ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Черникова Анастасия Сергеевна

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ НА СТЫКЕ ДВУХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Глушко А. В.

Воронеж – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Несколько последних десятилетий усилия исследователей были сосредоточены на изучении математических моделей, описывающих характеристики материалов с трещинами (см. [1]-[8]). Одним из направлений в изучении подобных задач является исследование тепловых процессов в материалах с трещинами (см. [9]-[13]). Количество таких моделей велико и во многом определяется свойствами материалов, геометрией областей, заполненных материалами, количеством трещин и их расположением. Так, например, ранее изучались следующие задачи: краевая задача для эллиптического уравнения (см. [14]-[21]) и начально-краевая задача для параболического уравнения (см. [22], [23]) в области, являющейся плоскостью с разрезом (указанные задачи моделируют стационарное и нестационарное распределение тепла соответственно в функционально-градиентном материале, заполняющем всю плоскость, с конечной трещиной); краевые задачи для эллиптических уравнений в различных областях (см. [24], [25]), в некоторых из которых разрез ортогонален границе области.

В настоящей работе изучен ряд задач трансмиссии (сопряжения) для эллиптических уравнений, описывающих распределение тепла в двумерной области с трещиной на стыке двух неоднородных материалов (в частности, в качестве области может рассматриваться плоскость, составленная из двух полуплоскостей с различной теплопроводностью).

Основными особенностями рассматриваемых задач являются:

- сама постановка краевых задач сопряжения для систем уравнений эллиптического типа является неклассической;
- наличие сингулярных составляющих в компонентах производных решений вблизи границы ведет к неклассическим постановкам граничных условий.

Все это, а также очевидная практическая направленность подчеркивает актуальность изучения поставленных задач.

Цель работы. Основной целью работы является формирование и применение методики изучения качественных свойств компонентов решения задач трансмиссии для эллиптических уравнений в области с разрезом на границе. Для задачи для уравнений с постоянными коэффициентами, с математической точки зрения, это, в первую очередь, влечет необходимость четкой формулировки понятия ее решения (так как специфика постановки задачи не предполагает существования классического решения). Во-вторых, возникает цель сведения исходной задачи к обобщенной, построение решения обобщенной задачи. Наконец, заключительной целью является изучение сингулярных компонентов решения (и его производных) в окрестности концов разреза-трещины на границе области. Последнее также относится и к задаче для уравнений с переменными коэффициентами.

Методы исследования. Используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, методы получения асимптотических оценок интегралов, зависящих от внешнего параметра, интегральные преобразования, метод ВКБ, метод Фурье, метод построения функции Грина.

Научная новизна. В изучаемых ранее задачах подобного типа рассматривался материал, заполняющий плоскость с трещиной, что приводило к изучению краевой задачи для скалярного эллиптического уравнения с граничными условиями специального вида типа скачка решения на трещине. В настоящей работе изучаются задачи, моделирующие процессы теплопроводности в области, состоящей из двух подобластей, заполненных различными материалами, что приводит к системам уравнений с классическими условиями типа трансмиссии. Условия на границе сформулированы таким образом, что моделируется трещина на границе материалов. При отсутствии дополнительных условий сглаживания это приводит к краевым задачам, вообще, не имеющим классических решений. В связи с этим доказана возможность перехода к подобной задаче с правыми частями граничных условий специального вида с сохранением асимптотических свойств вблизи трещины. При решении последней задачи работы разработан новый подход, основанный на применении метода ВКБ, изучении спектральных свойств задачи и построению на этой основе функций Грина. Как изученные задачи, так и некоторые из примененных в их исследовании методов, являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Однако, ее результаты могут быть полезны для понимания процессов распределения тепла в современных неоднородных материалах с наличием трещины. Разработанная в ней методика и полученные результаты могут быть использованы при исследовании подобных задач.

Апробация работы. Результаты докладывались на конференциях «Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения»» на Воронежских весенних математических школах 2012 г., 2013 г., 2014 г. и 2015 г. (см. [26], [27], [30], [31], [39]); всероссийской научно-практической конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация» (Москва, 2013 г.) (см. [28]); международных научных конференциях: «40-ые Гагаринские чтения» (Москва, 2014 г.) (см. [29]), «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях» (Воронеж, 2014 г.) (см. [32]), «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014)» (Воронеж, 2014 г.) (см. [34]); научных семинарах под руководством проф. А. В. Глушко (Воронеж, 2013 г. – 2015 г.).

Результаты, полученные в данной работе, совпадают с прогнозами авторов, занимающихся экспериментальным и численным исследованием подобных задач.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [26]-[39]. Работы [33], [35], [36] опубликованы в журналах из перечня научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных публикаций [26], [28], [34], [35] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, и списка литературы, содержащего 50 наименований. Объем диссертации составляет 117 страниц.

Содержание диссертации

Нумерация формул в автореферате соответствует нумерации в диссертации.

Диссертация является цельным научным исследованием, три главы которой последовательно направлены на изучение одной и той же проблемы при последовательно усложняющихся условиях рассмотрения задачи. При этом все результаты, полученные на более раннем этапе исследования, находят свое применение и являются основой нового этапа рассмотрения задачи.

Перейдем к краткому изложению результатов исследования по главам.

Замечание 0.1. Через $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ будем обозначать множества точек $\mathbb{R}^2_+ = \{x=(x_1,x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R};\ x_2>0\}$, $\mathbb{R}^2_- = \{x=(x_1,x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R};\ x_2<0\}$, а через Δ – оператор Лапласа (см. [40]): $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В **первой** главе изучается задача о стационарном распределении тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, имеющими экспоненциальный вид. На стыке полуплоскостей предполагается наличие конечной трещины.

Предполагается, что в полуплоскостях $\mathbb{R}^2_\pm$ коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют вид $k(x) = c_{1,5\mp 0,5} e^{k_{1,5\mp 0,5} x_2}$, где $c_{1,5\mp 0,5}$ – произвольные, отличные от нуля константы, а $k_{1,5\mp 0,5}$ – произвольные положительные константы. При указанных коэффициентах уравнение стационарной теплопроводности может быть записано для каждой из полуплоскостей

$$\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_2^2} + k_p \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p = 1;2. \qquad (0.1)$$

Граничные условия заданы следующим образом

$$u_1(x_1,+0) - u_2(x_1,-0) = q_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \qquad (0.2)$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}\,. \tag{0.3}$$

Будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3([-1;1])$, а носители функций $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ (см. [40]) содержатся в отрезке $[-1;1]$, то есть $\operatorname{supp} q_0(x_1)\subseteq[-1;1]$, $\operatorname{supp} q_1(x_1)\subseteq[-1;1]$.

Условие (0.2) описывает разность между температурами верхнего и нижнего берегов трещины, а условие (0.3) – разность между тепловыми потоками через эти берега.

Замечание 0.2. Условия (0.2), (0.3) понимаются в смысле главного значения:

$$u_1(x_1,+0)-u_2(x_1,-0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(u_1(x_1,\varepsilon)-u_2(x_1,-\varepsilon)\right),$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\partial u_1(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right).$$

Определение 0.1. Решением задачи (0.1)-(0.3) назовем пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных соответственно на $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$, таких что $u_1(x)\in C^2\left(\mathbb{R}^2_+\right)\cap C^1\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$, $u_2(x)\in C^2\left(\mathbb{R}^2_-\right)\cap C^1\left(\overline{\mathbb{R}^2_-}\right)$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (0.1), условиям (0.2) и (0.3), и такие, что функции $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$, функции $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}$ – на $\mathbb{R}^2_-$, функции $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}$ – при $x_2\ge\delta>0$, функции $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}$ – при $x_2\le-\delta<0$, функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ – пространству $L_1(\mathbb{R}^2_-)$, а функции $u_1(x_1,+0)$, $u_2(x_1,-0)$, $\dfrac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Замечание 0.3. В указанном определении δ – произвольная константа.

С помощью введенных функций

$$u_p(x_1,x_2)=e^{-0,5k_p x_2}v_p(x_1,x_2),\ p=1;2, \qquad v_2(x_1,x_2)=z(x_1,-x_2), \tag{0.4}$$

задача (0.1)-(0.3) может быть переписана в виде

$$\Delta v_1(x)-0,25k_1^2 v_1(x)=0,\ x\in\mathbb{R}_+^2, \tag{0.5}$$

$$\Delta z(x)-0,25k_2^2 z(x)=0,\ x\in\mathbb{R}_+^2, \tag{0.6}$$

$$v_1(x_1,+0)-z(x_1,+0)=q_0(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}, \tag{0.7}$$

$$-\frac{k_1}{2}v_1(x_1,+0)+\frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}z(x_1,+0)+\frac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}. \tag{0.8}$$

Замечание 0.4. Аналогично определению 0.1 может быть сформулировано определение решения задачи (0.5)-(0.8) и будет приведено в главе 1.

Замечание 0.5. Пусть $f(x_1)$ и $\tilde{f}(x)$ – обычные функции, такие что $f(x_1)\in L_1(\mathbb{R})$, а $\tilde{f}(x)\in L_1(\mathbb{R}^2)$. Будем использовать следующие обозначения: $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[\tilde{f}(x)]=\int_{\mathbb{R}^2}e^{i(x_1s_1+x_2s_2)}\tilde{f}(x)dx_1dx_2$ – преобразование Фурье функции $\tilde{f}(x)$ по переменным x_1, x_2; $F_{x_1\to s_1}[f(x_1)]=\int_{\mathbb{R}}e^{ix_1s_1}f(x_1)dx_1$ – преобразование Фурье функции $f(x_1)$ по переменной x_1; $F^{-1}_{s_1\to x_1}[f(s_1)]=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix_1s_1}f(s_1)ds_1$ – обратное преобразование Фурье по переменной s_1; $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\tilde{f}(s)]=(2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i(x_1s_1+x_2s_2)}\tilde{f}(s)ds_1ds_2$ – обратное преобразование Фурье по переменным s_1, s_2.

С помощью перехода к обобщенной задаче в пространстве $S'(\mathbb{R}^2)$ удалось построить регулярное обобщенное решение задачи (0.5)-(0.8). Эти результаты приведены в теореме 0.1.

Теорема 0.1. Если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то задача (0.5)-(0.8) имеет решение, причем для функций $v_1(x)$ и $z(x)$ справедливы следующие представления:

$$v_1(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{|s|^2+0,25k_1^2}w_1^0(s_1)\right],z(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}{|s|^2+0,25k_2^2}w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1 \to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\, w_1^0(s_1)\right],\ z(x) = F^{-1}_{s_1 \to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}\, w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x) = \frac{k_1 x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(0,5k_1\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2}\right)\cdot\left(\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w_1^0(s_1)\right]dy_1,$$

$$z(x) = \frac{k_2 x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(0,5k_2\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2}\right)\cdot\left(\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w_2^0(s_1)\right]dy_1,$$

где $K_1(z)$ – функция Макдональда (см. [41]), $P_p(s_1) = F_{x_1 \to s_1}[q_p(x_1)]$ при $p = 0;1$, а

$$w_p^0(s_1) = -\frac{P_1(s_1) + (-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0,5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2} \text{ при } p=1;2.$$

Нетрудно видеть, что для построения решения задачи (0.1)-(0.3) достаточно воспользоваться формулами (0.4) и результатами теоремы 0.1.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [26], [29], [32], [34], [35].

Во **второй** главе строятся асимптотики компонентов решения задачи (0.1)-(0.3) путем ее сведения к задаче с полуограниченной трещиной и задаче с граничными функциями специального вида. Предполагается, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны ($\operatorname{supp} q_0(x_1) = \operatorname{supp} q_1(x_1) = [-1;1]$) и принадлежат пространству $C^4\left([-1;1]\right)$, но, в отличие от главы 1, не накладываются дополнительные условия $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, что приводит к появлению сингулярных составляющих в асимптотических представлениях первых производных компонентов решения $\left(u_1(x), u_2(x)\right)$ указанной задачи вблизи концов трещины.

Граничные функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ можно представить в виде

$$q_p(x_1) = q_{p,1}(x_1) + q_{p,2}(x_1),\ p = 0;1, \tag{0.9}$$

где $q_{p,2}(x_1)$ при $p=0;1$ принадлежат классу $\Im = \{f(x) \,|\, f(x) \in C^3(\mathbb{R});$ $f(x) = 0, x < -1; f^{(k)}(-1) = 0, k = \overline{0;3}; \left|f^{(k)}(x)\right| \le Ce^{-x}, x \ge -1, k = \overline{0;3}\}$ и

$$q_{p,1}(x_1) = \sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}e^{-\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)}\theta\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\sum_{m=0}^{3}(m!)^{-1}\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^m\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_p^{(l)}\left((-1)^n\right), \tag{0.10}$$

где $\theta(z)$ – функция Хэвисайда (см. [42]), $C_m^l = m!\left(l!\,(m-l)!\right)^{-1}$.

Согласно представлениям (0.9), компоненты решения $\left(u_1(x), u_2(x)\right)$ задачи

(0.1)-(0.3) будем искать в виде

$$u_p(x)=u_{p,1}(x)+u_{p,2}(x),\, p=1;2, \qquad (0.11)$$

где $\left(u_{1,j}(x),u_{2,j}(x)\right)$ – решение задачи

$$\Delta u_{p,j}(x)+k_p\frac{\partial u_{p,j}(x)}{\partial x_2}=0,\ x\in\mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p=1;2, \qquad (0.12)$$

$$u_{1,j}(x_1,+0)-u_{2,j}(x_1,-0)=q_{0,j}(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}, \qquad (0.13)$$

$$\frac{\partial u_{1,j}(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_{2,j}(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_{1,j}(x_1),\ x_1\in\mathbb{R} \qquad (0.14)$$

при $j=1;2$.

Задача (0.12)-(0.14) при $j=2$ описывает стационарное распределение тепла в плоскости, состоящей их различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной. Определение решения данной задачи формулируется аналогично определению 0.1. Указанная задача исследуется с помощью тех же методов, что и задача в главе 1. Показано, что компоненты ее решения имеют представления вида теоремы 0.1 с точностью до замены $w_p^0(s_1)$ на $w_{p,2}^0(s_1)$, где

$$w_{p,j}^0(s_1)=-\frac{P_{1,j}(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p0,5k_{3-p}\right)P_{0,j}(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2},\ p,j=1;2, \qquad (0.15)$$

$$P_{p,j}(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_{p,j}(x_1)],\ p=0;1,\ j=1;2. \qquad (0.16)$$

Теорема 0.2. Компоненты решение задачи (0.12)-(0.14) при $j=2$ и их первые производные являются непрерывными, ограниченными функциями.

Теорема 0.2 гарантирует, что компоненты решения задачи (0.12)-(0.14) при $j=2$ и их первые производные не вносят вклады в сингулярные члены соответствующих асимптотических разложений компонентов решения задачи (0.1)-(0.3) вблизи концов трещины.

Перейдем к задаче (0.12)-(0.14) при $j=1$. Сделаем замены, аналогичные (0.4),

$$u_{p,1}(x_1,x_2)=e^{-0,5k_px_2}v_{p,1}(x_1,x_2),\ p=1;2, \qquad v_{2,1}(x_1,x_2)=z_1(x_1,-x_2), \qquad (0.17)$$

и продолжим функции $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$ четным образом на нижнюю полуплоскость, обозначим данных функции $V_{1,1}(x)$ и $V_{2,1}(x)$.

Определение 0.2. Обобщенным решением задачи (0.12)-(0.14) при $j=1$ назовем решение обобщенной задачи

$$\Delta V_{p,1}(x) - 0,25k_p^2 V_{p,1}(x) = 2\frac{\partial V_{p,1}(x_1,+0)}{\partial x_2}\cdot\delta(x_2),\ p=1;2, \tag{0.18}$$

с учетом обозначений $V_{1,1}(x)$, $V_{2,1}(x)$ и замен (0.17).

С помощью определений задач (0.12)-(0.14) при $j=1;2$ можно сформулировать определение обобщенного решения задачи (0.1)-(0.3).

В главе 1 было построено явное решение обобщенной задачи, подобной (0.18), тогда имеем следующие равенства для функций $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$ при $x_2>0$

$$v_{1,1}(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{|s|^2+0,25k_1^2}w^0_{1,1}(s_1)\right],\ z_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}{|s|^2+0,25k_2^2}w^0_{2,1}(s_1)\right], \tag{0.19}$$

где функции $w^0_{p,1}(s_1)$ при $p=1;2$ заданы равенствами (0.15).

Функции $q_{p,1}(x_1)$, $p=0;1$ строились таким образом, чтобы можно было легко получить их образ Фурье. Используя представлениями (0.10), (0.11), (0.15)-(0.17), (0.19), доказаны следующие теоремы.

Теорема 0.3. Для компонентов вектор-функции $(u_1(x),u_2(x))$, которая является решением задачи (0.1)-(0.3), справедливы следующие свойства:

1. функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, а функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ – пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_-\right)$;

2. выполнены равенства

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_1(x_1,x_2)-u_2(x_1,-x_2)-q_0(x_1)\right)^2dx_1=0,\ \lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-x_2)}{\partial x_2}-q_1(x_1)\right)^2dx_1=0.$$

Теорема 0.4. Для компонентов вектор-функции $(u_1(x),u_2(x))$, которая является решением задачи (0.1)-(0.3), и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек $(\pm1;0)$:

$$u_1(x) = R_1(x), \qquad\qquad u_2(x) = R_2(x),$$

$$\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} = \frac{e^{-0,5k_p x_2}}{2\pi}\left(\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)} + \frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{-1}(x)\right)q_0(-1) - \left(\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)} + \frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{+1}(x)\right)q_0(1) + \right.$$
$$\left. + \ln r_{-1}(x)\, q_1(-1) - \ln r_{+1}(x)\, q_1(1)\right) + R_{p+2}(x),$$

$$\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = \frac{e^{-0,5k_p x_2}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1) + \frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1) - \ln r_{-1}(x) q_0'(-1) + \ln r_{+1}(x) q_0'(1)\right) + R_{p+4}(x),$$

где $p = 1;2$, $r_{-1}(x) = \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}$ и $r_{+1}(x) = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}$, а функции $R_j(x)$ равномерно ограничены на любых компактах $K_j \subset \overline{\mathbb{R}^2_{\mathrm{sgn}\{(-1)^{j+1}\}}}$ при $j = \overline{1;6}$.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [27]-[34], [36].

Третья глава посвящена изучению задачи о стационарном распределении тепла в области $D = D_+ \cup D_- \cup \{(x_1, x_2) | 1 < |x_1| < 2; x_2 = 0\}$ из пространства $\mathbb{R}^2$, где $D_+ = \{(x_1, x_2) | |x_1| < 2; 0 < x_2 < 2\}$, $D_- = \{(x_1, x_2) | |x_1| < 2; -2 < x_2 < 0\}$. Области D_+ и D_- заполнены неоднородными материалами с коэффициентами внутренней теплопроводности $e^{k_1(x_2)}$ и $e^{k_2(x_2)}$ соответственно. Стационарное распределение поля температуры в каждой из этих областей описывается уравнением $\mathrm{div}\left(e^{k_{1,5\mp0,5}(x_2)}\,\mathrm{grad}\,u_{1,5\mp0,5}(x)\right) = 0$ (см. [40]). Условия на границе областей D_+ и D_-, моделирующие процесс теплообмена и теплового потока через их общую часть границы, с математической точки зрения, являются условиями сопряжения (трансмиссии). Кроме этого, граничные условия моделируют наличие трещины на границе указанных областей, что приводит к появлению неоднородностей в граничных условиях.

Вид коэффициентов внутренней теплопроводности материалов вообще гарантирует только положительность этих величин. Действительно, если $k_p(x_2) = \ln G_p(x_2)$, где $p = 0;1$, то есть коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют вид $G_p(x_2)$, где $p = 0;1$, свободный от присутствия экспоненты в представлениях. Вид коэффициентов $e^{k_{1,5\mp0,5}(x_2)}$ используется лишь для указания связи с задачами, рассматриваемыми в первой и второй главах.

Изучение задачи основано на построении ее решения с помощью функции Грина с использованием метода ВКБ и сравнении сингулярных составляющих компонентов ее решения с аналогичными составляющими компонентов решения специально подобранной задачи с постоянными коэффициентами и граничными функциями особого вида.

Изучаемая задача моделируется следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\Delta\tilde{u}_p(x)+k_p'(x_2)\frac{\partial\tilde{u}_p(x)}{\partial x_2}=0,\ x\in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p=1;2, \tag{0.20}$$

$$e^{0,5k_1(0)}\tilde{u}_1(x_1,+0)-e^{0,5k_2(0)}\tilde{u}_2(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in[-2;2], \tag{0.21}$$

$$\begin{gathered} e^{0,5k_1(0)}\left(\frac{k_1'(0)}{2}\tilde{u}_1(x_1,+0)+\frac{\partial\tilde{u}_1(x_1,+0)}{\partial x_2}\right)- \\ -e^{0,5k_2(0)}\left(\frac{k_2'(0)}{2}\tilde{u}_2(x_1,-0)+\frac{\partial\tilde{u}_2(x_1,-0)}{\partial x_2}\right)=q_1(x_1),\ x_1\in[-2;2], \end{gathered} \tag{0.22}$$

$$e^{0,5k_1(x_2)}\tilde{u}_1((-1)^p2,x_2)=f_p(x_2),\ x_2\in[0;2],\ p=1;2, \tag{0.23}$$

$$e^{0,5k_2(x_2)}\tilde{u}_2((-1)^p2,x_2)=f_{p+2}(x_2),\ x_2\in[-2;0],\ p=1;2. \tag{0.24}$$

Для согласования граничных условий выполнены равенства

$$f_p(0)-f_{p+2}(0)=f_p'(0)-f_{p+2}'(0)=0,\ p=1;2. \tag{0.25}$$

Будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$, $k_1(x_2)$, $k_2(x_2)$, $f_1(x_2)$, $f_2(x_2)$, $f_3(x_2)$ и $f_4(x_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны ($\operatorname{supp}q_0(x_1)=\operatorname{supp}q_1(x_1)=[-1;1]$) и принадлежат пространству $C^4([-1;1])$;

2) функция $k_1(x_2)$ принадлежит пространству функций $C^\infty([0;2])$, а функция $k_2(x_2)$ – пространству $C^\infty([-2;0])$;

3) справедливы оценки $\tilde{k}_p(0)>0$, где $\tilde{k}_p(x_2)=\left(k_p'(x_2)\right)^2+2k_p''(x_2)$, $p=1;2$.

4) функции $f_1(x_2)$ и $f_2(x_2)$ принадлежат пространству $C^2([0;2])$, а функции $f_3(x_2)$

и $f_4(x_2)$ – пространству $C^2([-2;0])$.

Замечание 0.6. Пусть $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$ – четное продолжение функции $\tilde{k}_p(x_2)$, то есть $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)=\tilde{k}_p\left((-1)^{p+1}x_2\right)$, $x_2\in[0;2]$, $p=1;2$. Следовательно, согласно условиям на функции $\tilde{k}_1(x_2)$ и $\tilde{k}_2(x_2)$, выполнены неравенства $\tilde{\tilde{k}}_p(0)>0$ при $p=1;2$.

Условия (0.21), (0.22) понимаются в смысле главного значения (аналогично замечанию 0.2).

Определение 0.3. Решением задачи (0.20)-(0.25) назовем пару функций $\tilde{u}_1(x)$ и $\tilde{u}_2(x)$, заданных соответственно на D_+ и D_-, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (0.20) и условиям (0.23), (0.24) и условиям (0.21), (0.22) в смысле главного значения.

Введем обозначения:

$$\gamma_1(x_1,j)=\begin{cases} q_0(x_1), & j=1,\\ 0, & j=2;\end{cases} \qquad \gamma_3(x_2,j,p)=\begin{cases} \tilde{v}_1((-1)^p2,x_2), & j=1,\\ f_p(x_2)-\tilde{v}_1((-1)^p2,x_2), & j=2;\end{cases}$$
$$\gamma_2(x_1,j)=\begin{cases} q_1(x_1), & j=1,\\ 0, & j=2;\end{cases} \qquad \gamma_4(x_2,j,p)=\begin{cases} \tilde{z}((-1)^p2,-x_2), & j=1,\\ f_{p+2}(x_2)-\tilde{z}((-1)^p2,-x_2), & j=2,\end{cases} \tag{0.26}$$

где $p=1;2$, а $\left(\tilde{v}_1(x),\tilde{z}(x)\right)$ – решение задачи, подобной (0.5)-(0.8),

$$\Delta\tilde{v}_1(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_1(0)\tilde{v}_1(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^2_+, \tag{0.27}$$

$$\Delta\,\tilde{z}(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_2(0)\tilde{z}(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^2_+, \tag{0.28}$$

$$\tilde{v}_1(x_1,+0)-\tilde{z}(x_1,+0)=q_0(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}, \tag{0.29}$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{z}(x_1,+0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}. \tag{0.30}$$

Замечание 0.7. Задача (0.27)-(0.30) может быть изучена так же, как и задача (0.5)-(0.8).

Рассмотрим вспомогательные задачи

$$\Delta\tilde{u}_{p,j}(x)+k_p'(x_2)\frac{\partial\tilde{u}_{p,j}(x)}{\partial x_2}=0,\ x\in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p=1;2, \tag{0.31}$$

$$e^{0,5k_1(0)}\tilde{u}_{1,j}(x_1,+0)-e^{0,5k_2(0)}\tilde{u}_{2,j}(x_1,-0)=\gamma_1(x_1,j),\ x_1\in[-2;2], \tag{0.32}$$

$$e^{0,5k_1(0)}\left(\frac{k_1'(0)}{2}\tilde{u}_{1,j}(x_1,+0)+\frac{\partial\tilde{u}_{1,j}(x_1,+0)}{\partial x_2}\right)-$$
$$-e^{0,5k_2(0)}\left(\frac{k_2'(0)}{2}\tilde{u}_{2,j}(x_1,-0)+\frac{\partial\tilde{u}_{2,j}(x_1,-0)}{\partial x_2}\right)=\gamma_2(x_1,j),\ x_1\in[-2;2], \tag{0.33}$$

$$e^{0,5k_1(x_2)}\tilde{u}_{1,j}((-1)^p 2,x_2)=\gamma_3(x_2,j,p),\ x_2\in[0;2],\ p=1;2, \tag{0.34}$$

$$e^{0,5k_2(x_2)}\tilde{u}_{2,j}((-1)^p 2,x_2)=\gamma_4(x_2,j,p),\ x_2\in[-2;0],\ p=1;2, \tag{0.35}$$

$$f_p(0)-f_{p+2}(0)=f_p'(0)-f_{p+2}'(0)=0,\ p=1;2, \tag{0.36}$$

где $j=1;2$. Очевидно, что компоненты решения задачи (0.20)-(0.25) представимы в виде

$$\tilde{u}_p(x)=\tilde{u}_{p,1}(x)+\tilde{u}_{p,2}(x),\ \ p=1;2, \tag{0.37}$$

где $\left(\tilde{u}_{1,1}(x),\tilde{u}_{2,1}(x)\right)$ – решение задачи (0.31)-(0.35) при $j=1$, $\left(\tilde{u}_{1,2}(x),\tilde{u}_{2,2}(x)\right)$ – решение задачи (0.31)-(0.36) при $j=2$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{u}_{p,1}(x_1,x_2)=e^{-0,5k_p(x_2)}\tilde{v}_{p,1}(x_1,x_2),\ p=1;2,\qquad \tilde{v}_{2,1}(x_1,x_2)=\tilde{z}_1(x_1,-x_2), \tag{0.38}$$

можно выписать задачу относительно функций $\tilde{v}_{1,1}(x)$ и $\tilde{z}_1(x)$, вычитая из равенств которой соответствующие равенства задачи (0.27)-(0.30), относительно функций $\tilde{V}_1(x)=\tilde{v}_{1,1}(x)-\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{V}_2(x)=\tilde{z}_1(x)-\tilde{z}(x)$ получим следующую задачу

$$\Delta\tilde{V}_1(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\tilde{V}_1(x)=0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\right)\tilde{v}_1(x),\ x\in D_+, \tag{0.39}$$

$$\Delta\tilde{V}_2(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\tilde{V}_2(x)=0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_2(0)-\tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\right)\tilde{z}(x),\ x\in D_+, \tag{0.40}$$

$$\tilde{V}_1(x_1,+0)-\tilde{V}_2(x_1,+0)=0,\ x_1\in[-2;2], \tag{0.41}$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{V}_2(x_1,+0)}{\partial x_2}=0,\ x_1\in[-2;2], \tag{0.42}$$

$$\tilde{V}_1((-1)^p 2,x_2)=\tilde{V}_2((-1)^p 2,x_2)=0,\ x_2\in[0;2],\ p=1;2. \tag{0.43}$$

Компоненты решения (а соответственно и их первые производные) последней задачи строятся в виде рядов с помощью методов Фурье, ВКБ и построения функций Грина. Исследуется каждый из указанных рядов и, таким образом, доказывается, что функции $\tilde{V}_p(x)$, $\dfrac{\partial \tilde{V}_p(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial \tilde{V}_p(x)}{\partial x_2}$ при $p=1;2$ непрерывны на $\overline{D_+}$, следовательно, функции $\tilde{v}_{1,1}(x)$, $\tilde{z}_1(x)$, $\dfrac{\partial \tilde{v}_{1,1}(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \tilde{z}_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \tilde{v}_{1,1}(x)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial \tilde{z}_2(x)}{\partial x_2}$ имеют такие же асимптотические представления вблизи точек $(\pm 1;0)$, что и функции $\tilde{v}_1(x)$, $\tilde{z}(x)$, $\dfrac{\partial \tilde{v}_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \tilde{z}(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \tilde{v}_1(x)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial \tilde{z}(x)}{\partial x_2}$ соответственно, где $(\tilde{v}_1(x), \tilde{z}(x))$ – решение задачи (0.27)-(0.30). Использовав равенства (0.38), можно построить соответствующие асимптотические представления функций $\tilde{u}_{p,1}(x)$ при $p=1;2$ и их первых производных.

Перейдем к задаче (0.31)-(0.36) при $j=2$. Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{u}_{p,2}(x_1,x_2) = e^{-0,5k_p(x_2)}\tilde{v}_{p,2}(x_1,x_2),\ p=1;2, \qquad \tilde{v}_{2,2}(x_1,x_2) = \tilde{z}_2(x_1,-x_2), \tag{0.44}$$

$$\mu_1(x) = f_1(x_2) - \tilde{v}_1(-2,x_2) + 0,25(x_1+2)\big(f_2(x_2) - \tilde{v}_1(2,x_2) - f_1(x_2) + \tilde{v}_1(-2,x_2)\big),$$

$$\mu_2(x) = f_3(-x_2) - \tilde{z}(-2,x_2) + 0,25(x_1+2)\big(f_4(-x_2) - \tilde{z}(2,x_2) - f_3(-x_2) + \tilde{z}(-2,x_2)\big),$$

$$W_1(x) = \tilde{v}_{1,2}(x) - \mu_1(x), \qquad W_2(x) = \tilde{z}_2(x) - \mu_2(x), \tag{0.45}$$

где $(\tilde{v}_1(x), \tilde{z}(x))$ – решение задачи (0.27)-(0.30). Тогда относительно функций $W_1(x)$ и $W_2(x)$ имеем следующую задачу

$$\Delta W_p(x) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)W_p(x) = F_p(x),\ x\in D_+,\ p=1;2, \tag{0.46}$$

$$W_1(x_1,+0) - W_2(x_1,+0) = 0,\ x_1\in[-2;2], \tag{0.47}$$

$$\frac{\partial W_1(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{\partial W_2(x_1,+0)}{\partial x_2} = 0,\ x_1\in[-2;2], \tag{0.48}$$

$$W_1((-1)^p 2, x_2) = W_2((-1)^p 2, x_2) = 0,\ x_2\in[0;2],\ p=1;2, \tag{0.49}$$

где явный вид функций $F_p(x)$ при $p=1;2$ приведен в главе 3.

Таким образом, получили задачу, аналогичную (0.39)-(0.43), различия в правых частях уравнений (0.39), (0.40) и (0.46). Действуя так же, как и с рядами $\tilde{V}_p(x)$, $\dfrac{\partial \tilde{V}_p(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \tilde{V}_p(x)}{\partial x_2}$ при $p=1;2$, можно доказать, что функции $W_p(x)$,

$\dfrac{\partial W_p(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial W_p(x)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, непрерывны на $\overline{D_+}$. Вернувшись к функциям $\tilde{u}_{p,2}(x)$, $p=1;2$, с помощью замен указанных выше, получаем, что $\tilde{u}_{p,2}(x)$, $\dfrac{\partial \tilde{u}_{p,2}(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial \tilde{u}_{p,2}(x)}{\partial x_2}$ непрерывны на $\overline{D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}}$ при $p=1;2$.

Из равенств (0.37) и вышеуказанных рассуждений следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 0.5. Для компонентов вектор-функции $\left(\tilde{u}_1(x),\tilde{u}_2(x)\right)$, которая является решением задачи (0.20)-(0.25), и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек $(\pm 1;0)$:

$$\tilde{u}_p(x)=\tilde{R}_p(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_p(x)}{\partial x_1}=\frac{e^{-0,5k_p(x_2)}}{2\pi}\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)-\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)+\ln r_{-1}(x)\,q_1(-1)-\ln r_{+1}(x)\,q_1(1)\right)+\tilde{R}_{p+2}(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_p(x)}{\partial x_2}=\frac{e^{-0,5k_p(x_2)}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)+\frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)-\ln r_{-1}(x)\,q_0'(-1)+\ln r_{+1}(x)\,q_0'(1)\right)+\tilde{R}_{p+4}(x),$$

где $p=1;2$, $r_{-1}(x)=\sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2}$ и $r_{+1}(x)=\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}$, а функции $\tilde{R}_j(x)$ равномерно ограничены на $\overline{D_{\operatorname{sgn}\left\{(-1)^{j+1}\right\}}}$ при $j=\overline{1;6}$.

Замечание 0.8. Результаты работы, рассматриваемые в частном упрощенном случае, когда один и тот же материал заполняет полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$, то есть изучается задача, получающаяся из (0.27)-(0.30) с помощью замен

$$\tilde{u}_p(x_1,x_2)=e^{-0,5\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(0)}x_2}\tilde{v}_p(x_1,x_2),\ p=1;2,\qquad \tilde{v}_2(x_1,x_2)=\tilde{z}(x_1,-x_2)$$

и обозначений $k=\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_1(0)}=\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_2(0)}$, $u(x)=\tilde{u}_1(x)=\tilde{u}_2(x)$:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}+k\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}=0,\ x\in\mathbb{R}_+^2\cup\mathbb{R}_-^2,\ p=1;2,$$

$$u(x_1,+0)-u(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in\mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k}{2}u(x_1,+0)-\frac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2}-\frac{k}{2}u(x_1,-0)=q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R},$$

совпадают с ранее полученными результатами других авторов (см. [14]).

Результаты главы 3 опубликованы в работах [37]-[39].

ГЛАВА 1

ЗАДАЧА О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ПЛОСКОСТИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ С РАЗЛИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВНУТРЕННЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ИМЕЮЩИМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ВИД

1. Сведение к обобщенным задачам. Построение решений обобщенных задач

Задача (0.1)-(0.3) моделирует стационарное распределение тепла в двух связных полуплоскостях $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ с трещиной $l=[-1;1]\times\{0\}$, находящейся на границе этих полуплоскостей, при условии, что в $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ отсутствуют тепловые источники. Условия (0.2), (0.3) задают скачки температуры и тепловых потоков на трещине l. Предполагается, что на границе полуплоскостей $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ – прямой $\Gamma=\mathbb{R}\times\{0\}$, вне трещины l температурные поля и тепловые потоки совпадают.

В дальнейшем будем придерживаться обозначения:

$$u(x_1,\pm 0)=\lim_{\varepsilon\to+0}u(x_1,\pm\varepsilon).$$

Во введении говорилось, что с помощью замен (0.4) задача (0.1)-(0.3) может быть сведена к задаче (0.5)-(0.8) относительно функций $v_1(x)$ и $z(x)$. Приведем определение решения задачи (0.5)-(0.8).

Определение 1.1. Решением задачи (0.5)-(0.8) будет пара функций $v_1(x)$ и $z(x)$, заданных на $\mathbb{R}_+^2$, таких что $v_1(x),\ z(x)\in C^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)\cap C^1\left(\overline{\mathbb{R}_+^2}\right)$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (0.5), (0.6), а также условиям (0.7), (0.8), и такие, что функции $v_1(x)$, $z(x)$, $\dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}_+^2$, функции $\dfrac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2\ge\delta>0$, функции $v_1(x)$, $z(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}_+^2)$, а функции $v_1(x_1,+0)$, $z(x_1,+0)$,

$\frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Обозначим $V_1(x)$ и $V_2(x)$ четное продолжение функций $v_1(x)$ и $z(x)$ на нижнюю полуплоскость, то есть

$$V_1(x)=\begin{cases} v_1(x), & x_2>0, \\ v_1(x_1,-x_2), & x_2<0 \end{cases} \text{ и } V_2(x)=\begin{cases} z(x), & x_2>0, \\ z(x_1,-x_2), & x_2<0, \end{cases} \tag{1.1}$$

тогда

$$\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}=\begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_2}, & x_2>0, \\ -\dfrac{\partial v_1(x_1,-x_2)}{\partial x_2}, & x_2<0 \end{cases} \text{ и } \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}=\begin{cases} \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_2}, & x_2>0, \\ -\dfrac{\partial z(x_1,-x_2)}{\partial x_2}, & x_2<0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Из определения решения задачи (0.5)-(0.8) следует, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются функциями медленного роста (см. [40]). Таким образом, их можно рассматривать как регулярные обобщенные функции в $S'(\mathbb{R}^2)$ (см. [40]).

Вычислив обобщенные производные от функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ (см. [40]), получим, что в $S'(\mathbb{R}^2)$ они являются решениями уравнений

$$\Delta V_p(x)-0,25k_p^2V_p(x)=\left[\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}\cdot\delta(x_2)+\left[V_p(x)\right]_{x_2=0}\cdot\delta'(x_2),\ p=1;2, \tag{1.3}$$

где $\delta(x_2)$ – дельта-функция Дирака, $\left[V_p(x)\right]_{x_2=0}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(V_p(x_1,\varepsilon)-V_p(x_1,-\varepsilon)\right)$, $\left[\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\partial V_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\frac{\partial V_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right)$, где $p=1;2$. Из (1.1) и (1.2) следует, что $\left[V_p(x)\right]_{x_2=0}=0$, $\left[\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}=2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial V_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}=2\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$.

С учетом последних равенств и (1.3) получаем, что в $S'(\mathbb{R}^2)$ функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются решениями уравнений

$$\Delta V_p(x)-0,25k_p^2V_p(x)=2\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\cdot\delta(x_2),\ p=1;2. \tag{1.4}$$

В дальнейшем, если не оговорено противного, под прямым и обратным преобразованием Фурье будем понимать «обычное» прямое и обратное преобразование Фурье, то есть преобразование Фурье в смысле замечания 0.5.

Из (1.1), (1.2) и определения решения задачи (0.5)-(0.8) получаем, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$, а функции $V_1(x_1,+0)$, $V_2(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial V_2(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, от функций $V_p(x)$, $V_p(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, существует преобразование Фурье в смысле замечания 0.5, причем $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]$, где $p=1;2$, можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу.

Применив к (1.4) обобщенное преобразование Фурье по переменным x_1, x_2 и воспользовавшись свойствами обобщенного преобразования Фурье (см. [40]), получим следующие уравнения, эквивалентные уравнениям (1.4) в $S'(\mathbb{R}^2)$:

$$-\left(|s|^2+0,25k_p^2\right)F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]=2F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right],\ p=1;2,\ |s|^2=s_1^2+s_2^2. \quad (1.5)$$

В [40] доказано, что если функция $V(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье от регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $V(x)$, также будет регулярной обобщенной функцией, которая порождается преобразованием Фурье функции $V(x)$, вычисленной в смысле замечания 0.5. Таким образом, равенство (1.5) можно рассматривать как равенство для функций.

Лемма 1.1. Для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданных равенствами (1.1), справедливы соотношения:

$$F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right]=-\left(s_1^2+0,25k_p^2\right)^{0,5}\cdot F_{x_1\to s_1}[V_p(x_1,+0)],\ p=1;2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что при $p=1;2$

$$F_{x_1\to s_1}[V_p(x)]=F^{-1}_{s_2\to x_2}[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]]=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix_2s_2}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]ds_2\,.$$

Из последних равенств следует, что

$$F_{x_1\to s_1}[V_p(x_1,+0)]=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]ds_2\,,\ p=1;2. \qquad (1.6)$$

При помощи (1.5) получаем, что

$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]=-2\left(|s|^2+0,25k_p^2\right)^{-1}F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right],\ p=1;2. \qquad (1.7)$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}\left(|s|^2+0,25k_p^2\right)^{-1}ds_2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_p^2\right)^{-1}ds_2=\pi\left(s_1^2+0,25k_p^2\right)^{-0,5}$

при $p=1;2$, то, проинтегрировав равенство (1.7) по s_2 от $-\infty$ до ∞, получим, что $\int_{\mathbb{R}}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]ds_2=-2\pi\left(s_1^2+0,25k_p^2\right)^{-0,5}F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right]$ при $p=1;2$. Из последнего равенства и (1.6) следует справедливость леммы. Л е м м а д о к а з а н а.

Введем следующие обозначения:

$$w_p^0(s_1)=F_{x_1\to s_1}[V_p(x_1,+0)],\ w_p^1(s_1)=F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right],\text{ где } p=1;2;$$
$$P_p(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_p(x_1)],\text{ где } p=0;1. \qquad (1.8)$$

Отметим, что из определения решения задачи (0.5)-(0.8) и условий на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ следует, что функции $w_p^0(s_1)$, $w_p^1(s_1)$ и $P_p(s_1)$ существуют.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.2. При $p=1;2$ решения уравнений (1.5) представимы в виде

$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]=-\frac{2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}{|s|^2+k_p^2/4}\cdot\frac{P_1(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+k_{3-p}^2/4}+(-1)^p k_{3-p}/2\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}+k_1/2+\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-k_2/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к равенствам (0.7), (0.8) преобразование Фурье по переменной x_1, тогда, с учетом обозначений (1.1), (1.8), леммы 1.1 и (1.2), получим, что функции $w_p^0(s_1)$ и $w_p^1(s_1)$, где $p=1;2$, будут решениями системы

$$-\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\cdot w_p^0(s_1)=w_p^1(s_1),\ \ p=1;2, \qquad (1.9)$$

$$w_1^0(s_1)-w_2^0(s_1)=P_0(s_1), \qquad (1.10)$$

$$-0,5k_1w_1^0(s_1)+w_1^1(s_1)+0,5k_2w_2^0(s_1)+w_2^1(s_1)=P_1(s_1). \qquad (1.11)$$

С учетом равенств (1.9) получим, что функции $w_1^0(s_1)$ и $w_2^0(s_1)$ будут решениями системы

$$w_1^0(s_1) - w_2^0(s_1) = P_0(s_1),$$

$$-0,5k_1 w_1^0(s_1) - \sqrt{s_1^2 + 0,25k_1^2}\, w_1^0(s_1) + 0,5k_2 w_2^0(s_1) - \sqrt{s_1^2 + 0,25k_2^2}\, w_2^0(s_1) = P_1(s_1),$$

решив которую, находим, что при $p = 1;2$

$$w_p^0(s_1) = -\frac{P_1(s_1) + (-1)^p\left(\sqrt{s_1^2 + 0,25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0,5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0,25k_1^2} + 0,5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0,25k_2^2} - 0,5k_2}, \qquad (1.12)$$

$$w_p^1(s_1) = \sqrt{s_1^2 + 0,25k_p^2}\,\frac{P_1(s_1) + (-1)^p\left(\sqrt{s_1^2 + 0,25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0,5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0,25k_1^2} + 0,5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0,25k_2^2} - 0,5k_2}. \qquad (1.13)$$

Из (1.7), (1.8) и (1.13) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 1.2 получаем, что решениями уравнений (1.4) будут функции

$$V_p(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2 + 0,25k_p^2\right)^{0,5}\left(|s|^2 + 0,25k_p^2\right)^{-1} w_p^0(s_1)\right],\ p = 1;2, \qquad (1.14)$$

где функции $w_p^0(s_1)$ задаются равенствами (1.12).

В равенствах (1.14) символ $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}$ обозначает обратное преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций (см. [40]).

Отметим, что если у функций, стоящих под знаком обратного преобразования Фурье, будет существовать обычное обратное преобразование Фурье (в смысле определения из замечания 0.5), то решения уравнений (1.4) будут регулярными обобщенными функциями, заданными этими обратными преобразованиями Фурье.

2. Доказательство существования решения задачи (0.5)-(0.8)

Для доказательства существования решения у задачи (0.5)-(0.8) сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.1. Для функций $P_p(s_1)$, где $p = 0;1$, заданных в (1.8), найдется такая положительная константа c, что будут справедливы следующие оценки:

$$\left|P_p(s_1)\right| + \left|P_p'(s_1)\right| + \left|P_p''(s_1)\right| \le c\left(1 + |s_1|\right)^{-1};$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то

$$\left|P_p(s_1)\right|+\left|P_p'(s_1)\right|+\left|P_p''(s_1)\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-2};$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то

$$\left|P_p(s_1)\right|+\left|P_p'(s_1)\right|+\left|P_p''(s_1)\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}.$$

Доказательство. Так как $\operatorname{supp} q_0(x_1)\subseteq[-1;1]$, $\operatorname{supp} q_1(x_1)\subseteq[-1;1]$, то для функций $P_0(s_1)$ и $P_1(s_1)$ будут справедливы представления

$$P_0(s_1)=\int_{-1}^{1}e^{ix_1s_1}q_0(x_1)dx_1,\;\; P_1(s_1)=\int_{-1}^{1}e^{ix_1s_1}q_1(x_1)dx_1. \tag{2.1}$$

Из условий на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ следует, что найдется такая положительная константа c, что при $s_1\in\mathbb{R}$ выполнены оценки

$$\left|P_p(s_1)\right|\le c,\;\; p=0;1. \tag{2.2}$$

Если $|s_1|>\delta$, где δ – некоторая положительная константа, то при помощи интегрирования по частям получаем, что

$$P_p(s_1)=e^{ix_1s_1}\left(is_1\right)^{-1}q_0(x_1)\Big|_{-1}^{1}-\left(is_1\right)^{-1}\int_{-1}^{1}e^{ix_1s_1}q_0'(x_1)dx_1$$

при $p=0;1$. Используя последние представления и оценки (2.2), получим, что найдется такая константа $c>0$, что при $s_1\in\mathbb{R}$ выполнено

$$\left|P_p(s_1)\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-1},\; p=0;1. \tag{2.3}$$

Воспользовавшись интегрированием по частям при $p=0;1$, аналогично оценкам (2.3) можно получить следующие оценки:

$$\left|P_p(s_1)\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-2}, \text{ если } q_p(-1)=q_p(1)=0; \tag{2.4}$$

$$\left|P_p(s_1)\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}, \text{ если } q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0. \tag{2.5}$$

Докажем оценки для функций $P_p'(s_1)$ и $P_p''(s_1)$, где $p=0;1$. С учетом (2.1) получаем представления $P_p'(s_1)=\int_{-1}^{1}e^{ix_1s_1}ix_1q_p(x_1)dx_1$, $P_p''(s_1)=\int_{-1}^{1}e^{ix_1s_1}(-x_1^2q_p(x_1))dx_1$. Отметим, что если при $p=0;1$ функции $q_p(x_1)$ обращаются в нуль при $x_1=\pm1$, то функции $x_1 q_p(x_1)$ и $x_1^2 q_p(x_1)$ также обращаются в нуль при $x_1 = \pm 1$, если же при $x_1 = \pm 1$ в нуль обращаются функции $q_p(x_1)$ и их первые производные, то при $x_1 = \pm 1$ в нуль также обращаются функции $x_1 q_p(x_1)$ и $x_1^2 q_p(x_1)$ и их первые производные. Таким образом, действуя так же, как при получении оценок (2.3)-(2.5), при помощи представлений функций $P_p'(s_1)$ и $P_p''(s_1)$, при $p = 0;1$ и $s_1 \in \mathbb{R}$ можно показать, что найдется такая константа $c > 0$, что будут выполнены оценки

$$\left|P_p'(s_1)\right| + \left|P_p''(s_1)\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-1};$$

$$\left|P_p'(s_1)\right| + \left|P_p''(s_1)\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-2}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = 0;$$

$$\left|P_p'(s_1)\right| + \left|P_p''(s_1)\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. Для функций $w_1^0(s_1)$ и $w_2^0(s_1)$, заданных равенствами (1.12), найдется такая положительная константа c, что при $s_1 \in \mathbb{R}$ будут выполнены оценки

$$\left|w_p^0(s_1)\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-1}, \quad p = 1;2;$$

если же при $p = 0;1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то

$$\left|w_p^0(s_1)\right| + \left|(w_p^0(s_1))'\right| + \left|(w_p^0(s_1))''\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-2}, \quad p = 1;2;$$

а если при $p = 0;1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, то

$$\left|w_p^0(s_1)\right| + \left|(w_p^0(s_1))'\right| + \left|(w_p^0(s_1))''\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}, \quad p = 1;2.$$

Доказательство оценок леммы проведем на примере функции
$$w_1^0(s_1) = \frac{-P_1(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2 + 0,25k_2^2} - 0,5k_2\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0,25k_1^2} + 0,5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0,25k_2^2} - 0,5k_2},$$ доказательство оценок для функции $w_2^0(s_1)$ проводится аналогично.

Воспользовавшись видом функции $w_1^0(s_1)$ и оценками из леммы 2.1, получим, что

$$\left|w_1^0(s_1)\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-1};$$

$$\left|w_1^0(s_1)\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-2}, \text{ если } q_p(-1)=q_p(1)=0 \text{ при } p=0;1;$$

$$\left|w_1^0(s_1)\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-3}, \text{ если } q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0 \text{ при } p=0;1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered}(w_1^0(s_1))' = A_1(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1} - \\ - B_1(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-2},\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $A_1(s_1) = -P_1'(s_1) + s_1\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5} P_0(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)P_0'(s_1)$, а

$$B_1(s_1) = \left(-P_1(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)P_0(s_1)\right)\cdot s_1\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5} + \left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5}\right).$$

Из леммы 2.1 и вида функций $A_1(s_1)$ и $B_1(s_1)$ следует, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то

$$\left|A_1(s_1)\right| + \left|B_1(s_1)\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-1}, \tag{2.7}$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то

$$\left|A_1(s_1)\right| + \left|B_1(s_1)\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-2}. \tag{2.8}$$

Из (2.6), (2.7) следует, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то $\left|(w_1^0(s_1))'\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-2}$, а из (2.6), (2.8) следует, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то $\left|(w_1^0(s_1))'\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-3}$.

Вычислив $A_1'(s_1)$ и $B_1'(s_1)$ и воспользовавшись оценками из леммы 2.1, получаем, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то

$$\left|A_1'(s_1)\right| + \left|B_1'(s_1)\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-1}, \tag{2.9}$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то

$$\left|A_1'(s_1)\right| + \left|B_1'(s_1)\right| \le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-2}. \tag{2.10}$$

Вычислив $(w_1^0(s_1))''$ и применив оценки (2.7)-(2.10), получим, что если при

$p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то $\left|(w_1^0(s_1))''\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-2}$, а если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то $\left|(w_1^0(s_1))''\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}$. Лемма доказана.

В следующей лемме определяются условия, при которых функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ существуют и имеют след из $L_1(\mathbb{R})$.

Лемма 2.3. Если при $p=0;1$ выполнены условия $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (1.14), являются непрерывными и ограниченными в $\mathbb{R}^2$ функциями, которые можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу, а функции $V_1(x_1,+0)$ и $V_2(x_1,+0)$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство проведем на примере функции $V_1(x)$, для функции $V_2(x)$ доказательство проводится аналогично. Согласно лемме 2.2 получаем, что

$$\left|2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot\left(|s|^2+0,25k_1^2\right)^{-1}w_1^0(s_1)\right|\le c\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-1}\left(1+|s_1|\right)^{-2}. \quad (2.11)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-1}ds_2=\pi. \quad (2.12)$$

При помощи (2.12) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-1}\left(1+|s_1|\right)^{-2}ds_2\right)ds_1=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|s_1|\right)^{-2}ds_1<\infty.$$

Из (2.11), последней оценки, теоремы Фубини и теоремы о зависимости интеграла от параметра (см. [40]) следует, что функция $V_1(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$, причем ее можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу.

При помощи (2.12) получим, что

$$V_1(x_1,+0)=F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_1^0(s_1)]=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_1s_1}w_1^0(s_1)ds_1. \quad (2.13)$$

В частности, из оценок леммы 2.2 следует, что функции $w_1^0(s_1)$, $(w_1^0(s_1))'$,

$(w_1^0(s_1))''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, тогда с учетом равенства (2.13) получаем, что функция $V_1(x_1,+0)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$ (см. [43]). Лемма доказана.

Воспользовавшись интегрированием по частям, можно доказать лемму, обобщающую на двумерный случай аналогичный результат для преобразования Фурье, доказанный в [43].

Для доказательства принадлежности функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ потребуются две вспомогательные леммы. Следующая лемма обобщает на двумерный случай аналогичный результат для преобразования Фурье, доказанный в [43].

Лемма 2.4. Пусть $A(s_1,s_2)\in C^4(\mathbb{R}^2)$; $A(s_1,s_2)$, $\dfrac{\partial A(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A(s_1,s_2)}{\partial s_1 \partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A(s_1,s_2)}{\partial s_1^2 \partial s_2^2}\in L_1(\mathbb{R}^2)$, а функция $V(x)$ представима в виде

$$V(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[A(s_1,s_2)]=(2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(s_1x_1+s_2x_2)}A(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\,,$$

тогда $V(x)\in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Из теоремы Фубини следует, что для доказательства принадлежности функции $V(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ достаточно доказать справедливость при $x\in\mathbb{R}^2$ оценки

$$|V(x)|\le c\left(1+|x_1|\right)^{-1-\delta}\left(1+|x_2|\right)^{-1-\delta},\ \delta>0\,. \tag{2.14}$$

Так как $A(s_1,s_2)\in L_1(\mathbb{R}^2)$, то $V(x)$ существует, ограничена в $\mathbb{R}^2$ и может быть вычислена сведением к повторному интегралу (см. [40]). Пусть $|x|>\delta_1>0$, тогда

$$V(x)=(2\pi)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_1x_1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}A(s_1,s_2)ds_2\right)ds_1\,. \tag{2.15}$$

Дважды воспользовавшись интегрированием по частям, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}A(s_1,s_2)ds_2=-(ix_2)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} A(s_1,s_2)de^{-is_2x_2}=$$

$$=(ix_2)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}\frac{\partial A(s_1,s_2)}{\partial s_2}ds_2 = -x_2^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}\frac{\partial^2 A(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}ds_2.$$

С учетом последних равенств равенство (2.15) примет вид

$$V(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2 x_2^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_1x_1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}\frac{\partial^2 A(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}ds_2\right)ds_1 .$$

Так как $\dfrac{\partial^2 A(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}\in L_1(\mathbb{R}^2)$, то, воспользовавшись теоремой Фубини, из последнего равенства получим, что $V(x) = -\dfrac{1}{(2\pi)^2 x_2^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_1x_1}\frac{\partial^2 A(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}ds_1\right)ds_2$.

Если внутренний интеграл в последнем представлении функции $V(x)$ дважды проинтегрировать по частям, то получим, что $V(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^2 x_1^2 x_2^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_1x_1}\frac{\partial^4 A(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}ds_1\right)ds_2$. Так как $\dfrac{\partial^4 A(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}\in L_1(\mathbb{R}^2)$, то, воспользовавшись теоремой Фубини, получим, что при $|x| > \delta_1 > 0$

$$V(x) = \frac{1}{(2\pi)^2 x_1^2 x_2^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(s_1x_1+s_2x_2)}\frac{\partial^4 A(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}ds_1ds_2 . \tag{2.16}$$

Из (2.16) следует, что выполнена оценка $|V(x)|\le c\left(1+|x_1|\right)^{-2}\left(1+|x_2|\right)^{-2}$ при $x\in\mathbb{R}^2$, тогда из последней оценки и (2.14) следует справедливость леммы. Лемма доказана.

Ниже проводится доказательство нескольких вспомогательных оценок, использующихся для проверки условий леммы 2.4 при доказательстве принадлежности функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Лемма 2.5. Для любых $s_1,s_2\in\mathbb{R}$ и любой положительной константы k существует положительная константа c такая, что выполнены оценки

$$\left(s_1^2+s_2^2+0,25k^2\right)^{-1}\le c\left(1+|s_1|\right)^{-2},\ \left(s_1^2+s_2^2+0,25k^2\right)^{-1}\le c\left(1+|s_2|\right)^{-2},$$

$$\left(s_1^2+s_2^2+0,25k^2\right)^{-1}\le c\left(1+|s_1|\right)^{-1}\left(1+|s_2|\right)^{-1}.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство леммы, второе неравенство доказывается аналогично. Легко видеть, что для любого s_1 выполнена оценка $\left(1+|s_1|\right)^2\Big/3 \le 1+s_1^2$. С учетом последней оценки получаем, что $s_1^2+s_2^2+0,25k^2 \ge s_1^2+0,25k^2 \ge \min\left\{1;0,25k^2\right\}(1+s_1^2) \ge \min\left\{1;0,25k^2\right\}\left(1+|s_1|\right)^2\Big/3$.

Следовательно, $\left(s_1^2+s_2^2+0,25k^2\right)^{-1} \le 3\left(\min\left\{1;0,25k^2\right\}\right)^{-1}\left(1+|s_1|\right)^{-2}$.

Докажем третью оценку леммы. Легко видеть, что для любой константы a выполнена оценка $\sqrt{1+a^2} \ge 0,5\left(1+|a|\right)$. Из этой оценки следует цепочка неравенств $a^2+b^2+2 \ge 2\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2} \ge 2\cdot 0,5\left(1+|a|\right)0,5\left(1+|b|\right) = 0,5\left(1+|a|\right)\left(1+|b|\right)$, то есть

$$a^2+b^2+2 \ge 0,5\left(1+|a|\right)\left(1+|b|\right). \tag{2.17}$$

С учетом (2.17) получаем, что $s_1^2+s_2^2+0,25k^2 \ge 0,5(s_1^2+s_2^2+2\cdot 0,25k^2) \ge$ $0,5\cdot\min\left\{1;0,25k^2\right\}(s_1^2+s_2^2+2) \ge 0,25\min\left\{1;0,25k^2\right\}\left(1+|s_1|\right)\left(1+|s_2|\right)$, тогда $\left(s_1^2+s_2^2+0,25k^2\right)^{-1} \le 4\left(\min\left\{1;0,25k^2\right\}\right)^{-1}\left(1+|s_1|\right)^{-1}\left(1+|s_2|\right)^{-1}$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству принадлежности функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Лемма 2.6. Если при $p=0;1$ выполнены условия $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (1.14), принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство проведем на примере функции $V_1(x)$, для функции $V_2(x)$ доказательство проводится аналогично. Функция $V_1(x)$ представима в виде $V_1(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[A_1(s_1,s_2)]$, где $A_1(s_1,s_2)=2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-1}w_1^0(s_1)$. Из леммы 2.4 следует, что для принадлежности $V_1(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ достаточно доказать принадлежность пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ функций $A_1(s_1,s_2)$, $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$.

Воспользовавшись оценками из лемм 2.2 и 2.5, получаем, что

$$\left|A_1(s_1,s_2)\right| \le c\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-0,25}\left(1+\left|s_1\right|\right)\left|w_1^0(s_1)\right|\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-0,75} \le$$
$$\le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-1,5}\left(1+\left|s_2\right|\right)^{-1,5},$$

следовательно, $A_1(s_1,s_2)\in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Вычислив функции $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$ и воспользовавшись оценками из лемм 2.2 и 2.5, можно показать, что эти функции мажорируются функцией $c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-2}\left(1+\left|s_2\right|\right)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа. Следовательно, функции $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$. Лемма доказана.

В [43] доказано, что при $x_2>0$ и произвольной константе $k>0$

$$F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}{\left|s\right|^2+0,25k^2}\right]=F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}{s_1^2+s_2^2+0,25k^2}\right]=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}. \tag{2.18}$$

В лемме 2.3 было доказано, что при выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=0$, где $p=0;1$, функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ существуют, при этом их можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу. Следовательно, при $x_2>0$ и выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=0$, где $p=0;1$, для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданных равенствами (1.14), будут справедливы представления

$$V_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}{\left|s\right|^2+0,25k_p^2}\right]\cdot w_p^0(s_1)\right],\ \ p=1;2.$$

С учетом (2.18) при $x_2>0$ из последних равенств получаем, что

$$V_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2})\cdot w_p^0(s_1)\right],\ \ p=1;2. \tag{2.19}$$

Заметим, что при $x_2>0$ и произвольной положительной константе k выполнена оценка

$$\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2})\le\exp(-x_2|s_1|). \tag{2.20}$$

Лемма 2.7. Если при $p=0;1$ выполнены условия $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (1.14), бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}_+^2$ и являются решениями уравнений (0.5) и (0.6) соответственно.

Доказательство. Докажем дифференцируемость функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ по переменной x_1 в $\mathbb{R}_+^2$. Существование остальных производных для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ доказывается аналогично. Из (2.19) и теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру (см. [44]) следует, что для доказательства существования $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}$ в $\mathbb{R}_+^2$ достаточно доказать, существование следующих интегралов:

$$\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_1s_1-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}(-is_1)w_p^0(s_1)\,ds_1,\ p=1;2. \tag{2.21}$$

Из леммы 2.2, (2.20) и (2.21) следует, что при $x_2>0$ модуль подынтегральной функции в правой части равенства (2.21) не превосходит $c\exp(-x_2|s_1|)$, где $c>0$ – некоторая константа. Следовательно, в $\mathbb{R}_+^2$ существуют функции $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}$.

Остальные утверждения леммы непосредственно следуют из способа построения функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ и леммы дю Буа-Реймона (см. [40]). Лемма доказана.

Отметим, что из (2.19) следует ограниченность функций $\dfrac{\partial^2 V_p(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 V_p(x)}{\partial x_2^2}$, где $p=1;2$, при $x_2\ge\delta>0$.

Воспользовавшись (2.19) и теоремой о дифференцируемости интеграла по параметру (см. [44]), получаем, что при $x_2>0$ и $p=1;2$

$$\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_1s_1}\cdot\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\right)\cdot\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,w_p^0(s_1)\,ds_1. \tag{2.22}$$

Из леммы 2.2 следует, что при выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=$

$q'_p(-1)=q'_p(1)=0$, где $p=0;1$, равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\ge 0$ подынтегральные функции в (2.21) и (2.22) мажорируются функцией $c\left(1+|s_1|\right)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа. Следовательно, при выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=q'_p(-1)=q'_p(1)=0$, где $p=0;1$, функции $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}$ непрерывны и ограничены при $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\ge 0$, причем

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}=\frac{\partial V_p(x_1,0)}{\partial x_2}=-F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,w_p^0(s_1)\right]=\\=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_1s_1}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\cdot w_p^0(s_1)\,ds_1,\ p=1;2.\end{gathered}\tag{2.23}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.8. Если при $p=0;1$ выполнены условия $q_p(-1)=q_p(1)=q'_p(-1)=q'_p(1)=0$, то функции $\dfrac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial V_2(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство будем проводить для функции $V_1(x)$, для функции $V_2(x)$ доказательство проводится аналогично.

Из (2.23) следует, что для того, чтобы доказать принадлежность функции $\dfrac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$ пространству $L_1(\mathbb{R})$, достаточно доказать, что функции $\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)$, $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)'$ и $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ (см. [43]). Непосредственно из леммы 2.2 получаем, что функция $\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)'=s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}w_1^0(s_1)+\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}(w_1^0(s_1))'.\tag{2.24}$$

Из (2.24) и леммы 2.2 следует, что $\left|\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)'\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-2}$, то есть $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)'\in L_1(\mathbb{R})$. Воспользовавшись (2.24), получаем, что

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)''=\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}-s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-1,5}\right)w_1^0(s_1)+$$
$$+s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}(w_1^0(s_1))'+s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}(w_1^0(s_1))'+\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}(w_1^0(s_1))''.$$

Из последнего равенства и леммы 2.2 следует, что $\left|\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)''\right|\le$

$c\left(1+|s_1|\right)^{-2}$, то есть $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_1^0(s_1)\right)''\in L_1(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству того, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (1.14), удовлетворяют граничным условиям (0.7), (0.8). Для начала проведем доказательство нескольких вспомогательных лемм.

Лемма 2.9. Пусть k – положительная константа, тогда при x, принадлежащих $\mathbb{R}_+^2$, справедливы следующие равенства:

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}{|s|^2+0,25k^2}\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right]=(2\pi)^{-1}k\cdot K_1\left(0,5k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

где $K_1\left(z\right)$ – функция Макдональда (см. [41]).

Доказательство. Равенство (2.18) можно записать в виде

$$F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\left(|s|^2+0,25k^2\right)^{-1}\right]=0,5\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}\right)\cdot\left(s_1^2+0,25k^2\right)^{-0,5}. \qquad (2.25)$$

В [45] отмечено, что в $\mathbb{R}^2$ фундаментальным решением оператора $\Delta-k^2$, где $k>0$ – произвольная константа, будет функция $-(2\pi)^{-1}K_0\left(0,5k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$, где $K_0\left(z\right)$ – функция Макдональда (см. [41]). Тогда из свойств обобщенного преобразования Фурье и свойств функции $K_0\left(z\right)$ (см. [41], [46]) следует, что при x, принадлежащих $\mathbb{R}_+^2$, справедливо равенство

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\left(|s|^2+0,25k^2\right)^{-1}\right]=(2\pi)^{-1}K_0\left(0,5k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right). \qquad (2.26)$$

Воспользовавшись (2.25), левую часть равенства (2.26) можно записать в виде

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\left(|s|^2+0,25k^2\right)^{-1}\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\left(|s|^2+0,25k^2\right)^{-1}\right]\right]=$$
$$=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[0,5\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}\right)\cdot\left(s_1^2+0,25k^2\right)^{-0,5}\right]. \tag{2.27}$$

Тогда из (2.26) и (2.27) получим, что

$$(2\pi)^{-1}K_0\left(0,5k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[0,5\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}\right)\cdot\left(s_1^2+0,25k^2\right)^{-0,5}\right]. \tag{2.28}$$

Так как при $y>0$ функции $K_0(y)$ и $K_1(y)$ удовлетворяют соотношению $K_0'(y)=-K_1(y)$ (см. [41]), то продифференцировав (2.28) по x_2, получим, что

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right]=(2\pi)^{-1}k\cdot K_1\left(0,5k\sqrt{x_1^2+x_1^2}\right)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_1^2}}. \tag{2.29}$$

По аналогии с представлением (2.27) имеем, что

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}{|s|^2+0,25k^2}\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\left(|s|^2+0,25k^2\right)^{-1}\right]2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}\right].$$

При помощи (2.25) из последнего равенства следует, что

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}{|s|^2+0,25k^2}\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right]. \tag{2.30}$$

Из (2.29) и (2.30) следует утверждение леммы. Л е м м а д о к а з а н а.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода, тогда для любого $\delta>0$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2},$$

где $f(x_1-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}f(x_1-\varepsilon),\quad f(x_1+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}f(x_1+\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_1.

Очевидно следующее представление:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1+$$

$$+f(x_1)\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-1}dy_1 .$$

Так как $\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-1}dy_1=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y_1-x_1}{\varepsilon}\right)\Bigg|_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\varepsilon}$, то $\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=f(x_1)+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1$. Из последнего равенства и непрерывности функции $f(x)$ в точке x_1 следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)dy_1}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1. \quad (2.31)$$

Поскольку для любого $\delta_1>0$ и x_1, y_1, принадлежащих некоторому фиксированному отрезку, функция $\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}$ ограничена при $|x_1-y_1|\geq\delta_1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1 . \quad (2.32)$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=0 . \quad (2.33)$$

Пусть $\varepsilon_1>0$ – произвольная константа. Так как $f(x)$ имеет не более конечного числа точек разрыва, то найдется такое $\delta_2>0$, что при $y_1\in(x_1-\delta_2;x_1+\delta_2)$ будет выполнена оценка $|f(x_1)-f(y_1)|\leq\varepsilon_1$. Тогда

$$\left|\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_2}^{x_1+\delta_2}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1\right|\leq\frac{\varepsilon_1\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_2}^{x_1+\delta_2}\frac{dy_1}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}=\frac{2\varepsilon_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta_2}{\varepsilon}\leq\varepsilon_1 .$$

Из последней оценки и (2.32) следует справедливость (2.33). Воспользовавшись (2.31)-(2.33), получаем, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_1, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}=f(x_1) . \quad (2.34)$$

Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_1. Рассмотрим две функции

$$\widehat{f}_{-}(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in\left(x_1-\delta;x_1\right),\\ f(x_1-0),\ x=x_1,\\ f(2x_1-x),\ x\in\left(x_1;x_1+\delta\right)\end{cases} \text{ и } \widehat{f}_{+}(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in\left(x_1;x_1+\delta\right),\\ f(x_1+0),\ x=x_1,\\ f(2x_1-x),\ x\in\left(x_1-\delta;x_1\right),\end{cases}$$

где δ – некоторая положительная константа. По построению функции $\widehat{f}_{-}(x)$, $\widehat{f}_{+}(x)$ будут непрерывны в точке x_1 и будут иметь не более конечного числа точек разрыва первого рода на интервале $\left(x_1-\delta;x_1+\delta\right)$. Очевидно, что

$$\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{1}{2}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{\widehat{f}_{-}(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1+\frac{1}{2}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{\widehat{f}_{+}(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1 .$$

Из последнего равенства и (2.34) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{\widehat{f}_{-}(x_1)+\widehat{f}_{+}(x_1)}{2}=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}.$$

Лемма доказана.

Пусть I – конечный или бесконечный интервал, а функция $g(x)$ определена на I. В дальнейшем через $O(g(x))$ при $x\in I$ будем обозначать всякую функцию $f(x)$, для которой существует положительная константа c такая, что при $x\in I$ выполнена оценка $\left|f(x)\right|\le c\left|g(x)\right|$.

Лемма 2.11. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода. Тогда для любого $\delta>0$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}K_1\left(0{,}5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0{,}5}f(y_1)dy_1=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2},$$

где k – произвольная положительная константа, а $K_1(z)$ – функция Макдональда (см. [41]).

Доказательство. Выберем $\delta_1>0$ такое, что $0{,}5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}<1$ при всех $\left|x_1-y_1\right|<\delta_1$ и при всех достаточно малых ε. Из свойств функций Макдональда (см. [41], [46]) следует, что при x_1, y_1, принадлежащих некоторому фиксированному отрезку, функция $K_1\left(0{,}5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)f(y_1)$ ограничена при

$|x_1 - y_1| > \delta_1$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}K_1\left(0,5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0,5}f(y_1)\,dy_1 =$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}K_1\left(0,5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0,5}f(y_1)\,dy_1. \quad (2.35)$$

При $y\in(0;1)$ для функции $K_1(y)$ справедливо представление (см. [46]) $K_1(y)=y^{-1}+O(y)$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}K_1\left(0,5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0,5}f(y_1)\,dy_1 =$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\frac{f(y_1)dy_1}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}+\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}O\left(0,5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0,5}f(y_1)\,dy_1\right).$$

Из ограниченности функции $O\left(0,5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0,5}f(y_1)$ при $y_1\in(x_1-\delta_1;x_1+\delta_1)$ следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}K_1\left(0,5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0,5}f(y_1)\,dy_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\frac{f(y_1)\,dy_1}{\left(x_1-y_1\right)^2+\varepsilon^2}.$$

Из (2.35), последнего равенства и леммы 2.10 следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}K_1\left(0,5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-0,5}f(y_1)\,dy_1=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.12. При $p=0;1$ выполнены следующие равенства:

$$\lim_{x_2\to+0}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}\right)-\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\right)\right)w_2^p(s_1)\right]=0,$$

где функции $w_2^p(s_1)$ при $p=0;1$ заданы равенствами (1.12) и (1.13).

Доказательство. Пусть $k>0$ – произвольная константа. При любом фиксированном N и фиксированном $x_2>0$ найдется такая константа c, что при $s_1\in[0;N]$ выполнена оценка $\left|\exp(-x_2s_1)-\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2})\right|\le c$, тогда из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим, что для любого фиксированного N: $\lim_{x_2\to+0}\int_0^N\left(\exp(-x_2s_1)-\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}\right)\right)ds_1=0$.

Следовательно, при произвольном положительном N

$$\lim_{x_2\to+0}\int_0^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right)ds_1=\lim_{x_2\to+0}\int_N^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right)ds_1. \qquad (2.36)$$

Воспользовавшись разложением функции $\sqrt{1+x}$ в ряд Тейлора, при $|x|<1$ имеем, что $\sqrt{1+x}=1+x\cdot O(1)$. Из последнего равенства получаем, что существует такая константа N_1, что при $s_1\ge N_1$

$$\sqrt{s_1^2+0,25k^2}=s_1\sqrt{1+0,25k^2s_1^{-2}}=s_1\left(1+s_1^{-2}O(1)\right)=s_1+s_1^{-1}O(1),\ O(1)>0. \quad (2.37)$$

Для любой константы a выполнено равенство $e^a-1=a\int_0^1 e^{a\xi}d\xi$, поэтому из (2.37) и последнего представления получаем, что

$$\begin{aligned}\int_{N_1}^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right)ds_1&=\int_{N_1}^\infty e^{-x_2s_1}\left(1-e^{-x_2s_1^{-1}O(1)}\right)ds_1=\\&=x_2\int_{N_1}^\infty e^{-x_2s_1}s_1^{-1}O(1)\int_0^1 e^{-x_2s_1^{-1}O(1)\xi}\,d\xi ds_1.\end{aligned} \qquad (2.38)$$

Так как в представлении (2.37) $O(1)>0$, то $\int_0^1 e^{-x_2s_1^{-1}O(1)\xi}d\xi<1$. Тогда из (2.38) и последней оценки следует, что при достаточно малом x_2

$$\begin{aligned}\left|\int_{N_1}^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right)ds_1\right|&\le cx_2\int_{N_1}^\infty e^{-x_2s_1}s_1^{-1}ds_1=cx_2\int_{x_2N_1}^\infty e^{-t}t^{-1}dt=\\&=cx_2\left(\int_{x_2N_1}^1 e^{-t}t^{-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{-1}dt\right)\le c_1x_2\left(-\ln(x_2N_1)+e^{-1}\right).\end{aligned} \qquad (2.39)$$

Из (2.36) и (2.39) следует, что для любой положительной константы k

$$\lim_{x_2\to+0}\int_0^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right)ds_1=0. \qquad (2.40)$$

Проведем доказательство утверждения леммы при $p=0$, при $p=1$ доказательство проводится аналогично. Очевидно, что

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^0(s_1)\right]=$$
$$=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^0(s_1)-\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}\right)w_2^0(s_1)\right].$$

Из последнего представления получаем

$$\left|F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^0(s_1)\right]\right|\le$$
$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)\left|w_2^0(s_1)\right|ds_1+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}\right)\left|w_2^0(s_1)\right|ds_1. \quad (2.41)$$

Из леммы 2.2 при $s_1\in\mathbb{R}$ следует оценка

$$\left|w_2^0(s_1)\right|\le K,\ K>0. \quad (2.42)$$

Тогда из (2.41) и (2.42) получаем $\left|F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^0(s_1)\right]\right|\le$ $2K\left(\int_0^{\infty}\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)ds_1+\int_0^{\infty}\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}\right)ds_1\right)$. При помощи последней оценки и (2.40) получаем, что $\lim\limits_{x_2\to+0}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^0(s_1)\right]=0$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству выполнения условия (0.7).

Лемма 2.13. Если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (1.14), удовлетворяют условию (0.7).

Доказательство. Ранее было доказано (см. (2.19) и лемму 2.7), что при выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=0$, где $p=0;1$, справедливы представления

$$V_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\right)\cdot w_p^0(s_1)\right],\ \ p=1;2, \quad (2.43)$$

причем функции $V_p(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2_+)$ и ограничены на множестве $\overline{\mathbb{R}^2_+}$. Следовательно, при фиксированном положительном x_2 и при $p=1;2$ функции $V_p(x)$ бесконечно дифференцируемы и ограничены по переменной x_1 на всей вещественной оси.

В лемме 2.2 было доказано, что при выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=0$, где $p=0;1$, выполнены оценки

$$\left|w_p^0(s_1)\right|+\left|(w_p^0(s_1))'\right|+\left|(w_p^0(s_1))''\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-2},\ p=1;2. \quad (2.44)$$

Из оценок (2.44) следует, что функции $w_p^0(s_1)$, $(w_p^0(s_1))'$, $(w_p^0(s_1))''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, следовательно (см. [43]), $F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]\in L_1(\mathbb{R})$. Поскольку функция $w_p^0(s_1)$ дифференцируема в $\mathbb{R}$, то (см. [43], [47])

$$F_{x_1\to s_1}[F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]]=w_p^0(s_1). \quad (2.45)$$

Пусть $x_2>0$ – фиксированное число, тогда из (2.44) получаем, что функции $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}w_p^0(s_1)$, $(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}w_p^0(s_1))'$, $(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}w_p^0(s_1))''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, следовательно, $V_p(x)\in L_1(\mathbb{R})$. Используя (2.43), получаем, что

$$F_{x_1\to s_1}[V_p(x)]=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}w_p^0(s_1),\ p=1;2. \quad (2.46)$$

Из свойств функций Макдональда следует, что при фиксированном положительном x_2 функции $(2\pi)^{-1}k_px_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}K_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$, где $p=1;2$, непрерывны, ограничены в $\mathbb{R}$ и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ по переменной x_1 (см. [41], [46]). Тогда при $p=1;2$ функции

$$\begin{gathered}(2\pi)^{-1}k_px_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}K_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)*F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]=\\ =(2\pi)^{-1}k_px_2\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(0,5k_p\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5}F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w_p^0(s_1)\right]dy_1\end{gathered} \quad (2.47)$$

существуют, непрерывны и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ по переменной x_1 (см. [40]).

Так как каждый из компонентов свертки в (2.47) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, то (см. [43], [47])

$$\begin{gathered}F_{x_1\to s_1}\left[(2\pi)^{-1}k_px_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}K_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)*F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]\right]=\\ =F_{x_1\to s_1}\left[(2\pi)^{-1}k_px_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}K_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right]\cdot F_{x_1\to s_1}\left[F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]\right].\end{gathered} \quad (2.48)$$

Ранее было доказано (см. лемму 2.9), что при положительном x_2

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\right]=(2\pi)^{-1}k_pK_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\cdot x_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}.$$

Поскольку функция $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}$ бесконечно дифференцируема, ограничена и принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$ при фиксированном $x_2>0$, то (см. [43], [47])

$$F_{x_1\to s_1}\left[(2\pi)^{-1}k_p x_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}K_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right]=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}. \tag{2.49}$$

Из (2.45), (2.48) и (2.49) получаем, что

$$F_{x_1\to s_1}\left[(2\pi)^{-1}k_p x_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}K_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)*F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]\right]=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}w_p^0(s_1). \tag{2.50}$$

Так как функции $(2\pi)^{-1}k_p x_2(x_1^2+x_2^2)^{-0,5}K_1\left(0,5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)*F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]$ и $V_p(x)$ при фиксированном $x_2>0$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ по переменной x_1, то из (2.46) и (2.50) следует, что при $p=1;2$ и почти всех x_1 выполнены равенства (см. [43])

$$V_p(x)=\frac{k_p x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K_1\left(0,5k_p\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5}F^{-1}_{s_1\to y_1}[w_p^0(s_1)]dy_1. \tag{2.51}$$

Поскольку функции в левой и правой частях равенств (2.51) непрерывны, то эти равенства будут выполнены при всех x_1.

При помощи (2.51) и леммы 2.11 получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(V_1(x_1,+\varepsilon)-V_2(x_1,+\varepsilon)\right)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[w_1^0(s_1)-w_2^0(s_1)\right].$$

Из последнего равенства, (1.8) и (1.10) следует, что (см. [43], [47])

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(V_1(x_1,+\varepsilon)-V_2(x_1,+\varepsilon)\right)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[P_0(s_1)\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F_{x_1\to s_1}\left[q_0(x_1)\right]\right]=q_0(x_1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.14. Если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (1.14), удовлетворяют условию (0.8).

Доказательство. С учетом (1.9), при $x_2>0$ представления (2.22) можно записать в виде

$$\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\left(-\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\right)w_p^0(s_1)\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}w_p^1(s_1)\right],p=1;2. \tag{2.52}$$

Из (2.19), (2.52) следует, что при $x_2>0$

$$-\frac{k_1}{2}V_1(x)+\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}V_2(x)+\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}=$$

$$= F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\left(-0,5k_1w_1^0(s_1)+w_1^1(s_1)\right)+e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}\left(0,5k_2w_2^0(s_1)+w_2^1(s_1)\right)\right]=$$

$$= F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\left(-0,5k_1w_1^0(s_1)+w_1^1(s_1)+0,5k_2w_2^0(s_1)+w_2^1(s_1)\right)\right]+$$

$$+F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)\cdot 0,5k_2w_2^0(s_1)\right]+$$

$$+F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^1(s_1)\right].$$

С учетом (1.11) последнее равенство примет вид

$$-\frac{k_1}{2}V_1(x)+\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}V_2(x)+\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}P_1(s_1)\right]+$$

$$+F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)\cdot 0,5k_2w_2^0(s_1)\right]+$$

$$+F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^1(s_1)\right].$$

Если воспользоваться обозначениями (1.8), то, по аналогии с (2.51), получим

$$-\frac{k_1}{2}V_1(x)+\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}V_2(x)+\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}=$$

$$=\frac{k_1x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K_1\left(0,5k_1\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5}q_1(y_1)\,dy_1+$$

$$+0,5k_2F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^0(s_1)\right]+ \qquad (2.53)$$

$$+F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\right)w_2^1(s_1)\right].$$

Воспользовавшись леммой 2.11, получим, что при $x_1\neq\pm1$

$$\lim_{x_2\to+0}\frac{k_1x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K_1\left(0,5k_1\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5}q_1(y_1)\,dy_1=q_1(x_1).\quad(2.54)$$

Из (2.53), (2.54) и леммы 2.12 следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Из результатов, полученных в леммах 2.3, 2.6, 2.7, 2.8, 2.13 и 2.14, следует справедливость теоремы 0.1.

ГЛАВА 2

АСИМПТОТИКИ КОМПОНЕНТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ПЛОСКОСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ, С ТРЕЩИНОЙ

3. Представление граничных функций в виде суммы гладких функций и функций специального вида

Во введении было указано, что при помощи представлений (0.9) компоненты решения $\left(u_1(x), u_2(x)\right)$ исходной задачи (0.1)-(0.3) можно представить в виде (0.11). Следовательно, от задачи (0.1)-(0.3) перейдем к изучению задач (0.12)-(0.14) при $j=1;2$, но прежде докажем справедливость представлений (0.9).

Рассмотрим некоторую функцию $g(x_1): \operatorname{supp} g(x_1)=[-1;1]$; $g(x_1)\in C^3([-1;1])$. Построим функцию

$$\begin{gathered} g_1(x_1)=g(x_1)-e^{-(x_1+1)}\theta(x_1+1)\Big[g(-1)+(x_1+1)\left(g'(-1)+a_1 g(-1)\right)+ \\ +0,5(x_1+1)^2\left(g''(-1)+a_2 g'(-1)+a_3 g(-1)\right)+\frac{1}{6}(x_1+1)^3\left(g'''(-1)+\right. \\ \left.+a_4 g''(-1)+a_5 g'(-1)+a_6 g(-1)\right)\Big], \end{gathered} \tag{3.1}$$

где коэффициенты $a_k, k=\overline{1;6}$ находятся из условий $g_1^{(k)}(-1)=0, k=\overline{0;3}$, то есть $g_1(x_1)\in C^3([-\infty;1])$. Воспользовавшись равенством (3.1), можно получить представления $g_1^{(k)}(x_1), k=\overline{1;3}$, при подстановке в которые $x_1=-1$, имеем

$$g_1(-1)=g(-1)-g(-1)=0, \tag{3.2}$$

$$g_1'(-1)=g'(-1)-g'(-1)+(1-a_1)g(-1)=(1-a_1)g(-1), \tag{3.3}$$

$$g_1''(-1)=-(a_2-2)g'(-1)-(1-2a_1+a_3)g(-1), \tag{3.4}$$

$$g_1'''(-1)=(3-a_4)g''(-1)-(3-3a_2+a_5)g'(-1)+(1-3a_1+3a_3-a_6)g(-1). \tag{3.5}$$

С учетом равенств (3.2)-(3.5), получаем следующие коэффициенты представления (3.1): $a_1=a_3=a_6=1$, $a_2=2$, $a_4=a_5=3$. Следовательно, функция $g_1(x_1)$ примет вид

$$
\begin{gathered}
g_1(x_1)=g(x_1)-e^{-(x_1+1)}\theta(x_1+1)\Big[g(-1)+(x_1+1)\big(g'(-1)+g(-1)\big)+\\
+0{,}5(x_1+1)^2\big(g''(-1)+2g'(-1)+g(-1)\big)+\frac{1}{6}(x_1+1)^3\big(g'''(-1)+\\
+3g''(-1)+3g'(-1)+g(-1)\big)\Big].
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

Теперь построим функцию

$$
\begin{gathered}
g_2(x_1)=g_1(x_1)+e^{-(x_1-1)}\theta(x_1-1)\Big[g(1)+(x_1-1)\big(g'(1)+b_1g(1)\big)+0{,}5(x_1-1)^2\big(g''(1)+\\
+b_2g'(1)+b_3g(1)\big)+\frac{1}{6}(x_1-1)^3\big(g'''(1)+b_4g''(1)+b_5g'(1)+b_6g(1)\big)\Big],
\end{gathered} \tag{3.7}
$$

где коэффициенты b_k, $k=\overline{1;6}$ находятся из условий $g_2^{(k)}(1+0)=g_1^{(k)}(1-0)$, $k=\overline{0;3}$, то есть $g_2(x_1)\in C^3(\mathbb{R})$. Действуя так же, как и при нахождении коэффициентов a_k, $k=\overline{1;6}$ в представлении (3.1), получим, что $b_1=b_3=b_6=1$, $b_2=2$, $b_4=b_5=3$. Таким образом, равенство (3.7) примет вид

$$
\begin{gathered}
g_2(x_1)=g_1(x_1)+e^{-(x_1-1)}\theta(x_1-1)\Big[g(1)+(x_1-1)\big(g'(1)+g(1)\big)+\\
+0{,}5(x_1-1)^2\big(g''(1)+2g'(1)+g(1)\big)+\frac{1}{6}(x_1-1)^2\big(g'''(1)+3g''(1)+3g'(1)+g(1)\big)\Big].
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

Согласно представлениям (3.6) и (3.8), функция $g(x_1)$ представима в виде

$$
\begin{gathered}
g(x_1)=g_2(x_1)+e^{-(x_1+1)}\theta(x_1+1)\Big[g(-1)+(x_1+1)\big(g'(-1)+g(-1)\big)+\\
+0{,}5(x_1+1)^2\big(g''(-1)+2g'(-1)+g(-1)\big)+\frac{1}{6}(x_1+1)^3\big(g'''(-1)+3g''(-1)+\\
+3g'(-1)+g(-1)\big)\Big]-e^{-(x_1-1)}\theta(x_1-1)\Big[g(1)+(x_1-1)\big(g'(1)+g(1)\big)+\\
+0{,}5(x_1-1)^2\big(g''(1)+2g'(1)+g(1)\big)+\frac{1}{6}(x_1-1)^3\big(g'''(1)+3g''(1)+3g'(1)+g(1)\big)\Big]=\\
=g_2(x_1)+\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}e^{-\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)}\theta\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\sum_{m=0}^{3}(m!)^{-1}\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^m\sum_{l=0}^{m}C_m^l\,g^{(l)}\left((-1)^n\right),
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

где $g_2(x_1)\in C^3(\mathbb{R})$.

Если в качестве функции $g(x_1)$ в равенстве (3.9) использовать $q_p(x_1)$, $p=0;1$, тогда получим представления (0.9), где $q_{p,2}(x_1)\in C^3(\mathbb{R})$ при $p=0;1$, а функции $q_{p,1}(x_1)$, $p=0;1$, будут задаваться равенствами (0.10).

4. Задача о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с полуограниченной трещиной на их стыке

Задача (0.12)-(0.14) при $j=2$ описывает стационарное распределение тепла в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных различными неоднородными материалами. В данной задаче трещина на границе является полуограниченной, в отличие от задачи (0.1)-(0.3), и моделируется лучом $l_1=\left[-1;+\infty\right)\times\{0\}$.

Сделаем замены, аналогичные (0.4),

$$u_{p,2}(x_1,x_2)=e^{-0,5k_p x_2}v_{p,2}(x_1,x_2),\ p=1;2,\qquad v_{2,2}(x_1,x_2)=z_2(x_1,-x_2),\tag{4.1}$$

тогда, подставив данные представления в равенства (0.12)-(0.14) при $j=2$, получим следующую задачу относительно функций $v_{1,2}(x)$ и $z_2(x)$

$$\Delta v_{1,2}(x)-0,25k_1^2 v_{1,2}(x)=0,\ x\in\mathbb{R}_+^2,\tag{4.2}$$

$$\Delta z_2(x)-0,25k_2^2 z_2(x)=0,\ x\in\mathbb{R}_+^2,\tag{4.3}$$

$$v_{1,2}(x_1,+0)-z_2(x_1,+0)=q_{0,2}(x_1),\ x_1\in\mathbb{R},\tag{4.4}$$

$$-\frac{k_1}{2}v_{1,2}(x_1,+0)+\frac{\partial v_{1,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}z_2(x_1,+0)+\frac{\partial z_2(x_1,+0)}{\partial x_2}=q_{1,2}(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}.\tag{4.5}$$

Определение решения последней задачи полностью повторяет определение 1.1 главы 1 с точность до замены функций $v_1(x)$ и $z(x)$ на $v_{1,2}(x)$ и $z_2(x)$ и равенств (0.5)-(0.8) на (4.2)-(4.5) соответственно.

Введем в рассмотрение функции

$$V_{1,2}(x)=\begin{cases}v_{1,2}(x), & x_2>0,\\ v_{1,2}(x_1,-x_2), & x_2<0\end{cases}\ \text{и}\ V_{2,2}(x)=\begin{cases}z_2(x), & x_2>0,\\ z_2(x_1,-x_2), & x_2<0,\end{cases}\tag{4.6}$$

где $\left(v_{1,2}(x),z_2(x)\right)$ – решение задачи (4.2)-(4.5).

Повторяя рассуждения, приведенные в главе 1, несложно показать, что функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$ являются решениями следующих уравнений

$$\Delta V_{p,2}(x)-0,25k_p^2 V_{p,2}(x)=2\frac{\partial V_{p,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}\cdot\delta(x_2),\ p=1;2,\tag{4.7}$$

или эквивалентным им в $S'(\mathbb{R}^2)$

$$-\left(|s|^2+0,25k_p^2\right)F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_{p,2}(x)]=2F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_{p,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}\right],\ p=1;2,\ |s|^2=s_1^2+s_2^2. \quad (4.8)$$

Замечание 4.1. Аналогично тому, как показано для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ главы 1, можно получить, что функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$, а функции $V_{1,2}(x_1,+0)$, $V_{2,2}(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_{1,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial V_{2,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, от функций $V_{p,2}(x)$, $V_{p,2}(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_{p,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, существует преобразование Фурье в смысле замечания 0.5, причем $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_{p,2}(x)]$, где $p=1;2$, можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} w^0_{p,2}(s_1)=F_{x_1\to s_1}[V_{p,2}(x_1,+0)],\ w^1_{p,2}(s_1)=F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_{p,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}\right],\ \text{где}\ \ p=1;2; \\ P_{p,2}(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_{p,2}(x_1)],\ \text{где}\ p=0;1. \end{gathered} \quad (4.9)$$

Сформулируем лемму, которая является аналогом леммы 1.2.

Лемма 4.1. При $p=1;2$ решения уравнений (4.8) представимы в виде

$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_{p,2}(x)]=-\frac{2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}{|s|^2+k_p^2/4}\cdot\frac{P_{1,2}(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+k_{3-p}^2/4}+(-1)^p k_{3-p}/2\right)P_{0,2}(s_1)}{\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}+k_1/2+\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-k_2/2}.$$

Замечание 4.2. В ходе доказательства леммы 4.1 может быть установлено, что при $p=1;2$ справедливы представления (0.15), где $j=2$, и

$$w^1_{p,2}(s_1)=\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,\frac{P_{1,2}(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p0,5k_{3-p}\right)P_{0,2}(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}. \quad (4.10)$$

С учетом замечания 4.2, из леммы 4.1 получаем, что решения уравнений (4.7) будут задаваться равенствами

$$V_{p,2}(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2+0,25k_p^2\right)^{0,5}\left(|s|^2+0,25k_p^2\right)^{-1}w^0_{p,2}(s_1)\right],\ p=1;2,\quad (4.11)$$

где функции $w^0_{p,2}(s_1)$ задаются равенствами (0.15).

В (4.11) символ $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}$ обозначает обратное преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций (см. [40]).

Перейдем к доказательству существования решения у задачи (4.2)-(4.5). Для этого сформулируем и докажем несколько лемм.

Лемма 4.2. Для функций $P_{p,2}(s_1)$ с $p=0;1$, заданных в (4.9), где $q_{p,2}(s_1)\in\Im$, найдется такая положительная константа C, что будут справедливы следующие оценки

$$\left|P_{p,2}(s_1)\right|+\left|P_{p,2}{}'(s_1)\right|+\left|P_{p,2}{}''(s_1)\right|\le C\left(1+|s_1|\right)^{-4},\ p=0;1.$$

Замечание 4.3. Класс функций $\Im$ определен во введении.

Доказательство леммы 4.2. Так как $q_{p,2}(s_1)=0$, $x\le -1$ при $p=0;1$, то для функций $P_{0,2}(s_1)$ и $P_{1,2}(s_1)$ будут справедливы представления

$$P_{0,2}(s_1)=\int_{-1}^{\infty}e^{ix_1s_1}q_{0,2}(x_1)dx_1,\ P_{1,2}(s_1)=\int_{-1}^{\infty}e^{ix_1s_1}q_{1,2}(x_1)dx_1\,. \quad (4.12)$$

Из условий на функции $q_{0,2}(x_1)$ и $q_{1,2}(x_1)$ следует, что найдется такая положительная константа C, что при $s_1\in\mathbb{R}$ выполнены оценки

$$\left|P_{p,2}(s_1)\right|\le C,\ p=0;1. \quad (4.13)$$

Если $|s_1|>\delta$, где δ – некоторая положительная константа, то при помощи интегрирования по частям из (4.12) получаем, что

$$P_{p,2}(s_1)=e^{ix_1s_1}\left(is_1\right)^{-1}q_{0,2}(x_1)\Big|_{-1}^{\infty}-\left(is_1\right)^{-1}\int_{-1}^{\infty}e^{ix_1s_1}q'_{0,2}(x_1)dx_1 \quad (4.14)$$

при $p=0;1$. Первые слагаемые правый частей представлений (4.14) обнуляются в силу условий на функции $q_{p,2}(s_1)$, для оставшихся интегралов снова применим интегрирование по частям (данная процедура повторяется трижды). В результате, воспользовавшись оценками (4.13), имеем: есть такая константа $C>0$, что при $s_1\in\mathbb{R}$ выполняется оценка

$$\left|P_{p,2}(s_1)\right| \le C\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-4},\ p=0;1,\ \text{если}\ q_{p,2}(s_1)\in\Im. \tag{4.15}$$

Оценки для функций

$$P'_{p,2}(s_1)=\int_{-1}^{\infty}e^{ix_1s_1}ix_1q_{p,2}(x_1)dx_1,\ P''_{p,2}(s_1)=\int_{-1}^{\infty}e^{ix_1s_1}(-x_1^2q_{p,2}(x_1))dx_1,$$

где $p=0;1$, выводятся аналогично (4.15), стоит лишь отметить, что если $q_{p,2}(s_1)\in\Im$, то и функции $x_1q_{p,2}(x_1)$ и $x_1^2q_{p,2}(x_1)$ принадлежат классу $\Im$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. Для функций $w_{1,2}^0(s_1)$ и $w_{2,2}^0(s_1)$, заданных равенствами (0.15), где $q_{p,2}(s_1)\in\Im$ при $p=0;1$, найдется такая положительная константа c, что при $s_1\in\mathbb{R}$ будут выполнены оценки

$$\left|w_{p,2}^0(s_1)\right|+\left|(w_{p,2}^0(s_1))'\right|+\left|(w_{p,2}^0(s_1))''\right|\le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-4},\ \ p=1;2.$$

Доказательство проведем на примере функции $w_{1,2}^0(s_1)=$ $\dfrac{-P_{1,2}(s_1)+\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)P_{0,2}(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}$, для функции $w_{2,p}^0(s_1)$ оно проводится аналогично. Воспользовавшись видом функции $w_{1,2}^0(s_1)$ и оценками из леммы 4.2, получим, что $\left|w_{1,2}^0(s_1)\right|\le c\left(1+\left|s_1\right|\right)^{-4}$. Перейдем к оценке первой и второй производных функции $w_{1,2}^0(s_1)$. Из представления функции $w_{1,2}^0(s_1)$ имеем

$$\begin{aligned}(w_{1,2}^0(s_1))'=A_{1,2}(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}-\\ -B_{1,2}(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-2},\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}(w_{1,2}^0(s_1))''=A_{1,2}{}'(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}-\\ -A_{1,2}(s_1)s_1\left(\left(s_1^2+\frac{k_1^2}{4}\right)^{-0,5}+\left(s_1^2+\frac{k_2^2}{4}\right)^{-0,5}\right)\left(\left(s_1^2+\frac{k_1^2}{4}\right)^{0,5}+\frac{k_1}{2}+\left(s_1^2+\frac{k_2^2}{4}\right)^{0,5}-\frac{k_2}{2}\right)^{-2}-\\ -B_{1,2}{}'(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-2}+\\ +2B_{1,2}(s_1)s_1\left(\left(s_1^2+\frac{k_1^2}{4}\right)^{-0,5}+\left(s_1^2+\frac{k_2^2}{4}\right)^{-0,5}\right)\left(\left(s_1^2+\frac{k_1^2}{4}\right)^{0,5}+\frac{k_1}{2}+\left(s_1^2+\frac{k_2^2}{4}\right)^{0,5}-\frac{k_2}{2}\right)^{-3},\end{aligned} \tag{4.17}$$

где

$$A_{1,2}(s_1) = -P_{1,2}{}'(s_1) + s_1\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5} P_{0,2}(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2} - 0,5k_2\right) P_{0,2}{}'(s_1),$$

$$B_{1,2}(s_1) = \left(-P_{1,2}(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2} - 0,5k_2\right) P_{0,2}(s_1)\right) \cdot s_1\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5} + \left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5}\right),$$

$$A_{1,2}{}'(s_1) = -P_{1,2}{}''(s_1) + \left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5} P_{0,2}(s_1) + s_1\left(\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5} P_{0,2}{}'(s_1) -\right.$$

$$\left. - s_1\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-1,5} P_{0,2}(s_1)\right) + s_1\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5} P_{0,2}{}'(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2} - 0,5k_2\right) P_{0,2}{}''(s_1),$$

$$B_{1,2}{}'(s_1) = \left(-P_{1,2}{}'(s_1) + s_1\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5} P_{0,2}(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2} - 0,5k_2\right) P_{0,2}{}'(s_1)\right) \times$$

$$\times s_1\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5} + \left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5}\right) + \left(-P_{1,2}(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2} - 0,5k_2\right) P_{0,2}(s_1)\right) \times$$

$$\times\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5} - s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-1,5} + \left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-0,5} - s_1^2\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{-1,5}\right).$$

Из леммы 4.2 и вида функций $A_{1,2}(s_1)$, $B_{1,2}(s_1)$, $A'_{1,2}(s_1)$ и $B'_{1,2}(s_1)$ следует, что

$$\left|A_{1,2}(s_1)\right| + \left|B_{1,2}(s_1)\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}, \tag{4.18}$$

$$\left|A'_{1,2}(s_1)\right| + \left|B'_{1,2}(s_1)\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}. \tag{4.19}$$

Из (4.16), (4.18) вытекает, что $\left|(w_{1,2}^0(s_1))'\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-4}$, а из (4.17)-(4.19) – что $\left|(w_{1,2}^0(s_1))''\right| \le c\left(1+|s_1|\right)^{-4}$. Лемма доказана.

По аналогии с леммой 2.3 может быть доказана следующая лемма.

Лемма 4.4. Если $q_{p,2}(s_1) \in \Im$ при $p = 0;1$, то функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$, заданные равенствами (4.11), являются непрерывными и ограниченными в $\mathbb{R}^2$ функциями, которые можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу, а функции $V_{1,2}(x_1,+0)$ и $V_{2,2}(x_1,+0)$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Лемма 4.5. Если $q_{p,2}(s_1) \in \Im$ при $p = 0;1$, то функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$, заданные равенствами (4.11), принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Проведем его на примере функции $V_{1,2}(x)$, для функции $V_{2,2}(x)$ доказательство проводится аналогично.

Функция $V_{1,2}(x)$ представима в виде $V_{1,2}(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[A_1(s_1,s_2)]$, где

$A_1(s_1,s_2)=2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1{}^2\right)^{-1}w_{1,2}^0(s_1)$. Из леммы 2.4 вытекает, что для принадлежности $V_{1,2}(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ достаточно доказать, что функций $A_1(s_1,s_2)$, $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Воспользовавшись оценками из лемм 2.5 и 4.3, получаем, что

$$\left|A_1(s_1,s_2)\right|\le c\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-0,25}\left(1+|s_1|\right)\left|w_{1,2}^0(s_1)\right|\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-0,75}\le$$
$$\le c\left(1+|s_1|\right)^{-3,5}\left(1+|s_2|\right)^{-1,5},$$

следовательно, $A_1(s_1,s_2)\in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Вычислим $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$.

$$\frac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}=\frac{-4s_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1),$$

$$\frac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}=\left(-4\frac{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^2}+16\frac{s_2^2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^3}\right)w_{1,2}^0(s_1),$$

$$\frac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}=-4\left(\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-2}-4\frac{s_1\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^3}\right)w_{1,2}^0(s_1)-$$
$$-4\frac{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^2}(w_{1,2}^0(s_1))'+16\frac{s_2^2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^3}(w_{1,2}^0(s_1))'+$$
$$+16s_2^2\left(\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}-6\frac{s_1\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^4}\right)w_{1,2}^0(s_1),$$

$$\frac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}=-4\Bigg[\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}-s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-1,5}\right)\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-2}-$$
$$-4s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}\Bigg]w_{1,2}^0(s_1)-4s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-2}\times$$
$$\times(w_{1,2}^0(s_1))'+16\Bigg[\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}+s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\right)\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}-$$

$$-6s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-4}\Big]w_{1,2}^0(s_1)+16s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}\times$$

$$\times(w_{1,2}^0(s_1))'-4\Big[s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-2}-4s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}\Big]\times$$

$$\times(w_{1,2}^0(s_1))'-4\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-2}(w_{1,2}^0(s_1))''+16s_2^2\Big[\Big(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}-$$

$$-s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-1,5}\Big)\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}-6s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-4}\Big]w_{1,2}^0(s_1)+$$

$$+16s_1s_2^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}(w_{1,2}^0(s_1))'-96s_2^2\Big[\Big(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}+$$

$$+s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\Big)\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-4}-8s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-5}\Big]w_{1,2}^0(s_1)-$$

$$-96s_1s_2^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-4}(w_{1,2}^0(s_1))'+16s_2^2\Big[s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}\times$$

$$\times\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}-6s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-4}\Big](w_{1,2}^0(s_1))'+$$

$$+16s_2^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(s_1^2+s_2^2+0,25k_1^2\right)^{-3}(w_{1,2}^0(s_1))''.$$

Из лемм 2.5 и 4.3 и представлений $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$ имеем следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}\right|+\left|\frac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}\right|+\left|\frac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}\right|+\left|\frac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-4}\left(1+|s_2|\right)^{-2},$$

из которой следует, что $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}\in L_1(\mathbb{R}^2)$. Лемма доказана.

Согласно лемме 4.4 имеем, что если $q_{p,2}(s_1)\in\Im$ при $p=0;1$, то функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$ существуют, причем их можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу. С учетом равенства $F_{s_2\to x_2}^{-1}\left[2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}\left(|s|^2+0,25k^2\right)^{-1}\right]=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}$ при $x_2>0$ и произвольной константе $k>0$, которое упоминалось в главе 1, и представлений $V_{p,2}(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[F_{s_2\to x_2}^{-1}\left[2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\left(|s|^2+0,25k_p^2\right)^{-1}\right]w_{p,2}^0(s_1)\right]$, где $p=1;2$, находим, что

$$V_{p,2}(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2})\cdot w^0_{p,2}(s_1)\right],\ \ p=1;2. \tag{4.20}$$

Лемма 4.6. Если $q_{p,2}(s_1)\in\Im$ при $p=0;1$, то функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$ бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2_+$ и являются решениями уравнений (4.2) и (4.3) соответственно.

Доказательство этой леммы полностью повторяет доказательство леммы 2.7 с точностью до замены $V_p(x)$ на $V_{p,2}(x)$ и $w^0_p(s_1)$ на $w^0_{p,2}(s_1)$, где $p=1;2$ (применяются оценки из леммы 4.3).

Воспользовавшись (4.20) и теоремой о дифференцируемости интеграла по параметру (см. [44]), получаем, что при $x_2>0$ и $p=1;2$

$$\frac{\partial V_{p,2}(x)}{\partial x_1}=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_1s_1}\cdot\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\right)(-is_1)\,w^0_{p,2}(s_1)ds_1, \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial V_{p,2}(x)}{\partial x_2}=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_1s_1}\cdot\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\right)\cdot\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,w^0_{p,2}(s_1)ds_1. \tag{4.22}$$

Из леммы 4.3 вытекает, что равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\ge 0$ подынтегральные функции в (4.21) и (4.22) мажорируются функцией $c\left(1+|s_1|\right)^{-3}$, где c – некоторая положительная константа. Таким образом, если $q_{p,2}(s_1)\in\Im$ при $p=0;1$, то функции $\dfrac{\partial V_{1,2}(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_{2,2}(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_{1,2}(x)}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial V_{2,2}(x)}{\partial x_2}$ непрерывны и ограничены при $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\ge 0$, причем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{p,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}&=\frac{\partial V_{p,2}(x_1,0)}{\partial x_2}=-F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,w^0_{p,2}(s_1)\right]=\\&=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_1s_1}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\cdot w^0_{p,2}(s_1)ds_1,\ p=1;2.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Ограниченность функций $\dfrac{\partial^2 V_{1,2}(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 V_{2,2}(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 V_{1,2}(x)}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial^2 V_{2,2}(x)}{\partial x_2^2}$ при $x_2\ge\delta>0$ следует из представлений (4.20).

Лемма 4.7. Если $q_{p,2}(s_1)\in\Im$ при $p=0;1$, то $\dfrac{\partial V_{1,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial V_{2,2}(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Проведем его для функции $V_1(x)$, для функции $V_2(x)$ оно проводится аналогично. Воспользуемся представлениями (4.23) и покажем, что функции $\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)$, $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)'$ и $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, что и будет свидетельствовать о справедливости данной леммы (см. [43]).

Согласно результатам леммы 4.3, получаем, что функция $\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)'=s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}w_{1,2}^0(s_1)+\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}(w_{1,2}^0(s_1))',$$

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)''=\left(\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}-s_1^2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-1,5}\right)w_{1,2}^0(s_1)+$$
$$+s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}(w_{1,2}^0(s_1))'+s_1\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{-0,5}(w_{1,2}^0(s_1))'+\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}(w_{1,2}^0(s_1))''.$$

Из последних представлений и леммы 4.3 вытекает справедливость оценок

$$\left|\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)'\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-3},\ \left|\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)''\right|\le c\left(1+|s_1|\right)^{-3}.$$

Таким образом, $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)'$, $\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\cdot w_{1,2}^0(s_1)\right)''\in L_1(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Лемма 4.8. При $p=0;1$ справедливы равенства:

$$\lim_{x_2\to+0}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}\right)-\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\right)\right)w_{2,2}^p(s_1)\right]=0,$$

где функции $w_{2,2}^p(s_1)$ при $p=0;1$ заданы соответственно равенствами (4.9) и (4.10), в которых $q_{p,2}(s_1)\in\Im$.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 2.12.

Докажем, что функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$, заданные равенствами (4.11) удовлетворяют граничным условиям (4.4), (4.5).

Лемма 4.9. Если $q_{p,2}(s_1) \in \Im$ при $p=0;1$, то функции $V_{1,2}(x)$ и $V_{2,2}(x)$, заданные равенствами (4.11), удовлетворяют условиям (4.4) и (4.5).

Доказательство. При использовании представлений (4.20) и результатов леммы 4.3 аналогично тому, как сделано в лемме 2.13 может быть доказано, что при всех x_1 будут справедливы равенства

$$V_{p,2}(x) = \frac{k_p x_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_1\left(0,5k_p\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1\to y_1}[w^0_{p,2}(s_1)]dy_1 . \quad (4.24)$$

Воспользовавшись представлениями (4.24) и леммой 2.11, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(V_{1,2}(x_1,+\varepsilon)-V_{2,2}(x_1,+\varepsilon)\right) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[w^0_{1,2}(s_1)-w^0_{2,2}(s_1)\right].$$

Из последнего равенства, формул (4.9) и (0.15) следует, что (см. [43], [47])

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(V_{1,2}(x_1,+\varepsilon)-V_{2,2}(x_1,+\varepsilon)\right) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[P_{0,2}(s_1)\right] = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F_{x_1\to s_1}\left[q_{0,2}(x_1)\right]\right] = q_{0,2}(x_1).$$

Таким образом, выполнение граничного условия (4.4) доказано.

Для доказательства выполнения условия (4.5) необходимо воспользоваться леммой 4.8. Лемма доказана.

Полученные выше результаты сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 4.1. Если $q_{p,2}(s_1) \in \Im$ при $p=0;1$, то задача (4.2)-(4.5) имеет решение, причем для функций $v_{1,2}(x)$ и $z_2(x)$ справедливы следующие представления:

$$v_{1,2}(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{|s|^2+0,25k_1^2}w^0_{1,2}(s_1)\right], z_2(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}{|s|^2+0,25k_2^2}w^0_{2,2}(s_1)\right];$$

$$v_{1,2}(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}w^0_{1,2}(s_1)\right],\ z_2(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}w^0_{2,2}(s_1)\right];$$

$$v_{1,2}(x) = \frac{k_1 x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(0,5k_1\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w^0_{1,2}(s_1)\right]dy_1,$$

$$z_2(x) = \frac{k_2 x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(0,5k_2\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w^0_{2,2}(s_1)\right]dy_1,$$

где функции $w^0_{1,2}(s_1)$ и $w^0_{2,2}(s_1)$ задаются равенствами (0.15).

Замечание 4.4. Для того, чтобы восстановить решение задачи (0.12)-(0.14) при $j=2$ достаточно воспользоваться утверждением 4.1 и равенствами (4.1).

Из вышеизложенного рассмотрения задачи (0.12)-(0.14) при $j=2$ следует справедливость теоремы 0.2.

5. Задача (0.12)-(0.14) при $j=1$. Свойства обобщенного решения задачи (0.1)-(0.3)

Во введении было указано, что функции $V_{1,1}(x)$ и $V_{2,1}(x)$ являются четными, имеют следующие представления

$$V_{1,1}(x)=\begin{cases} v_{1,1}(x), & x_2>0, \\ v_{1,1}(x_1,-x_2), & x_2<0; \end{cases} \quad V_{2,1}(x)=\begin{cases} z_1(x), & x_2>0, \\ z_1(x_1,-x_2), & x_2<0 \end{cases} \tag{5.1}$$

и находятся из уравнений (0.18) в $S'(\mathbb{R}^2)$. Аналогично тому, как рассуждали при исследовании задач (0.5)-(0.8) или (0.12)-(0.14) при $j=2$, можно получить, что компоненты решения задачи (0.18) имеют вид

$$V_{p,1}(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2+0,25k_p^2\right)^{0,5}\left(|s|^2+0,25k_p^2\right)^{-1}w^0_{p,1}(s_1)\right],\ p=1;2, \tag{5.2}$$

где функции $w^0_{p,1}(s_1)$ при $p=1;2$ заданы равенствами (0.15).

Согласно представлениям (5.1) и (5.2), функции $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$ при $x_2>0$ представимы следующим образом:

$$v_{1,1}(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(|s|^2+0,25k_1^2\right)^{-1}w^0_{1,1}(s_1)\right], \tag{5.3}$$

$$z_1(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2+0,25k_2^2\right)^{0,5}\left(|s|^2+0,25k_2^2\right)^{-1}w^0_{2,1}(s_1)\right], \tag{5.4}$$

где функции $w^0_{p,1}(s_1)$ при $p=1;2$ заданы равенствами (0.15).

Сформулируем и докажем лемму о принадлежности вышеуказанных функций $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$ пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$.

Лемма 5.1. Функции $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$, заданные равенствами (5.3) и (5.4), принадлежат пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ и могут быть изучены при помощи сведения к повторному интегралу.

Доказательство проведем на примере функции $v_{1,1}(x)$, для функции $z_1(x)$ оно проводится аналогично.

Обозначим $\zeta(s_1,s_2)=2\left(s_1^2+0,25k_1^2\right)^{0,5}\left(|s|^2+0,25k_1^2\right)^{-1}w_{1,1}^0(s_1)$, то есть, согласно представлению (5.3), $v_{1,1}(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]$ при $x_2>0$. Заметим, что функция $\zeta(s_1,s_2)$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, поэтому ее преобразование Фурье также принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ (см. [44]). Рассмотрим последовательность функций $\zeta_k(s_1,s_2)=\zeta(s_1,s_2)\eta_k(s_1,s_2)$, принадлежащих пространству $L_2\left(\mathbb{R}_+^2\right)\cap L_1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ (см. [48]), где

$$\eta_k(s_1,s_2)=\begin{cases}1,-k\le s_1\le k,-k\le s_2\le k;\\ 0, \qquad |s_1|\ge k,|s_2|\ge k\end{cases} \text{ – срезающие функции.}$$

Очевидно, что $\left\|\zeta-\zeta_k\right\|_2\to 0$ при $k\to 0$.

Преобразование Фурье функции $\zeta(s_1,s_2)$ определяется следующим образом $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]=\lim\limits_{k\to\infty}F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right]$, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\left\|F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]-F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right]\right\|=0.$$

Очевидно, что

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right]=(2\pi)^{-2}\int_{-k\le s_1\le k,-k\le s_2\le k}\zeta_k(s_1,s_2)e^{-i(x,s)}ds=$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\left((2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\zeta_k(s_1,s_2)e^{-ix_1s_1}ds_1\right)e^{-ix_2s_2}ds_2=F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right]\right]=$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\left((2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\zeta_k(s_1,s_2)e^{-ix_2s_2}ds_2\right)e^{-ix_1s_1}ds_1=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right]\right].$$

Таким образом, справедливы равенства

$$v_{1,1}(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]=F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]\right].\quad(5.5)$$

Ранее уже использовалось равенство $F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[2\left(s_1^2+0,25k^2\right)^{0,5}\left(|s|^2+0,25k^2\right)^{-1}\right]=$ $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}$ (см. [45]), применим его еще раз, следовательно, воспользовавшись еще и представлением (5.5), получаем, что

$$v_{1,1}(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}\,w^0_{1,1}(s_1)\right]. \qquad (5.6)$$

Аналогично можно доказать, что для $z_1(x)$ справедливо представление $z_1(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}\,w^0_{2,1}(s_1)\right]$. Лемма доказана.

Замечание 5.1. Аналогично тому, как показано в предыдущей лемме, можно доказать, что компоненты решения задачи (4.2)-(4.5) функции $v_{1,2}(x)$ и $z_2(x)$ принадлежат пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$. Следовательно, вернувшись обратно к исходной задаче (0.1)-(0.3) с помощью замен (0.11), (4.1) и (0.17), получаем, что функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, а функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ – пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_-\right)$, где $\left(u_1(x),u_2(x)\right)$ – решение задачи (0.1)-(0.3).

Отказ от условий $q_p(-1)=q_p(1)=q'_p(-1)=q'_p(1)=0$ при $p=0;1$ не позволяет доказать выполнение граничных условий (0.2) и (0.3) по непрерывности аналогично тому, как это было сделано для задачи первой главы и задачи (0.12)-(0.14) при $j=2$, однако, можно доказать, что они выполнены в $L_2\left(\mathbb{R}\right)$.

Прежде сделаем некоторое замечание и докажем вспомогательную лемму.

Замечание 5.2. Легко доказать, что $O\left((1-is_1)^{-1}\right)=O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)$ при $s_1\in\mathbb{R}$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств

$$\left|(1-is_1)^{-1}\right|=\left(1+s_1^2\right)^{-0,5}=\sqrt{2}\left(2(1+s_1^2)\right)^{-0,5}\le\sqrt{2}\left(1+s_1^2+2s_1\right)^{-0,5}=\sqrt{2}(1+|s_1|)^{-1}.$$

Лемма 5.2. Для функций $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$, заданных равенствами (5.3) и (5.4), справедливы следующие равенства

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(v_{1,1}(x)-z_1(x)-q_{0,1}(x_1)\right)^2dx_1=0, \qquad (5.7)$$

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{k_1}{2}v_{1,1}(x)+\frac{\partial v_{1,1}(x)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}z_1(x)+\frac{\partial z_1(x)}{\partial x_2}-q_{1,1}(x_1)\right)^2dx_1=0. \qquad (5.8)$$

Доказательство. Согласно равенству Парсеваля (см. [45]) и представлениям (0.16), (5.3), (5.4), левая часть равенства (5.7) примет вид

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(v_{1,1}(x)-z_1(x)-q_{0,1}(x_1)\right)^2 dx_1 =$$
$$=(2\pi)^{-1}\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F_{x_1\to s_1}\left[v_{1,1}(x)\right]-F_{x_1\to s_1}\left[z_1(x)\right]-F_{x_1\to s_1}\left[q_{0,1}(x_1)\right]\right|^2 ds_1 =$$
$$=(2\pi)^{-1}\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}w_{1,1}^0(s_1)-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}w_{2,1}^0(s_1)-P_{0,1}(s_1)\right|^2 ds_1.$$

Применив равенство Парсеваля (см. [45]) также к равенству (5.8), получаем, что доказательство равенств (5.7) и (5.8) равносильно доказательству равенств

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|J_p(s_1,x_2)\right|^2 ds_1 = 0,\ p=1;2, \tag{5.9}$$

где $J_1(s_1,x_2)$ и $J_2(s_1,x_2)$ имеют вид

$$J_1(s_1,x_2)=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}w_{1,1}^0(s_1)-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}w_{2,1}^0(s_1)-P_{0,1}(s_1),$$
$$J_2(s_1,x_2)=-\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1\right)\cdot\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}\right)\cdot w_{1,1}^0(s_1)-$$
$$-\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)\cdot\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}\right)\cdot w_{2,1}^0(s_1)-P_{1,1}(s_1).$$

Заметим, что при $p=1;2$

$$\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}=0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}+|s_1|. \tag{5.10}$$

С учетом представлений (5.10), получаем, что $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}$, $p=1;2$ можно представить в виде

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}=e^{-x_2|s_1|}\cdot e^{-0,25x_2k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}},\ p=1;2. \tag{5.11}$$

Легко видеть, что $e^{-0,25x_2k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}}=1+O\left(x_2\left(1+|s_1|\right)^{-1}\right)$, где $p=1;2$, согласно формуле Тейлора (см. [47]). Тогда из представлений (5.11) и последних равенств получаем, что

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}=e^{-x_2|s_1|}+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right),\ \text{где}\ p=1;2. \tag{5.12}$$

С учетом представлений (0.15) и (5.12), $J_1(s_1,x_2)$ и $J_2(s_1,x_2)$ примут вид

$$J_1(s_1,x_2)=\left(w_{1,1}^0(s_1)-w_{2,1}^0(s_1)\right)\left(e^{-x_2|s_1|}+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)-P_{0,1}(s_1)=$$
$$=\left(e^{-x_2|s_1|}-1+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)P_{0,1}(s_1),$$

$$J_2(s_1,x_2)=-\left(\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1\right)w_{1,1}^0(s_1)+\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)w_{2,1}^0(s_1)\right)\left(e^{-x_2|s_1|}+\right.$$
$$\left.+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)-P_{1,1}(s_1)=\left(e^{-x_2|s_1|}-1+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)P_{1,1}(s_1),$$

то есть $J_{p+1}(s_1,x_2)=\left(e^{-x_2|s_1|}-1+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)P_{p,1}(s_1)$, где $p=0;1$.

Перейдем к оценкам $\left|J_{p+1}(s_1,x_2)\right|$, $p=0;1$. Согласно последним представлениям, справедливы следующие цепочки неравенств

$$\begin{aligned}\left|J_{p+1}(s_1,x_2)\right|&=\left|\left(e^{-x_2|s_1|}-1+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)P_{p,1}(s_1)\right|\le\\&\le\left(\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|+\left|O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right|\right)\left|P_{p,1}(s_1)\right|,\ \text{где } p=0;1.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Оценим $\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|$ при $x_2\to+0$. Заметим, что справедливо равенство $e^{-x_2|s_1|}-1=-x_2|s_1|\int_0^1 e^{-x_2|s_1|\xi}d\xi$, тогда $\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|^{\varepsilon}\le x_2^{\varepsilon}|s_1|^{\varepsilon}$ при некотором положительном ε. Следовательно, справедлива следующая оценка

$$\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|=\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|^{\varepsilon}\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|^{1-\varepsilon}\le x_2^{\varepsilon}|s_1|^{\varepsilon}\left(e^{-x_2|s_1|}+1\right)^{1-\varepsilon}\le 2^{1-\varepsilon}x_2^{\varepsilon}|s_1|^{\varepsilon}.\tag{5.14}$$

С учетом оценки (5.14), неравенства (5.13) можно продолжить следующим образом: $\left|J_{p+1}(s_1,x_2)\right|\le\left(2^{1-\varepsilon}x_2^{\varepsilon}|s_1|^{\varepsilon}+\left|O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right|\right)\left|P_{p,1}(s_1)\right|$, где $p=0;1$. Легко заметить, что $2^{1-\varepsilon}x_2^{\varepsilon}|s_1|^{\varepsilon}+\left|O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right|=\left|O\left(x_2^{\varepsilon}(1+|s_1|)^{\varepsilon}\right)\right|$, следовательно, для $\left|J_{p+1}(s_1,x_2)\right|$, где $p=0;1$, справедливы неравенства

$$\left|J_{p+1}(s_1,x_2)\right|\le\left|O\left(x_2^{\varepsilon}(1+|s_1|)^{\varepsilon}\right)\right|\left|P_{p,1}(s_1)\right|,\ p=0;1.\tag{5.15}$$

Согласно представлениям (0.10) и (0.16), имеем

$$P_{p,1}(s_1)=\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_p^{(l)}\left((-1)^n\right)\right)e^{(-1)^n is_1}(1+is_1)^{-m-1},\ p=0;1.\tag{5.16}$$

Из (5.16) и замечания 5.2 следует, что

$$P_{p,1}(s_1)=O\left((1+|s_1|)^{-1}\right),\ p=0;1.$$

Из (5.15), а также последних представлений получаем, что справедливы оценки

$$\left|J_p(s_1,x_2)\right| \le \left|O\left(x_2^{\varepsilon}(1+|s_1|)^{\varepsilon-1}\right)\right|,\ p=1;2. \tag{5.17}$$

Таким образом, воспользовавшись оценками (5.17) и определением $O\left(x_2^{\varepsilon}(1+|s_1|)^{\varepsilon-1}\right)$, имеем

$$\left|J_p(s_1,x_2)\right| \le c\left|x_2^{\varepsilon}(1+|s_1|)^{\varepsilon-1}\right| = cx_2^{\varepsilon}(1+|s_1|)^{\varepsilon-1},\ p=1;2, \tag{5.18}$$

где c – некоторая положительная константа. В последних оценках будем считать $\varepsilon<0{,}5$. Согласно неравенствам (5.18), получаем, что

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|J_p(s_1,x_2)\right|^2 ds_1 \le c^2 \lim_{x_2\to+0} x_2^{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|s_1|\right)^{2\varepsilon-2} ds_1 .$$

Заметим, что степень s_1 последнего подынтегрального выражения меньше -1, тогда $\lim\limits_{x_2\to+0} x_2^{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|s_1|\right)^{2\varepsilon-2} ds_1=0$, согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости (см. [40]), а из этого следует справедливость равенств (5.9). Лемма доказана.

Замечание 5.3. Для компонентов решения задачи (4.2)-(4.5) функций $v_{1,2}(x)$ и $z_2(x)$ справедливы равенства (5.7) и (5.8) с точностью до замены $v_{1,1}(x)$ на $v_{1,2}(x)$, $z_1(x)$ на $z_2(x)$, $q_{p,1}(x_1)$ на $q_{p,2}(x_1)$ при $p=0;1$. Таким образом, применив равенства (0.11), (4.1) и (0.17), получаем, что компоненты вектор-функции $\left(u_1(x),u_2(x)\right)$, являющейся решением задачи (0.1)-(0.3), удовлетворяют следующим равенствам

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_1(x_1,x_2)-u_2(x_1,-x_2)-q_0(x_1)\right)^2 dx_1=0,\ \lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-x_2)}{\partial x_2}-q_1(x_1)\right)^2 dx_1=0.$$

Результаты, указанные в замечаниях 5.1 и 5.3, доказывают справедливость теоремы 0.3.

6. Вспомогательные асимптотические леммы

Лемма 6.1. Справедливы следующие асимптотические разложения при $|s_1|\to+\infty$:

$$\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2\right)^{-1}=0{,}5(1+|s_1|)^{-1}+O(1+|s_1|)^{-2}, \tag{6.1}$$

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}= \\ =0,5+0,125\,(-1)^p(k_1+k_2)(1+|s_1|)^{-1}+O\left((1+|s_1|)^{-2}\right),\ p=1;2. \tag{6.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем представление (6.1). Сделаем замену $y=1+|s_1|$, тогда $|s_1|=y-1$. Так как $|s_1|\to+\infty$, то $y\to+\infty$. Левая часть равенства (6.1) примет вид

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sqrt{0,25k_1^2+(y-1)^2}+0,5k_1+\sqrt{0,25k_2^2+(y-1)^2}-0,5k_2\right)^{-1}=$$

$$=y^{-1}\left(\sqrt{1-2y^{-1}+O(y^{-2})}+0,5k_1y^{-1}+\sqrt{1-2y^{-1}+O(y^{-2})}-0,5k_2y^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=y^{-1}\left(2+O(y^{-1})\right)^{-1}=0,5y^{-1}+O(y^{-2}).$$

Вернемся к переменной s_1, получим равенство (6.1).

Перейдем к доказательству представлений (6.2). В дальнейшем будем полагать $p=1;2$. Применяя ту же замену, что и при доказательстве первого равенства, получим

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sqrt{0,25k_{3-p}^2+(y-1)^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{0,25k_1^2+(y-1)^2}+0,5k_1+\sqrt{0,25k_2^2+(y-1)^2}-0,5k_2\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sqrt{1-2y^{-1}+O(y^{-2})}+(-1)^p 0,5k_{3-p}y^{-1}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{1-2y^{-1}+O(y^{-2})}+0,5k_1y^{-1}+\sqrt{1-2y^{-1}+O(y^{-2})}-0,5k_2y^{-1}\right)^{-1}.$$

Пусть $\varepsilon=y^{-1}$, тогда $\varepsilon\to+0$, так как $|s_1|\to+\infty$. С учетом указанного соотношения между y и ε (а следовательно, между s_1 и ε), последнее равенство примет вид

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\varepsilon\right)\left(\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}+0,5k_1\varepsilon+\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}-0,5k_2\varepsilon\right)^{-1}.$$

Найдем первые 2 члена разложения последней дроби в ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon=0$ (см. [44]). Обозначим $f(\varepsilon)=\left(\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\varepsilon\right)\times$ $\left(\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}+0,5k_1\varepsilon+\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}-0,5k_2\varepsilon\right)^{-1}$, следовательно, $f(0)=0,5$. Перейдем к вычислению $f'(0)$. Из представления функции $f(\varepsilon)$ имеем

$$f'(\varepsilon)=\left[\left(-\left(1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right)^{-0,5}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}+0,5k_1\varepsilon+\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}-0,5k_2\varepsilon\right)-\left(-\left(1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right)^{-0,5}+0,5k_1-\left(1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right)^{-0,5}-0,5k_2\right)\times$$

$$\left.\times\left(\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\varepsilon\right)\right]\left(\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}+0,5k_1\varepsilon+\sqrt{1-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)}-0,5k_2\varepsilon\right)^{-2},$$

поэтому $f'(0)=0,125\left((-1)^p 2k_{3-p}-k_1+k_2\right)=(-1)^p 0,125(k_1+k_2)$. Таким образом, $f(\varepsilon)=0,5+(-1)^p 0,125(k_1+k_2)\varepsilon+O(\varepsilon^2)$. Вернемся к первоначальной переменной s_1, получим представления (6.2). Лемма доказана.

Лемма 6.2. Справедливы следующие асимптотические разложения при $p=1;2$ и $|s_1|\to+\infty$:

$$\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}=0,5+O\left((1+|s_1|)^{-1}\right),\quad(6.3)$$

$$\begin{gathered}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}\times\\ \times\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}=0,5|s_1|+0,125\,(-1)^p(k_1+k_2)|s_1|(1+|s_1|)^{-1}+O\left((1+|s_1|)^{-1}\right).\end{gathered}\quad(6.4)$$

Доказательство разложений (6.3) становится очевидным, если представить

$$\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+(-1)^{3-p}0,5k_p\right)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}-$$

$$-(-1)^{3-p}0,5k_p\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)^{-1}$$

и применить результаты леммы 6.1.

Для доказательства представлений (6.4) воспользуемся равенством (5.10), следовательно,

$$\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}=|s_1|+0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}=|s_1|+O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)$$

при $p=1;2$ и $|s_1|\to+\infty$. Остается лишь применить разложения (6.2). Лемма доказана.

Лемма 6.3. Справедливы следующие асимптотические разложения при $p=1;2$, $|s_1|\to+\infty$ и $|x_2|\to+0$:

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}=e^{-x_2|s_1|}-0,125k_p^2x_2e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-2}\right). \qquad (6.5)$$

Доказательство. Далее будем считать $p=1;2$. Рассмотрим

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}-e^{-x_2|s_1|}=e^{-x_2|s_1|}\left(e^{-x_2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}-|s_1|\right)}-1\right)=e^{-x_2|s_1|}\left(e^{-x_2\cdot0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}}-1\right).$$

Пусть $t\le0$, тогда справедливо $e^t=1+t+t^2\int_0^1(1-z)e^{tz}dz$, причем справедлива оценка $\left|t^2\int_0^1(1-z)e^{tz}dz\right|\le t^2$. Применим последнее разложение e^t для $e^{-x_2\cdot0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}}$ (действительно, $-x_2\cdot0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}\le0$), тогда

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}-e^{-x_2|s_1|}=e^{-x_2|s_1|}\left(-x_2\cdot0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}+x_2^2\left(O(1+|s_1|)^{-2}\right)\right). \qquad (6.6)$$

Преобразуем $0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}$:

$$0,25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}=\frac{0,25k_p^2}{(1+|s_1|)\left(2+O(1+|s_1|)\right)}=0,125k_p^2(1+|s_1|)^{-1}+O\left((1+|s_1|)^{-2}\right).$$

Воспользовавшись последним представлением, равенство (6.6) можно продолжить следующим образом

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}=e^{-x_2|s_1|}+e^{-x_2|s_1|}\left(-x_2\left(0,125k_p^2(1+|s_1|)^{-1}+O\left((1+|s_1|)^{-2}\right)\right)+x_2^2\left(O(1+|s_1|)^{-2}\right)\right)=$$

$$=e^{-x_2|s_1|}-0,125k_p^2x_2e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}+e^{-x_2|s_1|}(x_2^2-x_2)\cdot O\left((1+|s_1|)^{-2}\right)=$$

$$=e^{-x_2|s_1|}-0,125k_p^2x_2e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-2}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание 6.1. Согласно предыдущей лемме, $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}$ при $p=1;2$, $|s_1|\to+\infty$ и $|x_2|\to+0$ также можно представлять в виде

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}=e^{-x_2|s_1|}+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right),\ p=1;2. \tag{6.7}$$

В последующих вспомогательных леммах преобразование Фурье будет определяться в смысле замечания 0.5.

Лемма 6.4. Пусть $x_2>0$ и

$$\Lambda_p^n(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right]=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}ds_1,$$

где $n,p=1;2$, тогда функции $\Lambda_p^n(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}^2_+}$ при $n,p=1;2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись представлениями (6.7), выражения $\Lambda_p^n(x)$, где $n,p=1;2$, примут вид

$$\begin{aligned}\Lambda_p^n(x)&=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}ds_1=\\&=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}ds_1+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Сначала рассмотрим второе слагаемое в правой части (6.8), оценим его:

$$\left|(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1\right|\le cx_2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|s_1|\right)^{-2}ds_1\le c_1x_2.$$

Остается рассмотреть лишь первое слагаемое представлений (6.8)

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}ds_1=(2\pi)^{-1}\left(I_1(x)+I_2(x)\right), \tag{6.9}$$

где $I_1(x)=\int_{-\infty}^{-0}e^{-\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-is_1)^{-1}ds_1$, $I_2(x)=\int_{+0}^{+\infty}e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-is_1)^{-1}ds_1$.

Вычислим отдельно каждый интеграл из правой части (6.9), начнем с $I_2(x)$.

Обозначим $r=\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}$; $\cos\varphi=r^{-1}\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)$; $\sin\varphi=r^{-1}x_2$; $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\ge0$; $0\le\varphi\le\pi$, тогда интеграл $I_2(x)$ можно переписать в виде

$$I_2(x)=\int_{+0}^{+\infty} e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-is_1)^{-1}ds_1=\int_{+0}^{+\infty} e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)rs_1}(r-irs_1)^{-1}d\left(rs_1\right).$$

Введем в рассмотрение функции $r_1\left(\xi\right), r_2\left(\xi\right)\in C^{\infty}\left(\left[0;\infty\right)\right)$ такие, что

$$r_1\left(\xi\right)+r_2\left(\xi\right)\equiv 1;$$

$$r_1\left(\xi\right)=1 \text{ при } \xi\in\left[0;\delta\right],$$

$$r_2\left(\xi\right)=1 \text{ при } \xi\in\left[2\delta;\infty\right),$$

$$0\le r_1\left(\xi\right), r_2\left(\xi\right)\le 1.$$

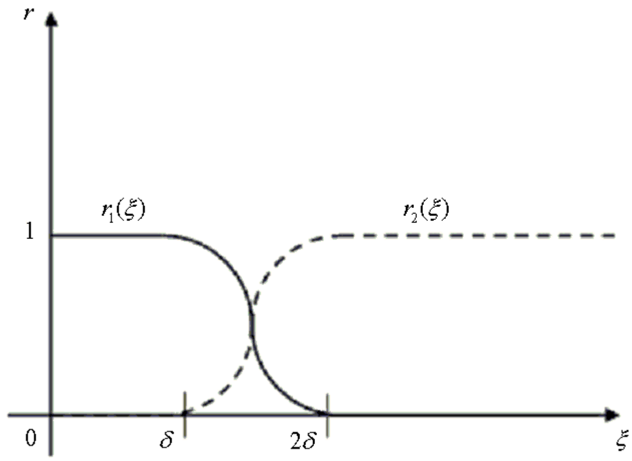

Рис. 1. Вид срезающих функций $r_1\left(\xi\right)$ и $r_2\left(\xi\right)$

Сделаем замены $\xi=rs_1$ и $1=r_1\left(\xi\right)+r_2\left(\xi\right)$, тогда интеграл $I_2(x)$ примет вид

$$I_2(x)=\int_{+0}^{+\infty}\left(r_1(\xi)+r_2(\xi)\right)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi=I_2^1(x)+I_2^2(x),$$

где $I_2^j=\int_{+0}^{+\infty} r_j(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r+i\xi)^{-1}d\xi$, $j=1;2$.

С учетом вида функции $r_2(\xi)$ и при помощи интегрирования по частям, получим, что интеграл I_2^2 примет вид

$$I_2^2=\int_{+0}^{+\infty} r_2(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi=\int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi=$$

$$=-\left(e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}r_2(\xi)(r-i\xi)^{-1}\Big|_{\delta}^{+\infty}-\int_{\delta}^{+\infty} r_2'(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi-\right.$$

$$\left.-i\int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-2}d\xi\right)\left(\sin\varphi+i\cos\varphi\right)^{-1}=I_2^{2,1}+I_2^{2,2},$$

где (с учетом $r_2'\left(\xi\right)=0$ при $\xi>2\delta$)

$$I_2^{2,1}=\left(\sin\varphi+i\cos\varphi\right)^{-1}\int_{\delta}^{2\delta}r_2'(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi,$$

$$I_2^{2,2}=i\left(\sin\varphi+i\cos\varphi\right)^{-1}\int_{\delta}^{+\infty}r_2(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-2}d\xi.$$

Оценим $\left|I_2^{2,1}\right|$ и $\left|I_2^{2,2}\right|$. Так как $\varphi\in[0;\pi]$, $\sin\varphi\geq 0$, $r_2(\xi)\in C^{\infty}\left([0;\infty)\right)$, $\left|r_2(\xi)\right|\leq C$ и $\left|\sin\varphi+i\cos\varphi\right|=1$, то получаем следующие цепочки неравенств

$$\left|I_2^{2,1}\right|=\left|\int_{\delta}^{2\delta}r_2'(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi\right|\leq\int_{\delta}^{2\delta}\left|r_2'(\xi)\right|e^{-\sin\varphi\xi}\left|\left(r-i\xi\right)^{-1}\right|d\xi\leq$$

$$\leq C\int_{\delta}^{2\delta}\left(r^2+\xi^2\right)^{-0,5}d\xi\leq C\int_{\delta}^{2\delta}\xi^{-1}d\xi=C\ln 2,$$

$$\left|I_2^{2,2}\right|=\left|i\left(\sin\varphi+i\cos\varphi\right)^{-1}\int_{\delta}^{+\infty}r_2(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-2}d\xi\right|\leq$$

$$\leq\int_{\delta}^{+\infty}\left|r_2(\xi)\right|\cdot\left|(r-i\xi)^{-2}\right|d\xi\leq C\int_{\delta}^{+\infty}(r^2+\xi^2)^{-1}d\xi\leq C\int_{\delta}^{+\infty}\xi^{-2}d\xi=C\delta^{-1}.$$

Таким образом, $I_2^{2,1}(x)$ и $I_2^{2,2}(x)$ – непрерывные и равномерно по $x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0$ ограниченные функции, следовательно, $I_2^2(x)$ – также непрерывная и равномерно по $x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0$ ограниченная функция.

Перейдем к I_2^1. Учитывая вид функции $r_1(\xi)$, получим

$$I_2^1=\int_{+0}^{+\infty}r_1(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi=\int_{+0}^{2\delta}r_1(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi=I_2^{1,0}+I_2^{1,1},$$

где $I_2^{1,0}=\int_{+0}^{\delta}e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi$, $I_2^{1,1}=\int_{\delta}^{2\delta}r_1(\xi)e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}(r-i\xi)^{-1}d\xi$.

Оценим интеграл $I_2^{1,1}$. Из представления функции $r_1(\xi)$ легко видеть, что $\left|r_1(\xi)\right|\leq C,\ \delta\leq\xi\leq 2\delta$, тогда $\left|I_2^{1,1}\right|\leq C\int_{\delta}^{2\delta}(r^2+\xi^2)^{-0,5}d\xi\leq C\int_{\delta}^{2\delta}\xi^{-1}d\xi=C\ln 2$. Данная оценка свидетельствует о том, что функция $I_2^{1,1}(x)$ непрерывна и равномерно по $x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0$ ограничена.

Перейдем к оценке интеграла $I_2^{1,0}$. Отметим, что

$$e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi}=1-\left(\sin\varphi+i\cos\varphi\right)\xi\int_0^1 e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi z}dz. \tag{6.10}$$

Обозначим $f(\xi,\varphi)=-\left(\sin\varphi+i\cos\varphi\right)\xi\int_0^1 e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)\xi z}dz$. Так как $\varphi\in[0;\pi]$, то

$\sin\varphi \ge 0$, следовательно, справедлива оценка: $\left|f(\xi,\varphi)\right| = \xi\int_0^1 e^{-\sin\varphi\xi z}dz \le \xi\int_0^1 dz = \xi$.

С помощью тождества (6.10) интеграл $I_2^{1,0}$ запишем в виде: $I_2^{1,0} = G_1 + G_2$, где $G_1 = \int_{+0}^{\delta}(r - i\xi)^{-1}\,d\xi$, $G_2 = \int_{+0}^{\delta} f(\xi,\varphi)(r - i\xi)^{-1}\,d\xi$.

Воспользовавшись полученной оценкой $f(\xi,\varphi)$, оценим G_2:

$$\left|G_2\right| \le \int_{+0}^{\delta}\left|f(\xi,\varphi)\right|(r^2+\xi^2)^{-0,5}\,d\xi \le \int_{+0}^{\delta}\xi(r^2+\xi^2)^{-0,5}\,d\xi \le \int_{+0}^{\delta}1\cdot d\xi = \delta.$$

Таким образом, функция $G_2(x)$ непрерывна и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \ge 0$ ограничена. Перейдем к $G_1 = \int_{+0}^{\delta}(r - i\xi)^{-1}\,d\xi = \int_{+0}^{\delta}(r + i\xi)(r^2+\xi^2)^{-1}\,d\xi = G_1^0 + G_1^1$, где $G_1^0 = r\int_{+0}^{\delta}(r^2+\xi^2)^{-1}\,d\xi = \operatorname{arctg}(r^{-1}\delta)$, $G_1^1 = i\int_{+0}^{\delta}\xi(r^2+\xi^2)^{-1}\,d\xi$. Так как $G_1^0 = \operatorname{arctg}(r^{-1}\delta) \in \left[-0,5\pi;0,5\pi\right]$, то функция $G_1^0(x)$ непрерывна и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \ge 0$ ограничена. Наконец, перейдем к G_1^1 и сделаем замену $y = \xi^2$, тогда

$$G_1^1 = i\int_{+0}^{\delta}\xi(r^2+\xi^2)^{-1}\,d\xi = 0,5i\int_{+0}^{\delta^2}(r^2+y)^{-1}\,dy = -0,5i\,\ln r^2 + 0,5i\,\ln\left(r^2+\delta^2\right).$$

Функция $0,5i\,\ln\left(r^2+\delta^2\right)$ непрерывна по $r = \sqrt{\left(x_1 + (-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2}$ и равномерно ограничена на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$. Выражение $-0,5i\,\ln r^2$ можно записать в виде $-i\,\ln r$.

Вернемся к интегралу $I_2(x)$. Из полученных выше результатов следует, что

$$I_2(x) = -i\,\ln\sqrt{\left(x_1 + (-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2} + h_{1,p}^n(x), \tag{6.11}$$

где функции $h_{1,p}^n(x)$, $n,p = 1;2$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Действуя так же, как и при рассмотрении интеграла $I_2(x)$, можно получить, что интеграл $I_1(x)$ представим в виде

$$I_1(x) = i\ln\sqrt{\left(x_1 + (-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2} + h_{2,p}^n(x), \tag{6.12}$$

где функции $h_{2,p}^n(x)$, $n,p = 1;2$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$.

Вернемся к равенству (6.9), с учетом представлений (6.11) и (6.12). При суммировании $I_1(x)$ и $I_2(x)$ выражение вида $\pm i \ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}$ исчезает. Следовательно, $\Lambda_p^n(x)=H_p^n(x)$, где функции $H_p^n(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$ при $n,p=1;2$. Лемма доказана.

Лемма 6.5. Пусть $x_2>0$ и

$$J_\tau^*(x)=\int_{+0}^{+\infty} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1+s_1)^{-1}ds_1\ ,\ \tau=1;2,$$

тогда при $|s_1|\to+\infty$ справедливы асимптотические разложения

$$J_\tau^*(x)=-\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+Jh_\tau^*(x),\ \tau=1;2,$$

где функции $Jh_\tau^*(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$ при $\tau=1;2$.

Доказательство. Далее везде будем считать $\tau=1;2$. Так же как и в лемме 6.4, обозначим $r=\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}$, $\sin\varphi=r^{-1}x_2$, $\cos\varphi=r^{-1}\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)$, тогда $J_\tau^*(x)$ примет вид

$$J_\tau^*(x)=\int_{+0}^{+\infty} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau\sin\varphi+i\cos\varphi\right)rs_1}(1+s_1)^{-1}ds_1=\int_{+0}^{+\infty} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau\sin\varphi+i\cos\varphi\right)rs_1}(r+rs_1)d\left(rs_1\right).$$

Сделаем замену переменной $\xi=rs_1$, то $J_\tau^*(x)=\int_{+0}^{+\infty} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau\sin\varphi+i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi$.

Как и при доказательстве предыдущей леммы, введем в рассмотрение функции $r_1(\xi),r_2(\xi)\in C^\infty([0;\infty))$ такие, что $r_1(\xi)+r_2(\xi)\equiv 1$; $r_1(\xi)=1$ при $\xi\in[0;\delta]$, $r_2(\xi)=1$ при $\xi\in[2\delta;\infty)$, $0\le r_1(\xi),r_2(\xi)\le 1$. Тогда $J_\tau^*(x)$ можно записать в виде

$$J_\tau^*(x)=\int_{+0}^{+\infty}\left(r_1(\xi)+r_2(\xi)\right)e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau\sin\varphi+i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi=J_{\tau,1}^*(x)+J_{\tau,2}^*(x),$$

где $J_{\tau,1}^*=\int_{+0}^{+\infty} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau\sin\varphi+i\cos\varphi\right)\xi}\dfrac{r_1(\xi)d\xi}{r+\xi}$, $J_{\tau,2}^*=\int_{+0}^{+\infty} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau\sin\varphi+i\cos\varphi\right)\xi}\dfrac{r_2(\xi)d\xi}{r+\xi}$. Из вида функций $r_1(\xi), r_2(\xi)$ следует, что $J^*_{\tau,1}=\int_{+0}^{2\delta} r_1(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} \dfrac{d\xi}{r+\xi}$,

$J^*_{\tau,2}=\int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} \dfrac{d\xi}{r+\xi}$. Преобразуем сначала $J^*_{\tau,2}$.

$$J^*_{\tau,2}=\int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi)\, e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} (r+\xi)^{-1} d\xi =$$

$$=(-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} \int_{\delta}^{+\infty} (r+\xi)^{-1} r_2(\xi)\, de^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} =$$

$$=(-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} (r+\xi)^{-1} r_2(\xi)\, e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}\Big|_{\delta}^{+\infty} +$$

$$+\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1}\left((r+\xi)^{-1} r_2'(\xi) - (r+\xi)^{-2} r_2(\xi)\right) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi=$$

$$=\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1}\left((r+\xi)^{-1} r_2'(\xi) - (r+\xi)^{-2} r_2(\xi)\right) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi.$$

Оценим $\left|\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} (r+\xi)^{-1} r_2'(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi\right|$.

Так как $\left|(-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\right| = 1$, то

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} (r+\xi)^{-1} r_2'(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi\right| \le$$

$$\le \int_{\delta}^{2\delta} \left|r_2'(\xi)\right| e^{-\sin\varphi\xi} \left(\left|r+\xi\right|\right)^{-1} d\xi.$$

Так как $\varphi \in [0;\pi]$, $\sin\varphi \ge 0$, $r_2 \in C^\infty$, $|r_2| \le C$, то оценку можно продолжить следующим образом:

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} (r+\xi)^{-1} r_2'(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi\right| \le$$

$$\le C\int_{\delta}^{2\delta} (r+\xi)^{-1} d\xi \le C\int_{\delta}^{2\delta} \xi^{-1} d\xi = C\left(\ln 2\delta - \ln\delta\right) = C\ln 2.$$

Таким образом, $\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} (r+\xi)^{-1} r_2'(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi$ – непрерывная и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \ge 0$ ограниченная функция. Перейдем к оценке $\left|\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} (r+\xi)^{-2} r_2(\xi)\, e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi\right|$, имеем:

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty} (-1)^{-\tau-1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1} (r+\xi)^{-2} r_2(\xi)\, e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^\tau \sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} d\xi\right| \le$$

$$\le \int_{\delta}^{+\infty} \left|(-1)^{-\tau-1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)^{-1}\right| \left|(r+\xi)^{-2}\right| \left|r_2(\xi)\right| d\xi \le$$

$$\le C\int_{\delta}^{+\infty}(r+\xi)^{-2}d\xi \le C\int_{\delta}^{+\infty}\xi^{-2}d\xi = C\delta^{-1}.$$

Следовательно, $J^*_{\tau,2}(x)$ непрерывная и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \ge 0$ ограниченная функция. Переходим к $J^*_{\tau,1}$.

$$J^*_{\tau,1} = \int_{+0}^{2\delta} r_1(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi =$$

$$= \int_{+0}^{\delta} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi + \int_{\delta}^{2\delta} r_1(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi.$$

Оценим интеграл $\int_{\delta}^{2\delta} r_1(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi$. Из представления $r_1(\xi)$ легко видеть, что $\left|r_1(\xi)\right| \le C$, $\delta \le \xi \le 2\delta$, тогда

$$\left|\int_{\delta}^{2\delta} r_1(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi\right| \le C\int_{\delta}^{2\delta}(r+\xi)^{-1}d\xi \le C\int_{\delta}^{2\delta}\xi^{-1}d\xi = C\ln 2.$$

Данная оценка свидетельствует о том, что $\int_{\delta}^{2\delta} r_1(\xi) e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi$ – непрерывная и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \ge 0$ ограниченная функция. Перейдем к оценке интеграла $\int_{+0}^{\delta} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi$, заметим, что

$$e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi} = 1 + (-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi\int_{0}^{1} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi z}dz. \quad (6.13)$$

Обозначим $f(\xi,\varphi) = (-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi\int_{0}^{1} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi z}dz$. Так как $\sin\varphi \ge 0$ при $\varphi \in [0;\pi]$, то справедлива оценка: $\left|f(\xi,\varphi)\right| = \xi\int_{0}^{1} e^{-\sin\varphi\xi z}dz \le \xi\int_{0}^{1}dz = \xi$.

С помощью тождества (6.13) интеграл $\int_{+0}^{\delta} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi$ запишем в виде: $\int_{+0}^{\delta} e^{(-1)^{\tau+1}\left((-1)^{\tau}\sin\varphi + i\cos\varphi\right)\xi}(r+\xi)^{-1}d\xi = \int_{+0}^{\delta}(r+\xi)^{-1}d\xi + \int_{+0}^{\delta}(r+\xi)^{-1}f(\xi,\varphi)d\xi$.

Оценим $\left|\int_{+0}^{\delta}(r+\xi)^{-1}f(\xi,\varphi)d\xi\right| \le \int_{+0}^{\delta}(r+\xi)^{-1}\left|f(\xi,\varphi)\right|d\xi \le \int_{+0}^{\delta}\xi(r+\xi)^{-1}d\xi \le \int_{+0}^{\delta}d\xi = \delta$.

Таким образом, функция $\int_{+0}^{\delta}(r+\xi)^{-1}f(\xi,\varphi)d\xi$ непрерывна и равномерно по

$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \geq 0$ ограничена. Перейдем к изучению $\int_{+0}^{\delta}(r+\xi)^{-1}d\xi = \ln\left(r+\xi\right)\Big|_{+0}^{\delta} =$ $\ln\left(r+\delta\right) - \ln r$. Функция $\ln\left(r+\delta\right)$ непрерывна по $r = \sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2}$ и равномерно ограничена на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Из вышеизложенных рассуждений следует требуемое представление интеграла $J_\tau^*(x)$. Лемма доказана.

Лемма 6.6. Пусть $x_2 > 0$ и

$$D_p^{n,1}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right],\ n,p=1;2,$$

тогда функции $D_p^{n,1}(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $n,p=1;2$.

Доказательство. В дальнейшем будем считать $n,p=1;2$. Из замечания 0.5 следует, что функции $D_p^{n,1}(x)$ имеют вид

$$D_p^{n,1}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\cdot\frac{\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)ds_1}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}.$$

Согласно лемме 6.1 и обозначениям леммы 6.4, последнее равенство примет вид

$$\begin{aligned}D_p^{n,1}(x) &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}\left(0,5+O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)\right)ds_1 = \\ &= (2\pi)^{-1}\Lambda_p^n(x) + (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1 .\end{aligned} \tag{6.14}$$

Оценим второе слагаемое в правой части равенства (6.14) при $x_2 > 0$

$$\left|(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1\right| \leq \frac{cx_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds_1}{(1+|s_1|)^2} \leq c_1x_2 . \tag{6.15}$$

Применение результатов леммы 6.4 и оценок (6.15) к выражениям (6.14) завершает доказательство справедливости представлений $D_p^{n,1}(x)$. Лемма доказана.

Лемма 6.7. Пусть $x_2 > 0$ и

$$\Psi_p^{n,1}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}(-is_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right],\ n,p=1;2,$$

тогда при $|s_1|\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические разложения

$$\Psi_p^{n,1}(x) = -(2\pi)^{-1}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\Psi h_p^{n,1}(x),\ n,p=1;2,$$

где функции $\Psi h_p^{n,1}(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $n,p=1;2$.

Доказательство. Далее пусть $n,p=1;2$. Функции $\Psi_p^{n,1}(x)$, согласно замечанию 0.5, можно записать в виде

$$\Psi_p^{n,1}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}(-is_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right]=$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}(-is_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}ds_1. \tag{6.16}$$

Воспользуемся очевидным равенством $-is_1(1-is_1)^{-1}=1-(1-is_1)^{-1}$, тогда представление (6.16) функции $\Psi_p^{n,1}(x)$ можно продолжить следующим образом

$$\Psi_p^{n,1}(x)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}ds_1}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}-$$
$$-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}ds_1.$$

Используем асимптотическое разложение (6.1), тогда последнее равенство можно продолжить следующим образом

$$\Psi_p^{n,1}(x)=(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1+|s_1|)^{-1}ds_1+$$

$$+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1} O\Big((1+|s_1|)^{-2}\Big)ds_1 -$$
$$-(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}(1+|s_1|)^{-1}ds_1 -$$
$$-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1} O\Big((1+|s_1|)^{-2}\Big)ds_1.$$

В первом слагаемом правой части последнего равенства вместо $e^{-x_2\sqrt{s_1{}^2+0,25k_p^2}}$ подставим его представление (6.7), имеем

$$\Psi_p^{n,1}(x) = (4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2|s_1|} e^{(-1)^n is_1}(1+|s_1|)^{-1}ds_1 +$$
$$+(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2|s_1|} e^{(-1)^n is_1}(1+|s_1|)^{-1} O\Big(x_2(1+|s_1|)^{-1}\Big)ds_1 +$$
$$+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1} O\Big((1+|s_1|)^{-2}\Big)ds_1 - \tag{6.17}$$
$$-(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1+is_1)^{-1}(1+|s_1|)^{-1}ds_1 -$$
$$-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1+is_1)^{-1} O\Big((1+|s_1|)^{-2}\Big)ds_1.$$

Заметим, что подынтегральные функции последних четырех слагаемых правой части равенства (6.17) равномерно на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$ мажорируется функцией $cx_2(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, сумма указанных интегралов является непрерывной и равномерно ограниченной функцией на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Перейдем к изучению первого интеграла равенства (6.17) и будем использовать обозначения леммы 6.5.

$$(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2|s_1|} e^{(-1)^n is_1}(1+|s_1|)^{-1}ds_1 = (4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-\left(-x_2+\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-s_1)^{-1}ds_1 +$$
$$+(4\pi)^{-1}\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x_2+\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1+s_1)^{-1}ds_1 = (4\pi)^{-1}\int_{0}^{+\infty} e^{\left(-x_2+\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1+s_1)^{-1}ds_1 +$$
$$+(4\pi)^{-1}\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x_2+\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1+s_1)^{-1}ds_1 = (4\pi)^{-1}\Big(J_1^*(x)+J_2^*(x)\Big) = \tag{6.18}$$
$$= -(2\pi)^{-1}\ln\sqrt{\Big(x_1+(-1)^{n+1}\Big)^2+x_2^2} + \Psi h_p^{n,1}(x),$$

где функция $\Psi h_p^{n,1}(x)$ непрерывна и равномерно ограничена на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

С учетом вышеуказанных рассуждений, получаем справедливость разложений леммы. Л е м м а д о к а з а н а.

Лемма 6.8. Пусть $x_2>0$ и

$$\Sigma_p^n(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\right], n,p=1;2,$$

тогда при $|s_1|\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические разложения

$$\Sigma_p^n(x)=\frac{x_2}{2\pi\left((x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2\right)}-(-1)^p\frac{k_1+k_2}{8\pi}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\Sigma h_p^n(x),\ n,p=1;2,$$

где $\Sigma h_p^n(x)$ – непрерывные и равномерно ограниченные на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ функции ($n,p=1;2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В дальнейшем будем полагать, что $n,p=1;2$.

$$\Sigma_p^n(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\right]=$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}\frac{\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}ds_1.$$

Воспользуемся разложением (6.2), тогда последнее равенство можно продолжить следующим образом

$$\Sigma_p^n(x)=(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}ds_1+$$
$$+(16\pi)^{-1}(-1)^p(k_1+k_2)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1+|s_1|)^{-1}ds_1+$$
$$+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}O\left((1+|s_1|)^{-2}\right)ds_1.$$

Применим асимптотические разложения $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}$ (6.5) в первом интеграле и (6.7) во втором интеграле последнего равенства, получим

$$\Sigma_p^n(x)=(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}ds_1-$$
$$-(32\pi)^{-1}k_p^2x_2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}ds_1+$$
$$+(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-2}\right)ds_1+$$

$$+(16\pi)^{-1}(-1)^p(k_1+k_2)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}ds_1+$$

$$+(16\pi)^{-1}(-1)^p(k_1+k_2)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1+$$

$$+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}O\left((1+|s_1|)^{-2}\right)ds_1=(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}ds_1-$$

$$-(32\pi)^{-1}\left(k_p^2x_2-2(-1)^p(k_1+k_2)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}ds_1+ \qquad (6.19)$$

$$+(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-2}\right)ds_1+$$

$$+(16\pi)^{-1}(-1)^p(k_1+k_2)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1+$$

$$+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}O\left((1+|s_1|)^{-2}\right)ds_1.$$

Очевидно, что подынтегральные функции последних трех слагаемых правой части равенства (6.19) равномерно на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ мажорируются функцией $cx_2(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, сумма указанных интегралов является непрерывной и равномерно ограниченной функцией на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Асимптотическое разложение интеграла второго слагаемого правой части равенства (6.19) с точностью до множителя $-0,125\left(k_p^2x_2-2(-1)^p(k_1+k_2)\right)$ было построено (см. (6.18)), то есть

$$-(32\pi)^{-1}\left(k_p^2x_2-2(-1)^p(k_1+k_2)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}ds_1=$$
$$=0,125\left(k_p^2x_2-2(-1)^p(k_1+k_2)\right)\left((2\pi)^{-1}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\Psi h_p^{n,1}(x)\right), \qquad (6.20)$$

где функция $\Psi h_p^{n,1}(x)$ непрерывна и равномерно ограничена на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Заметим, что функция $0,125k_p^2x_2\left((2\pi)^{-1}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\Psi h_p^{n,1}(x)\right)$ также является непрерывной и равномерно ограниченной на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Первый интеграл правой части равенства (6.19) вычислим в явном виде, разбивая промежуток интегрирования на два промежутка $(-\infty;0]$ и $[0;+\infty)$

$$(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}ds_1=(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}ds_1+$$

$$+(4\pi)^{-1}\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}ds_1=-(4\pi)^{-1}\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)^{-1}e^{-\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}\Big|_{-\infty}^{0}-$$

$$-(4\pi)^{-1}\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)^{-1}e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}\Big|_{0}^{+\infty}=-(4\pi)^{-1}\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)^{-1}+ \qquad (6.21)$$

$$+(4\pi)^{-1}\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)^{-1}=(2\pi)^{-1}x_2\left(\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2\right)^{-1}.$$

Из равенств (6.19)-(6.21) и вышеприведенных рассуждений следует, что

$$\Sigma_p^n(x)=(2\pi)^{-1}x_2\left(\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2\right)^{-1}-(8\pi)^{-1}(-1)^p(k_1+k_2)\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\Sigma h_p^{n,1}(x),$$

где функция $\Sigma h_p^n(x)$ непрерывна и равномерно ограничена на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Лемма доказана.

Лемма 6.9. Пусть $x_2>0$ и

$$\Phi_p^{n,\tau}(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(-is_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p0,5k_{3-p}\right)}{\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)(1-is_1)^\tau}\right],\ n,p,\tau=1;2,$$

тогда при $|s_1|\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические разложения

$$\Phi_p^{n,1}(x)=\frac{x_2}{2\pi\left(\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2\right)}+(-1)^{p+1}\frac{k_1+k_2}{8\pi}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\Phi h_p^{n,1}(x),$$

$$\Phi_p^{n,2}(x)=\Phi h_p^{n,2}(x),$$

где $n,p=1;2$, а функции $\Phi h_p^{n,\tau}(x)$ являются непрерывными и равномерно ограниченными на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $n,p,\tau=1;2$.

Доказательство. Пусть $n,p=1;2$. Воспользуемся очевидным равенством $-is_1(1-is_1)^{-\tau}=(1-is_1)^{-\tau+1}-(1-is_1)^{-\tau}$, где $\tau=1;2$, имеем

$$\Phi_p^{n,\tau}(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(-is_1)\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p0,5k_{3-p}\right)}{\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)(1-is_1)^\tau}\right]=$$

$$=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)(1-is_1)^{\tau-1}}\right]-$$
$$-F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)(1-is_1)^{\tau}}\right],\ \tau=1;2. \tag{6.22}$$

Если $\tau=1$, тогда воспользуемся разложением (6.2) и обозначением лемм 6.4 и 6.8, получим

$$\Phi_p^{n,1}(x)=\Sigma_p^n(x)-0,5\Lambda_p^n(x)-F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)\right]. \tag{6.23}$$

Так как выражение под преобразованием Фурье в равенстве (6.23) равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2>0$ мажорируются функцией $c(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, третье слагаемое правой части равенства (6.23) является непрерывной и равномерно ограниченной функцией при $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\ge 0$. Применение лемм 6.4 и 6.8 завершает доказательство справедливости первого разложения доказываемой леммы.

Теперь пусть $\tau=2$, следовательно, с учетом обозначений леммы 6.6, имеем

$$\Phi_p^{n,2}(x)=D_p^{n,1}(x)-F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2\right)(1-is_1)^2}\right]. \tag{6.24}$$

Заметим, что выражение под преобразованием Фурье в равенстве (6.24) равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2>0$ мажорируются функцией $c(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, второе слагаемое правой части последнего равенства является непрерывной и равномерно ограниченной функцией при $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\ge 0$. Очевидно, что второе асимптотическое представление леммы 6.9, согласно лемме 6.6, справедливо. Лемма доказана.

Лемма 6.10. Пусть $x_2>0$ и

$$T_p^{n,\tau}(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{(1-is_1)^{\tau}}\right],$$

где $n,p,\tau=1;2$, тогда при $|s_1|\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические разложения

$$T_p^{n,1}(x)=-\frac{x_1+(-1)^{n+1}}{2\pi\left((x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2\right)}+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\mathrm{T}h_p^{n,1}(x),\ n,p=1;2,$$

$$T_p^{n,2}(x)=-(2\pi)^{-1}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\mathrm{T}h_p^{n,2}(x),\ n,p=1;2,$$

где функции $\mathrm{T}h_p^{n,\tau}(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $n,p,\tau=1;2$.

Доказательство. В дальнейшем будем полагать $n,p=1;2$.

$$T_p^{n,\tau}(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p0,5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{(1-is_1)^\tau}\right]=$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p0,5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{(1-is_1)^\tau}ds_1$$

при $\tau=1;2$. Применим разложения (6.4), (6.5) и равенство $|s_1|(1+|s_1|)^{-1}=1-(1+|s_1|)^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned}T_p^{n,\tau}(x)=&-(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}|s_1|(1-is_1)^{-\tau}ds_1+\\&+(32\pi)^{-1}k_p^2x_2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1-is_1)^{-\tau}ds_1-\\&-(32\pi)^{-1}k_p^2x_2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}(1+|s_1|)^{-1}(1-is_1)^{-\tau}ds_1-\\&-(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}|s_1|(1-is_1)^{-\tau}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-2}\right)ds_1-\\&-(16\pi)^{-1}(-1)^p(k_1+k_2)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-\tau}ds_1+\\&+(16\pi)^{-1}(-1)^p(k_1+k_2)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1+|s_1|)^{-1}(1-is_1)^{-\tau}ds_1-\\&-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-\tau}O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1,\ \tau=1;2.\end{aligned}\tag{6.25}$$

Легко заметить, что подынтегральные выражения третьего, четвертого, шестого и седьмого слагаемых правых частей последних равенств при $\tau=1;2$ равномерно на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$ мажорируются функцией $cx_2(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, суммы указанных слагаемых являются непрерывными и равномерно ограниченными функциями на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$. Изучение оставшихся слагаемых будем проводить для каждого из случаев $\tau = 1$ и $\tau = 2$.

Пусть $\tau = 1$, тогда изучаемые слагаемые правой части равенства (6.25), с учетом обозначений леммы 6.4, равенств $s_1(1-is_1)^{-1} = i - i(1-is_1)^{-1}$ и (4.21), примут вид

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{(-1)^n is_1} e^{-x_2|s_1|} |s_1| (1-is_1)^{-1} ds_1 = \frac{i}{4\pi}\big(I_1(x) - I_2(x)\big) -$$
$$-\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1} ds_1 + \frac{i}{4\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1} ds_1 = \frac{i}{4\pi}\Big(h^n_{1,p}(x) - h^n_{2,p}(x)\Big) - \quad (6.26)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2} + \frac{1}{2\pi}\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\left(\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2\right)^{-1},$$

$$\frac{k_p^2 x_2}{32\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{(-1)^n is_1} e^{-x_2|s_1|}(1-is_1)^{-1} ds_1 = \frac{k_p^2 x_2}{32\pi}\big(I_1(x) + I_2(x)\big), \quad (6.27)$$

$$-(-1)^p\frac{k_1+k_2}{16\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1} e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1} ds_1 = -(-1)^p\frac{k_1+k_2}{8}\Lambda^n_p(x), \quad (6.28)$$

где функции $h^n_{1,p}(x)$ и $h^n_{2,p}(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$.

Таким образом, из представлений (6.25)-(6.28) и рассуждений, приведенных выше, следует, что

$$T^{n,1}_p(x) = -\frac{1}{2\pi}\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\left(\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2\right)^{-1} + \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2 + x_2^2} + Th^{n,1}_p(x),$$

где функция $\mathrm{T}h^{n,\tau}_p(x)$ непрерывна и равномерно ограничена на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$.

Перейдем к случаю $\tau = 2$, тогда первое слагаемое правой части равенства (6.25), с учетом равенства $s_1(1+is_1)^{-2} = -i(1+is_1)^{-1} + i(1+is_1)^{-2}$ и обозначений леммы 6.4, примет вид

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{(-1)^n is_1}e^{-x_2|s_1|}\left|s_1\right|(1-is_1)^{-2}ds_1=\frac{i}{4\pi}\big(I_2(x)-I_1(x)\big)+$$
$$+\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-is_1)^{-2}ds_1-\frac{i}{4\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-is_1)^{-2}ds_1=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\frac{i}{4\pi}\left(h_{2,p}^n(x)-h_{1p}^n(x)\right)+ \tag{6.29}$$
$$+\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-is_1)^{-2}ds_1-\frac{i}{4\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}(1-is_1)^{-2}ds_1,$$

где функции $h_{1,p}^n(x)$ и $h_{2,p}^n(x)$ являются непрерывными и равномерно ограниченными на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Заметим, что подынтегральные выражения последних двух слагаемых правой части равенства (6.29) и второго и пятого слагаемых правой части равенства (6.25) равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2>0$ мажорируются функцией $c(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, соответствующие компоненты сумм являются непрерывными и равномерно ограниченными функциями при $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\geq 0$. Из вышеизложенных рассуждений и представлений (6.25) и (6.29) следует, что

$$T_p^{n,2}(x)=-(2\pi)^{-1}\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+\mathrm{T}h_p^{n,2}(x),\ n,p=1;2,$$

где функции $\mathrm{T}h_p^{n,\tau}(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $n,p,\tau=1;2$. Лемма доказана.

Лемма 6.11. Пусть $x_2>0$ и

$$N_p^{n,1}(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right],\ n,p=1;2,$$

тогда функции $N_p^{n,1}(x)$ являются непрерывными и равномерно ограниченными на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $n,p=1;2$.

Доказательство. Пусть $n,p=1;2$. Согласно замечанию 0.5. имеем

$$N_p^{n,1}(x)=F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right]=$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}ds_1 .$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением (6.3) и обозначением леммы 6.4, получаем

$$N_p^{n,1}(x)=-0,5\Lambda_p^n(x)+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}\, e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1 .$$

Подынтегральное выражение второго слагаемого правой части последнего равенства равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2>0$ мажорируются функцией $c(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, $(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}\, e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-1}O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)ds_1$ является непрерывной и равномерно ограниченной функцией при $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\geq 0$. В дополнение к этому применение результатов леммы 6.4 завершает доказательство данной леммы. Лемма доказана.

7. Асимптотические представления компонентов решения задачи (0.1)-(0.3) и их первых производных

Согласно теореме 0.2, асимптотические представления компонентов решения задачи (0.1)-(0.3) и его первых производных вблизи концов трещины будут совпадать с соответствующими асимптотическими разложениями для задачи (0.12)-(0.14) при $j=1$.

Воспользовавшись результатами леммы 5.1 (представлением функции $v_{1,1}(x)$ в виде (5.6), и аналогичным для функции $z_1(x)$) и равенствами (0.15), (5.16) и (5.1), выражения $V_{p,1}(x)$, $\dfrac{\partial V_{p,1}(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_{p,1}(x)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, при $x_2>0$ примут вид

$$\begin{aligned}V_{p,1}(x)=&\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_1^{(l)}\left((-1)^n\right)\right)F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[M_{1,p,n,m}(s_1,x_2)\right]+\\&+(-1)^p\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_0^{(l)}\left((-1)^n\right)\right)F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)\right],\end{aligned}\tag{7.1}$$

$$\frac{\partial V_{p,1}(x)}{\partial x_j}=\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_1^{(l)}\left((-1)^n\right)\right)F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-(is_1)^{2-j}\left(s_1^2+0,25k_p^2\right)^{\frac{j-1}{2}}M_{1,p,n,m}(s_1,x_2)\right]+$$
$$+(-1)^p\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_0^{(l)}\left((-1)^n\right)\right)F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-(is_1)^{2-j}\left(s_1^2+0,25k_p^2\right)^{\frac{j-1}{2}}M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)\right], \tag{7.2}$$

где $p,j=1;2$, а $M_{\gamma,p,n,m}(s_1,x_2)$ при $\gamma,p,n=1;2$, $m=\overline{0;3}$ заданы равенствами

$$M_{\gamma,p,n,m}(s_1,x_2)=\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-m-1}\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)^{\gamma-1}}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}. \tag{7.3}$$

Замечание 7.1. В представлениях (7.1) и (7.2) преобразование Фурье понимается в смысле замечания 0.5.

Замечание 7.2. Выражения

$$M_{1,p,n,m}(s_1,x_2) \text{ при } p,n=1;2,\ m=\overline{0;3};$$

$$M_{2,p,n,m}(s_1,x_2) \text{ при } p,n=1;2,\ m=\overline{1;3};$$

$$-(is_1)M_{1,p,n,m}(s_1,x_2) \text{ при } p,n=1;2,\ m=\overline{1;3};$$

$$-(is_1)M_{2,p,n,m}(s_1,x_2) \text{ при } p,n=1;2,\ m=2;3;$$

$$-\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,M_{1,p,n,m}(s_1,x_2) \text{ при } p,n=1;2,\ m=\overline{1;3};$$

$$-\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,M_{1,p,n,m}(s_1,x_2) \text{ при } p,n=1;2,\ m=2;3$$

равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2>0$ мажорируются функцией $c(1+|s_1|)^{-2}$, где c – некоторая положительная константа, следовательно, является непрерывными и равномерно ограниченными любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ функциями.

Согласно обозначениям лемм 6.6-6.11, имеем при $p,n=1;2$ и $m=0;1$

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[M_{2,p,n,0}(s_1,x_2)\right]=D_p^{n,1}(x); \tag{7.4}$$

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-(is_1)M_{1,p,n,0}(s_1,x_2)\right]=\Psi_p^{n,1}(x),\ F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-(is_1)M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)\right]=\Phi_p^{n,m+1}(x); \tag{7.5}$$

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,M_{1,p,n,0}(s_1,x_2)\right]=N_p^{n,1}(x),$$
$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}\,M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)\right]=T_p^{n,m+1}(x). \tag{7.6}$$

Воспользовавшись замечанием 7.2, равенствами (7.4)-(7.6), леммами 6.6, 6.7, 6.9-6.11, представлениями (7.1), (7.2), (5.1) и (0.17) получаем следующие асимптотические разложения функций $u_{p,1}(x)$, $\dfrac{\partial u_{p,1}(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u_{p,1}(x)}{\partial x_2}$ вблизи точек $(\pm 1;0)$, где $p=1;2$

$$u_{p,1}(x)=R_{p,1}(x), \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{p,1}(x)}{\partial x_1}=\frac{e^{-0,5k_p x_2}}{2\pi}\Bigg(\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)}+\frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{-1}(x)\right)q_0(-1)-\\-\left(\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)}+\frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{+1}(x)\right)q_0(1)+\ln r_{-1}(x)\;q_1(-1)-\ln r_{+1}(x)\;q_1(1)\Bigg)+R_{p+2,1}(x),\end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{p,2}(x)}{\partial x_2}=\frac{e^{-0,5k_p x_2}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)+\frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)-\ln r_{-1}(x)\;q_0'(-1)+\ln r_{+1}(x)\;q_0'(1)\right)+\\+R_{p+4,1}(x),\end{aligned} \tag{7.9}$$

где $r_{-1}(x)=\sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2}$ и $r_{+1}(x)=\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}$, а функции $R_{1,1}(x)$, $R_{3,1}(x)$, $R_{5,1}(x)$ ($R_{2,1}(x)$, $R_{4,1}(x)$, $R_{6,1}(x)$) являются равномерно ограниченными на любом компакте $K_1\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ ($K_2\subset\overline{\mathbb{R}_-^2}$).

Из теоремы 0.2, представлений (7.7)-(7.9) следует справедливость теоремы 0.4.

ГЛАВА 3

ЗАДАЧА ТРАНСМИССИИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ОБЛАСТИ С ТРЕЩИНОЙ

8. Свойства решения вспомогательной задачи (0.27)-(0.30)

Задача (0.27)-(0.30) может быть изучена аналогичным образом, что и задача (0.5)-(0.8). Для компонентов ее решения $\left(\tilde{v}_1(x),\tilde{z}(x)\right)$ будут справедливы следующие утверждения, аналогичные теоремам 0.1, 0.3 и 0.4.

Утверждение 8.1. Если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q'_p(-1)=q'_p(1)=0$, то задача (0.27)-(0.30) имеет решение, причем для функций $\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{z}(x)$ справедливы следующие представления:

$$\tilde{v}_1(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1(0)}}{|s|^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1(0)}\tilde{w}_1^0(s_1)\right],\tilde{z}(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2(0)}}{|s|^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2(0)}\tilde{w}_2^0(s_1)\right];$$

$$\tilde{v}_1(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1(0)}}\tilde{w}_1^0(s_1)\right],\ \tilde{z}(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2(0)}}\tilde{w}_2^0(s_1)\right]; \qquad (8.1)$$

$$\tilde{v}_1(x)=\frac{\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_1(0)}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_1(0)\left(\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2\right)}\right)\cdot\left(\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2\right)^{-0,5}F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[\tilde{w}_1^0(s_1)\right]dy_1,$$

$$\tilde{z}(x)=\frac{\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_2(0)}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_2(0)\left(\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2\right)}\right)\cdot\left(\left(x_1-y_1\right)^2+x_2^2\right)^{-0,5}F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[\tilde{w}_2^0(s_1)\right]dy_1,$$

где $K_1(z)$ – функция Макдональда (см. [41]), $P_p(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_p(x_1)]$ при $p=0;1$, а

$$\tilde{w}_p^0(s_1)=-\frac{P_1(s_1)+(-1)^p\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_{3-p}(0)}P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1(0)}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2(0)}}\ \text{при}\ p=1;2.$$

Утверждение 8.2. Для компонентов вектор-функции $\left(\tilde{v}_1(x),\tilde{z}(x)\right)$, которая является решением задачи (0.27)-(0.30), справедливы следующие свойства:

1. функции $\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{z}(x)$ принадлежат пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$;

2. выполнены равенства

$$\lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\tilde v_1(x)-\tilde z(x)-q_0(x_1)\right)^2dx_1=0\,,\ \lim_{x_2\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\tilde v_1(x)}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde z(x)}{\partial x_2}-q_1(x_1)\right)^2dx_1=0\,.$$

Утверждение 8.3. Для компонентов вектор-функции $\left(\tilde v_1(x),\tilde z(x)\right)$, которая является решением задачи (0.27)-(0.30), и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек $(\pm1;0)$:

$$\tilde v_1(x)=\widehat R_1(x)\,,\qquad\qquad \tilde z(x)=\widehat R_2(x)\,,$$

$$\frac{\partial\tilde v_1(x)}{\partial x_1}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)-\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)+\ln r_{-1}(x)\;q_1(-1)-\ln r_{+1}(x)\;q_1(1)\right)+\widehat R_3(x)\,,$$

$$\frac{\partial\tilde z(x)}{\partial x_1}=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)+\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)+\ln r_{-1}(x)\;q_1(-1)-\ln r_{+1}(x)\;q_1(1)\right)+\widehat R_4(x)\,,$$

$$\frac{\partial\tilde v_1(x)}{\partial x_2}=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)+\frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)-\ln r_{-1}(x)\;q_0'(-1)+\ln r_{+1}(x)\;q_0'(1)\right)+\widehat R_5(x)\,,$$

$$\frac{\partial\tilde z(x)}{\partial x_2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)-\frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)+\ln r_{-1}(x)\;q_0'(-1)-\ln r_{+1}(x)\;q_0'(1)\right)+\widehat R_6(x)\,,$$

где $r_{-1}(x)=\sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2}$ и $r_{+1}(x)=\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}$, а функции $\widehat R_j(x)$ являются равномерно ограниченными на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $j=\overline{1;6}$.

Изучим асимптотическое поведение функций $\dfrac{\partial^2\tilde v_1(x)}{\partial x_2^2}$ и $\dfrac{\partial^2\tilde z(x)}{\partial x_2^2}$ вдали от концов трещины, например, в точках $(\pm2;0)$. Для краткости вместо $\tilde{\tilde k}_p(0)$ будем писать просто $\tilde{\tilde k}_p$ при $p=1;2$ (согласно замечанию 0.6, $\tilde{\tilde k}_p>0$, $p=1;2$). Для примера будем рассматривать только функцию $\dfrac{\partial^2\tilde v_1(x)}{\partial x_2^2}$, исследование функции $\dfrac{\partial^2\tilde z(x)}{\partial x_2^2}$ проводится аналогично.

Сформулируем и докажем лемму, аналогичную лемме 6.1.

Лемма 8.1. Справедливы следующие асимптотические разложения при $|s_1|\to+\infty$:

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\right)^{-1}=-\frac{0,5i}{1-is_1}-\frac{0,5i}{(1-is_1)^2}+O\left(\frac{1}{(1-is_1)^3}\right), \qquad (8.2)$$

$$\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\left(\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\right)^{-1}=0,5+\frac{\tilde{\tilde{k}}_1-\tilde{\tilde{k}}_2}{32}\cdot\frac{1}{(1+is_1)^2}+O\left(\frac{1}{(1+is_1)^3}\right). \ (8.3)$$

Доказательство. Сначала докажем разложение (8.2). Пусть $z=1-is_1$, тогда $|z|\to+\infty$ и $s_1^2=-(z-1)^2$, следовательно,

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\right)^{-1}=z^{-1}\left(\sqrt{\frac{\tilde{\tilde{k}}_1-4}{4}z^{-2}+2z^{-1}-1}+\sqrt{\frac{\tilde{\tilde{k}}_2-4}{4}z^{-2}+2z^{-1}-1}\right)^{-1}.$$

Обозначим $\tau=z^{-1}$, то $|\tau|\to 0$ и $\tau=(1-is_1)^{-1}$, поэтому выражение $\left(\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\right)^{-1}$ примет вид

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\right)^{-1}=\tau\eta(\tau), \qquad (8.4)$$

где $\eta(\tau)=\left(\eta_1(\tau)+\eta_2(\tau)\right)^{-1}$, $\eta_p(\tau)=\sqrt{0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_p-4\right)\tau^2+2\tau-1}$ при $p=1;2$. Заметим, что $\eta_p(0)=i$, $\eta'_p(0)=-i$ и $\eta''_p(0)=-0,25\tilde{\tilde{k}}_p i$ при $p=1;2$, тогда, согласно формуле Тейлора (см. [44]), имеем следующие разложения функций $\eta_p(\tau)$, где $p=1;2$, в окрестности нуля: $\eta_p(\tau)=i-i\tau-\frac{1}{8}\tilde{\tilde{k}}_p i\tau^2+O\left(\tau^3\right)$, $p=1;2$, поэтому функция $\eta(\tau)$ при $|\tau|\to 0$ примет вид

$$\eta(\tau)=\left(2i-2i\tau-\frac{1}{8}\left(\tilde{\tilde{k}}_1+\tilde{\tilde{k}}_2\right)i\tau^2+O\left(\tau^3\right)\right)^{-1}. \qquad (8.5)$$

Используя представление (8.5), несложно показать, что $\eta(0)=-0,5i$, $\eta'(0)=-0,5i$ и $\eta''(0)=-\left(1+\frac{1}{16}\left(\tilde{\tilde{k}}_1+\tilde{\tilde{k}}_2\right)\right)i$. Снова воспользовавшись формулой Тейлора (см. [44]), получим: $\eta(\tau)=-0,5i-0,5i\tau-0,5\left(1+\frac{1}{16}\left(\tilde{\tilde{k}}_1+\tilde{\tilde{k}}_2\right)\right)i\tau^2+O\left(\tau^3\right), |\tau|\to 0$. Из последнего представления, равенства (8.4) и $\tau=(1-is_1)^{-1}$ следует, что

$$\left(\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\right)^{-1}=-0,5i(1-is_1)^{-1}-0,5i(1-is_1)^{-2}-$$

$$-0,5\left(1+\frac{1}{16}\left(\tilde{\tilde{k}}_1+\tilde{\tilde{k}}_2\right)\right)i(1-is_1)^{-3}+O\left((1-is_1)^{-4}\right),\ |s_1|\to+\infty,$$

то есть первое разложение леммы справедливо. Осталось лишь заметить, что

$$\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\cdot\left(\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\right)^{-1}=\tau^{-1}\eta_2(\tau)\cdot\tau\eta(\tau)=\eta_2(\tau)\eta(\tau)=$$

$$=\left(i-i\tau-\frac{1}{8}\tilde{\tilde{k}}_2 i\tau^2+O\left(\tau^3\right)\right)\left(-0,5i-0,5i\tau-0,5\left(1+\frac{1}{16}\left(\tilde{\tilde{k}}_1+\tilde{\tilde{k}}_2\right)\right)i\tau^2+O\left(\tau^3\right)\right)=$$

$$=0,5+\frac{1}{32}\left(\tilde{\tilde{k}}_1-\tilde{\tilde{k}}_2\right)\tau^2+O\left(\tau^3\right).$$

где $\tau=(1-is_1)^{-1}$ и $|\tau|\to 0$. Таким образом, и разложение (8.3) верно. Лемма доказана.

Из представления (8.1) утверждения 8.1 и теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру (см. [44]) имеем

$$\frac{\partial^2\tilde{v}_1(x)}{\partial x_2^2}=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[(s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1)e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}\cdot\frac{-P_1(s_1)+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}}\right]=$$
$$=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1^2 e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}\cdot\frac{-P_1(s_1)+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}}\right]+0,25\tilde{\tilde{k}}_1\tilde{v}_1(x). \quad (8.6)$$

Некоторые свойства функции $\tilde{v}_1(x)$ приведены выше, поэтому будем изучать только первое слагаемое правой части равенства (8.6). Из представлений (5.16) и леммы 8.1 следует, что

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1^2 e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}\cdot\frac{-P_1(s_1)+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}}\right]=0,5i\cdot I_1(x)+0,5I_2(x)+$$
$$+0,5i\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_1^{(l)}\left((-1)^n\right)\right)\left(I_{m+8,n}(x)+I_{m+9,n}(x)+I_{m+3,n}(x)\right)+ \quad (8.7)$$
$$+0,5\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_0^{(l)}\left((-1)^n\right)\right)\left(I_{m+7,n}(x)+\frac{\tilde{\tilde{k}}_1-\tilde{\tilde{k}}_2}{16}I_{m+9,n}(x)+I_{m+3,n}(x)\right),$$

где $I_1(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, s_1^2 e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}\left((1-is_1)^{-1}+(1-is_1)^{-2}+O\left((1-is_1)^{-3}\right)\right)P_{1,2}(s_1)\,\right]$,

$$I_2(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, s_1^2 e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}\left(1+\frac{\tilde{\tilde{k}}_1-\tilde{\tilde{k}}_2}{16}\cdot(1-is_1)^{-2}+O\left((1-is_1)^{-3}\right)\right)P_{0,2}(s_1)\,\right],$$

$$I_{j+3,n}(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, s_1^2 e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}e^{(-1)^n is_1}O\left((1-is_1)^{-j-4}\right)\right],\ j=\overline{0;3},\ n=1;2,$$

$$I_{j+7,n}(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, s_1^2 e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-j-1}\right],\ j=\overline{0;5},\ n=1;2.$$

Будем исследовать каждое из слагаемых правой части равенства (8.7) отдельно. Воспользовавшись оценками леммы 4.2, можно заметить, что $|I_1(x)|$, $|I_2(x)|$, $|I_{j+3,n}(x)|$, где $j=\overline{0;3}$ и $n=1;2$, мажорируются $C\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|s_1|\right)^{-2}ds_1$, где C – некоторая положительная константа, а, следовательно, функции $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_{j+3,n}(x)$ являются непрерывными и равномерно ограниченными на $\overline{D_+}$, где $D_+=\left\{x=(x_1,x_2)\,\middle|\,|x_1|<2;0<x_2<2\right\}$, $j=\overline{0;3}$ и $n=1;2$. Таким образом, остается изучить поведение функций $I_{j+7,n}(x)$, где $j=\overline{0;5}$ и $n=1;2$.

Замечание 8.1. В настоящей главе будут использоваться обозначения леммы 6.4, в которой вместо k_p^2 записано $\tilde{\tilde{k}}_p$.

1. Пусть $j=0$ и далее будем считать $n=1;2$, тогда, применив очевидное равенство $s_1^2(1-is_1)^{-1}=1+is_1-(1-is_1)^{-1}$, обозначения леммы 6.4 и замечание 8.1, функция $I_{7,n}(x)$ примет вид

$$I_{7,n}(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}e^{(-1)^n is_1}\right]+i\cdot F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, s_1 e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}e^{(-1)^n is_1}\right]-\Lambda_1^n(x). \quad (8.8)$$

Ранее показали, что при $|s_1|\to+\infty$ и $x_2>0$ справедливы асимптотические разложения (см. (6.7))

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}}=e^{-x_2|s_1|}+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2\left(1+|s_1|\right)^{-1}\right)=e^{-x_2|s_1|}+O\left(\left(1+|s_1|\right)^{-2}\right),$$

используя которые, равенство (8.8) примет вид

$$I_{7,n}(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, e^{-x_2|s_1|}\, e^{(-1)^n is_1} \right] + F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, e^{(-1)^n is_1} O\Big(\big(1+|s_1|\big)^{-2}\Big) \right] +$$
$$+ i\cdot F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1\, e^{-x_2|s_1|}\, e^{(-1)^n is_1} \right] + i\cdot F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1\, e^{-x_2|s_1|} e^{(-1)^n is_1} O\Big(x_2\big(1+|s_1|\big)^{-1}\Big)\right] - \Lambda_1^n(x). \qquad (8.9)$$

Очевидно, что второе слагаемое правой части последнего равенства мажорирует-ся $C\int_{-\infty}^{+\infty}\big(1+|s_1|\big)^{-2}\, ds_1$, где C – некоторая положительная константа, а следовательно, является непрерывной и равномерно ограниченной на $\overline{D_+}$ функцией. Теперь оценим $\left| i\cdot F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1\, e^{-x_2|s_1|} e^{(-1)^n is_1} O\Big(x_2\big(1+|s_1|\big)^{-1}\Big)\right]\right|$.

$$\left| i\cdot F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1\, e^{-x_2|s_1|} e^{(-1)^n is_1} O\Big(x_2\big(1+|s_1|\big)^{-1}\Big)\right]\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} s_1 e^{-x_2|s_1|} e^{(-1)^n is_1} e^{-ix_1s_1} O\left(\frac{x_2}{1+|s_1|}\right) ds_1\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |s_1|\cdot\left|e^{-x_2|s_1|}\right|\cdot\left|e^{(-1)^n is_1}\right|\cdot\left|e^{-ix_1s_1}\right|\cdot\left|O\left(\frac{x_2}{1+|s_1|}\right)\right| ds_1 \le \frac{C_1x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|s_1|}{1+|s_1|}\cdot e^{-x_2|s_1|} ds_1 \le$$
$$\le 0{,}5C_1x_2\pi^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2|s_1|} ds_1 = C_1x_2\pi^{-1}\int_0^{+\infty} e^{-x_2s_1} ds_1 = -C_1\pi^{-1}\, e^{-x_2s_1}\Big|_{s_1=0}^{s_1=+\infty} = C_1\pi^{-1},$$

где C_1 – некоторая положительная константа, следовательно, четвертое слагаемое равенства (8.9) является непрерывной и равномерно ограниченной на $\overline{D_+}$ функцией. Остается исследовать только первое и третье слагаемые правой части равенства (8.9), а их можно вычислить в явном виде:

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\, e^{-x_2|s_1|}\, e^{(-1)^n is_1} \right] = \pi^{-1}x_2\left(x_2^2 + \big(x_1-(-1)^n\big)^2\right)^{-1}, \qquad (8.10)$$

$$i\cdot F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1\, e^{-x_2|s_1|}\, e^{(-1)^n is_1} \right] = 2\pi^{-1}x_2\big(x_1-(-1)^n\big)\left(x_2^2 + \big(x_1-(-1)^n\big)^2\right)^{-2}.$$

Вернемся к функций $I_{7,n}(x)$, представимой в виде (8.9). Из всего вышеизложенного следует, что

$$I_{7,n}(x) = \frac{x_2}{\pi}\left(x_2^2 + \big(x_1+(-1)^{n+1}\big)^2\right)^{-1} + \frac{2x_2}{\pi}\big(x_1+(-1)^{n+1}\big)\left(x_2^2 + \big(x_1+(-1)^{n+1}\big)^2\right)^{-2} + R_{2,1}(x), \qquad (8.11)$$

где функция $R_{2,1}(x)$ непрерывна и равномерно ограничена на $\overline{D_+}$.

2. Перейдем к исследованию функции $I_{8,n}(x)$ при $n=1;2$. Применив равенство $s_1^2(1-is_1)^{-2} = -1 + 2(1-is_1)^{-1} - (1-is_1)^{-2}$, обозначения леммы 6.4, замечание

8.1 и представление (8.10), имеем

$$I_{8,n}(x) = -\pi^{-1} x_2 \left(x_2^2 + \left(x_1 + (-1)^{n+1} \right)^2 \right)^{-1} + 2\Lambda_1^n(x) - F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-2} \right].$$

Замечание 8.2. Функции $F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-r-2} \right]$, где $r = 0;1;...$, являются непрерывными и равномерно ограниченными на $\overline{D_+}$.

Из леммы 6.4 и замечания 8.2 для $r = 0$ можно сделать вывод, что

$$I_{8,n}(x) = -\pi^{-1} x_2 \left(x_2^2 + \left(x_1 + (-1)^{n+1} \right)^2 \right)^{-1} + R_{2,2}(x), \tag{8.12}$$

где $R_{2,2}(x)$ – непрерывная и равномерно ограниченная на $\overline{D_+}$ функция.

3. Пусть $j = 2$ и $n = 1;2$, то $I_{9,n}(x) = F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[s_1^2\, e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-3} \right]$. Так как $s_1^2 (1 - i s_1)^{-3} = -(1 - i s_1)^{-1} + 2(1 - i s_1)^{-2} - (1 - i s_1)^{-3}$, тогда, с учетом обозначений леммы 6.4 и замечания 8.1, получаем $I_{9,n}(x) = -\Lambda_1^n(x) +$ $2F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-2} \right] - F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-3} \right]$. Применение леммы 6.4 и замечаний 8.1 и 8.2 для $r = 0;1$ дает следующее представление функции

$$I_{9,n}(x) = R_{2,3}(x), \tag{8.13}$$

где функция $R_{2,3}(x)$ непрерывна и равномерно ограничена на $\overline{D_+}$.

4. Теперь рассмотрим оставшиеся функции $I_{j+7,n}(x)$, то есть $j = 3;4;5$, $n = 1;2$. Так как $s_1^2 (1 - i s_1)^{-j-1} = -(1 - i s_1)^{-j+1} + 2(1 - i s_1)^{-j} - (1 - i s_1)^{-j-1}$ справедливо для $j = 3;4;5$, тогда $I_{j+7,n}(x)$ примут вид при $j = 3;4;5$, $n = 1;2$

$$I_{j+7,n}(x) = -F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-j+1} \right] +$$
$$+2F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-j} \right] - F^{-1}_{s_1 \to x_1} \left[e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} e^{(-1)^n i s_1} (1 - i s_1)^{-j-1} \right].$$

Применив замечание 8.2 для $r = \overline{0;4}$, имеем

$$I_{j+7,n}(x) = R_{2,j+1}(x),\ j = 3;4;5,\ n = 1;2, \tag{8.14}$$

где функции $R_{2,j+1}(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на $\overline{D_+}$ при $j=3;4;5$.

Вернемся к $F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1^2\, e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} \cdot \dfrac{-P_1(s_1)+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}\,P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}} \right]$, заданному равенством (8.6). Согласно представлениям (8.11)-(8.14) и рассуждениям о функциях $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_{j+3,n}(x)$ при $j=\overline{0;3}$ и $n=1;2$, получаем, что

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[s_1^2\, e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}} \cdot \frac{-P_1(s_1)+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}\,P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_1}+\sqrt{s_1^2+0,25\tilde{\tilde{k}}_2}} \right]=$$
$$=-0,5\pi^{-1}i\left(x_2r_{-1}^{-2}(x)q_1(-1)-x_2r_{+1}^{-2}(x)q_1(1)\right)+$$
$$+0,5\pi^{-1}\left(\left(x_2r_{-1}^{-2}(x)+2x_2\left(x_1+1\right)r_{-1}^{-4}(x)\right)q_0(-1)-\left(x_2r_{+1}^{-2}(x)+2x_2\left(x_1-1\right)r_{+1}^{-4}(x)\right)q_0(1)\right)-$$
$$-0,5\pi^{-1}\left(x_2r_{-1}^{-2}(x)q_0'(-1)-x_2r_{+1}^{-2}(x)q_0'(1)\right)+R_{2,7}(x),$$

где $r_{-1}(x)=\sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2}$, $r_{+1}(x)=\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}$, $R_{2,7}(x)$ – непрерывная и равномерно ограниченная на $\overline{D_+}$ функция.

Таким образом, воспользовавшись представлением (8.6) и утверждением 8.3, получаем, что

$$\frac{\partial^2\tilde{v}_1(\pm2,x_2)}{\partial x_2^2}=-0,5\pi^{-1}i\left(x_2r_{-1}^{-2}(\pm2,x_2)q_1(-1)-x_2r_{+1}^{-2}(\pm2,x_2)q_1(1)\right)+$$
$$+0,5\pi^{-1}\left(\left(x_2r_{-1}^{-2}(\pm2,x_2)+2\left(\pm2+1\right)x_2r_{-1}^{-4}(\pm2,x_2)\right)q_0(-1)-\right.$$
$$\left.-\left(x_2r_{+1}^{-2}(\pm2,x_2)+2\left(\pm2-1\right)x_2r_{+1}^{-4}(\pm2,x_2)\right)q_0(1)\right)-$$
$$-0,5\pi^{-1}\left(x_2r_{-1}^{-2}(\pm2,x_2)q_0'(-1)-x_2r_{+1}^{-2}(\pm2,x_2)q_0'(1)\right)+\widehat{R}_7(\pm2,x_2),$$

где функция $\widehat{R}_7(x)$ непрерывна и равномерно ограничена на $\overline{D_+}$.

Замечание 8.3. Легко заметить, что функции $x_2\left(x_2^2+c^2\right)^{-1}$ и $x_2\left(x_2^2+c^2\right)^{-2}$, где c – некоторая ненулевая константа, принадлежат $C(0;2)\cap L_2\left(0;2\right)$.

Применение замечания 8.3 для $c=\pm2\pm1$, а также условий, наложенных на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$, завершает доказательство следующего утверждения.

Утверждение 8.4. Функции $\dfrac{\partial^2 \tilde{v}_1(\pm 2, x_2)}{\partial x_2^2}$ и $\dfrac{\partial^2 \tilde{z}(\pm 2, x_2)}{\partial x_2^2}$, где $\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{z}(x)$ заданы равенствами (8.1), принадлежат пространству $C(0;2) \cap L_2(0;2)$.

9. Задача (0.31)-(0.35) при $j = 1$. Асимптотические представления компонентов ее решения и их первых производных вблизи концов трещины

С помощью замен (0.38) получим следующую задачу относительно функций $\tilde{v}_{1,1}(x)$ и $\tilde{z}_1(x)$

$$\Delta \tilde{v}_{1,1}(x) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\tilde{v}_{1,1}(x) = 0,\ x \in D_+,$$

$$\Delta \tilde{z}_1(x) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\tilde{z}_1(x) = 0,\ x \in D_+,$$

$$\tilde{v}_{1,1}(x_1, +0) - \tilde{z}_1(x_1, +0) = q_0(x_1),\ x_1 \in [-2;2],$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_{1,1}(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{z}_1(x_1, +0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in [-2;2],$$

$$\tilde{v}_{1,1}((-1)^p 2, x_2) = \tilde{v}_1((-1)^p 2, x_2),\ x_2 \in [0;2],\ p = 1;2,$$

$$\tilde{z}_1((-1)^p 2, x_2) = \tilde{z}((-1)^p 2, x_2),\ x_2 \in [0;2],\ p = 1;2,$$

вычитая из равенств которой соответствующие равенства задачи (0.27)-(0.30), относительно функций $\tilde{V}_1(x)$ и $\tilde{V}_2(x)$, указанных во введении, получим задачу (0.39)-(0.43).

Выпишем однородные уравнения, соответствующие (0.39) и (0.40),

$$\Delta \tilde{V}_p(x) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)\tilde{V}_p(x) = 0,\ x \in D_+,\ p = 1;2, \tag{9.1}$$

и будем искать их решения в виде $\tilde{V}_p(x) = A_p(x_1)B_p(x_2)$, $p = 1;2$. Подставим последние представления в (9.1) и разделим обе части получившихся равенств на $A_p(x_1)B_p(x_2)$ (ищем нетривиальное решение $A_p(x_1)B_p(x_2) \not\equiv 0$), получим

$$\frac{A_p''(x_1)}{A_p(x_1)} = -\frac{B_p''(x_2) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)B_p(x_2)}{B_p(x_2)},\ p = 1;2. \tag{9.2}$$

Здесь $|x_1| < 2,\ 0 < x_2 < 2$, $p = 1;2$. Левые части равенств (9.2) зависят только от x_1, а правые – только от x_2, так как равенства (9.2) определены для любых $x \in D_+$, где $D_+ = \{(x_1, x_2) \| |x_1| < 2; 0 < x_2 < 2\}$, то левые и правые части (9.2) не зависят ни от x_1, ни от x_2, то есть являются константой (см. [42]). Обозначим эту константу $-\lambda$, таким образом, получаем уравнения

$$\frac{A_p''(x_1)}{A_p(x_1)} = -\lambda, \qquad -\frac{B_p''(x_2) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)B_p(x_2)}{B_p(x_2)} = -\lambda,$$

где $p = 1; 2$. Следовательно, имеем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$A_p''(x_1) + \lambda A_p(x_1) = 0,\ p = 1; 2, \tag{9.3}$$

$$B_p''(x_2) - \left(0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2) + \lambda\right)B_p(x_2) = 0,\ p = 1; 2. \tag{9.4}$$

Выясним, как преобразуются граничные условия (0.43) при указанных представлениях функций $\tilde{V}_p(x)$, $p = 1; 2$. Так как предполагаем, что $B_p(x_2) \not\equiv 0$, где $p = 1; 2$, при $x_2 \in [0; 2]$, получим

$$A_p(-2) = A_p(2) = 0. \tag{9.5}$$

Таким образом, для нахождения функций $A_p(x_1)$ ($p = 1; 2$) имеем задачу (9.3), (9.5). Введем в рассмотрение функции $\tilde{A}_p(x_1) = A_p(x_1 - 2)$, $p = 1; 2$, тогда относительно $\tilde{A}_1(x_1)$ и $\tilde{A}_2(x_1)$ задача (9.3), (9.5) примет вид

$$\tilde{A}_p''(x_1) + \lambda\tilde{A}_p(x_1) = 0,\ x_1 \in (0; 4),\ p = 1; 2, \tag{9.6}$$

$$\tilde{A}_p(0) = \tilde{A}_p(4) = 0,\ p = 1; 2. \tag{9.7}$$

Ранее отмечалось, что ищем $A_p(x_2) \not\equiv 0$ при $p = 1; 2$, следовательно, $\tilde{A}_p(x_1) \not\equiv 0$ при $p = 1; 2$.

Пусть $p = 1; 2$. Характеристическое уравнение для (9.6) имеет вид $\alpha^2 + \lambda = 0$. В случае $\lambda \le 0$ только нулевая функция является решением задачи (9.6), (9.7); если же $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (9.6) имеет вид $\tilde{A}_p(x_1) = c_{1,p}\cos\left(\sqrt{\lambda}x_1\right) + c_{2,p}\sin\left(\sqrt{\lambda}x_1\right)$. Чтобы данная функции удовлетворяли условию (9.7), необходимо, чтобы $\left(c_{1,p}, c_{2,p}\right)$ было решением системы

$$\begin{cases} c_{1,p} = 0, \\ c_{1,p}\cos\left(4\sqrt{\lambda}\right) + c_{2,p}\sin\left(4\sqrt{\lambda}\right) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{1,p} = 0, \\ c_{2,p}\sin\left(4\sqrt{\lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

Разыскиваем нетривиальные решения $\tilde{A}_1(x_1)$ и $\tilde{A}_2(x_1)$, поэтому $c_{2,p} \neq 0$, следовательно, $\sin\left(4\sqrt{\lambda}\right) = 0$, то есть $\lambda = \left(\dfrac{\pi n}{4}\right)^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\lambda > 0$, то собственными значениями (см. [40]) задачи (9.6), (9.7) являются $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{4}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. При этом соответствующие собственные функции, определенные с точностью до произвольной постоянной, имеют вид $\tilde{A}_{p,n}(x_1) = \sin\dfrac{\pi n x_1}{4}$, $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $A_{p,n}(x_1) = \sin\dfrac{(x_1+2)\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому решения $\tilde{V}_p(x)$, $p = 1;2$, будем искать в виде

$$\tilde{V}_p(x) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} A_{p,n}(x_1)B_{p,n}(x_2) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} B_{p,n}(x_2)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}. \tag{9.8}$$

Но прежде разложим неоднородности уравнений (0.39) и (0.40) в ряды Фурье по синусам, то есть представим

$$0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0) - \tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\right)\tilde{v}_1(x) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} D_{1,n}(x_2)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}, \tag{9.9}$$

$$0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_2(0) - \tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\right)\tilde{z}(x) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} D_{2,n}(x_2)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}. \tag{9.10}$$

Замечание 9.1. Функции $0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0) - \tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\right)\tilde{v}_1(x)$ и $0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_2(0) - \tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\right)\tilde{z}(x)$ принадлежат классу $L_2[-2;2]$ по переменной x_1. Действительно, это вытекает из условий на функций $k_p(x_2)$, а следовательно, на функции $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$, где $p = 1;2$, и свойств для $\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{z}(x)$, сформулированных ранее.

Несложно показать, что коэффициенты Фурье в (9.9) и (9.10) определяются следующим образом

$$D_{1,n}(x_2)=0{,}125\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\right)\int_{-2}^{2}\tilde{v}_1(y,x_2)\sin\frac{(y+2)\pi n}{4}dy,\ n\in\mathbb{N},\qquad(9.11)$$

$$D_{2,n}(x_2)=0{,}125\left(\tilde{\tilde{k}}_2(0)-\tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\right)\int_{-2}^{2}\tilde{z}(y,x_2)\sin\frac{(y+2)\pi n}{4}dy,\ n\in\mathbb{N}.\qquad(9.12)$$

Подставив представления (9.8)-(9.10) в уравнения (0.39), (0.40) и условия (0.41), (0.42), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(B''_{p,n}(x_2)-0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)B_{p,n}(x_2)-D_{p,n}(x_2)\right)\cdot\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}=$$
$$=0,\ x\in D_+,\ p=1;2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{1,n}(+0)-B_{2,n}(+0)\right)\cdot\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}=0,\ x_1\in[-2;2],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(B_{1,n}\right)'(+0)+\left(B_{2,n}\right)'(+0)\right)\cdot\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}=0,\ x_1\in[-2;2].$$

Так как функции $\sin\frac{(x_1+2)\pi}{4}, \sin\frac{(x_1+2)\pi}{2}, \sin\frac{(x_1+2)3\pi}{4}, \ldots$ являются линейно независимыми, то функции $B_{p,n}(x_2)$, где $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, должны быть решениями следующих задач

$$B''_{p,n}(x_2)-0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)B_{p,n}(x_2)=D_{p,n}(x_2),\ x_2\in(0;2),\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ (9.13)$$

$$B_{1,n}(0)-B_{2,n}(0)=0,\ n\in\mathbb{N},\qquad(9.14)$$

$$\left(B_{1,n}\right)'(0)+\left(B_{2,n}\right)'(0)=0,\ n\in\mathbb{N}.\qquad(9.15)$$

Замечание 9.2. Позднее станет ясно, что функции $B_{p,n}(x_2)$ и $B'_{p,n}(x_2)$, $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, непрерывны в нуле, то есть $B_{p,n}(0)=B_{p,n}(+0)$ и $\left(B_{p,n}\right)'(0)=\left(B_{p,n}\right)'(+0)$ при $p=1;2$ и $n\in\mathbb{N}$.

Замечание 9.3. Из представлений (9.11), (9.12), свойств функций $\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{z}(x)$ и условий на функции $k_p(x_2)$ (а следовательно, на функции $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$) при $p=1;2$, несложно доказать, что $D_{p,n}(x_2)\in C(0;2)\cap L_2(0;2)$ при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$.

Сначала рассмотрим однородные уравнения, полученные из (9.13),

$$B''_{p,n}(x_2)-0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)B_{p,n}(x_2)=0,\ x_2\in(0;2),\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N}, \quad (9.16)$$

что эквивалентно системам

$$\begin{pmatrix} B_{p,n}(x_2) \\ B'_{p,n}(x_2) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_{p,n}(x_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{p,n}(x_2) \\ B'_{p,n}(x_2) \end{pmatrix},\ x_2\in(0;2),\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N}, \quad (9.17)$$

где $Q_{p,n}(x_2)=0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)$ при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$. Из условий на $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$ очевидно, что функции $Q_{p,n}(x_2)$ принадлежат пространству $C^\infty([0;2])$ ($p=1;2$). Кроме того, для конечного числа (обозначим n_0) натуральных n функции $Q_{p,n}(x_2)$, где $p=1;2$, могут принимать неположительные значения; если же $n>n_0$ ($n\in\mathbb{N}$), то $Q_{p,n}(x_2)>0$ на $[0;2]$ при $p=1;2$.

Сначала рассмотрим случай, когда $Q_{p,n}(x_2)\le 0$, $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$. Тогда уравнения (9.16) имеют по два линейно независимых решения (см. [49]), которые обозначим $B^{[1]}_{p,n}(x_2)$ и $B^{[2]}_{p,n}(x_2)$, причем $B^{[j]}_{p,n}(x_2)\in C^1([0;2])$, где $j,p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$.

Решение задачи (9.13)-(9.15) будем искать в виде

$$B_{p,n}(x_2)=C^{[1]}_{p,n}(x_2)B^{[1]}_{p,n}(x_2)+C^{[2]}_{p,n}(x_2)B^{[2]}_{p,n}(x_2),\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n\le n_0, \quad (9.18)$$

где функции $C^{[1]}_{p,n}(x_2)$ и $C^{[2]}_{p,n}(x_2)$ будем находить с помощью метода вариации постоянных, следовательно, функции $\left(C^{[1]}_{p,n}\right)'(x_2)$ и $\left(C^{[2]}_{p,n}\right)'(x_2)$ должны удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений (см. [40])

$$\begin{cases} \left(C^{[1]}_{p,n}\right)' B^{[1]}_{p,n} + \left(C^{[2]}_{p,n}\right)' B^{[2]}_{p,n} = 0, \\ \left(C^{[1]}_{p,n}\right)' \left(B^{[1]}_{p,n}\right)' + \left(C^{[2]}_{p,n}\right)' \left(B^{[2]}_{p,n}\right)' = -D_{p,n} \end{cases} \quad (9.19)$$

при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$. Так как решения $B^{[1]}_{p,n}(x_2)$ и $B^{[2]}_{p,n}(x_2)$ линейно независимы, то определители Вронского отличны от нуля

$$w_{p,n}(x_2)=\begin{vmatrix} B^{[1]}_{p,n}(x_2) & B^{[2]}_{p,n}(x_2) \\ \left(B^{[1]}_{p,n}\right)'(x_2) & \left(B^{[2]}_{p,n}\right)'(x_2) \end{vmatrix},\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n\le n_0.$$

Кроме того, имеет место тождество Остроградского-Лиувилля (см. [40]), $w_{p,n}(x_2)=w_{p,n}(0)=a_{p,n}=const$ при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$. Таким образом, компоненты решения $\left(\left(C_{p,n}^{[1]}\right)'(x_2),\left(C_{p,n}^{[2]}\right)'(x_2)\right)$ системы (9.19) имеют вид

$$\left(C_{p,n}^{[1]}\right)'(x_2)=\frac{D_{p,n}(x_2)B_{p,n}^{[2]}(x_2)}{a_{p,n}},\ \left(C_{p,n}^{[2]}\right)'(x_2)=-\frac{D_{p,n}(x_2)B_{p,n}^{[1]}(x_2)}{a_{p,n}},\qquad(9.20)$$

где $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$.

Решения $B_{p,n}(x_2)$, где $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$, должны удовлетворять условиям (9.14), (9.15), следовательно, согласно представлениям (9.18) и системам уравнений (9.19), функции $C_{p,n}^{[1]}(x_2)$ и $C_{p,n}^{[2]}(x_2)$, где $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$, должны удовлетворять следующим системам

$$\begin{cases}C_{1,n}^{[1]}(0)B_{1,n}^{[1]}(0)+C_{1,n}^{[2]}(0)B_{1,n}^{[2]}(0)-C_{2,n}^{[1]}(0)B_{2,n}^{[1]}(0)-C_{2,n}^{[2]}(0)B_{2,n}^{[2]}(0)=0,\\ C_{1,n}^{[1]}(0)\left(B_{1,n}^{[1]}\right)'(0)+C_{1,n}^{[2]}(0)\left(B_{1,n}^{[2]}\right)'(0)-C_{2,n}^{[1]}(0)\left(B_{2,n}^{[1]}\right)'(0)-C_{2,n}^{[2]}(0)\left(B_{2,n}^{[2]}\right)'(0)=0\end{cases}$$

при $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$. Положим $C_{1,n}^{[1]}(0)=C_{2,n}^{[1]}(0)=C_{1,n}^{[2]}(0)=C_{2,n}^{[2]}(0)=0$, получаем верные тождества в последней системе. Тогда, проинтегрировав равенства (9.20) по отрезку $[0;x_2]$, получаем представления функций $C_{p,n}^{[1]}(x_2)$ и $C_{p,n}^{[2]}(x_2)$

$$C_{p,n}^{[1]}(x_2)=\frac{1}{a_{p,n}}\int_0^{x_2}D_{p,n}(\xi)B_{p,n}^{[2]}(\xi)d\xi,\ C_{p,n}^{[2]}(x_2)=-\frac{1}{a_{p,n}}\int_0^{x_2}D_{p,n}(\xi)B_{p,n}^{[1]}(\xi)d\xi,\ (9.21)$$

где $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$. Следовательно, с учетом (9.18), получаем представления функций $B_{p,n}(x_2)$ при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$

$$B_{p,n}(x_2)=\int_0^{x_2}\frac{B_{p,n}^{[1]}(x_2)B_{p,n}^{[2]}(\xi)-B_{p,n}^{[1]}(\xi)B_{p,n}^{[2]}(x_2)}{a_{p,n}}D_{p,n}(\xi)d\xi,\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n\le n_0.$$

Таким образом, с учетом равенств (9.13), замечания 9.3 и вышеприведенных результатов, $B_{p,n}(x_2)\in C^2(0;2)$ при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$.

Теперь перейдем к изучению решений задач (9.13)-(9.15) при $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$ (то есть когда функции $Q_{p,n}(x_2)$ принимают лишь положительные значения на $[0;2]$ при $p=1;2$).

Подобно тому, как сделано в [50], можно доказать, что преобразования

$$B_{p,n}(x_2)=W_{1,p,n}(x_2)+W_{2,p,n}(x_2),$$

$$B'_{p,n}(x_2)=\left(\sqrt{Q_{p,n}(x_2)}-\frac{Q'_{p,n}(x_2)}{4Q_{p,n}(x_2)}\right)W_{1,p,n}(x_2)-\left(\sqrt{Q_{p,n}(x_2)}+\frac{Q'_{p,n}(x_2)}{4Q_{p,n}(x_2)}\right)W_{2,p,n}(x_2)$$

приводят системы (9.17) к виду

$$\begin{pmatrix}\left(W'_{1,p,n}\right)'\\ \left(W_{2,p,n}\right)'\end{pmatrix}=\left[\sqrt{Q_{p,n}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\frac{Q'_{p,n}}{4Q_{p,n}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_{p,n}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}W_{1,p,n}\\W_{2,p,n}\end{pmatrix},$$

где $\alpha_{p,n}=0{,}125Q''_{p,n}\left(Q_{p,n}\right)^{-1,5}-0{,}15625\left(Q'_{p,n}\right)^2\left(Q_{p,n}\right)^{-2,5}$, $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$. Подставляя представления $Q_{p,n}(x_2)$, получим для $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$

$$\alpha_{p,n}(x_2)=\frac{1}{4}\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)\right)''\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)^{-1,5}-\frac{5}{16}\left(\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)\right)'\right)^2\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)^{-2,5}.$$

Если в последней системе отбросить члены, содержащие $\alpha_{p,n}(x_2)$, то система распадется на два независимых уравнения для $p=1;2$. Укороченная система имеет решения $W^{[j]}_{p,n}(x_2)=B^0_{j,p,n}(x_{2,0},x_2)e_j$, $j=1;2$, где обозначено:

$$e_1=(1;0),\qquad\qquad e_2=(0;1);$$

$$B^0_{j,p,n}(x_{2,0},x_2)=\left(Q_{p,n}(x_2)\right)^{-0,25}e^{(-1)^j S_{p,n}(x_{2,0},x_2)};$$

$$S_{p,n}(x_{2,0},x_2)=\int_{x_{2,0}}^{x_2}\sqrt{Q_{p,n}(t)}dt\,.$$

Используя представления $Q_{p,n}(x_2)$, получим

$$B^0_{j,p,n}(x_{2,0},x_2)=\sqrt{2}\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)^{-0,25}e^{(-1)^j 0,5\int_{x_{2,0}}^{x_2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt},\ j=1;2.\quad(9.22)$$

Пусть $\rho_{p,n}(x_{2,0},x_2)=\left|\int_{x_{2,0}}^{x_2}\left|\alpha_{p,n}(t)\right|dt\right|$, тогда, воспользовавшись представлением $\alpha_{p,n}(x_2)$ и условием $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)\in C^\infty([0;2])$, получаем, что $\alpha_{p,n}(t)\le Cn^{-3}$, где C – некоторая постоянная, а следовательно, $\rho_{p,n}(x_{2,0},x_2)=O(x_2n^{-3})$ при $n\to+\infty$.

Аналогично тому, как сделано [50] (глава 2, §2), можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 9.1. Уравнение $B''_{p,n}(x_2) - Q_{p,n}(x_2)B_{p,n}(x_2) = 0$ имеет решения $B^{\{1\}}_{p,n}(x_2)$ и $B^{\{2\}}_{p,n}(x_2)$ такие, что при $x_2 \in (0;2)$

$$\left|\left(B^{\{1\}}_{p,n}(x_2)\right)\left(B^0_{1,p,n}(x_{2,0},x_2)\right)^{-1} - 1\right| \le 2\left(e^{2\rho_{p,n}(0,x_2)} - 1\right),$$

$$\left|\left(B^{\{2\}}_{p,n}(x_2)\right)\left(B^0_{2,p,n}(x_{2,0},x_2)\right)^{-1} - 1\right| \le 2\left(e^{2\rho_{p,n}(x_2,2)} - 1\right).$$

Замечание 9.4. Ранее получили, что $\rho_{p,n}(x_{2,0},x_2) = O(x_2 n^{-3})$, следовательно, $\rho_{p,n}(0,x_2) \le 0{,}5Cx_2 n^{-3}$, C – некоторая константа. Поэтому

$$e^{2\rho_{p,n}(0,x_2)} - 1 = 2\rho_{p,n}(0,x_2)\int_0^1 e^{2\rho_{p,n}(0,x_2)z}dz \le 2\rho_{p,n}(0,x_2)\int_0^1 e^{Cn^{-3}}dz \le C_1\rho_{p,n}(0,x_2),$$

где C_1 – некоторая константа, то есть

$$e^{2\rho_{p,n}(0,x_2)} - 1 = O\left(\rho_{p,n}(0,x_2)\right) = O(x_2 n^{-3})$$

при $n \to +\infty$. Аналогично доказывается:

$$e^{2\rho_{p,n}(x_2,2)} - 1 = O(x_2 n^{-3}),\ n \to +\infty.$$

Из утверждения 9.1 и замечания 9.4 можно сделать вывод, что

$$B^{\{j\}}_{p,n}(x_2) = B^0_{j,p,n}(x_{2,0},x_2)\left(1 + O\left(x_2 n^{-3}\right)\right),\ j,p = 1;2,\ n \to +\infty.$$

Выберем $x_{2,0} = 0$ при $j = 1$ и $x_{2,0} = 2$ при $j = 2$ в $B^0_{j,p,n}(x_{2,0},x_2)$, тогда, с учетом представлений (9.22), имеем для $n \to +\infty$

$$B^{\{1\}}_{p,n}(x_2) = \sqrt{2}\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2) + 0{,}25(\pi n)^2\right)^{-0,25} e^{-0,5\int_0^{x_2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t) + 0,25(\pi n)^2}dt}\left(1 + O\left(x_2 n^{-3}\right)\right), \quad (9.23)$$

$$B^{\{2\}}_{p,n}(x_2) = \sqrt{2}\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2) + 0{,}25(\pi n)^2\right)^{-0,25} e^{-0,5\int_{x_2}^{2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t) + 0,25(\pi n)^2}dt}\left(1 + O\left(x_2 n^{-3}\right)\right). \quad (9.24)$$

Замечание 9.5. Очевидно, что пары функций $B^{\{1\}}_{p,n}(x_2)$ и $B^{\{2\}}_{p,n}(x_2)$ являются линейно независимыми ($p = 1;2,\ n \in \mathbb{N},\ n > n_0$).

Аналогично тому, как было сделано при $n \in \mathbb{N}$, $n \le n_0$ можно построить решения задач (9.13)-(9.15) в виде $B_{p,n}(x_2) = C^{\{1\}}_{p,n}(x_2)B^{\{1\}}_{p,n}(x_2) + C^{\{2\}}_{p,n}(x_2)B^{\{2\}}_{p,n}(x_2)$ при $p = 1;2,\ n \in \mathbb{N},\ n > n_0$. Таким образом, получим следующие представления функций

$B_{p,n}(x_2)$ при $p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n>n_0$

$$B_{p,n}(x_2)=\int_0^{x_2}\frac{B^{\{1\}}_{p,n}(x_2)B^{\{2\}}_{p,n}(\xi)-B^{\{1\}}_{p,n}(\xi)B^{\{2\}}_{p,n}(x_2)}{a_{p,n}}D_{p,n}(\xi)d\xi= \\ =\int_0^{x_2}G_{p,n}(\xi,x_2)D_{p,n}(\xi)d\xi,\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n>n_0, \tag{9.25}$$

где

$$G_{p,n}(\xi,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_{p,n}}\left(B^{\{1\}}_{p,n}(x_2)B^{\{2\}}_{p,n}(\xi)-B^{\{1\}}_{p,n}(\xi)B^{\{2\}}_{p,n}(x_2)\right), & \xi\le x_2\le 2,\\ 0, & 0\le x_2\le\xi\end{cases} \tag{9.26}$$

являются функциями Грина при $p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n>n_0$ (см. [40]).

Таким образом, используя представления (9.8) и (9.25), получаем, что функции $\tilde V_1(x)$ и $\tilde V_2(x)$, являющиеся решением задачи (0.39)-(0.43), имеют вид

$$\tilde V_p(x)=\sum_{n=1}^{n_0}B_{p,n}(x_2)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2}G_{p,n}(\xi,x_2)D_{p,n}(\xi)d\xi\right)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}, \tag{9.27}$$

где $p=1;2$, а $D_{p,n}(\xi)$ при $p=1;2,\ n\in\mathbb{N}$ заданы равенствами (9.11), (9.12), а $G_{p,n}(\xi,x_2)$ при $p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n>n_0$ – равенствами (9.26).

Будем исследовать на непрерывность $\tilde V_p(x)$, $\dfrac{\partial\tilde V_p(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial\tilde V_p(x)}{\partial x_2}$ при $p=1;2$.

Так как при $p=1;2,\ n\in\mathbb{N},\ n\le n_0$ функции $B_{p,n}(x_2)$ принадлежат пространству $C^2(0;2)$, то нужно показать абсолютную сходимость рядов $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2}G_{p,n}(\xi,x_2)D_{p,n}(\xi)d\xi\right)\sin\dfrac{(x_1+2)\pi n}{4}$, где $p=1;2$, и их первых производных.

Замечание 9.6. Согласно равенствам (9.23), (9.24) и (9.26), при $\xi\le x_2\le 2$ имеем следующие представления функций Грина и их первых производных по переменной x_2 для $p=1;2,\ n\to+\infty$

$$G_{p,n}(\xi,x_2)=2\left(a_{p,n}\right)^{-1}\left(\left(\tilde{\tilde k}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)\left(\tilde{\tilde k}_p(\xi)+0,25(\pi n)^2\right)\right)^{-0,25}\left(1+O\left(x_2n^{-3}\right)\right)\times \\ \times\left(e^{-0,5\left(\int_0^{x_2}\sqrt{\tilde{\tilde k}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_\xi^2\sqrt{\tilde{\tilde k}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}-e^{-0,5\left(\int_0^{\xi}\sqrt{\tilde{\tilde k}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_{x_2}^2\sqrt{\tilde{\tilde k}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}\right),$$

$$\frac{\partial G_{p,n}(\xi,x_2)}{\partial x_2}=\frac{2}{a_{p,n}}\left(\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)\left(\tilde{\tilde{k}}_p(\xi)+0,25(\pi n)^2\right)\right)^{-0,25}\left(1+O\left(x_2n^{-3}\right)\right)\times$$

$$\times\left\{-\frac{0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_p\right)'(x_2)}{\tilde{\tilde{k}}_p^2(x_2)+0,25(\pi n)^2}\left(e^{-0,5\left(\int_0^{x_2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_\xi^2\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}-\right.\right.$$

$$\left.-e^{-0,5\left(\int_0^{\xi}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_{x_2}^2\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}\right)-0,5\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2}\times$$

$$\left.\times\left(e^{-0,5\left(\int_0^{x_2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_\xi^2\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}+e^{-0,5\left(\int_0^{\xi}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_{x_2}^2\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}\right)\right\}.$$

Проведем несколько вспомогательных оценок при $0<\xi\le x_2\le 2$ и $n\to+\infty$. В силу условий на функции $k_p(x_2)$ (следовательно, на функции $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$) при $p=1;2$, справедливы следующие неравенства

$$\left|\tilde{\tilde{k}}_p(0)-\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)\right|\le C,$$

$$\left(\left(\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2\right)\left(\tilde{\tilde{k}}_p(\xi)+0,25(\pi n)^2\right)\right)^{-0,25}<2\sqrt{2}(\pi n)^{-1},$$

$$\left|\frac{0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_p\right)'(x_2)}{\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2}\right|<C_1n^{-2},$$

$$0,5\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)+0,25(\pi n)^2}<0,5\pi n\left(1+C_2(\pi n)^{-2}\right),$$

$$e^{-0,5\left(\int_0^{x_2}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_\xi^2\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}<e^{-\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}(2+(x_2-\xi))}\le e^{-\frac{\pi n}{2\sqrt{2}}},$$

$$e^{-0,5\left(\int_0^{\xi}\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_{x_2}^2\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}<e^{-\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}(2-(x_2-\xi))},\qquad(9.28)$$

где C, C_1, C_2 – некоторые неотрицательные константы. Известно, что $e^{-\frac{\pi n}{2\sqrt{2}}}=O(n^{-\infty})$ при $n\to+\infty$. Теперь исследуем $e^{-\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}(2-(x_2-\xi))}$, введем новую переменную $t=\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}\left(2-(x_2-\xi)\right)\geq\frac{\pi n\xi}{4\sqrt{2}}$, тогда $e^{-\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}(2-(x_2-\xi))}=e^{-t}=t^{-0,5}\left(e^{-t}t^{0,5}\right)$. Функция $\tau(t)=e^{-t}t^{0,5}$ при положительном аргументе ограничена и принимает наибольшее значение в точке $t=0,5$, следовательно, $e^{-t}t^{0,5}\leq\left(2e\right)^{-0,5}$, поэтому $e^{-\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}(2-(x_2-\xi))}\leq\left(\frac{\pi en}{2\sqrt{2}}\right)^{-0,5}\left(2-x_2+z\right)^{-0,5}$. Таким образом, продолжив оценку (9.28), получаем

$$e^{-0,5\left(\int_0^z\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt+\int_{x_2}^2\sqrt{\tilde{\tilde{k}}_p(t)+0,25(\pi n)^2}dt\right)}<\left(\frac{\pi en}{2\sqrt{2}}\right)^{-0,5}\left(2-x_2+z\right)^{-0,5}.$$

Из приведенных выше неравенств получаем, что при $p=1;2$, $0<\xi\leq x_2\leq 2$ и $n\to+\infty$ справедливы следующие оценки для указанных функций Грина и их первых производных по переменной x_2

$$\left|G_{p,n}(\xi,x_2)\right|<C_3n^{-1,5}(2-x_2+z)^{-0,5}\left(1+O\left(x_2n^{-3}\right)\right), \tag{9.29}$$

$$\left|\frac{\partial G_{p,n}(\xi,x_2)}{\partial x_2}\right|<C_3n^{-0,5}(2-x_2+\xi)^{-0,5}\left(1+O\left(x_2n^{-2}\right)\right), \tag{9.30}$$

где C_3 – некоторая неотрицательная константа.

Перейдем к оценкам функций $D_{1,n}(\xi)$ (аналогичные неравенства можно получить для $D_{2,n}(\xi)$) при $0<\xi\leq x_2\leq 2$ и $n\to+\infty$. Пользуясь представлениями (9.11) и интегрированием по частям, имеем

$$\begin{gathered}D_{1,n}(\xi)=0,5\left(\pi n\right)^{-1}\left\{\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(\xi)\right)\left(v_1(-2,\xi)-\cos\left(\pi n\right)\cdot v_1(2,\xi)\right)+\right.\\ \left.+\int_{-2}^2\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(\xi)\right)\frac{\partial v_1(y,\xi)}{\partial y}\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy\right\}.\end{gathered} \tag{9.31}$$

Согласно условиям на функции $k_p(x_2)$, представлениям функций $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$ при $p=1;2$ и теореме Лагранжа (см. [47]), имеем $\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(\xi)=-\xi\left(\tilde{\tilde{k}}_1\right)'(\zeta)$, $\zeta\in\left(0;\xi\right)$.

В дополнение к этому равенству воспользуемся асимптотическим разложением первой производной функции $v_1(y,\xi)$ по переменной y, тогда интеграл в представлении (9.31) примет вид

$$\int_{-2}^{2}\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(\xi)\right)\frac{\partial v_1(y,\xi)}{\partial y}\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\tilde{\tilde{k}}_1\right)'(\zeta)\left\{q_0(-1)\int_{-2}^{2}\eta_1(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy-q_0(1)\int_{-2}^{2}\eta_2(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy+\right.$$
$$\left.+q_1(-1)\int_{-2}^{2}\eta_3(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy-q_1(1)\int_{-2}^{2}\eta_4(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy\right\}+ \tag{9.32}$$
$$+\int_{-2}^{2}\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(\xi)\right)\widehat{R}_3(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy,$$

где $\eta_j(y,\xi)=\xi^2\left(\left(y+(-1)^{j+1}\right)^2+\xi^2\right)^{-1}$, $\eta_{j+2}(y,\xi)=\xi\ln\sqrt{\left(y+(-1)^{j+1}\right)^2+\xi^2}$, $j=1;2$.

Очевидно, что $\left|\eta_j(y,\xi)\right|\le 1$, $\left|\eta_{j+2}(y,\xi)\right|\le\xi\ln\sqrt{9+\xi^2}$ при $y\in[-2;2]$, $j=1;2$.

Чтобы доказать ограниченность функций $\left|\eta_{j+2}(y,\xi)\right|\le\xi\ln\sqrt{9+\xi^2}$ при $\xi\in(0;x_2]$ рассмотрим два случая. Если $\delta\le\xi\le 2$, тогда $\xi\ln\sqrt{9+\xi^2}\le 2\ln\sqrt{13}<3$. Если же $0<\xi<\delta$, где δ – некоторая малая величина, тогда, с помощью правила Лопиталя (см. [47]), имеем

$$\lim_{\xi\to+0}\xi\ln\sqrt{9+\xi^2}=\lim_{\xi\to+0}\frac{\ln\sqrt{9+\xi^2}}{\xi^{-1}}=\lim_{\xi\to+0}\frac{-\xi^3}{9+\xi^2}=0.$$

Таким образом, при $y\in[-2;2]$ и $\xi\in(0;x_2]$ справедливы оценки

$$\left|\eta_j(y,\xi)\right|<3,\ j=\overline{1;4} \tag{9.33}$$

Согласно оценкам (9.33), условию гладкости функций $q_{p-1}(x_1)$ и $k_p(x_2)$ при $p=1;2$, представлениям (9.31), (9.32) и функций $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$, где $p=1;2$, и ограниченности функций $\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}$ при $n\in\mathbb{N}$ и $v_1(y,\xi)$, имеем оценку

$$\left|D_{1,n}(\xi)\right|<C_4 n^{-1},\ n\to+\infty, \tag{9.34}$$

где C_4 – некоторая постоянная. Вернемся к представлениям компонентов решения задачи (0.39)-(0.43). Согласно равенствам (9.27), оценкам (9.29), (9.30) и (9.34) при $p=1;2$ и $n\to+\infty$, получаем

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2} G_{p,n}(\xi,x_2)D_{p,n}(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right|\le$$

$$\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2}\left|G_{p,n}(\xi,x_2)\right|\left|D_{p,n}(\xi)\right|d\xi\right)\left|\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right|\le$$

$$\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}C_5 n^{-2,5}\left(\int_0^{x_2}(2-x_2+\xi)^{-0,5}\left(1+O\left(x_2 n^{-3}\right)\right)d\xi\right)\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}C_6 n^{-2,5}\left(1+O\left(n^{-3}\right)\right);$$

$$\left|\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2} G_{p,n}(\xi,x_2)D_{p,n}(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right)'_{x_1}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}0,25\pi n\left(\int_0^{x_2} G_{p,n}(\xi,x_2)D_{p,n}(\xi)d\xi\right)\cos\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right|\le$$

$$\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}0,25\pi n\left(\int_0^{x_2}\left|G_{p,n}(\xi,x_2)\right|\left|D_{p,n}(\xi)\right|d\xi\right)\left|\cos\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right|\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}C_6 n^{-1,5}\left(1+O\left(n^{-3}\right)\right);$$

$$\left|\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2} G_{p,n}(\xi,x_2)D_{p,n}(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right)'_{x_2}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left\{\left(\int_0^{x_2}\frac{\partial G_{p,n}(\xi,x_2)}{\partial x_2}D_{p,n}(\xi)d\xi\right)+G_{p,n}(x_2,x_2)D_{p,n}(x_2)\right\}\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2}\frac{\partial G_{p,n}(\xi,x_2)}{\partial x_2}D_{p,n}(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right|\le$$

$$\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2}\left|\frac{\partial G_{p,n}(\xi,x_2)}{\partial x_2}\right|\left|D_{p,n}(\xi)\right|d\xi\right)\left|\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right|\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}C_6 n^{-1,5}\left(1+O\left(n^{-2}\right)\right),$$

где C_5 и C_6 – некоторые постоянные.

Таким образом, ряды $\tilde{V}_p(x)$, $\frac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, абсолютно сходятся при $n\to+\infty$, следовательно, согласно признаку Вейерштрасса (см. [47]), они сходятся равномерно. Кроме того, члены каждого из этих рядов непрерывны на $\overline{D_+}$, тогда функции $\tilde{V}_p(x)$, $\frac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_2}$ при $p=1;2$ непрерывны на $\overline{D_+}$, (см. [47]), поэтому функции $\tilde{v}_{1,1}(x)$, $\tilde{z}_1(x)$, $\frac{\partial\tilde{v}_{1,1}(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\tilde{z}_1(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\tilde{v}_{1,2}(x)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\tilde{z}_1(x)}{\partial x_2}$ имеют такие же асимптотические представления вблизи точек $(\pm 1;0)$, что и функции $\tilde{v}_1(x)$, $\tilde{z}(x)$, $\frac{\partial \tilde{v}_1(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \tilde{z}(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \tilde{v}_1(x)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \tilde{z}(x)}{\partial x_2}$ соответственно. Использовав соотношения (0.38), можно построить соответствующие асимптотические представления функций $\tilde{u}_{p,1}(x)$ при $p=1;2$ и их первых производных.

10. Асимптотические разложения компонентов решения задачи (0.31)-(0.36) при $j=2$ и их первых производных

Использование замен (0.44) приводит задачу (0.31)-(0.36) при $j=2$ к виду

$$\Delta \tilde{v}_{1,2}(x) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\tilde{v}_{1,2}(x) = 0,\ x \in D_+, \tag{10.1}$$

$$\Delta \tilde{z}_2(x) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\tilde{z}_2(x) = 0,\ x \in D_+, \tag{10.2}$$

$$\tilde{v}_{1,2}(x_1,+0) - \tilde{z}_2(x_1,+0) = 0,\ x_1 \in [-2;2], \tag{10.3}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_{1,2}(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{z}_2(x_1,+0)}{\partial x_2} = 0,\ x_1 \in [-2;2], \tag{10.4}$$

$$\tilde{v}_{1,2}((-1)^p 2, x_2) = f_p(x_2) - \tilde{v}_1((-1)^p 2, x_2),\ x_2 \in [0;2],\ p=1;2, \tag{10.5}$$

$$\tilde{z}_2((-1)^p 2, x_2) = f_{p+2}(-x_2) - \tilde{z}((-1)^p 2, x_2),\ x_2 \in [0;2],\ p=1;2 \tag{10.6}$$

с условиями (0.36), которая может быть сведена с задаче (0.46)-(0.49) относительно функций $W_1(x)$ и $W_2(x)$, заданных равенствами (0.45), где

$$F_p(x) = \Phi_{0,p}(x_2) + x_1\Phi_{1,p}(x_2),\ p=1;2, \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{0,p}(x_2) = &-\Bigg[f''_{2p-1}((-1)^{p+1}x_2) - (2-p)\frac{\partial^2 \tilde{v}_1(-2,x_2)}{\partial x_2^2} - (p-1)\frac{\partial^2 \tilde{z}(-2,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ &+0,5\left(f''_{2p}((-1)^{p+1}x_2) - f''_{2p-1}((-1)^{p+1}x_2) - (2-p)\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_1(2,x_2)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_1(-2,x_2)}{\partial x_2^2}\right) - \right.\\ &\left. -(p-1)\left(\frac{\partial^2 \tilde{z}(2,x_2)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{z}(-2,x_2)}{\partial x_2^2}\right)\right) - 0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)\Big(f_{2p-1}((-1)^{p+1}x_2) - \\ &-(2-p)\tilde{v}_1(-2,x_2) - (p-1)\tilde{z}(-2,x_2) + 0,5\Big(f_{2p}((-1)^{p+1}x_2) - f_{2p-1}((-1)^{p+1}x_2) - \\ &-(2-p)\big(\tilde{v}_1(2,x_2) - \tilde{v}_1(-2,x_2)\big) - (p-1)\big(\tilde{z}(2,x_2) - \tilde{z}(-2,x_2)\big)\Big)\Big)\Bigg],\ p=1;2,\end{aligned} \tag{10.8}$$

$$\Phi_{1,p}(x_2)=-\frac{1}{4}\left[f''_{2p}((-1)^{p+1}x_2)-f''_{2p-1}((-1)^{p+1}x_2)-(2-p)\left(\frac{\partial^2\tilde v_1(2,x_2)}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\tilde v_1(-2,x_2)}{\partial x_2^2}\right)-\right.$$
$$-(p-1)\left(\frac{\partial^2\tilde z(2,x_2)}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\tilde z(-2,x_2)}{\partial x_2^2}\right)-0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)\Big(f_{2p}((-1)^{p+1}x_2)-f_{2p-1}((-1)^{p+1}x_2)- \quad (10.9)$$
$$\left.-(2-p)\big(\tilde v_1(2,x_2)-\tilde v_1(-2,x_2)\big)-(p-1)\big(\tilde z(2,x_2)-\tilde z(-2,x_2)\big)\Big)\right],\ p=1;2,$$

и $f_j(x_2)$, $j=\overline{1;4}$, удовлетворяют условиям (0.36). Таким образом, получили задачу, аналогичную (0.39)-(0.43), различия в правых частях уравнений (0.39), (0.40) и (0.46), следовательно, если изучать ее тем же способом, решения будут представимы в виде: $W_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde B_{p,n}(x_2)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}$, $p=1;2$, где функции $\tilde B_{p,n}(x_2)$ при $p=1;2$ и $n\in\mathbb{N}$ являются решениями задачи (9.13)-(9.14) с $\tilde D_{p,n}(x_2)$ вместо $D_{p,n}(x_2)$, где

$$\tilde D_{p,n}(x_2)=0,5\int_{-2}^{2}F_p(y,x_2)\sin\frac{\pi n(y+2)}{4}dy,\ p=1;2,\ n\in\mathbb{N}. \qquad (10.10)$$

Замечание 10.1. С учетом утверждения 8.4, представлений (10.7)-(10.9), а также условий на функции $f_j(x_2)$, где $j=\overline{1;4}$, и свойств $\tilde v_1(x)$ и $\tilde z(x)$, можно показать, что $F_p(x)$ принадлежат $L_2[-2;2]$ по переменной x_1 и $\tilde D_{p,n}(x_2)$ принадлежат $C(0;2)\cap L_2(0;2)$ при $p=1;2,\ n\in\mathbb{N}$.

С помощью равенств (10.7) преобразуем (10.10), имеем

$$\tilde D_{p,n}(x_2)=\frac{1}{2}\Phi_{p,1}(x_2)\int_{-2}^{2}\sin\frac{\pi n(y+2)}{4}dy+$$
$$+\frac{1}{2}\Phi_{p,2}(x_2)\int_{-2}^{2}y\sin\frac{\pi n(y+2)}{4}dy,\ p=1;2, n\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что при $n\in\mathbb{N}$

$$\int_{-2}^{2}\sin\frac{\pi n(y+2)}{4}dy=\begin{cases}0, & n\text{-четное;}\\ 8(\pi n)^{-1}, & n\text{-нечетное,}\end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2}y\sin\frac{\pi n(y+2)}{2}dy=\begin{cases}-16(\pi n)^{-1}, & n\text{-четное;}\\ 0, & n\text{-нечетное,}\end{cases}$$

следовательно, $\left|\tilde{D}_{p,n}(x_2)\right| \le 16(\pi n)^{-1}\left(\left|\Phi_{p,1}(x_2)\right| + \left|\Phi_{p,2}(x_2)\right|\right)$, где $p=1;2$ и $n\in\mathbb{N}$, а в силу представлений (10.8), (10.9), условий на функции $f_j(x_2)$, где $j=\overline{1;4}$, и свойств $\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{z}(x)$, получаем: $\left|\tilde{D}_{p,n}(x_2)\right| \le C_7 n^{-1}$, где $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, C_7 – некоторая постоянная. Таким образом, функции $\tilde{D}_{p,n}(x_2)$, так же как и $D_{p,n}(x_2)$, при $p=1;2$ и $n\to+\infty$ оцениваются n^{-1} с точностью до константы.

Вернемся к задаче относительно функций $W_1(x)$ и $W_2(x)$. Так же, как и для задачи (9.13)-(9.15), сначала получим решения однородных уравнений (так как в этом случае уравнения относительно функций $W_p(x)$, $p=1;2$, совпадают с (9.13), решениями будут функции $B^{[1]}_{p,n}(x_2)$ и $B^{[2]}_{p,n}(x_2)$ при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le n_0$ и $B^{\{1\}}_{p,n}(x_2)$ и $B^{\{2\}}_{p,n}(x_2)$ при $p=1;2$, $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$), а потом построим функции Грина (которые также будут иметь представления (9.26)). Так функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ имеют вид

$$W_p(x) = \sum_{n=1}^{n_0} B_{p,n}(x_2)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4} +$$
$$+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^{x_2} G_{p,n}(\xi,x_2)\tilde{D}_{p,n}(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4},\ p=1;2.$$

Действуя так же, как и с функциями $\tilde{V}_p(x)$, $\dfrac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_2}$ при $p=1;2$, можно доказать, что функции $W_p(x)$, $\dfrac{\partial W_p(x)}{\partial x_1}$,$\dfrac{\partial W_p(x)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, непрерывны на $\overline{D_+}$. Вернувшись к функциям $u_{p,2}(x)$, $p=1;2$, с помощью замен указанных выше, получаем, что $u_{p,2}(x)$, $\dfrac{\partial u_{p,2}(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u_{p,2}(x)}{\partial x_2}$ непрерывны на $\overline{D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}}$, $p=1;2$.

Возвращаемся к исходной задаче (0.20)-(0.25). С учетом представлений (0.37) и результатов, полученных выше, доказана справедливость теоремы 0.5.

Замечание 10.2. В точках $(\pm 2,+0)$ и $(\pm 2,-0)$ задано несколько условий задачи (0.20)-(0.25), непротиворечивость которых доказать несложно, используя условия гладкости функций $k_{p_1}(x_2)$, $p_1=1;2$, и $f_{p_2}(x_2)$, $p_2=\overline{1;4}$ и финитность функций $q_{p_3}(x_1)$, $p_3=0;1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kuo A. Y. Interface crack between two dissimilar half spaces subjected to a uniform heat flow at infinity. – Open crack / A. Y. Kuo // Trans. ASME J. – 1990. – Appl. Mech. 57. – P. 359-364.

[2] Lee K. Y. Determination of the thermal stress intensity factors for an interface crack under vertical uniform heat flow / K. Y. Lee, C. W. Shul // Eng. Fract. – 1991. – Mech. 40, N 6. – P. 1067-1074.

[3] Wang X. D. The interaction between an interfacial crack and a microcrack under antiplane loading / X. D. Wang, S. A. Meguid // International Journal of Fracture. – 1996. – V. 76. – P. 263-278.

[4] Shbeeb N. Analysis of the driving force for a generally oriented crack in a functionally graded strip sandwiched between two homogeneous half planes / N. Shbeeb, W. K. Binienda, K. Kreider // International Journal of Fracture. – 2000. – V. 104. – P. 23-50.

[5] Petrova V. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects / V. Petrova, K. Herrmann // International Journal of Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 49-63.

[6] Li Y. -D. An antiplane crack perpendicular to the weak / microdiscontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities / Y. -D. Li, K. Y. Lee // International Journal of Fracture. – 2007. – V. 146. – P. 203-211.

[7] Караулова Н. Е. Взаимодействие трещин в функционально-градиентном / однородном двухкомпонентном материале под действием антиплоского сдвига / Н. Е. Караулова, В. Е. Петрова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 157-167.

[8] Мещерякова Т. В. Влияние внутренних дефектов на состояние поверхности раздела между двумя упругими материалами при продольном сдвиге / Т. В. Мещерякова, В. Е. Петрова // Наука – производству. – 2005. – № 3. – С. 20-23.

[9] Lee K. Y. Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack un-

der uniform heat flow / K. Y. Lee, S. -J. Park // Eng. Fract. – 1995. – Mech. 50, N 4. – P. 475-482.

[10] Ордян М. Г. Задача теплопроводности для биматериала с системой частично теплопроницаемых трещин и тепловым источником / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестн. Самар. гос. ун-та (Естественнонауч. сер.). – 2009. – №4 (70). – С. 154-170.

[11] Ордян М. Г. Задача теплопроводности о взаимодействии частично теплопроницаемых трещин в двухкомпонентном материале под действием теплового потока / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2009. – № 1. – С. 141-149.

[12] Petrova V. Thermal fracture of a functionally graded / homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // Teoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2011. – V. 55. – P. 148-157.

[13] Chiu Tz-Cheng. Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack / Tz-Cheng Chiu, Shang-Wu Tsai, Ching-Hwei Chue // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2013. – V. 67. – P. 514-522.

[14] Глушко А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 47-50.

[15] Логинова Е. А. Построение решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной и его асимптотика / Е. А. Логинова // Материалы Воронеж. зимней матем. школы «Современные методы теории функций и смежные задачи». – Воронеж, 2011. – С. 202-203.

[16] Логинова Е. А. Асимптотическое представление тепловых потоков для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXII». – Воронеж, 2011. – С. 104-105.

[17] Логинова Е. А. Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о

стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 157-161.

[18] Рябенко А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с трещиной / А. С. Рябенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 187-194.

[19] Глушко А. В. Изучение асимптотических свойств решения задачи о стационарном распределении тепла в плоскости с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, Е. А. Логинова // Современные методы теории краевых задач: тр. Воронеж. матем. школы «Понтрягинские чтения-XXIII». – Воронеж, 2012. – С. 47-49.

[20] Glushko A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture «Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety»: Book of Abstracts, 26-31 August. – Kazan, 2012. – P. 269.

[21] Glushko A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture «Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety»: сб. ст. [Электронный ресурс]. – Kazan: Foliant, 2012. – 1 электрон. опт. диск. (CD-Rom).

[22] Логинова Е. А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной при неограниченно большом времени / Е. А. Логинова // Материалы четвертой междунар. науч. конф. «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ–2011)». – Воронеж, 2011. – С. 181-182.

[23] Логинова Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. – 2012. – Вып. 1. – С. 40-47.

[24] Рябенко А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородном круге с внутренней трещиной / А. С. Рябенко // Современные методы теории краевых задач: тр. Воронеж. матем. школы «Понтрягинские чтения-XXIII». – Воронеж, 2012. – С. 159-161.

[25] Рябенко А. С. Представление решения второй краевой задачи, описывающей стационарное распределение тепла в полупространстве с трещиной перпендикулярной границе / А. С. Рябенко // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXIV». – Воронеж: ИПЦ ВГУ, – 2013. – С. 163-164.

[26] Глушко А. В. Построение стационарного поля температуры для двух связных полупространств с межфазовой трещиной / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXIII». – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. – С. 49-50.

[27] Черникова А. С. Асимптотики решения задачи о сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной на границе / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXIV». – Воронеж: ВГУ, 2013. – С. 216-217.

[28] Глушко А. В. Задача о распределении тепла при сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной / А. В. Глушко, А. С. Черникова // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация: тр. Всерос. науч.-практич. конф. Москва, РУДН, 23-26 апреля 2013 г. – М.: РУДН, 2013. – С. 58-59.

[29] Черникова А. С. Задача о стационарном распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с межфазной трещиной / А. С. Черникова // XL Гагаринские чтения. Науч. тр. Междунар. молодежной науч. конф. в 9 т. Москва, 7-11 апреля 2014 г. – М.: МАТИ, 2014. Т. 5. – С. 191-193.

[30] Черникова А. С. Асимптотика решения задачи о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух неоднородных материалов, с межфазной трещиной

/ А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXV». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. – С. 192-193.

[31] Черникова А. С. Задача о распределении тепла в биматериале с полуограниченной межфазной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXV». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. – С. 193-194.

[32] Черникова А. С. Задача о стационарном распределении тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов, с межфазной трещиной / А. С. Черникова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сб. науч. тр. по материалам междунар. заоч. науч.-практич. конф. – 2014 г. – № 4 ч. 2 (9-2) – С. 151-154.

[33] Черникова А. С. Задача о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной / А. С. Черникова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. – 2014. – Вып. 3. – С. 66-81.

[34] Глушко А. В. Асимптотика решения вблизи границы для задачи сопряжения материалов в плоскости с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. VII междунар. конф. «ПМТУКТ-2014» – Воронеж: изд-во «Научная книга», 2014. – С 105-108.

[35] Глушко А. В. О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 111-134.

[36] Черникова А. С. Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины / А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2014. – №1. – С. 188-206.

[37] Черникова А. С. Свойства решения задачи о распределении тепла в биматериале с межфазной трещиной / А. С. Черникова // Науч.-практич. журнал «Аспирант». – 2015. – №3. – С. 5-9.

[38] Черникова А. С. Распределение тепла в плоском биматериале с трещиной / А. С. Черникова // Науч.-практич. журнал «Аспирант». – 2015. – №3. – С. 10-18.

[39] Черникова А. С. Асимптотическое поведение решения задачи о распределении тепла в биматериале с конечной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конф.: Воронеж. весенняя матем. школа «Понтрягинские чтения-XXVI». – Воронеж: ВГУ, 2015. – С. 210-211.

[40] Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

[41] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 799 с.

[42] Глушко А. В. Уравнение математической физики / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – Воронеж: изд-во ВГУ, 2010. – 520 с.

[43] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

[44] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: учеб. для студ. вузов: в 3 т. Т. 2. / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.

[45] Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин [и др.]. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

[46] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. – 456 с.

[47] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: учеб. для студ. вузов: в 3 т. Т. 3. Гармонический анализ. Элементы функционального анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2006. – 350 с.

[48] Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. Т. 4 ч. 1 / В. И. Смирнов. – 6-е

изд. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1974. – 336 с.

[49] Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. – перев. с англ. Б. М. Левитана. – М: изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.

[50] Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1985. – 448 с.