На правах рукописи

Кулешов Павел Александрович

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: Пенкин Олег Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Юрко Вячеслав Анатольевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Саратовский государственный университет,
Кафедра математической физики
и вычислительной математики, заведующий.

Наимов Алижон Набиджанович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Вологодский государственный университет,
кафедра информационных систем и технологий, профессор.

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 15 декабря 2015 года в 16 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, ВГУ, математический факультет, ауд. 335.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2782

Автореферат разослан «   » октября 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Гликлих Юрий Евгеньевич

Актуальность темы. В последние два десятилетия все большее внимание к себе привлекают дифференциальные уравнения на так называемых стратифицированных множествах - связных подмножествах обычного евклидового пространства, представленных в виде объединения конечного числа его гладких подмногообразий, примыкающих друг к другу особым образом. Такой интерес обусловливается целым рядом причин. Прежде всего, к изучению стратифицированных множеств приводят задачи, связанные с изучением и моделированием различных явлений происходящих в сложных физических системах, например, в системах составного типа, отдельные элементы которых имеют совершенно разные физические характеристики, такие как размерность, плотность и т.п. В качестве примера чаще всего приводят задачу о колебаниях механической системы, составленной из струн, мембран и упругих тел, а также задачу о диффузии в в сильно неоднородных средах. Решение таких задач в рамках классической теории дифференциальных уравнений оказывается довольно затруднительным, что в результате и приводит нас к потребности дальнейшего развития методов математического анализа и теории дифференциальных уравнений, чтобы сделать их пригодными и в случае, когда рассматриваются функции на стратифицированных множествах.

С другой стороны, теория стратифицированных множеств не только дает возможность решать новые задачи, но и позволяет взглянуть по-новому на давно известные и хорошо изученные математические вопросы и в каких-то случаях указать связь между, казалось бы, разными задачами. Например, задача Дирихле на стратифицированном множестве, как это не покажется странным, содержит, как частные случаи практически все известные классические краевые задачи (Неймана, Робена, Вентцеля). Так что можно сказать, что кроме задачи Дирихле (если интерпретировать их как задачи на стратифицированных множествах) больше нет никаких других краевых задач. Известные результаты о скачках потенциала простого слоя тоже имеют очень естественную интерпретацию на стратифицированных множествах. Оказывается, что потенциал простого слоя является решением уравнения Пуассона на множестве составленном из трех стратов: области, ее внешности, и разделяющей их поверхности. При этом правая часть уравнения равна нулю на области и ее внешности, а на поверхности она равна плотности потенциала.

Кроме того, несмотря на то, что практически все полученные результаты на стратифицированных множествах являются аналогами каких-либо классических результатов, их получение, как правило, требует новых идей и подходов, которые, в свою очередь, оказываются полезными в классической ситуации.

Основные результаты касающиеся стратифицированных множеств были получены О.М. Пенкиным и его учениками; часть их можно найти в последней главе книги[1].Там же можно найти и основные результаты относящиеся к геометрическим графам - одномерным стратифицированным множествам, для которых построена более обширная теория, начатая Ю.В. Покорным, Б.С. Павловым, S. Nicaise'ом и другими.

Цель работы. Целью данной работы является получение оценок собственных значений различных краевых задач на стратифицированных множествах (прежде всего речь идет об уравнении Лапласа с краевыми условиями Дирихле), а также решение вопросов, тем или иным образом с этим связанных, например, доказательство неравенств типа Пуанкаре и Соболева на стратифицированных множествах.

Методика исследования. При доказательстве за основу берутся методы классических теорий, прежде всего математического анализа и функционального анализа, адаптированные на случай стратифицированных множеств. В частности, при определении основных дифференциальных операторов мы опираемся на теории меры и дифференцировании по так называемой стратифицированной мере.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми. В числе основных отметим следующие:

– оценки первого собственного значения лапласиана с краевыми условиями Дирихле на одномерном и двумерном стратифицированном множестве;
– неравенство Соболева на стратифицированном множестве;
– разрешимость краевой задачи с $p-$лапласианом на стратифицированном множестве;
– некоторые свойства симметризации Шварца на стратифицированном множестве.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения краевых задач на стратифицированных множествах.

[1]Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. **Дифференциальные уравнения на геометрических графах**, М.:Физматлит, 2005

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна в 2011 году [4], на весенней математической школе «Понтрягинские чтения XXIII» в 2012 году [5], на конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» в 2012 году [6].

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-6]. Работы [1-3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных публикаций [1], [3] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Объем диссертации составляет 115 страниц. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 27 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава посвящена аналогу задачи Штурма - Лиувилля на геометрическом графе. Здесь дается определение самого геометрического графа и ряда связанных с ним понятий: Графом будем называть связное множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, имеющее вид

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^{m} v_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{n} e_j\right),$$

где $\{v_i\}_{i=1}^m =: V(\Gamma)$ – семейство точек из $\mathbb{R}^3$, называемых далее вершинами, а $\{e_j\}_{j=1}^n =: E(\Gamma)$ – семейство открытых интервалов (или гладких дуг), далее называемых ребрами, с концами в вершинах из $V(\Gamma)$. Граф Γ предполагается разбитым на две части – границу и внутренность. В качестве внутренности графа, которую обозначим Γ_0, можно взять любое связное подмножество Γ, представляющее собой объединение некоторого набора вершин из $V(\Gamma)$ (обозначим его V_0) и всех ребер из $E(\Gamma)$. Вершины, попавшие в V_0, назовем внутренними вершинами, а в $V \setminus V_0$ – граничными. Множество $\partial\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ объявляется границей графа Γ. На Γ_0 мы будем рассматривать дифференциальное уравнение, а в точках из $\partial\Gamma_0$ – краевые условия.

На графах рассматривается ряд функциональных пространств, а именно: $C(\Gamma)$ – множество непрерывных на Γ функций; $C_0(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ – функции из $C(\Gamma)$, обращающиеся в нуль на $\partial\Gamma_0$; $C^1(\Gamma)$ – множество функций непрерывных на Γ, имеющих равномерно непрерывную производную на каждом ребре; $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ – функции из $C^1(\Gamma)$, обращающиеся в нуль на $\partial\Gamma_0$.

Далее вводятся мера и интеграл на графе. Подмножество ω в Γ назовем измеримым, если его пересечение с каждым ребром измеримо по Лебегу. Меру ω определим как сумму мер Лебега пересечений $\omega \cap e_i$ по всем ребрам, а обозначать ее будем $\mu_\Gamma(\omega)$. Понятие измеримости функции переносится на случай графа в неизменном виде, т.е. функция называется измеримой, если измеримы все ее лебеговы множества – множества вида $\{x \in \Gamma : \ f(x) > t\}$. Интеграл Лебега измеримой функции $f : \omega \to \mathbb{R}$ оказывается при этом равным сумме интегралов этой функции по пересечениям $\omega \cap e_i$ по всем i.

Вводится в рассмотрение дифференциальный оператор Δ на графе, который на ребрах графа задается соотношением $\Delta u(x) = u''(x)$, а в вершинах - соотношением

$$\Delta u(v_i) = \sum_{e_j \succ v_i} u'_j(v).$$

и рассматривается следующая задача

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0, \tag{0.0.1}$$

$$u\Big|_{\partial\Gamma_0} = 0, \tag{0.0.2}$$

где ρ - неотрицательная функция, а $u'_j(v)$ есть производная в вершине v по направлению единичного вектора, направленного внутрь ребра e_j. Данная задача является аналогом классической задачи Штурма - Лиувилля на графе.

Основным результатом первой главы является оценка первого собственного значения этой задачи (его формулировку см. ниже). Его доказательство приводится сначала для случая, когда $\rho \equiv 1$ на ребрах и $\rho \equiv 0$ во внутренних вершинах. Однако, также рассматриваются варианты при $\rho \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, в частности при $\rho \equiv 1$. В этом последнем случае во внутренних вершинах сосредоточены единичные массы.

Далее описывается симметризация Шварца на графе и обсуждаются некоторые ее свойства. Определение симметризации полностью соответствует классическому определению. А именно, пусть $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ есть неотрицательная функция, причем такая, что ее лебеговы множества $L_u(t) = \{x \in \Gamma : u(x) > t\}$ измеримы при всех $t > 0$. Под симметризацией Шварца этой функции будем понимать такую функцию $u^\star : [0, L] \to \mathbb{R}$, что каждое её лебегово множество $L_{u^*}(t)$ является отрезком с центром в точке $L/2$ и, при этом, $\mu_\Gamma(L_u(t)) = \mu(L_{u^*}(t))$ при всех t, где L есть сумма длин всех ребер графа, а μ есть мера Лебега на отрезке. Имеют место следующие свойства.

Лемма 0.0.1 *Если $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, то $u^* \in PC_0^1[0; L]$,*

где u^* есть симметризация Шварца функции u, а $PC_0^1[0; L]$ - множество непрерывных, кусочно-гладких функций.

Теорема 0.0.1 (Принцип Пойя - Сеге на графе) *Пусть дан граф $\Gamma = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$, такой что для любого его ребра существует простой путь, содержащий данное ребро, и концами которого служат вершины из $\partial\Gamma_0$ (необязательно разные), пусть $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ неотрицательна, тогда*

$$\int_\Gamma u'^2 dx \geq \int_0^L (u^*)'^2 dx. \tag{0.0.3}$$

При этом, показано, что требования на граф в условиях данной теоремы ослабить нельзя.

Следующим шагом является рассмотрение аналога принципа Рэлея. А именно, доказывается следующая теорема.

Теорема 0.0.2 *Собственная функция u_0, соответствующая первому собственному значению λ_0 задачи* (0.0.1)-(0.0.2) *минимизирует функционал*

$$\Phi(u) = \frac{\int_\Gamma u'^2 dx}{\int_\Gamma u^2 dx}$$

на множестве $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, причем минимум в точности равен λ_0.

Путем комбинирования полученных результатов получается оценка первого собственного значения лапласиана на графе.

Теорема 0.0.3 *При $\rho = 1$ в точках ребер и $\rho = 0$ в вершинах графа Γ, удовлетворяющего условиям теоремы 0.0.1, имеет место следующая оценка первого собственного значения задачи* (0.0.1),(0.0.2)*:*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma))^2}. \tag{0.0.4}$$

Полученная оценка является точной; в случае графа-отрезка в 0.0.4 достигается равенство. Кроме того, можно найти нетривиальный граф (не сводящийся к отрезку), со сколь угодно малой разницей между левой и правой частями 0.0.4.

Также рассматривается случай, когда от графа требуется лишь непустота границы. Для него имеет место следующая оценка:

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{4(\mu(\Gamma))^2}. \tag{0.0.5}$$

Наконец, рассматриваются более общие требования на показатель ρ в задаче (0.0.1),(0.0.2). Точнее, рассматривается случай $\rho \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Для него имеет место следующая оценка:

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{\rho_0(\mu(\Gamma) + K_v)^2}, \tag{0.0.6}$$

где ρ_0 есть максимум функции ρ на Γ, а K_v есть количество вершин в V_0.

При $\rho \equiv 1$ на всем графе данная оценка также будет являться точной.

Во второй главе рассматривается задача на собственные значения оператора Лапласа на стратифицированном множестве.

Связное замкнутое подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется стратифицированным, если оно представлено в виде объединения открытых подмногообразий $\sigma_{kj} \subset \Omega$ пространства $\mathbb{R}^n$, называемых стратами, примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса. В обозначении σ_{kj} первый индекс означает размерность страта, а второй его номер при автономной нумерации стратов данной размерности. Будем писать $\sigma_{li} \prec \sigma_{kj}$ или $\sigma_{kj} \succ \sigma_{li}$ и говорить, что σ_{li} примыкает к σ_{kj} , если $l < k$ и $\sigma_{li} \subset \partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma_{kj}} \setminus \sigma_{kj}$. Страт σ_{kj} назовем свободным, если Ω не содержит стратов, к которым бы он примыкал.

Обозначим через Σ множество всех стратов из Ω. Мы предполагаем выполненными следующие два условия, первое из которых – обычное требование на примыкания клеток в клеточном комплексе: 1) Любые два страта не пересекаются, а их замыкания либо не пересекаются, либо их пересечение является объединением стратов из Σ. Граница страта σ_{kj} – множество $\partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma_{kj}} \setminus \sigma_{kj}$ – является объединением некоторого числа стратов из Σ, размерность которых меньше k; 2) Для любого $X \in \sigma_{k-1i}$ «звезда»

$$S = \sigma_{k-1i} \cup \Big(\bigcup_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \sigma_{kj} \Big)$$

допускает локальное (вблизи X) выпрямление, что означает существование такой окрестности V точки X в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такого диффеоморфизма $\Phi : V \to W$, что образ множества $V \cap S$ представляет собой объединение $(k-1)$-мерного шара (образа части σ_{k-1i}, попавшей в V) и примыкающих к нему полушарий (аналогичных образов частей σ_{kj}).

Топология на Ω индуцируется стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. подмножество Ω_0 стратифицированного множества Ω называется открытым, если существует открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ пересечение которого с Ω дает Ω_0.

Пусть Ω_0 - связное и открытое подмножество Ω, составленное из стратов семейства Σ и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Тогда разность $\Omega \setminus \Omega_0$, очевидно, является границей множества Ω_0 в упомянутой выше топологии и будет тоже состоять из стратов, а потому будет естественным обозначить её через $\partial\Omega_0$. Ясно, что разбиение $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ определяется неоднозначно. Например, допустимо взять Ω_0 равным Ω (в этом случае $\partial\Omega_0$ окажется пустой). Однако мы такие случаи не рассматриваем.

Далее на Ω вводятся мера и интеграл. На каждом страте σ_{kj} имеется обычная $k-$мерная мера Лебега, которую обозначим μ_k. Назовем подмножество $\omega \subset \Omega$ измеримым, если измеримы по Лебегу пересечения $\omega \cap \sigma_{kj}$ по всем значениям индексов k и j. Меру такого множества определим как

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}).$$

Интеграл Лебега суммируемой функции f на Ω оказывается равным сумме по всем стратам интегралов Лебега сужений этой функции на страты, т.е.

$$\int\limits_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{k,j} \int\limits_{\sigma_{kj}} f \, d\mu_k.$$

В соответствии с этим, пространство $L^p(\Omega)$ определяется как пространство измеримых на Ω функций f, таких, что $|f|^p$ суммируема, т.е. $\int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty$.

Далее для разбиения $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ через $C(\Omega_0)$ обозначается множество непрерывных на Ω_0 функций. Аналогично, $C(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ (или просто $C(\Omega)$) есть функции непрерывные на всем Ω. Через $C^1_\mu(\Omega_0)$ обозначим множество таких функций на множестве Ω, что их сужения на любой страт из Ω_0 являются непрерывно дифференцируемыми функциями и, вдобавок, для каждого страта из Ω_0 существуют непрерывные продолжения производной сужения функции на этот страт до точек тех его граничных стратов, которые лежат в Ω_0. Через $C_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ обозначим множество тех функций из $C(\Omega)$, которые обращаются в нуль на $\partial\Omega_0$. Также положим $C^1_0(\Omega_0, \partial\Omega_0) = C^1_\mu(\Omega_0) \cap$

$C_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$. Пространство $W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ определяется как пополнение пространства $C_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ по норме

$$\|f\|_0^{1,p} = \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Здесь ∇f на каждом $k-$мерном страте есть классический $k-$мерный градиент сужения функции на данный страт.

Пусть в каждой точке $X \in \Omega$ задан вектор $\vec{F}(X)$ в $\mathbb{R}^n$. Так заданное векторное поле F назовем касательным к Ω_0, если для любого страта $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любого $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному пространству $T_X\sigma_{kj}$. Дивергенцией касательного векторного поля F в точке $X \in \sigma_{k-1i}$ назовем следующее выражение:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_{k-1} \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \vec{F}_{\nu_j}(X). \tag{0.0.7}$$

Здесь $\nabla_{k-1} \cdot \vec{F}(X)$ - обычная $(k-1)$-мерная дивергенция в точке X сужения $\vec{F}$ на страт σ_{k-1i}, рассматриваемый как риманово многообразие с метрикой, индуцированной его вложением в $\mathbb{R}^n$, а $\vec{F}_{\nu_j}(X)$ - скалярное произведение единичного вектора ν_j ортогонального σ_{k-1i} в точке X (направленного внутрь страта σ_{kj}) и предельного значения $\vec{F}_{\nu_j}(Y)$ когда $Y \in \sigma_{kj}$ стремится к X.

Так определенная дивергенция имеет смысл, например, для полей обладающих следующими свойствами: 1) сужения поля на страты из Ω_0 являются непрерывно дифференцируемыми; 2) сужение поля $\vec{F}$ на страт σ_{kj} может быть продолжено по непрерывности на любой страт $\sigma_{k-1i} \subset \Omega_0$, примыкающий к σ_{kj}.

Множество таких векторных полей обозначим через $\vec{C}^1(\Omega_0)$. Множество полей, для которых второе требование выполнено для всех $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и для всех $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj} \subset \Omega_0$, в том числе и лежащих в $\partial\Omega_0$, обозначим через $\vec{C}^1(\Omega)$.

Если $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, то через ∇u обозначается векторное поле обычных градиентов сужений u на страты из Ω_0. Обозначим через $C^2(\Omega_0)$ множество таких функций $u \in C(\Omega_0)$, что $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. Для функций из $C^2(\Omega_0)$ имеет смысл дифференциальное выражение $\nabla \cdot (p\nabla u)$, когда функция $p : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ такова, что $p\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. Так будет, например, в случае $p \equiv 1$. В этом случае соответствующий оператор естественно назвать лапласианом; в уже упомянутой книге «Дифференциальные уравнения на геометрических графах» он называется жестким лапласианом, а случай когда $p \equiv 1$ только на «свободных» стратах, и $p \equiv 0$ на оставшейся части Ω_0 - мягким лапласианом.

Рассматривается следующая задача на собственные значения:

$$\Delta_p u + \lambda \rho u = 0 \tag{0.0.8}$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0 \tag{0.0.9}$$

где функция плотности $\rho(x) \equiv 1$ на свободных стратах и $\rho(x) \equiv 0$ в остальной части Ω_0 в случае мягкого лапласиана и $\rho(x) \equiv 1$ всюду – в случае жесткого лапласиана. Как и в случае графа имеет место аналог принципа Рэлея, теперь уже на стратифицированном множестве.

Далее обсуждается симметризация Шварца на стратифицированном множестве. Определяются понятия периметра и объема произвольного подмножества стратифицированного множества.

Для обсуждения свойств симметризации Шварца вводится понятие кратности страта. Фиксируем страт σ_{kj}. Для каждого страта $\sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{kj}$ обозначим через $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,j})$ число примыканий σ_{kj} к $\sigma_{k+1,j}$. Сумма

$$\sum_{\sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{kj}} \nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,j})$$

называется кратностью страта σ_{kj}. На приведенном рисунке $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,i}) = 2$, $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,m}) = 1$, а кратность σ_{kj} равна 4.

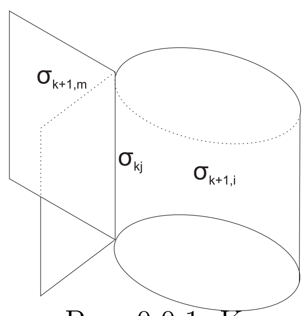

Рис. 0.0.1: К кратности страта.

Для разбиения $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$, в предположении, что все свободные страты имеют одинаковую размерность d, его периметром будем называть суммарную меру $(d-1)$-мерных стратов, входящих в $\partial\Omega_0$. Теперь пусть $\widetilde{\Omega}$ является стратифицированным подмножеством Ω, т.е. оно само по себе является стратифицированным множеством и, вдобавок, пусть каждый его страт целиком содержится в некотором страте из Ω. Краем Ω^1 стратифицированного множества назовем объединение замыканий всех стратов из Ω единичной кратности. Подчеркнем, что формально данное понятие не связано с понятием края многообразия. Теперь в качестве границы $\widetilde{\Omega}$ рассмотрим множество $\partial\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}^1 \setminus (\Omega^1 \setminus \partial\Omega_0)$. Рассмотрим пересечение $\partial\widetilde{\Omega}$ с замыканием некоторого страта старшей размерности множества Ω - страта σ_{di}. Обозначим $(d-1)-$мерную меру этого пересечения $P_{\sigma_{di}}(\widetilde{\Omega})$ и будем ее называть периметром $\widetilde{\Omega}$ относительно страта σ_{di} из Ω. В этом случае периметром $\widetilde{\Omega}$ относительно всего множества Ω объявим сумму его относительных периметров для каждого страта старшей размерности из Ω. Таким образом:

$$P_\Omega(\widetilde{\Omega}) = \sum_i P_{\sigma_{di}}(\widetilde{\Omega}) = \sum_i \mu_{d-1}(\partial\widetilde{\Omega} \cap \overline{\sigma_{di}}).$$

Объемом разбиения $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ назовем суммарную меру его стратов старшей размерности. Для множества $\widetilde{\Omega}$ объем определим как

$$S(\widetilde{\Omega}) = \mu_d(\widetilde{\Omega}) = \sum_i \mu_d(\widetilde{\Omega} \cap \sigma_{di}).$$

При сделанных обозначениях, для двумерных стратифицированных множеств имеет место следующее изопериметрическое неравенство.

Теорема 0.0.4 *Пусть $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ - стратифицированное множество, принадлежащее классу E (его описание см. ниже), такое что $\partial\Omega_0 = \Omega^1$. Тогда для любой неотрицательной функции $u \in C_0^2(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ для почти всех $t > 0$ выполнено неравенство*

$$P_\Omega^2(t,u) \geq 4\pi S(t,u). \tag{0.0.10}$$

Здесь $P_\Omega(t,u)$ и $S(t,u)$ есть, соответственно, периметр и площадь лебегова множества $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$. Для простоты, описание класса E проведем для тех множеств, все страты старшей размерности которых являются плоскими. Каждый элемент класса E получается из какого-либо двумерного плоского страта с помощью конечного числа операций «приклеивания» двумерных плоских стратов. А именно, к исходному двумерному страту по отрезку, пересекающемуся с его границей по множеству меры нуль приклеивается новый двумерный страт. Полученное множество рассматривается как стратифицированное (в частности, внутренность отрезка и его концы оказываются разными стратами). К одному из двумерных стратов полученного множества снова приклеивается плоский двумерный страт и т.д. Общий случай отличается лишь тем, что вместо плоских стратов берутся изометричные плоским. Класс E оказывается достаточно широким, но тем не менее не содержит таких множеств, как например, цилиндр и сфера. Тем не менее полученную теорему удается обобщить и на некоторые множества содержащие цилиндрические или конические страты в качестве фрагментов.

Как и в случае графа, рассматривается вопрос гладкости симметризации и аналог принципа Пойя - Сеге на стратифицированном множестве. Из них получаем следующую оценку первого собственного значения лапласиана на двумерном стратифицированном множестве.

Теорема 0.0.5 *Пусть $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ - стратифицированное множество, принадлежащее классу E, причем $\partial\Omega_0 = \Omega^1$. Имеет место следующая оценка первого собственного значения задачи* (0.0.8),(0.0.9) *при p и ρ равных единице на свободных стратах и нулю на остальных:*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi j_{0,1}^2}{\mu_2(\Omega_0)}, \tag{0.0.11}$$

где $j_{0,1}$ есть первый положительный нуль функции Бесселя $J_0(t)$, а $\mu_2(\Omega_0)$ есть суммарная мера двумерных стратов входящих в Ω_0. При этом, равенство имеет место лишь в случае стратифицированного круга.

Третья глава посвящена неравенствам типа Пуанкаре и Соболева. Сначала рассматривается неравенство Пуанкаре на стратифицированном множестве в условиях жесткого лапласиана при произвольном показателе p:

$$\int_{\Omega_0} |u|^p d\mu \leq C \int_{\Omega_0} |\nabla u|^p d\mu. \tag{0.0.12}$$

Его доказательство сводится к случаю $p = 2$, который в свое время был рассмотрен А.А. Гавриловым и О.М. Пенкиным. Доказывается он при условиях прочности стратифицированного множества, которое заключается в том, что для любого страта $\sigma_{ki} \in \Omega_0$ найдется цепочка (т.е. упорядоченный набор) стратов $\{\sigma_{ki}, \sigma_{k_1 i}, \sigma_{k_2 i}, \ldots, \sigma_{k_m i}\}$ такая, что: 1) любые два соседних страта из цепочки примыкают друг к другу, а их размерности отличаются ровно на единицу, 2) последний страт цепочки входит в $\partial\Omega_0$. Сам результат формулируется следующим образом:

Теорема 0.0.6 *Пусть дано прочное стратифицированное множество* $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ *и пусть* $p \geq 2$*. Тогда найдется константа* $C > 0$*, зависящая только от* Ω *и* p*, такая, что для любой функции* $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *выполнено неравенство* (0.0.12).

В качестве одного из применений неравенства Пуанкаре рассматривается следующая задача на стратифицированном множестве.

$$\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0, \ x \in \Omega_0 \tag{0.0.13}$$

$$u = \varphi, \ x \in \partial\Omega_0, \tag{0.0.14}$$

где $\varphi, \ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Оператор, фигурирующий в уравнении (0.0.13) называется $p-$лапласианом. Функцию $u \in W^{1,p}(\Omega)$ называют слабым решением (0.0.13), если при всех $h \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h \ d\mu = 0 \tag{0.0.15}$$

Краевое условие (0.0.14), при этом, интерпретируется, как $\varphi - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Оказывается, что существование слабого решения задачи (0.0.13)-(0.0.14) сводится к существованию минимума функционала $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \ d\mu$.

Далее рассматривается неравенство Соболева на стратифицированном множестве. Первым идет случай мягкого лапласиана для которого вводится следующее условие $(*)$: для любого свободного страта σ_{kj_1} существует цепочка стратов $\sigma_{kj_1} \succ \sigma_{k-1,j_2} \prec \sigma_{kj_3} \succ \ldots \succ \sigma_{k-1,j_m}$, которая содержит только страты размерностей k и $k-1$, и при этом, $\sigma_{k-1,j_m} \subset \partial\Omega_0$, а все страты размерности k, входящие в данную цепочку, являются свободными. Имеет место следующая теорема:

Теорема 0.0.7 *Пусть* $\Omega \to \Omega_0, \partial\Omega_0$ *- связное стратифицированное множество, удовлетворяющее условию* $(*)$*, все свободные страты которого имеют одинаковую размерность* d*. Тогда найдется константа* $C > 0$*, зависящая только от* Ω*, такая, что для любой неотрицательной функции* $u \in C_0^d(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *для почти всех* $t \geq 0$ *выполнено неравенство*

$$[P_\Omega(t,u)]^d \geq C[S_\Omega(t,u)]^{d-1}. \tag{0.0.16}$$

Пользуясь этим неравенством можно получить следующую версию принципа Пойя - Сеге.

Теорема 0.0.8 *Пусть дано стратифицированное множество $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ удовлетворяющее условию $(*)$ и такое, что все его свободные страты имеют размерность n. Тогда для любой неотрицательной функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ выполнено*

$$\int_{\Omega_0} \rho |\nabla u|^p d\mu \geq C \int_B |\nabla u^*|^p d\mu, \tag{0.0.17}$$

где $C > 0$ зависит только от Ω.

Применяя симметризацию Шварца и пользуясь ее свойствами получаем неравенство Соболева на стратифицированном множестве для мягкого лапласиана.

Теорема 0.0.9 *Пусть дано стратифицированное множество $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ удовлетворяющее условию $(*)$ и пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ - размерности его свободных стратов. Тогда для любой функции $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ выполнено*

$$\left(\int_{\Omega_0} \rho |u|^q d\mu \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_0} \rho |\nabla u|^p d\mu \right)^{1/p}. \tag{0.0.18}$$

где $p \geq 1$, а q определяется следующим образом:

$$\begin{cases} 1 \leq q < \infty, & \text{при } p \geq n_k; \\ 1 \leq q \leq n_k p/(n_k - p), & \text{при } p \in [n_{k-1}, n_k); \\ \ldots & \\ 1 \leq q \leq n_1 p/(n_1 - p), & \text{при } p \in [1, n_1). \end{cases} \tag{0.0.19}$$

Что касается жесткого лапласиана, то для него доказывается аналогичный результат, с единственным отличием, что условие $(*)$ заменено на условие прочности стратифицированного множества.

Автор выражает глубокую благодарность О.М. Пенкину за постановку задач и полезные обсуждения многочисленных вопросов, связанных с ними.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Кулешов П.А. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе/А.Т. Диаб, П.А. Кулешов, О.М. Пенкин// Математические заметки – 2014 – 96:6 – с. 885–895.

[2] Кулешов П.А., Теорема вложения Соболева для стратифицированных множеств/П.А. Кулешов// Научные ведомости Белгородского государственного университета, Математика Физика – 2013 – № 5 (148), выпуск 30 – с. 79-87.

[3] Кулешов П.А. Неравенство Пуанкаре для стратифицированных множеств/ П.А. Кулешов, О.М. Пенкин// Фундаментальные исследования. – 2014. – № 6–1 – с. 49-53.

[4] Кулешов П.А. Оценка первого собственного значения лапласиана на стратифицированном множестве /П.А. Кулешов// Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы. – 2011 – с. 191-192.

[5] Кулешов П.А. Теорема вложения Соболева на стратифицированном множестве/П.А. Кулешов// Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» – «Понтрягинские чтения – XXIII». – 2012 – с. 100-101.

[6] Кулешов П.А. Об оценке первого собственного значения задачи Штурма - Лиувилля на графе/П.А. Кулешов// Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. – 2012 – с.169.

Работы [1-3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.