . . . . .	51
2.4.	Общие свойства $\Gamma_j(\mathbf{p})$ . . . . .	52
2.5.	Численные результаты . . . . .	55
2.5.1.	Сравнение с результатами для временного уравнения Шредингера . . . . .	55
2.5.2.	Особенности в спектрах НПИ атомов в поле короткого лазерного импульса . . . . .	59
2.5.3.	Возникновение нескольких плато в спектрах НПИ . . . . .	60
2.5.4.	Право–левая асимметрия в спектрах НПИ в коротком лазерном импульсе . . . . .	62
2.5.5.	Интерференционные явления в спектрах НПИ и их зависимость от числа $N$ оптических периодов в коротком лазерном импульсе . . . . .	64
2.5.6.	Вклад электронных траекторий с многократными возвращениями в спектр НПИ в коротком импульсе . . . . .	68
2.5.7.	Сравнение с количественной теорией перерассеяния . . . . .	72
2.6.	Выводы ко второй главе . . . . .	76
<b>Глава 3.</b>	<b>Надпороговая ионизация атомных систем в сильном двух-</b>	
	<b>частотном лазерном поле . . . . .</b>	<b>78</b>
3.1.	Анализ классических траекторий НПИ электронов в двухчастотном лазерном поле . . . . .	80
3.2.	Численные результаты для НПИ в двухчастотном лазерном поле с $\beta \sim 1$ . . . . .	86
3.3.	Численные результаты для НПИ в двухчастотном лазерном поле с $\beta \gg 1$ . . . . .	90
3.4.	Выводы к третьей главе . . . . .	94
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>95</b>

Приложение А. Функции Грина электрона в электрическом поле	
$F_{\tau}(t)$ . . . . .	97
Приложение Б. Квазиклассическое приближение для амплитуды НПИ: учет эффектов перерасеяния . . . . .	100
Литература . . . . .	104

## Список сокращений и обозначений

НПИ	—	надпороговая ионизация
НПО	—	надпороговый отрыв
ГВГ	—	генерация высших гармоник
КЭС	—	квазиэнергетическое состояние
ККЭС	—	квазистационарное квазиэнергетическое состояние
МЭР	—	метод эффективного радиуса
ОВ	—	однократно возвратные (траектории)
МВ	—	многократно возвратные (траектории)
КТП	—	количественная теория перерассеяния
ЛП	—	лазерный параметр
$e$	—	элементарный заряд ( $e > 0$ )
$m$	—	масса электрона
$c$	—	скорость света
$a = \frac{\hbar^2}{me^2}$	—	боровский радиус ( $a \approx 5.29 \times 10^{-9}$ см)
$E_{\text{at}} = \frac{e^2}{a}$	—	атомная единица энергии ( $E_{\text{at}} \approx 27.21$ эВ)
$F_{\text{at}} = \frac{e}{a^2}$	—	атомная единица напряженности электрического поля ( $F_{\text{at}} \approx 5.14 \times 10^9$ В/см)
$I_{\text{at}} = \frac{cF_{\text{at}}^2}{8\pi}$	—	атомная единица интенсивности ( $I_{\text{at}} \approx 3.51 \times 10^{16}$ Вт/см <sup>2</sup> )
$E_0 = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$	—	энергия связанного состояния
$C_{\kappa,l}$	—	безразмерный асимптотический коэффициент
$a_l$	—	длина рассеяния
$r_l$	—	эффективный радиус
$\varepsilon$	—	комплексная квазиэнергия
$\mathbf{A}(t) = \mathbf{e}_z A(t)$	—	векторный потенциал короткого лазерного импульса

	—	с линейной поляризацией
$\mathbf{A}_\tau(t) = \mathbf{e}_z A_\tau(t)$	—	векторный потенциал произвольного периодического поля с периодом $\mathcal{T}$
$\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}_z F(t)$	—	вектор напряженности короткого лазерного импульса с линейной поляризацией
$\mathbf{F}_\tau(t) = \mathbf{e}_z F_\tau(t)$	—	вектор напряженности произвольного периодического поля с периодом $\mathcal{T}$
$\omega_\tau = \frac{2\pi}{\mathcal{T}}$	—	частота произвольного периодического поля с периодом $\mathcal{T}$
$\omega$	—	несущая частота короткого лазерного импульса
$u_p$	—	средняя энергия колебаний свободного электрона в лазерном поле
$G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$	—	запаздывающая функция Грина электрона в переменном электрическом поле (см. (A.6))
$A_n$	—	амплитуда $n$ -фотонной ионизации (фотоотрыва)
$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \frac{d^2 P}{dE_p d\Omega_{\mathbf{p}}}$	—	дифференциальная вероятность ионизации/фотоотрыва электрона в интервал энергий $(E_p, E_p + dE_p)$ и интервал телесных углов $(\Omega_{\mathbf{p}}, \Omega_{\mathbf{p}} + d\Omega_{\mathbf{p}})$
$\Gamma(\mathbf{p}_n)$	—	вероятность вылета фотоэлектрона с импульсом $\mathbf{p}_n$ (в единицу времени)
$\sigma(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$	—	дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона на атомном остове, $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f$ — начальный и конечный импульсы электрона: $ \mathbf{p}_i ^2 =  \mathbf{p}_f ^2$
$\beta$	—	отношение напряженностей компонент двухчастотного поля

# Введение

## **Актуальность работы.**

Нелинейные явления во взаимодействии сильного лазерного поля с атомами и молекулами представляют несомненный фундаментальный и практический интерес для атомной и лазерной физики. В частности, на основе явлений в сильном лазерном поле разработан ряд экспериментальных методик для создания компактных источников когерентного рентгеновского излучения [1], источников сверхкоротких импульсов [2], развиты новые методы спектроскопии [3–6], основанные на анализе спектров генерации высших гармоник и нелинейной ионизации, а также методы детектирования и визуализации сверхбыстрых процессов на временном масштабе в десятки аттосекунд [7–10].

В отличие от слабого светового поля, для которого с подавляющей вероятностью процесс ионизации атомной или молекулярной системы происходит при поглощении минимального числа фотонов, необходимых для ионизации в соответствии с законом сохранения энергии, в сильном лазерном поле со сравнимой вероятностью наблюдается и процесс ионизации с поглощением большего (в десятки и более раз!) числа фотонов. Такой процесс, называемый надпороговой ионизацией (НПИ), характеризуется спектром НПИ, который представляет зависимость выхода фотоэлектронов от их энергии или числа поглощенных фотонов. Как показывают теоретические оценки, экспериментально наблюдаемые эффекты в спектрах НПИ в сильном лазерном поле (такие как эффекты плато, интерференционные явления и т.д.) не могут быть описаны в рамках теории возмущений по взаимодействию атома с полем. Поэтому при теоретическом описании спектра НПИ необходимо точно учитывать взаимодействие оптического электрона атома как с лазерным полем, так и с атомным потенциалом, что для реальных атомов представляет весьма нетривиальную задачу, которая может быть решена лишь численными методами. Кроме того, спектр НПИ определяется как атомными, так и лазерными параметрами, поэтому для качественного и

количественного описания НПИ актуальным является развитие аналитических моделей нелинейной ионизации.

В настоящей диссертации для анализа НПИ в коротком лазерном импульсе и двухчастотном поле используется метод эффективного радиуса (МЭР), позволяющий непертурбативно описать взаимодействие оптического электрона как с сильным лазерным полем, так и с атомным потенциалом. В частности, в рамках данной аналитической модели впервые проанализированы интерференционные явления в спектрах НПИ и возникновение нескольких платообразных структур в спектрах НПИ. Особое внимание в диссертации уделяется исследованию факторизации вероятности НПИ в виде произведения лазерного и атомного параметров, поскольку такая факторизация позволяет извлечь из спектров НПИ сечение упругого рассеяния фотоэлектрона на атомном остове.

Значительный интерес представляет аналитическое описание процесса НПИ в двухчастотном поле со стабилизированной относительной фазой между компонентами поля. Экспериментальные работы разных лет указывают на такие особенности спектра НПИ в двухчастотном поле, как асимметрия углового распределения электронов, возникновение нескольких платообразных структур в высокоэнергетической области спектра, а также фазовая зависимость выхода фотоэлектронов [11–14]. Предложенная в диссертации аналитическая модель дает возможность качественно описать указанные особенности спектра в случае двухчастотного лазерного поля, а также ряд новых физических эффектов, отсутствующих в случае монохроматического поля.

### **Цель диссертационной работы.**

Цель настоящей диссертационной работы — построение аналитической модели для описания особенностей высокоэнергетической части спектра НПИ в коротком лазерном импульсе и двухчастотном лазерном поле в рамках метода эффективного радиуса, а также установление границ применимости факторизации вероятности НПИ на лазерные и атомные параметры.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:



1. Построена аналитическая модель надпорогового отрыва (НПО) слабосвязанного электрона и получены замкнутые аналитические выражения для вероятности НПО в произвольном периодическом поле.
2. Предложен метод расчета вероятности НПИ/НПО в коротком лазерном импульсе, основанный на известном выражении для вероятности НПИ/НПО в произвольном периодическом поле. На основе этого подхода получены аналитические выражения для вероятности НПО в коротком лазерном импульсе и выполнено их феноменологическое обобщение на случай НПИ.
3. В рамках предложенной теоретической модели исследованы основные особенности высокоэнергетического спектра НПИ в коротком лазерном импульсе и их зависимость от параметров лазерного поля и поляризационного состояния атомной мишени. Исследован вклад траекторий с однократным (ОВ траектории) и многократным (МВ траектории) возвращением электрона к атомному остову в формирование высокоэнергетического спектра НПИ под действием короткого лазерного импульса.
4. Исследована зависимость надпороговой ионизации атомных систем от относительной фазы между компонентами двухчастотного лазерного поля при различных значениях отношения  $\beta$  между напряженностями компонент поля.

### **Научная новизна.**

Настоящая диссертация направлена на решение современных проблем взаимодействия сильного лазерного излучения с атомными и молекулярными системами и посвящена исследованию высокоэнергетической части спектров НПИ в коротком лазерном импульсе и двухчастотном лазерном поле. На основе метода эффективного радиуса в диссертации впервые получены замкнутые аналитические выражения для амплитуды и вероятности НПО в коротком лазерном импульсе; предложено феноменологическое обобщение результатов, полученных в

рамках теоретической модели, на реальные атомные системы; установлена точность аналитических выражений для вероятности НПИ в коротком лазерном импульсе. На основе развитой теории проанализированы основные особенности высокоэнергетической части спектра НПИ в коротком лазерном импульсе: возникновение нескольких платообразных структур в спектрах НПИ; асимметрия выхода фотоэлектронов в левую и правую полусферы относительно направления вектора поляризации лазерного поля; возникновение мелкомасштабных и крупномасштабных интерференционных структур в области высокоэнергетического плато НПИ. На основе полученных аналитических соотношений впервые установлены границы применимости факторизации выхода высокоэнергетических электронов на лазерные и атомные параметры для импульса конечной длительности. Впервые обнаружено возникновение провалообразных структур в фазовых зависимостях спектров НПИ в двухчастотном поле при  $\beta \sim 1$ , которые обусловлены подавлением парциальных вероятностей НПИ, ассоциированных с ОВ траекториями. Установлено, что в случае подавления ОВ траекторий форма высокоэнергетического спектра определяется МВ траекториями. Впервые обнаружены и описаны интерференционные структуры, возникающие в фазовых зависимостях спектров НПИ в двухчастотном поле при  $\beta \gg 1$ .

### **Практическая значимость.**

Результаты диссертации могут быть использованы для описания процесса НПИ в сильном лазерном поле. Аналитические соотношения, полученные в диссертации на основании последовательного квантовомеханического расчета, позволяют качественно и количественно описать высокоэнергетическую часть спектра НПИ в сильном низкочастотном лазерном поле, расчет которой требует значительных временных затрат при численном интегрировании уравнения Шредингера. Полученные аналитические результаты дают возможность исследовать точность существующих аналитических результатов и предсказать новые эффекты, возникающие в спектрах НПИ в двухчастотном лазерном поле, в частности, возникновение провалообразных структур в фазовой зависимо-

сти спектров НПИ при соизмеримых интенсивностях компонент двухчастотного лазерного поля и возникновение специфических интерференционных особенностей в фазовой зависимости спектров НПИ в случае доминирующей компоненты поля с удвоенной частотой.

Результаты диссертации целесообразно использовать в научно-исследовательских организациях и центрах, занимающихся взаимодействием сильного лазерного излучения с веществом: Институт общей физики РАН, Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, лазерный центр МГУ, РНЦ Курчатовский институт, Санкт-Петербургский государственный университет, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Институт прикладной физики РАН, Воронежский государственный университет.

**На защиту выносятся следующие основные положения и результаты:**

1. Аналитические соотношения для амплитуды НПО с образованием высокоэнергетических фотоэлектронов в произвольном периодическом поле.
2. Аналитические соотношения для выхода высокоэнергетических фотоэлектронов в коротком лазерном импульсе.
3. Сравнение аналитических расчетов спектров НПИ в коротком импульсе в рамках предложенной модели с численным решением нестационарного уравнения Шредингера для нейтральных атомов с последующим определением точности аналитических результатов.
4. Определение границ применимости факторизации выхода высокоэнергетических фотоэлектронов на лазерные и атомные параметры.
5. Эффекты подавления ОВ траекторий в двухчастотном лазерном поле, приводящие к возникновению резких провалов в фазовых зависимостях спектров НПИ при  $\beta \sim 1$ , и интерференционные явления в фазовой зависимости спектра НПИ в двухчастотном лазерном поле при  $\beta \gg 1$ .

### **Степень достоверности и апробация результатов.**

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Научные сессии Воронежского государственного университета (2011–2013)
2. 20th International Laser Physics Workshop (LPHIS'11), 11 – 15 July, 2011, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
3. XX Конференция по фундаментальной атомной спектроскопии (ФАС-XX), 23 – 27 сентября, 2013, Воронеж
4. 23th International Laser Physics Workshop (LPHIS'14), 14 – 18 July, 2014, Sofia, Bulgaria

### **Публикации.**

Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК РФ [15, 16] и 3 публикации в сборниках трудов и тезисов конференций [17–19].

### **Личный вклад автора.**

Определение целей и задач диссертации осуществлялось научным руководителем. Автором совместно с научным руководителем разработана аналитическая модель. Автором лично проведены аналитические и численные расчеты и интерпретированы результаты, представленные в диссертации. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был существенным. Результаты, составляющие содержание положений, выносимых на защиту, получены автором лично.

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 122 страницы, из них 97 страниц текста, включая 19 рисунков. Библиография включает 149 наименований на 19 страницах.

## Обзор литературы

История теоретического и экспериментального исследования нелинейных процессов в сильном лазерном поле недавно отметила пятидесятилетний юбилей [20]. За пятидесятилетний период было разработано множество теоретических и экспериментальных подходов для исследования нелинейных процессов, индуцированных сильным лазерным полем: нелинейная ионизация среды, генерация высших гармоник (ГВГ) и т.д. Значительная часть результатов исследований нелинейного характера взаимодействия лазерного поля с веществом была освещена в сотнях обзорных публикаций, которые с течением времени уточнялись, обобщались и являлись предметом новых исследований. Толчком к такому бурному развитию этого направления физики исторически положила пионерская работа Келдыша [21]. В работе Келдыша впервые было показано, что туннельная и многофотонная ионизация являются двумя предельными случаями одного и того же процесса нелинейной ионизации системы сильным лазерным полем. Различные режимы нелинейной ионизации определяются параметром адиабатичности (или параметром Келдыша)  $\gamma_K = \sqrt{2m|E_0|}\omega_\tau/(eF)$ , где  $e$  и  $m$  — элементарный заряд и масса электрона, соответственно,  $E_0$  — энергия связанного состояния,  $\omega_\tau$  и  $F$  — частота и напряженность поля. Параметр Келдыша имеет множество интерпретаций (см. [22, 23]), например, как отношение характерного «атомного» импульса к импульсу электрона в переменном поле или отношение энергии лазерного фотона к работе, совершенной полем по перемещению электрона в поле напряженностью  $F$  на характерное атомное расстояние  $\tilde{a} = \hbar/\sqrt{2m|E_0|}$ . Туннельному режиму соответствует интервал значений  $\gamma_K \ll 1$  (энергия фотона много меньше работы поля), а многофотонный режим реализуется при  $\gamma_K \gg 1$ . Более детальное развитие идея Келдыша получила в классических работах Никишова и Ритуса [24, 25], а также Попова, Переломова и Терентьева [26–28], которые в последствии стали классическими работами по нелинейной ионизации (см. обзоры [22, 23, 29, 30]). Исторически

результаты этих работ были переполучены в рамках различных теоретических подходов [31–34] (см. также исторический очерк об истории теории Келдыша в обзорах [22, 23, 29, 30]). В настоящем обзоре литературы мы остановимся на основных моментах в теоретическом описании нелинейной ионизации атомов и ионов сильным лазерным полем.

В теории Келдыша амплитуда перехода из основного (связанного) состояния в состояние непрерывного спектра определяется дипольным матричным элементом между связанным состоянием и состоянием свободного электрона в переменном электрическом поле [21–30]. Таким образом, в приближении Келдыша взаимодействие с полем в конечном состоянии учитывается точно, а эффектами атомного потенциала пренебрегается. Как было показано в работах [24–28] в низкочастотном пределе,  $\hbar\omega_\tau \ll |E_0|$ , процесс ионизации имеет квазиклассический характер и оценка сопутствующих временных интегралов может быть выполнена методом перевала. Перевальные точки в этом случае комплексны и, более того, могут быть ассоциированы с временем начала движения электрона по комплексным траекториям в подбарьерной области [22, 23, 29, 30]. Анализ ионизации с использованием комплексных времен ионизации получил в последствии название «метод мнимого времени». Метод мнимого времени оказался наиболее эффективным при непертурбативном учете кулоновского взаимодействия фотоэлектрона с атомным остовом [22, 23, 28, 29, 35–39]. Несмотря на множество попыток учесть кулоновское взаимодействие с атомным остовом [40, 41], аналитический результат, полученный в работах [22, 23, 28, 29, 35–39] остается эталоном как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения практического применения [42].

В более поздних работах [43, 44] был развит аналог теории Келдыша. Основное отличие от ранних работ [24–28] заключалось в том, что: 1) временные интегралы вычислялись точно и выражение для амплитуды содержало обобщенные функции Бесселя [24, 25, 45]; 2) оператор дипольного взаимодействия выбирался в калибровке длины. Несмотря на то, что такое вычисление времен-

ных интегралов формально расширяет возможность применения теории Келдыша для частот  $\hbar\omega_\tau \sim |E_0|$  и произвольных интенсивностей поля, фактически расчет при таких параметрах поля не имеет физического смысла в рамках приближения Келдыша из-за нарушения адиабатичности процесса, например, при энергии фотона  $\hbar\omega_\tau \sim |E_0|$  эффекты атомного потенциала не могут быть учтены в квазиклассическом приближении. Более того, использование калибровки скорости при вычислении амплитуды ионизации в приближении Келдыша является физически неоправданным [46–50], например, приводящим к нарушению пороговой зависимости сечения фотоотрыва [48, 50]. Отметим, что результаты для амплитуды фотоотрыва в калибровках скорости и длины совпадают только для  $s$ -состояния [25].

Теория Келдыша (с учетом кулоновских поправок) хорошо согласуется с экспериментом в части определения полной вероятности распада системы в лазерном поле, а также описания низкоэнергетической части спектра НПИ [22, 23]. В соответствии с теорией Келдыша с ростом энергии фотоэлектрона вероятность фотоионизации экспоненциально убывает. Однако экспериментальные данные [51, 52] показывают, что с определенных энергий фотоэлектрона наблюдается область постоянства значения вероятности фотоионизации от энергии фотоэлектрона — так называемая область «плато» в спектре НПИ. Физический механизм образования продолжительной платообразной структуры в спектре НПИ, основанный на идее возможности возвращения электрона в сильном лазерном поле к атомному остову [53], был предложен в [54]. Отметим, что на основе этой идеи в [55] был предложен трехшаговый механизм для описания эффектов плато в спектрах генерации гармоник [56]. Согласно работе [54] физика формирования высокоэнергетического плато в спектре НПИ может быть также описана в рамках трехшаговой модели. На первом шаге оптический электрон туннелирует из атомной системы в момент максимального значения электрического поля. На втором шаге электрон распространяется в континууме, «одетом» лазерным полем. Это распространение можно описать

в квазиклассическом приближении, учитывая, что движение электрона в этом случае может быть рассмотрено в рамках классической механики. Двигаясь вдоль индуцированных лазерным полем замкнутых траекторий, электрон возвращается к атомному остову (в момент максимального значения векторного потенциала) и упруго рассеивается на атомном остове, формируя тем самым высокоэнергетический пик в спектре НПИ. Как показывают оценки [54], такой механизм позволяет «ускорить фотоэлектроны» вплоть до энергий  $10u_p$ , где  $u_p$  — пондеромоторная энергия электрона в лазерном поле. С точки зрения квантовомеханического описания эффектов плато в спектре НПИ в амплитуде многофотонного перехода помимо сильного лазерного поля необходимо учесть эффекты атомного потенциала. В работах [57, 58] дополнительный учет эффектов атомного потенциала в амплитуде многофотонного процесса в сильном лазерном поле был предпринят в рамках формального разложения  $S$ -матричного элемента в ряд по атомному потенциалу (см. также обзоры [40, 59]). Первый член такого разложения  $S$ -матрицы совпадает с выражением для амплитуды перехода в приближении Келдыша, а последующие члены разложения определяют эффекты атомного потенциала в сильном лазерном поле или, как говорят, эффекты перерасеяния. Существенный недостаток такого подхода состоит в том, что эффекты атомного потенциала учитываются в рамках борновского приближения, однако, несмотря на это, большинство интересных эффектов в области плато могут быть описаны с помощью данного подхода: интерференционные эффекты [58]; резонансно-подобное усиление выхода высокоэнергетических электронов при закрытии порогов многофотонной ионизации [60–63]; спектры надпорогового фотоотрыва отрицательных ионов [64, 65].

Одновременный точный учет атомного потенциала и взаимодействия оптического электрона с сильным лазерным полем возможен в рамках численного решения нестационарного уравнения Шредингера. Несмотря на то, что к настоящему времени развит ряд эффективных алгоритмов численного решения нестационарного уравнения Шредингера как в одноэлектронном приближении



[66–69], так и с учетом многоэлектронных корреляций [70, 71], их эффективность для расчета спектров НПИ атомов весьма ограничена значениями интенсивности и частоты лазерного излучения. Например, численные методы анализа показывают свою неэффективность при расчете спектров НПИ для лазерных источников с длиной волны в среднем ИК-диапазоне ( $2 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 5 \text{ мкм}$ ): расчет спектра НПИ для  $\lambda \sim 3.2 \text{ мкм}$  и интенсивностью  $I \sim 10^{14} \text{ Вт/см}^2$  может занимать около недели даже с привлечением современных вычислительных систем. Очевидно, неустойчивость численных схем и значительная неопределенность точности полученного численного результата, делает точно решаемые аналитические модели взаимодействия низкочастотного интенсивного лазерного излучения с атомными системами весьма привлекательными для анализа нелинейных явлений в сильном лазерном поле. Модель, которая впервые позволила аналитически рассмотреть процесс нелинейного взаимодействия оптического электрона с сильным (непертурбативным) лазерным полем, основывалась на методе потенциала нулевого радиуса [72]. В работах [73, 74] в рамках метода потенциала нулевого радиуса и формализма квазистационарных квазиэнергетических состояний (ККЭС) [66, 75, 76] впервые был рассмотрен распад слабосвязанного электрона в сильном циркулярно поляризованном поле. Обобщение результатов этих работ на случай эллиптически поляризованного поля было сделано в работе [77], где было показано, что в адиабатическом пределе вероятность распада слабосвязанного электрона определяется формулой Келдыша. Для расчета спектра НПИ и исследования плато в высокоэнергетической части спектра потенциал нулевого радиуса был впервые использован в работе [57]. Более детальный анализ этой модели был предпринят в начале 2000-х годов, в период, когда был предложен эффективный метод расчета и аналитического продолжения одномерных интегралов, определяющих динамические матричные элементы этой модели [78, 79]. С использованием этого метода аналитического продолжения на основе численных расчетов было показано наличие платообразной структуры в фурье-спектре точной волновой

функции, которое было ассоциировано с платообразными структурами в спектрах НПИ и ГВГ [79, 80]. Дальнейшее развитие метод потенциала нулевого радиуса получил в работах [47, 81, 82]. Обобщение идеи потенциала нулевого радиуса на связанные системы с ненулевым начальным орбитальным моментом было выполнено в рамках метода эффективного радиуса. На основе метода эффективного радиуса [83–85] для слабосвязанной частицы в статических магнитных и электрических полях и метода комплексных квазиэнергий [66, 75, 76] в работах [47, 81, 82] была развита точно решаемая аналитическая модель для слабосвязанного электрона в переменном периодическом поле. С помощью этой модели были рассчитаны спектры надпорогового фотоотрыва для отрицательных ионов с  $s$  и  $p$  валентными электронами [47, 81]. Более того, в рамках этой модели оказывается возможным получить в квазиклассическом приближении замкнутые аналитические выражения для выхода высокоэнергетических электронов как для монохроматического поля [86], так и для короткого лазерного импульса [16].

Принципиально новые эффекты стали возможными для наблюдения в спектрах надпороговой ионизации в лазерных полях короткой длительности, определяющейся несколькими периодами лазерного импульса [8, 87]. Короткие лазерные импульсы, главным образом, характеризуются огибающей импульса и относительной фазой, определяющей расстройку в положениях максимума огибающей и максимума периодического поля на несущей частоте. В настоящее время получены уникальные источники коротких лазерных импульсов, в которых относительная фаза импульса стабилизирована на протяжении нескольких часов [88], что позволяет улучшить статистику детектирования фотоэлектронов в экспериментах с короткими лазерными импульсами.

Наиболее интересным эффектом при взаимодействии короткого лазерного импульса с атомными системами можно считать зависимость спектров атомных фотопроцессов от относительной фазы импульса. Отметим, что этот эффект не может возникнуть в бесконечно длинном монохроматическом импульсе. Дей-

ствительно, какова бы не была относительная фаза  $\phi$  у монохроматического поля, с помощью конечного сдвига по времени гамильтониан взаимодействия системы с полем может быть приведен к виду не содержащему явно фазу  $\phi$ . Таким образом, в монохроматическом поле результаты для поля с ненулевой относительной фазой полностью эквивалентны результатам для случая нулевой относительной фазы. Очевидно, что для короткого лазерного импульса такое преобразование не позволяет привести гамильтониан системы к виду, не содержащему явной зависимости от  $\phi$ . Существенная зависимость спектра НПИ от относительной фазы была обнаружена в эксперименте [89]. Теоретическое обоснование наблюдаемой зависимости спектра НПИ от относительной фазы, а также наблюдаемой асимметрии в вылете фотоэлектронов в левую и правую полусферы было дано в серии работ Д. Милошевича и В. Бекера [90–93] (см. также в [94]). Сильная зависимость высокоэнергетической части спектра от относительной фазы импульса была использована в экспериментальной методике по определению относительной фазы импульса [95]. Отметим, что короткие лазерные импульсы индуцируют в спектре надпороговой ионизации специфическую интерференцию аналогичную интерференции света на двух щелях [96].

Эксперименты с короткими лазерными импульсами, имеющими эллиптическую поляризацию, показывают, что импульсное распределение фотоэлектронов «вращается» при изменении относительной фазы лазерного импульса. Такое изменение импульсного распределения фотоэлектронов с изменением относительной фазы получило название *attoclock* [97, 98]. Недавно *attoclock* предполагался как «инструмент» для измерения времени туннелирования электрона из атома [99], однако, как показывает теоретический анализ, измерение времени в *attoclock*-эксперименте не может дать информацию о времени туннелирования [22, 100].

С недавнего времени интерес к надпороговой ионизации усилился из-за возможности использовать НПИ для извлечения спектроскопических характеристик, как, например, сечение упругого рассеяния [4–6, 101–105]. Возможность

извлечь данные о сечении упругого рассеяния из спектра НПИ обусловлена параметризацией выхода фотоэлектронов на лазерные и атомные параметры [102, 106]. Изначально такая параметризация была установлена на основе анализа решения нестационарного уравнения Шредингера и более детального исследования в рамках точно решаемых моделей [15, 16, 86, 107, 108]. В частности, было показано, что такая факторизация на лазерные и атомные параметры возможна либо для сверхкоротких лазерных импульсов, либо для монохроматического поля [15, 16].

# Основные теоретические методы для непертурбативного описания надпороговой ионизации атомных систем в сильном лазерном поле

В диссертации рассматривается процесс надпороговой ионизации/отрыва в рамках модели эффективного радиуса [47, 82]. Эта модель базируется на формализме квазистационарных квазиэнергетических состояний (ККЭС) [75, 79] и модели эффективного радиуса [79]. Остановимся на основных моментах формализма ККЭС, позволяющего проанализировать взаимодействие периодического возмущения с некоторой атомной системой.

## 1.1. Метод квазистационарных квазиэнергетических состояний

### 1.1.1. Общий формализм

Анализ нелинейного взаимодействия сильного лазерного поля с оптическим электроном атомной системы основывается на решении нестационарного уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = H(t) \Psi(\mathbf{r}, t),$$

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) + V_\tau(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

где  $U(r)$  — атомный потенциал,  $V_\tau(\mathbf{r}; t)$  — оператор взаимодействия атомной системы с периодическим по времени лазерным полем с периодом  $\mathcal{T}$ . Если полагать, что энергия фотона лазерного поля  $\hbar\omega_\tau$  (где  $\omega_\tau = 2\pi/\mathcal{T}$ ) меньше или

порядка энергии связи  $|E_0|$  рассматриваемой атомной системы, то с хорошей точностью описание взаимодействия оптического электрона с лазерным полем возможно в дипольном приближении. В калибровке длины в дипольном приближении оператор взаимодействия  $V_\tau(\mathbf{r}; t)$  имеет следующий вид:

$$V_\tau(\mathbf{r}, t) = e(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_\tau(t)), \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{F}_\tau(t)$  — вектор напряженности лазерного поля, периодический во времени. В этом случае оператор Гамильтона в уравнении (1.1) обладает симметрией по отношению к конечным сдвигам по времени, то есть  $H(t + \mathcal{T}) = H(t)$ , где  $\mathcal{T}$  — период лазерного поля. Тогда, в соответствии с теоремой Флоке [109], существует определенный класс решений, который можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) &= \exp(-i\varepsilon t/\hbar)\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t), \\ \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) &= \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t + \mathcal{T}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon$  — некоторая постоянная величина. Как было показано в работах Зельдовича и Ритуса [110, 111], величина  $\varepsilon$  является интегралом движения для системы, гамильтониан которой периодически зависит от времени, и, по аналогии с квазиимпульсом частицы, движущейся в пространственно периодическом поле, была названа квазиэнергией.

Подставив волновую функцию в виде (1.3) в уравнение (1.1), получим уравнение на функцию квазиэнергетического состояния (КЭС)  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  и квазиэнергии  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t), \\ \mathcal{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r) + V_\tau(\mathbf{r}, t) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Как было показано в [111, 112] уравнение (1.4) можно рассматривать как уравнение на собственные функции  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  (периодические во времени) и собственные значения квазиэнергии  $\varepsilon$  гамильтониана  $\mathcal{H}$ . Таким образом, в формализме

КЭС решение нестационарного уравнения Шредингера сводится к задаче на собственные значения и собственные функции, определенные в расширенном Гильбертовом пространстве  $\mathbb{L}_3 \oplus \mathbb{T}$ . Отметим, что собственные функции  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  должны удовлетворять стандартным требованиям и образуют полную систему функций [111, 112].

Скалярное произведение в расширенном Гильбертовом пространстве определяется иначе, чем в пространстве волновых функций уравнения (1.1) [110, 113]. «Расширенное» определение скалярного произведения для  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  в пространстве  $\mathbb{L}_3 \oplus \mathbb{T}$  содержит дополнительное усреднение по периоду поля [113]:

$$\langle\langle \Phi_{\varepsilon_1}(\mathbf{r}, t) | \Phi_{\varepsilon_2}(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \langle \Phi_{\varepsilon_1}(\mathbf{r}, t) | \Phi_{\varepsilon_2}(\mathbf{r}, t) \rangle dt, \quad (1.5)$$

где  $\langle \Phi_{\varepsilon_1}(\mathbf{r}, t) | \Phi_{\varepsilon_2}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int \Phi_{\varepsilon_1}^*(\mathbf{r}, t) \Phi_{\varepsilon_2}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ .

Для ряда потенциалов  $U(r)$  и  $V_\tau(\mathbf{r}, t)$  уравнение (1.4) допускает аналитическое решение: квантовый гармонический осциллятор под действием внешней периодической силы [114, 115] (для случая которого было показано, что спектр квазиэнергии является эквидистантным), квантовый осциллятор с переменной по времени частотой [114, 115], плоский [116, 117] и пространственный ротаторы [118] (для которых было продемонстрировано, что волновые функции могут быть выражены через функции Матье, а спектр квазиэнергии имеет зонную структуру). Кроме того, в рамках формализма КЭС было дано обобщение ряда теорем известных для стационарного гамильтониана: теорема Вигнера–Неймана [116, 117], теорема о вириале [113], теоремы Гельмана–Фейнмана [113], а также была развита теория возмущений на КЭС [113].

В общем случае для реальных атомных систем спектр квазиэнергий является непрерывным и функции КЭС в каждый момент времени нормированы на  $\delta$ -функцию [110, 119]:

$$\int \Phi_\varepsilon^*(\mathbf{r}, t) \Phi_{\varepsilon'}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \delta(\varepsilon' - \varepsilon). \quad (1.6)$$

Однако, для описания распада атомных систем в сильном лазерном поле метод КЭС оказывается мало эффективен, так как волновая функция распадающейся системы в этом случае представляет собой пакет функций КЭС. Наиболее эффективным методом анализа динамики систем, распадающихся под действием лазерного поля, является формализм квазистационарных квазиэнергетических состояний (ККЭС).

Формализм ККЭС основывается на методе КЭС и формализме квазистационарных состояний. Остановимся на основных моментах теории квазистационарных состояний. Первоначально идея квазистационарных состояний была изложена в работах Зигерта и Капура—Пайерлса [120, 121] для описания распадов долгоживущих составных ядер. Далее свое развитие эта теория получила в работах [122–125] (см. также [112]).

Рассмотрим медленно распадающуюся систему с гамильтонианом  $H$ . Вектор состояния такой системы формально может быть найден из решения стационарного уравнения Шредингера:

$$H\psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}\psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r}), \quad (1.7)$$

с граничным условием вида [112, 123]

$$\psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} \sim \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \tilde{E} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1.8)$$

Комплексное граничное условие приводит к появлению мнимой части у энергии  $\tilde{E}$ :  $\tilde{E} = \text{Re}\tilde{E} - i\hbar\Gamma/2$ , где  $\text{Re}\tilde{E}$  определяет энергию связанного состояния, а  $\Gamma = -2\text{Im}\tilde{E}$  — ширину уровня.

Следует отметить, что стандартная процедура нормировки волновых функций связанных состояний неприменима к квазистационарным состояниям. Действительно, в силу граничного условия (1.8), поскольку при этом  $\psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r})$  экспоненциально возрастает с увеличением  $r$ , что приводит к расходимости нормировочного интеграла  $\int |\psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ . Способы нормировки функций квазистационарных состояний обсуждались в работах [122, 123, 126, 127]. В работе [123] для



решения этой проблемы вводится базис дуальных функций  $\tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r})$ , таких что

$$\langle \tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) | \psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) \rangle = 1. \quad (1.9)$$

Дуальные функции выбирают таким образом, чтобы формально выполнялось равенство:

$$\langle \tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) | \mathbf{H} | \psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \psi_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) | \mathbf{H} | \tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) \rangle^*. \quad (1.10)$$

Принимая во внимание (1.9), (1.10), нетрудно убедиться, что дуальная функция  $\tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению Шредингера (1.7) с заменой  $\tilde{E} \rightarrow \tilde{E}^*$ :

$$\mathbf{H} \tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}^* \tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r}), \quad (1.11)$$

а асимптотика дуальной волновой функции  $\tilde{\psi}_{\tilde{E}}(\mathbf{r})$  соответствует *сходящейся* сферической волне.

Если система взаимодействует с периодическим лазерным полем, то можно ввести понятие квазистационарного квазиэнергетического состояния [128, 129]. Действительно, рассмотрим атомную систему в периодическом поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$  с частотой  $\omega_\tau = 2\pi/\mathcal{T}$ . Применяя общий формализм квазистационарных состояний к решению уравнения (1.4), будем искать его с асимптотикой расходящихся волн на больших расстояниях (граничное условие (1.8)). Однако, поскольку волновая функция  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  должна быть периодической по времени, общий вид граничных условий при  $r \rightarrow \infty$  для функции ККЭС можно записать следующим образом [128]:

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)|_{r \rightarrow \infty} \sim \sum_{s,n} A_{s,n} \frac{\exp[ip_n r / \hbar]}{r} e^{-is\omega_\tau t}, \quad \frac{p_n^2}{2m} = n\hbar\omega_\tau + \varepsilon - u_p, \quad (1.12)$$

$$u_p = \frac{e^2}{2mc^2\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \mathbf{A}_\tau^2(t) dt, \quad (1.13)$$

где  $n$  — количество поглощенных фотонов поля, а  $u_p$  — средняя энергия колебаний свободного электрона в лазерном поле, где  $\mathbf{A}_\tau(t)$  — векторный потенциал электрического поля  $\mathbf{F}_\tau(t)$ . В открытых каналах фотоионизации ( $\text{Re}(n\hbar\omega_\tau + \varepsilon -$

$u_p) > 0$ ) волновые функции представляют собой суперпозицию расходящихся сферических волн, а в закрытых ( $\text{Re}(n\hbar\omega_\tau + \varepsilon - u_p) < 0$ ) — соответствующие комплексные волновые функции экспоненциально затухают. При этом комплексное значение квазиэнергии может быть представлено в виде [75]:

$$\varepsilon = \text{Re}\varepsilon - i\frac{\Gamma}{2} = E_0 + \Delta\varepsilon - i\frac{\Gamma}{2}, \quad (1.14)$$

где  $\Gamma$  и  $\Delta\varepsilon$  определяют ширину и динамический штарковский сдвиг уровня, индуцированные лазерным полем, а коэффициенты  $A_{s,n}$  связаны с амплитудой  $n$ -фотонной ионизации (см. ниже).

Волновые функции ККЭС  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  так же как и волновые функции квазистационарного состояния не являются квадратично-интегрируемыми. Однако и в этом случае удастся ввести понятие дуальных функций  $\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ , с помощью которых возможно нормировать волновые функции ККЭС [130]:

$$\langle\langle \tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t) | \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle = 1. \quad (1.15)$$

Как и в случае стационарного гамильтониана дуальная функция  $\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  является собственной функцией оператора  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H}\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon^*\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t), \quad (1.16)$$

причем решение (1.16) ищется с асимптотикой сходящихся сферических волн [130]:

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} \sim \sum_{s,n} \tilde{A}_{s,n} \frac{\exp[-ip_n^* r / \hbar]}{r} e^{-is\omega_\tau t} \quad (1.17)$$

Как было показано в [131], использование волновых функций  $\Phi_\varepsilon, \tilde{\Phi}_\varepsilon$  позволяет регуляризовать пространственный интеграл в (1.15).

Общий принцип построения дуальных функций ККЭС зависит от симметрии гамильтониана системы по отношению к преобразованию  $t \rightarrow -t$ . Например, для случая эллиптически поляризованного поля гамильтониан системы обладает симметрией вида  $\mathcal{H}^*(-t, -\eta) = \mathcal{H}(t, \eta)$ , и тогда дуальная функция

строится по правилу [76]:

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \Phi_\varepsilon^*(\mathbf{r}, -t) \Big|_{\eta \rightarrow -\eta}, \quad (1.18)$$

где  $\eta$  — эллиптичность. Следует иметь в виду, что, если начальное состояние имеет ненулевой орбитальный момент,  $l \neq 0$ , то при построении дуальной функции необходимо также произвести замену  $m_l \rightarrow -m_l$  [132].

Для анализа общих свойств функций ККЭС уравнение (1.4) с граничными условиями (1.12) удобно рассматривать в виде эквивалентного однородного интегрального уравнения [133]:

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \iint G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') U(r') \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}', t') \exp[i\varepsilon(t - t')/\hbar] dt' d\mathbf{r}' \quad (1.19)$$

где  $G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  — нестационарная запаздывающая функция Грина электрона в поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$  (явный вид см. в Приложении А). В ряде случаев это уравнение может быть переписано с использованием КЭС функции Грина  $\mathcal{G}^{(+)}$  [133]:

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mathcal{T}} \iint \mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') U(r') \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}', t') dt' d\mathbf{r}'. \quad (1.20)$$

### 1.1.2. Амплитуда многофотонной ионизации в формализме ККЭС

В случае ККЭС амплитуда  $n$ -фотонной ионизации  $\mathcal{A}_n$  не может быть найдена стандартными методами (к примеру, через плотность тока вероятности при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ ). Поэтому определим  $\mathcal{A}_n$  из коэффициента при расходящейся сферической волне в открытом канале  $n$ -фотонного поглощения в асимптотике  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  при больших  $r$ . Заметим, что асимптотика вида (1.12) для этой цели неудобна, поскольку  $\mathcal{A}_n$  будет содержать сумму коэффициентов  $A_{s,n}$ . Рассмотрим более подходящее выражение для асимптотики ККЭС волновых функций. Для этого запишем волновую функцию  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  в виде (1.20), подставив асимптотическое выражение для КЭС функции Грина на больших расстояниях (A.14) (см. При-

ложение A):

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{\mathcal{T}} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)/\hbar} \sum_n \iint \chi_{\mathbf{p}_n}^*(\mathbf{r}', t') U(r') \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}', t') e^{-in\omega_\tau(t-t')} \frac{e^{ip_n R/\hbar}}{R} dt' d\mathbf{r}', \quad (1.21)$$

обозначив:

$$\mathcal{A}_n(\mathbf{p}_n) = \frac{m}{2\pi\hbar^2 \mathcal{T}} \int_0^\tau \langle \chi_{\mathbf{p}_n} | U | \Phi_\varepsilon \rangle e^{in\omega_\tau t'} dt', \quad (1.22)$$

где  $\chi_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{r}, t)$  — периодическая часть волновой функции  $\Psi_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{r}, t)$  свободного электрона с импульсом  $\mathbf{p}_n$  в поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$  (называемой «волковской функцией»):

$$\Psi_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{r}, t) = \exp[-i\mathcal{E}_p t/\hbar] \chi_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{r}, t), \quad (1.23)$$

$$\chi_{\mathbf{p}_n}(\mathbf{r}, t) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \mathbf{p}_n + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\tau(t) \right) \cdot \mathbf{r} - \frac{iS(\mathbf{p}_n, t)}{\hbar} \right], \quad (1.24)$$

$$S(\mathbf{p}_n, t) = \int^t \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_n + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\tau(t') \right)^2 - \mathcal{E}_p \right] dt', \quad (1.25)$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{p_n^2}{2m} + u_p = n\hbar\omega_\tau + \varepsilon, \quad \mathbf{p}_n = p_n \mathbf{n}, \quad (1.26)$$

представим (1.21) в виде:

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) |_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \simeq e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)/\hbar} \sum_n \mathcal{A}_n(\mathbf{p}_n) \frac{e^{-in\omega_\tau t + ip_n R/\hbar}}{R}, \quad (1.27)$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_\tau(t) - \int^t \left[ \frac{e^2 \mathbf{A}_\tau^2(t')}{2mc^2} - u_p \right] dt', \quad (1.28)$$

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} - \frac{e}{mc} \int^t \mathbf{A}_\tau(t') dt'. \quad (1.29)$$

Суммирование в (1.27) производится по всем открытым каналам фотоионизации. Единичный действительный вектор  $\mathbf{n}$  определяет направление вылета фотоэлектрона. Отметим, что в общем случае вектор  $\mathbf{p}_n = p_n \mathbf{n}$  является комплексным за счет наличия у квазиэнергии  $\varepsilon$  мнимой части (см. (1.27)).

Полная вероятность ионизации атомного уровня ( $\Gamma$ ) в формализме ККЭС представляет собой сумму парциальных вероятностей вылета фотоэлектрона по всем открытым каналам многофотонной ионизации:

$$\Gamma = \sum_{n \geq n_0} \Gamma_n, \quad \Gamma_n = \int \Gamma_n(\mathbf{p}_n) d\Omega_{\mathbf{p}_n}, \quad (1.30)$$

$$\Gamma_n(\mathbf{p}_n) = \frac{d\Gamma_n}{d\Omega_{\mathbf{p}_n}} = \frac{1}{m} |\sqrt{p_n} \mathcal{A}_n|^2, \quad (1.31)$$

где  $\Gamma_n(\mathbf{p}_n)$  — дифференциальная вероятность вылета фотоэлектрона (в единицу времени) с энергией  $E = \text{Re}[p_n^2/(2m)]$  в интервал телесных углов  $(\Omega_{\mathbf{p}_n}, \Omega_{\mathbf{p}_n} + d\Omega_{\mathbf{p}_n})$ , а  $n_0$  — наименьшее целое число, для которого  $\text{Re}(p_{n_0}^2) > 0$  [79]. Для случая действительного  $p_n$  запись дифференциальной вероятности  $\Gamma_n$  в виде (1.31) представляет собой стандартное определение углового распределения фотоэлектронов, имеющих импульс  $\mathbf{p}_n$ , которое следует из выражения для тока вероятности [134]. Однако, поскольку выражение для тока вероятности в формализме ККЭС не имеет смысла, соотношения (1.30) — (1.31) следует рассматривать как аналитическое продолжение стандартных определений вероятностей на случай ККЭС.

Сравнивая асимптотические формулы (1.27) и (1.12), можно указать связь между амплитудой  $\mathcal{A}_n$  и коэффициентами  $A_{s,n}$ . Действительно, на больших расстояниях действием атомного потенциала можно пренебречь, поэтому в этой области пространства движение свободного электрона в лазерном поле может быть описано выражением:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e}{mc} \int^t \mathbf{A}_\tau(t') dt' + \mathbf{V}_0 + \mathbf{r}_0. \quad (1.32)$$

Соответственно, в неинерциальной системе отсчета ( $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}(t) - \frac{e}{mc} \int^t \mathbf{A}_\tau(t') dt'$ ) асимптотика волновой функции ККЭС (1.27) определена амплитудой  $\mathcal{A}_n$  и сферической волной с импульсом  $p_n$ . В асимптотическом разложении (1.12) коэф-

коэффициент при сферической волне является периодической функцией времени:

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \sum_n C_n(t) \frac{e^{ip_n r/\hbar}}{r}, \quad C_n(t) = \sum_s A_{s,n} e^{is\omega_\tau t}. \quad (1.33)$$

Воспользовавшись разложением (1.27) и соотношениями (1.33) получим замкнутое выражение для коэффициентов  $C_n(t)$ :

$$C_n(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{e}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_\tau(t) - S(\mathbf{p}_n, t) \right]\right) \mathcal{A}_n, \quad (1.34)$$

где  $S(\mathbf{p}_n, t)$  задано выражением (1.25). Возводя по модулю в квадрат обе части выражения (1.34), интегрируя по времени, а затем усредняя по периоду получаем связь коэффициентов  $\mathcal{A}_n$  и  $A_{s,n}$ , которая определяется равенством:

$$|\mathcal{A}_n|^2 = \sum_s |A_{s,n}|^2, \quad (1.35)$$

## 1.2. Применение метода ККЭС к описанию НПИ систем в коротком лазерном импульсе

Рассмотрим линейно поляризованный лазерный импульс в виде:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{e}_z A(t), \quad (1.36)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_z F(t) = -\mathbf{e}_z \frac{1}{c} \frac{\partial A(t)}{\partial t}. \quad (1.37)$$

При этом лазерный импульс будем считать произвольным, наложив на него лишь два ограничения: 1) огибающая  $A(t)$  обращается в нуль всюду, кроме интервала  $(0, \tau)$ , 2) векторный потенциал лазерного поля не содержит постоянной составляющей.

Для описания процесса НПИ в коротком лазерном импульсе длительностью  $\tau$  рассмотрим в начале бесконечную последовательность коротких лазерных импульсов, следующих друг за другом через промежуток времени  $\mathcal{T}$  ( $\mathcal{T} > \tau$ ). Каждый импульс этой последовательности повторяет первоначально

заданный короткий лазерный импульс (1.36), (1.37). Тогда оператор взаимодействия такой бесконечной последовательности лазерных импульсов с оптическим электроном в дипольном приближении задается выражением:

$$V_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(\mathbf{r}, t + n\mathcal{T}) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{F}_{\tau}(t), \quad \mathbf{d} = -e\mathbf{r}, \quad (1.38)$$

где

$$\mathbf{F}_{\tau}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau}(t)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t + n\mathcal{T}), \quad \mathbf{A}_{\tau}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t + n\mathcal{T}). \quad (1.39)$$

Так как оператор взаимодействия электрона с полем является периодическим (с периодом  $\mathcal{T}$ ), для описания нелинейного взаимодействия последовательности коротких импульсов с атомной системой можно использовать формализм ККЭС [75, 134, 135]. В рамках этого формализма можно получить замкнутые выражения для амплитуды и вероятности НПИ в произвольном периодическом поле (см. (1.22), (1.30), (1.31)).

Подход ККЭС предполагает, что после адиабатического включения поля (1.39) волновая функция связанного электрона с энергией  $E_0$  эволюционирует в состояние ККЭС:

$$\Psi_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t), \quad \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t + \mathcal{T}), \quad (1.40)$$

с комплексной энергией  $\varepsilon = \text{Re}(\varepsilon) - (i\hbar/2)\Gamma$ , где  $\Gamma$  — полная вероятность ионизации электрона из связанного состояния под действием поля  $\mathbf{F}_{\tau}(t)$ , тогда как  $\text{Re}(\varepsilon) \rightarrow E_0$  при  $\mathbf{F}_{\tau}(t) \rightarrow 0$ . Асимптотика функции  $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$  на больших расстояниях определяется соотношением (1.27).

Полученные в рамках ККЭС выражения для амплитуды НПИ под действием периодической последовательности коротких лазерных импульсов сводятся к соответствующему результату для случая единичного короткого лазерного импульса путем предельного перехода  $\mathcal{T} \rightarrow \infty$  при фиксированном  $\tau$  [15, 135].

В случае НПИ в коротком лазерном импульсе, в отличие от монохроматического поля, энергетический спектр фотоэлектронов является непрерывным,

поэтому описание процесса НПИ с помощью величины  $\Gamma_n(\mathbf{p}_n)$  (см. (1.31)) оказывается невозможным. Для описания процесса НПИ в коротком лазерном импульсе используют дифференциальную вероятность вылета электрона в интервал энергий  $(E_p, E_p + dE_p)$  и интервал телесных углов  $(\Omega_{\mathbf{p}}, \Omega_{\mathbf{p}} + d\Omega_{\mathbf{p}})$ :

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \frac{d^2 P}{dE_p d\Omega_{\mathbf{p}}}. \quad (1.41)$$

Чтобы получить замкнутое выражение для  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$ , рассмотрим в начале полную вероятность ионизации за период  $\mathcal{T}$  в поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$ :

$$\Gamma_{tot} = \mathcal{T} \sum_{n \geq n_0} \int d\Omega_{\mathbf{p}_n} \Gamma(\mathbf{p}_n), \quad \Gamma(\mathbf{p}_n) \equiv \Gamma_n(\mathbf{p}_n) \quad (1.42)$$

где, с учетом приближенной замены  $\varepsilon \rightarrow E_0$  в соотношении (1.26),  $n_0 = [(u_p - E_0)/(\hbar\omega_\tau)]$  (подразумеваемая под  $[x]$  целую часть  $x$ ),  $p_n = \sqrt{2m(E_0 + n\hbar\omega_\tau - u_p)}$ . В пределе при  $\omega_\tau \rightarrow 0$  сумму по  $n$  в выражении (1.42) можно заменить на интеграл по импульсу фотоэлектрона  $p$  (или по энергии  $E_p = p^2/(2m)$ ). Делая замену

$$p_n = \sqrt{2m(E_0 + n\hbar\omega_\tau - u_p)} \rightarrow p, \quad (1.43)$$

$$\sum_{n \geq n_0} \rightarrow \frac{1}{m\hbar\omega_\tau} \int p dp = \frac{1}{\hbar\omega_\tau} \int dE_p, \quad (1.44)$$

из (1.42) получим:

$$\Gamma_{tot} = \frac{2\pi}{\hbar\omega_\tau^2} \iint \Gamma(\mathbf{p}) dE_p d\Omega_{\mathbf{p}}, \quad (1.45)$$

где

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \frac{p}{m} |\mathcal{A}(\mathbf{p})|^2, \quad \mathcal{A}(\mathbf{p}) \equiv \mathcal{A}_n(\mathbf{p}_n)|_{\mathbf{p}_n=\mathbf{p}}. \quad (1.46)$$

Таким образом, искомая вероятность НПИ в коротком импульсе  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  определяется выражением:

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \frac{2\pi p}{m\hbar} \lim_{\omega_\tau \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{p})|^2}{\omega_\tau^2}. \quad (1.47)$$



### 1.3. Метод эффективного радиуса

Рассмотрим короткодействующий центральный потенциал  $U(r)$ :

$$U(r) = \begin{cases} U(r), & r < r_c; \\ 0, & r \geq r_c, \end{cases} \quad (1.48)$$

где  $r_c$  — радиус действия потенциала. Будем полагать, что данный потенциал поддерживает связанное состояние  $\psi_{\kappa,l,m_l}(\mathbf{r})$  с энергией  $E_0 = -\hbar^2\kappa^2/(2m)$ , угловым моментом  $l$  и проекцией  $m_l$ . Относительно энергии  $|E_0|$  будем полагать, что она мала по сравнению с характерной энергией электрона в потенциальной яме  $E_U = \hbar^2/(2mr_c^2)$ . Для короткодействующего потенциала волновая функция  $\psi_{\kappa,l,m_l}(\mathbf{r})$  на больших расстояниях имеет асимптотическое поведение [136]:

$$\psi_{\kappa,l,m_l}(\mathbf{r})|_{r \gg r_c} = R_{\kappa,l}(r \gg r_c)Y_{l,m_l}(\hat{\mathbf{r}}) \approx C_{\kappa,l}\sqrt{\kappa}\frac{e^{-\kappa r}}{r}Y_{l,m_l}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.49)$$

где  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ , а  $C_{\kappa,l}$  — безразмерный асимптотический коэффициент,  $Y_{l,m_l}(\hat{\mathbf{r}})$  — сферическая функция. Наличие связанного состояния  $\psi_{\kappa,l,m_l}(\mathbf{r})$  предполагает, что состояния непрерывного спектра определяются парциальными компонентами с орбитальным моментом  $l$  и энергией  $E = \hbar^2k^2/(2m)$ , для которых фаза рассеяния  $\delta_l(k)$  и соответствующая ей амплитуда рассеяния  $f_l(\mathbf{k})$  отличны от нуля. В случае малых энергий фаза рассеяния в канале с орбитальным моментом  $l$  и соответствующая амплитуда рассеяния могут быть параметризованы в виде [136]:

$$k^{2l+1}\text{ctg}\delta_l = -1/a_l + r_l k^2/2, \quad (1.50)$$

$$f_l(\mathbf{k}) = \frac{k^{2l}}{\mathcal{R}_l(k)}P_l(\cos\theta_k), \quad \mathcal{R}_l(k) = -1/a_l + r_l k^2/2 - ik^{2l+1}, \quad (1.51)$$

где  $a_l$  — длина рассеяния,  $r_l$  — эффективный радиус,  $P_l(\xi)$  — полиномы Лежандра.

Метод эффективного радиуса для задач о спектре связанной частицы во внешних полях изначально был развит для описания спектра слабосвязанного

электрона в постоянном электрическом и магнитном полях [83, 84, 137]. В этих работах было сформулировано граничное условие на волновые функции, позволяющее свести трехмерную задачу на собственные значения и собственные функции к решению одномерного трансцендентного уравнения. В дальнейшем этот метод был обобщен на случай периодического потенциала [47, 81, 82]. Остановимся на этом случае подробнее.

При включении внешнего поля  $\mathbf{F}_\tau(t)$  связанное состояние  $\psi_{\kappa,l,m_l}(\mathbf{r})$  переходит в функцию ККЭС  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ . Основная идея метода эффективного радиуса в периодическом по времени поле заключается в разделении пространства на две области: внутри и вне потенциальной ямы (см. определение (1.48)). Решение уравнения (1.4) для  $r \geq r_c$  ( $U(r) \equiv 0$ ) с учетом граничных условий на больших расстояниях (1.12) можно построить в виде суперпозиции решений для свободного электрона в переменном поле (см. (1.23)). Напротив, внутри ямы динамика электрона определяется, главным образом, короткодействующим потенциалом, а влиянием внешнего поля можно пренебречь. Для решения задачи на собственные функции и собственные значения необходимо произвести процедуру сшивки решений из двух областей на сфере конечного радиуса  $r_c$ . Так как поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$  нарушает сферическую симметрию задачи, то процедура сшивки оказывается весьма громоздкой. Тем не менее, в случае короткодействующего потенциала процедура сшивки волновых функций может быть формально сведена к постановке граничных условий на  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  для малых  $r$  [47, 82]:

$$\begin{aligned}
& \int \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) Y_{lm_l}^*(\hat{r}) d\Omega_{\mathbf{r}} \\
&= \sum_n \phi_{ln}(r) e^{-in\omega_\tau t} \sim [r^{-l-1} + \dots + B_l(\varepsilon + n\hbar\omega_\tau)(r^l + \dots)] f_n^{(m_l)} e^{-in\omega_\tau t} \\
&= [r^{-l-1} + \dots + B_l(\varepsilon)(r^l + \dots)] f^{(m_l)}(t) + i \frac{2l+1}{(2l+1)!!^2} \frac{r_l m_l}{\hbar} \frac{d}{dt} f^{(m_l)}(t) (r^l + \dots),
\end{aligned} \tag{1.52}$$

где  $\phi_{ln}(r)$  определяет  $n$ -ную ККЭС гармонику в канале с угловым моментом равным  $l$ , а Фурье-коэффициенты  $f_n^{(m_l)}$  функции  $f^{(m_l)}(t)$  — заселенность КЭС

гармоник на малых расстояниях [80]. Отметим, что для состояний с  $l = 0$  граничные условия (1.52) могут быть сформулированы непосредственно при  $\mathbf{r} \rightarrow 0$  (см. обсуждение в статье [82]), однако для  $l \neq 0$  эти граничные условия необходимо определять на сфере конечного радиуса  $R$  такого, что  $\kappa^{-1} \gg R \gtrsim r_c$ . Коэффициент  $B_l(\varepsilon)$  в (1.52) связан с фазой рассеяния  $\delta_l$  соотношением [136]:

$$(2l - 1)!!(2l + 1)!!B_l(E) = k^{2l+1} \text{ctg} \delta_l. \quad (1.53)$$

Учитывая соотношение (1.50),  $B_l(\varepsilon)$  может быть параметризован через эффективный радиус и длину рассеяния:

$$(2l - 1)!!(2l + 1)!!B_l(E) = -1/a_l + r_l k^2/2. \quad (1.54)$$

Отметим, что основные параметры теории — длина рассеяния  $a_l$  и эффективный радиус  $r_l$ , также могут быть выражены через энергию связи  $|E_0|$  и асимптотический коэффициент  $C_{\kappa,l}$ :

$$\begin{aligned} (-1)^l \kappa^{2l+1} - 1/a_l - r_l \kappa^2/2 &= 0, \\ (-1)^l (2l + 1) - r_l \kappa^{-(2l-1)} &= 2C_{\kappa,l}^{-2}. \end{aligned}$$

В работах [47, 81, 82] указан общий метод построения волновой функции ККЭС  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  за пределами потенциальной ямы. Решение в этой области должно удовлетворять граничным условиям (1.52) и определяться асимптотическим поведением (1.12) на больших расстояниях. Для построения искомого решения волновая функция представляется в виде свертки от запаздывающей функции Грина свободного электрона  $G^{(+)}$  (явный вид см. в Приложении А) и периодической функции  $f^{(m_i)}(\mathbf{r}, t)$  [47, 81, 82]:

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} \mathcal{N} \sum_{m_i=-l}^l \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\varepsilon(t-t')/\hbar} f^{(m_i)}(t')}{\hbar^l \kappa^l} \\ \times \mathcal{Y}_{lm_i} \left( \frac{m_l \mathbf{r}}{(t-t')} + \boldsymbol{\alpha}(t, t') \right) G^{(+)}(\mathbf{r}, t; 0, t') dt', \quad (1.55) \end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}(t, t') = \frac{e}{c} \left( \mathbf{A}_\tau(t') - \int_{t'}^t \frac{\mathbf{A}_\tau(t_1) dt_1}{t - t'} \right),$$

$\mathcal{Y}_{lm_l}$  — шаровая функция,  $\mathbf{A}_\tau(t)$  — векторный потенциал электрического поля, а  $\mathcal{N}$  — нормировочная константа. Поскольку функция (1.55) определена для  $r > r_c$ , а не во всем пространстве, множитель  $\mathcal{N}$  не может быть получен из условия нормировки (1.9). Однако, так как для состояний с  $l = 0$  граничное условие можно сформулировать непосредственно для  $r = 0$ , то множитель  $\mathcal{N}$  в этом случае может быть найден из условия (1.9) [138]. Для практических расчетов с функциями (1.55) при  $l \neq 0$  нормировочный множитель  $\mathcal{N}$  выбирают таким образом, чтобы при выключении поля функция  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  переходила в волновую функцию начального связанного состояния:  $\mathcal{N} \simeq C_{\kappa, l} \sqrt{\kappa}$ .

Раскладывая функцию (1.55) в ряд по  $r$  и проецируя это разложение на  $\mathcal{Y}_{lm_l}$ , с учетом граничного условия (1.52) можно получить интегро-дифференциальное уравнение (детали см. в [47, 82]). Для случая  $l = 0$  оно имеет наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{r_0}{2} (\varepsilon - E_0) - 1 \right] f(t) + i \frac{r_0}{2} \frac{df(t)}{dt} \\ &= \frac{2\pi\hbar^2}{m\kappa} \int_{-\infty}^t \left[ G^{(+)}(0, t; 0, t') f(t') - G_0^{(+)}(0, t; 0, t') f(t) \right] e^{i\varepsilon(t-t')/\hbar} dt', \end{aligned} \quad (1.56)$$

где  $G_0^{(+)}$  — функция Грина свободной частицы (явный вид см. в Приложении А), а  $f(t) \equiv f^{(m_l=0)}(t)$ . Отметим, что при  $r_0 = 0$  это уравнение совпадает с аналогичным уравнением, полученным в модели потенциала нулевого радиуса [77]. Наиболее удобный способ решения этого уравнения заключается в преобразовании его к бесконечной системе линейных однородных уравнений [82]:

$$\mathcal{R}(\varepsilon + 2k\hbar\omega_\tau) f_{2k} = \sum_{k'} M_{k, k'}(\varepsilon) f_{2k'}, \quad (1.57)$$

$$\mathcal{R}(E) = -a_l + r_l E/2 - iE^{1/2}, \quad (1.58)$$

где матричный элемент  $M_{k,k'}$  может быть выражен через одномерный интеграл, содержащий функции Бесселя (см. явный вид в случае монохроматического поля в [82]).

Нетривиальное решение системы уравнений (1.57) возможно только в том случае, если детерминант системы обращается в нуль. Поэтому комплексная квазиэнергия определяется из решения трансцендентного уравнения вида:

$$\det|\mathcal{R}(\varepsilon + 2k\hbar\omega_\tau) - M_{k,k'}(\varepsilon)| = 0, \quad (1.59)$$

при условии:  $\mathbf{F}_\tau(t) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow E_0$ .

В заключение заметим, что общая идеология метода эффективного радиуса для ККЭС была развита для монохроматического поля в работах [47, 79, 80, 82, 86]. Однако, ее также можно применить и для произвольного периодического поля, причем форма основных интегральных уравнений остается такой же, как и в случае монохроматического поля, с той лишь разницей, что функция Грина свободной частицы в монохроматическом поле  $G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  заменится на функцию Грина в произвольном периодическом поле.

## 1.4. Выводы к первой главе

В первой главе дан краткий обзор основных теоретических методов, используемых для описания взаимодействия мощного лазерного излучения с атомами и молекулами: формализм ККЭС и теория эффективного радиуса. В рамках формализма ККЭС приведены общие выражения для амплитуды и вероятности НПИ. В качестве иллюстрации применения метода ККЭС к решению конкретной задачи получено выражение для вероятности НПИ под действием короткого лазерного импульса. В рамках МЭР приведены основные соотношения, связывающие амплитуду рассеяния и эффективный радиус, а также уравнения на собственные функции ККЭС и комплексную квазиэнергию атомной системы в сильном (периодическом во времени) лазерном поле.

## Глава 2

# Надпороговая ионизация атомных систем в поле сильного лазерного импульса конечной длительности

## 2.1. Общая формулировка задачи

Рассмотрим взаимодействие лазерного поля с оптическим электроном в дипольном приближении:

$$V(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{F}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}_z F(t)$  – линейно поляризованное электрическое поле лазерного импульса, а  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{e}_z A(t)$  – соответствующий векторный потенциал. Будем полагать, что электрон в атомной системе находится в начальном связанном состоянии  $\psi_{\kappa l m_l}(\mathbf{r}) = \varphi_{\kappa l}(r) Y_{l m_l}(\hat{\mathbf{r}})$ , с энергией связи  $E_0 = -\hbar^2 \kappa^2 / (2m)$  и угловым моментом  $l$ . Рассмотрим случаи  $l = 0, 1$  и для простоты ограничимся наиболее интересным случаем  $m_l = 0$ . Для анализа взаимодействия короткого лазерного импульса с атомной системой будем использовать подход, предложенный в [135] (см. также раздел 1.2). Основная идея этого подхода заключается в том, что взаимодействие лазерного импульса с атомной системой рассматривается как предельный случай взаимодействия с периодической последовательностью импульсов. Периодическая последовательность импульсов состоит из коротких импульсов, форма которых совпадает с формой исходного короткого импульса, периодически продолженных через временной интервал  $\mathcal{T}$  (см. рис. 2.1).

Для конечного  $\mathcal{T}$  взаимодействие с такой периодической во времени последовательностью лазерных импульсов может быть рассмотрено в рамках метода ККЭС [75], в котором самосогласованное определение амплитуды фотоотрыва (ионизации) следует из асимптотических свойств ККЭС волновой функции (см.

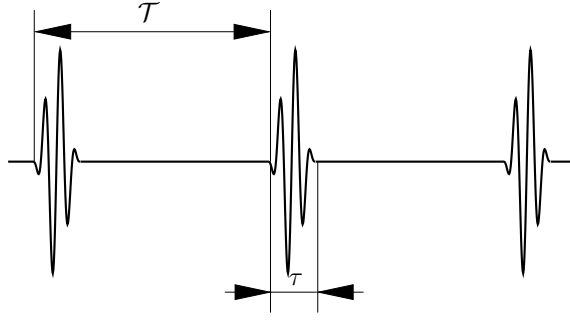


Рис. 2.1. Схематическое изображение последовательности коротких лазерных импульсов.

[79, 86], а также разделы 1.1, 1.2). Если задача с последовательностью импульсов решена, то результат для короткого импульса получается как предельный случай  $\mathcal{T} \rightarrow \infty$  ( $\omega_{\mathcal{T}} = 2\pi/\mathcal{T} \rightarrow 0$ ). В частности, дифференциальная вероятность ионизации электрона в интервал энергий  $(E_p, E_p + dE_p)$  и интервал телесных углов  $(\Omega_{\mathbf{p}}, \Omega_{\mathbf{p}} + d\Omega_{\mathbf{p}})$ ,  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$ , задается пределом (см. [135], а также (1.47)):

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \frac{d^2 P}{dE_p d\Omega_{\mathbf{p}}} = \frac{2\pi}{\hbar} \lim_{\omega_{\mathcal{T}} \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\mathbf{p})}{\omega_{\mathcal{T}}^2}, \quad (2.2)$$

где  $\Gamma(\mathbf{p})$  — вероятность вылета фотоэлектрона с импульсом  $\mathbf{p}$  (в единицу времени) в периодическом поле, определяемом периодической последовательностью лазерных импульсов,  $E_p = p^2/(2m)$  — энергия фотоэлектрона с импульсом  $\mathbf{p}$ . Таким образом, наш анализ НПО/НПИ в поле короткого лазерного импульса мы начинаем с анализа вспомогательной задачи о НПО/НПИ под действием последовательности коротких импульсов с векторным потенциалом  $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}(t) = \mathbf{e}_z A_{\mathcal{T}}(t)$  и соответствующей напряженностью электрического поля  $\mathbf{F}_{\mathcal{T}}(t) = \mathbf{e}_z F_{\mathcal{T}}(t)$ :

$$F_{\mathcal{T}}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{\mathcal{T}}(t)}{\partial t}, \quad A_{\mathcal{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(t + n\mathcal{T}). \quad (2.3)$$

## 2.2. Приближение МЭР для короткого лазерного импульса.

### 2.2.1. Квазиклассическое приближение.

Для аналитического описания нелинейного взаимодействия атомного электрона с сильным периодическим лазерным полем мы используем метод эффективного радиуса [47, 82], который применим для случая электрона, связанного короткодействующим потенциалом  $U(r)$ . Этот метод основывается на формализме квазистационарных квазиэнергетических состояний (ККЭС) и теории эффективного радиуса [136]. В теории эффективного радиуса взаимодействие электрона с потенциалом  $U(r)$  описывается с помощью фазы рассеяния в каналах с орбитальным моментом  $l$ ,  $\delta_l(E)$ , параметризованную через длину рассеяния,  $a_l$ , и эффективный радиус,  $r_l$  (см. соотношение (1.50)).

Ключевыми компонентами МЭР является комплексная квазиэнергия  $\varepsilon$  (которая переходит в  $E_0$  при  $\mathbf{F}_\tau(t) \rightarrow 0$ ) и периодическая функция

$$f_\varepsilon^{(l)}(t) = \sum_n f_n^{(l)} e^{-in\omega_\tau t}, \quad (2.4)$$

определяющая поведение волновой функции ККЭС  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  на малых расстояниях ( $\kappa r \ll 1$ ) (см. выражение (1.52)) Отметим, что принципиальная роль периодической функции  $f_\varepsilon^{(l)}(t)$  и различные приближения для ее оценки обсуждались ранее: для ГВГ в [138, 139]; для НПИ в [86]; общее обсуждение роли Фурье-коэффициентов для описания атомных процессов в сильном лазерном поле дано в [80, 82].

За пределами атомного остова ( $r > r_c$ ) функция ККЭС представляет собой свертку от периодической функции  $f_\varepsilon^{(l)}(t)$  и функции Грина электрона в



электрическом поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$ ,  $G^{(+)}(\mathbf{r}, t; 0, t')$  ([82], см. также (1.55)):

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = & -C_{\kappa l} \frac{\sqrt{(2l+1)\kappa\pi\hbar^2}}{m} \left(-\frac{i}{\hbar\kappa}\right)^l \int_{-\infty}^t e^{i\varepsilon(t-t')/\hbar} \\ & \times f^{(l)}(t') \left[ \mathbf{e}_z \cdot \left( \frac{m\mathbf{r}}{(t-t')} + \boldsymbol{\alpha}(t'; t, t') \right) \right]^l G^{(+)}(\mathbf{r}, t; 0, t') dt', \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}(\xi; t, t') = \mathbf{e}_z \alpha(\xi; t, t'),$$

$$\alpha(\xi; t, t') = \frac{e}{c} \left[ A_\tau(\xi) - \int_{t'}^t A_\tau(\tau) d\tau / (t - t') \right]. \quad (2.6)$$

Для  $\mathbf{F}_\tau(t) \equiv 0$  интеграл (2.5) вычисляется аналитически, и его значение определяет выражение для волновой функции связанного состояния  $\psi_{\kappa l 0}(\mathbf{r})$  в области  $r > r_c$ :

$$\psi_{\kappa l 0}(\mathbf{r}) = -i^l \kappa^{3/2} C_{\kappa l} h_l(i\kappa r) Y_{l0}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.7)$$

где  $C_{\kappa l}$  – безразмерный асимптотический коэффициент,  $h_l(x)$  – сферическая функция Ханкеля первого рода. Как и в случае монохроматического поля [47, 82], сшивая (2.5) с граничным условием (1.52), мы получаем интегро-дифференциальное уравнение на функцию  $f_\varepsilon^{(l)}(t)$  и комплексную квазиэнергию  $\varepsilon$ . В данной диссертации это уравнение представлено в дифференциальной форме, которая наиболее удобна для аналитической оценки функции  $f_\varepsilon^{(l)}(t)$  [16]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_l(\varepsilon + n\hbar\omega_\tau) f_n^{(l)} e^{-in\omega_\tau t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\omega_\tau t} f_m^{(l)} \mathcal{M}_l(\varepsilon + m\hbar\omega_\tau, t), \quad (2.8)$$

$$\mathcal{R}_l(E) = \frac{[(2l+1)!!]^2}{2l+1} B_l(E) - i[2mE/\hbar^2]^{l+1/2}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{M}_0(\varepsilon, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar}} \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\varepsilon(t-t')/\hbar}}{(t-t')^{3/2}} \left[ e^{iS(t,t')/\hbar} - 1 \right] dt', \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(\varepsilon, t) = & -3i \sqrt{\frac{m^3}{2\pi i \hbar^3}} \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\varepsilon(t-t')/\hbar}}{(t-t')^{5/2}} \left[ e^{iS(t,t')/\hbar} - 1 \right] dt' \\ & + 3 \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar^5}} \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\varepsilon(t-t')/\hbar + iS(t,t')/\hbar} \mathcal{P}(t, t')}{(t-t')^{3/2}} dt', \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$S(t, t') = -\frac{1}{2m} \int_{t'}^t \alpha(\xi; t, t')^2 d\xi, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{P}(t, t') = \alpha(t'; t, t')\alpha(t; t, t'). \quad (2.13)$$

Разложение матричных элементов  $\mathcal{M}_l(\varepsilon, t)$  в ряд Фурье сводит уравнение (2.8) к системе однородных линейных уравнений на Фурье-коэффициенты  $f_n^{(l)}$ . Как видно из выражения (2.9), уравнение (2.8) включает в себя коэффициент  $B_l(E)$ , заданный соотношением (1.53). Таким образом, в приближении эффективного радиуса динамическое взаимодействие электрона с континуумом учитывается только в канале с орбитальным моментом равным  $l$ . Следует отметить, что параметризация (1.54) для фазы рассеяния  $\delta_l(E)$  не является обязательной и используется лишь для простоты. Поскольку эта параметризация верна только для низкоэнергетических столкновений [136], при высоких энергиях и известной  $\delta_l(E)$  (которая является параметром задачи) для  $B_l(E)$  необходимо использовать соотношение (1.53). Отметим также, что для произвольного периодического поля метод эффективного радиуса может быть рассмотрен с учетом двух фаз рассеяния в континууме аналогично случаю монохроматического поля в [139].

### 2.2.2. Квазиклассический результат для функции $f_\varepsilon^{(l)}(t)$

Рассмотрим квазиклассическое приближение для функции  $f_\varepsilon^{(l)}(t)$ . Это приближение базируется на аппроксимации комплексной квазиэнергии невозмущенным значением энергии связи  $E_0$  и квазиклассическом приближении для оценки матричных элементов  $\mathcal{M}_l(\varepsilon = E_0)$ . Эти приближения верны в туннельном пределе, а именно: амплитуда лазерного поля ( $F$ ) мала по сравнению с характерной напряженностью лазерного поля  $F_0 = \sqrt{2m|E_0^3|}/(e\hbar)$ , а несущая частота лазерного импульса ( $\omega$ ) меньше, чем  $\omega_0 = \hbar/|E_0|$ , при этом лазерные параметры обеспечивают малость параметра Келдыша,  $\gamma_K = \hbar\omega/(eF\kappa^{-1}) \ll 1$ . В этом случае подынтегральные выражения матричных элементов  $\mathcal{M}_{l=0,1}(E_0, t)$  в (2.10) и (2.11) являются быстро осциллирующими функциями по времени  $t'$ , а

далекие Фурье–коэффициенты от  $\mathcal{M}_{l=0,1}(E_0, t)$  экспоненциально малы. Поэтому для квазиклассической оценки матричных элементов  $\mathcal{M}_0(E_0, t)$ ,  $\mathcal{M}_1(E_0, t)$  выполним интегрирование по  $t'$  в (2.10) и (2.11) методом перевала. Вычисление интегралов для  $\mathcal{M}_0(E_0, t)$  и  $\mathcal{M}_1(E_0, t)$  приводят к следующему результату:

$$\mathcal{M}_l(E_0, t) = (2l + 1) \sum_{\nu} \frac{m e^{i\mathcal{S}(t, t'_{\nu})/\hbar}}{\sqrt{\mathcal{D}(t - t'_{\nu})^{3/2}}} \left( \frac{\mathcal{P}(t, t'_{\nu})}{\hbar^2} \right)^l, \quad (2.14)$$

где

$$\mathcal{S}(t, t'_{\nu}) = E_0(t - t'_{\nu}) + S(t, t'_{\nu}), \quad (2.15)$$

$$\mathcal{D} = eF_{\tau}(t'_{\nu}) \cdot \alpha(t'_{\nu}; t, t'_{\nu}), \quad (2.16)$$

а соответствующие точки перевала,  $t'_{\nu}$ , определяются из уравнения:

$$\frac{\alpha^2(t'_{\nu}; t, t'_{\nu})}{2m} = E_0, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Заметим, что мы рассматриваем вклад от тех решений  $t'_{\nu} \equiv t'_{\nu}(t)$ , для которых мнимая часть второй производной  $S(t, t')$  по  $t'$  положительна ( $\text{Re } \mathcal{D} > 0$ ). Для случая  $l = 1$  вкладом от первого слагаемого в правой части (2.11) можно пренебречь, поскольку в низкочастотном пределе он в  $\omega$  раз меньше, чем вклад от второго слагаемого.

В квазиклассическом пределе функция  $f_{\varepsilon}^{(l)}(t)$  слабо отличается от константы (см. обсуждение [77, 82]), поэтому в нулевом приближении функцию  $f_{E_0}^{(l)}(t)$  можно заменить единицей (а ее Фурье–коэффициенты на  $f_n^{(l)} = \delta_{n,0}$ ). Следующая поправка к функции  $f_{E_0}^{(l)}(t)$  может быть найдена путем итерационного решения уравнения (2.8), позволяющего выразить коэффициенты  $f_n^{(l)}$  с  $n \neq 0$  через Фурье–коэффициенты  $\mathcal{M}_l(E_0, t)$ . Соответствующий результат для функции  $f_{E_0}^{(l)}(t)$  имеет вид:

$$f_{E_0}^{(l)}(t) \approx 1 + \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{n \neq 0} \int_0^{\mathcal{T}} e^{in\omega_{\tau}(\xi-t)} \frac{\mathcal{M}_l(E_0, \xi)}{\mathcal{R}_l(E_0 + n\hbar\omega_{\tau})} d\xi. \quad (2.18)$$

Основной вклад в значение интеграла (2.18) вносит окрестность точек перевала подынтегральной функции. Принимая во внимание (2.14), уравнение на точки

перевала имеет вид:

$$E_0 + n\hbar\omega_\tau = \frac{\alpha^2(\xi; t, t'_\nu)}{2m}. \quad (2.19)$$

Используя (2.19), в рамках квазиклассического приближения мы можем заменить подынтегральную часть (2.18), зависящую от  $n$ , функцией  $\tilde{\mathcal{M}}_l(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}_l(E_0, \xi)}{\mathcal{R}_l(E_0 + n\hbar\omega_\tau)} &\rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_l(\xi), \\ \tilde{\mathcal{M}}_l(\xi) &= \sum_\nu \frac{(2l+1)me^{i\mathcal{S}(\xi, t'_\nu)/\hbar} (\mathcal{P}(\xi, t'_\nu)/\hbar^2)^l}{\sqrt{\mathcal{D}}(\xi - t'_\nu)^{3/2} \mathcal{R}_l[\alpha^2(\xi; t, t'_\nu)/(2m)]}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставляя (2.20) в (2.18) и используя представление  $\delta$ -функции в виде

$$\delta(\xi - t) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_n e^{in\omega_\tau(\xi-t)}, \quad (2.21)$$

получим для функции  $f_{E_0}^{(l)}(t)$  следующее выражение:

$$f_{E_0}^{(l)}(t) \approx 1 + \tilde{\mathcal{M}}_l(t). \quad (2.22)$$

### 2.2.3. Амплитуда отрыва в периодическом поле

Для заданных  $\varepsilon$  и  $f_\varepsilon^{(l)}(t)$  в методе эффективного радиуса точная амплитуда надпорогового отрыва (НПО) с поглощением  $n$  фотонов с энергией  $\hbar\omega_\tau$ , может быть вычислена аналогично случаю монохроматического поля [86]:

$$\mathcal{A}^{(l)}(\mathbf{p}_n) = \frac{C_{\kappa l}(-i)^l}{\mathcal{T}\hbar^l \kappa^{l-1/2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} e^{i\mathcal{S}(\mathbf{p}_n, t)/\hbar} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P}_n(t))^l f_\varepsilon^{(l)}(t) dt, \quad (2.23)$$

$$S(\mathbf{p}_n, t) = \int_0^t [\mathbf{P}_n^2(t)/(2m) - \varepsilon] dt, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{P}_n(t) = \mathbf{p}_n + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\tau(t), \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot p_n, \quad (2.25)$$

$$p_n = \sqrt{2m(n\hbar\omega_\tau + \varepsilon - u_p)}, \quad u_p = \frac{e^2}{2mc^2\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} A_\tau^2(t) dt, \quad (2.26)$$

где единичный вектор  $\mathbf{n}$  определяет направление вылета фотоэлектрона, поглотившего  $n$  фотонов лазерного поля. Вероятность вылета электрона с импульсом

$\mathbf{p}_n$  (в единицу времени) определяется выражением (см. [86], а также (1.46)):

$$\Gamma(\mathbf{p}_n) \equiv \frac{dW(\mathbf{p}_n)}{d\Omega_{\mathbf{p}_n}} = \frac{1}{m} \left| \sqrt{p_n} \mathcal{A}^{(l)}(\mathbf{p}_n) \right|^2. \quad (2.27)$$

Подставляя квазиклассический результат (2.22) для функции  $f_\varepsilon^{(l)}(t)$  в (2.23), получаем амплитуду  $\mathcal{A}_n^{(l)}(\mathbf{p}_n)$  в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathcal{A}^{(l)}(\mathbf{p}_n) = \mathcal{A}^{(K)}(\mathbf{p}_n) + \mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n), \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(K)}(\mathbf{p}_n) &= \frac{C_{\kappa l} (-i)^l}{\mathcal{T} \hbar^l \kappa^{l-1/2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} e^{iS(\mathbf{p}_n, t)/\hbar} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P}_n(t))^l dt, \quad (2.29) \\ \mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n) &= \frac{C_{\kappa l} (-i)^l}{\mathcal{T} \hbar^l \kappa^{l-1/2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{\nu} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} e^{iS(\mathbf{p}_n, t)/\hbar} \\ &\times \frac{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P}_n(t))^l \mathcal{M}_l(E_0, t) dt}{\mathcal{R}_l(\alpha^2(t; t, t'_\nu)/(2m))}. \quad (2.30) \end{aligned}$$

В последних двух соотношениях  $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \sqrt{2m(n\hbar\omega_\tau + E_0 - u_p)}$ , а квазиэнергия  $\varepsilon$  заменена на  $E_0$ . Выражение (2.29) определяет амплитуду  $n$ -фотонного фотоотрыва в приближении сильного поля и описывает только низкоэнергетическую часть спектра НПО (см. [29]). Эффекты перерасеяния в спектре НПО описываются вторым слагаемым, которое определяет высокоэнергетическую часть спектра НПО. Остановимся подробнее на амплитуде перерасеяния  $\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n)$ .

#### 2.2.4. Квазиклассический результат для $\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n)$

Аналитическая оценка амплитуды перерасеяния  $\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n)$  в (2.30) в квазиклассическом пределе может быть выполнена аналогично случаю монохроматического поля [86]. Технические подробности этой оценки можно найти в Приложении Б. Ниже представлен лишь конечный аналитический результат для амплитуды  $\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n)$ , выраженный через классические времена ионизации ( $t_i^{(j)}$ )

и возврата  $(t_f^{(j)})$ , которые удовлетворяют следующей системе уравнений [40]:

$$A_\tau(t_i^{(j)}) - \frac{1}{t_f^{(j)} - t_i^{(j)}} \int_{t_i^{(j)}}^{t_f^{(j)}} A_\tau(\tau) d\tau = 0, \quad (2.31a)$$

$$2F_\tau(t_f^{(j)}) + \frac{1}{c} \frac{A_\tau(t_f^{(j)}) - A_\tau(t_i^{(j)})}{t_f^{(j)} - t_i^{(j)}} = 0. \quad (2.31b)$$

Эта система уравнений может быть получена из анализа классических траекторий электрона в лазерном поле [54]. Первое уравнение (2.31a) показывает, что в момент ионизации,  $t = t_i^{(j)}$ , электрон покидает атомную систему с нулевой скоростью и движется в лазерном поле вдоль замкнутой траектории вплоть до момента времени  $t_f^{(j)}$ . В момент возврата,  $t = t_f^{(j)}$ , электрон рассеивается назад на атомном острове. Уравнение (2.31b) представляет собой условие максимума энергии электрона после рассеяния назад.

Как показывает квазиклассический анализ (см. Приложение Б), амплитуда НПО  $\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n)$  может быть представлена в виде суммы парциальных амплитуд, соответствующих определенным наборам времен  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$  для  $j$ -той замкнутой траектории электрона. Каждая из этих амплитуд согласно классическому трехшаговому сценарию НПО/НПИ [54] может быть параметризована в виде [15, 16]:

$$\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n) = \sqrt{i} \frac{\hbar \omega_\tau}{e^2 \sqrt{a}} \sum_j A_j, \quad (2.32)$$

$$A_j = a_\tau^{(j)} a_{\mathcal{W}}^{(j)} f_l(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) e^{i\varphi_j/\hbar}, \quad (2.33)$$

$$\varphi_j = \varphi(t_i^{(j)}, t_f^{(j)}) = S(\mathbf{p}_n, t_f^{(j)}) - \int_{t_i^{(j)}}^{t_f^{(j)}} [\mathcal{E}(t_i^{(j)}, t) - E_0] dt, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{E}(t_i^{(j)}, t) = \frac{e^2 [A_\tau(t_i^{(j)}) - A_\tau(t)]^2}{2mc^2}. \quad (2.35)$$

Обсудим в отдельности каждый сомножитель в выражении (2.33) для парциальных амплитуд  $A_j$ .

Первый сомножитель,  $a_\tau^{(j)}$ , описывает первый шаг в трехшаговой модели пререрассеяния — туннелирование электрона из атомной системы — и определяется выражением:

$$a_\tau^{(j)} = C_{\kappa l} (-\sigma_j)^l \sqrt{\frac{(2l+1)F_{\text{at}}}{4\pi\tilde{F}_j}} \exp\left(-\frac{\hbar^2\kappa^3}{3me\tilde{F}_j}\right), \quad (2.36)$$

где  $F_{\text{at}} = e/a^2$ ,  $a = \hbar^2/(me^2)$  — боровский радиус, а  $\tilde{F}_j = \sigma_j F_\tau(t_i^{(j)}) > 0$ . Последнее условие показывает что  $\sigma_j = +1$  ( $\sigma_j = -1$ ) для таких пар корней  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$ , при которых верно неравенство  $F_\tau(t_i^{(j)}) > 0$  ( $F_\tau(t_i^{(j)}) < 0$ ). Таким образом, знак  $\sigma_j$  определяет направление распространения электрона после туннелирования:  $\sigma_j = +1$  — против вектора  $\mathbf{e}_z$ ;  $\sigma_j = -1$  — вдоль направления вектора поляризации поля  $\mathbf{e}_z$ .

Второй сомножитель,  $a_{\mathcal{W}}^{(\nu)}$ , в парциальной амплитуде вероятности отрыва (2.33) не зависит от параметров атомной структуры и описывает распространение свободного электрона вдоль  $j$ -той замкнутой классической траектории вплоть до момента перерассеяния:

$$a_{\mathcal{W}}^{(j)} \equiv a_{\mathcal{W}}(t_f^{(j)}, t_i^{(j)}) = \frac{\text{Ai}(\xi_j)}{\zeta_j^{1/3} \left([t_f^{(j)} - t_i^{(j)}]\omega_{\text{at}}\right)^{3/2}}, \quad \xi_j = \frac{\Delta E_{\text{max}}^{(j)}}{E_{\text{at}}\zeta_j^{1/3}}, \quad (2.37)$$

$$\mathcal{P}_j \equiv \mathcal{P}(t_f^{(j)}) = \mathbf{p}_n + \frac{e}{c}\mathbf{A}_\tau(t_f^{(j)}), \quad (2.38)$$

$$\Delta E_{\text{max}}^{(j)} \equiv \Delta E_{\text{max}}(t_f^{(j)}, t_i^{(j)}) = \frac{\mathcal{P}_j^2}{2m} - E_{\text{max}}^{(j)}, \quad (2.39)$$

$$E_{\text{max}}^{(j)} = \mathcal{E}(t_i^{(j)}, t_f^{(j)}) - 2\frac{F_\tau(t_f^{(j)})}{F_\tau(t_i^{(j)})}|E_0|, \quad (2.40)$$

$$\zeta_j \equiv \zeta(t_f^{(j)}, t_i^{(j)}) = -\frac{\dot{F}_\tau(t_f^{(j)})(\mathbf{e}_z \cdot [\mathbf{p}_n + e\mathbf{A}_\tau(t_i^{(j)})/c])}{2F_{\text{at}}^2 e} + \frac{F_\tau^2(t_f^{(j)})}{F_{\text{at}}^2} \left(4\frac{F_\tau(t_f^{(j)})}{F_\tau(t_i^{(j)})} - 3\right), \quad (2.41)$$

где  $\text{Ai}(x)$  — функция Эйри,  $E_{\text{at}} = \hbar\omega_{\text{at}} = e^2/a \approx 27.21$  эВ,  $I_{\text{at}} = ce^2/(8\pi a^4) \approx 3.51 \times 10^{16}$  Вт/см<sup>2</sup>. В нашем анализе парциальных амплитуд учитываются две замкнутые траектории, которые начинаются в одной точке —  $t_i^{(j)}$ , а заканчиваются в моменты времени  $t < t_f^{(j)}$  (короткая траектория) и  $t > t_f^{(j)}$  (длинная

траектория). При  $\xi_j < 0$  функция Эйри в  $a_{\mathcal{W}}^{(j)}$  осциллирует и описывает тем самым интерференцию короткой и длинной траекторий. При  $\xi = -1.019$  две траектории сливаются в одну (экстремальную) траекторию, соответствующую временам  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$ . При  $\xi > 0$  функция  $a_{\mathcal{W}}$  экспоненциально затухает. Знак  $\xi_j$  определяется величиной  $\Delta E_{\max}^{(j)}$ , которая представляет собой разность энергии электрона с импульсом  $\mathbf{p}_n$  в лазерном поле,  $\mathcal{P}_j^2/(2m)$ , и максимальной энергии  $E_{\max}^{(j)}$ , набранной электроном за время движения в поле  $\Delta t = t_f^{(j)} - t_i^{(j)}$ . Отметим, что последнее слагаемое в (2.40) дает квантовую поправку к классической энергии электрона  $\mathcal{E}(t_i^{(j)}, t_f^{(j)})$  для случая произвольного периодического поля (для случая монохроматического поля эти поправки были приведены в [140]).

Суммирование в (2.32) производится по всем парам корней  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$  системы (2.31), которые гарантируют положительный знак  $\zeta_j$ , заданного выражением (2.41). (Подробно выбор знака  $\zeta_j$  обсуждается в Приложении Б.) Поскольку мы рассматриваем только высокоэнергетические электроны, для которых  $|(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}_n)| > (e/c) \max(|A_\tau(t_f^{(j)})|)$ , то для электронов, вылетающих «влево»  $[(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}_n) < 0]$ , время  $t_f^{(j)}$  необходимо выбрать таким образом, чтобы  $\dot{F}_\tau(t_f^{(j)}) > 0$ , тогда как для электронов, вылетающих «вправо»  $[(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}_n) > 0]$ , время перерасеяния  $t_f^{(j)}$  должно обеспечивать выполнение условия  $\dot{F}_\tau(t_f^{(j)}) < 0$ .

Третьим сомножителем в амплитуде (2.32),  $f_l(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j)$ , является амплитуда упругого рассеяния электрона в теории эффективного радиуса:

$$f_l(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) = \frac{(2l+1) \left( \tilde{\mathcal{P}}_j \cdot \mathcal{P}_j \right)^l}{\mathcal{R}_l(\mathcal{P}_j^2/2m) \hbar^{2l}}, \quad l = 0, 1, \quad (2.42)$$

где  $\tilde{\mathcal{P}}_j = s_\alpha \mathbf{e}_z |\mathcal{P}_j|$  и  $s_\alpha = \text{sign}[A_\tau(t_f^{(j)})] = \text{sgn}(\dot{F}_\tau(t_f^{(j)}))$ . Для электронов, вылетающих «влево», вектор  $\tilde{\mathcal{P}}_j$  направлен вдоль оси  $z$ , в то время как для электронов, вылетающих «вправо» он направлен противоположно оси  $z$ .

Недостатком теории эффективного радиуса при  $l = 0, 1$  является то, что амплитуды рассеяния вперед и назад отличаются друг от друга лишь фазовым множителем  $(-1)^l$ . В связи с этим, неясно, входит ли амплитуда рассеяния на-



зад в парциальную амплитуду  $A_j$ . Чтобы прояснить ситуацию, можно рассмотреть НПО, используя двухуровневую модель теории эффективного радиуса, в которой учитываются две фазы рассеяния в каналах с  $L = 0$  и  $L = 1$  [139]. Можно показать, что в рамках этой модели третий множитель в параметризации (2.33) определяется амплитудой рассеяния:

$$\begin{aligned} f_l(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) &= \frac{1}{2ik} [(e^{2i\delta_0} - 1) + 3(e^{2i\delta_1} - 1) \cos \theta] \\ &= \mathcal{R}_0^{-1} (\mathcal{P}_j^2/2m) + 3 \frac{(\tilde{\mathcal{P}}_j \cdot \mathcal{P}_j)}{\mathcal{R}_1 (\mathcal{P}_j^2/2m) \hbar^2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

В двухуровневой модели МЭР амплитуды рассеяния вперед и назад различны, поэтому в рамках двухуровневой модели МЭР можно подтвердить, что выражение для парциальной амплитуды рассеяния  $A_j$  определяется амплитудой рассеяния назад.

### 2.2.5. Вероятность отрыва в единицу времени в периодическом поле

Подставим амплитуду НПО в форме (2.32) в выражение (2.27) для вероятности НПО. Тогда выражение для  $\Gamma(\mathbf{p}_n)$  примет вид:

$$\Gamma(\mathbf{p}_n) = \left( \frac{\omega_\tau}{\omega} \right)^2 [\Gamma_{\text{dir}}(\mathbf{p}_n) + \Gamma_{\text{int}}(\mathbf{p}_n)], \quad (2.44)$$

где  $\omega$  — несущая частота короткого лазерного импульса.

Первое («прямое») слагаемое в (2.44) — это сумма «парциальных» вероятностей  $\Gamma_j$ , соответствующих амплитудам  $A_j$  (2.33):

$$\Gamma_{\text{dir}}(\mathbf{p}_n) = \sum_j \Gamma_j(\mathbf{p}_n), \quad (2.45)$$

$$\Gamma_j(\mathbf{p}_n) = \frac{p_n}{ma^3} \left( \frac{\hbar\omega}{E_{\text{at}}} \right)^2 |A_j|^2 = \mathcal{I}_j \mathcal{W}_j \sigma(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j), \quad (2.46)$$

где  $\Gamma_j$  представляет собой произведение трех сомножителей: ионизационного фактора  $\mathcal{I}_j$ ; пропагационного фактора  $\mathcal{W}_j$  и сечения упругого рассеяния назад  $\sigma(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j)$ .

Ионизационный фактор выражается через вероятность распада в единицу времени атомной системы в «эфффективном» постоянном электрическом поле с напряженностью  $\tilde{F}_j \mathbf{e}_z$  [141]:

$$\mathcal{I}_j = \left( \frac{\hbar\omega}{E_{\text{at}}} \right)^2 a^{-1} |a_\tau^{(j)}|^2 = \frac{m}{\pi\hbar\kappa} \tilde{\gamma}_j^2 \Gamma_{\text{st}}(\tilde{F}_j), \quad (2.47)$$

где

$$\Gamma_{\text{st}}(F) = \frac{|E_0|}{\hbar} (2l+1) C_{\kappa l}^2 \frac{F}{2F_0} e^{-2F_0/(3F)}, \quad (2.48)$$

$F_0 = (\kappa a)^3 F_{\text{at}}$ ,  $\tilde{\gamma}_j = \hbar\omega\kappa/(e\tilde{F}_j)$  и  $\tilde{F}_j = |F(t_i^{(j)})|$ . Пропагационный фактор и сечение рассеяния определяются, соответственно, выражениями:

$$\mathcal{W}_j = \frac{p_n \omega_{\text{at}}}{\hbar} |a_{\mathcal{W}}^{(j)}|^2 = \frac{p_n}{\hbar} \frac{\text{Ai}^2(\xi_j)}{\zeta_j^{2/3} [t_f^{(j)} - t_i^{(j)}]^3 \omega_{\text{at}}^2}, \quad (2.49)$$

$$\sigma(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) = |f_l(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j)|^2. \quad (2.50)$$

«Прямое» слагаемое представляет собой независимый вклад парциальных амплитуд, соответствующих различным моментам ионизации,  $t_i^{(j)}$ , в полную амплитуду НПО.

Интерференция амплитуд  $A_j$  с различными  $j$ , соответствующих различным парам времен ионизации и возврата, описывается «интерференционным» слагаемым:

$$\Gamma_{\text{int}}(\mathbf{p}_n) = \sum_{j \neq j'} s_{j,j'} \sqrt{\Gamma_j(\mathbf{p}_n) \Gamma_{j'}(\mathbf{p}_n)} \cos \Phi_{j,j'}, \quad (2.51)$$

$$\Phi_{j,j'} = (\varphi_j - \varphi_{j'})/\hbar + \psi(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) - \psi(\tilde{\mathcal{P}}_{j'}, \mathcal{P}_{j'}), \quad (2.52)$$

где  $s_{j,j'} = \text{sign}[\text{Ai}(\xi_j)\text{Ai}(\xi_{j'})](\sigma_j\sigma_{j'})^l (= \pm 1)$ ,  $\psi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$  — фаза амплитуды рассеяния электрона:

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = |f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)| e^{i\psi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)},$$

а фаза  $\varphi_j$  задается уравнением (2.34).

### 2.3. Дифференциальная вероятность НПО для случая короткого импульса и обобщение для нейтральных атомных систем

Чтобы получить дифференциальную вероятность  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  для случая короткого импульса, заменим  $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$  в выражении (2.44) для дифференциальной вероятности  $\Gamma(\mathbf{p}_n)$  (где  $\mathbf{p}$  — импульс электрона, вылетающего под действием лазерного поля короткой длительности), а величины  $\mathbf{A}_\tau(t)$  и  $\mathbf{F}_\tau(t)$  — векторным потенциалом  $\mathbf{A}(t)$  и вектором электрической напряженности  $\mathbf{F}(t)$  для заданного короткого импульса. С учетом явного вида  $\Gamma(\mathbf{p})$  (см. (2.44)), предел в равенстве (2.2) вычисляется напрямую и дает результат для  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  [15]:

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \frac{2\pi}{\hbar\omega^2} [\Gamma_{\text{dir}}(\mathbf{p}) + \Gamma_{\text{int}}(\mathbf{p})] \quad (2.53)$$

где суммирование по  $j$  в (2.45) и (2.51) для  $\Gamma_{\text{dir}}(\mathbf{p}_n)$  и  $\Gamma_{\text{int}}(\mathbf{p}_n)$  представляет собой суммирование по всем решениям  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$  классической системы уравнений (2.31) для заданного короткого импульса (т.е. заменяя в ней  $\mathbf{A}_\tau(t) \rightarrow \mathbf{A}(t)$  и  $\mathbf{F}_\tau(t) \rightarrow \mathbf{F}(t)$ ).

Поскольку все три фактора в параметризации  $\Gamma_{\text{dir}}(\mathbf{p}_n)$  имеют прозрачный физический смысл, аналитический результат (2.53) может быть обобщен для описания высокоэнергетической части спектра НПИ нейтрального атома в коротком лазерном импульсе. Более того, поскольку пропагационный фактор  $\mathcal{W}_j$ , в сущности, слабо зависит от атомной динамики, это обобщение может быть реализовано простой заменой двух других сомножителей в (2.46) соответствующими атомными аналогами для конкретной атомной системы. В частности, обобщая результат (2.53) для  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  на случай нейтрального атома, заменим вероятность отрыва  $\Gamma_{\text{st}}(\tilde{F})$  в равенстве (2.47) на выражение для потенциала, имеющего кулоновскую асимптотику [26, 141]:

$$\Gamma_{\text{st}}(\tilde{F}) = \frac{|E_0|}{\hbar} (2l + 1) C_{\kappa l}^2 \left( \frac{2F_0}{\tilde{F}} \right)^{2\nu-1} e^{-2F_0/(3\tilde{F})}, \quad (2.54)$$

где  $\nu = Z/(\kappa a)$ ,  $Z$  — заряд атомного остова, а  $C_{\kappa l}$  — асимптотический коэффициент начального связанного состояния в поле с кулоновской асимптотикой:

$$\psi_{\kappa, l, m=0}(\mathbf{r})|_{\kappa r \gg 1} = C_{\kappa l} \sqrt{\kappa r}^{-1} (\kappa r)^\nu e^{-\kappa r} Y_{l0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.55)$$

Также заменим сечение упругого рассеяния  $\sigma$  и фазу амплитуды рассеяния  $\psi$  на соответствующие параметры электрон-ионного рассеяния. Например, в случае атома водорода мы имеем:

$$\sigma(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) = \frac{m^2 e^4}{\mathcal{P}_j^4} \left(1 - (\tilde{\mathcal{P}}_j \cdot \mathcal{P}_j) / \mathcal{P}_j^2\right)^{-2}, \quad (2.56)$$

$$\psi(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) = 2 \arg \Gamma \left(1 + \frac{i\hbar}{\mathcal{P}_j a}\right) - \frac{\hbar}{\mathcal{P}_j a} \ln \left(\frac{1 - (\tilde{\mathcal{P}}_j \cdot \mathcal{P}_j) / \mathcal{P}_j^2}{2}\right). \quad (2.57)$$

## 2.4. Общие свойства $\Gamma_j(\mathbf{p})$

Для интерпретации численных результатов, обсудим, в начале, общие свойства парциальных вероятностей  $\Gamma_j(\mathbf{p})$  [см. (2.46)] для заданного набора времен ионизации  $(t_i^{(j)})$  и возврата  $(t_i^{(j)})$ .

Ключевой составляющей нашего аналитического результата для  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  в выражении (2.53) являются парциальные дифференциальные  $\Gamma_j(\mathbf{p})$ , которые параметризуются (см. (2.46)) аналогично случаю монохроматического поля [86], то есть представляют собой произведение трех сомножителей: ионизационного фактора ( $\mathcal{I}_j$ ), пропагационного фактора ( $\mathcal{W}_j$ ) и сечения упругого рассеяния электрона ( $\sigma$ ). Поскольку ионизационный фактор не зависит от импульса ионизованного электрона  $\mathbf{p}$ , но сильно зависит от времени ионизации  $t_i^{(j)}$  (см. выражение (2.47)), этот сомножитель определяет абсолютный вклад  $\Gamma_j(\mathbf{p})$  в вероятность ионизации  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$ . В частности, этот сомножитель «отфильтровывает» те  $\Gamma_j(\mathbf{p})$  (или электронные траектории, соответствующие наборам  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$ ), для которых мгновенное значение интенсивности лазерного поля в момент ионизации  $t_i^{(j)}$  мало по сравнению с пиковой интенсивностью лазерного импульса.

Пропагационный фактор  $\mathcal{W}_j$  описывает динамику атомного электрона в

лазерном поле после туннелирования в момент  $t_i^{(j)}$  до момента перерасеяния  $t_f^{(j)}$ . Явный вид (2.49) данного сомножителя показывает, что  $\mathcal{W}_j$  становится экспоненциально мал при  $\xi_j > \alpha_0$ , где  $\alpha_0 \equiv -1.019$  — аргумент функции Эйри, при котором короткая и длинная траектории сливаются в одну экстремальную траекторию (см. обсуждение после выражения (2.38)). Таким образом, равенство  $\xi_j = \alpha_0$  или

$$\frac{1}{2m} \left[ \mathbf{p} + \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A(t_f^{(j)}) \right]^2 - E_{\max}^{(j)} = \alpha_0 E_{\text{at}} \zeta_j^{1/3} \quad (2.58)$$

определяет максимальную классическую энергию электрона, которую он может получить из лазерного поля. Для  $u_p = e^2 F^2 / (4m\omega^2) \gg \hbar\omega$  (то есть в низкочастотном пределе) уравнение (2.58) может быть упрощено, поскольку значение выражения слева имеет порядок  $u_p$ , тогда как в правой части стоит величина порядка  $E_{\text{at}}(F/F_{\text{at}})^{2/3}$  [см. равенство (2.41)], где  $F$  — пиковое значение  $F(t)$ . Пренебрегая последним членом, уравнение (2.58) сводится к

$$\frac{1}{2m} \left[ p_{\parallel} + \frac{e}{c} A(t_f^{(j)}) \right]^2 + \frac{1}{2m} p_{\perp}^2 = E_{\max}^{(j)}, \quad (2.59)$$

где  $p_{\parallel} = p \cos \Theta$ ,  $p_{\perp} = p \sin \Theta$ , а  $\Theta$  — угол между направлением импульса ионизованного электрона и вектором поляризации  $\mathbf{e}_z$ . Уравнение (2.59) показывает, что два режима (классически разрешенный и классически запрещенный) разделены в плоскости  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  окружностью радиусом  $\sqrt{2mE_{\max}^{(j)}}$  (см. рис. 2.2). Энергия обрыва плато,  $E_{\text{cut}}^{(j)}$ , как функция угла  $\Theta$  может быть получена решением квадратного уравнения (2.59) при  $p = p_{\text{cut}}^{(j)}$  с последующим выбором наибольшего корня:

$$E_{\text{cut}}^{(j)}(\Theta) = \frac{[\mathbf{p}_{\text{cut}}^{(j)}]^2}{2m} = 2u_p(a_j^2 \cos 2\Theta + \varepsilon_j/2 + |a_j| \sqrt{2\varepsilon_j \cos^2 \Theta - a_j^2 \sin^2 2\Theta}), \quad (2.60)$$

где  $a_j = A(t_f^{(j)})/A_0$ ,  $A_0 = cF/\omega$ , а  $\varepsilon_j = E_{\max}^{(j)}/u_p$ . Как видно из выражения (2.60),  $E_{\text{cut}}^{(j)}$  линейно зависит от  $u_p$ . В низкочастотном пределе  $E_{\max}^{(j)} \approx \mathcal{E}(t_i^{(j)}, t_f^{(j)})$  (пренебрегая малой квантовой поправкой в правой части равенства (2.40)), а  $E_{\text{cut}}^{(j)}$  перестает зависеть от  $E_0$  и становится универсальной для любой атомной мишени [54]. Для  $\Theta = 0^\circ$ , выражение (2.60) дает хорошо известный классический

результат [94]:

$$E_{\text{cut}}^{(j)}(0^\circ) = 2 \left( |a_j| + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{2}} \right)^2 u_p \approx \frac{e^2}{2mc^2} [|A(t_f^{(j)})| + |A(t_f^{(j)}) - A(t_i^{(j)})|]^2 = e_j u_p, \quad (2.61)$$

где  $e_j$  — значение  $E_{\text{cut}}^{(j)}(0^\circ)$ , выраженное в единицах  $u_p$ . (Отметим, что  $e_j = 10.007$  для энергии обрыва плато НПИ в монохроматическом поле [54].) Второе равенство в (2.61) следует из выражений (2.35) и (2.40) и имеет понятную физическую интерпретацию: слагаемое  $|A(t_f^{(j)}) - A(t_i^{(j)})|$  — разность значений импульса в моменты ионизации и возврата электрона к атомному остову, а  $|A(t_f^{(j)})|$  — приращение к механическому импульсу электрона в лазерном поле в момент перерасеяния. Из (2.61) видно, что энергия обрыва плато будет наибольшей, если  $A(t_f^{(j)})$  и  $A(t_i^{(j)})$  имеют разные знаки. Энергия обрыва плато убывает с ростом  $\Theta$  [для  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p} > 0$ ] и  $\tilde{\Theta} = \pi - \Theta$  [для  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p} < 0$ ] [54]. (Отметим, что соотношение (2.60) инвариантно по отношению к замене  $\Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ .) Это ясно из геометрических соображений (см. рис. 2.2): длина вектора  $\mathbf{p}_{\text{cut}}^{(j)}$  становится тем меньше, чем больше угол между  $\mathbf{p}_{\text{cut}}^{(j)}$  и  $\mathbf{e}_z$ .

Пара классических времен  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$  определяет начальный ( $t_i^{(j)}$ ) и конечный ( $t_f^{(j)}$ ) моменты движения электрона в лазерном поле вдоль замкнутой экстремальной траектории, которая обеспечивает локальный максимум ( $E_{\text{cut}}^{(j)}$ ) энергии электрона после перерасеяния в момент времени  $t = t_f^{(j)}$ . Если время  $t$  незначительно отличается от  $t_f^{(j)}$ , то электрон после перерасеяния получает энергию  $E$  меньшую, чем  $E_{\text{cut}}^{(j)}$ . Энергия  $E$  может быть достигнута электроном при движении вдоль двух различных траекторий («короткой» траектории при  $t < t_f^{(j)}$  и «длинной» траектории при  $t > t_f^{(j)}$ ). Поскольку движение по этим двум траекториям обеспечивают одну и ту же энергию в конечном состоянии, то их интерференция приводит к возникновению осцилляционных структур в спектре НПИ [142, 143]. Математически эти осцилляции описываются осцилляциями функции Эйри в (2.49) при  $\xi_j < \alpha_0$ . Условие конструктивной и деструктивной интерференции может быть найдено из уравнения аналогичного (2.58),

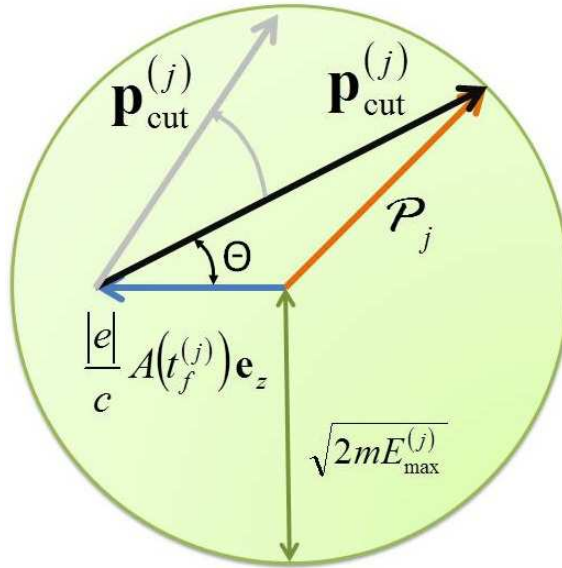


Рис. 2.2. Схема формирования фотоэлектрона с максимальным импульсом  $\mathbf{p}_{\text{cut}}^{(j)}$  для данного  $\Gamma_j$  и  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}_{\text{cut}}^{(j)}) > 0$  (см. подробности в разделе 2.4). Оранжевый вектор — кинематический импульс фотоэлектрона в момент перерасеяния; синий вектор — векторный потенциал лазерного поля в момент перерасеяния; черный вектор — максимальное классическое значение импульса фотоэлектрона после перерасеяния; радиус окружности — модуль максимального импульса электрона в момент возвращения к атомному остову.

$\xi_j = \alpha_n$ , где  $\alpha_n$  для нечетных  $n$  определяет положение нулей функции Эйри (деструктивная интерференция), тогда как для четных  $n$  — задает положение максимумов  $\text{Ai}^2(\xi_j)$  (конструктивная интерференция). При  $n > 1$  с высокой точностью применимо аналитическое приближение для  $\alpha_n$ :  $\alpha_n = 0.25[3(2n + 1)]^{2/3}$ .

## 2.5. Численные результаты

### 2.5.1. Сравнение с результатами для временного уравнения

#### Шредингера

Для численного решения временного уравнения Шредингера используем векторный потенциал лазерного импульса в виде:

$$A(t) = -\frac{cF}{\omega} f(t) \sin(\omega t + \phi), \quad (2.62)$$

где огибающая лазерного импульса  $f(t) = \sin^2(t\pi/\tau)$  при  $t \in (0, \tau)$ ,  $\tau = 2\pi N/\omega$  — полная длительность лазерного импульса,  $N$  — количество оптических периодов в лазерном импульсе,  $F$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  — соответственно, амплитуда электрического поля, несущая частота, относительная фаза лазерного импульса. Для сравнения аналитического результата (2.53) используем результаты численного интегрирования уравнения Шредингера для He и Ar [16]. Для описания электронной динамики в атоме гелия в диссертации используется одноэлектронный потенциал, предложенный в [144]:

$$V_{\text{He}}(r) = -\frac{1}{r}[1 + (1 + br/2)e^{-br}], \quad b = 27/8. \quad (2.63)$$

Асимптотический коэффициент  $C_{\kappa,l}$  и энергия связи  $|E_0|$ , полученные из этого потенциала, равны 1.98 и 0.903 а.е., соответственно. Эти значения близки к рекомендуемым [145]: 1.99 для  $C_{\kappa,l}$ , 0.903 а.е. для  $|E_0|$ . В случае аргона используется одноэлектронный потенциал, предложенный в [146]:

$$V_{\text{Ar}}(r) = V(r) + W(r), \quad (2.64)$$

$$V(r) = \frac{1}{r}[1 + Ae^{-Br} + (17 - A)e^{-Cr}], \quad (2.65)$$

$$A = 5.4, B = 1, C = 3.682, \quad (2.66)$$

$$W(r) = F[(R_x - r)/G]^5 - [(R_x - r)/G]^4, \quad (2.67)$$

$$R_x = 3, F = 2.5, G = 2.01785. \quad (2.68)$$

Этот потенциал, соответственно, дает  $C_{\kappa,l} = 1.23$  и  $|E_0| = 0.582$  а.е., при рекомендованных значениях 1.90, 0.579 а.е. [145].

На рисунках 2.3—2.6 сравнивается решение временного уравнения Шредингера и аналитические результаты для He ( $s$ -состояние) и Ar ( $p$ -состояние), помещенных в интенсивный инфракрасный лазерный импульс: для гелия, пиковая интенсивность  $I = 2 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup> и  $\lambda = 1.5$  мкм, для аргона,  $I = 4 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup> и  $\lambda = 1.25$  мкм. Как видно из рисунков 2.3—2.6, аналитические результаты хорошо согласуются с результатами численного решения уравнения Шредингера, воспроизводя все детали высокоэнергетической части плато



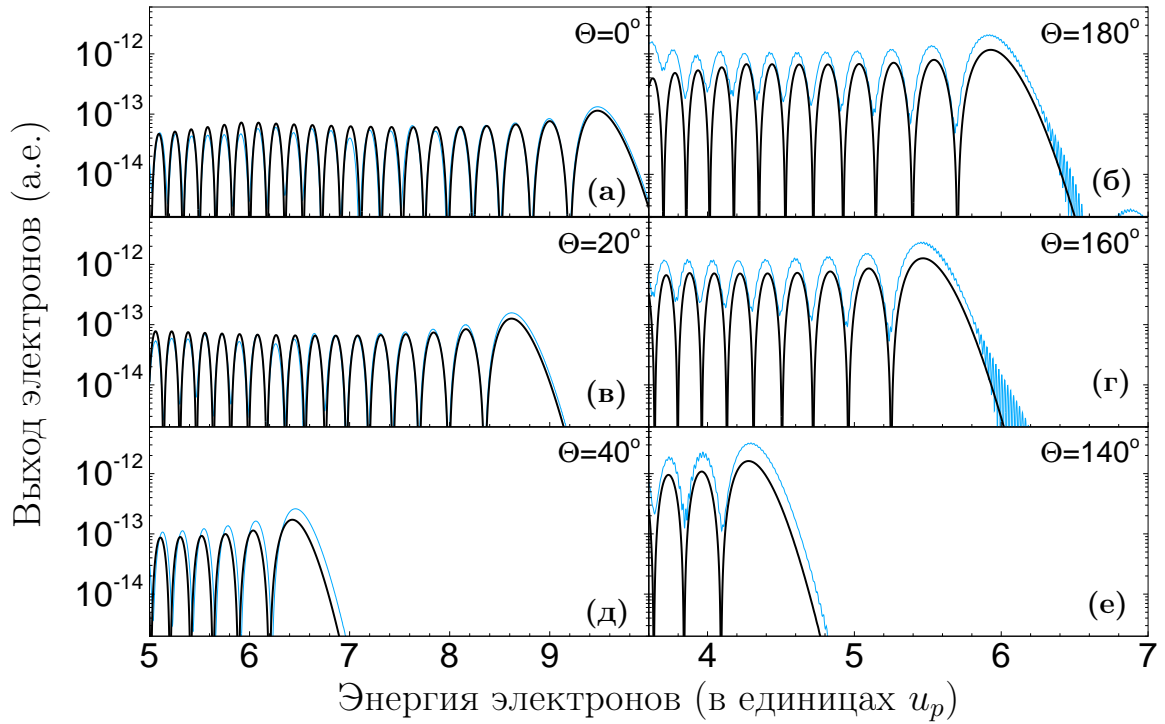


Рис. 2.3. Спектры НПИ для атома гелия, помещенного в поле лазерного импульса (2.62), с пиковой интенсивностью  $I = 2 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 1.5$  мкм ( $\hbar\omega = 0.83$  эВ),  $N = 4$  и  $\phi = 0$ . Жирной сплошной линией (черного цвета) изображен аналитический результат (2.53), тонкой сплошной линией (голубого цвета) изображен результат численного решения уравнения Шредингера.  $\Theta$  — угол между направлением импульса ионизованного электрона  $\mathbf{p}$  и осью поляризации лазерного поля  $\mathbf{e}_z$

НПИ. В частности, аналитический результат описывает как крупномасштабные осцилляции по спектру НПИ, так и мелкомасштабные осцилляции на масштабе энергий фотоэлектрона порядка  $\hbar\omega$ . Форма спектра НПИ сильно зависит от числа оптических периодов в лазерном импульсе, угла вылета электрона  $\Theta$  и относительной фазы  $\phi$ . Например, для фиксированных  $\Theta = 0^\circ$  и  $\phi = 0^\circ$  при малых  $N$  формируется единственное плато в спектре НПИ (см. рис. 2.3(а) и 2.5(а)), а при больших  $N$ , напротив, возникает второе плато (см. рис. 2.4(а), 2.5(в), 2.5(д)).

Аналитические результаты хорошо согласуются с результатами численного решения нестационарного уравнения Шредингера в области энергий электрона  $E \gtrsim 5u_p$  ( $u_p = 1.54$  а.е. для рис. 2.3, 2.4 и  $u_p = 2.14$  а.е. для рисунков 2.5 и

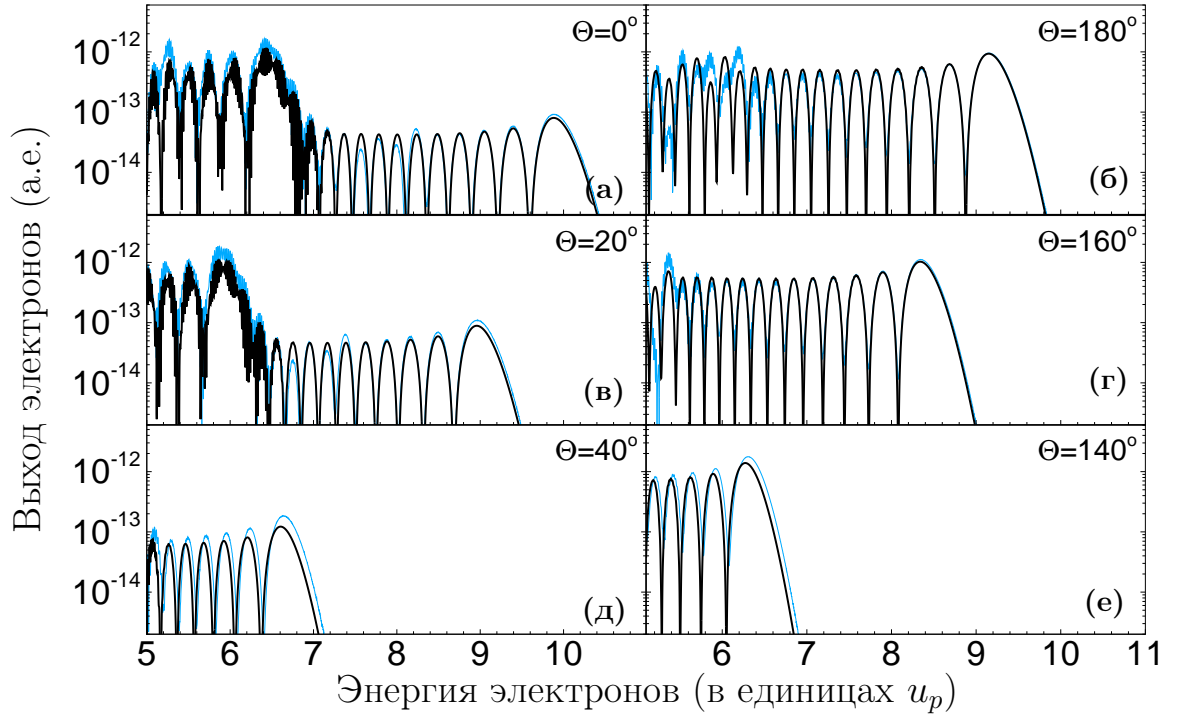


Рис. 2.4. То же, что и на рисунке 2.3, но для  $N = 6$  и  $\phi = \pi/2$ .

2.6), при этом для  $E < 5u_p$  наблюдаются расхождения. По-видимому, причина этих расхождений связана с недостаточной точностью аналитических расчетов в области низких энергий электрона. Точность аналитических результатов ограничена областью применимости кубической аппроксимации для фазовой функции  $\Phi(t, t'_\nu)$  из (Б.4). Эта аппроксимация применима для энергий электрона в окрестности энергии обрыва плато, поэтому точность оценки  $\Gamma_j$  снижается с уменьшением энергии перерассеянного электрона  $E$ . Точность наших аналитических результатов также убывает с увеличением угла между импульсом  $\mathbf{p}$  и осью поляризации лазерного импульса. Сравнение наших аналитических результатов и результатов решения временного уравнения Шредингера показывает, что хорошее согласие достигается для углов  $\Theta < 45^\circ$  при  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_z) > 0$  и для  $\Theta > 135^\circ$  при  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_z) < 0$ , где  $\Theta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{e}_z$ . Ограничение по углам вылета фотоэлектрона в аналитическом результате обусловлено приближенным вычислением второй производной фазовой функции  $\Phi(t, t'_\nu)$  (см. (Б.9)), которое применимо лишь для малых углов  $\Theta$ .

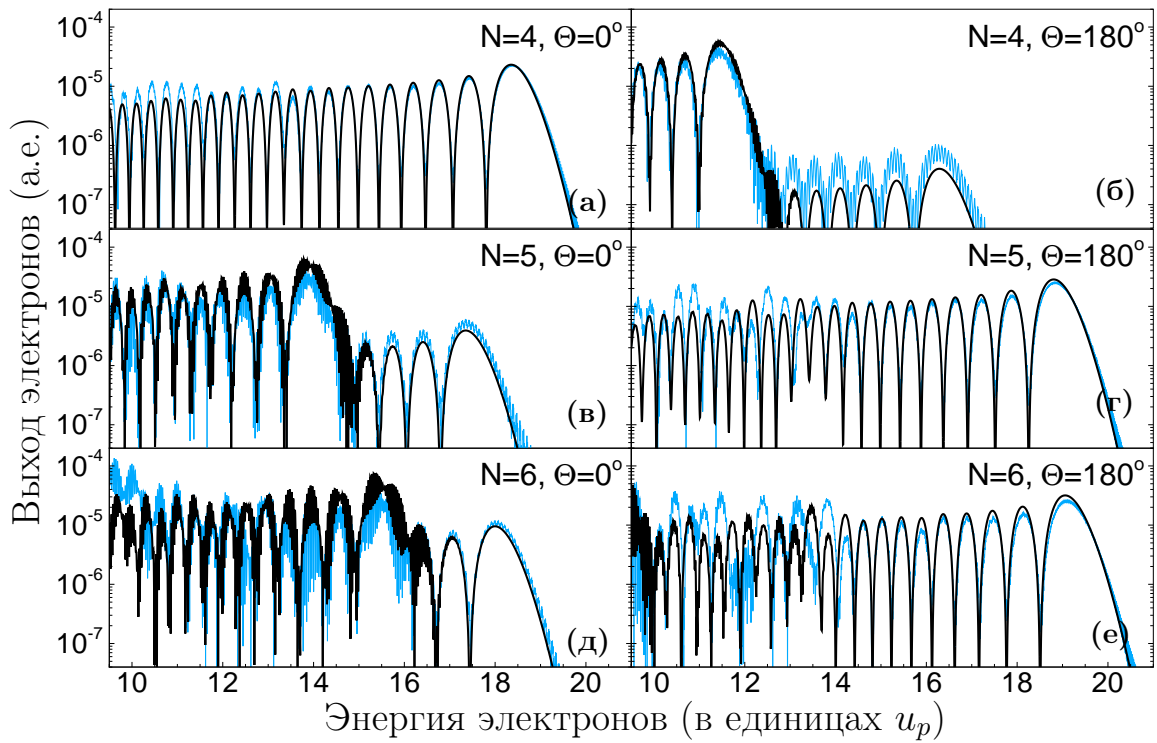


Рис. 2.5. Спектры НПИ для атома аргона, помещенного в поле лазерного импульса (2.62), с пиковой интенсивностью  $I = 4 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 1.25$  мкм ( $\hbar\omega = 1.03$  эВ) и  $\phi = 0$ . Жирной сплошной линией (черного цвета) изображен аналитический результат (2.53), тонкой сплошной линией (голубого цвета) изображен результат численного решения уравнения Шредингера.

### 2.5.2. Особенности в спектрах НПИ атомов в поле короткого лазерного импульса

Многочисленные расчеты спектров НПИ в коротком лазерном импульсе указывают на возникновение новых эффектов, отсутствующих в случае монохроматического поля: 1) возникновение нескольких платообразных структур в спектре НПИ; 2) нарушение право-левой симметрии в спектрах НПИ [40, 94]; 3) возникновение мелкомасштабных осцилляций в высокоэнергетической части спектра НПИ [94]. В следующих трех разделах мы обсуждаем возникновение этих эффектов в спектрах НПИ в рамках предложенной аналитической теории.

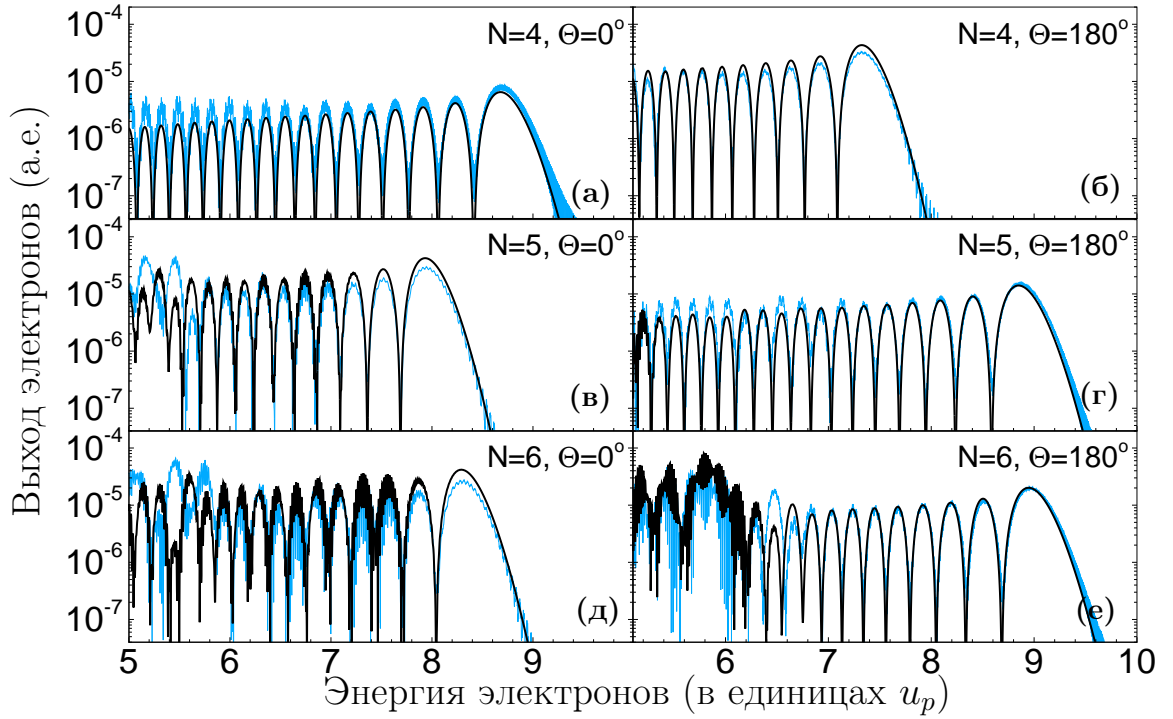


Рис. 2.6. То же, что и на рисунке 2.5, но для  $\phi = \pi/2$ .

### 2.5.3. Возникновение нескольких плато в спектрах НПИ

Каждая парциальная вероятность  $\Gamma_j$  (см. (2.46)) определяется моментами ионизации ( $t_i^{(j)}$ ) и перерасеяния ( $t_f^{(j)}$ ). Так как ионизационный фактор  $\mathcal{I}_j$  и энергия обрыва плато  $E_{\text{cut}}^{(j)}(\Theta = 0^\circ) = e_j u_p$  могут быть выражены через  $t_i^{(j)}$  и  $t_f^{(j)}$  (см. соотношения (2.47) и (2.61)), то  $\Gamma_j$  можно связать с ионизационным фактором  $\mathcal{I}_j$  (см. выражения (2.46) и (2.47)) и энергией обрыва плато  $E_{\text{cut}}^{(j)}(\Theta = 0^\circ) = e_j u_p$  (см. (2.61)). Предположим, что есть набор парциальных вероятностей  $\Gamma_j$ , для которого  $\mathcal{I}_{j_1} < \mathcal{I}_{j_2} < \dots < \mathcal{I}_{j_n}$  и  $e_{j_1} > e_{j_2} > \dots > e_{j_n}$  (см. определение  $e_j$  в уравнении (2.61)), тогда каждая парциальная вероятность из этого набора вносит вклад в спектр НПИ только для определенной области энергий, формируя тем самым несколько платообразных структур в спектре НПИ. Действительно, для энергий  $E > E_{j_2}$  только  $\Gamma_{j_1}$  вносит вклад в формирование плато вплоть до энергии  $E_{j_1}$ , тогда как для интервала энергий  $E_{j_2} > E > E_{j_3}$  вклад вносят уже две парциальных вероятности  $\Gamma_j$ :  $\Gamma_{j_1}$  и  $\Gamma_{j_2}$ . Поскольку  $\mathcal{I}_{j_2} > \mathcal{I}_{j_1}$ , вклад от  $\Gamma_{j_1}$  подавляется вкладом  $\Gamma_{j_2}$  и, таким образом,  $\Gamma_{j_2}$  определяет форму второго

Таблица 2.1. Значения параметров для  $j$ -тых траекторий, имеющих наибольшие энергии обрыва плато НПИ в лазерном импульсе с различными числом оптических периодов  $N$  и относительной фазой  $\phi$ . Для каждой  $j$ -той траектории указаны:  $t_i^{(j)}$  — время ионизации,  $t_f^{(j)}$  — время перерассеяния,  $f_j = F(t_i^{(j)})/F$  — напряженность лазерного поля в момент ионизации в единицах пиковой напряженности поля,  $a_j = A(t_f^{(j)})/A_0$  (где  $A_0 = cF/\omega$ ) — значение векторного потенциала в момент перерассеяния в единицах  $A_0$ ,  $\varepsilon_j = E_{\max}^{(j)}/u_p$  — максимальное значение набранной энергии в единицах  $u_p$ ,  $e_j = E_{\text{cut}}^{(j)}(0^\circ)/u_p$  — максимальная энергия электрона после перерассеяния назад в единицах  $u_p$ ,  $\mathcal{I}_j$  — ионизационный фактор (см. выражения (2.46), (2.47)).

$j$	$\omega t_i^{(j)}$	$\omega t_f^{(j)}$	$f_j$	$a_j$	$\varepsilon_j$	$e_j$	$\mathcal{I}_j$ (a.e.)
$N = 4, \phi = 0, (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) > 0$							
1	9.72	13.95	-0.87	-0.95	2.91	9.33	$4.50 \times 10^{-11}$
$N = 4, \phi = 0, (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) < 0$							
1	12.90	16.96	0.94	0.69	2.07	5.83	$2.66 \times 10^{-10}$
$N = 6, \phi = \pi/2, (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) > 0$							
1	14.40	18.71	-0.85	-0.99	2.96	9.73	$3.36 \times 10^{-11}$
2	20.73	24.88	-0.92	-0.74	2.15	6.34	$1.84 \times 10^{-10}$
3	14.25	24.99	-0.86	-0.75	1.44	5.13	$4.11 \times 10^{-11}$
$N = 6, \phi = \pi/2, (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) < 0$							
1	17.56	21.80	0.95	0.92	2.89	9.03	$3.56 \times 10^{-10}$
2	14.25	21.89	-0.86	0.93	1.41	6.27	$4.11 \times 10^{-11}$

плато.

Возникновение нескольких платообразных структур в спектре НПИ под действием короткого лазерного импульса показано на рисунках 2.4(а) и 2.4(в). Таблица 2.1 демонстрирует, что при  $N = 6$  и положительном скалярном произведении  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_z)$  основной вклад в формирование спектра НПИ дают три парциальные вероятности:  $\Gamma_j$  с  $j = 1$  определяет наиболее длинное и низкое плато,  $\Gamma_j$

с  $j = 2$  — короткое, но более высокое плато, а  $\Gamma_j$  с  $j = 3$  наиболее существенный вклад дает лишь в области энергий  $E < 5u_p$  и связан с многократными возвращениями, которые будут обсуждаться в разделе 2.5.6. На рисунках 2.4(б), 2.4(г) и 2.4(е) представлены результаты для отрицательных скалярных произведений  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_z)$ . В этом случае основной вклад вносят две парциальные вероятности  $\Gamma_j$ . Тем не менее, из-за существенной разницы в значениях ионизационных факторов ( $\mathcal{I}_1 > \mathcal{I}_2$ ), платообразная структура, обусловленная  $\Gamma_1$ , скрывает соответствующую структуру  $\Gamma_2$  (см. таблицу 2.1). Возникновение нескольких плато в спектрах НПИ принципиально зависит от формы лазерного импульса, которая определяется количеством оптических циклов  $N$ , относительной фазой  $\phi$  и формой огибающей.

#### 2.5.4. Право–левая асимметрия в спектрах НПИ в коротком лазерном импульсе

Для короткого лазерного импульса со стабилизированной относительной фазой угловое распределение фотоэлектронов асимметрично для противоположных направлений импульса (см. [94]). Качественно возникновение такой асимметрии в спектрах НПИ обусловлено отсутствием в задаче симметрии при замене  $\mathbf{F}(t) \rightarrow -\mathbf{F}(t)$  или  $\mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z$ . Так как истинная скалярная величина  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  включает вектор  $\mathbf{e}_z$  только в комбинации с другим вектором  $\mathbf{p}$ , то замена  $\mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z$  эквивалентна замене  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  [147]. Поскольку напряженность поля  $\mathbf{F}(t)$  существенно зависит от фазы  $\phi$ , то вариация относительной фазы позволяет контролировать асимметрию в угловом распределении электронов НПИ [96, 148]. Асимметрия выхода электронов НПИ, испущенных в левую и правую полусферы хорошо видна на рисунках 2.3–2.6. В соответствии с предложенной аналитической теорией асимметрия спектров НПИ возникает из-за разницы в значениях ионизационных факторов и энергий обрыва плато  $E_{\text{cut}}^{(j)}(\Theta)$  для углов  $\Theta$  и  $\pi - \Theta$ .

Чтобы продемонстрировать фазовую зависимость энергии обрыва плато

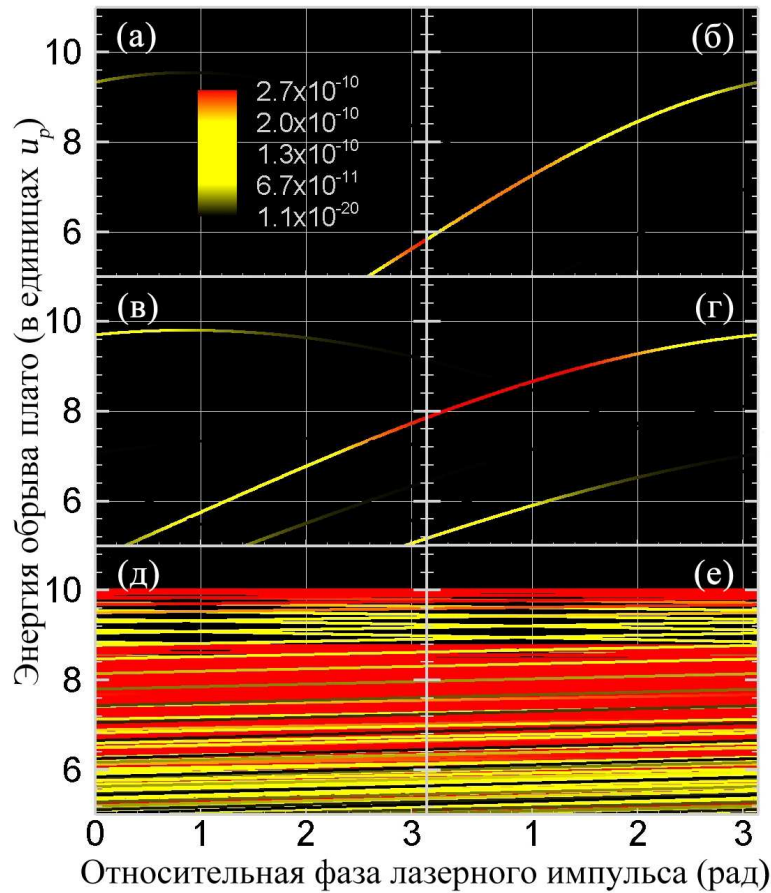


Рис. 2.7. Зависимости энергии обрыва плато  $E_{\text{cut}}^{(j)}(0^\circ)$  (левые панели) и  $E_{\text{cut}}^{(j)}(180^\circ)$  (правые панели) от относительной фазы лазерного импульса  $\phi$  для различного числа оптических периодов в коротком лазерном импульсе. Интенсивность  $I$  и длина волны  $\lambda$  лазерного импульса те же, что и на рисунке 2.3. Панели (а) и (б):  $N = 4$ , (в) и (г):  $N = 6$ , (д) и (е):  $N = 100$ . Градиентное распределение цвета линий соответствует изменению ионизационного фактора  $\mathcal{I}_j$  (ассоциированного с  $\Gamma_j$ ) с ростом фазы  $\phi$

и отсутствие асимметрии НПИ при большом числе оптических периодов  $N$  в лазерном импульсе, на рисунке 2.7 представлены  $E_{\text{cut}}^{(j)}(0^\circ)$  и  $E_{\text{cut}}^{(j)}(180^\circ)$  как функции относительной фазы  $\phi$  при различных  $N$ . Каждая линия на рисунке 2.7 окрашена в соответствии с величиной ионизационного фактора при заданных  $\phi$  и  $j$ . Например, на рис. 2.7(г) представлены две кривые, которые соответствуют двум  $\Gamma_j$  при  $\Theta = 180^\circ$ : верхняя линия соответствует  $\Gamma_j$  с большей энергией обрыва плато и ионизационным фактором, убывающим с ростом  $\phi$  (это показано градиентным изменением окраски линии от красного к желтому); нижняя линия соответствует  $\Gamma_j$  с меньшей энергией обрыва плато и еще меньшим (по

сравнению с верхней линией) значением ионизационного фактора, который также убывает с ростом  $\phi$  (это изображено градиентным переходом цвета линии от желтого к черному). Как видно на рисунке 2.7, с увеличением количества оптических периодов  $N$  в лазерном импульсе кривые, изображающие энергии обрыва плато при  $\Theta = 0^\circ$  и  $\Theta = 180^\circ$ , сближаются, а право–левая асимметрия спектров НПИ уменьшается. При больших  $N$  соизмеримый вклад в полное значение вероятности НПИ вносит все большее количество парциальных членов  $\Gamma_j$ . В этом случае энергия обрыва плато  $E_{\text{cut}}^{(j)}$  становится нечувствительна к изменению относительной фазы (на рис. 2.7 при  $N = 100$  близкие к горизонтальным равномерно окрашенные линии обозначают энергию обрыва плато  $\sim 10u_p$ ), а следовательно, право–левая асимметрия исчезает. Наш численный анализ показывает, что при больших  $N$  ионизационные факторы парциальных вероятностей  $\Gamma_j$ , вносящих основной вклад, примерно одинаковы. Явное выражение границы высокоэнергетического плато в окрестности энергий  $10u_p$ ,  $8u_p$  и т.д., согласуется с квазиклассическим анализом для монохроматического поля [63].

### 2.5.5. Интерференционные явления в спектрах НПИ и их

#### зависимость от числа $N$ оптических периодов в коротком лазерном импульсе

В спектрах НПИ наблюдаются как крупномасштабные, так и мелкомасштабные осцилляции, которые возникают на разных интервалах энергии электрона (см. рис. 2.4(а)). Крупные осцилляции типичны для области вблизи обрыва плато спектра НПИ (см. рис. 2.4(а) при энергии  $E > 11$  а.е.), тогда как мелкомасштабные осцилляции возникают в средней части плато спектра НПИ (см. рис. 2.4(а) при энергии  $E < 11$  а.е. и рис. 2.8). Отметим, что мелкие осцилляции промодулированы крупномасштабными. Хотя расстояние между двумя ближайшими пиками мелких осцилляций порядка  $\hbar\omega$ , из–за своей зависимости от числа оптических периодов в импульсе и фазы  $\phi$  они не могут быть связаны с хорошо известными пиками НПИ, отстоящими друг от друга на



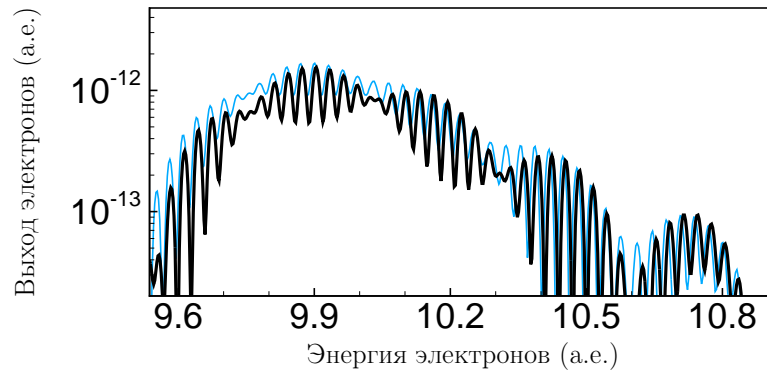


Рис. 2.8. Детализация мелкомасштабных осцилляций в спектре НПИ для тех же лазерных параметров, что и на рисунке 2.4(а).

величину энергии фотона (см. рис. 2.9(б), 2.9(г), 2.9(д)). Как обсуждалось в разделе 2.4, крупномасштабные осцилляции возникают за счет интерференции короткой и длинной траекторий, вносящих одинаковый вклад в одну и ту же парциальную амплитуду  $A_j$ . Мелкие осцилляции возникают за счет интерференции между различными амплитудами  $A_j$  и  $A'_j$  ( $j \neq j'$ ), соизмеримыми по величине (см. (2.51)).

С ростом  $N$  интерференционные особенности спектра НПИ становятся более сложными, так как все большее количество парциальных амплитуд  $A_j$  вносят соизмеримый вклад. Начиная с некоторого большого значения  $N$ , в результате интерференции между многими парциальными амплитудами  $A_j$  за точкой обрыва плато формируются резкие пики НПИ, которые не зависят от относительной фазы. С дальнейшим ростом  $N$ , эти пики НПИ появляются и в области плато, а зависимость фазы  $\varphi_j$  (см. (2.34)) амплитуд  $A_j$  становится линейной по  $j$ . В самом деле, если лазерный импульс достаточно длинный, то на некотором интервале времени  $t$  лазерное поле можно считать монохроматическим. Таким образом, времена ионизации для различных оптических периодов на всем этом временном интервале могут быть сведены к значению времени ионизации на одном оптическом периоде  $T = 2\pi/\omega$  путем сдвига на целое число периодов. Поскольку времена перерасеяния связаны с временами ионизации,

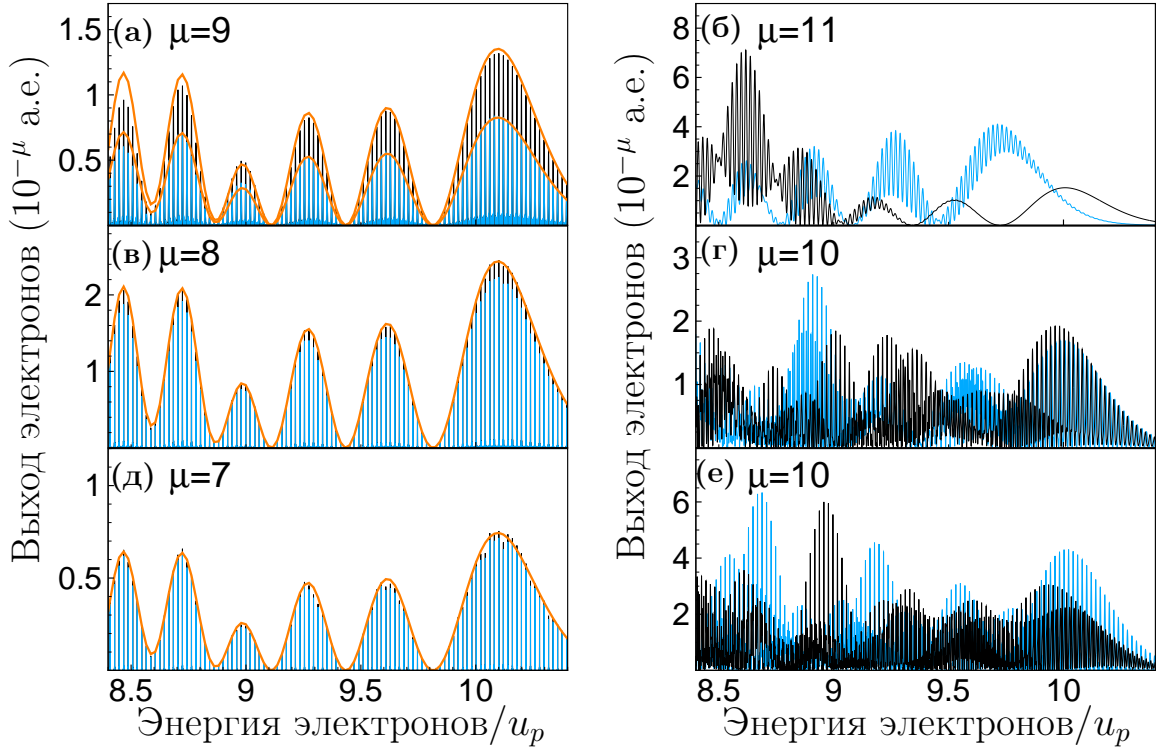


Рис. 2.9. Спектр НПИ для атома гелия в лазерном импульсе с пиковой интенсивностью  $I = 2 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 1.2$  мкм и  $\phi = 0$ . Левые панели: спектры НПИ в поле трапециевидного импульса, с передним и задним фронтом в два оптических периода и  $N - 4$  оптическими периодами на область постоянной амплитуды поля; правые панели: спектры НПИ в лазерном импульсе длительностью в  $N$  оптических периодов с огибающей  $\sin^2$ . Голубые тонкие линии: спектры НПИ при  $\Theta = 0^\circ$ ; черные линии: спектры НПИ при  $\Theta = 180^\circ$ . Жирные оранжевые линии: спектры НПИ в монохроматическом поле (перенормированные на спектр НПИ в коротком импульсе). (а), (б):  $N = 10$ ; (в), (г):  $N = 30$ ; (д), (е):  $N = 50$ .

то они испытывают аналогичный сдвиг, что и времена  $t_i^{(j)}$ , то есть

$$t_i^{(j)} \approx t_i^{(q)} + j'T, \quad t_f^{(j)} \approx t_f^{(q)} + j'T, \quad j' \in [0, M], \quad (2.69)$$

где  $\{t_i^{(q)}, t_f^{(q)}\}$  —  $q$ -тая пара времен ионизации и возврата для монохроматического поля  $[t_i^{(q)} \in (0, T)]$  и  $M$  — количество периодов, для которых поле импульса можно приближенно считать монохроматическим. Используя соотношение (2.69), основные компоненты амплитуды  $A_j$  в выражении (2.33) можно

преобразовать к виду:

$$a_\tau(t_i^{(j)}) \rightarrow a_\tau(t_i^{(q)}), \quad (2.70)$$

$$a_{\mathcal{W}}(t_i^{(j)}, t_f^{(j)}) \rightarrow a_{\mathcal{W}}(t_i^{(q)}, t_f^{(q)}), \quad (2.71)$$

$$\mathcal{P}(t_f^{(j)}) \rightarrow \mathcal{P}(t_f^{(q)}), \quad (2.72)$$

$$\varphi(t_i^{(j)}, t_f^{(j)}) \rightarrow \varphi(t_i^{(q)}, t_f^{(q)}) + \Delta_{\mathbf{p}} j' T, \quad (2.73)$$

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2 / (2m) + |E_0| + u_p, \quad (2.74)$$

где энергия  $\Delta_{\mathbf{p}}$  возникает из независимой от времени компоненты подынтегральной части  $S(\mathbf{p}_n, t)$  (см. (2.24)) при  $\varepsilon = E_0$ . В результате амплитуда перерассеяния  $\mathcal{A}^R(\mathbf{p})$  в рамках приближения (2.69) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^R(\mathbf{p}) &= \sqrt{i} \frac{\hbar\omega_\tau}{e^2\sqrt{a}} \sum_{j'=0}^M A_{\text{mon}}(\mathbf{p}) e^{i\Delta_{\mathbf{p}} j' T} = \\ &= \sqrt{i} e^{i\Delta_{\mathbf{p}} N T / (2\hbar)} \frac{\hbar\omega_\tau}{e^2\sqrt{a}} A_{\text{mon}}(\mathbf{p}) \frac{\sin \left[ \frac{(M+1)\Delta_{\mathbf{p}} T}{2\hbar} \right]}{\sin \left( \frac{\Delta_{\mathbf{p}} T}{2\hbar} \right)}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

где  $A_{\text{mon}}$  — амплитуда НПИ в монохроматическом поле:

$$A_{\text{mon}}(\mathbf{p}) = \sum_q A_q. \quad (2.76)$$

Подставляя амплитуду  $\mathcal{A}^R(\mathbf{p})$  в (2.27), из (2.2) получим:

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \frac{2\pi}{\hbar\omega^2} \Gamma_{\text{mon}}(\mathbf{p}) \mathcal{F}(\mathbf{p}), \quad (2.77)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \frac{\sin^2 \left[ \frac{(M+1)\Delta_{\mathbf{p}} T}{2\hbar} \right]}{\sin^2 \left( \frac{\Delta_{\mathbf{p}} T}{2\hbar} \right)}, \quad (2.78)$$

где  $\Gamma_{\text{mon}}(\mathbf{p})$  — дифференциальная вероятность ионизации (в единицу времени) для монохроматического поля и  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  — функция с пиками при  $p = p_n = \sqrt{2m(n\hbar\omega - |E_0| - u_p)}$ . В пределе  $M \rightarrow \infty$  функцию  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  можно аппроксимировать суммой  $\delta$ -функций:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\mathbf{p}) = \hbar\omega(M+1) \sum_n \delta \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{p_n^2}{2m} \right). \quad (2.79)$$

Подставляя (2.79) в (2.77), получим дифференциальную вероятность ионизации для длинного импульса, выраженную через вероятности  $n$ -фотонной ионизации в единицу времени:

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = T(M + 1) \sum_n \Gamma(\mathbf{p}_n) \delta\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m}\right). \quad (2.80)$$

Количество оптических циклов в лазерном импульсе, при котором асимптотический результат (2.77) становится применим к описанию формы спектра НПИ в коротком импульсе, существенно зависит от формы импульса. Как показано на рисунке 2.9, для трапецивидного импульса, асимптотический результат (2.77) применим уже при  $N = 10$ , как для  $\Theta = 0^\circ$ , так и для  $\Theta = 180^\circ$ , тогда как для импульса с огибающей  $\sin^2$  даже при  $N = 50$  не достигается хорошего согласия с асимптотическим результатом (2.77). В нашем случае трапецивидный импульс для  $N = 10$  выбирается в виде: два оптических периода на включение и выключение поля и шесть оптических периодов на область постоянной амплитуды поля. Обратим внимание на различие между абсолютным значением выхода НПИ при  $\Theta = 0^\circ$  и  $\Theta = 180^\circ$  для трапецивидного импульса (см. рис. 2.9(a)). Эта разница связана с различным числом оптических полупериодов, вносящих основной вклад в выход НПИ при  $\Theta = 0^\circ$  (шесть полупериодов) и  $\Theta = 180^\circ$  (пять полупериодов). Тем не менее, форма обоих спектров НПИ в коротком импульсе в точности совпадает со случаем монохроматического поля.

### 2.5.6. Вклад электронных траекторий с многократными возвращениями в спектр НПИ в коротком импульсе

Как обсуждалось в разделе 2.2.4, каждое решение  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$  классической системы уравнений (2.31) определяет экстремальную классическую замкнутую траекторию. Каждая замкнутая  $j$ -тая траектория может быть классифицирована в соответствии с временем движения электрона вдоль этой траектории,  $\Delta t_j = t_f^{(j)} - t_i^{(j)}$ . Траектории, для которых  $\Delta t_j < T$  соответствуют однократному возврату электрона (ОВ траектории) (см. рис. 2.10(a)); напротив, если

$\Delta t_j > T$ , то электроны могут многократно возвращаться в исходную точку и такие траектории мы классифицируем как многократные (МВ траектории) (см. рис. 2.10(б)). Если энергия ионизованного электрона,  $E$ , меньше, чем максимальная энергия,  $E_{\max}^{(j)}$ , то электрон может набрать энергию  $E$ , двигаясь в лазерном поле вдоль «короткой» и «длинной» замкнутых траекторий (см. пунктирные линии на рис. 2.10(а)). Напомним, что для любого типа траекторий знак первой производной напряженности электрического поля,  $\dot{F}(t)$ , при  $t = t_f^{(j)}$  определяет, в какую, левую или правую, полусферу рассеивается электрон: в левую полусферу [ $\Theta \in [\pi/2, \pi]$ ] — если  $\dot{F}(t_f^{(j)}) > 0$  и в правую полусферу [ $\Theta \in (0, \pi/2]$ ] — если  $\dot{F}(t_f^{(j)}) < 0$  (см. обсуждение перед соотношением (2.42) и в Приложении Б).

Поскольку время движения вдоль ОВ траектории меньше оптического периода лазерного импульса, то вклад таких траекторий в выход электронов в левую и правую полусферы определяется знаком электрического поля  $F(t)$  в момент ионизации: в левую (правую) полусферу, если  $F(t_i^{(j)}) > 0$  ( $F(t_i^{(j)}) < 0$ ). Таким образом, если мы ограничим наш анализ только ОВ траекториями, то знак множителя  $(-\sigma_j)^l$  в выражении (2.36) перестанет зависеть от  $j$ . Более того, исчезнет зависимость интерференционного члена  $\Gamma_{\text{int}}$  в равенстве (2.51) от пространственной симметрии начального состояния, поскольку зависимость от  $l$  определяется множителем  $s_{j,j'}$  (см. его определение после (2.52)), в котором  $\sigma_j$  и  $\sigma_{j'}$  имеют одинаковый знак в приближении ОВ траекторий. (Отметим, что это приближение становится точным в случае сверхкороткого импульса, содержащего несколько оптических осцилляций электрического поля, как в случае  $N = 4$  на рис. 2.3.)

МВ траектории вносят вклад в среднюю часть НПИ плато [63]. На рисунке 2.11 представлен спектр НПИ для воображаемой атомной системы, с энергией связи  $|E_0| = 15.84$  эВ,  $C_{\kappa,l} = 1$  и постоянной амплитудой рассеяния  $f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = 1$ , выбранной в таком виде для минимизации эффектов атомного потенциала. Рисунок 2.11 показывает, что приближение ОВ траекторий

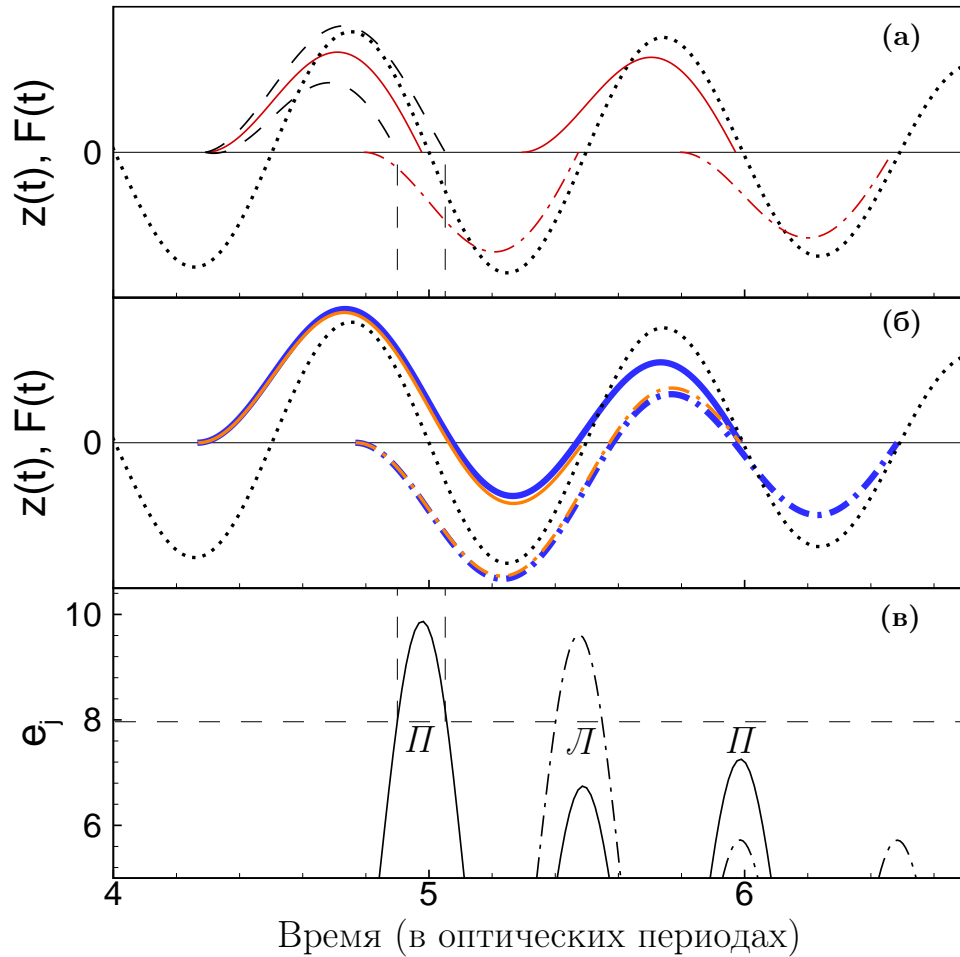


Рис. 2.10. Изображение классических ОВ и МВ траекторий электрона  $z(t)$  (панели (а) и (б)) и энергии перерассеянного электрона в единицах  $u_p$ ,  $e_j = E_{\text{cut}}^{(j)}/u_p$ , (панель (в)) как функции времени для лазерного импульса с огибающей  $\sin^2$  при  $N = 10$  и  $\phi = \pi/2$ . Пунктирная линия на панелях (а), (б) — электрическое поле лазерного импульса  $F(t)$ . Панель (а): сплошные (штрих-пунктирные) красные линии — ОВ траектории, соответствующие электрону, ионизованному на отрицательном (положительном) полупериоде электрического поля; штриховые черные линии изображают пример пары короткой и длинной траекторий. Панель (б): двукратно возвратные (тонкие оранжевые линии) и трехкратно возвратные (жирные голубые линии) траектории; сплошные (штрих-пунктирные) линии используются для изображения двукратно и трехкратно возвратных траекторий, которые начинаются на первом отрицательном (положительном) полупериоде лазерного импульса. Панель (в): сплошные (штрих-пунктирные) линии — значение  $e_j$  ( $e_j = E_{\text{cut}}^{(j)}/u_p$ ) для электронов, ионизованных на отрицательных (положительных) полупериодах поля. Обозначение П (Л) соответствует вылету электрона в правую (левую) полусферу.

применимо вблизи точки обрыва высокоэнергетического плато (т.е. для энергий  $E \geq 8.5u_p$ ). При  $E < 8.5u_p$  наблюдается заметное несоответствие между

спектрами НПИ для  $l = 0$  и  $l = 1$  так же, как и между точными результатами и приближением ОВ траекторий. Эти расхождения вызваны вкладом МВ траекторий, которые могут возникать как на положительном, так и на отрицательном полупериоде электрического поля (см. рис. 2.10(б)). В зависимости от времени движения, эти МВ траектории могут вносить вклад в выход электронов как в правую, так и в левую полусферы. Например, МВ траектория, возникающая при отрицательном значении поля и трижды возвращающаяся (см. синюю линию на рис. 2.10(б)), дает вклад в правую полусферу; тогда как траектория, возникающая в тот же момент времени, но дважды возвращающаяся (см. оранжевую линию на рис. 2.10(б)), дает вклад в левую полусферу. На рисунке 2.10(в) представлена энергия электрона после перерассеяния как функция времени (перерассеяния)  $t$ . Эти результаты явно демонстрируют, что для энергий  $E < 7u_p$  вклад вносят как ОВ траектории (красная штрих-пунктирная линия на рис. 2.10(а)), так и МВ траектории (жирная оранжевая линия на рис. 2.10(б)), хотя эти траектории и возникают на разных (положительном и отрицательном) полупериодах лазерного импульса.

Согласно (2.51) результат интерференции двух парциальных амплитуд  $A_j$  зависит от знака электрического поля в момент ионизации и от четности начального состояния. Если электрическое поле имеет одинаковый знак в оба момента ионизации, парциальные амплитуды  $A_j$  и  $A_{j'}$  интерферируют «в фазе». Если же знаки противоположны, то результат интерференции зависит от четности начального состояния: для четного  $l$  ( $s$ -состояние), они все так же интерферируют «в фазе», однако, для нечетного  $l$  ( $p$ -состояние) они интерферируют «в противофазе». Таким образом, форма средней части плато НПИ ( $E < 8u_p$ ) зависит от пространственной симметрии начального состояния: например, если спектр НПИ для  $s$ -состояния имеет локальный максимум, то спектр НПИ для  $p$ -состояния имеет локальный минимум при этой же энергии (см. соответствующие пики и провалы в спектрах НПИ  $s$  и  $p$  состояний при  $E = 5.4u_p$  и  $5.6u_p$  на рис. 2.11(б)).

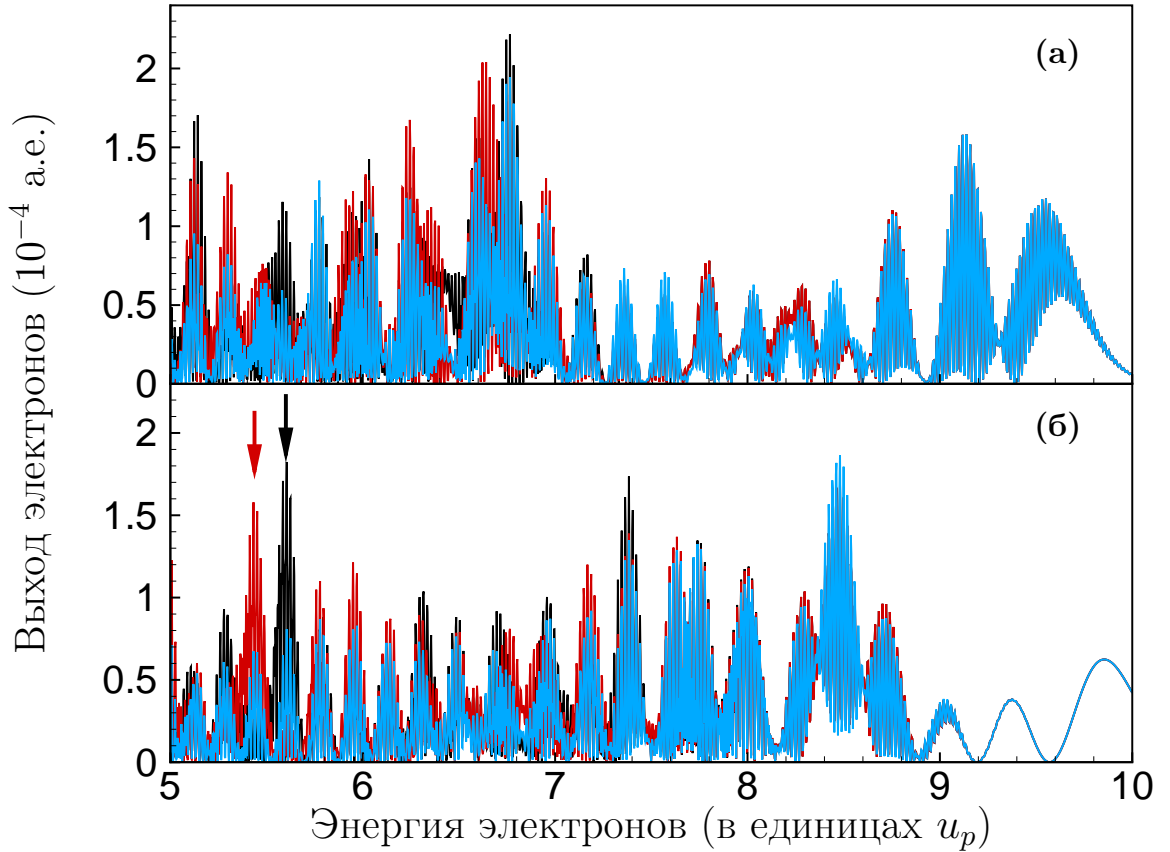


Рис. 2.11. Спектр НПИ для «атома» с энергией связи  $|E_0| = 15.76$  эВ,  $C_{\kappa,l} = 1$ ,  $f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = 1$  для импульса формой  $\sin^2$  с пиковой интенсивностью  $I = 4 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 1.2$  мкм и  $\phi = \pi/2$  и  $N = 10$ . (а) спектр НПИ для электрона вылетающего в направлении  $\Theta = 0^\circ$  (левая полусфера). (б) спектр НПИ для  $\Theta = 180^\circ$  (правая полусфера). Черные линии:  $l = 0$ ; красные линии:  $l = 1$ ; голубые линии: приближение ОВ траекторий. Стрелками на панели (б) отмечены энергии электрона  $E = 5.4u_p$  и  $5.6u_p$ , при которых красная и черная кривые соответственно достигают своего максимума.

### 2.5.7. Сравнение с количественной теорией перерасеяния

В этом разделе обсуждается соотношение между аналитическими результатами, изложенными в диссертации выше, и результатами количественной теории перерасеяния (КТП). КТП основана на феноменологической факторизации НПИ выхода  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  в области высокоэнергетического плато на лазерный параметр (ЛП),  $W^{QRS}$ , и сечение упругого рассеяния электрона (описывающего рассеяние электрона с начальным импульсом  $\mathbf{p}_i = -\mathbf{e}_z p_f$  в состоянии с импульсом



$\mathbf{p}_f = \mathbf{p} + \mathbf{e}_z e/cA_0$ ) [4, 5, 102, 149]:

$$\mathcal{P}^{(QRS)}(\mathbf{p}) = W^{QRS} \sigma \left( \mathbf{p} + \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A_0 \right), \quad (2.81)$$

где  $A_0 = cF/\omega$  — максимальное значение векторного потенциала  $\mathbf{e}_z A(t)$  лазерного импульса (см. (2.62)) и  $\mathbf{e}_z = \pm \mathbf{e}_z$ , где знак « $\pm$ » зависит от знака скалярного произведения  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p})$ . Для монохроматического поля КТП параметризация (2.81) теоретически обоснована в рамках МЭР в окрестности точки обрыва плато НПИ [86]. Однако, как показывает проведенный анализ, электронная динамика на каждом оптическом периоде определяется амплитудой упругого рассеяния, зависящей от значения векторного потенциала в момент столкновения (см. соотношения (2.32), (2.33), (2.38)). Это обстоятельство не позволяет факторизовать выход НПИ на ЛП и сечение упругого рассеяния, как в (2.81). Тем не менее, наши результаты показывают, что для лазерного импульса, содержащего всего несколько оптических периодов, можно использовать факторизацию (2.81). Действительно, если только одна парциальная вероятность  $\Gamma_j$  вносит вклад в выход для заданного направления  $\hat{\mathbf{p}}$  ионизованного электрона (то есть заданного знаком произведения  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p})$ ), то вероятность ионизации  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$  может быть параметризована тем же способом, что и в случае монохроматического поля [86] (см. параметризацию  $\Gamma_j$  в (2.46) с заменой  $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$ ). Обратим внимание, что для случая импульса, содержащего малое число осцилляций, векторный потенциал в момент времени  $t_f^{(j)}$  может не достигать своего максимального значения (см. таблицу 2.1 при  $N = 4$ ), что также вызывает расхождения между параметризацией (2.81) и нашими аналитическими результатами.

Результат КТП (2.81) может быть формально получен из аналитического выражения (2.53) путем замены

$$\mathcal{P}_j \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A_0 \quad (2.82)$$

в выражении для парциальной вероятности (2.46). Используя подстановку (2.82) и учитывая выражения (2.45) и (2.51), вероятность НПИ (2.53) можно факто-

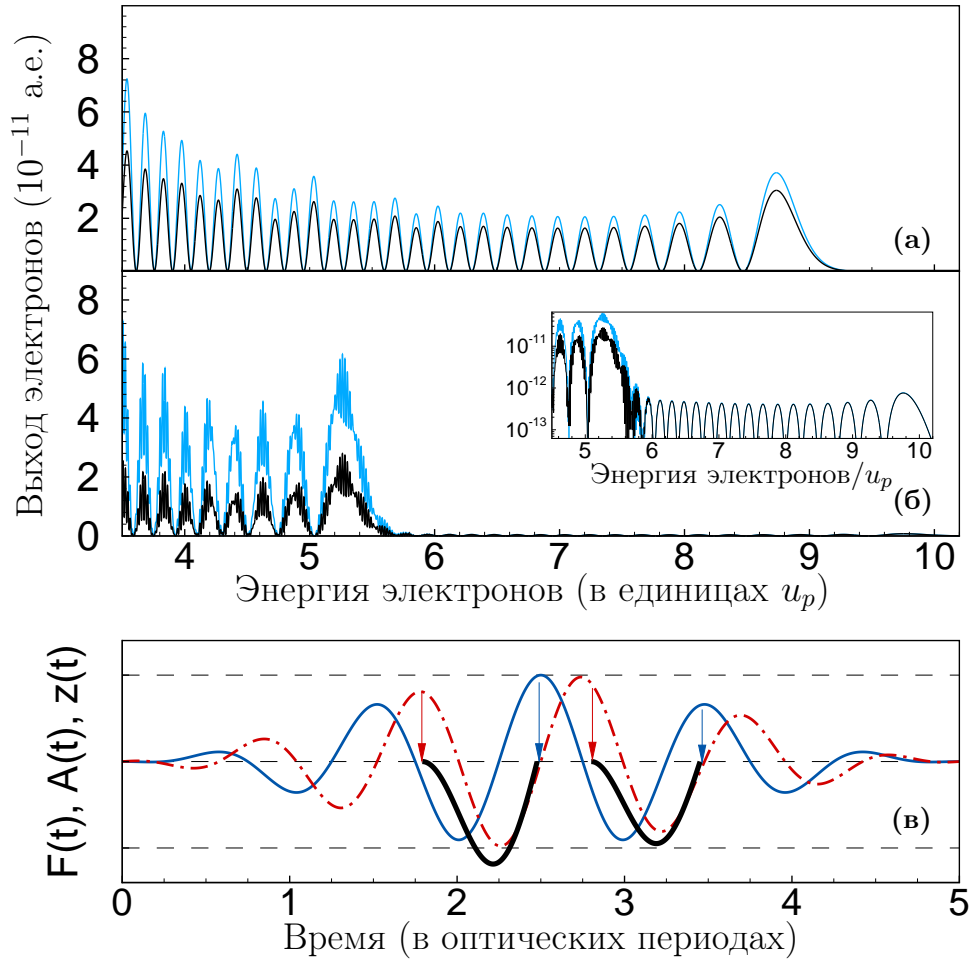


Рис. 2.12. Сравнение спектра НПИ атома гелия в лазерном импульсе, содержащем несколько оптических периодов, полученного на основе аналитического выражения (2.53) в рамках МЭР (жирная черная линия), и результата КТП (2.81) для двух направлений вылета ионизованного электрона: (а)  $\Theta = 0^\circ$  и (б)  $\Theta = 180^\circ$ . Интенсивность и длина волны лазерного поля те же, что и на рисунке 2.3,  $N = 5$ ,  $\phi = \pi/2$ . Вставка на панели (б): спектр НПИ в логарифмических координатах в интервале энергий 8 – 16 а.е. На панели (в) изображены временные зависимости напряженности  $F(t)$  (красная штрих-пунктирная линия) и векторного потенциала поля  $A(t)$  (голубая сплошная линия). Горизонтальными штриховыми линиями отмечены амплитуды  $F(t)$  и  $A(t)$ . Вертикальными стрелками обозначены времена ионизации и перерасеяния, соответствующие экстремальным траекториям. Тонкой черной линией изображены две ОВ траектории, которые вносят основной вклад в формирование спектра при  $\Theta = 180^\circ$ .

ризовать в соответствии с (2.81), а лазерный параметр представить в виде:

$$W^{QRS} = \frac{2\pi}{\hbar\omega^2} \left| \sum_j (-\sigma_j)^l \text{sgn}[\text{Ai}(\xi_j)] \sqrt{\mathcal{I}_j \mathcal{W}_j} \right|^2, \quad (2.83)$$

где ионизационный фактор (2.47),  $\mathcal{I}_j$ , обобщен на случай нейтральных атомов

(см. обсуждение в разделе 2.3), а в пропагационном факторе (2.49),  $\mathcal{W}_j$ , сделана замена  $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$ .

Чтобы оценить точность (2.82), введем время  $t_0$ , которое соответствует экстремуму векторного потенциала  $A(t)$  (т.е.  $\partial A(t)/(\partial t)|_{t=t_0} = 0$ ) и является ближайшим к моменту перерасеяния  $t_f^{(j)}$ . Мы также запишем вектор  $\mathcal{P}_j$  в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j &= \mathbf{p} + \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A(t_0) - \mathbf{e}_z \frac{e}{c} (A(t_0) - A(t_f^{(j)})) \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A_0 + \Delta \mathcal{P}_j^{(1)} + \Delta \mathcal{P}_j^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где

$$\Delta \mathcal{P}_j^{(1)} = \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A(t_0) - \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A_0, \quad (2.85)$$

$$\Delta \mathcal{P}_j^{(2)} = \mathbf{e}_z \frac{e}{c} (A(t_f^{(j)}) - A(t_0)) \approx \mathbf{e}_z \frac{e}{c} \frac{\partial^2 A(t_0)}{\partial t_0^2} \frac{(t_0 - t_f^{(j)})^2}{2}. \quad (2.86)$$

Поскольку перерасеяние происходит вблизи максимума или минимума векторного потенциала, вторая поправка,  $\Delta \mathcal{P}_j^{(2)}$ , мала и ей можно пренебречь. Первая поправка,  $\Delta \mathcal{P}_j^{(1)}$ , дает разность между экстремумом векторного потенциала в точке  $t_0$  и его максимальным значением  $A_0$ . Эта разность зависит от длительности и относительной фазы лазерного импульса: для импульса с большим числом осцилляций, значение  $|A(t_0)|$  близко к  $A_0$  и амплитуда рассеяния может быть разложена в ряд:

$$f(\tilde{\mathcal{P}}_j, \mathcal{P}_j) = f(\tilde{\mathcal{P}}_0, \mathcal{P}_0) + \left[ \frac{f(\tilde{\mathcal{P}}_0, \mathcal{P}_0)}{\partial \tilde{\mathcal{P}}_0} + \frac{f(\tilde{\mathcal{P}}_0, \mathcal{P}_0)}{\partial \mathcal{P}_0} \right] \Delta \mathcal{P}_j^{(1)} \quad (2.87)$$

где  $\mathcal{P}_0 = \mathbf{p} + \mathbf{e}_z \frac{e}{c} A_0$ . Уравнение (2.87) показывает, что точность КТП возрастает, если амплитуда перерасеяния является медленно меняющейся функцией энергии электрона.

Наш анализ показывает, что для импульсов, содержащих большое количество осцилляций, расхождение между КТП и нашими результатами составляет несколько процентов. Однако, для лазерного импульса длительностью

в несколько оптических периодов огибающая изменяется во времени намного быстрее, чем для импульса с большим количеством осцилляций, и поэтому точность КТП убывает. На рисунке 2.12 представлен спектр НПИ гелия при той же пиковой интенсивности лазерного поля и несущей частоте, что и на рисунке 2.3, но для  $N = 5$  и  $\phi = \pi/2$ . Видно, что КТП хорошо работает для тех энергий электронов, для которых вероятность НПИ может быть описана с точки зрения одной ОВ траектории (см. врезку на рисунке 2.12(б)) и время перерасеяния обеспечивает величину векторного потенциала  $A(t_f^{(j)})$ , близкую к  $A_0$  (см. траекторию, которая начинается в  $1\frac{3}{4}T$  и заканчивается в  $2\frac{1}{2}T$  на рисунке 2.12(в)). Все другие времена перерасеяния (см. рис. 2.12(в)) соответствуют значениям векторного потенциала меньшим, чем амплитуда  $A_0$ , и, таким образом, результаты КТП становятся неточными (см. рис. 2.12(а) и 2.12(б)). Разница между результатами КТП и нашими аналитическими результатами наиболее ярко проявляется в средней части плато НПИ (см. рис. 2.12(б)), поскольку для этого интервала энергий экстремальные траектории формируются вблизи локального максимума модуля электрического поля, но заканчиваются в момент времени, для которого значение векторного потенциала меньше глобального максимума  $A_0$  (см. ОВ траекторию в правой части рис. 2.12(в))

## 2.6. Выводы ко второй главе

Во второй главе получено замкнутое аналитическое выражение для дифференциальной вероятности НПИ,  $\mathcal{P}(\mathbf{p})$ , под действием интенсивного линейно поляризованного лазерного импульса, содержащего несколько осцилляций. Для высокоэнергетической области плато НПИ выражение для амплитуды НПИ в коротком импульсе задается когерентной суммой парциальных амплитуд  $A_j$  (см. (2.32)), которые факторизуются на три сомножителя. Показано, что каждый сомножитель такой факторизации имеет прозрачный физический смысл и может быть обобщен на случай НПИ реальных атомов в коротком импульсе.

Выполнено сравнение аналитических результатов с результатами численного решения уравнений Шредингера для атомов гелия и аргона, которое показало хорошее согласие для энергий перерассеянных электронов  $\gtrsim 5u_p$  и ионизации в телесный угол  $\Theta < \pi/4$  ( $\Theta > 3\pi/4$ ) для правой (левой) полусферы. Выполнено сравнение наших аналитических результатов с результатами КТП [102], получен явный вид лазерного параметра в КТП (2.83) и показано, что он чувствителен к пространственной симметрии начального состояния электрона, дана оценка области применимости КТП.

В рамках представленной аналитической теории исследованы основные особенности высокоэнергетической части спектра НПИ в коротком лазерном импульсе: возникновение нескольких платообразных структур в высокоэнергетическом спектре НПИ, асимметрия выхода ионизованных электронов в правую и левую полусферы, а также крупномасштабные и мелкомасштабные осцилляции в спектрах НПИ. Проанализирован вклад ОВ и МВ траекторий в спектр НПИ в коротком лазерном импульсе и показано, что МВ траектории дают существенный вклад в формирование средней части высокоэнергетического плато НПИ. Указана роль симметрии начального связанного состояния в формировании средней части плато НПИ.

## Глава 3

## Надпороговая ионизация атомных систем в сильном двухчастотном лазерном поле

В данной главе рассматривается задача о НПИ в сильном двухчастотном лазерном поле. Решение этой задачи основано на подходе, описанном в главе 2, а именно, на общем формализме, построенном в рамках метода эффективного радиуса для анализа процесса НПО атомных систем в произвольном периодическом во времени поле (см. также [16]). Аналитические выражения для амплитуды (см. (2.32)) и вероятности (см. (2.44)) НПО, полученные на основе этого подхода, имеют наиболее общий вид (см. разделы 2.2.3–2.2.5). Их простота и вместе с тем удобство заключаются в том, что для вычисления вероятности НПО или НПИ достаточно знать вид векторного потенциала  $\mathbf{A}_\tau(t)$  и напряженности  $\mathbf{F}_\tau(t)$  поля. Таким образом, для того, чтобы использовать данный подход для решения конкретной задачи, необходимо лишь подставить в явном виде выражения, определяющие временную эволюцию этих величин. Кроме того, отметим, что соотношения (2.32) и (2.44) определяются значениями векторного потенциала и напряженности поля в моменты, соответствующие классическим временам ионизации и возврата  $\{t_i, t_f\}$ , которые являются решениями системы уравнений (2.31).

В данной главе мы остановимся на простейшей двухчастотной схеме, которая может быть реализована в коллинеарной геометрии следующим образом: к монохроматическому линейно поляризованному лазерному полю с частотой  $\omega_\tau$  добавляется поле второй гармоники, линейно поляризованное в том же направлении, смещенное относительно основного поля на фазу  $\varphi$ . Напряженность такого поля будем параметризовать в виде:

$$\mathbf{F}_\tau(t) = \mathbf{e}_z F_\tau(t) = \mathbf{e}_z F (\cos \omega_\tau t + \beta \cos(2\omega_\tau t + \varphi)) / \sqrt{1 + \beta^2}, \quad (3.1)$$

где напряженность  $F$  определяет интенсивность двухчастотного поля,  $I = cF^2/(8\pi)$ , а  $\beta$  — «примесь» второй компоненты поля,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор в направлении оси поляризации лазера.

Отметим, что в выбранной параметризации интенсивность двухчастотного лазерного поля не зависит от  $\beta$ . Если  $\beta < 1$ , то компонента с удвоенной частотой является примесью к компоненте с частотой  $\omega_\tau$ , однако, для  $\beta > 1$  компонента на частоте  $\omega_\tau$  имеет меньшую интенсивность, чем вторая компонента. Таким образом, в указанной параметризации можно рассмотреть три случая:  $\beta \ll 1$  (случай примеси второй гармоники),  $\beta \sim 1$  (случай соизмеримых интенсивностей компонент),  $\beta \gg 1$  (случай доминирующей второй гармоники).

Ключевыми параметрами для НПО/НПИ в двухчастотном лазерном поле являются  $\beta$  и  $\varphi$ . Как будет показано ниже, при изменении одного из этих параметров, заметно меняется форма электрического поля, что в свою очередь влияет на форму спектра НПИ и вероятность фотоотрыва/фотоионизации. Обратим внимание, что значения времен ионизации и возврата не зависят от пиковой интенсивности поля  $I$ , а зависят только от параметров задачи  $\beta$  и  $\varphi$ . В этом легко убедиться, переписав систему уравнений на классические времена ионизации и возврата для случая двухчастотного поля, в явном виде, подставив выражение (3.1) и соответствующий ему векторный потенциал в (2.31):

$$\begin{aligned} \sin \omega_\tau t_i^{(j)} + \frac{\beta}{2} \sin(2\omega_\tau t_i^{(j)} + \varphi) + \frac{\cos \omega_\tau t_f^{(j)} - \cos \omega_\tau t_i^{(j)}}{\omega_\tau(t_f^{(j)} - t_i^{(j)})} \\ + \frac{\beta \cos(2\omega_\tau t_f^{(j)} + \varphi) - \cos(2\omega_\tau t_i^{(j)} + \varphi)}{4 \omega_\tau(t_f^{(j)} - t_i^{(j)})} = 0, \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} 2 \left( \cos \omega_\tau t_f^{(j)} + \beta \cos(2\omega_\tau t_f^{(j)} + \varphi) \right) - \frac{\sin \omega_\tau t_f^{(j)} - \sin \omega_\tau t_i^{(j)}}{\omega_\tau(t_f^{(j)} - t_i^{(j)})} \\ - \frac{\beta \sin(2\omega_\tau t_f^{(j)} + \varphi) - \sin(2\omega_\tau t_i^{(j)} + \varphi)}{2 \omega_\tau(t_f^{(j)} - t_i^{(j)})} = 0, \end{aligned} \quad (3.2b)$$

где индекс  $j$  нумерует пары корней  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$ .

### 3.1. Анализ классических траекторий НПИ электронов в двухчастотном лазерном поле

Как и в случае короткого импульса, при НПИ в двухчастотном поле каждая пара времен  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$  определяет экстремальную замкнутую классическую траекторию. Такие траектории могут быть классифицированы на ОВ и МВ траектории в соответствии с количеством возвращений электрона к атомному остову в промежуток времени с момента ионизации до момента перерассеяния (см. обсуждение в разделе 2.5.6). Кратко, ОВ траектории — это такие траектории, при движении вдоль которых электрон за время  $\Delta t_j = t_f^{(j)} - t_i^{(j)}$  возвращается однократно к атомному остову и перерассеивается на нем. При движении вдоль МВ траекторий электрон возвращается к атомному остову несколько раз, прежде чем перерассеяться.

Рассмотрим предельный случай монохроматического поля, то есть  $\beta = 0$ . Пары времен ионизации и возврата  $\{t_i^{(j)}, t_f^{(j)}\}$  в монохроматическом поле не зависят от относительной фазы  $\varphi$ . Будем учитывать как ОВ, так и МВ траектории. Рассмотрим три траектории, вносящие основной вклад в формирование высокоэнергетической части спектра НПИ. В таблице 3.1 приведены величины, характеризующие экстремальные замкнутые траектории: значения напряженности и векторного потенциала лазерного поля в моменты  $t_i^{(j)}$  и  $t_f^{(j)}$ , максимальная энергия электрона после перерассеяния и т.д.. Траектория с  $j = 1$  является ОВ траекторией, ей соответствует наибольшая классическая энергия перерассеяния,  $E_{cut} = 10u_p$ . Две другие траектории (с  $j = 2$  и  $j = 3$ ) являются МВ траекториями. Из таблицы 3.1 видно, что в случае монохроматического поля время движения вдоль ОВ траекторий меньше периода поля, а для МВ траекторий — больше  $2\pi/\omega_\tau$ .

Добавим к основному монохроматическому полю малую примесь поля удвоенной частоты, положив  $\beta = 0.1$  в (3.1), и рассмотрим классические траектории, вносящие вклад в формирование высокоэнергетической части спектра НПИ,



Таблица 3.1. Величины, характеризующие экстремальные замкнутые траектории: классические времена начала ( $t_i^{(j)}$ ) и окончания ( $t_f^{(j)}$ ) движения электрона по замкнутой траектории (пронумерованные в порядке убывания значения  $E_{cut}^{(j)}/u_p$ ),  $E_{cut}^{(j)}/u_p$  — энергия обрыва плато НПИ (в единицах  $u_p$ ),  $f_j = F_\tau(t_i^{(j)})/F$  — напряженность лазерного поля в момент ионизации в единицах  $F$ ,  $a_j = A_\tau(t_f^{(j)})/A_0$  (где  $A_0 = cF/\omega_\tau$ ) — значение векторного потенциала в момент перерассеяния в единицах  $A_0$ , в двухчастотном поле с интенсивностью  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ, при  $\beta = 0$ ;  $u_p = e^2F^2/(4m\omega_\tau^2)$ .

$j$	$E_{cut}^{(j)}/u_p$	$\omega_\tau t_i^{(j)}$	$\omega_\tau t_f^{(j)}$	$\omega_\tau \Delta t_j$	$f_j$	$a_j$
$(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) < 0$						
1	10.0076	0.2610	4.5670	4.3060	0.9661	0.9895
2	8.7684	0.0966	10.9450	10.8484	0.9953	0.9987
3	8.4783	0.0599	17.2479	17.1880	0.9982	0.9995
$(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) > 0$						
1	10.0076	3.4026	7.7086	4.3060	-0.9661	-0.9895
2	8.7684	3.2381	14.0867	10.8486	-0.9953	-0.9987
3	8.4783	3.2015	20.3895	17.1880	-0.9982	-0.9995

при различных значениях  $\varphi$  (см. таблицы 3.2–3.3). Будем рассматривать  $\varphi$  в интервале  $(0, \pi)$ , так как при замене  $\varphi \rightarrow \varphi - \pi$  траектории, соответствующие вылету электрона в левую полусферу,  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) < 0$ , будут совпадать с траекториями электронов, вылетающих в правую полусферу,  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) > 0$ .

На рисунке 3.1 показаны примеры ОВ и МВ траекторий для случая двухчастотного поля с  $\beta = 0.1$ . Начало траекторий (моменты ионизации) находится вблизи максимума напряженности лазерного поля, заканчиваются же они в окрестности максимума векторного потенциала поля. Отметим, что в отличие от монохроматического поля в этом случае поле имеет как глобальные, так и локальные максимумы, причем ионизация может происходить в окрестности любого из них, подробнее этот вопрос будет обсуждаться в разделе 3.2.

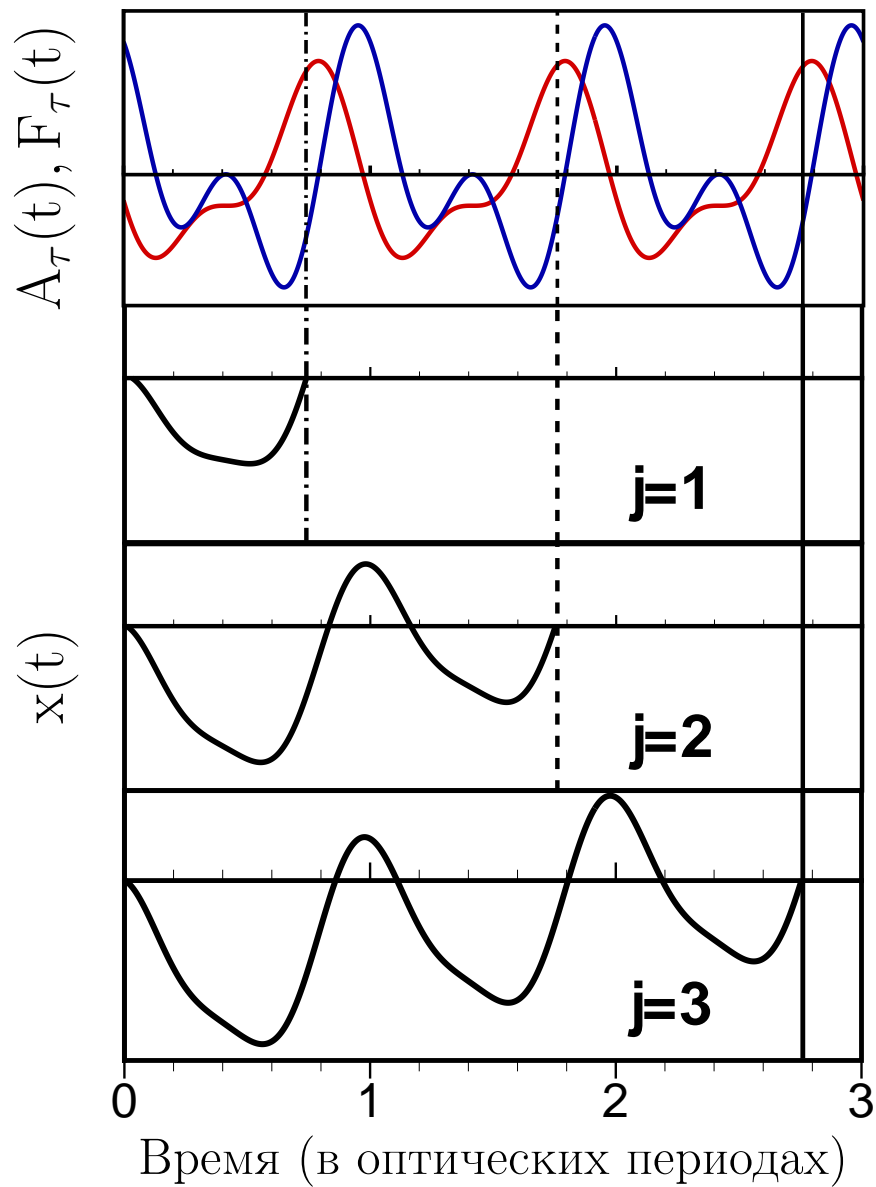


Рис. 3.1. Замкнутые классические экстремальные траектории электрона в двухчастотном лазерном поле (3.1) интенсивностью  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ, при  $\beta = 0.1$  и  $\varphi = \pi/4$ . На верхней панели изображены графики напряженности (синей линией) и векторного потенциала (красной линией) лазерного поля, на оставшихся панелях черными линиями изображены ОВ (с  $j = 1$  из таблицы 3.2) и МВ (с  $j = 2, 3$  из таблицы 3.2) траектории, вертикальными черными линиями обозначено положение концов траекторий: однократно возвратной (штрих-пунктирной), трехкратно возвратной (пунктирной), пятикратно возвратной (сплошной).

На рисунке 3.2 представлены фазовые зависимости (по оси абсцисс) выхода фотоэлектронов в угол  $\Theta = 0^\circ$  в монохроматическом поле (панель (а)) и в двухчастотном поле при  $\beta = 0.1$  (панель (б)) как функции энергии фото-

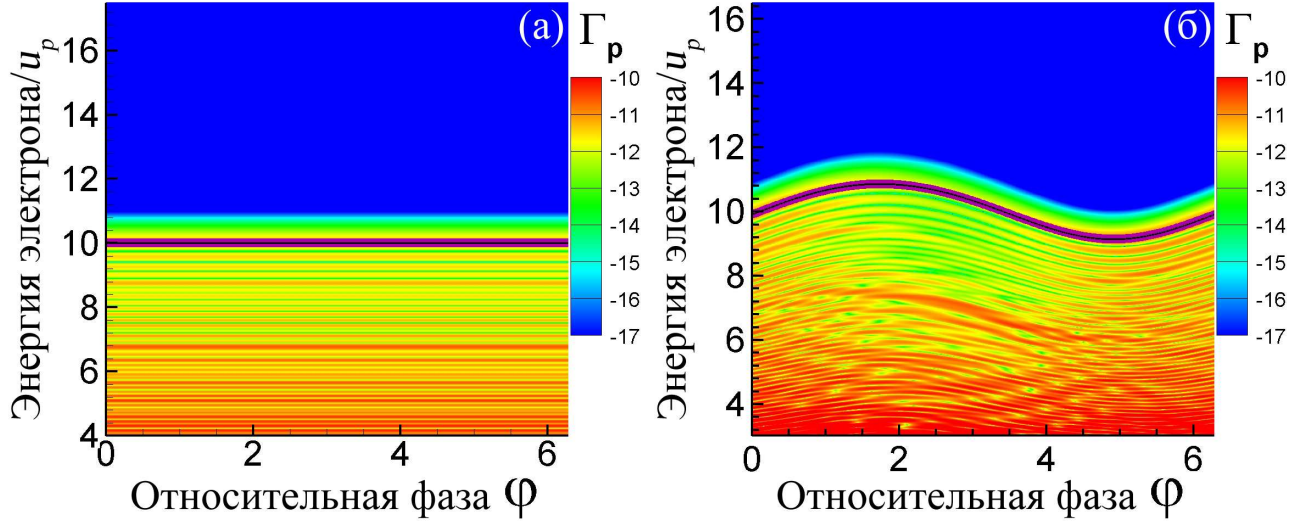


Рис. 3.2. Фазовые зависимости выхода фотоэлектронов в угол  $\Theta = 0^\circ$  в двухчастотном лазерном поле (3.1) как функции энергии электрона (в единицах  $u_p = e^2 F^2 (1 + \beta^2/4) / [4m\omega_\tau^2(1 + \beta^2)]$ ): (а) при  $\beta = 0$ , (б) при  $\beta = 0.1$ . Интенсивность поля  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ. Фаза  $\varphi$  измеряется в радианах. Пурпурными сплошными жирными линиями обозначены зависимости классического обрыва плато от фазы  $\varphi$ , черными сплошными линиями — зависимости обрыва плато, рассчитанные по формуле (3.3).

электронов (по оси ординат). На этом рисунке явно видно, что с добавлением примеси второй гармоники появляется зависимость энергии обрыва высокоэнергетического плато НПИ ( $E_{cut}^{(j)}$ ) от относительной фазы  $\varphi$  (см. таблицы 3.2, 3.3). Эта зависимость изображена на рисунке пурпурной жирной линией. Также на рисунке присутствует еще одна зависимость, изображенная черной сплошной линией, которая получена приближенным расчетом энергии  $E_{cut}^{(j)}$  с точностью до  $\beta^2$  по общей формуле:

$$E_{cut}^{(j)} \approx \left[ 10.01 + (a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi)\beta + (b_0 + b_1 \sin 2\varphi + b_2 \cos 2\varphi)\frac{\beta^2}{2} \right] u_p, \quad (3.3)$$

где коэффициенты для случая  $\Theta = 0^\circ$  соответственно равны  $a_1 = 8.46$ ,  $a_2 = -1.62$ ,  $b_0 = 6.69$ ,  $b_1 = 4.08$ ,  $b_2 = 6.51$ . Как видно из рисунка, этой точности достаточно для оценки классической энергии обрыва плато при малых  $\beta$ .

Сравнивая описание основных траекторий в таблицах 3.1 и 3.2–3.3, отметим ряд важных особенностей: 1) в случае двухчастотного поля максимальная классическая энергия перерассеяния  $E_{cut}^{(j)}$  может превышать величину  $10.007u_p$ ,

Таблица 3.2. То же, что и в таблице 3.1, но для  $\beta = 0.1$  и  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) < 0$  при различных значениях относительной фазы  $\varphi$  (в радианах);  $u_p = e^2 F^2 (1 + \beta^2/4) / [4m\omega_\tau^2(1 + \beta^2)]$ .

$j$	$E_{cut}^{(j)}/u_p$	$\omega_\tau t_i^{(j)}$	$\omega_\tau t_f^{(j)}$	$\omega_\tau \Delta t_j$	$f^{(j)}$	$a^{(j)}$
$\varphi = 0$						
1	9.9144	0.2191	4.6736	4.4545	1.0613	0.9904
2	8.7842	0.0828	11.0452	10.9624	1.0898	0.9987
3	8.5123	0.0515	17.3472	17.2957	1.0927	0.9995
$\varphi = \pi/4$						
1	10.5378	0.1962	4.6489	4.4527	1.0141	1.0235
2	9.3540	0.0536	11.0124	10.9588	1.0560	1.0312
3	9.0680	0.0210	17.3128	17.2918	1.0622	1.0320
$\varphi = \pi/2$						
1	10.8520	0.2061	4.5892	4.3831	0.9341	1.0357
2	9.5971	0.0458	10.9518	10.9060	0.9849	1.0436
3	9.2970	0.0096	17.2520	17.2424	0.9931	1.0444
$\varphi = 3\pi/4$						
1	10.7284	0.2524	4.5208	4.2684	0.8679	1.0226
2	9.4087	0.0688	10.8888	10.8200	0.9133	1.0312
3	9.0997	0.0282	17.1896	17.1614	0.9204	1.0319
$\varphi = \pi$						
1	10.2308	0.3109	4.4688	4.1579	0.8665	0.9890
2	8.8745	0.1132	10.8479	10.7347	0.8917	0.9987
3	8.5647	0.0701	17.1504	17.0803	0.8941	0.9995

характерную для НПИ в монохроматическом поле (см. второй столбец в 3.2 для  $\varphi = \pi/4 \div \pi$  и в 3.3 для  $\varphi = 0$ ), где для двухчастотного поля

$$u_p = e^2 F^2 (1 + \beta^2/4) / [4m\omega_\tau^2(1 + \beta^2)] ;$$

Таблица 3.3. То же, что и в таблице 3.2, но для  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) < 0$ .

$j$	$E_{cut}^{(j)}/u_p$	$\omega_\tau t_i^{(j)}$	$\omega_\tau t_f^{(j)}$	$\omega_\tau \Delta t_j$	$f^{(j)}$	$a^{(j)}$
$\varphi = 0$						
1	10.2308	3.4525	7.6104	4.1579	-0.8665	-0.9890
2	8.8745	3.2548	13.9895	10.7347	-0.8917	-0.9987
3	8.5647	3.2117	20.2920	17.0803	0.8941	0.9995
$\varphi = \pi/4$						
1	9.5851	3.4794	7.6057	4.1263	-0.9279	-0.9504
2	8.2560	3.2882	13.9996	10.7114	-0.9373	-0.9613
3	7.9565	3.2468	20.3049	17.0581	-0.9354	-0.9622
$\varphi = \pi/2$						
1	9.1654	3.4562	7.6750	4.2188	-1.0048	-0.9326
2	7.9383	3.2877	14.0765	10.7888	-1.0131	-0.9438
3	7.6585	3.2510	20.3835	17.1325	-1.0107	-0.9447
$\varphi = 3\pi/4$						
1	9.3139	3.4053	7.7748	4.3695	-1.0568	-0.9516
2	8.1786	3.2603	14.1629	10.9026	-1.0730	-0.9614
3	7.9116	3.2278	20.4677	17.2399	-1.0727	-0.9622
$\varphi = \pi$						
1	9.9144	3.3606	7.8152	4.4546	-1.0614	-0.9904
2	8.7842	3.2244	14.1868	10.9624	-1.0898	-0.9987
3	8.5123	3.1931	20.4888	17.2957	-1.0927	-0.9995

2) значение энергии  $E_{cut}^{(j)}$  зависит от относительной фазы  $\varphi$  (см. рисунок 3.2(б) и таблицы 3.2, 3.3); 3) в случае двухчастотного поля время движения по замкнутой траектории отличается от соответствующего времени в монохроматическом поле и при заданном  $\beta$  уменьшается с ростом  $\varphi$ ; 4) характер движения электрона вдоль  $j$ -той замкнутой траектории не изменяется, то есть ОВ траектории для

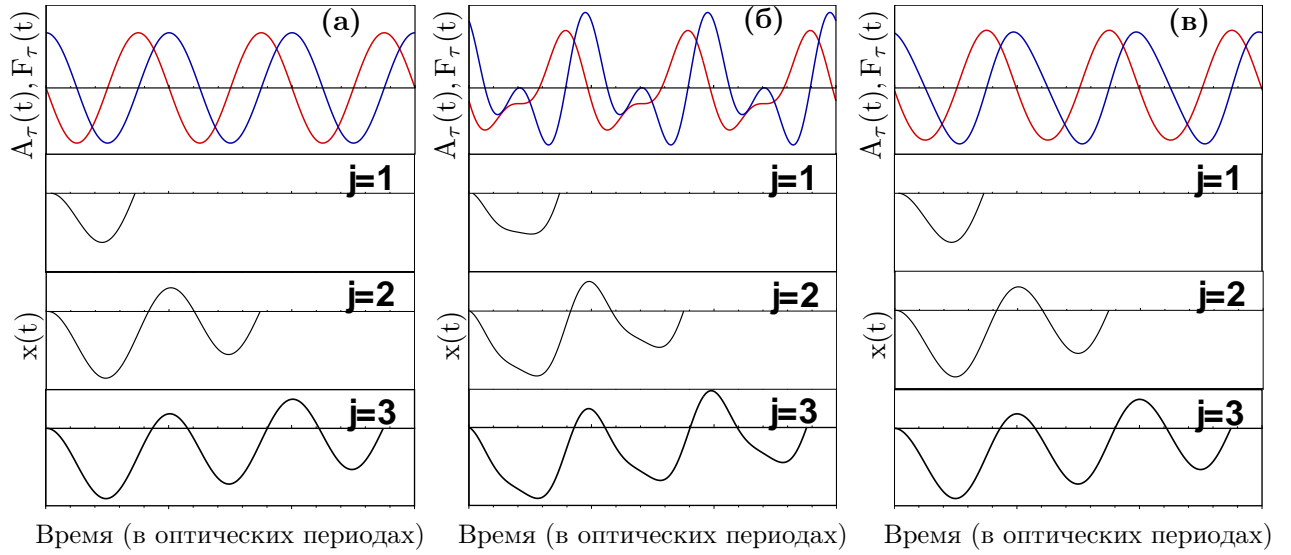


Рис. 3.3. Замкнутые классические экстремальные траектории электрона в двухчастотном лазерном поле (3.1) интенсивностью  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ: (а) при  $\beta = 0$ ; (б) при  $\beta = 0.1$  и  $\varphi = \pi/4$ ; (в) при  $\beta = 0.1$  и  $\varphi = \pi/2$ . В верхней части каждой панели изображены графики напряженности (синей линией) и векторного потенциала (красной линией) лазерного поля;  $j = 1, 2, 3$  соответствуют обозначениям таблицы 3.2, а траектории, маркированные таким образом — значениям, взятым из этой таблицы.

заданного  $j$  в монохроматическом поле будет соответствовать ОВ траектория в двухчастотном поле с тем же  $j$ , так же, как и МВ траектория при наложении дополнительного возмущения не изменит своего характера (сравн. таблицы 3.1 и 3.2–3.3, а также см. рисунок 3.3).

## 3.2. Численные результаты для НПИ в двухчастотном лазерном поле с $\beta \sim 1$

При расчете спектров НПИ в монохроматическом поле [86] основной вклад в формирование высокоэнергетической части спектра вносят ОВ траектории, то же самое можно сказать и о НПИ в коротком лазерном импульсе [16]. В обоих этих случаях учет траекторий с многократными возвращениями приводит лишь к поправкам в средней части спектра НПИ. Поэтому точку обрыва плато, а также поведение близких к ней максимумов и минимумов спектра НПИ можно

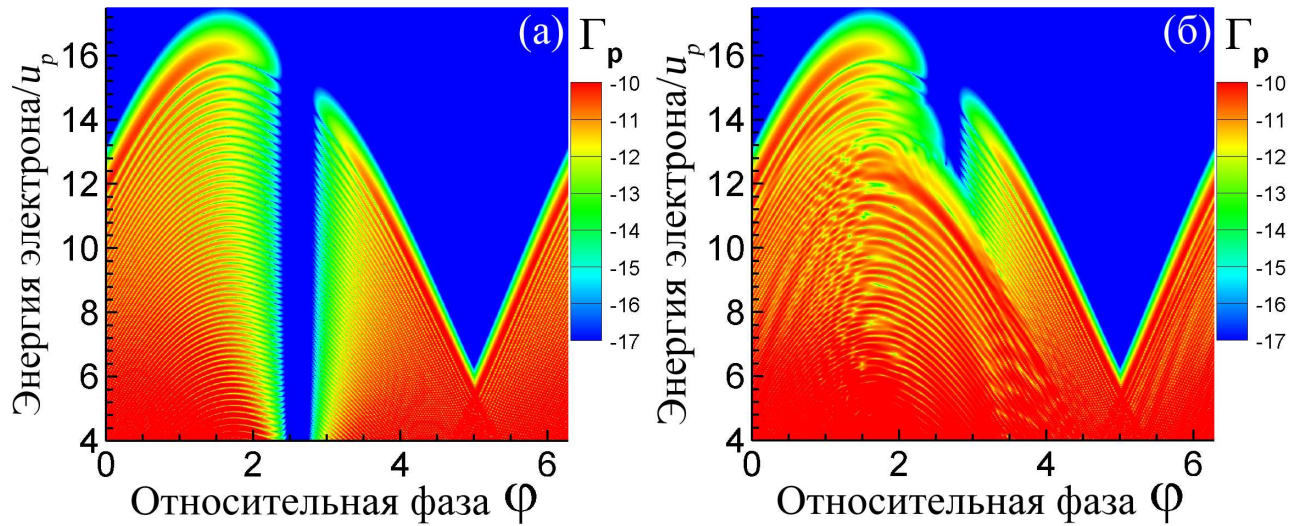


Рис. 3.4. Фазовая зависимость (фаза  $\varphi$  выражается в радианах) выхода фотоэлектронов в угол  $\Theta = 0^\circ$  в двухчастотном лазерном поле (3.1) как функция энергии электрона (в единицах  $u_p$ ) при  $\beta = 0.9$ . Интенсивность поля  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ. Панель (а): учитываются только траектории с однократными возвращениями; панель (б): учитываются все траектории.

с достаточной точностью оценить, учитывая лишь ОВ траектории. Однако, в случае соизмеримых интенсивностей компонент двухчастотного поля ( $\beta \sim 1$ ) необходим учет всех траекторий, так как при некоторых значениях параметра  $\varphi$  высокоэнергетическая часть спектра НПИ вблизи точки обрыва плато, главным образом, определяется МВ траекториями.

Рассмотрим двухчастотное лазерное поле при  $\beta = 0.9$ . На рисунке 3.4 представлена фазовая зависимость выхода НПИ электронов в угол  $\Theta = 0^\circ$  в двухчастотном поле как функция энергии электрона. На панели (а) эта зависимость построена с учетом только ОВ траекторий, тогда как на панели (б) также учитываются электронные траектории с многократными возвратами. Как видно, на графике имеется интервал фаз  $\varphi$  ( $\varphi \in (2.35, 2.85)$ ), на котором возникает так называемая провалообразная структура, а основной вклад в формирование высокоэнергетической части спектра вносят МВ траектории. Эта особенность возникает по причине того, что в случае двухчастотного поля ионизация происходит в локальном максимуме напряженности поля  $F(t)$ , при этом абсолютное

Таблица 3.4. Величины, характеризующие экстремальные замкнутые траектории в двух-частотном лазерном поле (3.1) с интенсивностью  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ, при  $\beta = 0.9$ ;  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{p}) < 0$ ; условные обозначения величин соответствуют введенным в таблице 3.2.

$j$	$E_{cut}^{(j)}/u_p$	$\omega_\tau t_i^{(j)}$	$\omega_\tau t_f^{(j)}$	$\omega_\tau \Delta t_j$	$f_j$	$a_j$	$\mathcal{I}_j$ (a.e.)
$\varphi = 2.4$							
1	15.3259	6.1700	10.6616	4.4916	0.3592	1.0324	$7.4596 \times 10^{-14}$
2	13.9093	5.9332	16.9874	11.0542	0.6120	1.0363	$2.6007 \times 10^{-8}$
3	13.5540	5.8885	23.2801	17.3916	0.6595	1.0367	$9.0295 \times 10^{-8}$
4	13.3909	5.8691	29.5676	23.6985	0.6798	1.0368	$1.4532 \times 10^{-7}$
$\varphi = 2.6$							
1	14.8208	0.2986	4.3056	4.0070	0.0425	1.0094	$< 10^{-100}$
2	13.3573	5.9672	16.9230	10.9558	0.4477	1.0145	$3.7221 \times 10^{-11}$
3	13.0047	5.9070	23.2160	17.3090	0.5085	1.0149	$7.1249 \times 10^{-10}$
4	12.8436	5.8818	29.5035	23.6217	0.5341	1.0150	$1.9930 \times 10^{-9}$
$\varphi = 2.8$							
1	14.3922	0.8318	4.2261	3.3943	0.3359	0.9807	$8.1640 \times 10^{-15}$
2	12.7095	6.0838	16.8586	10.7748	0.2347	0.9882	$2.6119 \times 10^{-21}$
3	12.3582	5.9777	23.1519	17.1742	0.3212	0.9886	$1.6984 \times 10^{-15}$
4	12.1992	5.9383	29.4395	23.5012	0.3559	0.9887	$5.5315 \times 10^{-14}$
5	12.1082	5.9175	35.7252	29.8077	0.3747	0.9887	$2.7643 \times 10^{-14}$
6	11.5228	3.2373	35.7263	32.4890	-1.4013	0.9887	$2.1270 \times 10^{-4}$

значение напряженности в этот момент достаточно мало, тогда малым становится и ионизационный фактор. В таблице 3.4 приведены основные характеристики замкнутых экстремальных траекторий электрона для трех значений фазы  $\varphi$  из указанной области. Из таблицы 3.4 видно, что если значение напряженности поля в момент ионизации мало, то ионизационный фактор для такой траектории также является малой величиной по сравнению с ионизационными



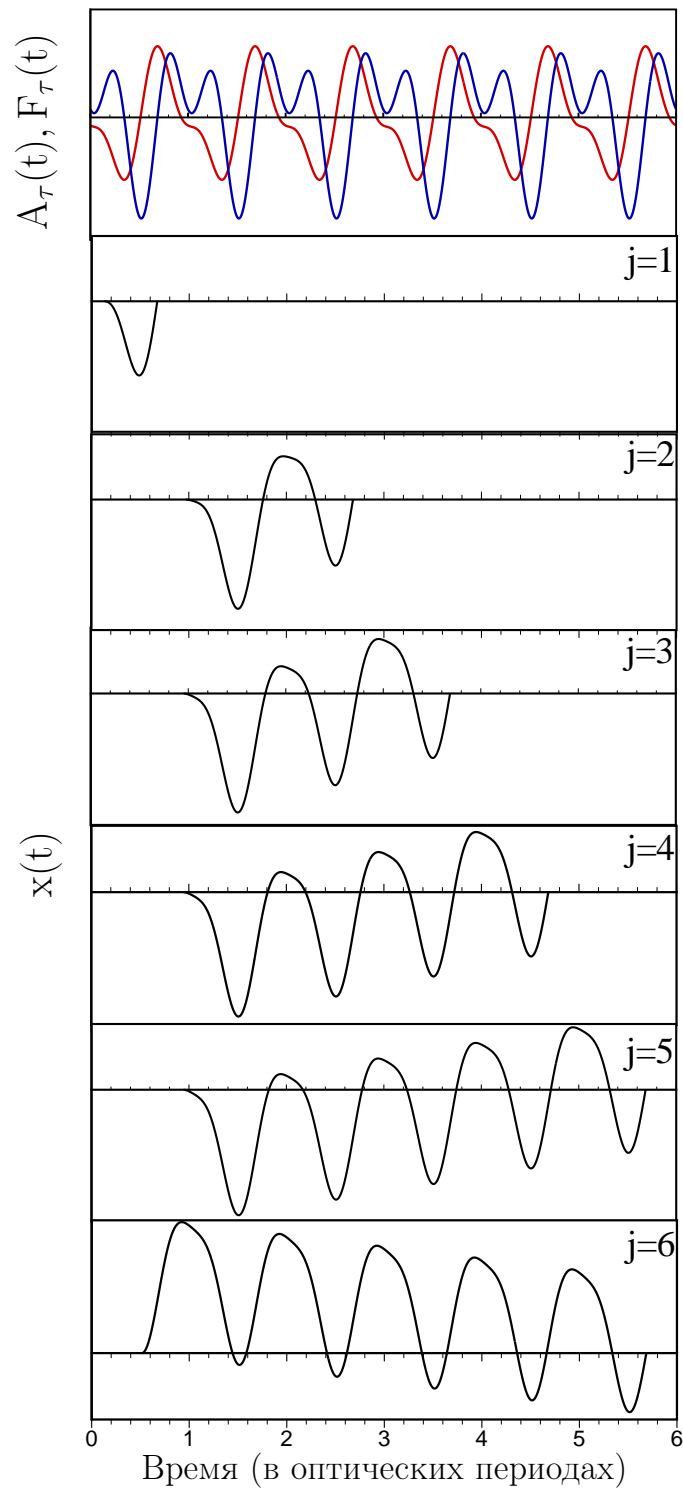


Рис. 3.5. Замкнутые классические экстремальные траектории электрона в двухчастотном лазерном поле (3.1) интенсивностью  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ, при  $\beta = 0.9$  и  $\varphi = 2.8$ .

факторами для других траекторий. При  $\varphi = 2.4, 2.6$  малым является значение ионизационного фактора для ОВ траектории ( $j = 1$ ), имеющей наибольшее значение  $E_{cut}^{(j)}$ . Таким образом, парциальная вероятность процесса НПИ, соот-

ветствующая этой траектории, оказывается подавлена из-за малого значения ионизационного фактора. В этом случае длина плато НПИ определяется МВ траекторией (с  $j = 2$ ). Однако, при  $\varphi = 2.8$  подавленной оказывается не только ОВ траектория, но и следующие за ней (в порядке убывания энергии  $E_{cut}^{(j)}$ ) четыре МВ траектории, в результате чего длину плато определяет лишь пятая по счету МВ траектория. На рисунке 3.5 изображены эти траектории вместе с временной зависимостью напряженности и векторного потенциала лазерного поля. Видно, что из всех приведенных шести траекторий лишь одна ( $j = 6$ ) начинается в глобальном максимуме (по абсолютному значению напряженности) поля. Начало остальных траекторий соответствует локальным экстремумам поля, абсолютное значение напряженности в которых много меньше единицы. За пределами интервала фаз ( $2.35 \div 2.85$ ) форма высокоэнергетического спектра, выход электронов, расположение точки обрыва плато НПИ с достаточно высокой точностью могут быть оценены в рамках приближения ОВ траекторий, как в случаях монохроматического поля и короткого лазерного импульса.

Таким образом, в случае соизмеримых интенсивностей обеих компонент двухчастотного поля ( $\beta \sim 1$ ) становится возможным осуществление контроля над выходом электронов НПИ и длиной высокоэнергетического плато путем варьирования параметра  $\varphi$  при прочих неизменных параметрах поля.

### 3.3. Численные результаты для НПИ в двухчастотном лазерном поле с $\beta \gg 1$

Рассмотрим предельный случай доминирующей второй гармоники при  $\beta \gg 1$ . При таком соотношении компонента поля удвоенной частоты становится основной, а в качестве примеси выступает поле с частотой  $\omega_\tau$ . Положим  $\beta = 100$  в выражении (3.1) и обсудим особенности спектров, возникающие в этом случае.

Сравнивая панели рисунка 3.6, отметим, что при изменении параметра  $\beta \sim 0 \div 1$  зависимость спектра НПИ от относительной фазы  $\varphi$  становится все

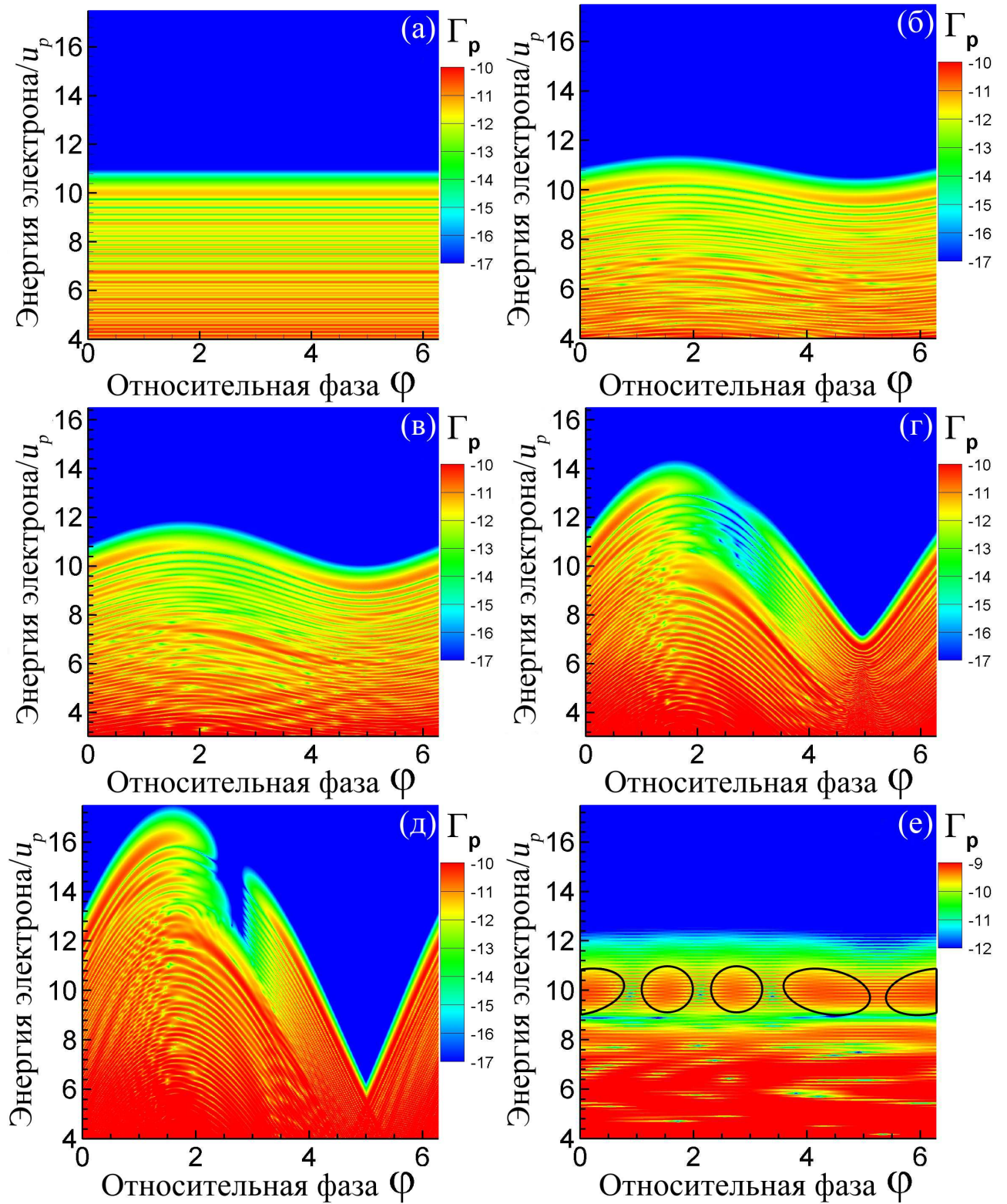


Рис. 3.6. Фазовая зависимость выхода фотоэлектронов в угол  $\Theta = 0^\circ$  в двухчастотном лазерном поле (3.1) как функция энергии электрона (в единицах  $u_p$ ) для различных значений  $\beta$ . Интенсивность лазерного поля  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ. Фаза  $\varphi$  измеряется в радианах. Панель (а):  $\beta = 0$ ; панель (б):  $\beta = 0.05$ ; панель (в):  $\beta = 0.1$ ; панель (г):  $\beta = 0.4$ ; панель (д):  $\beta = 0.9$ ; панель (е):  $\beta = 100$ .

более заметной. При обратном переходе от соизмеримых интенсивностей к случаю доминирования одной из компонент (в данном случае компоненты удвоенной частоты) эта зависимость предположительно должна была исчезнуть. Однако, хотя зависимость длины плато от  $\varphi$ , в самом деле, пропадает, зависимость формы спектра от относительной фазы приобретает специфический вид (сравн. панели (а) и (е) на рисунке 3.6). На панели (е) отчетливо видны характерные поперечные осцилляционные структуры в фазовой зависимости выхода НПИ электронов, расположенные вблизи обрыва высокоэнергетического плато НПИ. Для того, чтобы выяснить, с чем связаны эти особенности, обратимся к рисунку 3.7. Выражение для вероятности НПО в единицу времени в периодическом поле (2.44) включает два слагаемых, одно из которых ( $\Gamma_{\text{dir}}$ ) представляет собой прямую сумму парциальных вероятностей отрыва с определенной максимальной энергией перерасеяния, а второе — описывает интерференцию парциальных амплитуд вероятности, соответствующих различным экстремальным замкнутым траекториям. На рисунке 3.7 приведены фазовые зависимости выхода НПИ в двухчастотном поле для доминирующей второй гармоники ( $\beta = 100$ ) с учетом: (а) всех видов траекторий и всех слагаемых (прямых и интерференционных), (б) только прямой суммы парциальных вероятностей для ОВ и МВ траекторий, (в) фазовая зависимость  $\Gamma(\mathbf{p}_n)$  (см. (2.44)) для МВ траекторий, (г) фазовая зависимость  $\Gamma(\mathbf{p}_n)$  в приближении двух траекторий. Видно (см. панель (б)), что в отсутствие интерференционных слагаемых указанные осцилляционные особенности не проявляются. Указанные интерференционные особенности вызваны интерференцией парциальных амплитуд вероятности НПИ  $A_j$  с различными  $j$ . Выясним, какими именно траекториями обусловлено возникновение этих необычных интерференционных особенностей. В разделах 2.5.6, 3.2 уже обсуждалось, что МВ траектории преимущественно вносят вклад в среднюю часть спектра НПИ (за исключением области соизмеримых интенсивностей компонент поля  $\beta \sim 1$ ). На панели (в) рисунка 3.7 видно, что фазовая зависимость спектров НПИ в случае учета лишь МВ траекторий имеет определенные по-

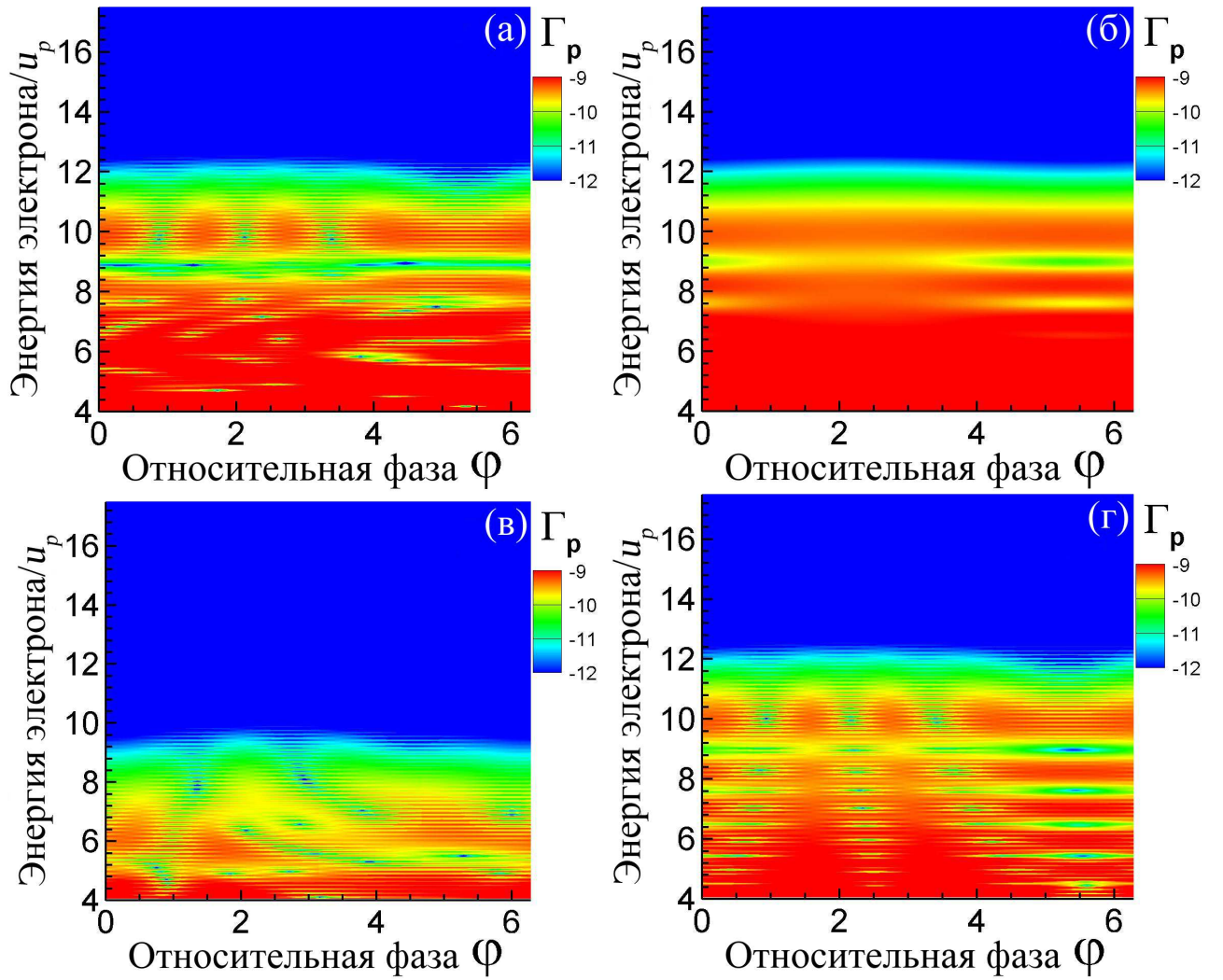


Рис. 3.7. Фазовая зависимость выхода фотоэлектронов в угол  $\Theta = 0^\circ$  в двухчастотном лазерном поле (3.1) как функция энергии электрона (в единицах  $u_p$ ) для  $\beta = 100$  с учетом различного количества членов в (2.44). Интенсивность лазерного поля  $I = 1 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\hbar\omega_\tau = 0.62$  эВ. Фаза  $\varphi$  измеряется в радианах. Панель (а): учтены все виды траекторий и все слагаемые (прямое и интерференционное); панель (б): учтена только прямая сумма парциальных вероятностей для ОВ и МВ траекторий; панель (в): фазовая зависимость  $\Gamma(\mathbf{p}_n)$  (см. (2.44)) для МВ траекторий; панель (г): фазовая зависимость  $\Gamma(\mathbf{p}_n)$  в приближении двух траекторий.

перечные особенности, однако, по шкале энергии эти особенности находятся значительно ниже, чем интересующие нас структуры в высокоэнергетической части спектра. На панели (г) рисунка 3.7 изображена фазовая зависимость выхода НПИ в приближении двух ОВ траекторий с наибольшими энергиями  $E_{cut}^{(j)}$ . Сравнивая панели (а) и (г) легко видеть, что спектральные осцилляционные

особенности в двухчастотном поле в случае доминирования компоненты удвоенной частоты возникают за счет интерференции двух ОВ траекторий.

### 3.4. Выводы к третьей главе

В третьей главе представлено применение развитой ранее теории НПИ для произвольного периодического поля к описанию процесса НПИ в двухчастотном лазерном поле. Проанализирован вклад ОВ и МВ траекторий в формирование высокоэнергетического плато НПИ при различных  $\beta$ . Показано, что при малых  $\beta$  для описания области вблизи точки обрыва плато НПИ с достаточно высокой точностью можно использовать приближение ОВ траекторий, а при  $\beta \gg 1$  — всего двух ОВ траекторий с наибольшими энергиями  $E_{cut}^{(j)}$ ; в случае соизмеримых интенсивностей обеих компонент поля на некотором интервале фаз основной вклад в формирование высокоэнергетической части спектра вносят МВ траектории. Показана зависимость энергии обрыва плато от  $\varphi$  при  $\beta \lesssim 1$ , которая все более заметна по мере приближения  $\beta$  к единице. Приведены численные результаты для спектров НПИ атома водорода в зависимости от фазы  $\varphi$  при различных  $\beta$ . Проанализированы фазовые зависимости спектров НПИ при  $\beta \sim 1$ , приведено объяснение специфических особенностей этих фазовых зависимостей, а именно: возникновения провалообразных структур на некотором интервале фаз. Продемонстрированы и проанализированы специфические интерференционные особенности, возникающие в спектрах НПИ в двухчастотном поле при  $\beta \gg 1$ .

## Заключение

В настоящей диссертации предложена аналитическая модель для исследования процесса надпороговой ионизации атомных систем в коротком лазерном импульсе и двухчастотном лазерном поле. Основное внимание сосредоточено на анализе особенностей высокоэнергетической части спектров НПИ. Для описания непертурбативного взаимодействия атома с сильным лазерным излучением были использованы формализм ККЭС – для учета взаимодействия оптического электрона с внешним полем и метод эффективного радиуса – для учета эффектов атомного потенциала.

В первой главе дан краткий обзор основных теоретических методов, использованных в диссертации. В рамках формализма ККЭС предложен подход для описания НПО/НПИ в коротком лазерном импульсе. Показано, что формализм ККЭС также может быть использован при описании НПИ в поле короткого лазерного импульса. На основе формализма ККЭС получены общие соотношения для вероятности НПИ в коротком лазерном импульсе.

Во второй главе разработан модельный аналитический подход для описания высокоэнергетического спектра НПО/НПИ в произвольном периодическом поле. На его основе получено замкнутое аналитическое выражение для дифференциальной вероятности НПИ в коротком лазерном импульсе. Конечное выражение для вероятности НПИ содержит парциальные вероятности НПИ, ассоциированные с замкнутыми классическими траекториями. Показано, что парциальные вероятности НПИ могут быть представлены в факторизованном виде, а каждый сомножитель в этой факторизации соответствует одному из этапов трехступенчатой модели формирования высокоэнергетического электрона: ионизация оптического электрона, его распространение в континууме и рассеяние на родительском атомном остове. Предложено феноменологическое обобщение полученных модельных результатов на случай реальных атомных систем и установлена точность такого обобщения путем сравнения аналитических резуль-

татов с численным решением нестационарного уравнения Шредингера. Показано, что предложенная аналитическая модель с хорошей точностью описывает спектр фотоэлектронов с энергиями больше  $5u_p$ . В рамках представленной модели проанализированы основные особенности высокоэнергетического спектра НПИ в коротком импульсе: 1) возникновение нескольких платообразных структур в спектре НПИ; 2) нарушение право-левой симметрии в спектрах НПИ; 3) возникновение мелкомасштабных осцилляций в высокоэнергетической части спектра НПИ. Проанализирован вклад ОВ и МВ траекторий в формирование различных частей спектра НПИ, указана роль поляризационного состояния атомной мишени в формировании средней части плато. Выполнено сравнение аналитических результатов с результатами КТП, в ходе которого установлена область применимости факторизации дифференциальной вероятности НПИ на лазерный параметр и сечение упругого рассеяния электрона.

Третья глава диссертации посвящена исследованию процесса НПИ в сильном двухчастотном лазерном поле на основе развитого во второй главе диссертации подхода для описания НПИ в произвольном периодическом поле. Исследован вклад ОВ и МВ траекторий в формирование спектра НПИ в двухчастотном поле. Обнаружено, что в случае соизмеримых интенсивностей обеих компонент на некотором интервале фаз область вблизи обрыва плато определяется МВ траекториями. Такая особенность приводит к возникновению провалообразных структур в фазовой зависимости спектра НПИ и говорит о том, что в случае соизмеримых интенсивностей обеих компонент двухчастотного поля становится возможным осуществление контроля над выходом электронов НПИ и длиной высокоэнергетического плато путем варьирования относительной фазы при прочих неизменных параметрах поля. Обнаружены и проанализированы интерференционные особенности, возникающие в фазовой зависимости спектра НПИ в случае доминирования компоненты поля с удвоенной частотой.



## Приложение А

### Функции Грина электрона в электрическом поле

$$\mathbf{F}_\tau(t)$$

Нестационарная функция Грина  $G^{(+)}$  определяется из решения уравнения:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}^{(V)}(\mathbf{r}, t) \right) G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (\text{A.1})$$

где

$$\hat{H}^{(V)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_\tau(t).$$

Решение уравнения (A.1) может быть записано в виде [136]:

$$i\hbar G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{\Theta(t - t')}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \chi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}', t') \chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathcal{E}_p(t-t')/\hbar}, \quad (\text{A.2})$$

где  $\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$  — периодическая часть волновой функции электрона с импульсом  $\mathbf{p}$  в поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$ :

$$\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\tau(t) \right) \cdot \mathbf{r} - \frac{iS(\mathbf{p}, t)}{\hbar} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$S(\mathbf{p}, t) = \int \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\tau(t) \right)^2 - \mathcal{E}_p \right] dt', \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{p^2}{2m} + u_p, \quad u_p = \frac{e^2}{2mc^2\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \mathbf{A}_\tau^2(t') dt', \quad (\text{A.5})$$

где  $\mathbf{A}_\tau(t)$  — векторный потенциал электрического поля  $\mathbf{F}_\tau(t)$ ,  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда. Интегрирование по компонентам вектора  $\mathbf{p}$  дает фейнмановское представление для функции Грина [80]:

$$\begin{aligned} G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= -\frac{i\Theta(t - t')}{\hbar} \left[ \frac{m}{2\pi i\hbar(t - t')} \right]^{3/2} e^{iS_{cl}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')/\hbar} \\ &= G_0^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') e^{i[R(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + M(t, t')]/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

где  $S_{cl}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  — классическое действие электрона в поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$ , а  $G_0$  — функция Грина свободной частицы:

$$\begin{aligned}
G_0^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= -\frac{i\Theta(t-t')}{\hbar} \left[ \frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')} \right]^{3/2} \exp \left[ \frac{im(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2(t-t')\hbar} \right], \\
S_{cl}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{m(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2(t-t')} + R(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + M(t, t'), \\
R(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{e}{c} \left[ \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_\tau(t) - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}_\tau(t') - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{t-t'} \cdot \int_{t'}^t \mathbf{A}_\tau(\tau) d\tau \right], \\
M(t, t') &= -\frac{e^2}{2mc^2} \left[ \int_{t'}^t \mathbf{A}_\tau^2(\tau) d\tau - \frac{1}{t-t'} \left( \int_{t'}^t \mathbf{A}_\tau(\tau) d\tau \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

КЭС функция Грина в периодическом поле  $\mathbf{F}_\tau(t)$  удовлетворяет уравнению:

$$\left( \varepsilon + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}^{(V)}(\mathbf{r}, t) \right) \mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'), \quad (\text{A.7})$$

подставляя  $\delta$ -функцию в виде

$$\delta(t-t') = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_s e^{-is\omega_\tau(t-t')}, \quad (\text{A.8})$$

получим

$$\mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \sum_s \int \frac{\chi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}', t') \chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) e^{-is\omega_\tau(t-t')}}{\varepsilon - \mathcal{E}_p + s\hbar\omega_\tau + i \cdot 0} d\mathbf{p}. \quad (\text{A.9})$$

Учитывая явное выражение для  $\chi_{\mathbf{p}}$  (A.3), в результате интегрирования по  $\mathbf{p}$  КЭС функцию Грина можно представить в виде:

$$\mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{m}{2\pi\hbar^2} e^{i[\varphi(\mathbf{r}, t) - \varphi(\mathbf{r}', t')]/\hbar} \sum_s \frac{e^{-is\omega_\tau(t-t') + ip_s|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|/\hbar}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}, \quad (\text{A.10})$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_\tau(t) - \int \left[ \frac{e^2 \mathbf{A}_\tau^2(\tau)}{2mc^2} - u_p \right] d\tau, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \frac{e}{mc} \int \mathbf{A}_\tau(\tau) d\tau, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r}' - \frac{e}{mc} \int \mathbf{A}_\tau(\tau) d\tau,$$

$$\frac{p_s^2}{2m} = s\hbar\omega_\tau + \varepsilon - u_p. \quad (\text{A.13})$$

Для больших  $R$  асимптотику выражения (A.10) можно представить следующим образом:

$$\mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \simeq \frac{m}{2\pi\hbar^2} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)/\hbar} \sum_n e^{-in\omega_\tau(t-t')} \frac{e^{ip_n R/\hbar}}{R} \chi_{\mathbf{p}_n}^*(\mathbf{r}', t'), \quad (\text{A.14})$$

индекс суммирования  $n$  здесь имеет смысл числа поглощенных фотонов для электрона с начальной энергией  $\varepsilon$  и «асимптотическим импульсом»  $\mathbf{p}_n$ :

$$\mathbf{p}_n = p_n \frac{\mathbf{R}}{R} \simeq p_n \frac{\mathbf{r}}{r} = p_n \mathbf{n}, \quad p_n = \sqrt{2m(n\hbar\omega_\tau + \varepsilon - u_p)}. \quad (\text{A.15})$$

Асимптотика КЭС функции Грина при больших  $r$ , в свою очередь, следует из (A.14):

$$\mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \simeq \frac{m}{2\pi\hbar^2} e^{i\mathbf{e}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_\tau(t)/c} \sum_n e^{-iS(\mathbf{p}_n, t)/\hbar - in\omega_\tau(t-t')} \frac{e^{ip_n r/\hbar}}{r} \chi_{\mathbf{p}_n}^*(\mathbf{r}', t'). \quad (\text{A.16})$$

## Приложение Б

### Квазиклассическое приближение для амплитуды НПИ: учет эффектов перерасеяния

В этом приложении представлена квазиклассическая оценка амплитуды перерасеяния  $\mathcal{A}^{(R)}(\mathbf{p}_n)$  из выражения (2.30). В квазиклассическом пределе подынтегральная функция в (2.30) быстро меняется в зависимости от  $t$ . Таким образом, основной вклад в значение интеграла (2.30) (для заданного  $\nu$ ) вносит окрестность точки перевала  $t = t_\nu$ , которая определяется из уравнения:

$$\frac{\mathbf{P}_n^2(t_\nu)}{2m} = \frac{\alpha^2(t_\nu; t_\nu, t'_\nu(t_\nu))}{2m}, \quad (\text{Б.1})$$

где  $\alpha(\xi; t, t')$  задается выражением (2.6), а  $t'_\nu(t)$  – уравнением (2.17). С учетом уравнения (Б.1) упростим подынтегральную функцию в (2.30), произведя замену:

$$\mathcal{R}_l \left( \frac{\alpha^2(t; t, t'_\nu)}{2m} \right) \rightarrow \mathcal{R}_l \left( \frac{\mathbf{P}_n^2(t)}{2m} \right), \quad (\text{Б.2})$$

$$\alpha(t; t, t') \rightarrow \sqrt{\mathbf{P}_n^2(t)} s_\alpha, \quad (\text{Б.3})$$

где  $s_\alpha = \text{sign}[\alpha(t; t, t')]$ , в результате чего получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^R(\mathbf{p}_n) &= \sqrt{i} \frac{(2l+1)^{3/2} C_{\kappa l} m}{2\mathcal{T} \sqrt{\pi \hbar}} \left( -\frac{\sigma}{\hbar^2} \right)^l \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\nu} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \frac{e^{i\Phi(t, t'_\nu^\sigma)/\hbar} [(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P}_n(t)) |\mathbf{P}_n(t)| s_\alpha]^l}{\sqrt{e\sigma F_\tau(t'_\nu^\sigma)} (t - t'_\nu^\sigma)^{3/2}} \\ &\times \mathcal{R}_l^{-1} (\mathbf{P}_n^2(t)/(2m)) dt, \quad (\text{Б.4}) \end{aligned}$$

В выражении (Б.4) разделим точки перевала  $t'_\nu$  на два типа в соответствии со знаком  $\sigma$  (см. уравнение (2.17)):

$$\alpha(t'_\nu^\sigma; t, t'_\nu^\sigma) = -i\sigma \hbar \kappa, \quad \sigma = \pm 1, \quad (\text{Б.5})$$

и введем обозначение:

$$\Phi(t, t'_\nu) = S(\mathbf{p}_n, t) + \mathcal{S}(t, t'_\nu). \quad (\text{Б.6})$$

Интеграл в (Б.4) может быть оценен с помощью метода, предложенного Никишовым и Ритусом в [24] (см. также [86]). Общая идея этого метода заключается в разложении  $\Phi(t, t'_\nu)$  в окрестности точки  $t = t'_\nu$ , в которой вторая производная функции  $\Phi(t, t'_\nu)$  обращается в нуль, в ряд Тейлора до членов порядка  $(t - t'_\nu)^3$ .

Чтобы найти эту точку, вычислим первую производную  $\Phi(t, t'_\nu)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t, t'_\nu)}{dt} &= \frac{\mathbf{P}_n^2(t)}{2m} - \frac{\boldsymbol{\alpha}^2(t; t, t'_\nu)}{2m} \\ &= \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_n + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\tau(t'_\nu) + i\mathbf{e}_z \sigma \hbar \kappa \right) (\mathbf{p}_n + \mathbf{Q}(t)), \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{e}_z Q(t), \\ Q(t) &= \frac{e}{c} \left( 2A_\tau(t) - \frac{1}{t - t'_\nu} \int_{t'_\nu}^t A_\tau(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{e}{c} [2A_\tau(t) - A_\tau(t'_\nu)] - i\sigma \hbar \kappa. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Первый множитель в выражении (Б.7) можно рассматривать как константу, тогда вторая производная  $\Phi(t, t'_\nu)$  имеет вид:

$$\frac{d^2\Phi(t, t'_\nu)}{dt^2} \approx \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{e}_z + i\sigma \hbar \kappa + \frac{e}{c} A_\tau(t'_\nu) \right) \frac{dQ(t)}{dt}. \quad (\text{Б.9})$$

Вычислив первую производную функции  $Q(t)$  и приравняв ее к нулю, получим уравнение на время  $t'_\nu$ :

$$2eF_\tau(t'_\nu) + \frac{e}{c} \frac{A_\tau(t'_\nu) - A_\tau(t'_\nu)}{t'_\nu - t'_\nu} = \frac{i\sigma \hbar \kappa}{(t'_\nu - t'_\nu)} \left[ 1 - 2 \frac{F_\tau(t'_\nu)}{F_\tau(t'_\nu)} \right]. \quad (\text{Б.10})$$

Уравнения (Б.5) и (Б.10) определяют систему связанных уравнений на времена  $t'_\nu$  и  $t'_\nu$ . Будем решать эту систему уравнений итерационным методом,

рассматривая параметр  $i\sigma\hbar\kappa$  в качестве возмущения. В нулевом приближении по  $i\sigma\hbar\kappa$  эта система примет вид:

$$A_\tau(t_i^{(\nu)}) - \frac{1}{t_f^{(\nu)} - t_i^{(\nu)}} \int_{t_i^{(\nu)}}^{t_f^{(\nu)}} A_\tau(\tau) d\tau = 0, \quad (\text{Б.11a})$$

$$2F_\tau(t_f^{(\nu)}) + \frac{1}{c} \frac{A_\tau(t_f^{(\nu)}) - A_\tau(t_i^{(\nu)})}{t_f^{(\nu)} - t_i^{(\nu)}} = 0, \quad (\text{Б.11b})$$

где  $t_i^{(\nu)}$  и  $t_f^{(\nu)}$  – нулевое приближение решений  $t_\nu^{\prime\sigma}$  и  $t_\nu^\sigma$ , соответственно. Подставляя в уравнения (Б.5) и (Б.10)  $t_\nu^{\prime\sigma}$  и  $t_\nu^\sigma$  в виде  $t_\nu^{\prime\sigma} = t_i^{(\nu)} + \Delta_\nu^{\prime\sigma}$ ,  $t_\nu^\sigma = t_f^{(\nu)} + \Delta_\nu^\sigma$  и раскладывая (Б.5) и (Б.10) в ряд по  $\Delta_\nu^{\prime\sigma}$  и  $\Delta_\nu^\sigma$  до линейных слагаемых, получим систему двух линейных уравнений на  $\Delta_\nu^{\prime\sigma}$  и  $\Delta_\nu^\sigma$ , решение которых выглядит следующим образом:

$$\Delta_\nu^{\prime\sigma} = \frac{i\hbar\kappa}{e\tilde{F}_\nu}, \quad \tilde{F}_\nu = \sigma F_\tau(t_i^{(\nu)}), \quad (\text{Б.12})$$

$$\Delta_\nu^\sigma = 0. \quad (\text{Б.13})$$

С учетом поправки (Б.12) первая производная функции  $\Phi(t, t_\nu^{\prime\sigma})$  в точках  $t_\nu^{\prime\sigma}$  и  $t_\nu^\sigma$  может быть найдена с точностью до  $\sim (\hbar\kappa)^2$ :

$$\Delta E_{\text{max}}^{(\nu)} = \left. \frac{d\Phi(t, t_\nu^{\prime\sigma})}{dt} \right|_{t=t_f^{(\nu)}} = \frac{\mathbf{P}_n^2(t_f^{(\nu)})}{2m} - \mathcal{E}(t_i^{(\nu)}, t_f^{(\nu)}) + 2 \frac{F_\tau(t_f^{(\nu)})}{F_\tau(t_i^{(\nu)})} |E_0|, \quad (\text{Б.14})$$

$$\mathcal{E}(t_i^{(\nu)}, t_f^{(\nu)}) = \frac{e^2 [A_\tau(t_f^{(\nu)}) - A_\tau(t_i^{(\nu)})]^2}{2mc^2}. \quad (\text{Б.15})$$

Для оценки интеграла в (Б.4) также требуется третья производная  $\Phi(t, t_\nu^{\prime\sigma})$ , которую мы вычисляем в нулевом порядке по  $i\sigma\hbar\kappa$ :

$$\left. \frac{d^3\Phi(t)}{dt^3} \right|_{t=t_f^{(\nu)}} = 2\zeta_\nu \hbar\omega_{\text{at}}^3, \quad (\text{Б.16})$$

$$\zeta_\nu = -\frac{I(t_f^{(\nu)})}{2I_{\text{at}}} \left[ \frac{\dot{F}_\tau(t_f^{(\nu)}) (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P}_n(t_i^{(\nu)}))}{eF_\tau^2(t_f^{(\nu)})} + 2 \left\{ 3 - 4 \frac{F_\tau(t_f^{(\nu)})}{F_\tau(t_i^{(\nu)})} \right\} \right], \quad (\text{Б.17})$$

где  $\omega_{\text{at}} = E_{\text{at}}/\hbar$ ,  $I(t_f^{(\nu)}) = cF^2(t_f^{(\nu)})/(8\pi)$  – мгновенное значение интенсивности лазерного поля в момент времени  $t_f^{(\nu)}$ . Поскольку  $t_\nu^{\prime\sigma}$  в общем случае комплексно

(см., например, (Б.12)), функция  $\Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma)$  также имеет комплексные значения. Чтобы разделить действительную и мнимую части функции  $\Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma)$ , представим ее в виде:

$$\Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma) \approx S(\mathbf{p}_n, t_f^{(\nu)}) - \int_{t_i^{(\nu)}}^{t_f^{(\nu)}} [\mathcal{E}(t_i^{(\nu)}, t) - E_0] dt - \int_{t_i^{(\nu)} + i\frac{\hbar\kappa}{eF_\nu}}^{t_i^{(\nu)}} [\mathcal{E}(t_i^{(\nu)}, t) - E_0] dt. \quad (\text{Б.18})$$

Первые два слагаемых действительны, тогда как третье слагаемое вносит вклад в мнимую часть  $\Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma)$ . Раскладывая подынтегральное выражение в третьем слагаемом в ряд по параметру  $t - t_\nu'$  до квадратичного члена и рассчитывая интеграл, получим:

$$\int_{t_i^{(\nu)} + i\frac{\hbar\kappa}{eF_\nu}}^{t_i^{(\nu)}} [\mathcal{E}(t_i^{(\nu)}, t) - E_0] dt \approx -\frac{i\hbar^3\kappa^3}{3me\tilde{F}_\nu}. \quad (\text{Б.19})$$

Результат для  $\Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma)$  (с точностью до  $\sim i\hbar\kappa$ ) может быть представлен в виде:

$$\Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma) = \varphi_\nu + \frac{i\hbar^3\kappa^3}{3me\tilde{F}_\nu}, \quad (\text{Б.20})$$

$$\varphi_\nu = S_{\mathbf{p}_n}(t_f^{(\nu)}) - \int_{t_i^{(\nu)}}^{t_f^{(\nu)}} [\mathcal{E}(t_i^{(\nu)}, t) - E_0] dt. \quad (\text{Б.21})$$

Таким образом, разложение функции  $\Phi(t, t_\nu'^\sigma)$  в окрестности точки перевала имеет вид:

$$\Phi(t, t_\nu'^\sigma) \approx \Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma) + \Delta E_{\max}^{(\nu)}(t - t_f^{(\nu)}) + \frac{\zeta_\nu \hbar \omega_{\text{at}}^3}{3}(t - t_f^{(\nu)})^3, \quad (\text{Б.22})$$

где явный вид  $\Delta E_{\max}^{(\nu)}$ ,  $\zeta_\nu$  и  $\Phi(t_\nu^\sigma, t_\nu'^\sigma)$  определяется выражениями (Б.14), (Б.17) и (Б.20), соответственно. Заменяя предэкспоненциальную функцию в интеграле (Б.4) ее значением в точках  $t = t_f^{(\nu)}$ ,  $t_\nu'^\sigma = t_i^{(\nu)}$  и расширяя пределы интегрирования от  $-\infty$  до  $\infty$ , выполним интегрирование по  $t$ , выражая конечный результат через функцию Эйри. В итоге получим амплитуду в виде (2.32).

## Литература

1. The attosecond nonlinear optics of bright coherent X-ray generation / T. Popmintchev, M.-C. Chen, P. Arpin et al. // *Nature Photonics*. — 2010. — Vol. 4. — P. 822–832.
2. Single-Cycle Nonlinear Optics / E. Goulielmakis, M. Schultze, M. Hofstetter et al. // *Science*. — 2008. — Vol. 320. — P. 1614–1617.
3. Tomographic imaging of molecular orbitals / J. Itatani, J. Levesque, D. Zeidler et al. // *Nature*. — 2004. — Vol. 432. — P. 867–871.
4. Potential for ultrafast dynamic chemical imaging with few-cycle infrared lasers / T. Morishita, A.-Th. Le, Zh. Chen, C. D. Lin // *New Journal of Physics*. — 2008. — Vol. 10. — P. 025011.
5. Strong-field rescattering physics – self-imaging of a molecule by its own electrons / C. D. Lin, A.-Th. Le, Zh. Chen et al. // *Journal of Physics B*. — 2010. — Vol. 43. — P. 122001.
6. Imaging ultrafast molecular dynamics with laser-induced electron diffraction / C. I. Blaga, J. Xu, A. D. DiChiara et al. // *Nature*. — 2012. — Vol. 483. — P. 194–197.
7. Attosecond science / P. Corkum, F. Krausz // *Nature Physics*. — 2007. — Vol. 3. — P. 381–387.
8. *Krausz, F.* Attosecond physics / F. Krausz, M. Ivanov // *Review of Modern Physics*. — 2009. — Vol. 81. — P. 163–234.
9. Attosecond Physics / Ed. by L. Plaja, R. Torres, A. Zair. — Springer-Verlag Berlin, 2013. — P. 275.



10. Attosecond and XUV Spectroscopy: Ultrafast Dynamics and Spectroscopy / Ed. by T. Schultz, M. Vrakking. — Wiley, 2014. — P. 624.
11. Above-threshold ionisation with a two-colour laser field / H. G. Muller, P. H. Bucksbaum, D. W. Schumacher, A. Zavriyev // *Journal of Physics B*. — 1990. — Vol. 23. — P. 2761–2769.
12. Phase dependence of intense field ionization: a study using two colors / D. W. Schumacher, F. Weihe, H. G. Muller, P. H. Bucksbaum // *Physical Review Letters*. — 1994. — Vol. 73. — P. 1344–1347.
13. Phase-difference effect in two-color above-threshold ionization / L. Gao, X. Li, P. Fu, D.-Sh. Guo // *Physical Review A*. — 1998. — Vol. 58. — P. 3807–3812.
14. Two-colour experiments in the gas phase / M. Meyer, J. T. Costello, S. Düsterer et al. // *Journal of Physics B*. — 2010. — Vol. 43. — P. 194006.
15. Validity of factorization of the high-energy photoelectron yield in above-threshold ionization of an atom by a short laser pulse / M. V. Frolov, D. V. Knyazeva, N. L. Manakov et al. // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 108. — P. 213002.
16. Analytic model for the description of above-threshold ionization by an intense short laser pulse / M. V. Frolov, D. V. Knyazeva, N. L. Manakov et al. // *Physical Review A*. — 2014. — Vol. 89. — P. 063419.
17. Analytic formulas for high-energy spectra of ATI/ATD electrons produced by an intense short laser pulse with the stabilized CEP / M. V. Frolov, D. V. Knyazeva, N. L. Manakov, A. F. Starace // *20th International Laser Physics Workshop (LPHYS'11), July 11 – 15, 2011, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina: Book of Abstracts*. — 2011. — P. 41.
18. Ионизация атомов в сильном лазерном поле короткой длительности /

- М. В. Фролов, Н. Л. Манаков, Д. В. Князева и др. // *Сборник тезисов докладов конференции и школы молодых учёных по фундаментальной атомной спектроскопии ФАС – XX – Воронеж.* — 2013. — С. 252.
19. Chasm-like structures in ATI spectra for a two-color laser field: suppression of single-return trajectories / M. V. Frolov, D. V. Knyazeva, N. L. Manakov, A. F. Starace // *23th International Laser Physics Workshop (LPHYS'14), July 14 – 18, 2014, Sofia, Bulgaria: Book of Abstracts.* — 2014. — P. 62.
20. 50 years of optical tunneling / L. DiMauro, M. Frolov, K. L. Ishikawa, M. Ivanov // *Journal of Physics B.* — 2014. — Vol. 47. — P. 203001.
21. *Келдыш, Л. В.* Ионизация в поле сильной электромагнитной волны / Л. В. Келдыш // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1964. — Т. 47. — С. 1945–1957.
22. *Popruzhenko, S. V.* Keldysh theory of strong field ionization: history, applications, difficulties and perspectives / S. V. Popruzhenko // *Journal of Physics B.* — 2014. — Vol. 47. — P. 204001.
23. Современное развитие теории нелинейной ионизации атомов и ионов / Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов // *Успехи физических наук.* — 2015. — Т. 185. — С. 3–34.
24. *Никишов, А. И.* Квантовые процессы в поле в поле плоской электромагнитной волны и постоянном поле. I / А. И. Никишов, В. И. Ритус // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1964. — Т. 46. — С. 776–796.
25. *Никишов, А. И.* Ионизация систем, связанных короткодействующими силами, полем электромагнитной волны / А. И. Никишов, В. И. Ритус // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1966. — Т. 50. — С. 225–240.

26. *Переломов, А. М.* Ионизация атомов в переменном электрическом поле. I / А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1966. — Т. 50. — С. 1393–1409.
27. *Переломов, А. М.* Ионизация атомов в переменном электрическом поле. II / А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1966. — Т. 51. — С. 309–326.
28. *Переломов, А. М.* Ионизация атомов в переменном электрическом поле. III / А. М. Переломов, В. С. Попов // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1967. — Т. 52. — С. 514.
29. *Попов, В. С.* Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) / В. С. Попов // *Успехи физических наук.* — 2004. — Т. 174. — С. 921–951.
30. *Попов, В. С.* «Мнимое время» в квантовой механике и теории поля / В. С. Попов // *Ядерная физика.* — 2005. — Т. 68. — С. 717–738.
31. *Аммосов, М. В.* Туннельная ионизация сложных атомов и атомарных ионов в переменном электромагнитном поле / М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов // *Успехи физических наук.* — 1986. — Vol. 91. — P. 2008.
32. *Delone, N. B.* Energy and angular electron spectra for the tunnel ionization of atoms by strong low-frequency radiation / N. B. Delone, V. P. Krainov // *Journal of the Optical Society of America B.* — 1991. — Vol. 8. — P. 1207.
33. *Krainov, V. P.* An introductory overview of tunnel ionization of atoms by intense lasers / V. P. Krainov, W. Xiong, S. L. Chin // *Laser Physics.* — 1992. — Vol. 2. — P. 467.
34. *Делоне, Н. Б.* Туннельная и надбарьерная ионизация атомов и ионов

- в поле лазерного излучения / Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов // *Успехи физических наук*. — 1998. — Vol. 168. — P. 531–549.
35. Coulomb asymmetry in above-threshold ionization / S. P. Goreslavski, G. G. Paulus, S. V. Popruzhenko, N. I. Shvetsov-Shilovski // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 93. — P. 233002.
36. Попов, В. С. Об учете кулоновского взаимодействия в теории многофотонной ионизации / В. С. Попов, В. Д. Мур, С. В. Попруженко // *Письма в ЖЭТФ*. — 2007. — Т. 85. — С. 275–278.
37. Popruzhenko, S. V. Coulomb-corrected quantum trajectories in strong-field ionization / S. V. Popruzhenko, G. G. Paulus, D. Bauer // *Physical Review A*. — 2008. — Vol. 77. — P. 053409.
38. Popruzhenko, S. V. Strong field approximation for systems with Coulomb interaction / S. V. Popruzhenko, D. Bauer // *Journal of Modern Optics*. — 2008. — Vol. 55. — P. 2573–2589.
39. Многофотонная ионизация атомов и ионов интенсивным излучением рентгеновских лазеров / С. В. Попруженко, В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Байэр // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2009. — Т. 135. — С. 1092.
40. Above threshold ionization: From classical features to quantum effects / W. Becker, F. Grasbon, R. Kopold et al. // *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2002. — Vol. 48. — P. 35–98.
41. Becker, A. Intense-field many-body S-matrix theory / A. Becker, F. H. M. Faisal // *Journal of Physics B*. — 2005. — Vol. 38. — P. R1–R56.
42. Strong field ionization rate for arbitrary laser frequencies / S. V. Popruzhenko,

- V. D. Mur, V. S. Popov, D. Bauer // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 101. — P. 193003.
43. *Faisal, F. M.* Multiple absorption of laser photons by atoms / F. H. M. Faisal // *Journal of Physics B*. — 1973. — Vol. 6. — P. L89.
44. *Reiss, H. R.* Effect of an intense electromagnetic field on a weakly bound system / H. R. Reiss // *Physical Review A*. — 1980. — Vol. 22. — P. 1786–1813.
45. *Leubner, C.* Uniform asymptotic expansion of a class of generalized bessel functions occurring in the study of fundamental scattering processes in intense laser fields / C. Leubner // *Physical Review A*. — 1981. — Vol. 23. — P. 2877.
46. *Gribakin, G. F.* Multiphoton detachment of electrons from negative ions / G. F. Gribakin, M. Yu. Kuchiev // *Physical Review A*. — 1997. — Vol. 55. — P. 3760–3771.
47. Model-independent quantum approach for intense laser detachment of a weakly bound electron / M. V. Frolov, N. L. Manakov, E. A. Pronin, Anthony F. Starace // *Physical Review Letters*. — 2003. — Vol. 91. — P. 053003.
48. *Beiser, S.* Photodetachment in a strong circularly polarized laser field / S. Beiser, M. Klaiber, I. Yu. Kiyan // *Physical Review A*. — 2004. — Vol. 70. — P. 011402.
49. *Bauer, D.* Strong-field approximation for intense-laser-atom processes: The choice of gauge / D. Bauer, D. B. Milošević, W. Becker // *Physical Review A*. — 2005. — Vol. 72. — P. 023415.
50. Photodetachment in a strong laser field: An experimental test of Keldysh-like theories / B. Bergues, Z. Ansari, D. Hanstorp, I. Yu. Kiyan // *Physical Review A*. — 2007. — Vol. 75. — P. 063415.

51. Investigation of above-threshold ionization with femtosecond pulses: connection between plateau and angular distribution of the photoelectrons / G. G. Paulus, W. Becker, W. Nicklich, H. Walther // *Europhysics Letters*. — 1994. — Vol. 27. — P. 267.
52. Plateau in above threshold ionization spectra / G. G. Paulus, W. Nicklich, H. Xu et al. // *Physical Review Letters*. — 1994. — Vol. 72. — P. 2851.
53. Кучиев, М. Ю. Атомная антенна / М. Ю. Кучиев // *Письма в ЖЭТФ*. — 1987. — Т. 45. — С. 319–321.
54. Rescattering effects in above-threshold ionization: a classical model / G. G. Paulus, W. Becker, W. Nicklich, H. Walther // *Journal of Physics B*. — 1994. — Vol. 27. — P. L703.
55. Corkum, P. B. Plasma perspective on strong field multiphoton ionization / P. B. Corkum // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 71. — P. 1994–1997.
56. High-order harmonic generation in rare gases with an intense short-pulse laser / C.-G. Wahlström, J. Larsson, A. Persson et al. // *Physical Review A*. — 1993. — Vol. 48. — P. 4709–4720.
57. Above-threshold ionization in the tunneling regime / A. Lohr, M. Kleber, R. Kopold, W. Becker // *Physical Review A*. — 1997. — Vol. 55. — P. R4003–R4006.
58. Milošević, D. B. Coulomb and rescattering effects in above-threshold ionization / D. B. Milošević, F. Ehlotzky // *Physical Review A*. — 1998. — Vol. 58. — P. 3124–3127.
59. Milošević, D. B. Scattering and reaction processes in powerful laser fields / D. B. Milošević, F. Ehlotzky // *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2003. — Vol. 49. — P. 373–532.

60. Channel-closing-induced resonances in the above-threshold ionization plateau / G. G. Paulus, F. Grasbon, H. Walther et al. // *Physical Review A*. — 2001. — Vol. 64. — P. 021401.
61. Laser-induced recollision phenomena: Interference resonances at channel closings / S. V. Popruzhenko, Ph. A. Korneev, S. P. Goreslavski, W. Becker // *Physical Review Letters*. — 2002. — Vol. 89. — P. 023001.
62. Channel-closing effects in high-order above-threshold ionization and high-order harmonic generation / R. Kopold, W. Becker, M. Kleber, G. G. Paulus // *Journal of Physics B*. — 2002. — Vol. 35. — P. 217–232.
63. Intensity-dependent enhancements in high-order above-threshold ionization / D. B. Milošević, E. Hasović, M. Busuladžić et al. // *Physical Review A*. — 2007. — Vol. 76. — P. 053410.
64. *Gazibegović-Busuladžić, A.* High-energy above-threshold detachment from negative ions / A. Gazibegović-Busuladžić, D. B. Milošević, W. Becker // *Physical Review A*. — 2004. — Vol. 70. — P. 053403.
65. Electron rescattering in above-threshold photodetachment of negative ions / A. Gazibegović-Busuladvzić, D. B. Milošević, W. Becker et al. // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 104. — P. 103004.
66. *Chu, Sh.-I.* Beyond the floquet theorem: generalized floquet formalisms and quasienergy methods for atomic and molecular multiphoton processes in intense laser fields / Sh.-I. Chu, D. A. Telnov // *Physics Reports*. — 2004. — Vol. 390. — P. 1–131.
67. *Bauer, D.* QPROP: A Schrödinger-solver for intense laser-atom interaction / D. Bauer, P. Koval // *Computer Physics Communication*. — 2006. — Vol. 174. — P. 396–421.

68. *Peng, L.-Y.* Application of coulomb wave function discrete variable representation to atomic systems in strong laser fields / L.-Y. Peng, A. F. Starace // *Journal of Chemical Physics*. — 2006. — Vol. 125. — P. 154311.
69. *Telnov, D. A.* Above-threshold-ionization spectra from the core region of a time-dependent wave packet: An ab initio time-dependent approach / D. A. Telnov, Sh.-I. Chu // *Physical Review A*. — 2009. — Vol. 79. — P. 043421.
70. *Pabst, S.* Strong-field many-body physics and the giant enhancement in the high-harmonic spectrum of xenon / S. Pabst, R. Santra // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 111. — P. 233005.
71. *Hassouneh, O.* Harmonic generation by noble-gas atoms in the near-IR regime using *ab initio* time-dependent *R*-matrix theory / O. Hassouneh, A. C. Brown, H. W. van der Hart // *Physical Review A*. — 2014. — Vol. 90. — P. 043418.
72. *Демков, Ю. Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике / Ю. Н. Демков, В. Н. Островский. — Ленинград: Изд. Ленинградского университета, 1975. — С. 240.
73. *Манаков, Н. Л.* Частица с малой энергией связи в циркулярно поляризованном поле / Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1975. — Т. 69. — С. 842–852.
74. *Berson, I. J.* Multiphoton ionization and stimulated bremsstrahlung radiation in the case of short-range potentials / I. J. Berson // *Journal of Physics B*. — 1975. — Vol. 8. — P. 3078–3088.
75. *Manakov, N. L.* Atoms in a laser field / N. L. Manakov, V. D. Ovsiannikov, L. P. Rapoport // *Physics Reports*. — 1986. — Vol. 141. — P. 319–433.
76. Interaction of laser radiation with a negative ion in the presence of a strong stat-



- ic electric field / N. L. Manakov, M. V. Frolov, A. F. Starace, I. I. Fabrikant // *Journal of Physics B*. — 2000. — Vol. 33. — P. R141–R214.
77. Манаков, Н. Л. Распад слабосвязанного уровня в монохроматическом поле / Н. Л. Манаков, А. Г. Файнштейн // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1980. — Т. 79. — С. 751–762.
78. Квазистационарная стабилизация распада слабосвязанного уровня в сильной монохроматической волне / Н. Л. Манаков, М. В. Фролов, Б. Борка, А. Ф. Старас // *Письма в ЖЭТФ*. — 2000. — Т. 72. — С. 426–431.
79. Multiphoton detachment of a negative ion by an elliptically polarized, monochromatic laser field / N. L. Manakov, M. V. Frolov, B. Borca, A. F. Starace // *Journal of Physics B*. — 2003. — Vol. 36. — P. R49–R124.
80. An analytical quantum model for intense field processes: quantum origin of rescattering plateaus / M. V. Frolov, A. A. Khuskivadze, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Journal of Physics B*. — 2006. — Vol. 39. — P. S283–S305.
81. Strong field detachment of a negative ion with non-zero angular momentum: application to  $F^-$  / M. V. Frolov, N. L. Manakov, E. A. Pronin, A. F. Starace // *Journal of Physics B*. — 2003. — Vol. 36. — P. L419–L426.
82. Frolov, M. V. Effective-range theory for an electron in a short-range potential and a laser field / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2008. — Vol. 78. — P. 063418.
83. Андреев, С. П. Слабосвязанные состояния электрона во внешнем электромагнитном поле / С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур // *Письма в ЖЭТФ*. — 1983. — Т. 37. — С. 155–157.
84. Спектр слабосвязанных состояний частицы во внешних электрических полях / С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. А. Полуниин //

- Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1984. — Т. 86. — С. 866–881.
85. *Андреев, С. П.* Энергетический спектр частицы при взаимодействии с сильно несоизмеримыми радиусами / С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур // *Теоретическая и математическая физика.* — 1985. — Т. 64. — С. 287–297.
86. *Frolov, M. V.* Analytic formulas for above-threshold ionization or detachment plateau spectra / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review A.* — 2009. — Vol. 79. — P. 033406.
87. *Brabec, T.* Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics / T. Brabec, F. Krausz // *Review of Modern Physics.* — 2000. — Vol. 72. — P. 545–591.
88. Carrier-envelope-phase stabilized terawatt class laser at 1 kHz with a wavelength tunable option / B. Langdon, J. Garlick, X. Ren et al. // *Optics Express.* — 2015. — Vol. 23. — P. 4563–4572.
89. Measurement of the phase of few-cycle laser pulses / G. G. Paulus, F. Lindner, H. Walther et al. // *Physical Review Letters.* — 2003. — Vol. 91. — P. 253004.
90. *Milošević, D. B.* Phase-dependent effects of a few-cycle laser pulse / D. B. Milošević, G. G. Paulus, W. Becker // *Physical Review Letters.* — 2002. — Vol. 89. — P. 153001.
91. *Milošević, D. B.* Above-threshold ionization with few-cycle laser pulses and the relevance of the absolute phase / D. B. Milošević, G. G. Paulus, W. Becker // *Laser Physics.* — 2003. — Vol. 13. — P. 948.
92. *Milošević, D. B.* Ionization by few-cycle pulses: Tracing the electron orbits /

- D. B. Milošević, G. G. Paulus, W. Becker // *Physical Review A*. — 2005. — Vol. 71. — P. 061404.
93. Milošević, D. B. Quantum-orbit theory of high-order atomic processes in intense laser fields / D. B. Milošević, D. Bauer, W. Becker // *Journal of Modern Optics*. — 2006. — Vol. 53. — P. 125–134.
94. Above-threshold ionization by few-cycle pulses / D. B. Milošević, G. G. Paulus, D. Bauer, W. Becker // *Journal of Physics B*. — 2006. — Vol. 39. — P. R203–R262.
95. Single-shot carrier-envelope phase measurement of few-cycle laser pulses / T. Wittmann, B. Horvath, W. Helml et al. // *Nature Physics*. — 2009. — Vol. 5. — P. 357–362.
96. Attosecond double-slit experiment / F. Lindner, M. G. Schätzel, H. Walther et al. // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 95. — P. 040401.
97. Attosecond angular streaking / P. Eckle, M. Smolarski, Ph. Schlup et al. // *Nature Physics*. — 2008. — Vol. 4. — P. 565–570.
98. Attosecond ionization and tunneling delay time measurements in helium / P. Eckle, A. N. Pfeiffer, C. Cirelli et al. // *Science*. — 2008. — Vol. 322. — P. 1521–1529.
99. Attoclock reveals natural coordinates of the laser-induced tunnelling current flow in atoms / A. N. Pfeiffer, C. Cirelli, M. Smolarski et al. // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8. — P. 76–80.
100. Interpreting attoclock measurements of tunnelling times / L. Torlina, F. Morales, J. Kaushal et al. // *Nature Physics*. — 2015. — Vol. 11. — P. 503–508.

101. Experimental retrieval of target structure information from laser-induced rescattered photoelectron momentum distributions / M. Okunishi, T. Morishita, G. Prümper et al. // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 100. — P. 143001.
102. Accurate retrieval of structural information from laser-induced photoelectron and high-order harmonic spectra by few-cycle laser pulses / T. Morishita, A.-Th. Le, Zh. Chen, C. D. Lin // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 100. — P. 013903.
103. Accurate retrieval of target structures and laser parameters of few-cycle pulses from photoelectron momentum spectra / S. Mischeau, Zh. Chen, A. T. Le et al. // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 102. — P. 073001.
104. Retrieval of experimental differential electron-ion elastic scattering cross sections from high-energy ATI spectra of rare gas atoms by infrared lasers / T. Morishita, M. Okunishi, K. Shimada et al. // *Journal of Physics B*. — 2009. — Vol. 42. — P. 105205.
105. Imaging an aligned polyatomic molecule with laser-induced electron diffraction / M. G. Pullen, B. Wolter, A.-Th. Le et al. // *Nature Communications*. — 2015. — Vol. 6. — P. 7262.
106. Quantitative rescattering theory for laser-induced high-energy plateau photoelectron spectra / Zh. Chen, A.-Th. Le, T. Morishita, C. D. Lin // *Physical Review A*. — 2009. — Vol. 79. — P. 033409.
107. *Tolstikhin, O. I.* Adiabatic theory of ionization of atoms by intense laser pulses: One-dimensional zero-range-potential model / O. I. Tolstikhin, T. Morishita, Sh. Watanabe // *Physical Review A*. — 2010. — Vol. 81. — P. 033415.
108. *Tolstikhin, O. I.* Adiabatic theory of ionization by intense laser pulses:

- Finite-range potentials / O. I. Tolstikhin, T. Morishita // *Physical Review A*. — 2012. — Vol. 86. — P. 043417.
109. *Floquet, G.* Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques / G. Floquet // *Annals of the École Normale Supérieure*. — 1883. — Vol. 12. — P. 47–88.
110. *Зельдович, Я. Б.* Квазиэнергия квантовой системы, подвергающейся периодическому воздействию / Я. Б. Зельдович // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1966. — Т. 51. — С. 1492–1495.
111. *Ритус, В. И.* Сдвиг и расщепление атомных уровней полем электромагнитной волны / В. И. Ритус // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1966. — Т. 51. — С. 1544–1549.
112. *Базь, А. И.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике / А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. — Москва: Наука, 1971. — С. 544.
113. *Sambe, H.* Steady states and quasienergies of a quantum-mechanical system in an oscillating field / H. Sambe // *Physical Review A*. — 1973. — Vol. 7. — P. 2203–2213.
114. *Husimi, K.* Miscellanea in elementary quantum mechanics, II / K. Husimi // *Progress of Theoretical Physics*. — 1953. — Vol. 4. — P. 381–402.
115. *Переломов, А. М.* Групповые аспекты задачи об осцилляторе с переменной частотой / А. М. Переломов, В. С. Попов // *Теоретическая и математическая физика*. — 1969. — Т. 1. — С. 360–374.
116. *Манаков, Н. Л.* Квазиэнергетические состояния двухмерного ротатора в поле циркулярно поляризованной волны / Н. Л. Манаков, А. Г. Файн-

- штейн, Л. П. Рапопорт // *Теоретическая и математическая физика*. — 1977. — Т. 30. — С. 395–406.
117. *Fainshtein, A. G.* A plane rotator in an intense electromagnetic field: scattering, emission and absorption of radiation / A. G. Fainshtein, N. L. Manakov, L. P. Rapoport // *Journal of Physics B*. — 1978. — Vol. 11. — P. 2579–2587.
118. *Fainshtein, A. G.* Some general properties of quasi-energetic spectra of quantum systems in classical monochromatic fields / A. G. Fainshtein, N. L. Manakov, L. P. Rapoport // *Journal of Physics B*. — 1978. — Vol. 11. — P. 2561–2577.
119. *Зельдович, Я. Б.* Рассеяние и излучение квантовой системой в сильной электромагнитной волне / Я. Б. Зельдович // *Успехи физических наук*. — 1973. — Т. 110. — С. 139–151.
120. *Kapur, P. L.* The dispersion formula for nuclear reactions / P. L. Kapur, R. Peierls // *Proceedings of the Royal Society A*. — 1938. — Vol. 166. — P. 277–295.
121. *Siegert, A. J. F.* On the derivation of the dispersion formula for nuclear reactions / A. J. F. Siegert // *Physical Review*. — 1939. — Vol. 56. — P. 750–752.
122. *Зельдович, Я. Б.* К теории нестабильных состояний / Я. Б. Зельдович // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1960. — Т. 39. — С. 776–780.
123. *Hokkyo, N.* A remark on the norm of the unstable state / N. Hokkyo // *Progress of Theoretical Physics*. — 1965. — Vol. 33. — P. 1116–1128.
124. *More, R. M.* Theory of decaying states / R. M. More // *Physical Review A*. — 1971. — Vol. 4. — P. 1782–1790.

125. О методе регуляризации Зельдовича в теории квазистационарных состояний / В. Д. Мур, С. Г. Поздняков, В. С. Попов, С. В. Попруженко // *Письма в ЖЭТФ*. — 2002. — Т. 75. — С. 294–297.
126. *Watson, D. K.* Partial widths and resonance normalization / D. K. Watson // *Physical Review A*. — 1986. — Vol. 34. — P. 1016–1025.
127. *Rescigno, T. N.* Normalization of resonance wave functions and the calculation of resonance widths / T. N. Rescigno, C. W. McCurdy // *Physical Review A*. — 1986. — Vol. 34. — P. 1882–1887.
128. *Зельдович, Я. Б.* Квазиэнергия системы при воздействии периодического внешнего возмущения / Я. Б. Зельдович, Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт // *Успехи физических наук*. — 1975. — Т. 117. — С. 563–565.
129. *Chu, Sh.-I.* Intense field multiphoton ionization via complex dressed states: Application to the H atom / Sh.-I. Chu, W. P. Reinhardt // *Physical Review Letters*. — 1977. — Vol. 39. — P. 1195–1198.
130. *Potvliege, R. M.* Nonperturbative treatment of multiphoton ionization within the Floquet framework / R. M. Potvliege, R. Shakeshaft // *Atom in intense laser fields* / Ed. by M. Gavrila. — New York: Academic, 1992. — P. 373–434.
131. Description of harmonic generation in terms of the complex quasienergy. I. General formulation / M. V. Frolov, A. V. Flegel, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2007. — Vol. 75. — P. 063407.
132. *Potvliege, R. M.* Multiphoton processes in an intense laser field: Harmonic generation and total ionization rates for atomic hydrogen / R. M. Potvliege, R. Shakeshaft // *Physical Review A*. — 1989. — Vol. 40. — P. 3061–3079.
133. *Манаков, Н. Л.* Квазистационарные квазиэнергетические состояния и сходимость рядов теории возмущений в монохроматическом поле / Н. Л. Ма-

- наков, А. Г. Файнштейн // *Теоретическая и математическая физика*. — 1981. — Т. 48. — С. 385–395.
134. *Telnov, D. A.* Adiabatic theory of multiphoton decay in an intense laser field. application to above-threshold photodetachment / D. A. Telnov // *Journal of Physics B*. — 1991. — Vol. 24. — P. 2967–2983.
135. Analytic theory of high-order-harmonic generation by an intense few-cycle laser pulse / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. M. Popov et al. // *Physical Review A*. — 2012. — Vol. 85. — P. 033416.
136. *Ландау, Л. Д.* Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва: Наука, 1989. — С. 768.
137. *Демков, Ю. Н.* Слабосвязанная частица с ненулевым орбитальным моментом в электрическом и магнитном поле / Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1981. — Т. 81. — С. 1218–1231.
138. Description of harmonic generation in terms of the complex quasienergy. II. Application to time-dependent effective range theory / M. V. Frolov, A. V. Flegel, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2007. — Vol. 75. — P. 063408.
139. Analytic confirmation that the factorized formula for harmonic generation involves the exact photorecombination cross section / M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2011. — Vol. 83. — P. 043416.
140. *Busuladžić, M.* High-order above-threshold ionization in a laser field: Influence of the ionization potential on the high-energy cutoff / M. Busuladžić, A. Gazibegović-Busuladžić, D. Milošević // *Laser Physics*. — 2006. — Vol. 16. — P. 289–293.



141. Смирнов, Б. М. Разрушение атомных частиц электрическим полем и электронным ударом / Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1965. — Т. 49. — С. 841–851.
142. Goreslavskii, S. P. Simple quantum theory of the high-energy above-threshold ionization spectrum in the tunneling regime / S. P. Goreslavskii, S. V. Popruzhenko // *Physics Letters A*. — 1998. — Vol. 249. — P. 477–482.
143. Goreslavskii, S. P. Rescattering and quantum interference near the classical cut-offs / S. P. Goreslavskii, S. V. Popruzhenko // *Journal of Physics B*. — 1999. — Vol. 32. — P. L531–L538.
144. Peng, L.-Y. Attosecond pulse carrier-envelope phase effects on ionized electron momentum and energy distributions: roles of frequency, intensity and an additional IR pulse / L.-Y. Peng, E. A. Pronin, A. F. Starace // *New Journal of Physics*. — 2008. — Vol. 10. — P. 025030.
145. Radzig, A. A. Reference Data on Atoms, Molecules, and Ions / A. A. Radzig, B. M. Smirnov. — Berlin : Springer, 1985. — P. 463.
146. Muller, H. G. Numerical simulation of high-order above-threshold-ionization enhancement in argon / H. G. Muller // *Physical Review A*. — 1999. — Vol. 60. — P. 1341.
147. Carrier-envelope-phase-induced asymmetries in double ionization of helium by an intense few-cycle XUV pulse / J. M. Ngoko Djiokap, N. L. Manakov, A. V. Meremianin, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2013. — Vol. 88. — P. 053411.
148. Phase-controlled single-cycle strong-field photoionization / G. G. Paulus, F. Lindner, D. B. Milošević, W. Becker // *Physica Scripta*. — 2004. — Vol. T110. — P. 120–125.

149. Retrieval of electron-atom scattering cross sections from laser-induced electron rescattering of atomic negative ions in intense laser fields / X. Zhou, Zh. Chen, T. Morishita et al. // *Physical Review A*. — 2008. — Vol. 77. — P. 053410.