

ФГБОУ ВПО ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Афанасьев Александр Александрович

**ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ**

01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Ковалев

Воронеж –2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава I. Постановка задачи. Метод конечных элементов.	
Сравнение с аналитическим решением	
§ 1. Определяющие соотношения метода конечных элементов.....	14
§ 2. Равновесие треугольного цилиндрического конечного элемента.....	17
§ 3. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого вращающегося сплошного диска.....	25
§ 4. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого вращающегося кольцевого диска.....	31
§ 5. Обсуждение результатов.....	36
Глава II. Исследование упругопластического вращающегося диска в случае плоского напряженного состояния	
§ 1. Тонкий вращающийся упругопластический сплошной диск.....	39
§ 2. Потеря несущей способности сплошного вращающегося диска...	64
§ 3. Тонкий вращающийся упругопластический кольцевой диск.....	67
§ 4. Потеря несущей способности кольцевого вращающегося диска...	75
§ 5. Обсуждение результатов.....	79
Глава III. Исследование упругопластического вращающегося диска в случае осесимметричной задачи	
§ 1. Сплошной вращающийся диск постоянной толщины.....	82
§ 2. Связанная задача о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой жидкостью.....	93
§ 3. Исследование момента сил трения.....	104
§ 4. Обсуждение результатов.....	109
Заключение	112
Литература	113

Введение

Вращающиеся диски являются важнейшей деталью многих машин и агрегатов. Ключевую роль они играют в теории турбомашиностроения. Прочность дисков определяет возможность получения высоких параметров работы машин, обеспечивает необходимый срок их службы. Развитие вычислительной техники и пакетов автоматизированного конструирования позволяет переходить на современные методы расчета дисков и уточнять существующие методики расчета на основе проводимых компьютерных экспериментов.

Основными нагрузками, действующими на диски, являются центробежные силы, возникающие при вращении. Определение напряжений и деформаций от центробежных сил – главный этап расчета дисков на прочность. Диски постоянной толщины встречаются редко, однако решения, полученные для них, необходимы для контроля расчетов, упрощенных первичных оценок и обоснования результатов, полученных, например, методом конечных элементов, методом переменных параметров упругости или методом дополнительных деформаций.

Во многих современных турбомашинах диски работают в условиях повышенной нагруженности, приводящей к возникновению пластических деформаций. Обычно, приближенные методы расчета упругопластического состояния дисков основаны на деформационной теории пластичности и используют итерационные процедуры последовательного решения упругих задач. Данный подход не позволяет подробно исследовать кинетику напряженно-деформированного состояния дисков, работающих в процессе эксплуатации при различных режимах. Использование теории течения в сочетании с методом конечных элементов позволяет перейти на качественно более совершенные методы исследования напряженно-деформированного состояния вращающихся упругопластических дисков.

Практически полностью существующая теория определения напряженно-деформированного упругопластического состояния вращающегося диска построена с использованием условия пластичности Треска. Уточнение данной теории для условия пластичности Мизеса с учетом упрочнения материала является важной задачей механики сплошных сред.

Наиболее перспективным направлением развития численного решения задач методами автоматизированного конструирования является решение связанных задач механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа. Характерной является задача о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Здесь в масштабах одной математической модели можно решить вопросы сразу двух смежных отраслей науки.

Основные вопросы прочности дисков рассмотрены многими специалистами. Методы расчета варьировались в зависимости от целей исследования и доступных вычислительных средств [55, 56, 61, 67, 69, 74, 76, 77, 85, 100].

Ряд исследований посвященных изучению напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков содержится в работах И.А. Биргера [16-25]. Автором показано, что решение упругопластических задач сопряжено со значительными трудностями и предложен вариационный метод, когда упругопластическая задача сводится к последовательности упругих задач с применением метода последовательных приближений. Следует отметить, что данный метод, развитый И. А. Биргером, который дал ему название метода переменных параметров упругости, является логическим развитием метода, предложенного А.А. Ильюшиным [50].

В работе [90] Шнейдеровичем Р.М. решена задача в деформациях о вращающемся неравномерно нагретом диске переменной толщины. Кроме того ряд работ посвящен исследованию напряженно-деформированного состояния дисков на основе схематизированных диаграмм с условием пластичности Треска. В работе [36] Гохфельдом Д.А. изучено упругопластическое состояние дисков

переменной толщины для диаграммы растяжения без учета упрочнения. В статье [70] Микеладзе Т.М. исследовал упругопластическое состояние дисков переменной толщины для диаграммы растяжения без учета упрочнения. Упругопластическое состояние растяжения, учитывающее линейное упрочнение на основе диаграммы растяжения исследовано в статье Работнова Ю.Н. [75].

Работы Демьянушко И.В. [37-43] посвящены оптимальному проектированию дисков турбомашин. Первые алгоритмы оптимизации строились на основе теории пластин и оболочек. Затем исследования проводились совместно с Королевой Е.Ф., активно используя вариационные методы для решения поставленных задач. Основной целью являлась минимизация веса диска при сохранении его прочностных качеств.

Вклад в исследование напряженно-деформированного состояния упругопластических конструкций сделан учеными Воронежского государственного университета. М.А. Артемов и его ученики решили методом малого параметра задачу о вращающемся диске для квадратичного условия пластичности с учетом малого упрочнения [5]. Решению методом малого параметра упругопластической задачи с учетом упрочнения задачи плоской деформации посвящена работа [6].

Д.Д. Ивлевым были исследованы вопросы устойчивости вращающегося диска, а также потери несущей способности диска близкого круговому [46, 49]. Далее данные идеи были развиты А.А. Горбатовским [35] и А.А. Мартынюком [62]. Во всех работах задача решалась для условия пластичности Треска, без учета упрочнения.

За последние несколько лет вышел ряд работ направленных на изучение усталостной прочности дисков [2, 84, 86, 87]. Данные исследования носят расчетно-экспериментальный характер. Сложность учета истории нагружения при аналитическом решении задачи приводит авторов к заключению о преимуществе численных методов решения подобного рода задач.

Вариантам решения методом конечных элементов упругой задачи о вращающемся диске посвящен раздел в книге К.-Ю. Бате [15]. Задача

рассматривается для плосконапряженного состояния и для диска переменной толщины.

Исследованию упругопластических задач механики разрушения с использованием метода конечных элементов посвящен ряд работ Глаголева В.В. [32-34]. Рассматривались математические модели для материала, как с учетом упрочнения, так и без него. В качестве условия пластичности использовался критерий Мизеса.

Специфические характеристики материалов, применяемых в турбомашиностроении, требуют экспериментальной базы, на которой можно верифицировать создаваемые математические модели. Кутыревым В.В. с коллегами в работе [60] проводится расчетно-экспериментальное исследование потери несущей способности диска из высокопрочного титанового сплава.

Александровым С.В., Ломакиным Е.В. и его учениками аналитически рассматривается влияние выбора условия текучести на напряженно-деформированное состояние вращающегося диска [1]. Ввиду сложности получаемых соотношений для условия пластичности Мизеса делается вывод о преимуществе численных методов решения, в частности методом конечных элементов, упругопластической задачи с квадратичным условием пластичности.

Исследование несущей способности дисков, используемых в газотурбинных двигателях, проводится А.А. Бирфельдом в работе [26]. Указывается, что предпочтительным для определения предельных оборотов вращения является условие пластичности Мизеса. Несущая способность дисков из композиционных материалов рассматривается в работе [71]. Основным выводом является то, что искривление диска значительно ухудшает прочностные качества диска.

Чвановым В.К. и его коллегами рассматривается междисциплинарный анализ турбины турбонасосного агрегата жидкостного ракетного двигателя [88, 89]. Данная работа является показательной при решении связанной задачи механики жидкости и газа и деформируемого твердого тела. Наглядно демонстрируется преимущество методов автоматизированного конструирования над классическими методами расчета.

Вопросам исследования расчета на прочность дисков посвящен ряд работ Н.Н. Малинина [63, 64, 66-68]. Рассматриваются вопросы построения теории ползучести дисков с анизотропным упрочнением. Как один из основных методов решения осесимметричных задач о вращающихся дисках, предлагается метод конечных элементов.

В своей работе U. Guven [93] рассматривает полностью пластический диск с упругим включением в центре. Таким способом моделируется потеря несущей способности диска насаженного на упругий вал. В другой его работе [94] исследуется упругопластический диск на который напрессован упругий обод на внешнем радиусе. При решении используется условие пластичности Треска.

В работе Nejad M.Z. [98] и его коллег рассматривается упругопластическое состояние неоднородного диска. Решение проводится для постоянного коэффициента Пуассона и условия пластичности Треска. Показана зависимость области возникновения пластических деформаций от величины неоднородности материала.

Кроме того в ходе написания диссертации автор обращался к следующим работам российских и зарубежных ученых, связанным с компьютерным моделированием деталей и узлов турбомашин [51, 57, 95, 96, 102].

Актуальность темы. Повышающиеся требования к надежности и эффективности работы современных турбомашин требуют разработки и применения новых методов исследования напряженно-деформированного состояния элементов изучаемых конструкций с учетом возникновения пластических деформаций. Данные задачи актуальны для авиационной, аэрокосмической техники, применяются при проектировании различных энергетических установок. Одним из наиболее перспективных методов исследования данной темы является метод автоматизированного конструирования, в основе которого лежит метод конечных элементов.

Метод конечных элементов универсальный метод решения задач механики деформируемого твердого тела. Развитие вычислительных технологий позволило вывести его применение на качественно новый уровень. На данный момент

большинство натуральных экспериментов стало возможно заменить компьютерными экспериментами в различных пакетах прикладных программ.

Наибольшее распространение в мире получили пакеты автоматизированного конструирования, разработанные в США и Европе, однако, отечественное программное обеспечение также развивается быстрыми темпами. Для верификации вновь создаваемых отечественных программных продуктов требуется проведение тестирования на задачах, математические модели физически корректны.

В масштабах компьютерного эксперимента уточняются ключевые параметры, влияющие на надежность элементов турбомашин, например, обороты потери несущей способности диска. Моделирование проводится и для нелинейных условий пластичности.

Развитие вычислительных технологий привело к тому, что значимость приближенного численного решения, полученного в результате компьютерного моделирования, возросла для задач, где получить аналитическое приближенное решение невозможно.

Еще одной тенденцией в сфере автоматизированного конструирования является решение задач механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела в связанной постановке. Междисциплинарный анализ позволяет в одной математической модели решить вопросы смежных отраслей знания и максимально приблизиться к условиям натурального эксперимента.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета в рамках темы: «Разработка математических моделей и эффективных аналитических и численных методов решения статических и динамических задач механики деформируемых сред сложной структуры». Исследование соответствует п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести», п. 8. «Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического

исследования» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела».

Целями данного исследования являются:

Разработка алгоритма решения упругопластических задач о вращающихся дисках с использованием пакета автоматизированного конструирования.

Определение в рамках модели упругопластического тела распределения поля напряжений, деформаций и перемещений для упругопластического диска в состоянии плоского напряженного состояния и в осесимметричной постановке.

Постановка и решение связанной задачи об упругопластическом диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью.

Уточнение существующих формул для определения предельных оборотов вращения диска, когда диск полностью переходит в пластическое состояние.

Исследование зависимости получаемого напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков с учетом линейного изотропного упрочнения и истинной диаграммы деформирования.

Научная новизна.

1. Получено распределение напряжений, деформаций и перемещений для вращающегося упругопластического сплошного и кольцевого диска для плоского напряженного состояния. Использовалось условие пластичности Мизеса для трех моделей материала: без упрочнения, линейно изотропно упрочняющегося материала и материала, учитывающего истинную диаграмму растяжения.

2. Получены формулы для определения предельных оборотов вращения сплошного и кольцевого диска, более чем на 8% уточняющие существующие общепринятые формулы. Полученные формулы основаны на условии пластичности Мизеса и в них включен учет упрочнения материала.

3. Получено решение упругопластической задачи в рамках теории течения для условия пластичности Мизеса для осесимметричного диска постоянной толщины. Исследована зависимость напряженно-деформированного состояния диска от его относительной толщины. Показано, до какого значения

относительной толщины диска справедлива гипотеза о постоянстве напряженно-деформированного состояния по толщине диска.

4. Построена математическая модель и решена связанная задача для упругопластического диска, вращающегося в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью.

5. На основе решения связанной задачи уточнена методика определения момента сил трения диска и показана неточность в формуле, широко применяемой инженерами, работающими в аэрокосмической отрасли.

Достоверность проведенных исследований основывается на физически корректно сформулированных математических моделях. Для решения задач используется метод конечных элементов, доказавший свою эффективность при решении многих проблем механики сплошных сред. Кроме того на примере известного аналитического решения проведена верификация предлагаемого метода исследования.

Практическая ценность. Результаты могут быть использованы при проектировании конструкций авиационной и аэрокосмической техники, а также при создании различных энергетических установок. Полученные математические модели также можно использовать для верификации создаваемых пакетов автоматизированного конструирования. Материалы, представленные в главе 1, могут использоваться для ознакомления студентов старших курсов с методами автоматизированного конструирования.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на: научных семинарах кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета 2012 – 2014 гг.; на научных сессиях факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета 2012 – 2014 гг.; на международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проходившей в Воронежском государственном университете в 2013 г.; на всероссийской научно-технической конференции "Ракетно-космические двигательные установки", проходившей в

МГТУ им. Н.Э. Баумана. в г. Москва, в октябре 2013 г.; на III всероссийской конференции "Информационные технологии на службе оборонно-промышленного комплекса России", проходившей в г. Саров в 2014 г.; на VIII конференции по механике деформируемого твердого тела, проходившей в г. Чебоксары в 2014 г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано восемь печатных работ, из них две в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 102 наименований. Работа изложена на 124 листах машинного текста, содержит 67 рисунков и 3 таблицы.

Кратко остановимся на содержании работы. Во введении описаны актуальность темы, работы и задачи исследования, научная новизна, а также выносимые на защиту результаты исследования.

В первой главе дается описание подходов используемых в пакетах автоматизированного конструирования. Как характерная задача метода конечных элементов, рассмотрена задача о равновесии треугольного цилиндрического элемента. Проводится верификация метода, предлагаемого для решения задач о вращающихся дисках, с помощью известных аналитических решений в упругой постановке.

Вторая глава посвящена изучению упругопластического плосконапряженного состояния сплошного и кольцевого вращающихся дисков. Систематизированы известные ранее подходы по вычислению напряженно-деформированного состояния дисков с целью показать преимущество методов автоматизированного конструирования над классическими методами расчета. Рассмотрено три различных варианта материала: без упрочнения, линейно изотропно упрочняющийся и материал, поведение которого описывается истинной диаграммой растяжения.

Получены формулы для вычисления предельных оборотов вращения (потери несущей способности) для кольцевого и сплошного диска. Формулы построены для условия пластичности Мизеса и учитывают упрочнение материала.

В третьей главе исследуется осесимметричное напряженное состояние сплошного диска постоянной толщины. Классические методы расчета дисков используют гипотезу о постоянстве напряжений по толщине диска. Первый параграф данной главы посвящен изучению зависимости напряженно-деформированного состояния от относительной толщины диска. Результаты решения задачи позволяют определить ту относительную толщину диска, при которой компонентами напряжений $\tau_{\rho z}$ и σ_z пренебрегать уже недопустимо.

Второй параграф посвящен решению междисциплинарной задачи об упругопластическом диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью, где в одну математическую модель входят задачи из двух смежных отраслей науки: механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела. Исследовано влияние получаемой в результате течения жидкости эпюры давления на боковой стенке диска на напряженно-деформированное состояние.

В третьем параграфе изучаются вопросы определения момента сил трения диска. Систематизированы известные подходы по его вычислению. Показана нефизичность некоторых формул достаточно широко применяемых на практике. Исследованы зависимости коэффициента момента сил трения в зависимости от числа Рейнольдса.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе, а также те, которые вынесены автором на защиту.

Основные результаты диссертации, которые выносятся автором на защиту:

1. Сформулирована и решена связанная задача о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Исследовано влияние давления жидкости на напряженно-деформированное состояние диска.

2. Сформулирована и решена задача о плосконапряженном упругопластическом состоянии сплошного и кольцевого дисков с условием пластичности Мизеса. Выбраны три модели тела: без упрочнения, линейно изотропно упрочняющееся тело и тело, характеризуемое истинной диаграммой растяжения. Получены уточненные формулы для определения оборотов потери несущей способности диска.

3. Решена задача об осесимметричном упругопластическом состоянии сплошного диска с условием пластичности Мизеса. Исследовано влияние относительной толщины диска и параметра нагружения на максимальную величину напряжений $\tau_{\rho z}$ и σ_z . Определена относительная толщина диска, при которой компонентами напряжений $\tau_{\rho z}$ и σ_z пренебрегать недопустимо.

4. Приводятся основные соотношения и подходы по решению задач механики деформируемого твердого тела, реализованные в пакете автоматизированного конструирования ANSYS. Проведена оценка погрешности данного пакета на известном аналитическом решении для упругого вращающегося диска.

5. При решении связанной задачи исследован вопрос по определению момента сил трения диска. Показана нефизичность некоторых формул достаточно широко применяемых на практике. Исследованы зависимости коэффициента момента сил трения в зависимости от числа Рейнольдса.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Ковалеву Алексею Викторовичу за внимание и помощь, оказанную при написании работы.

ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. СРАВНЕНИЕ С АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ.

§ 1. Определяющие соотношения метода конечных элементов.

Метод конечных элементов универсальный математический аппарат, позволяющий приближенно численными методами решать большой круг задач механики деформируемого твердого тела, математические модели которых представлены в виде систем дифференциальных уравнений или в вариационной постановке. Данный метод широко используется для решения сложных упругих и упругопластических задач, не имеющих прямого аналитического решения. Кроме того методом конечных элементов возможно решить связанные задачи.

Методы и подходы, используемые в строительной механике и механике деформируемого твердого тела, использующие дискретизацию исследуемого объекта, например, метод сил и метод перемещений [31], были предвестниками современного МКЭ. основополагающие идеи и процедуры МКЭ были представлены Курантом [92] в 1943 г. при исследовании задачи о кручении стержня. Стимулом развития МКЭ стало активнейшее развитие авиации и космонавтики в 50-х годах прошлого столетия. Впервые термин «конечный элемент» был использован в 1960 году немецким математиком Клафом [91]. Развитие МКЭ так же связано со стремительным совершенствованием электронных вычислительных машин и появлением суперкомпьютеров.

Методы взвешенных невязок Галеркина и наименьших квадратов, используемые в МКЭ, значительно расширили круг задач доступных для решения данным методом. На данный момент МКЭ является универсальным способом решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим область, занимаемую сплошной средой, которую разобьем на дискретные части (рис 1.1). Результатом дискретизации является сетка из границ элементов. Точки пересечения отдельных элементов образуют узлы.

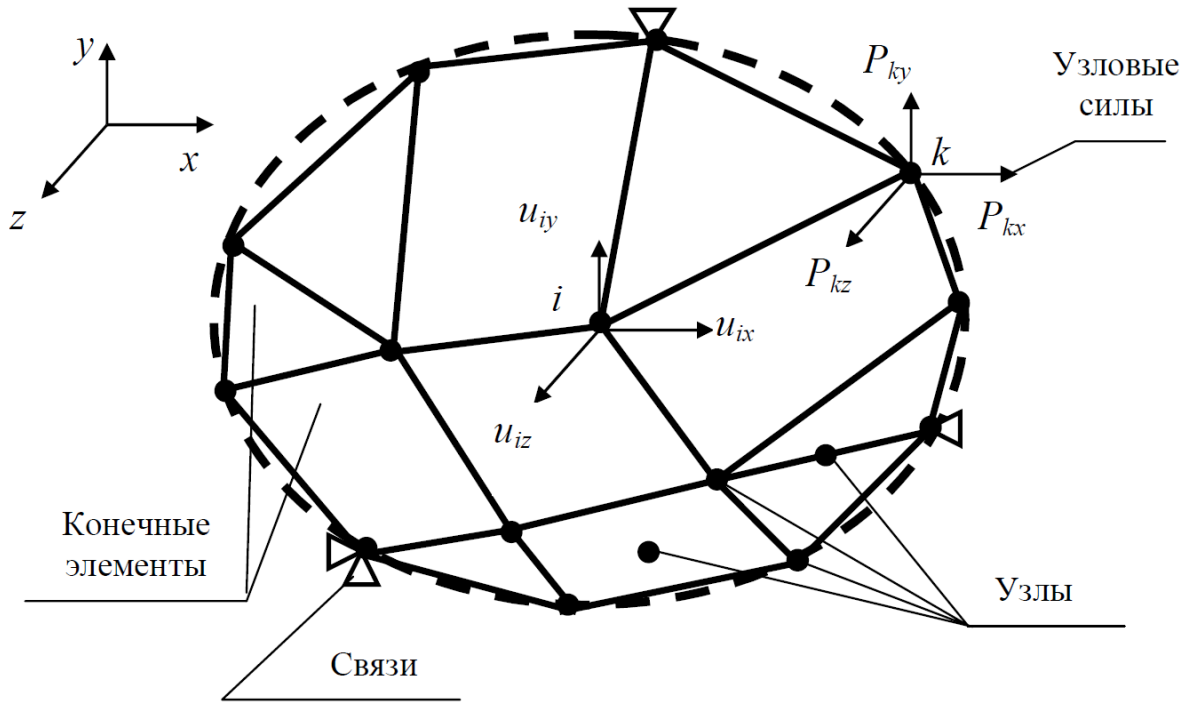


Рис 1.1

На границах или внутри элементов, где возможны значительные градиенты параметров, следует создавать дополнительные узловые точки. Дискретная модель, включающая в себя конечные элементы и узлы, стремящаяся максимально охватить исследуемый объект, называется конечно-элементной моделью деформируемого тела.

На этапе создания конечно-элементной модели узлы и элементы нумеруются. Нумерация проводится как глобально – для всей модели, так и локально – для каждого элемента в отдельности.

Исследование напряженно-деформированного состояния с помощью МКЭ требует задать свойства материала элемента, то есть для упругого состояния модуль упругости и коэффициент Пуассона. Для решения упругопластической задачи требуется знать истинные диаграммы деформирования, аппроксимация которых может быть осуществлена кусочно-линейными функциями. При решении задачи термоупругости для неравномерно нагретых тел, механические свойства

следует задавать в диапазоне температур и дополнять их коэффициентом теплового расширения.

При исследовании напряженно-деформированного состояния дисков турбомашин, особенно дисков компрессоров, их можно рассматривать как тонкие пластины, так как в них приближенно реализуется плоское напряженное состояние с симметрией полей напряжений, деформаций и перемещений относительно оси вращения. В дисках переменной толщины более характерных для турбин реализуется осесимметричное напряженное состояние. Решение пространственной задачи необходимо для уточненного расчета зон концентрации напряжений.

Безусловно, метод конечных элементов не единственно возможный метод исследования. Существует опыт применения других методов дискретизации пространственной задачи о вращающихся дисках, например метода конечных разностей и вариационно-разностного метода [3, 44, 82].

Стремительное развитие электронно-вычислительной техники и повышение требований к точности проводимых вычислений привело к появлению многих программных продуктов в сфере автоматизированного конструирования (Computer Aided Design). В основе подавляющего большинства программных комплексов лежит метод конечных элементов. Одним из лидеров в данной области является компания ANSYS Inc. Основателем компании является профессор Дж. Свонсон, который в качестве вектора развития выбрал многодисциплинарность инженерных расчетов [28]. С момента выхода первой версии в 1970 г. функционал программы пополнился спектром модулей по решению задач механики деформируемого твердого тела, теплового анализа, гидрогазодинамики, анализа процессов горения, взрыва, тепломассообмена, фазовых переходов и электродинамики.

Конкурентным преимуществом данного программного продукта является возможность решения связанных задач механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа. Данный функционал позволяет вводить в

математическую модель минимум предположений, что значительно повышает точность получаемого решения.

В следующем параграфе на примере треугольного цилиндрического конечного элемента рассмотрены математические алгоритмы, лежащие в основе одного из модулей ANSYS.

§ 2. Равновесие треугольного цилиндрического конечного элемента

Опишем пример использования метода конечных элементов для цилиндрического элемента треугольного сечения, характерного для осесимметричной задачи о вращающемся диске. Рассмотрим равновесие такого элемента, представленного на рисунке 1.2 в цилиндрической системе координат (r, θ, z) .

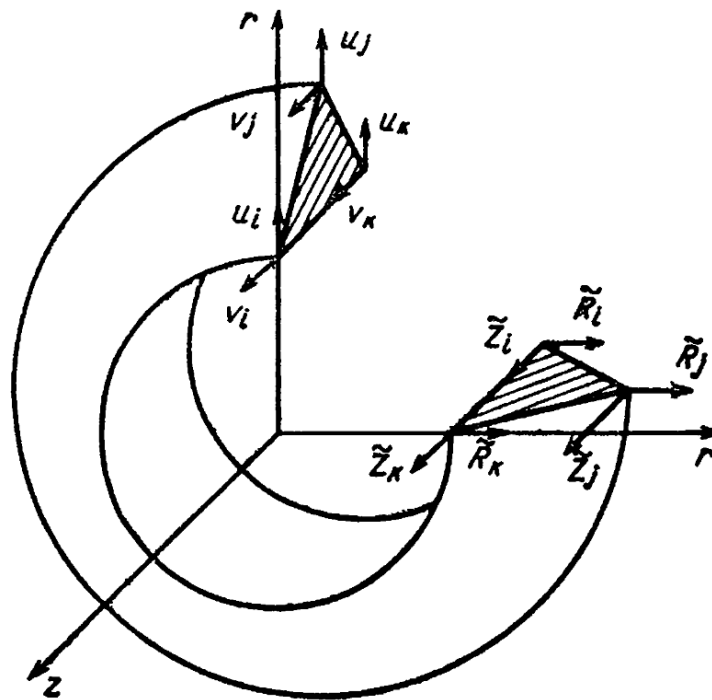


Рис 1.2

Обозначим координаты вершин треугольника следующим образом $(r_i; z_i)$, $(r_j; z_j)$, $(r_k; z_k)$. Радиальные (u_i, u_j, u_k) и осевые (v_i, v_j, v_k) перемещения узлов выбраны в качестве основных неизвестных. Предположим, что радиальные и

осевые перемещения являются функциями r и z и аппроксимация перемещений внутри треугольника происходит с помощью линейных функций [42]

$$\begin{aligned} u(r, z) &= d_1 + d_2 r + d_3 z, \\ v(r, z) &= d_4 + d_5 r + d_6 z, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

или в матричной записи

$$\begin{bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{bmatrix} = H(r, z) \bar{d},$$

где матрица $H(r, z) = \begin{bmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{bmatrix}$, а вектор-столбец неизвестных коэффициентов $\bar{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]^T$.

Вектор узловых перемещений точек имеет следующий вид

$$\bar{\xi} = [u_i \ u_j \ u_k \ v_i \ v_j \ v_k]^T = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \bar{d}, \quad (1.2.2)$$

где

$$N = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{bmatrix}.$$

Из (1.2.2) нетрудно получить выражение для искомых коэффициентов вектора-столбца \bar{d} , которое будет содержать только координаты и перемещения узлов

$$\bar{d} = Q \bar{\xi}, \quad (1.2.3)$$

где $Q = \begin{bmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$ – квадратная матрица

Подставляя (1.2.3) в (1.2.1), получаем перемещения узлов исследуемого треугольного элемента

$$\begin{bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{bmatrix} = H(r, z) Q \bar{\xi}. \quad (1.2.4)$$

Для осесимметричного напряженного состояния компоненты тензора деформации, записанные в виде вектора, имеют следующий вид

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (1.2.5)$$

Дифференцируя соотношения (1.2.4), получаем вектор деформации

$$\bar{\varepsilon} = BQ\bar{\xi}, \quad (1.2.6)$$

где $B(r, z)$ прямоугольная матрица размерности 4x6

$$B(r, z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/r & 1 & z/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2.7)$$

Соотношения закона Гука в матричной форме примут следующий вид

$$\bar{\sigma} = D (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_T),$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}, \quad (1.2.8)$$

$$\bar{\varepsilon}_T = \begin{bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{bmatrix},$$

где T – температура, α – коэффициент линейного расширения.

В законе Гука константы упругости записываются в виде симметричной матрицы четвертого порядка

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \quad (1.2.9)$$

Подставив (1.2.6) в (1.2.8), получим для вектор-столбца напряжений следующее выражение

$$\bar{\sigma} = DB(r, z)Q\bar{\xi} - D\bar{\xi}_T. \quad (1.2.10)$$

Пусть диск испытывает действие центробежной нагрузки, кроме того к диску приложено переменное по радиусу и вдоль оси вращения температурное поле $T(r, z)$ и распределенная внешняя нагрузка $\bar{q}(r, z)$. На конечный элемент от остальной части диска действуют радиальные $\tilde{R}_{i,j,k}$ и осевые $\tilde{Z}_{i,j,k}$ сосредоточенные силы (см. рис 1.2).

Запишем уравнения равновесия, воспользовавшись принципом возможных перемещений. Пусть узлам произвольного элемента сообщаются некоторые малые перемещения $\bar{\xi}_n^T = [u_i^* \ u_j^* \ u_k^* \ v_i^* \ v_j^* \ v_k^*]$. Работа, совершаемая силами в узлах конечного элемента, может быть выражена как

$$A_n^g = \bar{\xi}_n^* \bar{g}_n, \quad (1.2.11)$$

где $\bar{g}_n^T = [R_i \ R_j \ R_k \ Z_i \ Z_j \ Z_k]$ – вектор сил, приложенных к узлам элемента.

Запишем выражение для определения работы напряжений на вариации деформации $\bar{\varepsilon}_n^*$

$$U_n = \int_{v_n} \bar{\varepsilon}_n^{*T} \bar{\sigma}_n dv_n = \int_{v_n} \bar{\varepsilon}_n^{*T} DB(r, z)Q_n \bar{\xi}_n dv_n - \int_{v_n} \bar{\varepsilon}_n^{*T} D\bar{\varepsilon}_T dv_n.$$

В данном выражении интегрирование ведется по объему v_n некоторого выбранного элемента. Транспонируем обе части выражения (1.2.6). Тогда работа внутренних сил равна

$$U_n = \bar{\xi}_n^{*T} Q_n^T \left(\int_{v_n} B^T(r, z) DB(r, z) dv_n \right) Q_n \bar{\xi}_n - \bar{\xi}_n^{*T} Q_n^T \left(\int_{v_n} B^T(r, z) D\bar{\varepsilon}_T dv_n \right). \quad (1.2.12)$$

Действующую на элемент центробежную нагрузку представим в виде вектора

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.13)$$

где ρ – плотность материала, из которого изготовлен диск, ω – угловая скорость вращения диска.

С учетом (1.2.4) работа центробежных сил может быть представлена в виде формулы

$$A_n^\rho = \int_{v_n} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho\omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} dv_n = \bar{\xi}_n^{*T} Q_n^T \int_{v_n} H^T(r, z) \bar{m} dv_n. \quad (1.2.14)$$

Если конечный элемент находится на границе, то следует учитывать работу поверхностных сил. Запишем интеграл по боковым поверхностям элемента

$$A_n^q = \int_{s_n} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_r \\ q_z \end{bmatrix} ds_n = \bar{\xi}_n^{*T} Q_n^T \int_{s_n} \tilde{H}^T(r, z) \bar{q} ds, \quad (1.2.15)$$

где $\tilde{H}^T(r, z)$ – значения матрицы $H^T(r, z)$ на поверхности элемента, для элементов внутри области $\bar{q} = 0$.

В соответствии с принципом возможных перемещений полная работа всех сил на возможных перемещениях равна нулю и, следовательно,

$$U_n - A_n^g - A_n^\rho - A_n^q = 0. \quad (1.2.16)$$

Так как возможные перемещения $\bar{\xi}_n^{*T}$ выбираются произвольно, то для произвольного элемента будем иметь следующее уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \bar{g}_n = Q_n^T \left(\int_{v_n} B^T DB dv_n \right) Q_n \bar{\xi}_n - Q_n^T \int_{v_n} B^T D \bar{\varepsilon}_T dv_n - \\ - Q_n^T \int_{v_n} H^T \bar{m} dv_n - Q_n^T \int_{s_n} \tilde{H}^T \bar{q} ds. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу S_n шестого порядка, которая будет устанавливать связь между вектором узловых сил и вектором узловых перемещений. Такая матрица называется матрицей жесткости.

$$S_n = Q_n^T \left(\int_{v_n} B^T D B dv_n \right) Q_n. \quad (1.2.18)$$

Матрица S_n – симметричная матрица, так как получена при умножении прямых и транспонированных матриц. Кроме того матрицу жесткости удобно представлять в виде совокупности четырех подматриц третьего порядка

$$S_n = \begin{bmatrix} S_n^{11} & S_n^{12} \\ S_n^{12T} & S_n^{22} \end{bmatrix}. \quad (1.2.19)$$

Из выражения (1.2.17) запишем шестимерные векторы тепловых, центробежных и поверхностных нагрузок

$$\begin{aligned} \bar{f}_n^t &= Q_n^T \int_{v_n} B^T D \bar{\varepsilon}_T dv_n, \\ \bar{f}_n^m &= Q_n^T \int_{v_n} H^T \bar{m} dv_n, \\ \bar{f}_n^q &= Q_n^T \int_{s_n} \bar{H}^T \bar{q} ds. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

С учетом (1.2.18) и (1.2.20) выражение (1.2.17) запишем в виде

$$\bar{g}_n = S_n \bar{\xi}_n - \bar{f}_n^t - \bar{f}_n^m - \bar{f}_n^q. \quad (1.2.21)$$

Приведенные выше рассуждения касаются одного конечного элемента, далее продолжим составление уравнения равновесия для ансамбля, состоящего из N конечных элементов. По аналогии с (1.2.21) запишем

$$\begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \\ \vdots \\ \bar{g}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & & & 0 \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ \vdots \\ \bar{\xi}_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{f}_1^t \\ \bar{f}_2^t \\ \vdots \\ \bar{f}_N^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{f}_1^m \\ \bar{f}_2^m \\ \vdots \\ \bar{f}_N^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{f}_1^q \\ \bar{f}_2^q \\ \vdots \\ \bar{f}_N^q \end{bmatrix}. \quad (1.2.22)$$

Изменим порядок уравнений в системе (1.2.22) так, чтобы сначала были выписаны уравнения связанные с радиальными перемещениями узлов, а затем с осевыми. Тогда система уравнений примет вид

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} \bar{\xi} - \bar{f}^t - \bar{f}^m - \bar{f}^q, \quad (1.2.23)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{g}^T &= [R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_{3N} \quad Z_1 \quad Z_2 \quad \cdots \quad Z_{3N}], \\ \bar{\xi}^T &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_{3N} \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_{3N}]. \end{aligned}$$

Подматрицы матрицы жесткости ансамбля элементов имеют блочно-диагональную структуру

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} S_1^{11} & & & 0 \\ & S_2^{11} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_N^{11} \end{bmatrix}, \\ S_{22} &= \begin{bmatrix} S_1^{22} & & & 0 \\ & S_2^{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_N^{22} \end{bmatrix}, \\ S_{22} &= \begin{bmatrix} S_1^{22} & & & 0 \\ & S_2^{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_N^{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор перемещений в узлах. Он содержит, в силу поэлементной нумерации узлов, кратные компоненты, которые относятся к одному и тому же узлу, но имеющие различные номера. Кратность узла определяется тем количеством конечных элементов, которым он принадлежит.

Введем сквозную нумерацию узлов, тогда вектор узловых перемещений можно записать в виде

$$\bar{\chi}^T = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_M \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_M], \quad (1.2.24)$$

где M – число узлов при данном разбиении диска на N конечных элементов.

Можно ввести в рассмотрение прямоугольную матрицу K размерностью $6N \cdot 2M$, которая устанавливает связь между вектором узловых перемещений и вектором (1.2.24)

$$\bar{\xi} = K\bar{\chi}.$$

Связь для компонент u и v одинакова, следовательно, матрица K может быть представлена как

$$K = \begin{bmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & K_0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.25)$$

где матрица K_0 имеет размерность $3N \cdot M$ и называется ключевой [73].

Матрица K_0 имеет следующую структуру. В любой строке только одна компонента равна единице, остальные нули. Данная компонента стоит в столбце, номер которого равен номеру узла при сквозной нумерации. То есть единица, стоящая в i -ой строке и j -м столбце, означает, что узел при поэлементной нумерации имеет номер i , а при сквозной номер j .

Транспонировав матрицу K_0 , можем записать матричное уравнение равновесия сил в узлах

$$K^T \bar{g} = \bar{P}, \quad (1.2.26)$$

где $K^T = \begin{bmatrix} K_0^T & 0 \\ 0 & K_0^T \end{bmatrix}$.

Таким образом, получаем систему из $12N+2M$ уравнений с таким же количеством неизвестных. Порядок системы можно понизить, исключая элементы, соответствующие поэлементной нумерации узлов, и свести ее к системе из $2M$ уравнений (M – число узлов).

$$A\bar{\chi} = \bar{F}^t + \bar{F}^m + \bar{F}^q + \bar{P}. \quad (1.2.27)$$

Матричное уравнение (1.2.27) является основным уравнением позволяющим получить решение сформулированной задачи. Число уравнений и число неизвестных в этой системе одинаково. Уравнения эти являются уравнениями равновесия узлов относительно неизвестных узловых перемещений.

Квадратная матрица A порядка $2M$ называется матрицей жесткости системы. Эту симметричную матрицу можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}, \\
 A_{11} &= K_0^T S_{11} K_0, \\
 A_{22} &= K_0^T S_{22} K_0, \\
 A_{12} &= K_0^T S_{12} K_0.
 \end{aligned}
 \tag{1.2.28}$$

Вектор-столбец внешних сил для всей системы получается в результате следующего преобразования:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_R^{tmq} &= K_0^T \bar{f}_r^{tmq}, \\
 \bar{F}_Z^{tmq} &= K_0^T \bar{f}_Z^{tmq}.
 \end{aligned}
 \tag{1.2.29}$$

С помощью подхода, описанного в данном параграфе, рассмотрим задачи о плоском напряженном состоянии вращающегося сплошного и кольцевого диска в упругой постановке. Данные задачи имеют аналитическое решение. Сравнив аналитическое решение с численным решением, полученным при помощи метода конечных элементов, оценим погрешность используемого метода.

§ 3. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого вращающегося сплошного диска

Рассмотрим тонкий осесимметричный диск радиуса R_0 , вращающийся с постоянной угловой скоростью (рис. 1.3). В таком диске приближенно реализуется плоское напряженное состояние.

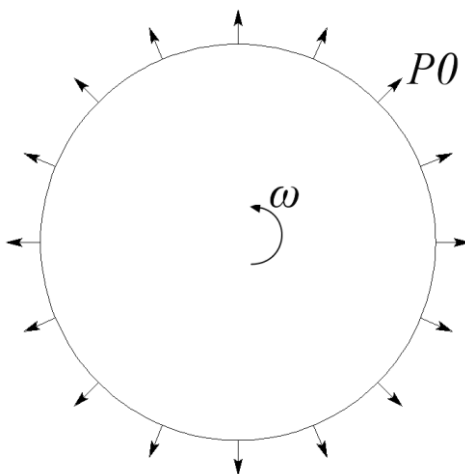


Рис. 1.3

Используем цилиндрическую систему координат, начало которой совпадает с центром диска. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу R_0 диска, а величины, имеющие размерность напряжения, к характерному напряжению k . Определение компонент напряжений и деформаций сводится в таком случае к решению системы двух дифференциальных и двух линейных уравнений [4, 83].

С учетом сделанных выше предположений остается одно уравнение равновесия, имеющее следующий вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \quad (1.3.1)$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 – плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k}.$$

Уравнение равновесия дополняется соотношениями закона Гука и условием совместности деформации

$$\frac{E}{k} \varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu \sigma_\rho, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{E}{k} \varepsilon_\rho = \sigma_\rho - \nu \sigma_\theta,$$

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \quad (1.3.3)$$

Дополним систему уравнений (1.3.1)-(1.3.3) соотношениями Коши

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}. \quad (1.3.4)$$

Выразим напряжение σ_θ из уравнения (1.3.1) и подставим его в соотношения закона Гука (1.3.2). Полученные выражения для компонент тензора деформаций подставим в условие совместности (1.3.3). Таким образом, для определения напряжения σ_ρ имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho^2 \frac{d^2 \sigma_\rho}{d\rho^2} + 3\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + (3 + \nu)m\rho^2 = 0. \quad (1.3.5)$$

Компоненты тензора напряжений с учетом (1.3.1) и (1.3.5) имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8}m\rho^2.\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

Согласно (1.3.2), (1.3.4) и (1.3.6) деформации и перемещения запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{E}{k}\varepsilon_\rho &= A(1-\nu) - \frac{B(1+\nu)}{\rho^2} + \frac{3(\nu^2-1)}{8}m\rho^2, \\ \frac{E}{k}\varepsilon_\theta &= A(1-\nu) + \frac{B(1+\nu)}{\rho^2} + \frac{\nu^2-1}{8}m\rho^2, \\ \frac{E}{k}u &= A(1-\nu)\rho + \frac{B(1+\nu)}{\rho} + \frac{\nu^2-1}{8}m\rho^3.\end{aligned}\tag{1.3.7}$$

Пусть внешний контур диска свободен от радиальных усилий. В силу ограниченности $\sigma_\rho \neq \infty$, константу B следует положить равной нулю. Тогда решение, с учетом граничных условий, определяем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{3+\nu}{8}m - \frac{3+\nu}{8}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}m - \frac{1+3\nu}{8}m\rho^2, \\ \frac{E}{k}\varepsilon_\rho &= (3+\nu - 3(1+\nu)\rho^2)\frac{m(1-\nu)}{8}, \\ \frac{E}{k}\varepsilon_\theta &= (3+\nu - (1+\nu)\rho^2)\frac{m(1-\nu)}{8}, \\ \frac{E}{k}u &= ((3+\nu)\rho - (1+\nu)\rho^3)\frac{m(1-\nu)}{8}.\end{aligned}\tag{1.3.8}$$

Сравним точное аналитическое решение с численным решением полученным методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS Mechanical. Формулировка описанной выше математической модели может проводиться как в графическом режиме, так и с помощью скриптового языка программирования Mechanical APDL.

Зададим для исследуемой геометрической модели сетку конечных элементов. Размер элемента выберем таким, чтобы в диаметральном сечении было расположено не менее 60 элементов. Построенная сетка состоит из 9457 узлов и 3088 элементов и показана на рисунке 1.4

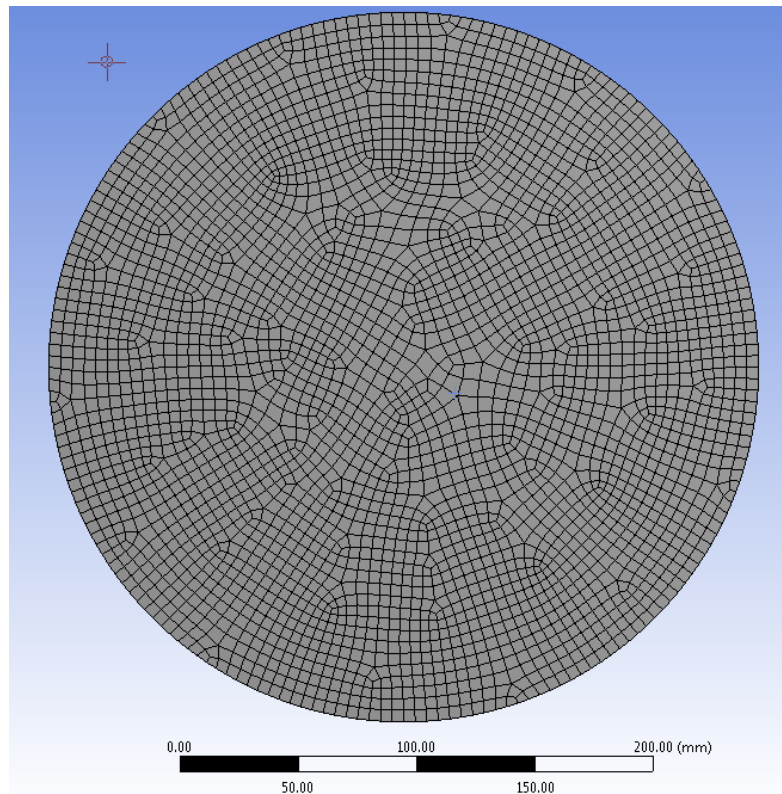


Рис. 1.4

При решении задачи в ANSYS Mechanical требуется задать константы, описывающие свойства материала. Выбраны следующие значения характерные для конструкционной стали: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho_0 = 7850$ кг/м³.

В качестве граничных условий заданы угловая скорость вращения в разделе Internal-Rotational velocity. Для обеспечения независимости получаемых компонент напряжений и деформаций от угловой координаты θ для внешнего контура диска применяется условие Support-Remote displacement привязанное к центру диска. Далее в этом условии центру диска задается полное отсутствие степеней свободы. Такое сочетание граничных условий обеспечивает зависимость $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, u$ только от радиальной координаты ρ .

Численное решение, по аналогии с аналитическим, было приведено к безразмерному виду. На рисунках 1.5-1.7 показаны графики зависимости компонент тензора напряжений, деформаций и перемещений от радиальной координаты. На графиках «звездочками» обозначены результаты численного решения, а сплошной линией результаты аналитического решения.

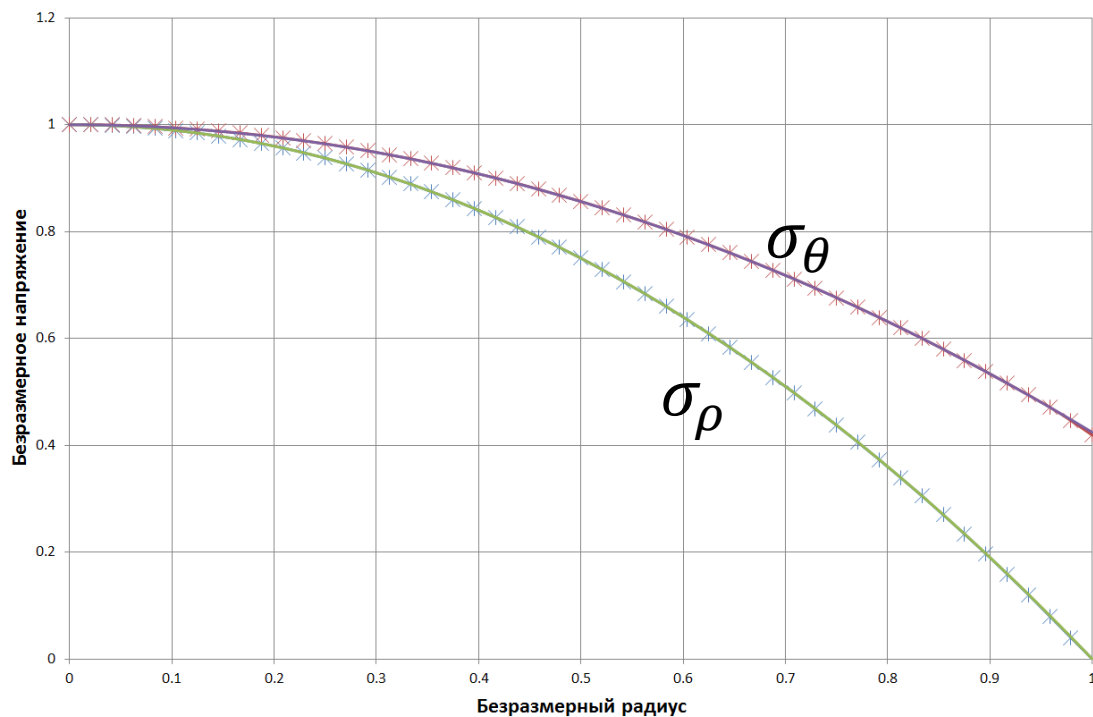


Рис. 1.5

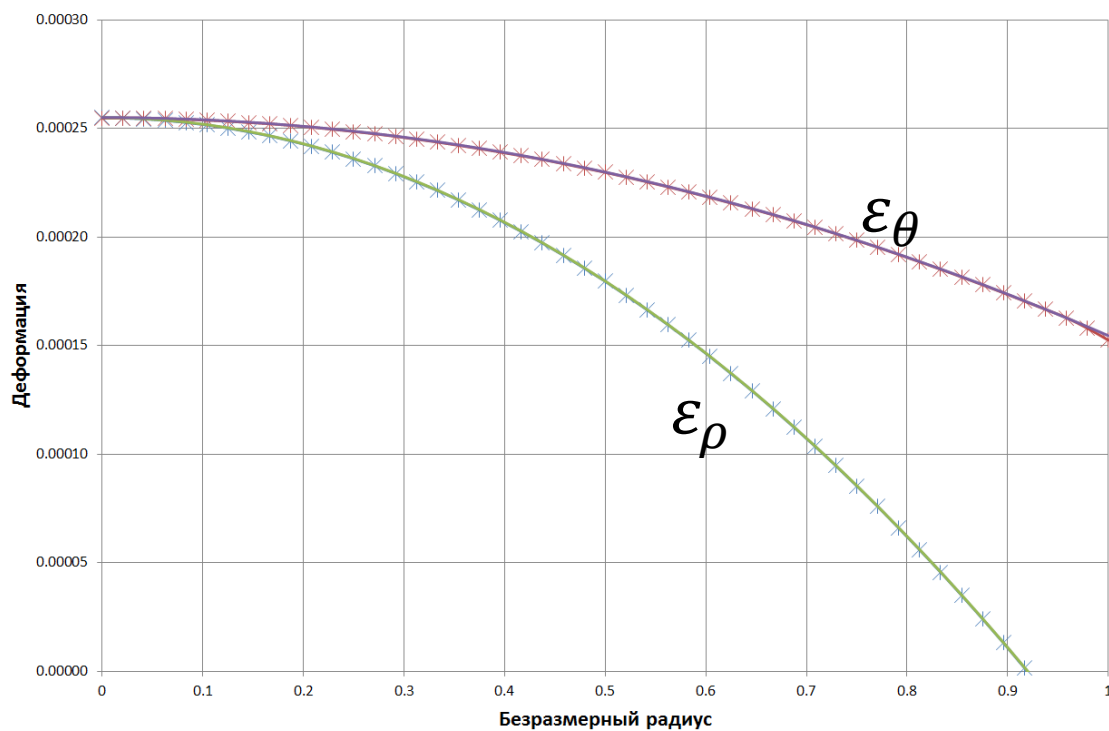


Рис. 1.6

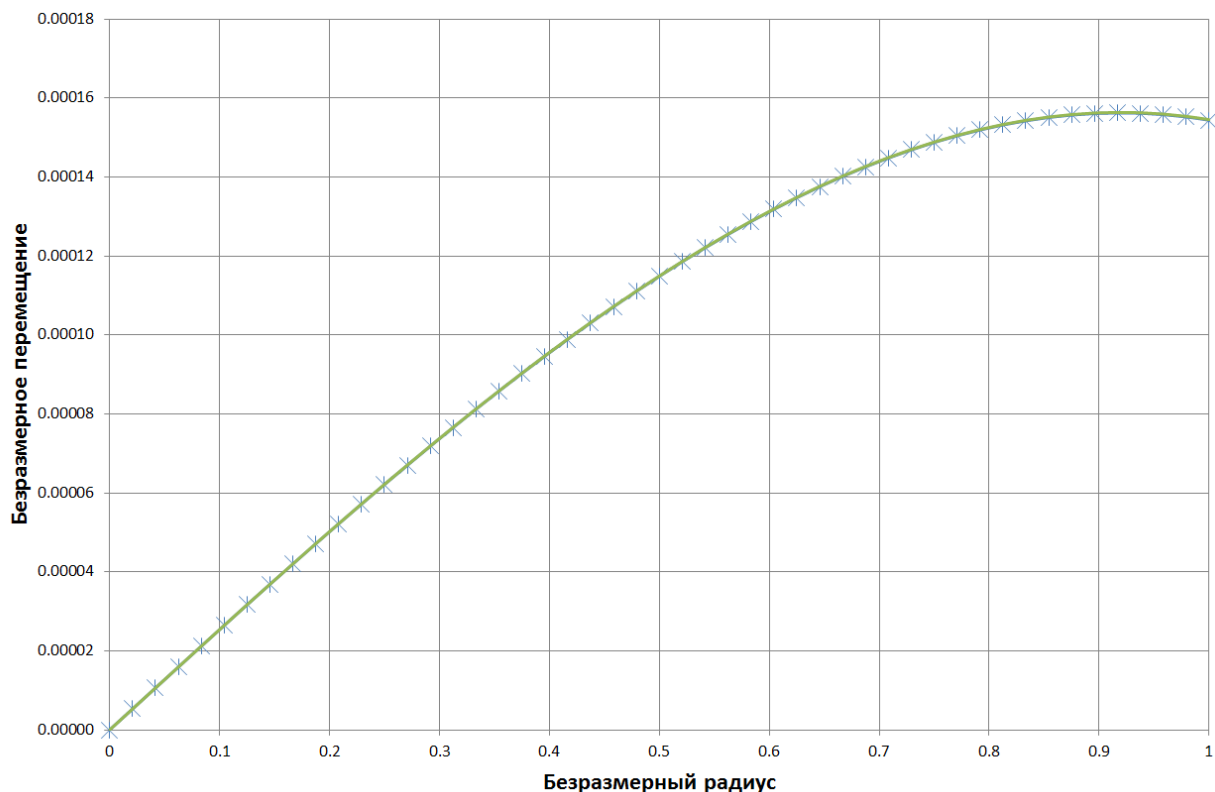


Рис. 1.7

Для оценки погрешности вычислим значения компонент $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, u$, определяющих напряженно-деформированное состояние диска, при N различных значениях безразмерного радиуса диска. Просуммируем отдельно значения, полученные для аналитического и для численного решений. Тогда, например, для напряжений σ_ρ имеем

$$\sigma_\rho^A = \sum_i^N \sigma_\rho^i,$$

$$\sigma_\rho^Ч = \sum_i^N \sigma_\rho^i.$$

Погрешность численного решения оценим как

$$\Phi_{\sigma_\rho} = \frac{\sigma_\rho^A}{\sigma_\rho^Ч}. \quad (1.3.8)$$

Аналогичные рассуждения проведем для остальных компонент определяющих напряженно-деформированное состояние.

Для сетки, показанной на рисунке 1.4, погрешность численного решения составила менее 0,04%. Проведен ряд расчетов с другими вариантами дискретизации геометрической модели. Вместо четырехугольных элементов были выбраны треугольные. Также был рассмотрен вариант с увеличенным в 2 раза количеством элементов в диаметральном направлении с 60 до 120.

Уменьшение размера конечного элемента приводит к незначительному снижению погрешности, что говорит о сеточной независимости задачи. Подобный анализ проводится при решении всех последующих задач. Следует отметить, что погрешность менее 0,04%, удовлетворяет всем требованиям проводимых инженерных расчетов в области турбомашиностроения.

§ 4. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого вращающегося кольцевого диска

Кроме сплошных дисков для исследования напряженно-деформированного состояния деталей турбомашин используются и кольцевые диски. Данная задача актуальна для дисков, которые выполнены отдельно от вала.

Рассмотрим обобщение задачи, представленной в предыдущем параграфе – задачи о вращающемся упругом кольцевом диске (рис 1.8), к внутреннему и внешнему контуру которого приложены равномерные по окружности нормальные усилия.

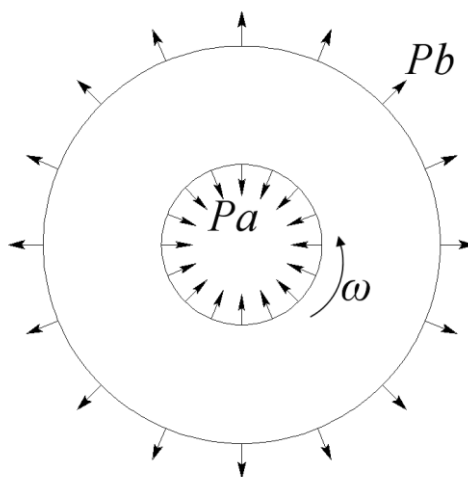


Рис. 1.8

Учитывая, что граничные условия примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho(a) &= p_a, \\ \sigma_\rho(1) &= p_b.\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

неизвестные константы интегрирования в выражениях (1.3.6) и (1.3.7) будут равны

$$\begin{aligned}A &= \frac{p_a a^2 - p_b}{a^2 - 1} + \frac{3+\nu}{8} m(a^2 + 1), \\ B &= \frac{a^2(p_a - p_b)}{a^2 - 1} + \frac{3+\nu}{8} ma^2.\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

С учетом (1.4.2), выражения для напряжений, деформаций и перемещения примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{p_a a^2 - p_b}{a^2 - 1} - \frac{a^2(p_a - p_b)}{a^2 - 1} \frac{1}{\rho^2} + \frac{3+\nu}{8} m(1 + a^2(1 - \frac{1}{\rho^2}) - \rho^2), \\ \sigma_\theta &= \frac{p_a a^2 - p_b}{a^2 - 1} + \frac{a^2(p_a - p_b)}{a^2 - 1} \frac{1}{\rho^2} + \frac{3+\nu}{8} m(1 + a^2(1 + \frac{1}{\rho^2}) - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \rho^2), \\ \frac{E}{k} \varepsilon_\rho &= (\frac{p_a a^2 - p_b}{a^2 - 1} + \frac{3+\nu}{8} m(a^2 + 1))(1 - \nu) - \\ &\quad - (\frac{a^2(p_a - p_b)}{(a^2 - 1)} + \frac{3+\nu}{8} ma^2) \frac{(1+\nu)}{\rho^2} + \frac{3(\nu^2 - 1)}{8} m\rho^2, \\ \frac{E}{k} \varepsilon_\theta &= (\frac{p_a a^2 - p_b}{a^2 - 1} + \frac{3+\nu}{8} m(a^2 + 1))(1 - \nu) + \\ &\quad + (\frac{a^2(p_a - p_b)}{(a^2 - 1)} + \frac{3+\nu}{8} ma^2) \frac{(1+\nu)}{\rho^2} + \frac{\nu^2 - 1}{8} m\rho^2, \\ \frac{E}{k} u &= (\frac{p_a a^2 - p_b}{a^2 - 1} + \frac{3+\nu}{8} m(a^2 + 1))(1 - \nu)\rho + \\ &\quad + (\frac{a^2(p_a - p_b)}{(a^2 - 1)} + \frac{3+\nu}{8} ma^2) \frac{(1+\nu)}{\rho} + \frac{\nu^2 - 1}{8} m\rho^3.\end{aligned}\tag{1.4.3}$$

Далее решим задачу с помощью метода конечных элементов в ANSYS Mechanical. Зададим для исследуемой геометрической модели сетку конечных элементов. Размер элемента выберем таким, чтобы в диаметральном сечении было расположено не менее 45 элементов. Построенная сетка состоит из 13632 узлов и 4416 элементов и показана на рисунке 1.9

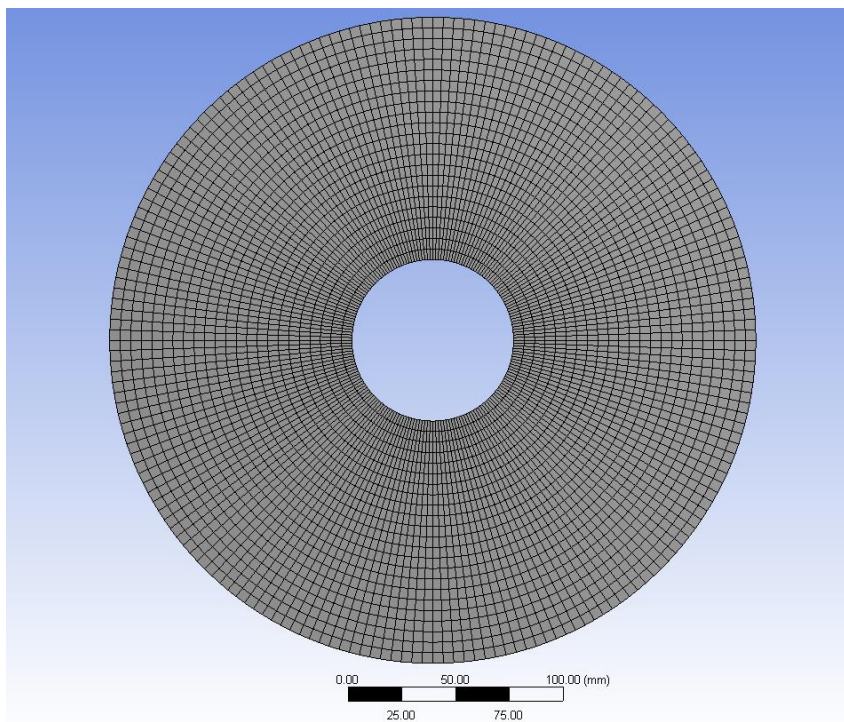


Рис. 1.9

Константы, описывающие свойства материала заданы такими же, как и в §3 данной главы. Кроме того было проведено исследование на независимость получаемого решения от сетки конечных элементов.

В качестве граничных условий заданы угловая скорость вращения в разделе Internal-Rotational velocity. Также, как и для случая сплошного диска, следует обеспечить независимость получаемых компонент напряжений и деформаций от угловой координаты θ . Как для внешнего, так и для внутреннего контуров диска применяются два условия Support-Remote displacement привязанные к центру диска. Далее в этих условиях центру диска сообщается отсутствие степеней свободы. Такое сочетание граничных условий обеспечивает зависимость $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$, и только от радиальной координаты ρ .

Численное решение, по аналогии с аналитическим, было приведено к безразмерному виду. В качестве безразмерной длины выбран внешний радиус диска, напряжения приведены к максимальному напряжению σ_ρ . На рисунках 1.10-1.12 показаны графики зависимости компонент тензора напряжений, деформаций и перемещений от радиальной координаты. На графиках «звездочками» обозначены результаты численного решения, а сплошной линией результаты аналитического решения.

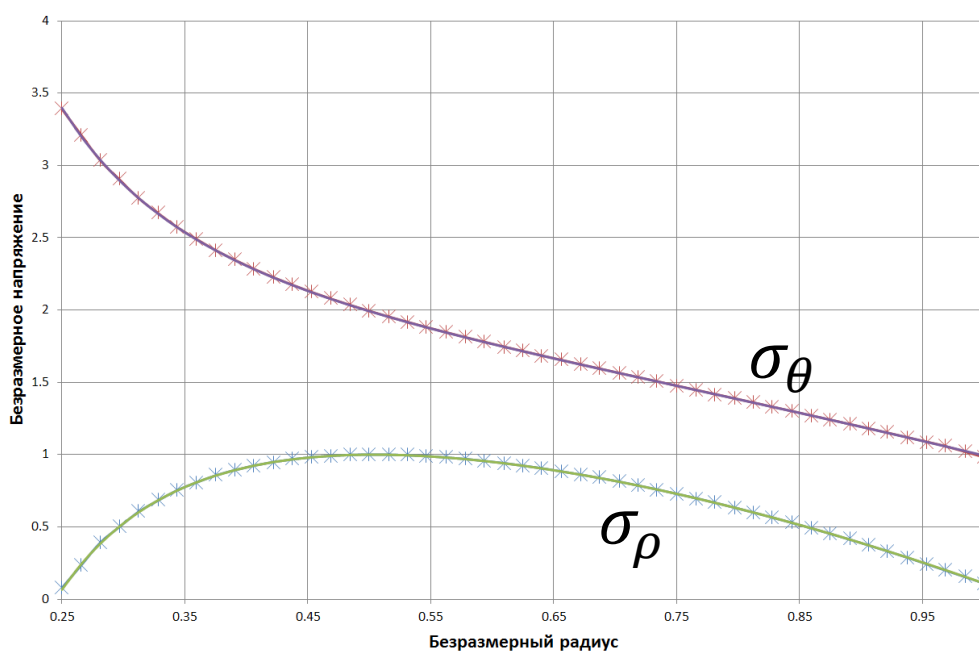


Рис. 1.10

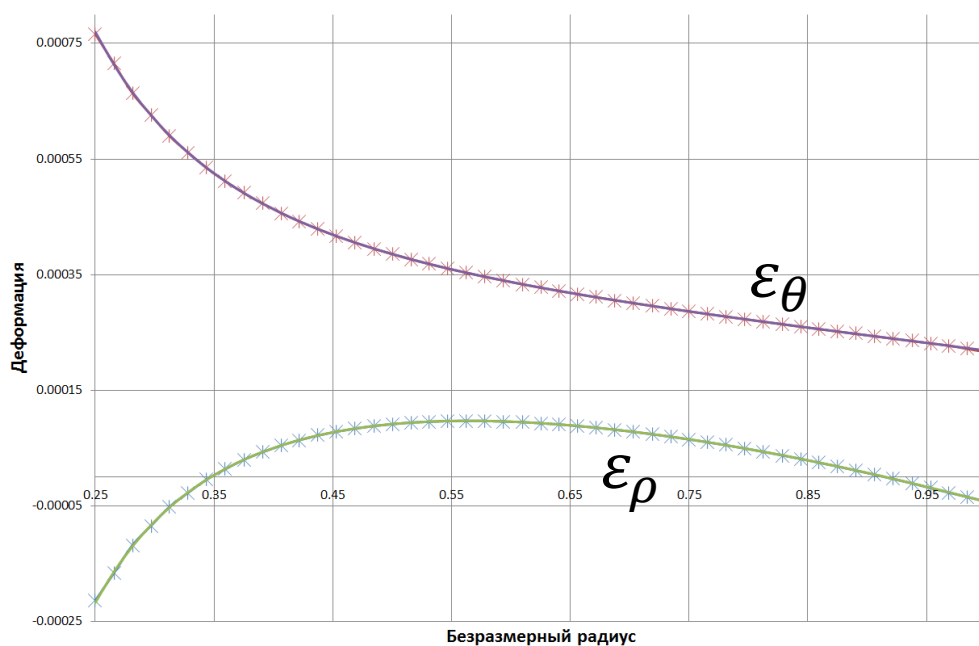


Рис. 1.11

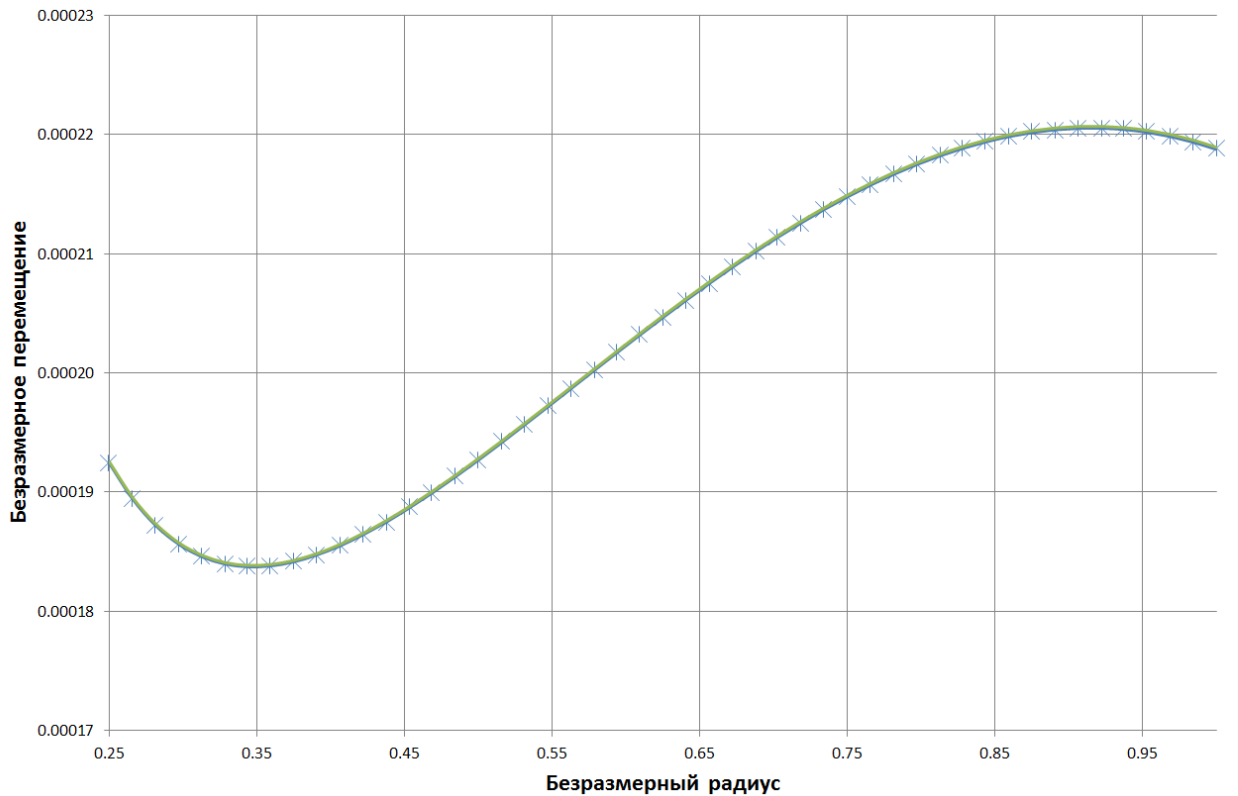


Рис. 1.12

В соответствии с (1.3.8) оценена погрешность численного решения. Для сетки, показанной на рисунке 1.9, погрешность составила менее 0,1%.

Максимальное радиальное напряжение в обоих решениях возникает в точке $\rho_{max} = \sqrt{a}$. Максимальное окружное напряжение действует на внутренней границе, причем оно больше чем σ_{ρ}^{max} .

Когда радиус отверстия a стремится к нулю, максимальное окружное напряжение стремится к значению, вдвое большему того, которое действует в центре сплошного диска и определяется формулой (1.3.8). Таким образом, введение малого кругового отверстия на оси сплошного вращающегося диска удваивает максимальное напряжение. В случае эксцентрического отверстия явление концентрации напряжений происходит по другим зависимостям, описанным в работе [101].

Следует отметить, что решение задач о вращающихся дисках в упругой постановке при плоском напряженном состоянии можно обобщить для дисков переменной толщины, предполагая, что напряжения по толщине диска не меняются.

Выражая компоненты напряжений через u , получим дифференциальное уравнение

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} - u + \frac{r}{h} \frac{dh}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} + \nu u \right) = \frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 \rho^3, \quad (1.4.4)$$

где $h = h(\rho)$ – функция описывающая зависимость толщины диска от радиуса.

Удачное приближение к реальной форме вращающихся дисков, например турбин, можно получить, разделив диск на отдельные части, аппроксимируя их форму несколькими функциями $h_1 \dots h_n$. При решении подобных задач методом конечных элементов ограничений на геометрию диска не накладывается и возможно максимально точно учесть ее влияние на напряженно-деформированное состояние.

§ 5. Обсуждение результатов

В первом параграфе приведены основные соотношения метода конечных элементов при решении задач о вращающихся дисках. Дано общее описание программного комплекса автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical. Освещается основной функционал данного продукта и алгоритмы моделирования в нем. Проведено сравнение численного решения с известными аналитическими решениями для сплошного и кольцевого диска.

В §2 данной главы рассмотрено равновесие треугольного цилиндрического конечного элемента, характерного для задач о вращающихся дисках. Показаны матричные уравнения, используемые в алгоритмах ANSYS Mechanical, для решения упругих задач. Выписано уравнение равновесия отдельного элемента, матрица жесткости и векторы тепловых, центробежных и поверхностных нагрузок. Полученные уравнения расширены на ансамбль, состоящий из N элементов. Приведен алгоритм перенумерации узлов с использованием ключевой матрицы (1.2.25).

Решение задач, не имеющих точного аналитического решения, требует верификации используемых численных методов решения. Верификация

используемого метода решения проведена на двух задачах: об упругом вращающемся сплошном диске и об упругом вращающемся кольцевом диске. Задачи решены для случая плоского напряженного состояния.

Для обеих задач в §3 и §4 приводится аналитическое решение (1.3.8) и (1.4.3). Выражены компоненты напряжений, деформаций и перемещения в безразмерном виде в цилиндрической системе координат. В качестве характерного радиуса использовался радиус диска. Характерным напряжением в задаче о сплошном диске выбиралось максимальное в области напряжение $\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0)$, характерным напряжением в задаче о кольцевом диске выбиралось максимальное радиальное напряжение $\sigma_\rho(\rho_{max})$ при $\rho_{max} = \sqrt{a}$.

Полученное аналитическое решение в случае плоского напряженного состояния можно обобщить для случая диска переменной толщины с предположением о постоянстве напряжений по толщине диска (1.4.4).

Для решения задач с помощью метода конечных элементов были построены сетки с помощью генератора сеток ANSYS Meshing. Проведено исследование решения на сеточную независимость, то есть решение осуществлялось на нескольких конечно-элементных моделях с постепенным уменьшением размера элемента. Когда разница между двумя решениями составляла менее 0,01%, сетка признавалась качественной и решение, полученное с ее помощью, сравнивалось с аналитическим решением.

По алгоритму (1.3.8) оценена погрешность численного решения. Для задачи о сплошном диске погрешность составила менее 0,04%. В задаче о кольцевом диске получена несколько большая погрешность 0,1%.

Следует отметить, что погрешность менее 0,1% для задач линейной теории упругости, удовлетворяет всем требованиям проводимых инженерных расчетов в области турбомашиностроения.

Ввиду простоты математической модели граничные условия при работе с пакетом автоматизированного конструирования задавались в графическом режиме. Решение более сложных задач может потребовать использования внутреннего скриптового языка Mechanical APDL, где работа с моделью

осуществляется с помощью матрицы жесткости ансамбля элементов со сквозной нумерацией узлов.

Предлагаемый алгоритм численного моделирования задач о вращающихся дисках можно считать верифицированным. При решении задач в упругопластической постановке следует ожидать малую погрешность в упругой зоне. Решение в пластической зоне будет зависеть от модели упрочнения, используемой при решении методом конечных элементов.

ГЛАВА II. ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В СЛУЧАЕ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Решение в ANSYS Mechanical более сложных упругопластических задач сопряжено с вопросами корректного описания свойств материала и задания граничных условий. Выбор модели упрочнения значительно влияет на получаемые результаты. Данная глава посвящена изучению влияния диаграммы деформирования материала на напряженно-деформированное состояние вращающихся дисков. Рассматривается три варианта материала: без упрочнения, линейно изотропно упрочняющийся и материал, описываемый истинной диаграммой растяжения.

В турбомашиностроении для оценки оборотов потери несущей способности диска широко используются формулы, основанные на условии пластичности Треска [22, 52, 72]. Как показывается в данной главе, существующие формулы дают заниженную оценку. Проведены исследования напряженно-деформированного состояния сплошного и кольцевого дисков для условия пластичности Мизеса.

§ 1. Тонкий вращающийся упругопластический сплошной диск

В § 3 главы I рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругого вращающегося сплошного диска. При увеличении угловой скорости вращения диска, при достижении некоторых оборотов в центре возникает пластическое состояние [80]. С возрастанием оборотов упругопластическая зона заполняет некоторый круг радиуса ρ_s . Круговое кольцо вне этого круга остается в линейно упругом состоянии.

Сформулируем математическую модель для данной задачи. В тонком диске, как отмечалось ранее, приближенно реализуется плоское напряженное состояние. Уравнения (1.3.1)-(1.3.4) следует дополнить кинематическими соотношениями, определяющими полные деформации в виде суммы пластической и упругой составляющих

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Также следует записать условие пластичности, устанавливающее предельное значение напряжений, до которого реализуется упругое состояние. Уравнение состояния определит связь напряжений и пластических деформаций или приращений деформаций [65]. В упругопластическом теле также должно выполняться условие непрерывности компонент тензора напряжений $[\sigma_{ij}] = 0$ и компонент вектора перемещений на упругопластической границе [29].

Аналитически данную задачу можно решить только при использовании условия пластичности Треска. Условие пластичности в данном случае примет вид

$$\sigma_\theta = k.\tag{2.1.2}$$

В пластической области тогда получаем статически определимую задачу

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + m\rho^2 - \sigma_\theta &= 0, \\ \sigma_\theta - k &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Тогда компоненты напряжений в пластической области имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= k - \frac{1}{3}m\rho^2 + \frac{C}{\rho}, \\ \sigma_\theta - k &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

В центре диска $\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0) = k$, следовательно, константа интегрирования обращается в ноль.

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= k - \frac{1}{3}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= k.\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

Упругие деформации в пластической зоне с учетом (1.3.2) определяются по формулам

$$\begin{aligned} E\varepsilon_r^e &= (1-\nu)k - \frac{1}{3}m\rho^2, \\ E\varepsilon_\theta^e &= (1-\nu)k + \frac{\nu}{3}m\rho^2. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

В пределах теории пластического течения $\varepsilon_\rho^p = 0$. Учитывая соотношения закона Гука и соотношения Коши для деформаций, получаем уравнение для определения перемещений

$$E \frac{du}{d\rho} = (1-\nu)k - \frac{1}{3}m\rho^2. \quad (2.1.7)$$

Частное решение этого уравнения с учетом того, что перемещение в центре диска равно нулю имеет вид

$$Eu = (1-\nu)k\rho - \frac{1}{9}m\rho^3. \quad (2.1.8)$$

Кинематические величины в пластической области имеют вид

$$\begin{aligned} Eu &= (1-\nu)k\rho - \frac{1}{9}m\rho^3, \\ E\varepsilon_r &= (1-\nu)k - \frac{1}{3}m\rho^2, \\ E\varepsilon_\theta &= E \frac{u}{\rho} = (1-\nu)k - \frac{1}{9}m\rho^2, \\ E\varepsilon_r^e &= (1-\nu)k - \frac{1}{3}m\rho^2, \\ E\varepsilon_\theta^e &= (1-\nu)k + \frac{\nu}{3}m\rho^2, \\ \varepsilon_r^p &= 0, \\ E\varepsilon_\theta^p &= -\frac{1}{9}m\rho^2 - \frac{\nu}{3}m\rho^2. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

На упругопластической границе пластические деформации не обращаются в ноль, что говорит о недостатках теории течения при условии пластичности Треска. Поэтому при решении аналогичных задач условие пластичности Треска

приводит к физически неверным результатам. Рассмотрим данную задачу, используя соотношения деформационной теории пластичности.

Связь между деформациями и напряжениями с учетом соотношений Коши может быть записана для несжимаемого тела в следующем виде

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{u}{\rho} \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho}.$$

Учитывая формулы (2.1.5), получаем дифференциальное уравнение для определения радиальной компоненты вектора перемещений

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{u}{\rho} - u \frac{3m\rho}{3k + m\rho^2}. \quad (2.1.10)$$

Общее решение уравнения (2.1.10) имеет вид

$$u = C \frac{3\rho}{(3k + m\rho^2)^{3/2}}. \quad (2.1.11)$$

Так как в центре диска перемещение равно нулю константа интегрирования должна обратиться в ноль, то есть перемещение также обращается в ноль. Таким образом, соотношения деформационной теории пластичности с условием пластичности Треска также приводят к физически неверным результатам.

Несмотря на недостатки условия пластичности Треска при решении задачи в деформациях, решение задачи в напряжениях широко используется в инженерных расчетах при оценке несущей способности диска [22, 36, 42, 65, 90, 93, 95, 98].

Из решения (1.3.6) определим константы интегрирования с учетом условия неразрывности напряжений на упругопластической границе и полученных напряжений в пластической зоне (2.1.5). Константы в данном случае имеют вид

$$A = \frac{1 + 3\nu}{12} \rho_0 \omega^2 \rho_s^2 + k,$$

$$B = \frac{1 + 3\nu}{24} \rho_0 \omega^2 \rho_s^4.$$

Предполагая, что внешний контур диска свободен от усилий, нетрудно получить формулу, устанавливающую зависимость между радиусом упругопластической границы и угловой скоростью вращения диска

$$\omega = \sqrt{24 \frac{k}{\rho} \frac{R_0^2}{3(3+\nu)R_0^4 - 2(1+3\nu)R_0^2\rho_s^2 + (1+3\nu)\rho_s^4}} \quad (2.1.12)$$

Преобразуем формулы (1.3.6) для определения напряжений в упругой области с учетом найденных констант интегрирования

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= k + \frac{1+3\nu}{24} \rho_0 \omega^2 \left(2\rho_s^2 - \frac{\rho_s^4}{\rho^2} - 3 \frac{3+\nu}{1+3\nu} \rho^2 \right), \\ \sigma_\theta &= k + \frac{1+3\nu}{24} \rho_0 \omega^2 \left(2\rho_s^2 + \frac{\rho_s^4}{\rho^2} - 3\rho^2 \right). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Предельная угловая скорость вращения, при которой пластическая область заполняет весь диск, и несущая способность диска полностью исчерпывается, получается из формулы (2.1.12), полагая в ней $\rho_s = R_0$

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{3k}{\rho_0 R_0^2}} \quad (2.1.14)$$

Условие пластичности Треска не учитывает эффекты упрочнения материала, которые значительно влияют на напряженно-деформированное состояние. Рассмотрим математическую модель включающую модель пластического тела с трансляционным упрочнением, предложенную А.Ю. Ишлинским [53].

$$f(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad i, j, k, = 1, 2, 3. \quad (2.1.15)$$

Использование модели А.Ю. Ишлинского приводит к статически неопределимой задаче. При этом, если используется нелинейное условие пластичности, например, квадратичное

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2 - c(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p))^2 + (\sigma_1 - \sigma_3 - c(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p))^2 + \\ + (\sigma_3 - \sigma_2 - c(\varepsilon_3^p - \varepsilon_2^p))^2 = 2k^2, \end{aligned}$$

то в рамках теории пластического течения имеет место проблема, связанная с интегрированием соотношений ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_k^p = 2d\lambda \left(2\sigma_k - \sigma_i - \sigma_j - c(2\varepsilon_k^p - \varepsilon_i^p - \varepsilon_j^p) \right),$$

где индексы i, j, k циклическая перестановка индексов 1, 2, 3.

В работе [5] методом малого параметра получено нулевое и первое приближение для исследуемой задачи при условии малого упрочнения. Отмечается, что в рамках теории пластического течения при $\delta = 0$, данный метод не приводит к интегрируемым соотношениям ассоциированного закона пластического течения и все дальнейшие рассуждения в работе проведены в рамках деформационной теории.

В нулевом приближении получена следующая система уравнений, описывающих пластическую область

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{1}{2}\sigma_\rho^{(0)} \pm \sqrt{4 - 3\sigma_\rho^{(0)2}} + m\rho^2 &= 0, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\sigma_\rho^{(0)} \pm \sqrt{4 - 3\sigma_\rho^{(0)2}} \right), \\ \frac{du^0}{d\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{3\sigma_\rho^{(0)}}{\pm\sqrt{4 - 3\sigma_\rho^{(0)2}}} - 1 \right) \frac{u^0}{\rho} + & \\ + (1 - 2\nu) \frac{k}{E} \left(\frac{1}{\pm\sqrt{4 - 3\sigma_\rho^{(0)2}}} - \frac{\sigma_\rho^{(0)}}{2} \right) &= 0, \\ \varepsilon_\rho^{p(0)} &= \frac{du^0}{d\rho} - \frac{k}{E} \left(\sigma_\rho^{(0)} - \nu\sigma_\theta^{(0)} \right), \\ \varepsilon_\theta^{p(0)} &= \frac{u^0}{\rho} - \frac{k}{E} \left(\sigma_\theta^{(0)} - \nu\sigma_\rho^{(0)} \right). \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Таким образом, при учете того, что упрочнение мало, в нулевом приближении задача сводится к решению системы уравнений с условием

пластичности Мизеса. Данная система уравнений может быть решена только численно.

Если учесть компоненты напряжений первого порядка, то, из-за заложенного в метод малого параметра переноса условий непрерывности напряжений и перемещений на невозмущенную упругопластическую границу, получен скачок окружной компоненты тензора напряжений. Величина скачка зависит от значения малого параметра и увеличивается с увеличением угловой скорости вращения диска.

При исследовании упругопластического состояния вращающегося диска очень часто пользуются диаграммами растяжения. При одноосном напряженном состоянии связь между напряжениями и деформациями характеризуется кривой деформирования $\sigma_0 = f(\varepsilon_0)$. Кривая деформирования определяется при постоянной температуре. Напряжения могут быть представлены в условных или истинных величинах. Такие диаграммы называются соответственно условными и истинными [42].

В условной диаграмме $\sigma_0 = \frac{P}{F_1}$, $\varepsilon_0 = \frac{l-l_1}{l_1}$, где P – растягивающая сила, F_1 , l_1 – первоначальные площадь сечения и полная длина образца.

При построении истинной диаграммы растяжения напряжение относится к фактической площади сечения в данный момент деформирования. После образования шейки, когда σ_0 близко к временному сопротивлению, его относят к поперечному сечению в шейке.

Деформация в истинных диаграммах имеет вид

$$\varepsilon_0 = \int_{l_1}^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_1}, \quad (2.1.17)$$

где l_k – конечная длина участка образца, для которого определяют деформацию.

На рисунке 2.1 показаны условная и истинная диаграммы для сплава ХН77ТЮР при различных температурах (сплошная и штриховая кривые) от предела текучести до разрушения.

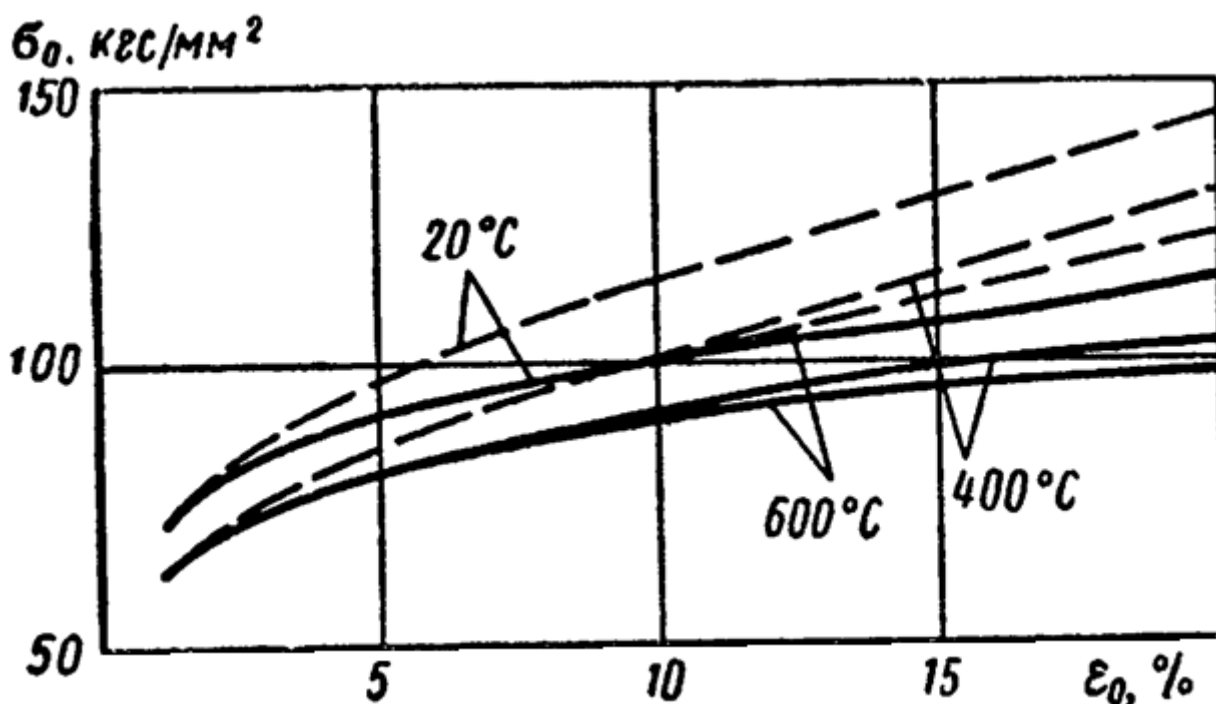


Рис. 2.1

В практике при малых пластических деформациях можно пользоваться как условной, так и истинной диаграммой. При расчете несущей способности диска, когда пластические деформации велики, следует пользоваться истинной диаграммой.

Истинную диаграмму растяжения удобно схематизировать, вводя касательные модули диаграммы

$$E_k = \frac{S_k - S_b}{\epsilon_k - \epsilon_b} \quad \text{или} \quad E_k = \frac{S_b - \sigma_T}{\epsilon_b - \epsilon_T} \quad (2.1.18)$$

Введем в рассмотрение секущий модуль диаграммы растяжения

$$E_c = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad (2.1.19)$$

Для случая одноосного растяжения пластическая деформация равна

$$\epsilon_0^p = \epsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} \quad (2.1.20)$$

или с учетом (2.1.19)

$$\epsilon_0^p = \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \sigma_0 \quad (2.1.21)$$

Интенсивности напряжений и пластической деформации для случая растяжения

$$\sigma_i = \sigma_0, \quad \varepsilon_i^p = \varepsilon_0^p.$$

Интенсивность деформации запишем в виде

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0^p + \frac{2(1+\nu)\sigma_0}{3E}$$

или с учетом (2.1.20)

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 - \frac{1-2\nu\sigma_0}{3E}. \quad (2.1.22)$$

Данные зависимости позволяют получить из диаграммы растяжения обобщенную диаграмму деформирования. При инженерных расчетах удобнее использовать диаграмму растяжения, определяя эквивалентное значение ε_0 из (2.1.22) при $\sigma_0 = \sigma_i$.

Интенсивность пластических деформаций можно записать в виде

$$\varepsilon_i^p = \frac{\psi - 1}{3G} \sigma_i,$$

где параметр пластичности, с учетом (2.1.21), будет равен

$$\psi = 1 + \frac{3}{2(1+\nu)} \left(\frac{E}{E_c} - 1 \right). \quad (2.1.23)$$

Для несжимаемого материала параметр пластичности равен отношению модуля упругости к секущему модулю диаграммы.

Далее нелинейная задача при упругопластических деформациях сводится к последовательности линейных задач с переменными параметрами упругости или дополнительными деформациями [36, 46].

В методе переменных параметров упругости уравнения деформационной теории упругости, устанавливающие связь между деформациями и напряжениями представляются в виде

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{E} \left((1+\nu)\psi\sigma_{kl} - ((1+\nu)\psi - (1-2\nu))\delta_{kl}\sigma \right)$$

или с учетом (2.1.23)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2E_c} \left(\left(3 - (1 - 2\nu) \frac{E_c}{E} \right) \sigma_{kl} - 3 \left(1 - (1 - 2\nu) \frac{E_c}{E} \right) \delta_{kl} \sigma \right). \quad (2.1.24)$$

Если представить (2.1.24) в форме обычных уравнений упругости, то

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{E^*} \left((1 + \nu^*) \sigma_{kl} - 3\nu^* \delta_{kl} \sigma \right),$$

где E^* и ν^* – переменные параметры, которые в отличие от упругих параметров будут зависеть от напряженно-деформированного состояния в точке.

Переменные параметры упругости можно выразить как

$$E^* = \frac{3E}{2(1 + \nu)\psi + 1 - 2\nu'}$$

$$\nu^* = \frac{(1 + \nu)\psi - 1 + 2\nu}{2(1 + \nu)\psi + 1 - 2\nu}$$

или вводя параметр пластичности (2.1.23)

$$E^* = E_c, \quad (2.1.25)$$

$$\nu^* = \frac{1}{2} \left(1 - (1 - 2\nu) \frac{E_c}{E} \right).$$

Для упругого диска в случае плоского напряженного состояния закон Гука записывается в виде (1.3.2). Если в данные формулы вместо постоянных параметров упругости подставить переменные (2.1.25), то используя известную диаграмму растяжения можно провести упругопластический расчет диска применяя алгоритм последовательных приближений.

Другим используемым в практике методом решения упругопластической задачи является метод дополнительных деформаций [18, 25]. В соответствии с данным методом тело рассматривается как упругое при наличии дополнительных деформаций. Пластические деформации в данном случае являются неизвестными дополнительными деформациями, определяемыми с помощью процедуры последовательных приближений.

Для деформаций в упругопластическом теле получаем

$$\varepsilon_{kl} = \frac{\psi}{E} (1 + \nu) (\sigma_{kl} - \delta_{kl} \sigma) + \delta_{kl} \varepsilon. \quad (2.1.26)$$

Деформации в упругом теле ε_{kl}^* при тех же значениях напряжений получим, положив в (2.1.27) параметр пластичности $\psi = 1$

$$\varepsilon_{kl}^* = \frac{1}{E} (1 + \nu) (\sigma_{kl} - \delta_{kl} \sigma) + \delta_{kl} \varepsilon. \quad (2.1.27)$$

Деформации в упругопластическом теле тогда можно представить в виде суммы

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^* + \varepsilon_{kl}^0,$$

где ε_{kl}^0 – тензор дополнительных пластических деформаций

$$\varepsilon_{kl}^0 = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) (\varepsilon_{kl} - \delta_{kl} \varepsilon). \quad (2.1.28)$$

В качестве обобщения приведенным выше методам исследования напряженно-деформированного состояния упругопластического вращающегося диска рассмотрим решение задачи, математическая модель которой представлена далее, методом конечных элементов.

Пусть в диске реализуется плоское напряженное состояние. Решение будем осуществлять в цилиндрической системе координат r, θ, Z , ось Z которой совпадает с осью вращения диска. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу R_0 диска, а величины, имеющие размерность напряжения, к пределу текучести k_0 . Тогда уравнение равновесия имеет вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \quad (2.1.29)$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 – плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k_0}.$$

Запишем кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Уравнение равновесия дополняется соотношениями закона Гука и условием совместности деформации

$$\begin{aligned}\frac{E}{k}\varepsilon_{\theta}^e &= \sigma_{\theta} - \nu\sigma_{\rho}, \\ \frac{E}{k}\varepsilon_{\rho}^e &= \sigma_{\rho} - \nu\sigma_{\theta}, \\ \rho\frac{d\varepsilon_{\theta}}{d\rho} + \varepsilon_{\theta} - \varepsilon_{\rho} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.31}$$

Дополним систему уравнений соотношениями Коши

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho} = \frac{du}{d\rho}.\tag{2.1.32}$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса, с учетом того, что предел текучести является функцией интенсивности пластической деформации [97]

$$\sigma_{\rho}^2 - \sigma_{\rho}\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta}^2 = f(\varepsilon_i^p),\tag{2.1.33}$$

где

$$\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_{\rho}^{p2} - \varepsilon_{\rho}^p\varepsilon_{\theta}^p + \varepsilon_{\theta}^{p2}}.$$

Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения [54]

$$\begin{aligned}d\varepsilon_{\rho}^p &= 2d\lambda(\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}), \\ d\varepsilon_{\theta}^p &= 2d\lambda(\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}).\end{aligned}\tag{2.1.34}$$

Математическая модель состоит из замкнутой системы уравнений (2.1.29)-(2.1.34). Дополним полученную систему уравнений граничными условиями и условиями неразрывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе.

Пусть внешний контур свободен от усилий, тогда

$$\sigma_{\rho}(1) = 0.\tag{2.1.35}$$

Перемещение точки, находящейся на оси вращения, отсутствует

$$u(0) = 0.\tag{2.1.36}$$

Окружные и радиальные напряжения в центре диска равны

$$\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0). \quad (2.1.37)$$

На упругопластической границе

$$\begin{aligned} [\sigma_\rho]_{\rho_s} &= 0, \\ [\sigma_\theta]_{\rho_s} &= 0, \\ [u]_{\rho_s} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

При решении задачи методом конечных элементов рассмотрим три варианта условия пластичности (2.1.33)

- упрочнение отсутствует, то есть когда функция $f(\varepsilon_i^p) = 1$ и условие пластичности приобретает вид

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 1; \quad (2.1.39)$$

- упрочнение происходит изотропно по линейному закону с постоянным коэффициентом упрочнения

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 1 + c\varepsilon_i^p; \quad (2.1.40)$$

- упрочнение происходит по сложному закону в соответствии с истинной диаграммой деформирования. Истинная диаграмма деформирования аппроксимирована кусочно-линейной функцией

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = f_k(\varepsilon_i^p). \quad (2.1.41)$$

Рассмотрим решение в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical. В качестве геометрической модели возьмем модель, представленную в § 3. главы 1.

Дискретизацию расчетной области при решении упругопластических задач следует проводить элементами (рисунок 2.2), размер которых значительно меньше, чем у элементов, используемых в упругой задаче. Получаемое решение слабо зависит от сетки при условии, что в радиальном направлении расположить не менее 100 элементов. Сетка, на которой проводился расчет, содержит 98561 узел и 32644 элемента

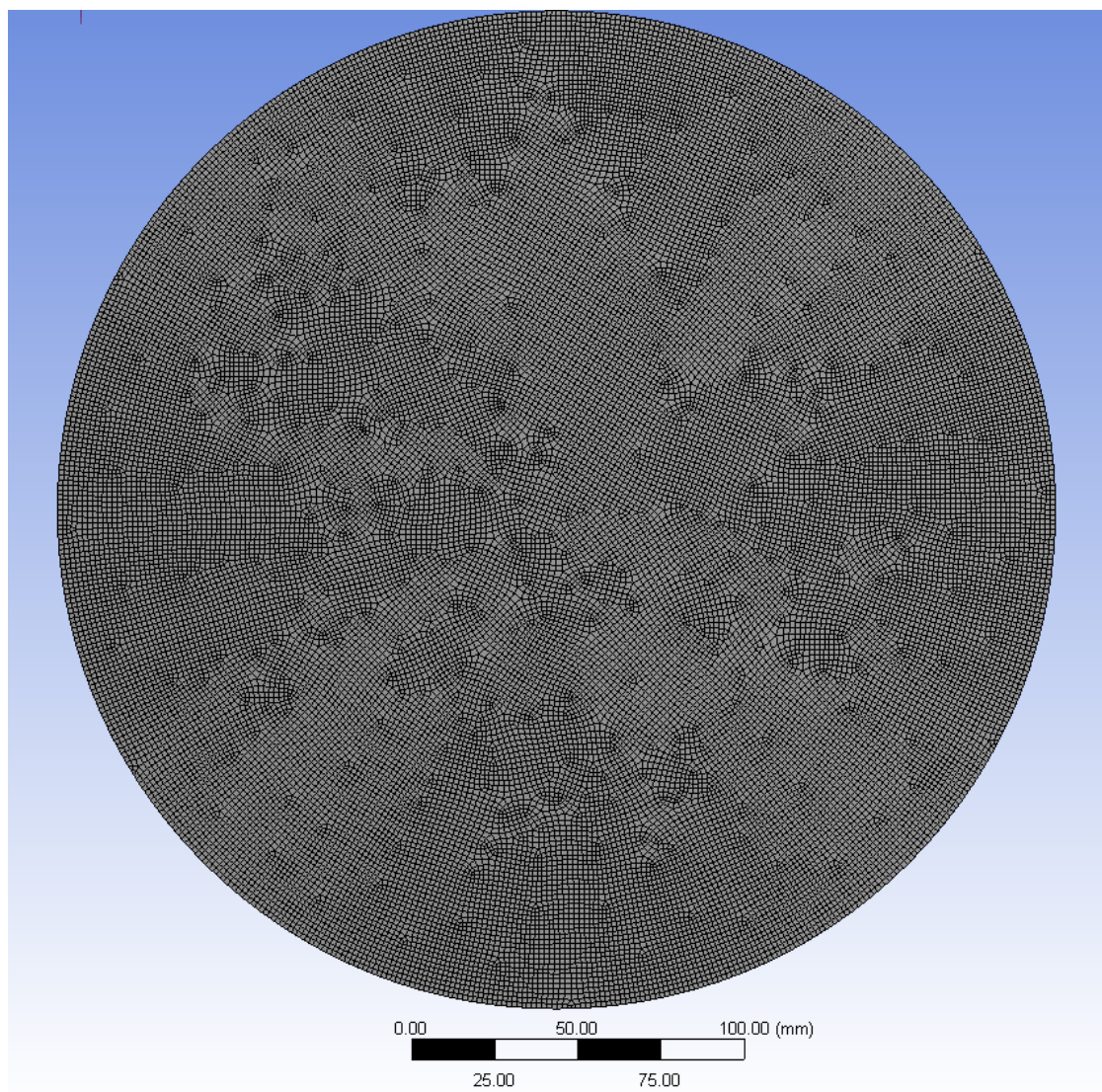


Рис. 2.2

В качестве материала выберем сплав ЭП-741НП [47, 81]. Данный сплав широко используется для изготовления рабочих колес турбин высоконагруженных энергетических установок.

Так как материал чаще всего работает при высоких температурах, выберем для компьютерного моделирования свойства материала при 800 К. Данный материал не имеет выраженной площадки текучести.

Предел текучести если материал не был ранее нагружен $\sigma_{0,2} = 738$ МПа. К данному значению, как отмечалось ранее, отнесем в математической модели компоненты тензора напряжений. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Предел прочности $\sigma_B = 906,16$ МПа достигается при пластической деформации $\varepsilon_B = 0,076736$.

Коэффициент упрочнения в (2.1.40) с учетом (2.1.18)

$$c = \frac{(\sigma_B - \sigma_{0.2})}{(\varepsilon_B - 0,002)\sigma_{0.2}}. \quad (2.1.42)$$

В условии пластичности (2.1.41) функцию $f_k(\varepsilon_i^p)$ определим согласно таблице 1 полученной на основании истинной диаграммы растяжения.

Таблица 1

Пластическая деформация	Напряжение, МПа	Приведенное напряжение
0	712,39	0,965
0,0013703	730,1	0,989
0,003237	746,76	1,012
0,0057437	765,29	1,037
0,0091239	782,78	1,061
0,013646	802,17	1,087
0,01971	820,54	1,112
0,027804	840,83	1,14
0,038622	860,12	1,165
0,053043	881,35	1,194
0,076736	906,16	1,228

Рассмотрим случай, когда упрочнение отсутствует. Выберем параметр, отвечающий за нагрузку от действия центробежных сил $m = 3,141$. Данный параметр соответствует угловой скорости вращения $\omega = 3500$ рад/с. В результате численного решения получены зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от безразмерной радиальной координаты. Данные зависимости показаны на рисунках 2.3-2.8

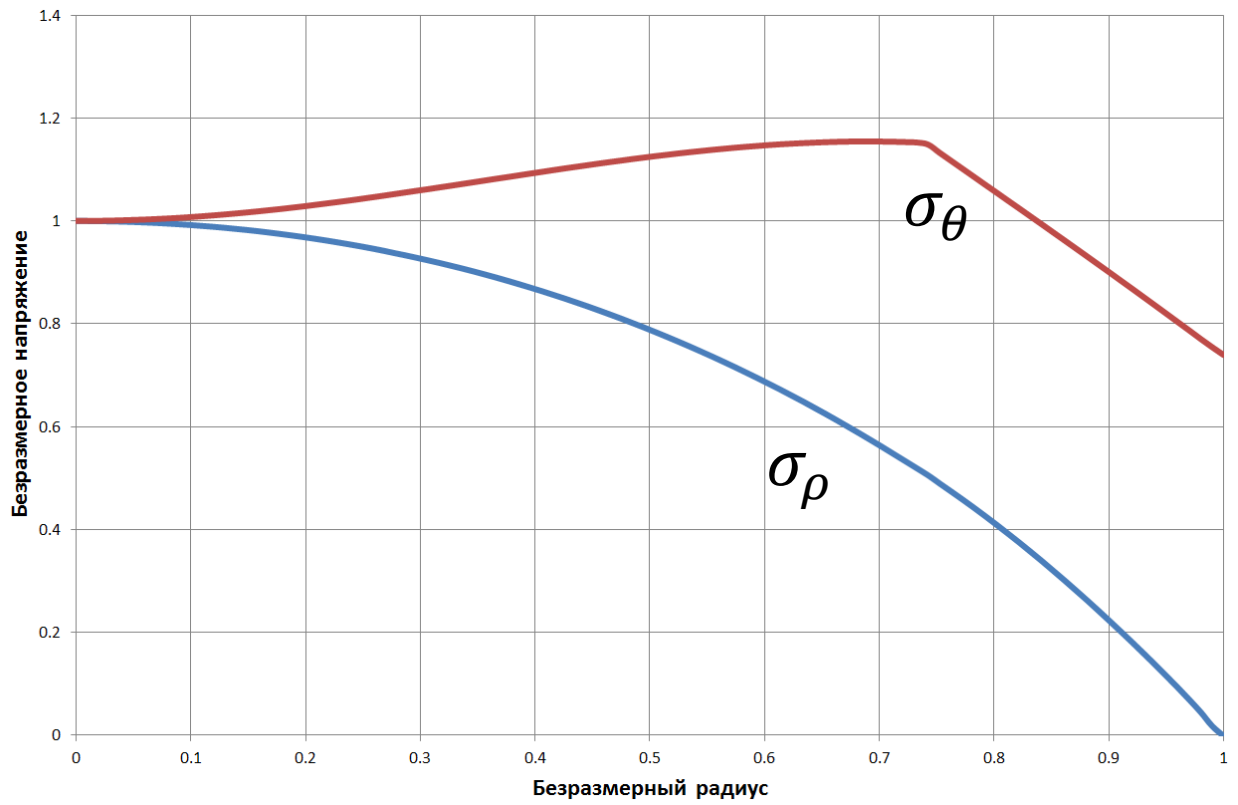


Рис. 2.3

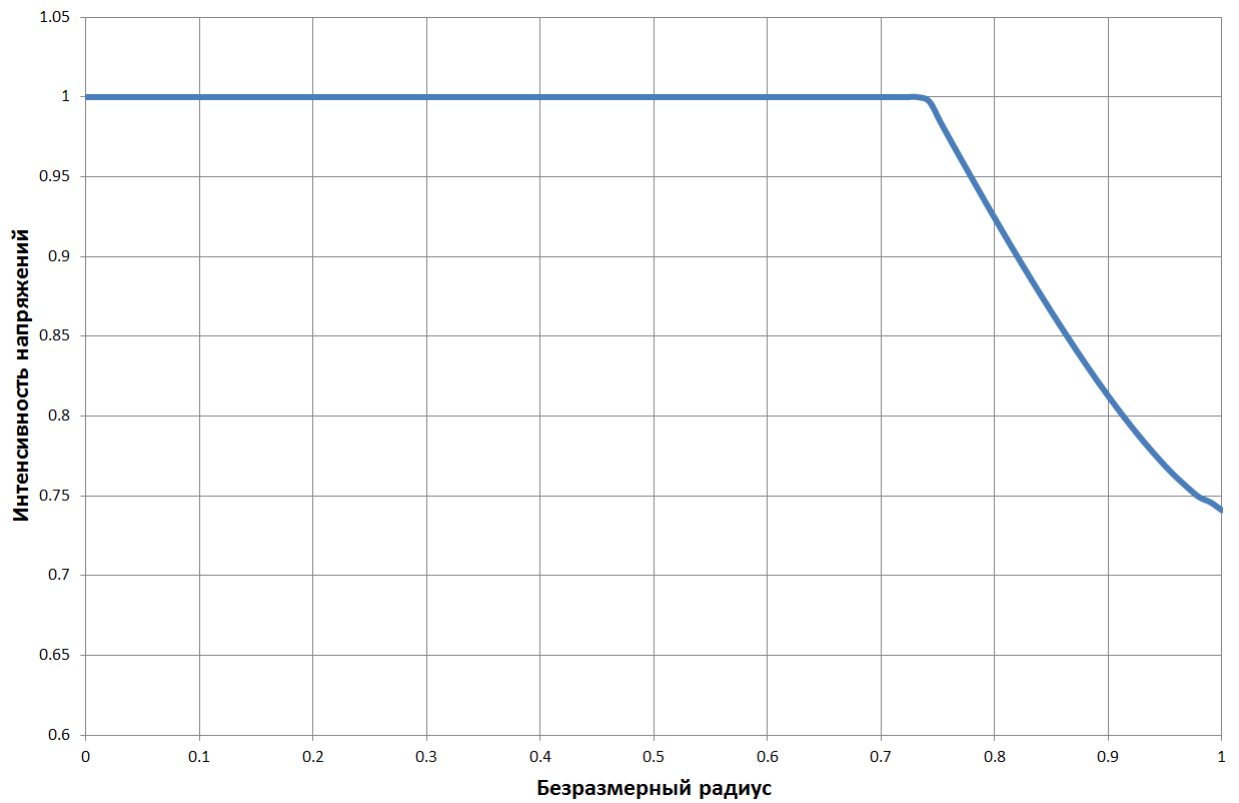


Рис. 2.4

Максимум окружных напряжений достигается на упругопластической границе. Радиальные напряжения σ_ρ монотонно убывают. Зависимость

интенсивности напряжений от радиуса, представленная на рисунке 2.4, полностью согласуется с заданным условием пластичности (2.1.39).

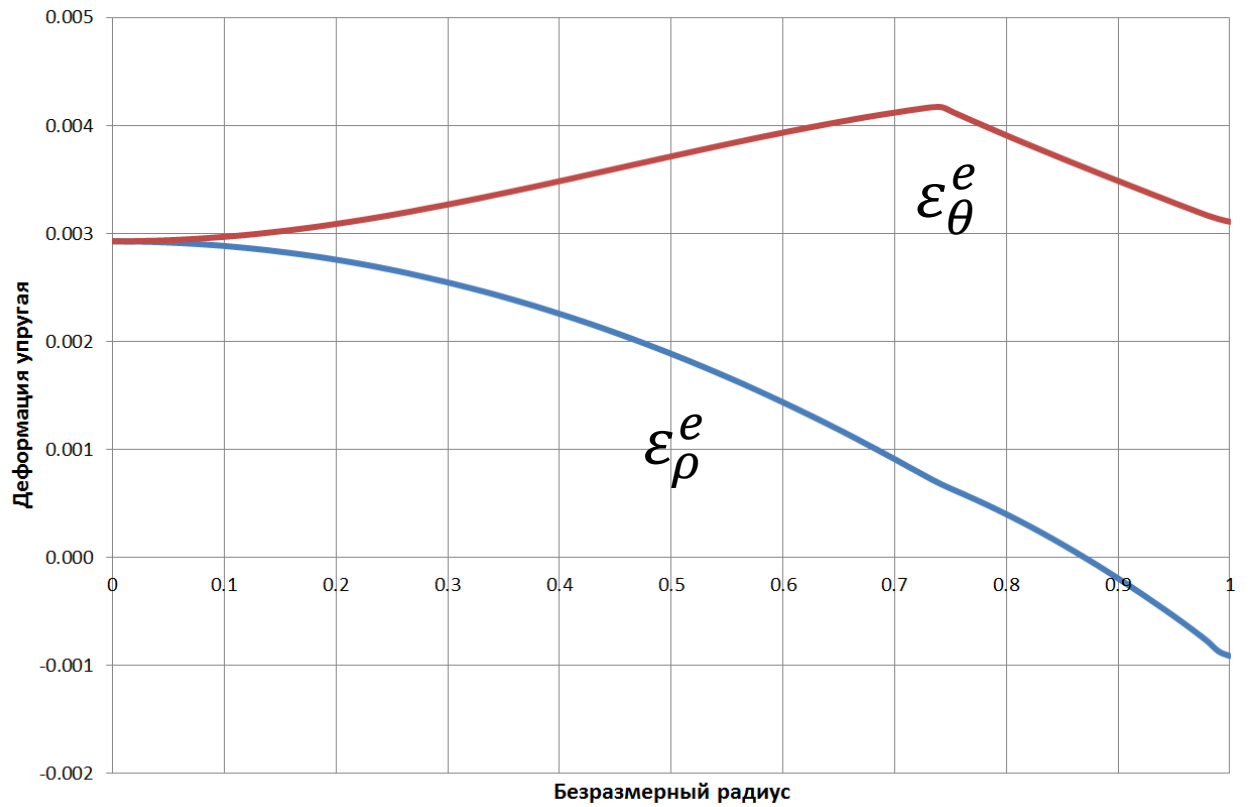


Рис. 2.5

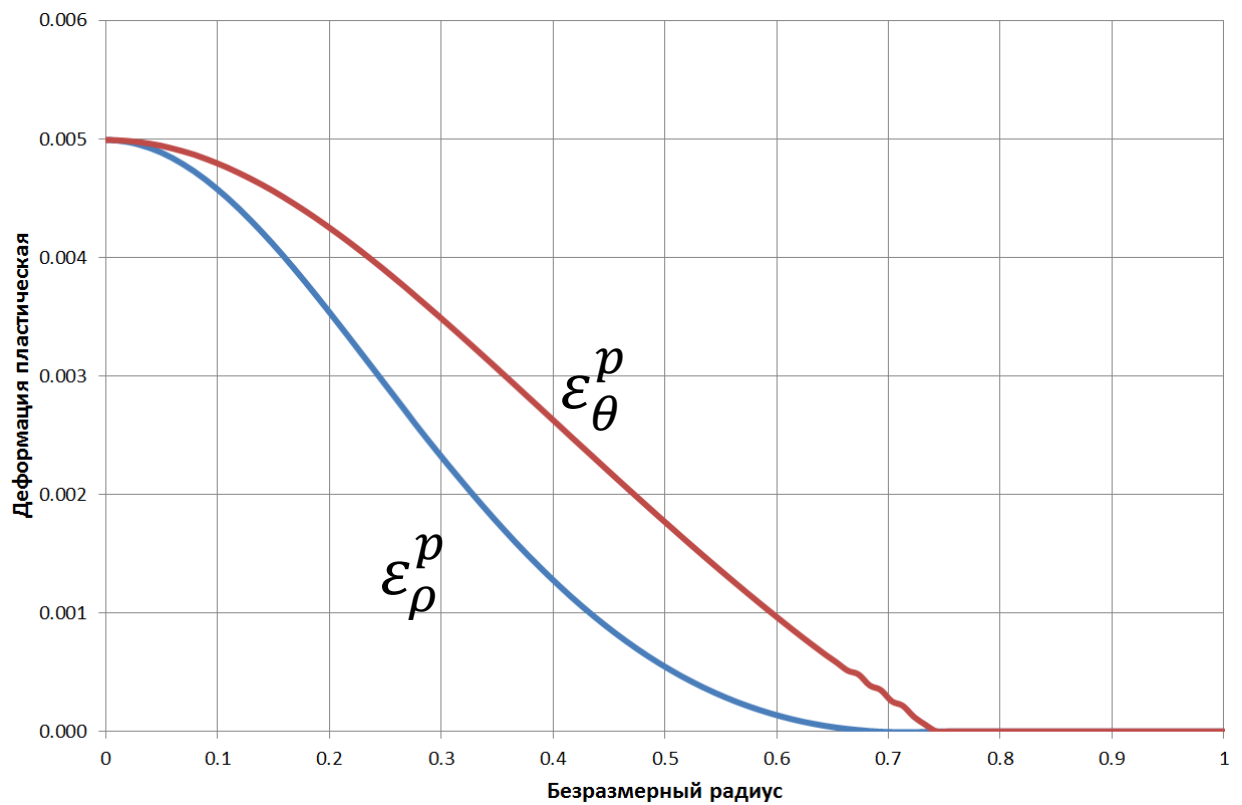


Рис. 2.6

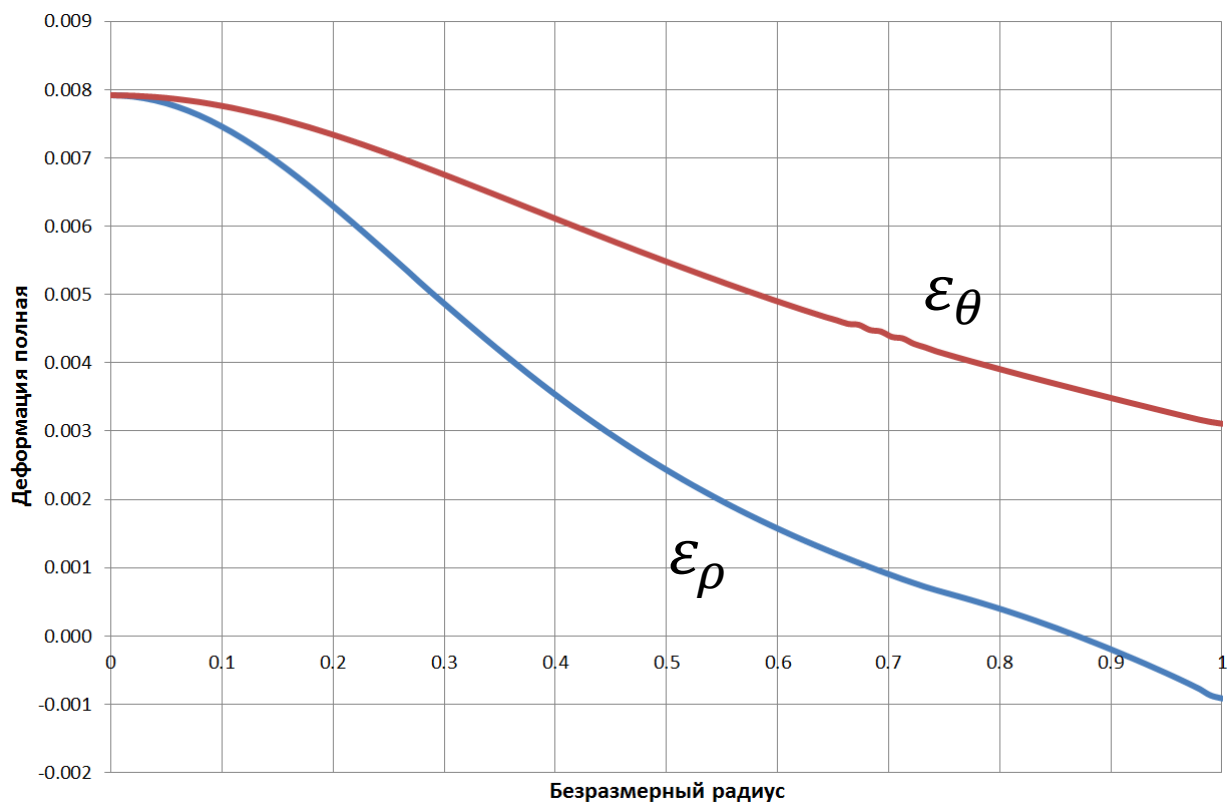


Рис. 2.7

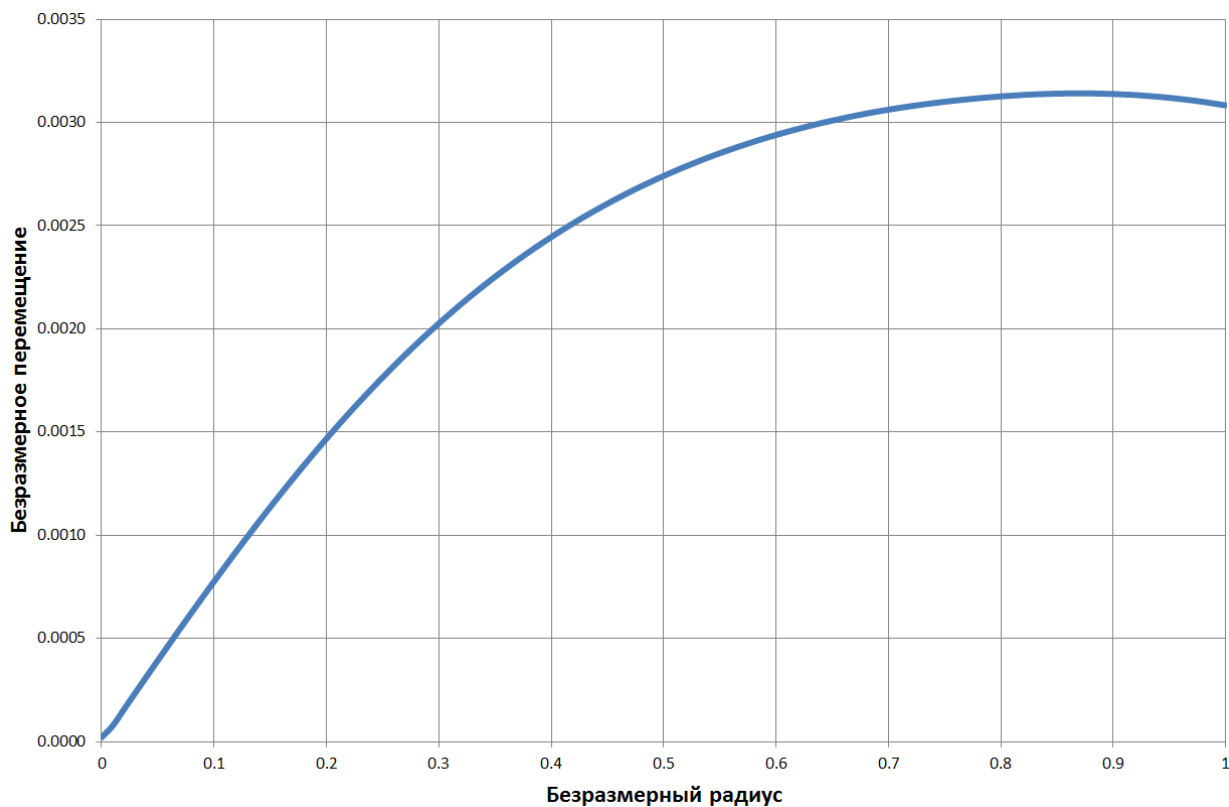


Рис. 2.8

При данном значении параметра нагружения m получен радиус упругопластической границы $\rho_s = 0,7624$. Зависимость радиуса

упругопластической границы от параметра m исследуется в § 2 данной главы. На рисунке 2.9 показано распределение интенсивности пластической деформации, позволяющее отчетливо выделить кольцевой сегмент на внешнем радиусе находящийся в упругом состоянии (интенсивность пластической деформации равна нулю)

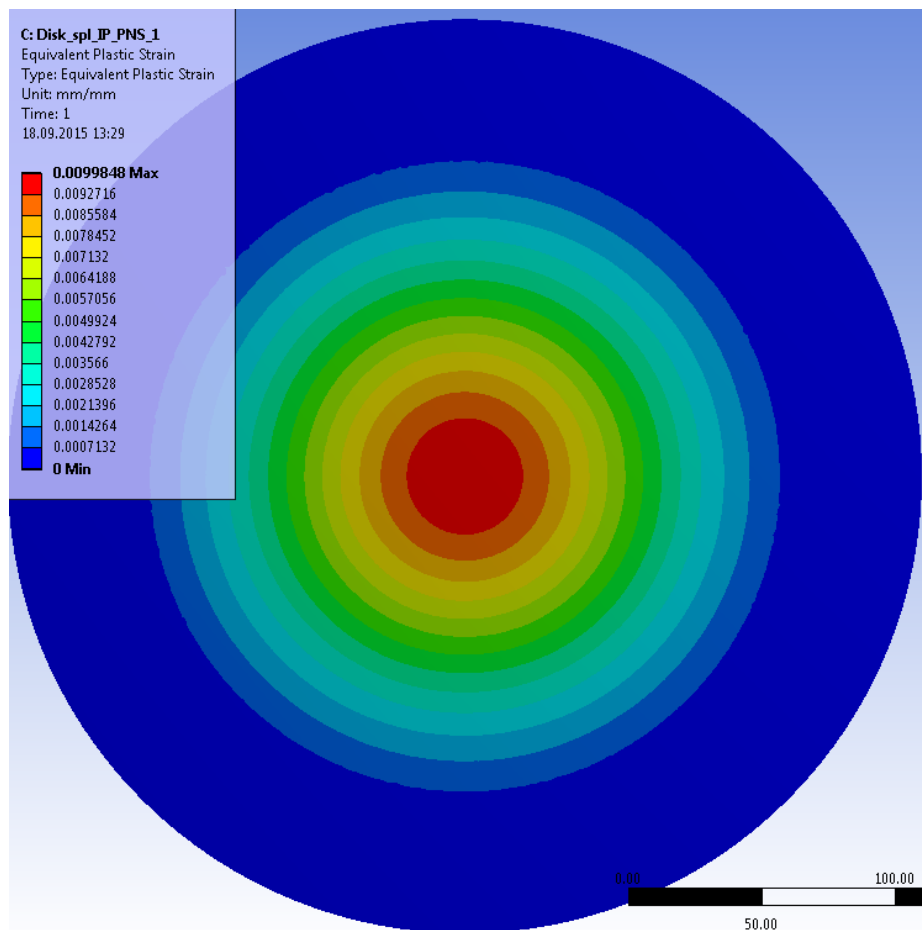


Рис. 2.9

Рассмотрим случай линейно изотропно упрочняющегося материала, условие пластичности для которого имеет вид (2.1.40). Нагружение центробежными силами произведем аналогично случаю без упрочнения. Коэффициент упрочнения $c = 3,05$, согласно формуле (2.1.42) и таблице 1. В результате численного решения получены зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от безразмерной радиальной координаты. Данные зависимости показаны на рисунках 2.10-2.15.

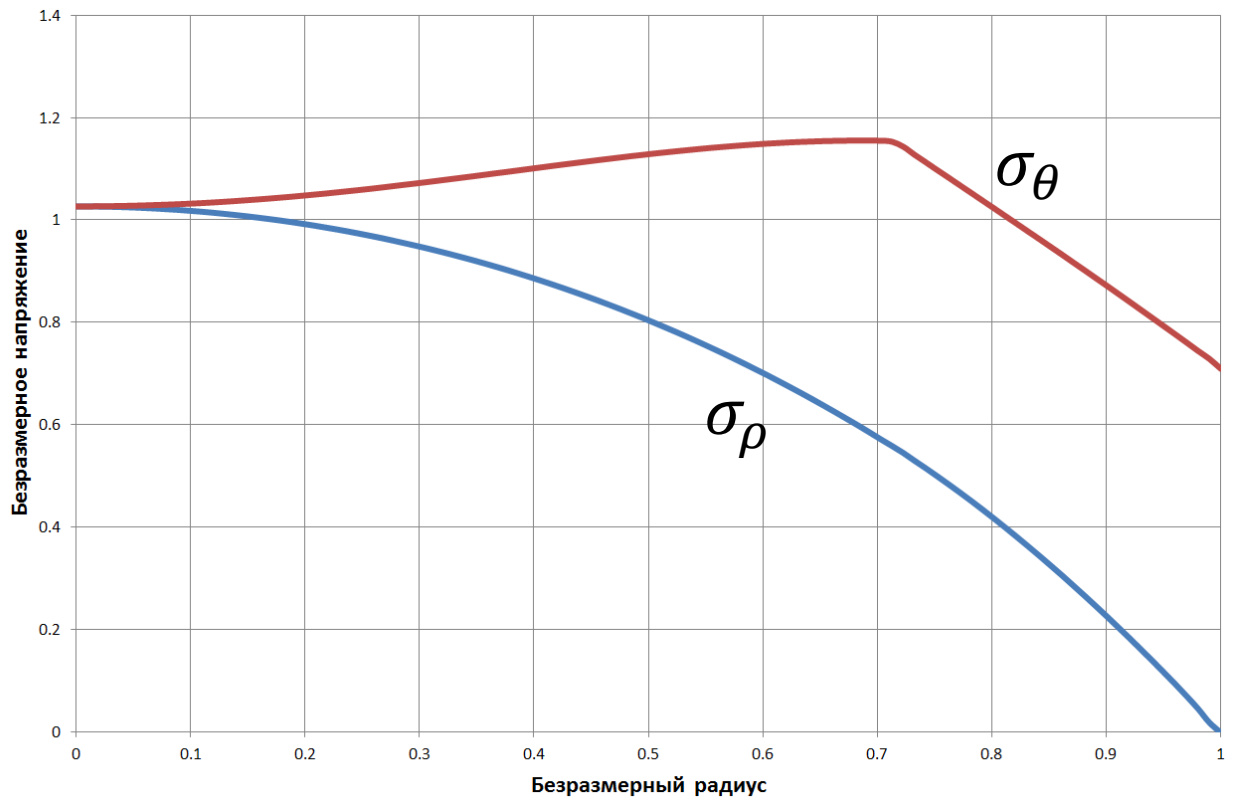


Рис. 2.10

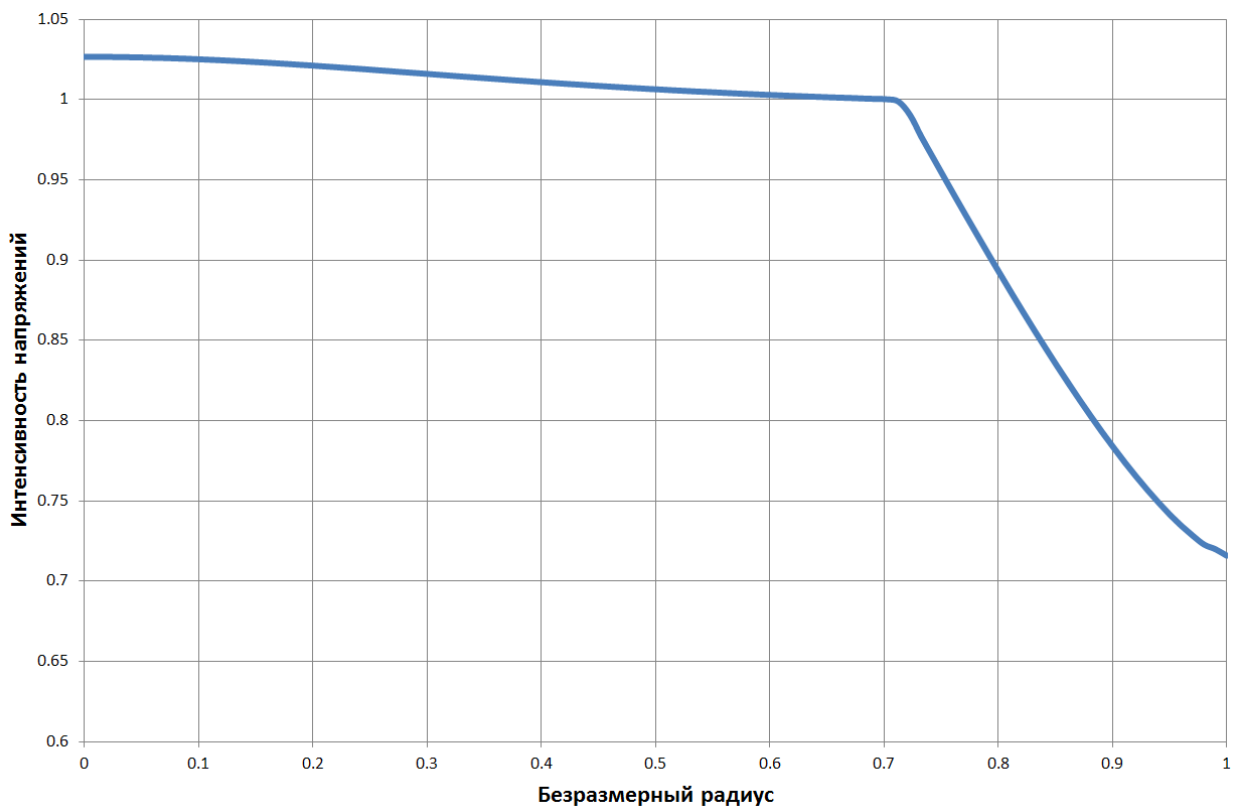


Рис. 2.11

Максимум окружных напряжений достигается на упругопластической границе. Радиальные напряжения σ_ρ монотонно убывают. В центре диска

$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) > 1$, что связано с эффектом упрочнения материала. Если устремить коэффициент упрочнения к нулю, то, как и в случае задачи без упрочнения, будет выполняться $\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = 1$. Интенсивность напряжений максимальна в центре диска и на 2,66% выше, чем в случае с коэффициентом упрочнения равным нулю.

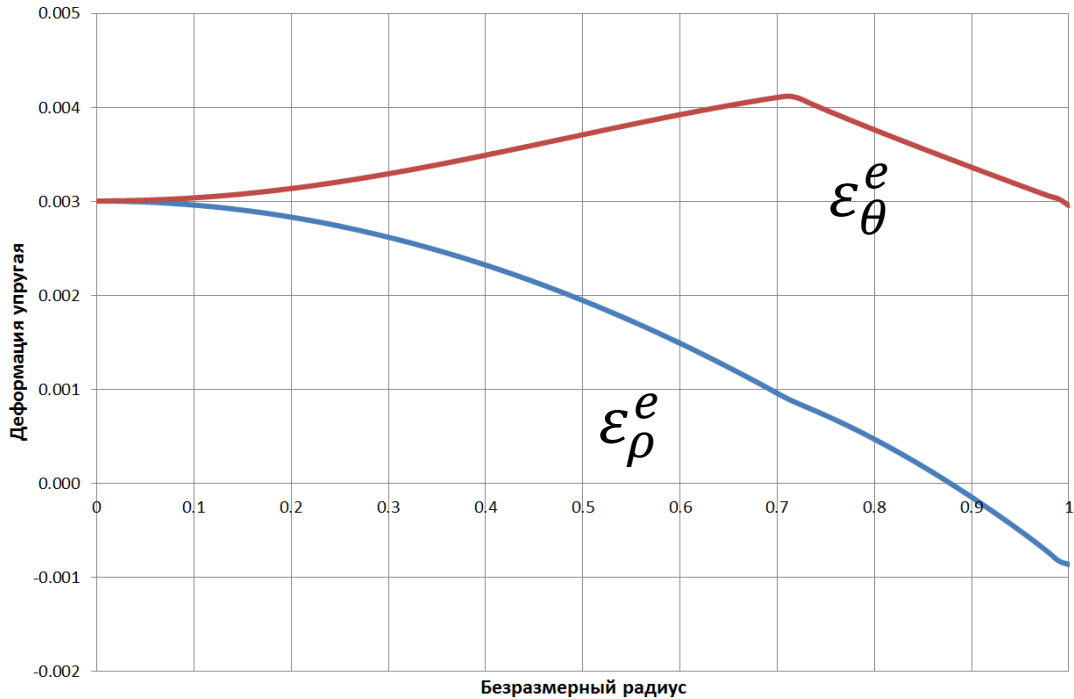


Рис. 2.12

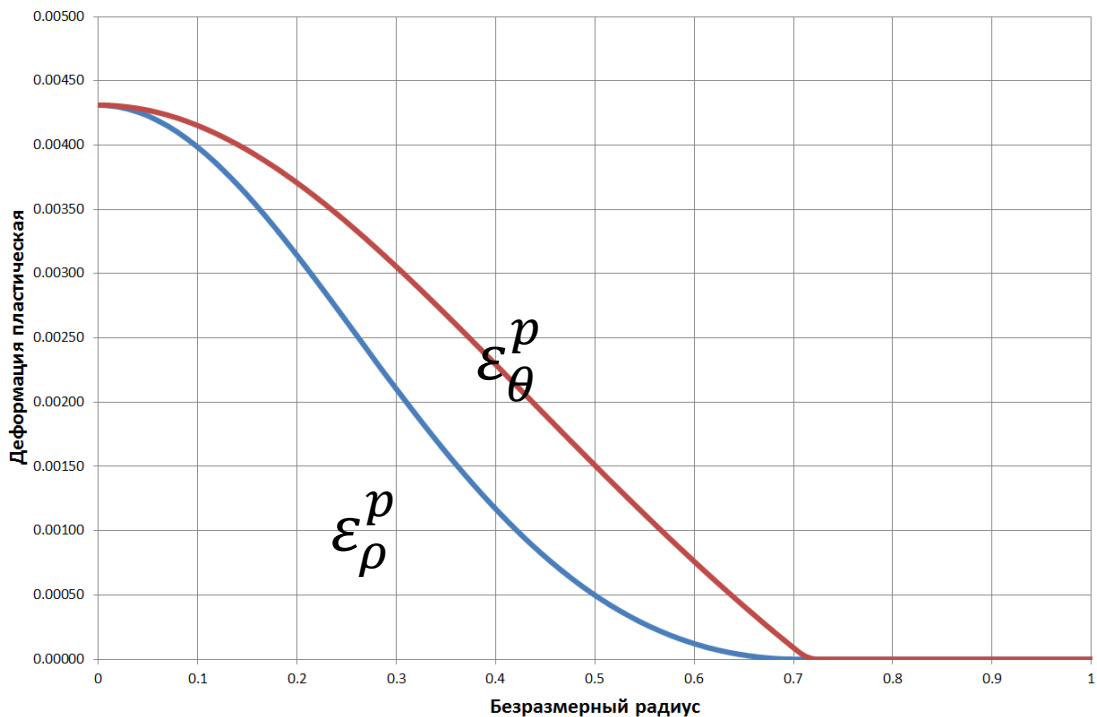


Рис. 2.13

Компоненты полной деформации на оси вращения диска ниже, чем в случае тела без упрочнения на 8,2%

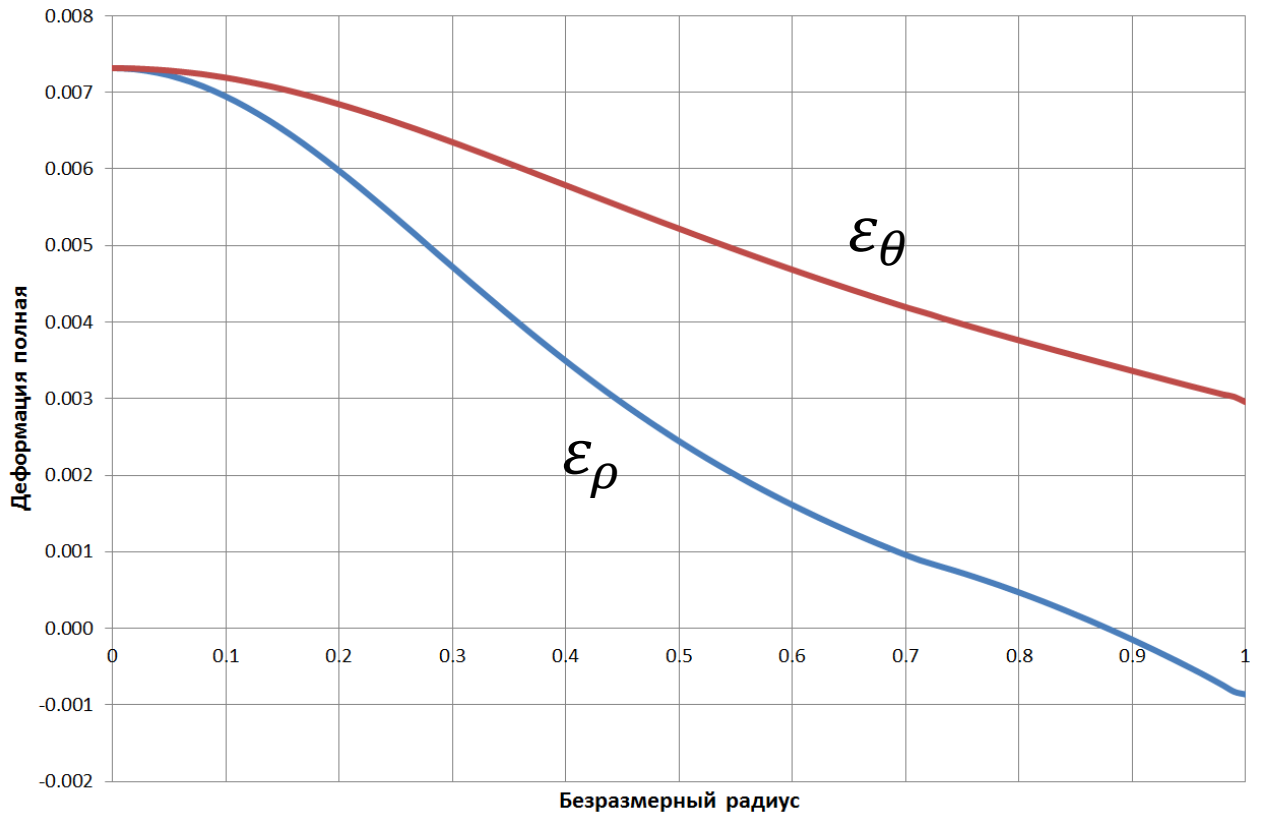


Рис. 2.14

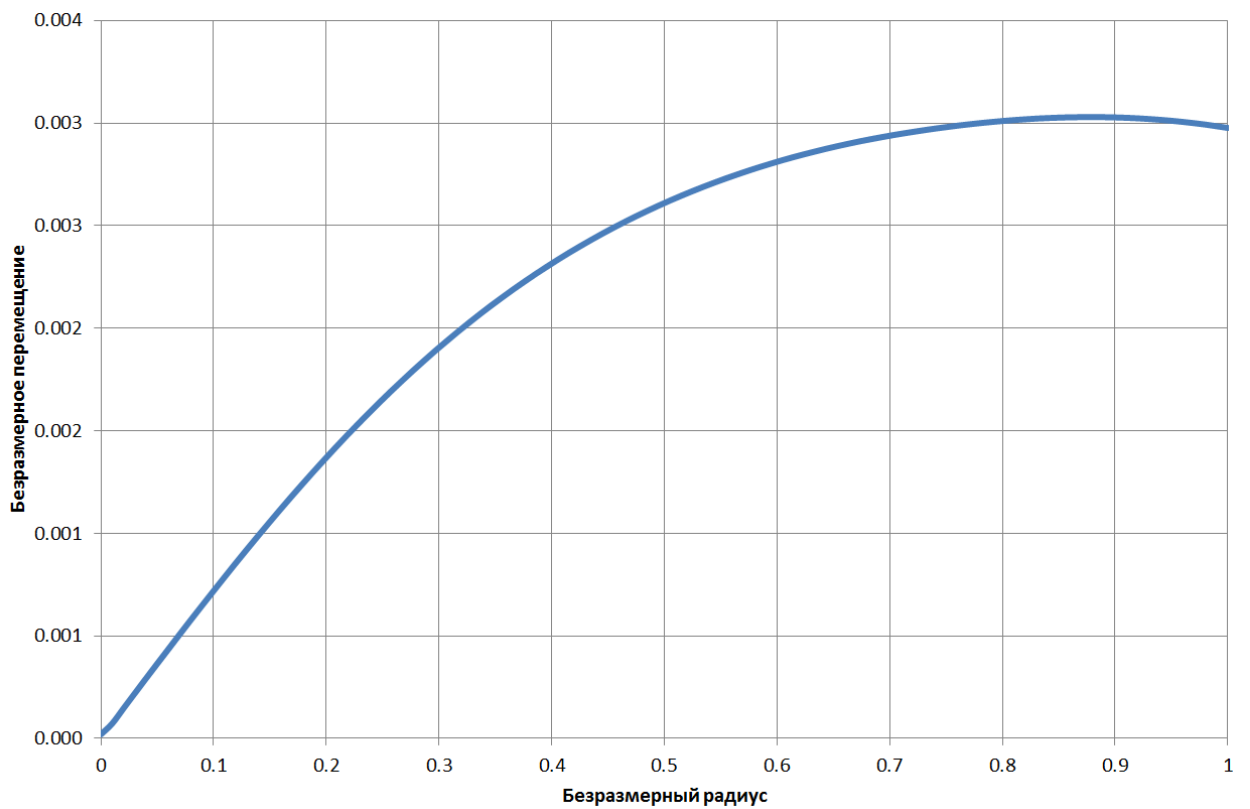


Рис. 2.15

Качественно зависимости, полученные для компонент напряжений, деформаций и перемещения в случае без упрочнения и линейно изотропно упрочняющегося тела, совпадают. Однако, перемещения и деформации для тела без упрочнения выше. Интенсивность напряжений в случае линейно изотропно упрочняющегося тела в пластической зоне выше. При данном значении параметра нагружения m получен радиус упругопластической границы $\rho_s = 0,703$, что на 8,45% меньше чем для тела без упрочнения.

Рассмотрим результаты решения задачи с условием пластичности (2.1.33), учитывающим истинную диаграмму растяжения для исследуемого материала. Выберем параметр, отвечающий за нагрузку от действия центробежных сил $m = 3,141$. Данный параметр соответствует угловой скорости вращения $\omega = 3500$ рад/с. В качестве предела пластичности обычно выбирается величина $\sigma_{0,2}$ – напряжение соответствующее пластической деформации 0,2% (для изучаемого материала 738 МПа). При использовании истинной диаграммы растяжения (согласно таблице 1) пластическое течение материала начинается при 712,39 МПа

На рисунках 2.16-2.20 представлены зависимости безразмерных компонент, характеризующих напряженно-деформированное состояние, от радиальной координаты.

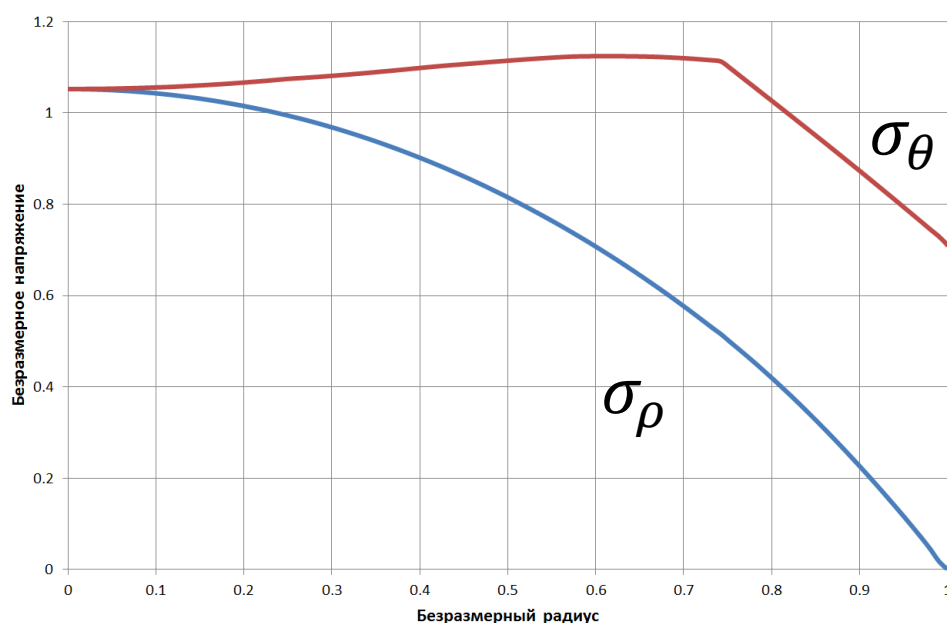


Рис. 2.16

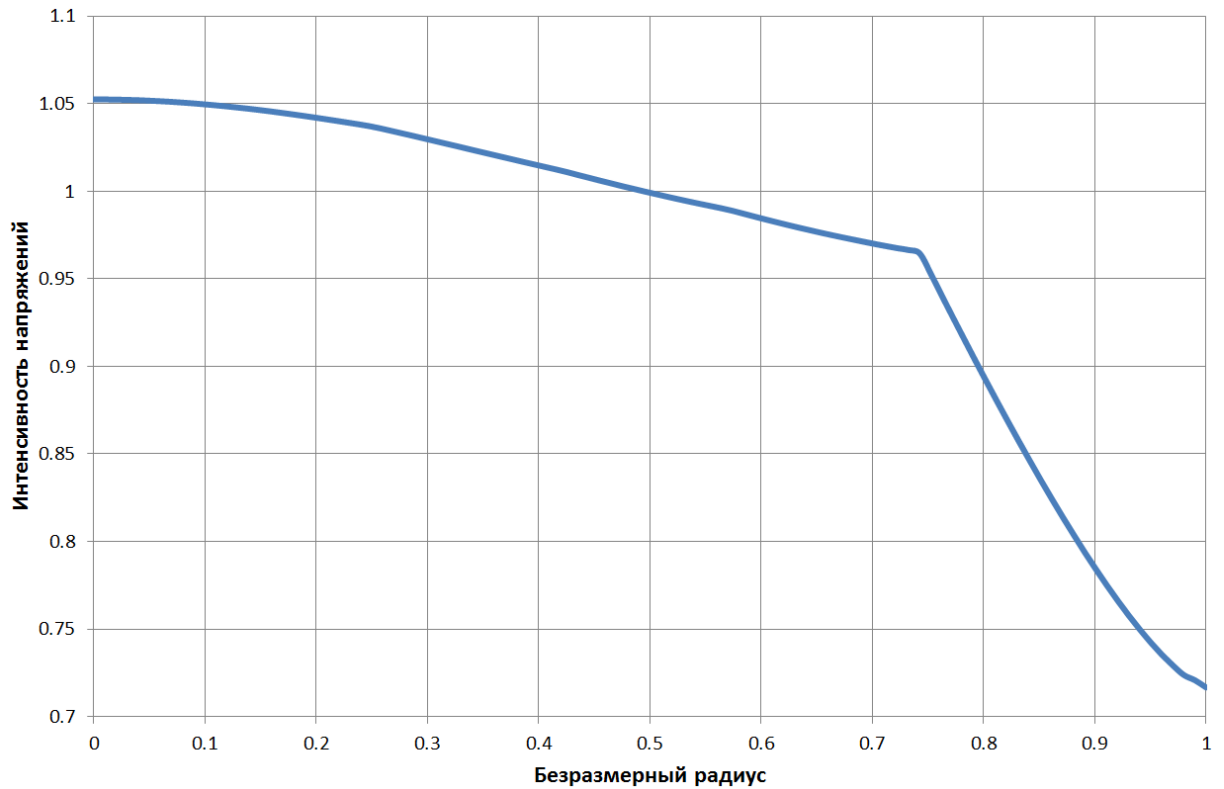


Рис. 2.17

Интенсивность напряжений в центре диска для случая истинной диаграммы растяжения максимальна из рассмотренных вариантов и на 5,25% выше, чем для тела без упрочнения.

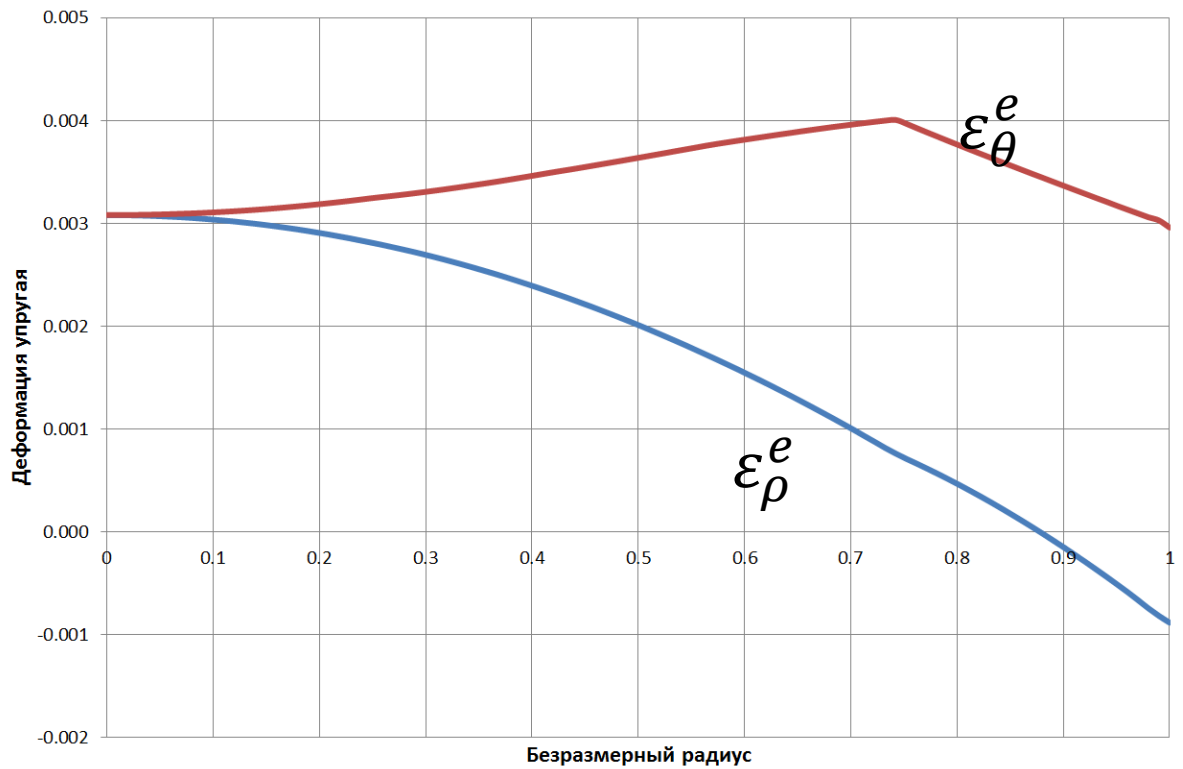


Рис. 2.18

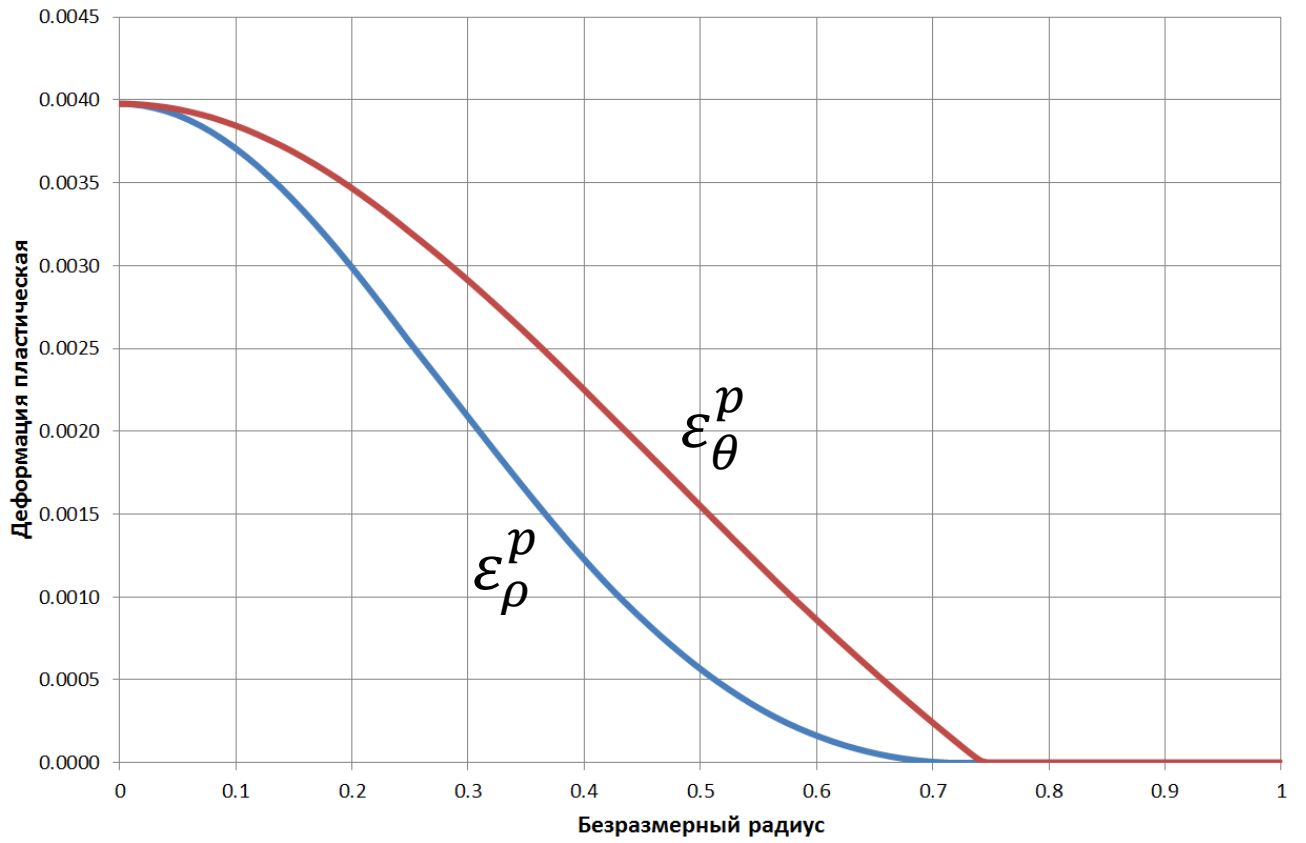


Рис. 2.19

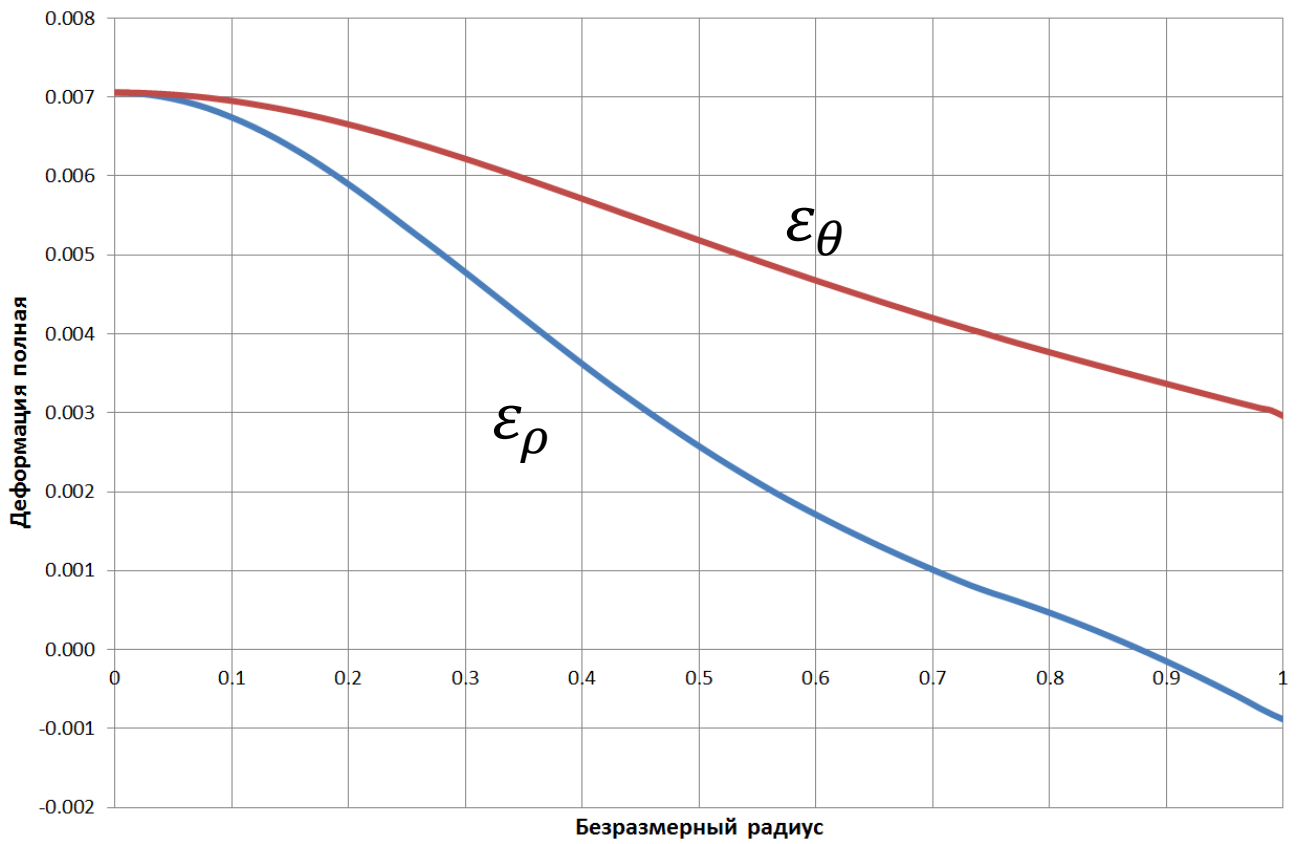


Рис. 2.20

Анализ результатов зависимости пластических деформаций от радиуса, позволяет сделать вывод, что в графиках, представленных в работе [5], допущена опечатка и для упрочняющегося тела компоненты $\varepsilon_\rho^p < \varepsilon_\theta^p$.

При данном значении параметра нагружения m получен радиус упругопластической границы $\rho_s = 0,7525$. Данный ρ_s лежит между значениями для случаев линейно изотропно упрочняющегося тела и тела без упрочнения.

§ 2. Потеря несущей способности сплошного вращающегося диска

Определение запаса прочности по потере несущей способности диска является одной из основных оценок прочности диска. В прикладных задачах для оценки оборотов, при которых диск полностью переходит в пластическое состояние, обычно используется формула (2.1.14). Однако данная формула не учитывает эффекты упрочнения и в ее основе лежит условие пластичности Треска, как было показано в § 1 данной главы не слишком точного для подобных задач. Исследуем потерю несущей способности диска рассмотренного в предыдущем параграфе.

Согласно (2.1.14) исследуемый диск полностью перейдет в пластическое состояние при $\omega = 3421$ рад/с, что соответствует $m = 3$. В предыдущем параграфе в качестве граничного условия выбиралось $\omega = 3500$ рад/с и радиус упругопластической границы был $\rho_s < 0,77$. Очевидно, что формула (2.1.14) дает заниженное значение оборотов потери несущей способности. В современных условиях повышения эффективности турбомашин, когда масса ротора имеет большое значение, очень важна разработка более эффективного метода определения оборотов потери несущей способности.

Численное моделирование в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical позволяет определить зависимости радиуса упругопластической границы от параметра нагружения m . Проведена серия компьютерных экспериментов, результаты которых представлены в виде таблицы 2.

Таблица 2

Без упрочнения		Линейно изотропно упрочняющийся материал		Истинная диаграмма растяжения	
m	ρ_s	m	ρ_s	m	ρ_s
2,426	0	2,426	0	2,342	0
2,464	0,1485	2,464	0,147	2,432	0,238
2,626	0,3465	2,626	0,34	2,626	0,416
2,792	0,475	2,792	0,467	2,792	0,525
2,964	0,604	2,964	0,574	2,964	0,634
3,141	0,762	3,141	0,703	3,141	0,762
3,231	0,871	3,231	0,8	3,231	0,832
3,2495	0,921	3,23	0,832	3,286	0,891
3,2587	0,97	3,305	0,931	3,323	0,95
3,2605	1	3,317	1	3,338	1

Данные результатов компьютерного эксперимента удобно представить в виде графической зависимости, представленной на рисунке 2.21.

При оборотах вращения близких оборотам возникновения пластической зоны напряженно-деформированное состояние линейно изотропно упрочняющегося диска и диска без упрочнения отличаются слабо. С увеличением параметра m разница увеличивается и достигает максимума в точке потери несущей способности диска.

Пластическая зона возникает раньше всего в случае использования истинной диаграммы растяжения. Данное явление связано с тем, что в качестве предела текучести выбиралось $\sigma_{0,2}$, то есть напряжение, которому соответствуют пластические деформации 0,2%. При использовании истинной диаграммы данное упрощение не используется.

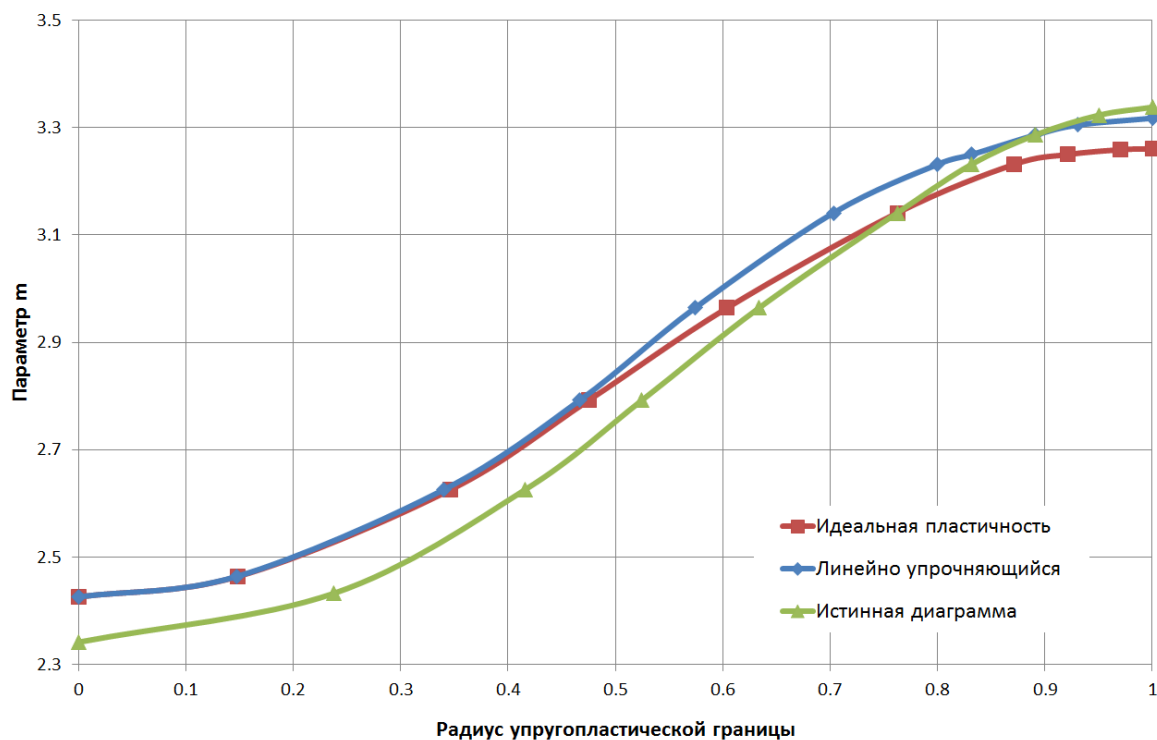


Рис. 2.21

Сначала теряет несущую способность диск при использовании модели тела без упрочнения, затем при использовании модели линейно изотропно упрочняющегося тела. Последним полностью переходит в пластическое состояние диск при использовании истинной диаграммы деформирования.

В формулу (2.1.14) следует ввести поправки позволяющие учесть использование условия пластичности Мизеса и упрочнения материала. По результатам серии задач с использованием произвольных свойств материала и размеров диска было показано, что обороты потери несущей способности линейно зависят от коэффициента упрочнения. Модифицированная эмпирическая формула (2.1.14) принимает вид

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{(3,2605 + 2,65 \cdot 10^{-11} \cdot c) \cdot \sigma_{\text{тек}}}{\rho_0 R_0^2}}, \quad (2.2.1)$$

где c – коэффициент упрочнения, $\sigma_{\text{тек}}$ – предел текучести, ρ_0 – плотность материала, R_0 – радиус диска.

Коэффициенты 3,2605 и $2,65 \cdot 10^{-11}$ получены при решении поставленной задачи методом компьютерного моделирования.

Если в формуле (2.2.1) положить $c = 0$, то получаем формулу для определения оборотов потери несущей способности для случая тела без упрочнения при условии пластичности Мизеса.

Решением, наиболее близким к реальному напряженно-деформированному состоянию вращающегося диска, является решение, полученное на основе истинной диаграммы растяжения. Математическая модель тела без упрочнения удачно описывает поведение диска в случае малого упрочнения или произвольного упрочнения, при оборотах близких оборотам возникновения пластической зоны.

§ 3. Тонкий вращающийся упругопластический кольцевой диск

Рассмотрим тонкий вращающийся диск, ослабленный круговым отверстием соосным оси вращения. Пусть в диске реализуется плоское напряженное состояние. Решение будем осуществлять в цилиндрической системе координат r, θ, Z , ось Z которой совпадает с осью вращения диска. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу R_0 диска, а величины, имеющие размерность напряжения, к пределу текучести k_0 . Тогда уравнение равновесия имеет вид

$$\rho \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \quad (2.3.1)$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 – плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k}$$

Запишем кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Уравнение равновесия дополняется соотношениями закона Гука и условием совместности деформации

$$\begin{aligned}\frac{E}{k}\varepsilon_{\theta}^e &= \sigma_{\theta} - \nu\sigma_{\rho}, \\ \frac{E}{k}\varepsilon_{\rho}^e &= \sigma_{\rho} - \nu\sigma_{\theta}, \\ \rho\frac{d\varepsilon_{\theta}}{d\rho} + \varepsilon_{\theta} - \varepsilon_{\rho} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

Дополним систему уравнений соотношениями Коши

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho} = \frac{du}{d\rho}.\tag{2.3.4}$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса, с учетом того, что предел текучести является функцией интенсивности пластической деформации

$$\sigma_{\rho}^2 - \sigma_{\rho}\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta}^2 = f(\varepsilon_i^p),\tag{2.3.5}$$

где

$$\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_{\rho}^{p2} - \varepsilon_{\rho}^p\varepsilon_{\theta}^p + \varepsilon_{\theta}^{p2}}.$$

Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned}d\varepsilon_{\rho}^p &= 2d\lambda(\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}), \\ d\varepsilon_{\theta}^p &= 2d\lambda(\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}).\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Математическая модель состоит из замкнутой системы уравнений (2.1.29)-(2.1.34). Дополним полученную систему уравнений граничными условиями и условиями неразрывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе.

Пусть внешний и внутренний контуры свободны от усилий, тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}(1) &= 0, \\ \sigma_{\rho}(a) &= 0.\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

На упругопластической границе

$$\begin{aligned} [\sigma_\rho]_{\rho_s} &= 0, \\ [\sigma_\theta]_{\rho_s} &= 0, \\ [u]_{\rho_s} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Аналогично рассуждениям, представленным в § 1 данной главы, рассмотрим решение задачи методом конечных элементов, используя три различных варианта условия пластичности (2.3.5)

- тело без упрочнения, то есть когда функция $f(\varepsilon_i^p) = 1$ и условие пластичности приобретает вид

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 1; \quad (2.3.9)$$

- упрочнение происходит изотропно по линейному закону с постоянным коэффициентом упрочнения

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 1 + c \varepsilon_i^p; \quad (2.3.10)$$

- упрочнение происходит по сложному закону в соответствии с истинной диаграммой деформирования. Истинная диаграмма деформирования аппроксимирована кусочно-линейной функцией

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = f_k(\varepsilon_i^p). \quad (2.3.11)$$

Сформулированная математическая модель для кольцевого диска совпадает с моделью для сплошного диска за исключением граничных условий.

Решение проведем в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical. На первом этапе решения задачи с помощью генератора сеток Meshing построим сетку конечных элементов.

Дискретизацию расчетной области для данной задачи проведем с помощью регулярной сетки (рисунок 2.22), выбирая размер элемента так, чтобы в радиальном направлении расположилось не менее 70 элементов. Сетка, на которой проводился расчет, содержит 127280 узлов и 42032 элемента.

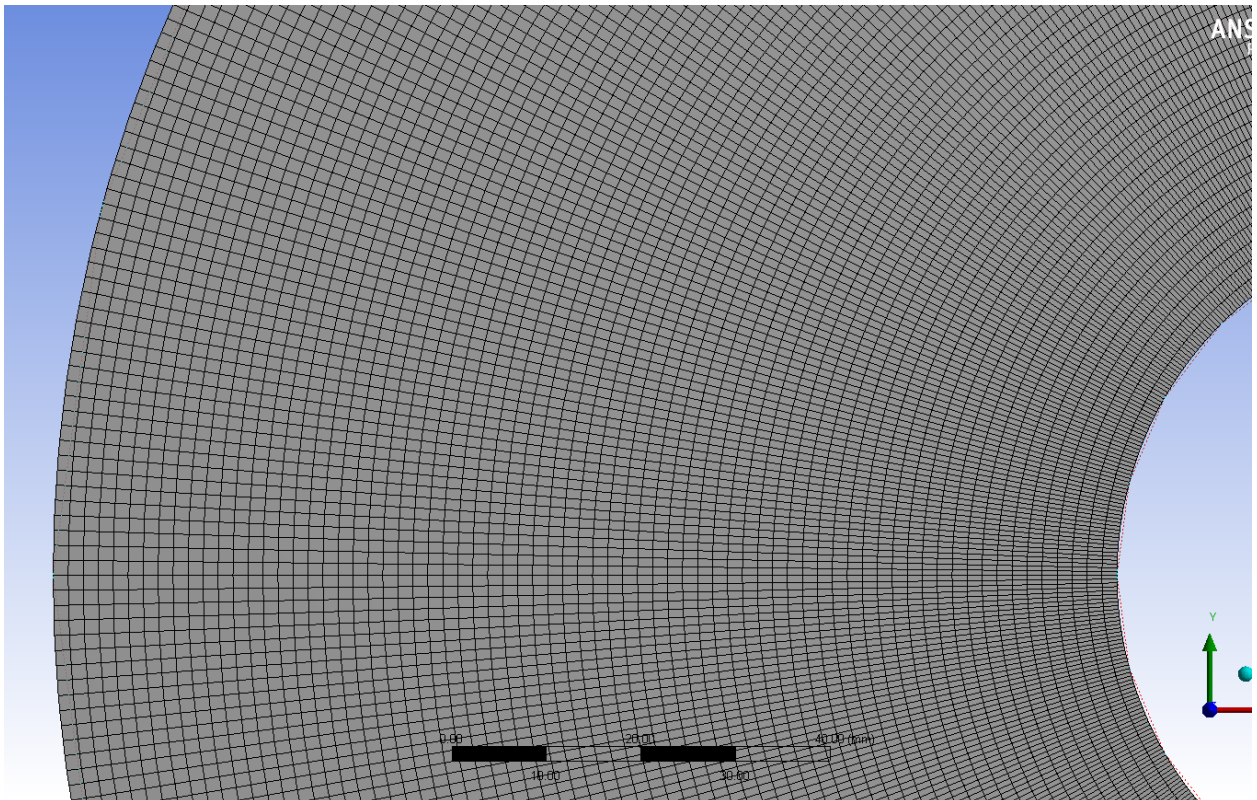


Рис. 2.22

Как и в случае со сплошным диском компьютерный эксперимент проводился для сплава ЭП-741НП. Соответствующие константы материала представлены в § 1 главы 2.

Выберем параметр, отвечающий за нагрузку от действия центробежных сил $m = 2,308$. Данный параметр соответствует угловой скорости вращения $\omega = 3000$ рад/с.

В результате численного решения получены зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от безразмерной радиальной координаты. Данные зависимости показаны на рисунках 2.23-2.28. На графиках приведены компоненты напряженно-деформированного состояния для различных условий пластичности (2.3.11)-(2.3.13).

Радиальные напряжения в зависимости от выбираемой модели отличаются слабо. Наибольшее отличие возникает в зоне упругопластической границы, но оно составляет не более 1% по сравнению со случаем тела без упрочнения.

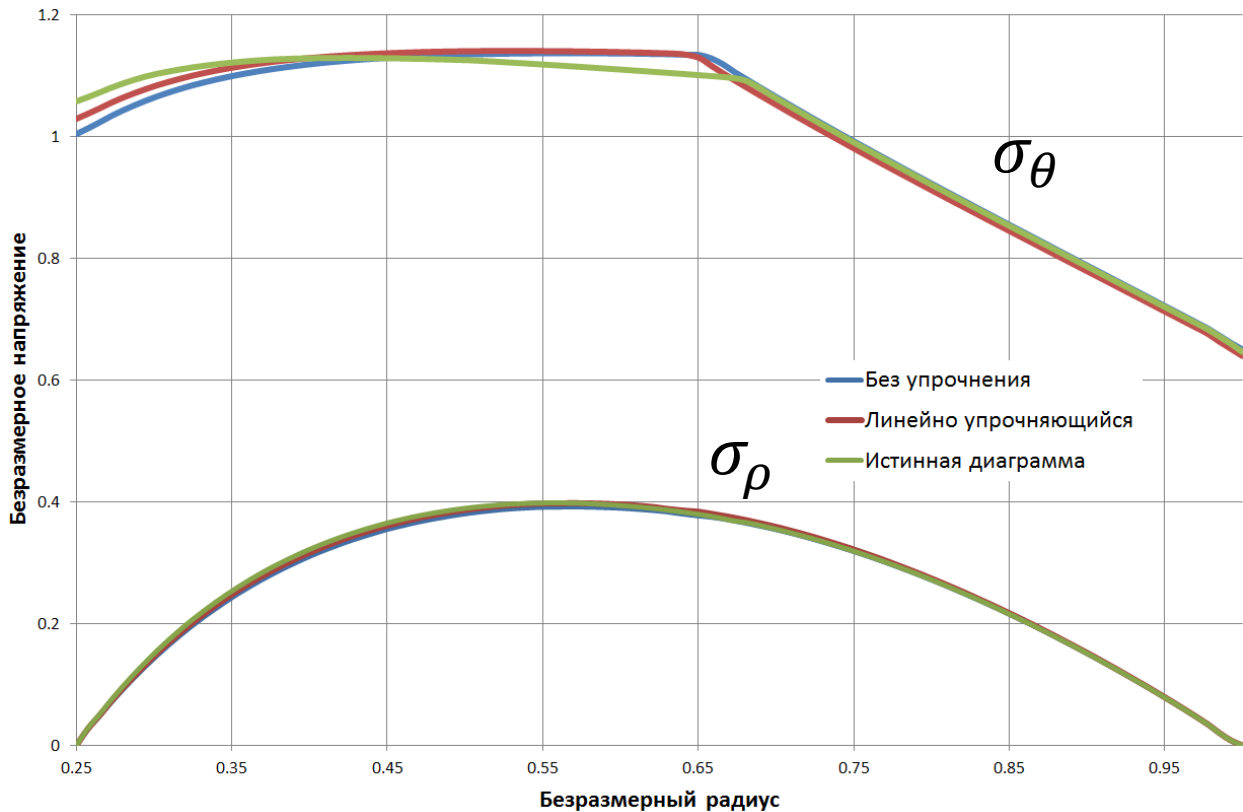


Рис. 2.23

Окружные напряжения в упругой зоне слабо зависят от выбираемой модели пластичности. В пластической зоне наблюдается значительная разница. Наибольшее окружное напряжение на внутренней границе получено при использовании истинной диаграммы растяжения: на 5,8 % выше, чем для случая тела без упрочнения. Напряжение σ_θ при использовании модели линейно изотропно упрочняющегося тела на 2,9 % выше.

Получаемые зависимости для компонент напряженно-деформированного состояния при использовании истинной диаграммы деформирования характерны для материала без выраженной площадки текучести, например сплава ЭП-741НП. Выбор для данного исследования материала с таким типом упрочнения обусловлен тем, в современном турбомашиностроении применяются исключительно материалы без выраженной площадки текучести. При ее наличии в диаграмме деформирования, может быть получено качественно другое решение.

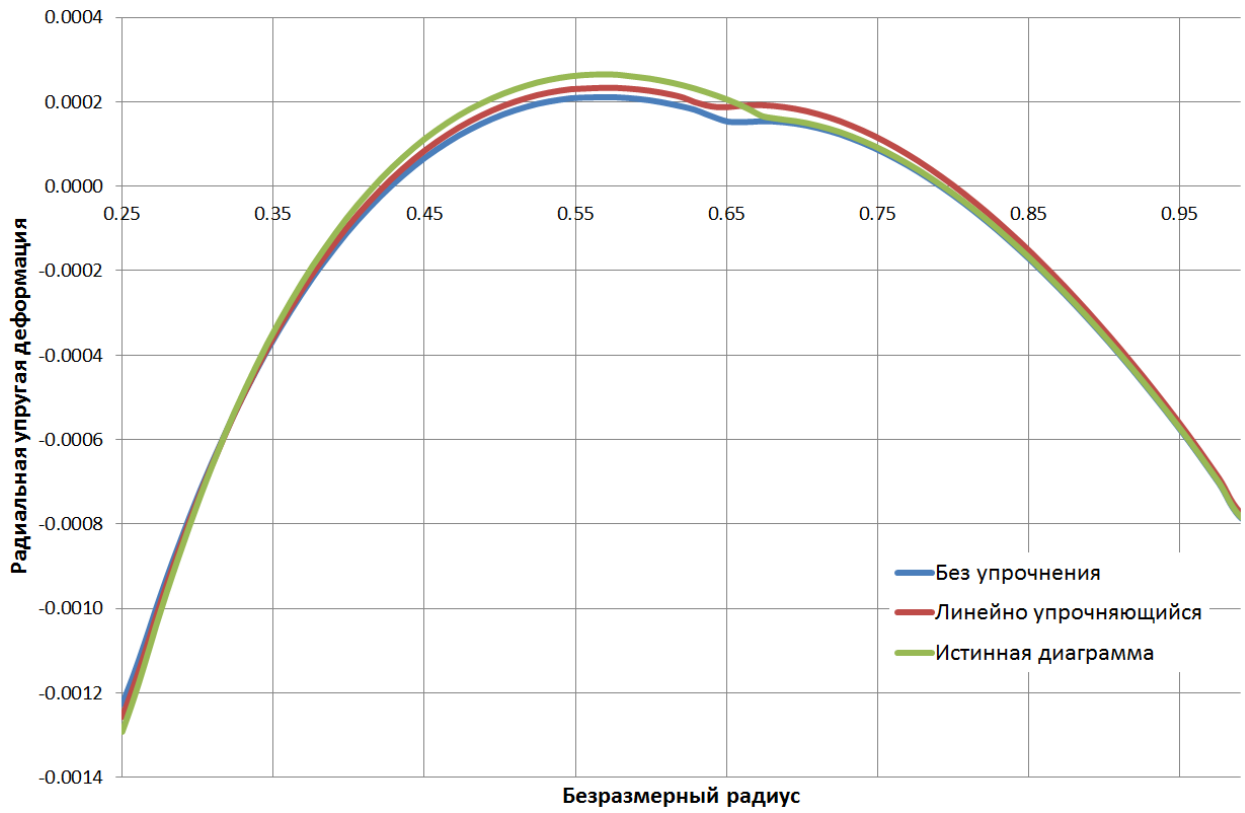


Рис. 2.24

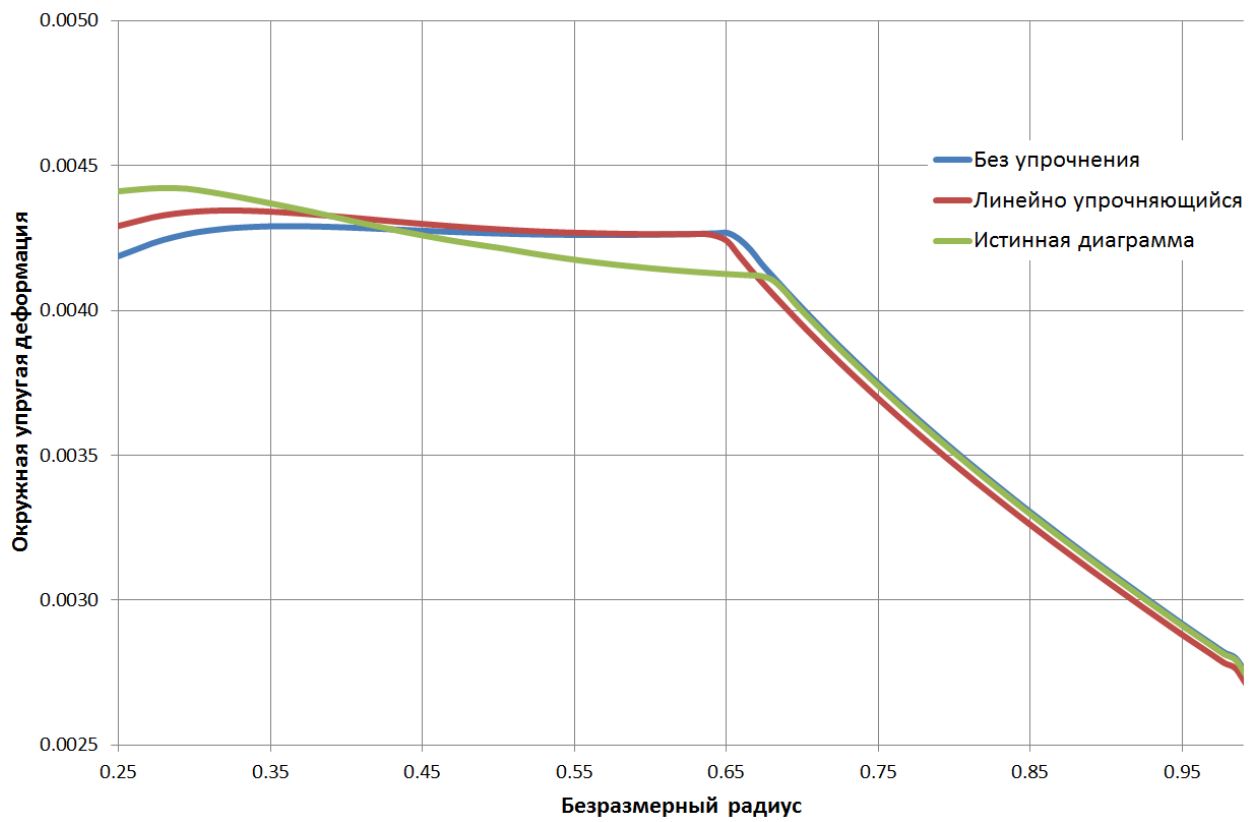


Рис. 2.25

На графике, представленном на рисунке 2.24, показывающем зависимость радиальных упругих деформаций ε_r^e от радиуса, отчетливо выделяется точка перегиба соответствующая радиусу упругопластической границы.

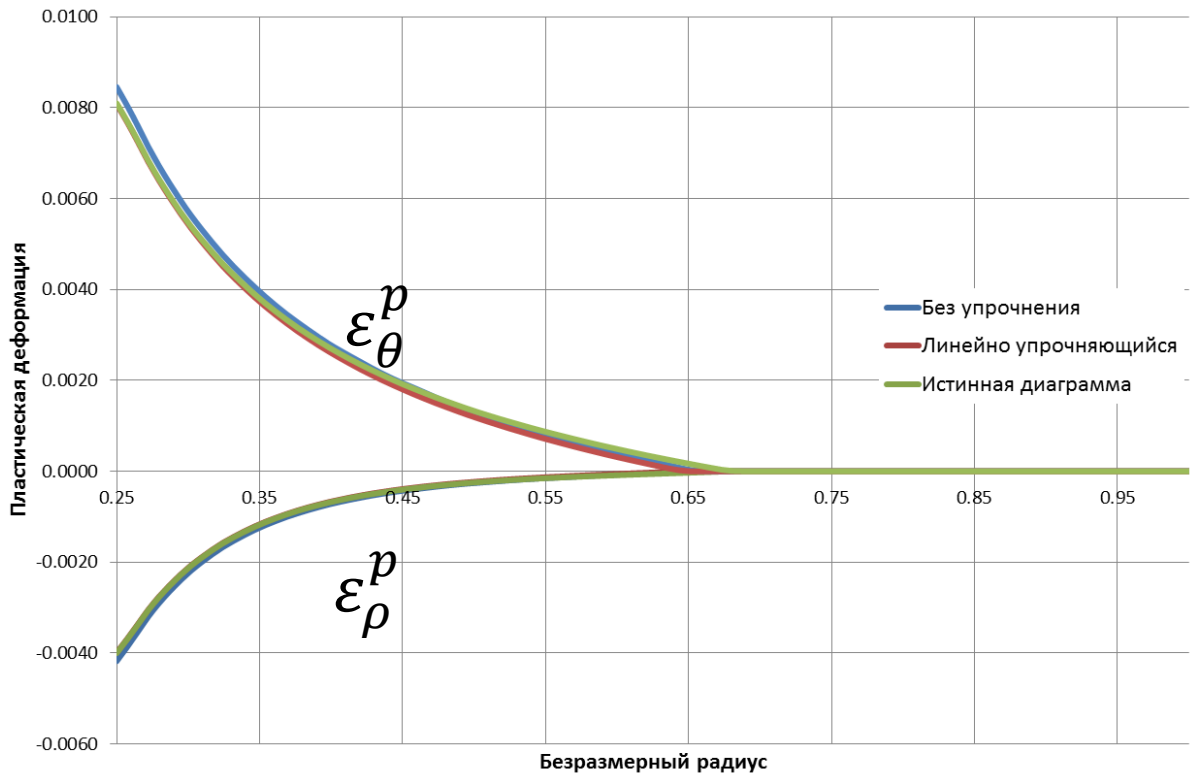


Рис. 2.26

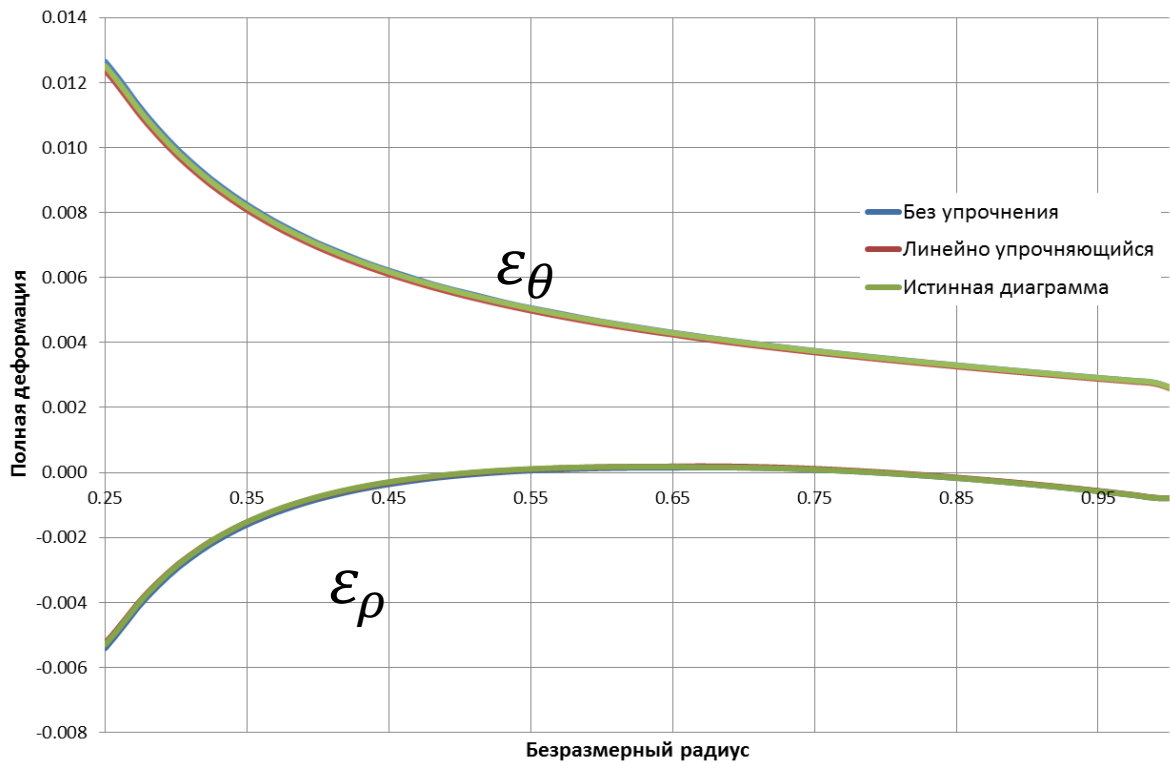


Рис. 2.27

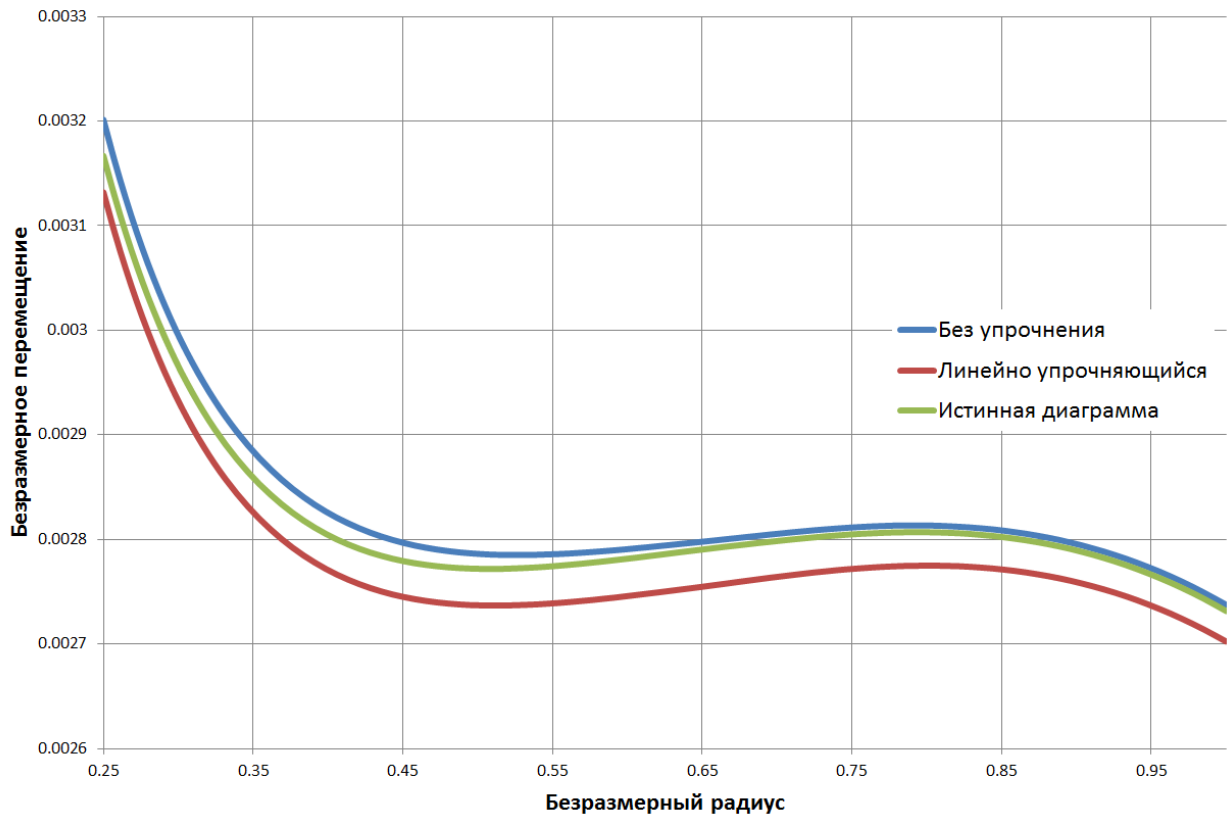


Рис. 2.28

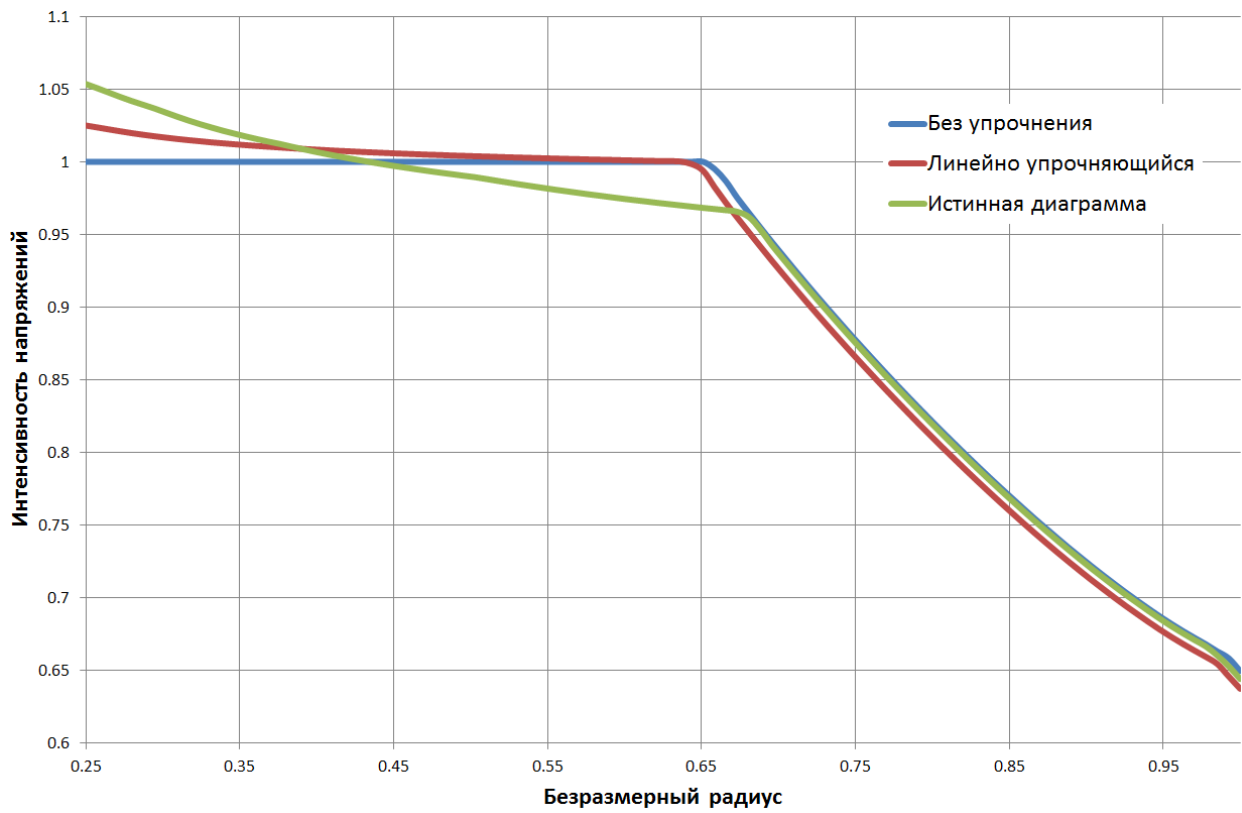


Рис. 2.29

Наибольший радиус упругопластической границы получен для истинной диаграммы деформирования $\rho_s = 0,688$. Для тела без упрочнения $\rho_s = 0,677$.

Минимальное значение радиуса $\rho_s = 0,658$ вычислено для модели линейно изотропно упрочняющегося материала. Данные значения радиуса упругопластической границы относятся к одному фиксированному значению параметра нагружения m . Исследование зависимости ρ_s от параметра нагружения для кольцевого вращающегося диска представлено в следующем параграфе.

§ 4. Потеря несущей способности кольцевого вращающегося диска

Как отмечалось в § 2 главы 2, определение запаса прочности по потере несущей способности диска является одной из основных оценок прочности диска. Если модели для сплошного диска хорошо описывают поведение дисков, например турбин, выполненных заодно с валом, то модели кольцевых дисков используются при изучении напряженно-деформированного состояния рабочих колес выполненных отдельно. В инженерных методах расчета для определения оборотов, когда диск переходит полностью в пластическое состояние, обычно используется следующая формула

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{3k}{\rho_0(R_0^2 + R_0a + a^2)}} \quad (2.4.1)$$

где k – предел текучести, ρ_0 – плотность материала, R_0 – внешний радиус диска, a – радиус отверстия.

Если в данной формуле положить $a = 0$, то получим формулу (2.1.14) для сплошного диска.

Однако (2.4.1) не учитывает эффекты упрочнения и в ее основе лежит условие пластичности Треска, как было показано в § 1. данной главы не слишком точного для подобных задач. Исследуем потерю несущей способности диска рассмотренного в предыдущем параграфе.

Согласно (2.4.1) исследуемый диск полностью перейдет в пластическое состояние при $\omega = 2986$ рад/с, что соответствует $m = 2,286$. В предыдущем параграфе в качестве граничного условия выбиралось $\omega = 3000$ рад/с и радиус

упругопластической границы был $\rho_s < 0,69$. Очевидно, что формула (2.4.1) дает заниженное значение оборотов потери несущей способности.

Численное моделирование в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical позволяет определить для кольцевого диска зависимости радиуса упругопластической границы от параметра нагружения m . Проведена серия компьютерных экспериментов, результаты которых представлены в виде таблицы 3.

Таблица 3

Без упрочнения		Линейно изотропно упрочняющийся материал		Истинная диаграмма растяжения	
m	ρ_s	m	ρ_s	m	ρ_s
1,121	0,25	1,121	0,25	1,1698	0,25
1,241	0,266	1,241	0,265	1,241	0,272
1,356	0,2898	1,356	0,287	1,356	0,295
1,477	0,315	1,477	0,309	1,477	0,317
1,603	0,344	1,603	0,339	1,603	0,347
1,733	0,375	1,733	0,369	1,733	0,384
1,869	0,423	1,869	0,413	1,869	0,436
2,01	0,482	2,01	0,473	2,01	0,495
2,156	0,562	2,156	0,547	2,156	0,584
2,308	0,677	2,308	0,658	2,308	0,688
2,464	0,844	2,464	0,814	2,464	0,837
2,507	1	2,544	1	2,544	1

Данные результатов компьютерного эксперимента удобно представить в виде графической зависимости, представленной на рисунке 2.30.

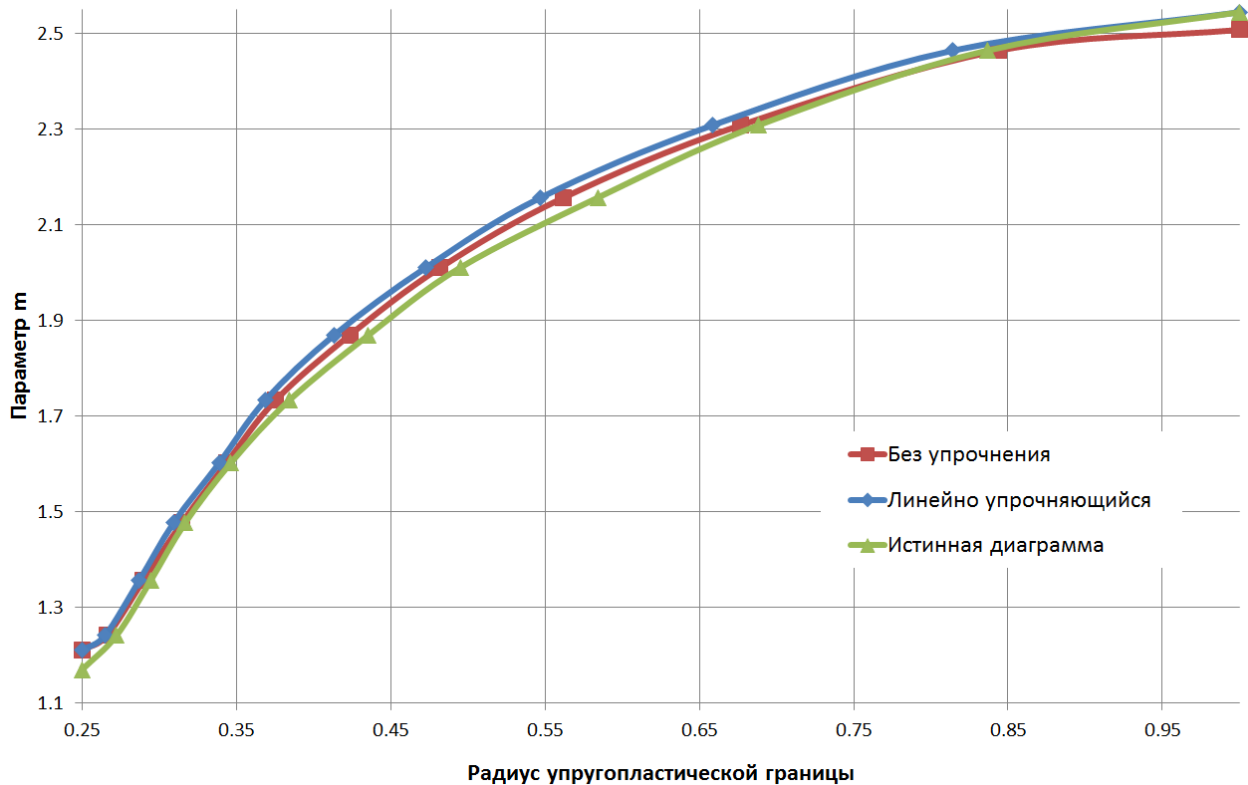


Рис. 2.30

При оборотах вращения близких оборотам возникновения пластической зоны, напряженно-деформированное состояние линейно изотропно упрочняющегося диска и диска без упрочнения отличаются слабо. С увеличением параметра m разница увеличивается и достигает максимума в точке потери несущей способности диска.

Пластическая зона возникает при более низких оборотах вращения по сравнению со сплошным диском. Для модели использующей истинную диаграмму растяжения пластическая зона возникла при m в 2 раза меньшем, чем для сплошного диска.

Сначала теряет несущую способность кольцевой диск при использовании модели тела без упрочнения. Диск с линейным упрочнением и с моделью, использующей истинную диаграмму растяжения, перешли полностью в пластическое состояние одновременно. Одновременный переход связан с особенностями полученного частного решения.

Обороты потери несущей способности диска нелинейно зависят от отношения радиуса отверстия и радиуса диска. По результатам серии компьютерных экспериментов для диска без упрочнения построена зависимость величины параметра m , при котором диск полностью переходит в пластическое состояние, от отношения a/R_0 . Данная зависимость представлена на рисунке 2.31. На график для сравнения нанесена зависимость для условия пластичности Треска, получаемая из формулы (2.4.1).

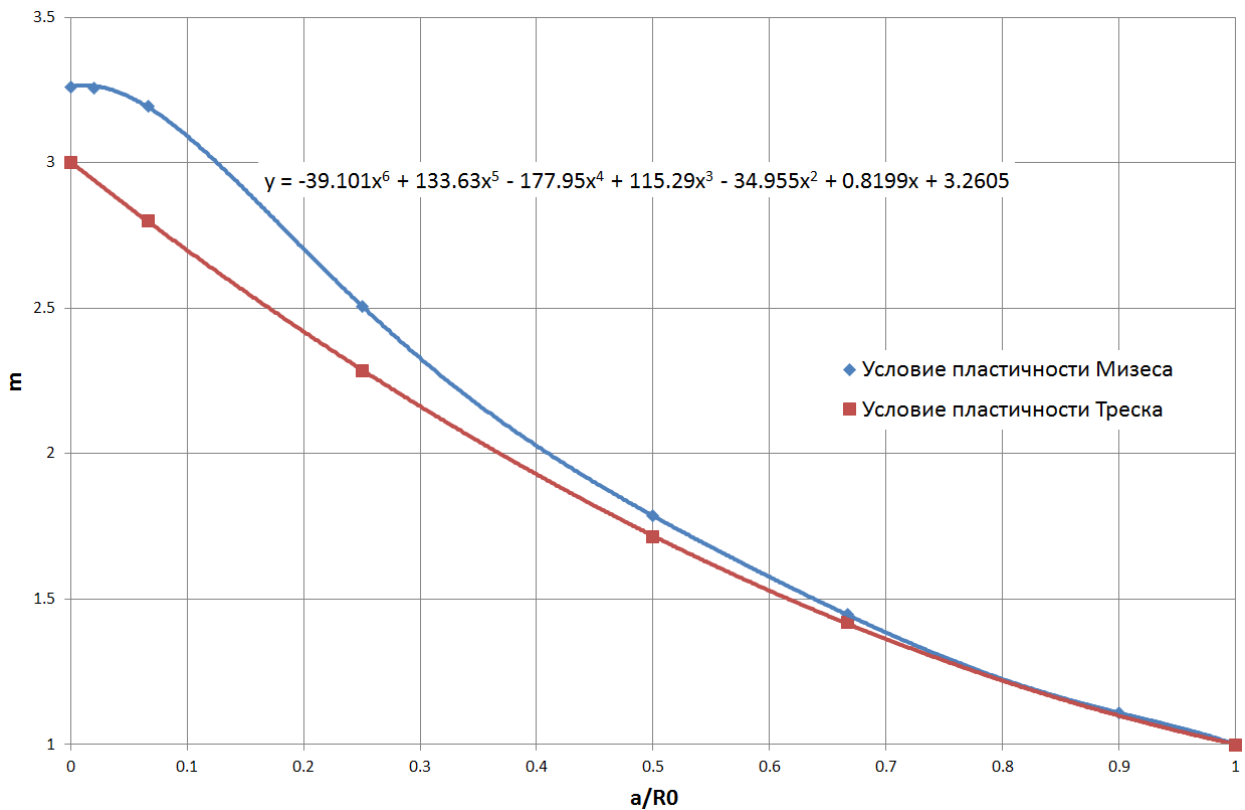


Рис. 2.31

Уравнение, аппроксимирующее зависимость m от a/R_0 имеет следующий вид

$$M\left(\frac{a}{R_0}\right) = -39,101\left(\frac{a}{R_0}\right)^6 + 133,63\left(\frac{a}{R_0}\right)^5 - 177,95\left(\frac{a}{R_0}\right)^4 + \\ + 115,29\left(\frac{a}{R_0}\right)^3 - 34,955\left(\frac{a}{R_0}\right)^2 + 0,8199\frac{a}{R_0} + 3,2605. \quad (2.4.2)$$

В формулу (2.4.1) следует ввести поправки позволяющие учесть использование условия пластичности Мизеса и упрочнение материала. По результатам решения дополнительной серии задач с использованием

произвольных свойств материала диска было показано, что обороты потери несущей способности линейно зависят от коэффициента упрочнения. Модифицированная формула (2.4.1) принимает вид

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\left(M\left(\frac{a}{R_0}\right) + 2,65 \cdot 10^{-11} \cdot c\right) \cdot \sigma_{\text{тек}}}{\rho_0 R_0^2}}, \quad (2.4.3)$$

где c – коэффициент упрочнения, $\sigma_{\text{тек}}$ – предел текучести, ρ_0 – плотность материала, R_0 – радиус диска.

Если в формуле (2.4.3) положить отношение $a/R_0 = 0$, то есть рассмотреть случай сплошного диска, то формула совпадает с формулой (2.2.1). Когда в формуле (2.4.3) $c = 0$, то получаем формулу для определения оборотов потери несущей способности кольцевого диска для случая тела без упрочнения при условии пластичности Мизеса.

Анализ полученных зависимостей показывает, что формула (2.4.3) при малых a/R_0 точнее предсказывает обороты потери несущей способности кольцевого диска, чем формула (2.4.1) на основании условия пластичности Треска. Для больших отношений $a/R_0 > 0,7$ разница между формулами минимальна.

§ 5. Обсуждение результатов

Во второй главе рассмотрены две упругопластические задачи при условии пластичности Мизеса:

- задача о сплошном диске
- задача о кольцевом диске

Каждая из задач решена в трех вариантах: для материала без упрочнения, линейно изотропно упрочняющегося материала и материала, учитывающего истинную диаграмму растяжения.

В § 1 приводится решение для сплошного диска с условием пластичности Треска. Решение рассмотрено в рамках, как теории течения, так и

деформационной теории. На основании проведенных исследований сделан вывод о том, что в пределах теории течения пластические деформации на упругопластической границе не обращаются в ноль. На основании деформационной теории показано, что в пластической зоне перемещения отсутствуют. Таким образом, и деформационная теория, и теория течения приводят к физически некорректным результатам при использовании условия пластичности Треска.

В § 1 дана краткая характеристика основных методов используемых для приближенного расчета вращающихся дисков, таких как метод переменных параметров упругости, метод дополнительных деформаций и метод малого параметра.

Решение поставленных в данной главе задач проводилось методом конечных элементов с помощью пакета автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical.

Радиус упругопластической границы получаемой при использовании условия пластичности Треска больше радиуса получаемого при использовании условия пластичности Мизеса. То есть обороты потери несущей способности диска при использовании классической для прикладных расчетов формулы (2.1.14) занижены. В современных условиях повышения эффективности турбомашин, когда масса ротора имеет большое значение, очень важна разработка более эффективного метода определения оборотов потери несущей способности.

На основании серии компьютерных экспериментов в § 2 была исследована зависимость параметра нагружения m и радиуса упругопластической границы. Предложена формула (2.2.1) для определения предельных оборотов, при которых диск полностью переходит в пластическое состояние. В основе данной формулы лежит условие пластичности Мизеса и модель линейно изотропно упрочняющегося тела. Например, для частного случая материала без упрочнения параметр m на 8,6% больше, чем для формулы (2.1.14). С увеличением коэффициента упрочнения данная разница увеличивается.

В § 3 приводится решение для кольцевого диска с условием пластичности Мизеса при отсутствии упрочнения, для линейно изотропно упрочняющегося материала и материала с истинной диаграммой растяжения. Построены графические зависимости компонент напряженно-деформированного состояния от безразмерной радиальной координаты. В упругой области решения слабо отличаются. В пластической области в зависимости от выбираемой модели упрочнения получена значительная разница.

На основании решения задач в § 4 была исследована зависимость параметра нагружения m , радиуса упругопластической границы и отношения радиусов отверстия и диаметра диска a/R_0 . Предложена формула (2.4.3) для определения предельных оборотов, при которых кольцевой диск полностью переходит в пластическое состояние. Данная формула является обобщением формулы (2.2.1).

Решение упругопластических задач методом конечных элементов в современных пакетах автоматизированного конструирования позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние тел, математическая модель которых максимально приближена к поведению реальных тел. В главе 2 было рассмотрено плоское напряженное состояние дисков, где параметры напряженно-деформированного состояния зависели только от радиуса. В следующей главе рассмотрим осесимметричное состояние дисков, где возникает зависимость еще и от координаты z .

ГЛАВА III. ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

При исследовании вращающихся дисков обычно полагают, что напряженно-деформированное состояние по толщине диска не меняется [22, 42]. Ввиду сложности решения задачи в осесимметричной постановке с учетом изменения параметров по толщине диска в открытых литературных источниках не приводятся конкретных значений напряжений $\tau_{\rho z}$, σ_z . Решение задачи в упругопластической постановке позволит оценить величину данных компонент тензора напряжений.

Очевидно, что радиус упругопластической границы по толщине диска также меняется. В данной главе будет исследована зависимость напряженно-деформированного состояния упругопластического диска от относительной толщины диска.

Наиболее актуальным направлением в сфере компьютерного моделирования является решение задач в связанной постановке [7, 11], когда одновременно решаются задачи механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела. Оценить возможности решения подобных задач методами автоматизированного конструирования удобно на задаче о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Кроме вопросов исследования напряженно-деформированного состояния, решение задачи в связанной постановке позволяет изучить и некоторые смежные вопросы, например определение момента сил трения диска.

§ 1. Сплошной вращающийся диск постоянной толщины

Рассмотрим осесимметричный сплошной вращающийся диск постоянной толщины (рисунок 3.1). Пусть его внешний контур свободен от усилий. Решение

будем осуществлять в цилиндрической системе координат r, θ, Z , ось Z которой совпадает с осью вращения диска. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу R_0 диска, а величины, имеющие размерность напряжения, к пределу текучести k_0 .

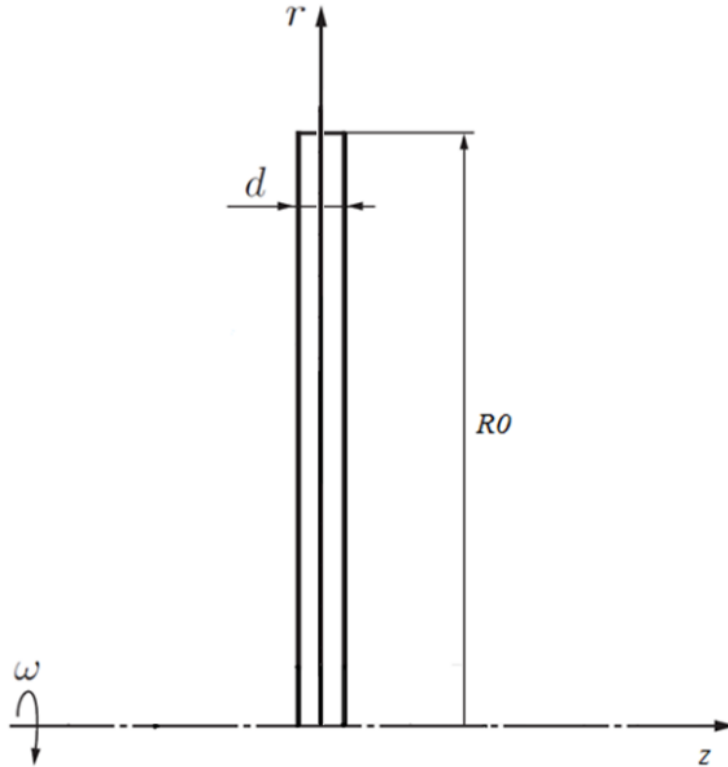


Рис. 3.1

Тогда уравнения равновесия имеют вид [44]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 &= 0, \\ \rho \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \tau_{\rho z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 – плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k}.$$

Запишем кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, & \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p, & \varepsilon_{\rho z} &= \varepsilon_{\rho z}^e + \varepsilon_{\rho z}^p. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Уравнения равновесия дополняются соотношениями закона Гука

$$\begin{aligned}\frac{E}{k} \varepsilon_{\rho}^e &= \sigma_{\rho} - \nu(\sigma_{\theta} + \sigma_z), \\ \frac{E}{k} \varepsilon_{\theta}^e &= \sigma_{\theta} - \nu(\sigma_{\rho} + \sigma_z), \\ \frac{E}{k} \varepsilon_z^e &= \sigma_z - \nu(\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho}), \\ \frac{2G}{k} \varepsilon_{\rho z}^e &= \tau_{\rho z}.\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Дополним систему уравнений соотношениями Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta} &= \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{\rho z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right).\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta})^2 + (\sigma_{\theta} - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_{\rho})^2 + 6\tau_{\rho z}^2 = 1.\tag{3.1.5}$$

Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned}d\varepsilon_{\rho}^p &= 4d\lambda \left(\sigma_{\rho} - \frac{1}{2}(\sigma_{\theta} + \sigma_z) \right), \\ d\varepsilon_{\theta}^p &= 4d\lambda \left(\sigma_{\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{\rho} + \sigma_z) \right), \\ d\varepsilon_z^p &= 4d\lambda \left(\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho}) \right), \\ d\varepsilon_{\rho z}^p &= 6d\lambda \tau_{\rho z}.\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

Математическая модель состоит из замкнутой системы, включающей 19 уравнений (3.1.1)-(3.1.6). Дополним полученную систему уравнений граничными условиями и условиями неразрывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе.

Пусть внешние контуры свободны от усилий, тогда

$$\begin{aligned}\sigma_\rho(1, z) &= 0, \\ \sigma_z\left(\rho, \pm \frac{d}{2R_0}\right) &= 0.\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

Перемещение точек, находящихся на оси вращения, отсутствует

$$u(0, z) = 0.\tag{3.1.8}$$

Окружные и радиальные напряжения в центре диска равны

$$\sigma_\rho(0, z) = \sigma_\theta(0, z).\tag{3.1.9}$$

На упругопластической границе

$$\begin{aligned}[\sigma_\rho]_{\rho_s} &= 0, & [\sigma_\theta]_{\rho_s} &= 0, \\ [\sigma_z]_{\rho_s} &= 0, & [\tau_{\rho z}]_{\rho_s} &= 0, \\ [u]_{\rho_s} &= 0, \\ [w]_{\rho_s} &= 0.\end{aligned}\tag{3.1.10}$$

Решение математической модели проведем в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical. На первом этапе решения задачи с помощью генератора сеток Meshing построим сетку конечных элементов. Дискретизацию расчетной области для данной задачи проведем с помощью регулярной сетки (рисунок 3.2). Например, сетка, на которой проводился расчет при $d/R_0 = 0,133$, содержит 36681 узлов и 12000 элемента. Вдоль радиуса расположено 300 элементов, по толщине 40.

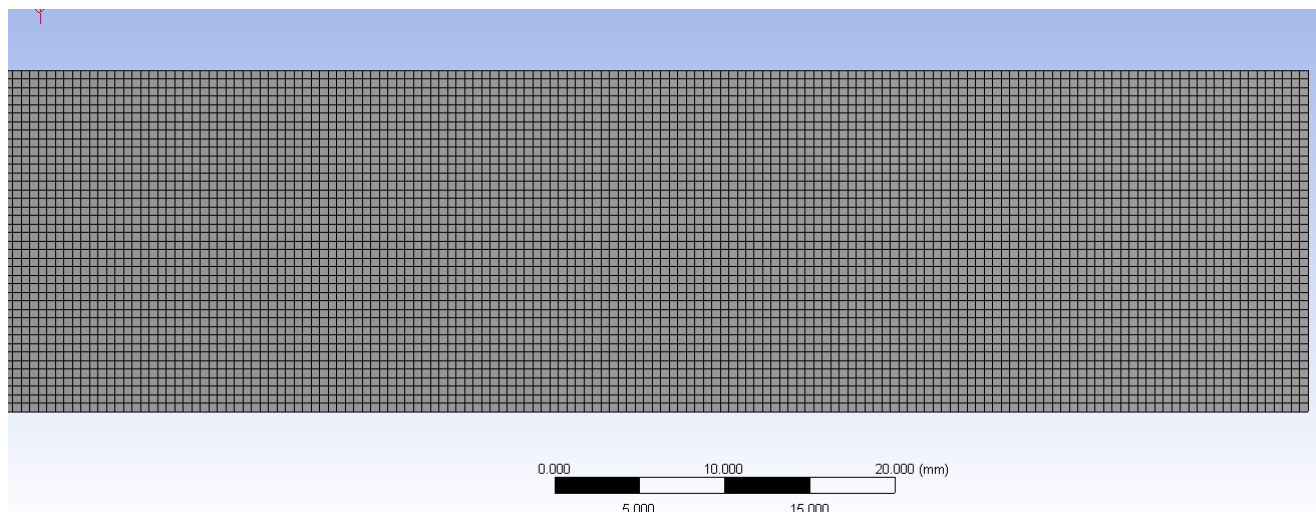


Рис. 3.2

По результатам серии компьютерных экспериментов исследуем зависимость напряженно-деформированного состояния, реализующегося в диске, от относительной толщины диска.

Исследуем влияние относительной толщины диска на форму упругопластической границы. Упругопластическая граница определена по распределениям интенсивности пластических деформаций, исходя из соображений, что на ρ_s их интенсивность обратится в ноль. Распределение интенсивности пластической деформации в зависимости от относительной толщины диска представлено на рисунке 3.3 (ось вращения слева).

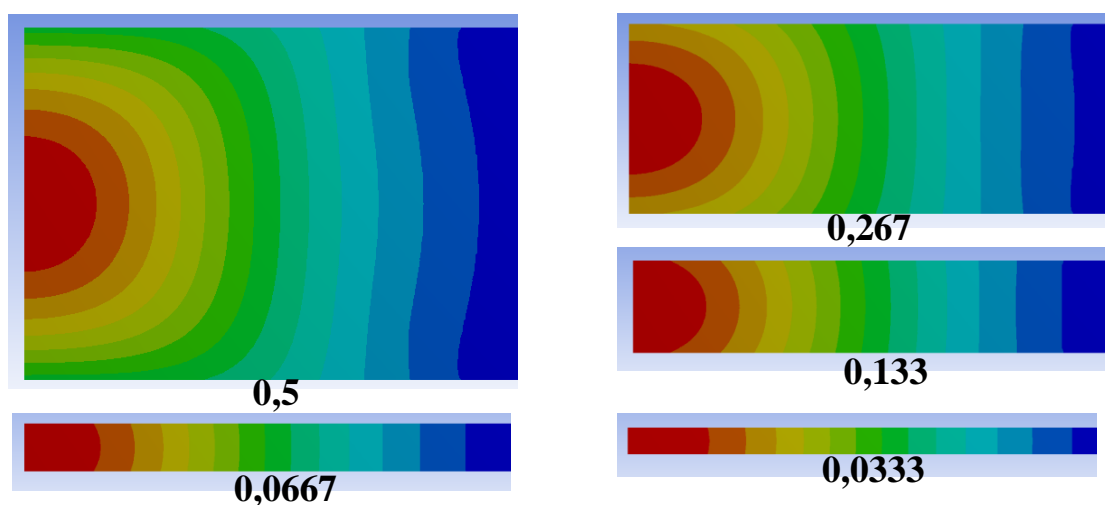


Рис. 3.3

Заметное изменение радиуса упругопластической границы по толщине диска начинается со значения $d/R_0 > 0,1$. При относительной толщине диска $d/R_0 \lesssim 0,3$ максимальный радиус упругопластической границы достигается на боковой стенке диска. При больших, чем 0,3 значениях относительной толщины максимальный радиус достигается на продольной оси симметрии. Форма упругопластической границы для различных d/R_0 представлены на рисунке 3.4.

Таким образом, гипотеза о постоянстве компонент напряженно-деформированного состояния по толщине диска с точки зрения радиуса упругопластической границы выполняется для дисков $d/R_0 \lesssim 0,1$ [10].

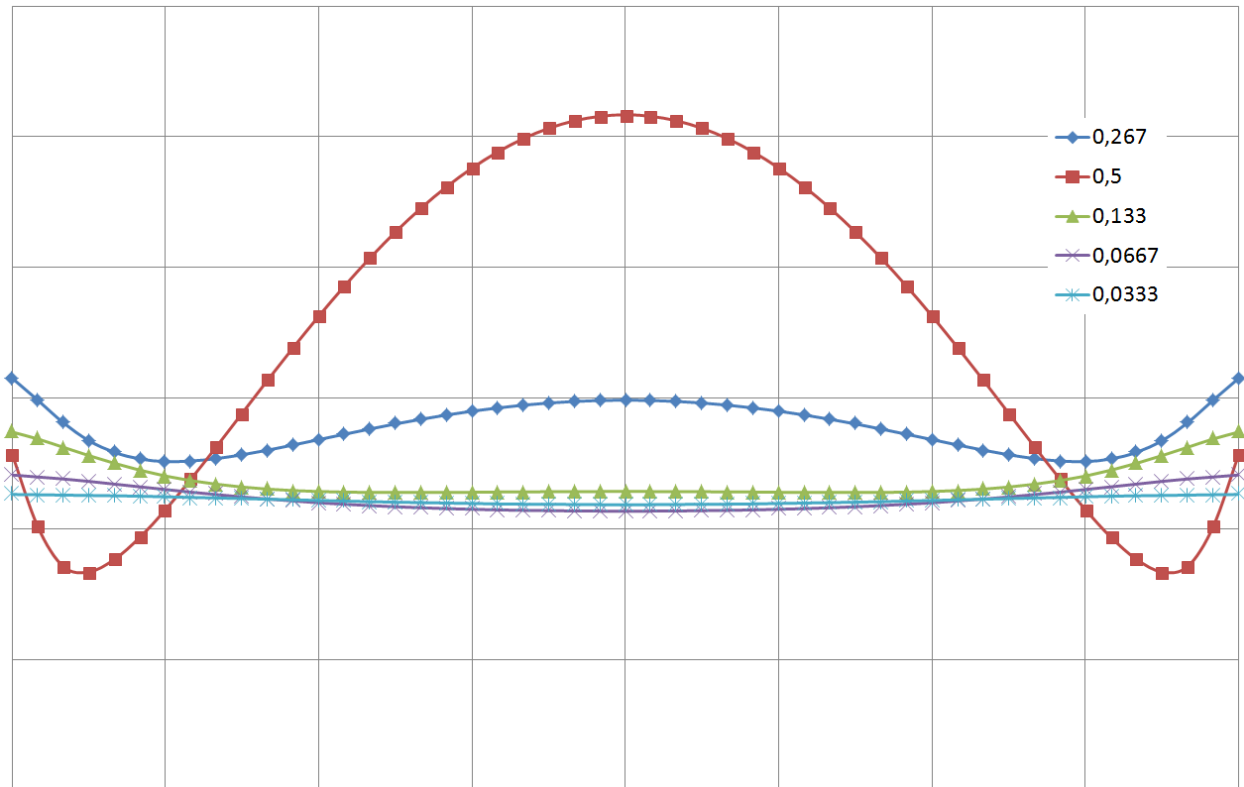


Рис. 3.4

Не менее интересным является вопрос о величине возникающих касательных напряжений. На рисунке 3.5 представлено характерное распределение напряжения $\tau_{\rho z}$ для относительной толщины диска 0,133 при условии, что $\rho_s \approx 0,5$. Пунктиром приблизительно обозначена упругопластическая граница.

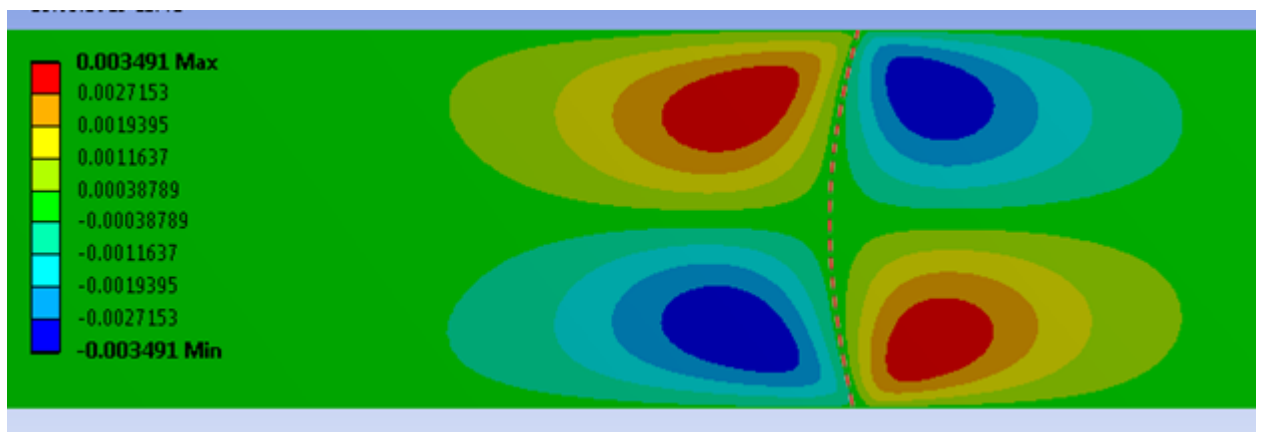


Рис. 3.5

Анализ результатов компьютерного эксперимента показал, что при малых значениях относительной толщины диска касательные напряжения пренебрежимо малы. При малых значениях параметра нагружения m , когда пластическая зона

отсутствует, во всем диапазоне рассмотренных d/R_0 , касательные напряжения не превышают 0,005. С появлением пластической зоны происходит резкий скачок величины $\tau_{\rho z}$ и максимальное ее значение тем выше, чем больше относительная толщина диска (рисунок 3.6).

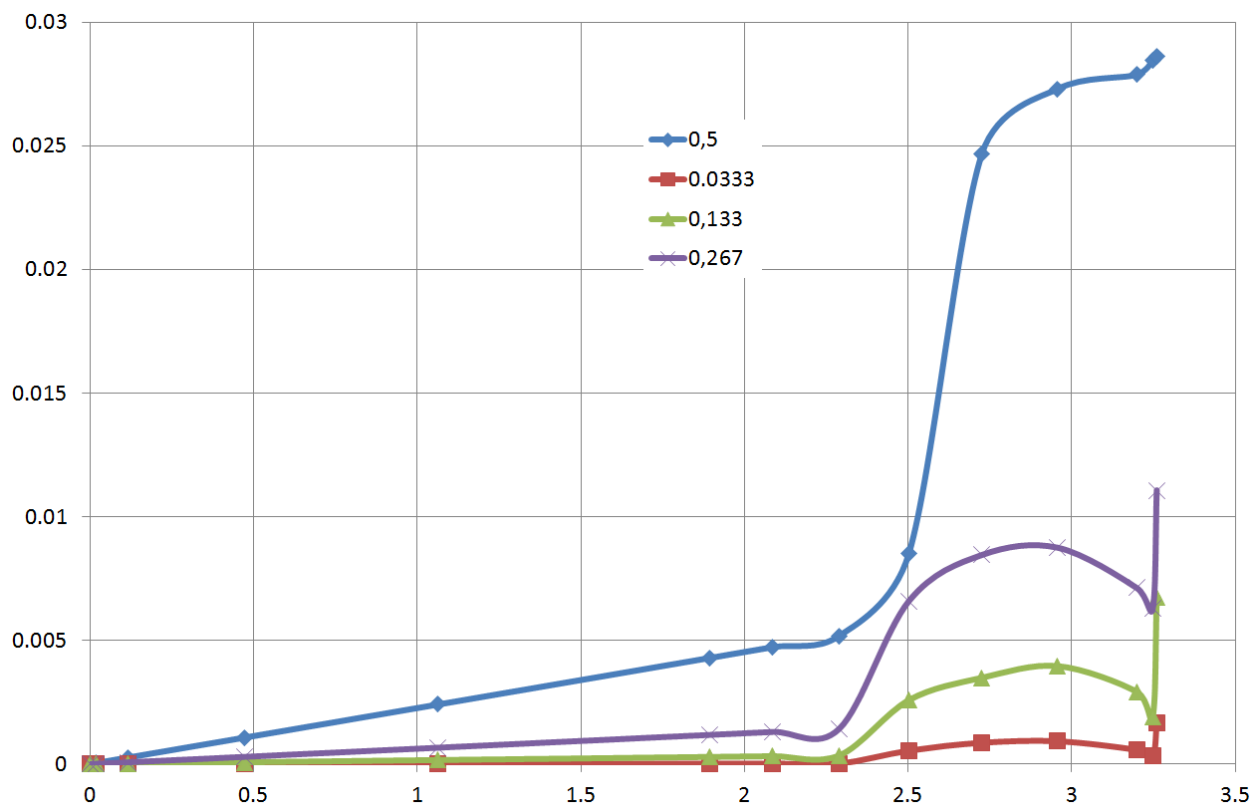


Рис. 3.6

При малых значениях относительной толщины диска при окружных скоростях близких к скорости потери несущей способности диска происходит снижение величины $\tau_{\rho z}$ за счет того, что противоположно направленные касательные напряжения в упругой и пластической зоне начинают компенсировать друг друга. По аналогии с исследованием касательного напряжения построим зависимости для нормального напряжения σ_z .

На графике, на рисунке 3.7, представлена зависимость безразмерного перемещения w боковой стенки диска от радиальной координаты. Данный график позволяет оценить форму боковой поверхности диска находящегося в упругопластическом состоянии ($d/R_0 = 0,133$). С увеличением относительной толщины диска перемещение точек боковой поверхности увеличивается.

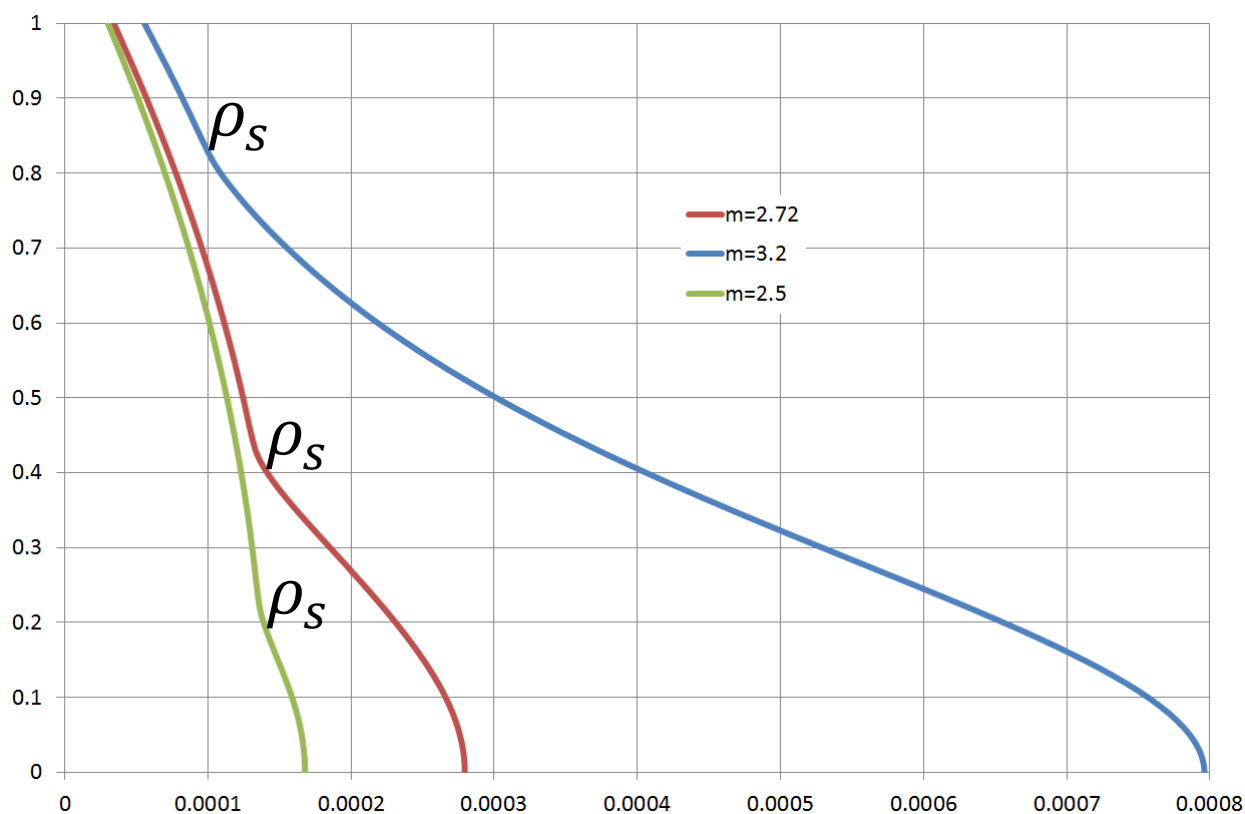


Рис. 3.7

На графиках отчетливо виден перегиб, соответствующий радиусу упругопластической границы на боковой стенке.

Важным является вопрос о величине возникающих нормальных напряжений σ_z . На рисунке 3.8 представлено характерное распределение напряжения σ_z для относительной толщины диска 0,266 при условии, что $\rho_s \approx 0,6$. Пунктиром приблизительно обозначена упругопластическая граница.

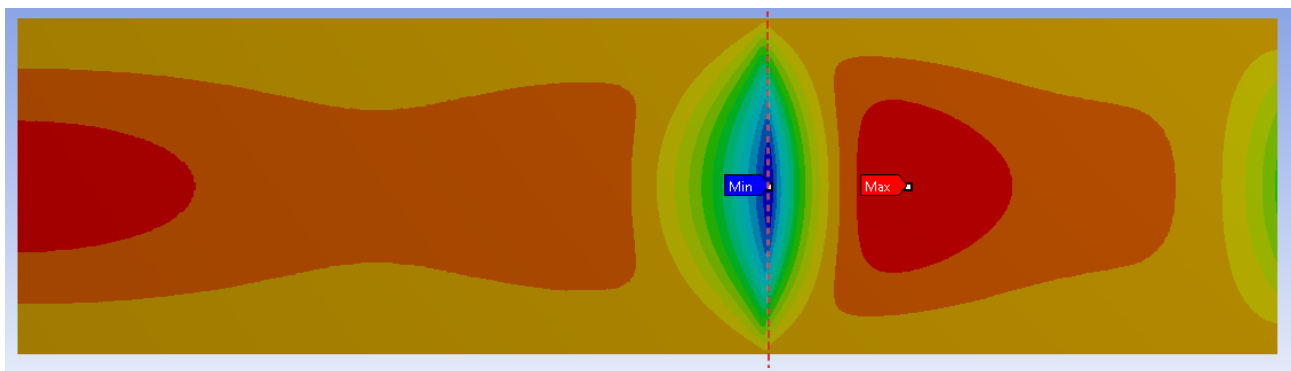


Рис. 3.8

На упругопластической границе и вблизи нее возникают отрицательные напряжения σ_z . Их минимум находится на продольной оси симметрии диска. Максимум напряжений также находится на продольной оси, но с увеличением

радиуса упругопластической границы смещается из пластической зоны в упругую.

Распределение напряжения σ_z , когда диск находится полностью в упругом состоянии, в зависимости от параметра нагружения качественно не меняется. Данное распределение показано на рисунке 3.9.



Рис. 3.9

На рисунке 3.10 представлено характерное распределение напряжения σ_z для относительной толщины диска 0,266 при условии, что $\rho_s \approx 0,23$. Пунктиром приблизительно обозначена упругопластическая граница. Как отмечалось ранее, уменьшение радиуса упругопластической границы смещает максимум напряжения σ_z в пластическую область на ось вращения диска.

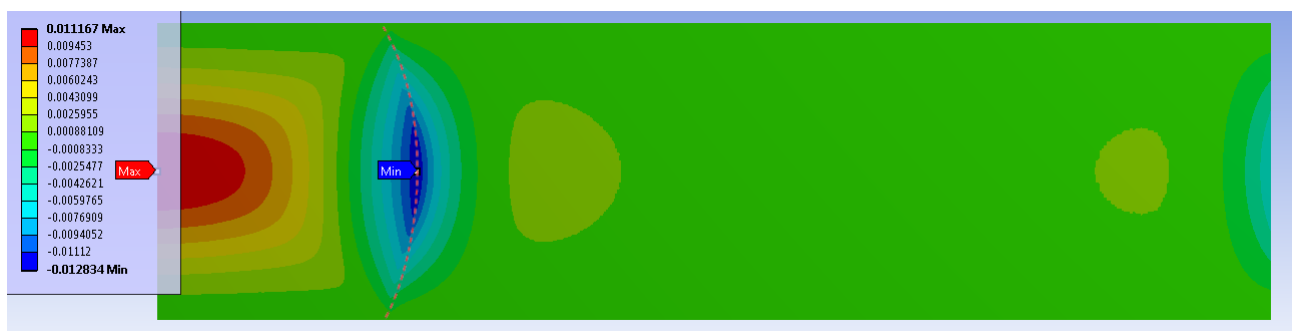


Рис. 3.10

В ходе решения задачи построена зависимость максимального и минимального значения σ_z , для разных относительных толщин диска в диапазоне значений параметра нагружения. Данная зависимость показана на рисунке 3.11.

Для диска, находящегося в упругом состоянии, в исследованном диапазоне толщин диска напряжения σ_z не превышают 0,019. Если предположить, что напряжениями ниже 0,01 (то есть 1 % от предела текучести) можно пренебречь,

то в упругой постановке гипотеза о малости напряжений σ_z справедлива до $d/R_0 \approx 0,35$.

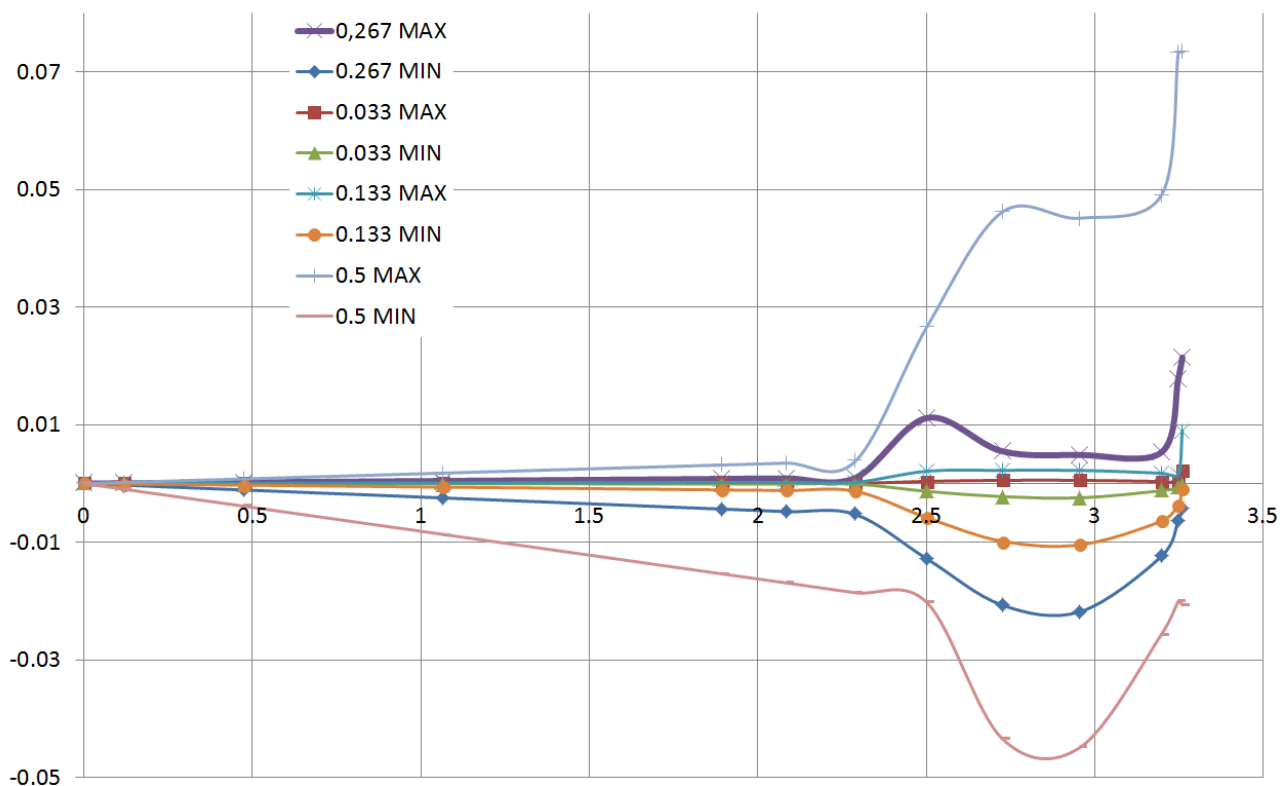


Рис. 3.11

Величины σ_z и $\tau_{\rho z}$ достаточно малы, по сравнению с величинами σ_ρ и σ_θ . Однако, для дисков относительной толщиной более 0,15, находящихся в упругопластическом состоянии, необходимо учитывать при анализе напряженно-деформированного состояния и σ_z и $\tau_{\rho z}$, так как их модули могут достигать 5-7% от величины предела текучести.

Тот вывод, что гипотезу о постоянстве напряженно-деформированного состояния по толщине нельзя использовать для достаточно толстых упругопластических дисков, подтверждают графики зависимости напряжений в упругой и пластической зоне от координаты z , представленные на рисунках 3.12 и 3.13 соответственно.

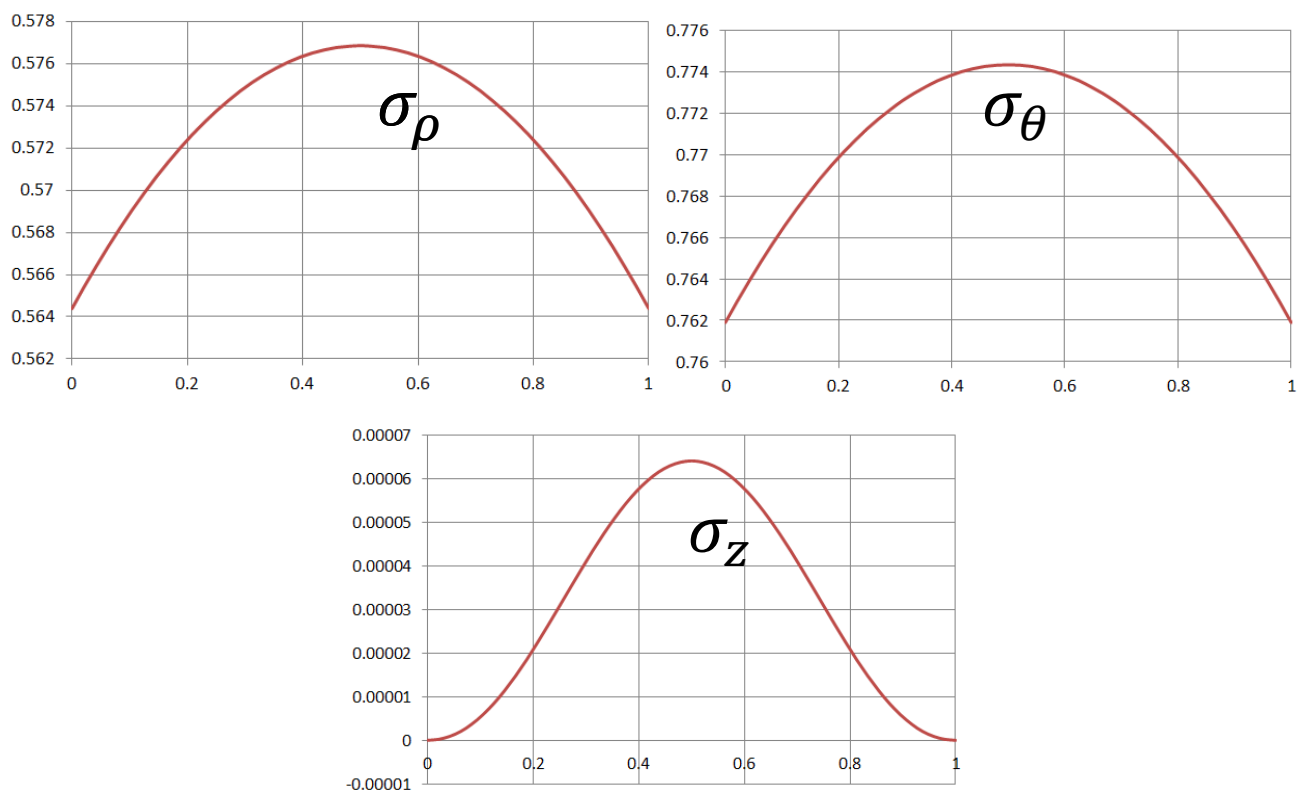


Рис. 3.12

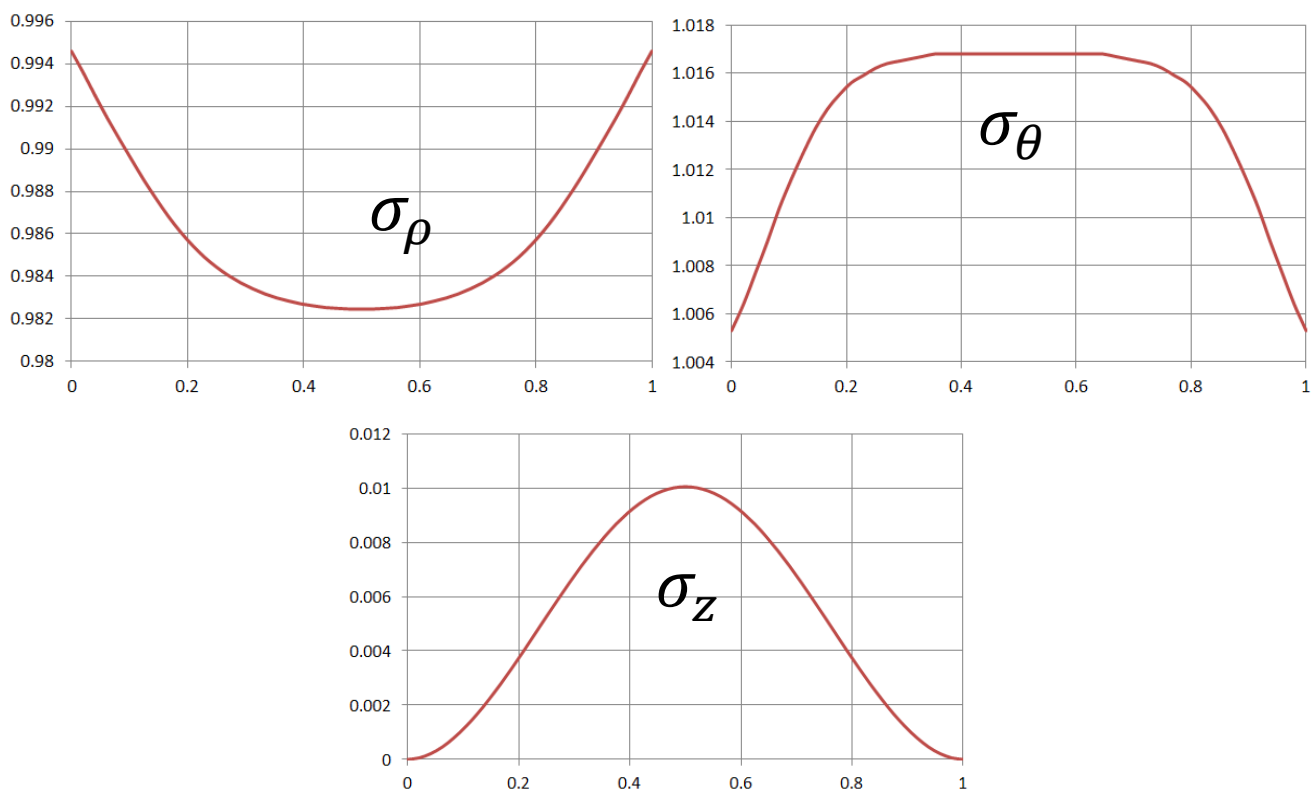


Рис. 3.13

Результаты проведенного компьютерного моделирования позволяют сделать вывод о том, что существующие формулы для профилирования равнопрочных дисков [22] в случае наличия пластической зоны и при большой

относительной локальной толщине диска дают значительную погрешность. В дальнейших работах, являющихся развитием идей представленных в данной диссертации, будет изучено влияние сложного профиля диска на осесимметричное напряженно-деформированное состояние вращающегося диска.

§ 2. Связанная задача о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой жидкостью

Рассмотрим симметричный относительно оси вращения сплошной диск постоянной толщины (рисунок 3.14). Пусть диск вращается в закрытом корпусе, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Решение будем осуществлять в цилиндрической системе координат r, θ, Z , ось Z которой совпадает с осью вращения диска. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу R_0 диска, а величины, имеющие размерность напряжения, к пределу текучести k_0 .

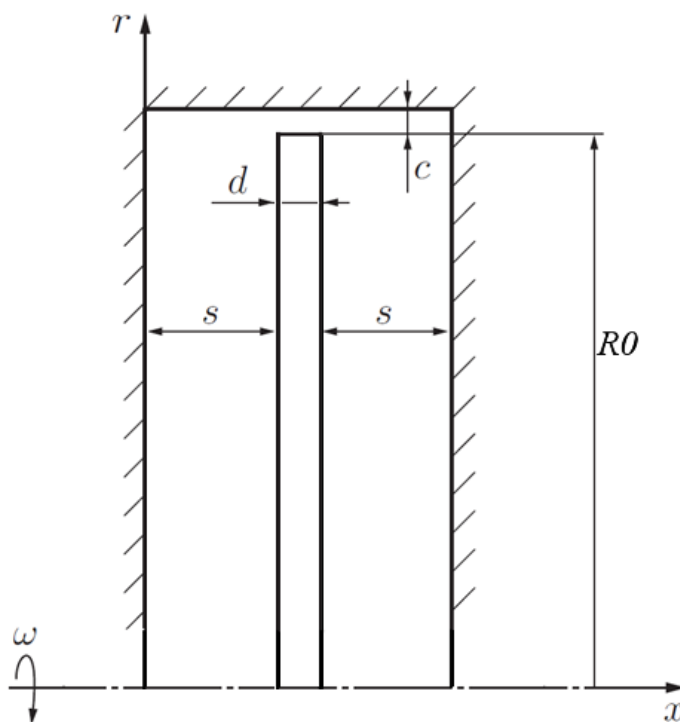


Рис. 3.14

Постановку математической модели связанной задачи можно разделить на две основные части [12]:

- Постановку упругопластической задачи о осесимметричном диске;

- Постановку задачи о течении жидкости у диска, вращающегося в корпусе, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью.

Математическая модель для упругопластического диска формулируется по аналогии с моделью, представленной в § 1 данной главы. Уравнения равновесия имеют вид [48]

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 &= 0, \\ \rho \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \tau_{\rho\theta} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \tau_{\rho z} &= 0,\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 – плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k}$$

Запишем кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, & \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p, & \varepsilon_{\rho z} &= \varepsilon_{\rho z}^e + \varepsilon_{\rho z}^p, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{\theta z}^e + \varepsilon_{\theta z}^p, & \varepsilon_{\rho\theta} &= \varepsilon_{\rho\theta}^e + \varepsilon_{\rho\theta}^p.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Уравнения равновесия дополняются соотношениями закона Гука

$$\begin{aligned}\frac{E}{k} \varepsilon_\rho^e &= \sigma_\rho - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z), \\ \frac{E}{k} \varepsilon_\theta^e &= \sigma_\theta - \nu(\sigma_\rho + \sigma_z), \\ \frac{E}{k} \varepsilon_z^e &= \sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_\rho), \\ \frac{2G}{k} \varepsilon_{\rho z}^e &= \tau_{\rho z}, & \frac{2G}{k} \varepsilon_{\rho\theta}^e &= \tau_{\rho\theta}, & \frac{2G}{k} \varepsilon_{\theta z}^e &= \tau_{\theta z}.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

Дополним систему уравнений соотношениями Коши

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\tag{3.2.4}$$

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v}{\rho} \right) \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right).$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6(\tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho\theta}^2) = 1. \quad (3.2.5)$$

Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned} d\varepsilon_\rho^p &= 4d\lambda \left(\sigma_\rho - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \right), \\ d\varepsilon_\theta^p &= 4d\lambda \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) \right), \\ d\varepsilon_z^p &= 4d\lambda \left(\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_\rho) \right), \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$d\varepsilon_{\rho z}^p = 6d\lambda \tau_{\rho z}, \quad d\varepsilon_{\theta z}^p = 6d\lambda \tau_{\theta z}, \quad d\varepsilon_{\rho\theta}^p = 6d\lambda \tau_{\rho\theta}.$$

Обороты вращения диска, в котором возникают пластические деформации, достаточно велики, чтобы в жидкости реализовался развитый турбулентный режим течения.

Запишем дифференциальные уравнения движения сплошной среды в цилиндрических координатах в компонентах напряжений [79]

$$\begin{aligned} v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{\rho} &= \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \left(\frac{\partial p_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial p_{\rho z}}{\partial z} - \frac{p_{\rho\rho} - p_{\theta\theta}}{\rho} \right), \\ v_\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\rho v_\theta}{\rho} &= \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \left(\frac{\partial p_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial p_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2p_{\rho\theta}}{\rho} \right), \\ v_\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \left(\frac{\partial p_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{\rho z}}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Дополним данные уравнения условием несжимаемости

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.2.8)$$

С учетом обобщенной гипотезы Ньютона для несжимаемой жидкости компоненты напряжений выражаются через скорости движения среды следующим образом

$$\begin{aligned}
p_{\rho\rho} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}, & p_{\theta\rho} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} - \frac{v_\theta}{\rho} \right), \\
p_{\theta\theta} &= -P + 2\mu \frac{v_\rho}{\rho}, & p_{\theta z} &= \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \\
p_{zz} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & p_{z\rho} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Тогда уравнения Рейнольдса несжимаемой жидкости для осредненного турбулентного движения тогда примут вид [59]

$$\begin{aligned}
v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{\rho} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{P}{\rho_{\text{ж}}} + \frac{2}{3} K \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(2(v_{\text{ж}} + \nu_t) \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left((v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \right) + \frac{2(v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} - \frac{v_\rho}{\rho} \right)}{\rho}, \\
v_\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\rho v_\theta}{\rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left((v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} - \frac{v_\theta}{\rho} \right) \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left((v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right) + \frac{2(v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} - \frac{v_\theta}{\rho} \right)}{\rho}, \tag{3.2.9} \\
v_\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\rho_{\text{ж}}} + \frac{2}{3} K \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left((v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left((v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) + \frac{(v_{\text{ж}} + \nu_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right)}{\rho},
\end{aligned}$$

где v_ρ, v_θ, v_z – осредненные компоненты вектора скорости, K – кинетическая энергия турбулентности, $\nu_{\text{ж}}$ – кинематическая вязкость жидкости, $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости, ν_t – турбулентная вязкость, P – осредненное давление.

В рамках модели турбулентности $k - \varepsilon$ для развитого турбулентного течения, где прямое влияние вязкости на структуру турбулентности пренебрежимо мало, турбулентная вязкость может быть определена по формуле

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \tag{3.2.10}$$

где $C_\mu = 0,09$, ε – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии, которая в свою очередь определяется из уравнений переноса

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\varepsilon v_\rho - v_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} G_{\rho\rho} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}, \quad (3.2.11)$$

где $v_\varepsilon = v_{ж} + v_t/1.3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$. Аналогично (3.2.11) записываются соотношения поочередной перестановкой индексов с учетом, что

$$G_{\rho\rho} = 2v_t \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right)^2, \quad G_{\rho z} = v_t \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \dots \quad (3.2.12)$$

Дополним полученную систему уравнений граничными условиями и условиями неразрывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе.

Перемещение точек твердого тела, находящихся на оси вращения, отсутствует

$$u(0, \theta, z) = 0. \quad (3.2.13)$$

Окружные и радиальные напряжения в центре диска равны

$$\sigma_\rho(0, \theta, z) = \sigma_\theta(0, \theta, z). \quad (3.2.14)$$

На упругопластической границе

$$\begin{aligned} [\sigma_\rho]_{\rho_s} &= 0, & [\sigma_\theta]_{\rho_s} &= 0, \\ [\sigma_\rho]_{\rho_s} &= 0, & [\tau_{\rho z}]_{\rho_s} &= 0, \\ [\tau_{\rho\theta}]_{\rho_s} &= 0, & [\tau_{\theta z}]_{\rho_s} &= 0, \\ [u]_{\rho_s} &= 0, & [v]_{\rho_s} &= 0, & [w]_{\rho_s} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

В жидкости, большое значение имеет граничное условие прилипания жидкости к твердой стенке, то есть отсутствие относительной скорости скольжения жидкости по поверхности твердого тела. С учетом данного условия на поверхности диска будет выполняться условие неразрывности напряжений в жидкости и в твердом теле

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_s} &= p_{\rho\rho_s}, & \sigma_{\theta_s} &= p_{\theta\theta_s}, \\ \sigma_{z_s} &= p_{zz_s}, & \tau_{\rho z_s} &= p_{\rho z_s}, \end{aligned}$$

$$\tau_{\rho\theta_S} = p_{\rho\theta_S}, \quad \tau_{\theta z_S} = p_{\theta z_S}.$$

Данная математическая модель может быть решена только методами автоматизированного конструирования. Решение сформулированной задачи требует привлечения кроме метода конечных элементов, метода контрольных объемов для решения задачи механики жидкости и газа. Данное направление компьютерного моделирования называется FSI анализ (Fluid structure interaction).

Для решения задачи требуется построить две отдельные сетки. Сетка для области, заполненной жидкостью, должна иметь призматические пристеночные слои элементов, позволяющие корректно разрешать течение в пограничном слое. Пример такой тетраэдрической сетки показан на рисунке 3.15

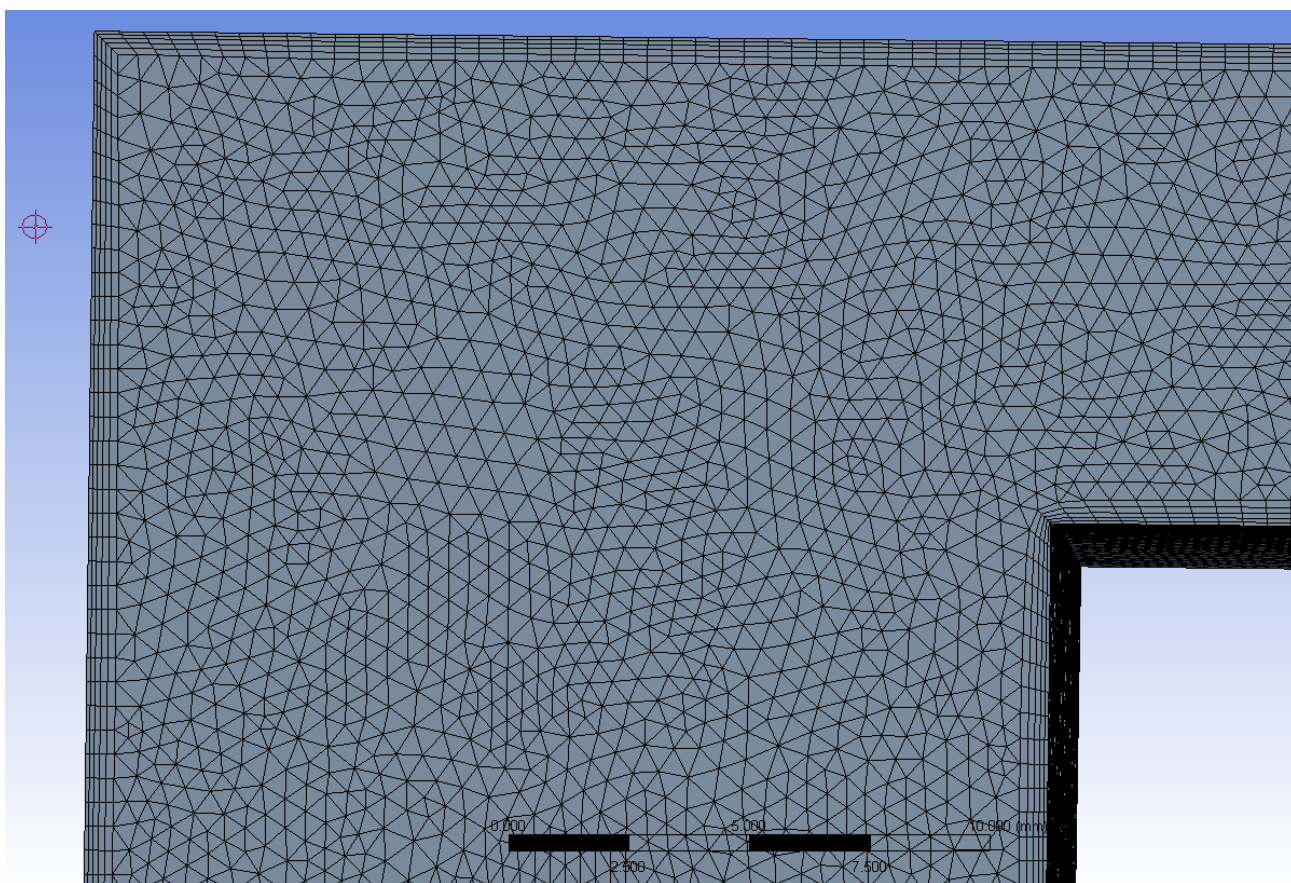


Рис. 3.15

В методику построения сетки в твердом теле при решении связанной задачи не требуется вносить особые коррективы. Однако, если в предыдущих параграфах рассматривались плоские сетки, то решение связанной задачи требует построения объемной сетки. На рисунке 3.16 показана сетка для диска $d/R_0 = 0,266$

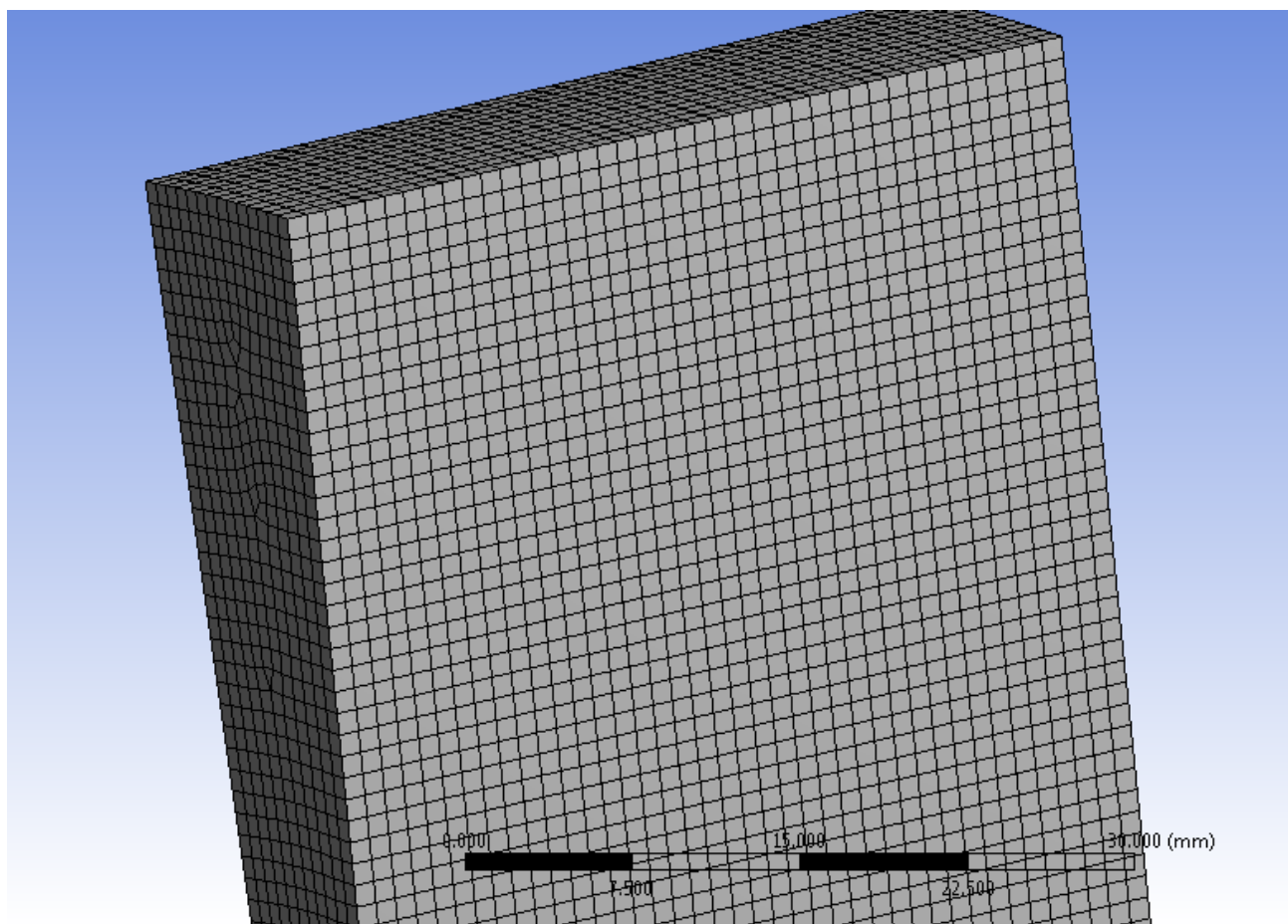


Рис. 3.16

При вращении диска в закрытом корпусе наблюдается следующая картина течения. Вблизи диска радиальное течение направлено от центра. Вдоль стенок корпуса радиальная скорость направлена к центру. Между стенками вращается ядро жидкости с угловой скоростью примерно в два раза меньшей, чем диск.

За счет закрутки потока в полости, вдоль радиуса образуется значительный перепад давления, влияющий на напряженно-деформированное состояние диска.

В качестве материала диска, как и в предыдущих параграфах, выберем сплав ЭП-741НП. Корпус пусть будет заполнен водой со следующими параметрами: $\rho_{\text{ж}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\mu_{\text{ж}} = 8,9 \cdot 10^{-4}$. Рассмотрим обороты вращения, при которых наблюдалась развитая пластическая деформация $\omega = 3400 \text{ рад/с}$ или $m = 2,964$. Для данных оборотов получен перепад давления в жидкости вдоль радиуса $\Delta P = 0,033$, эпюра давления представлена на рисунке 3.17. Величина перепада давления зависит от плотности жидкости и угловой скорости вращения диска [9,13].

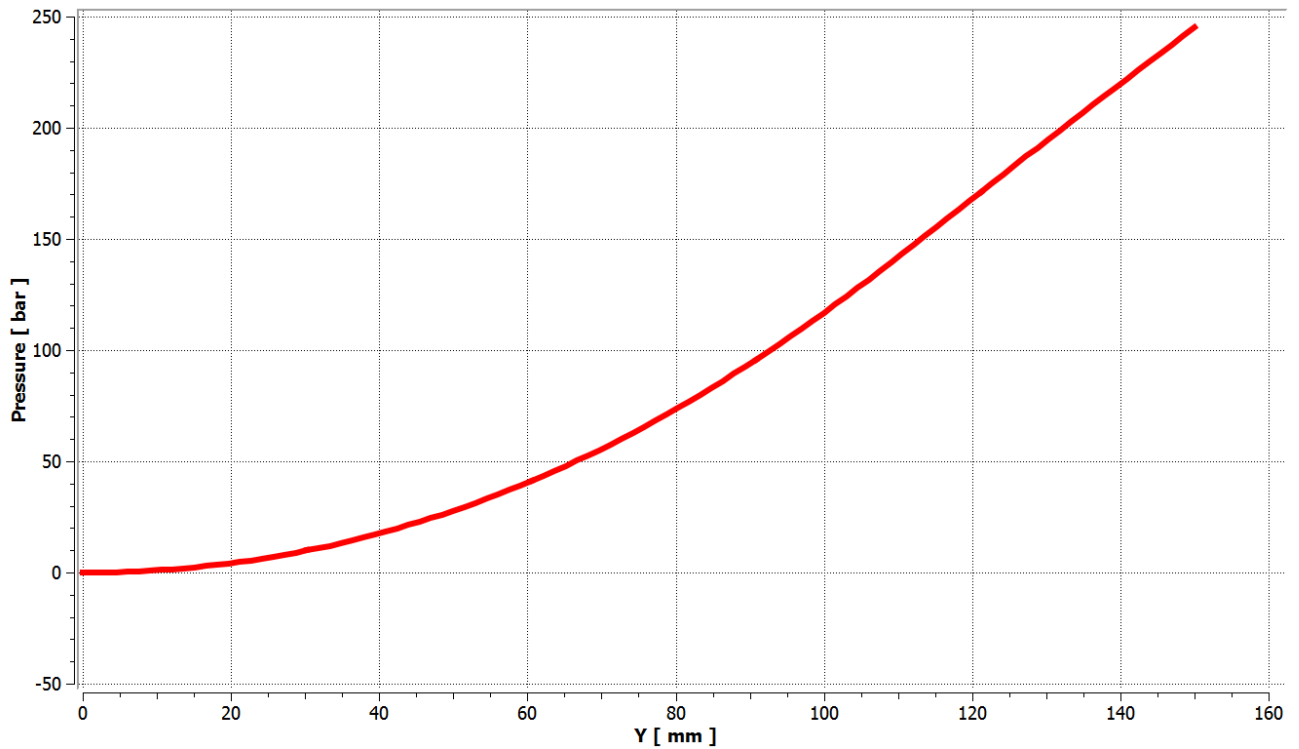


Рис. 3.17

Картина течения жидкости, представленная на рисунке 3.18, полученная в результате компьютерного эксперимента, хорошо согласуется с классическими опытами, проведенными отечественными и зарубежными учеными [30, 45, 99].

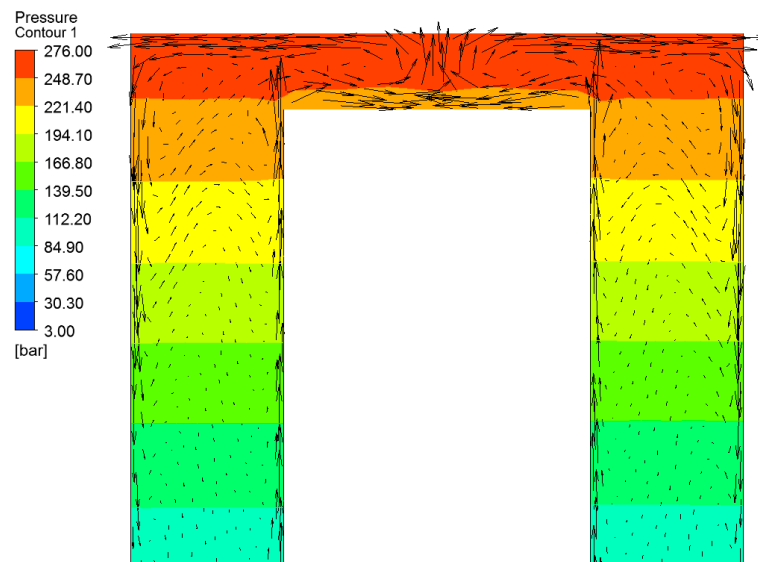


Рис. 3.18

Качественно результаты, полученные для напряженно-деформированного состояния, хорошо согласуются с результатами, представленными во второй главе и первом параграфе данной главы. Распределения напряжений σ_r и σ_θ для

связанной задачи показаны на рисунке 3.19. Изменение компонент напряжений по толщине диска близко к представленным на рисунке 3.13 зависимостям.

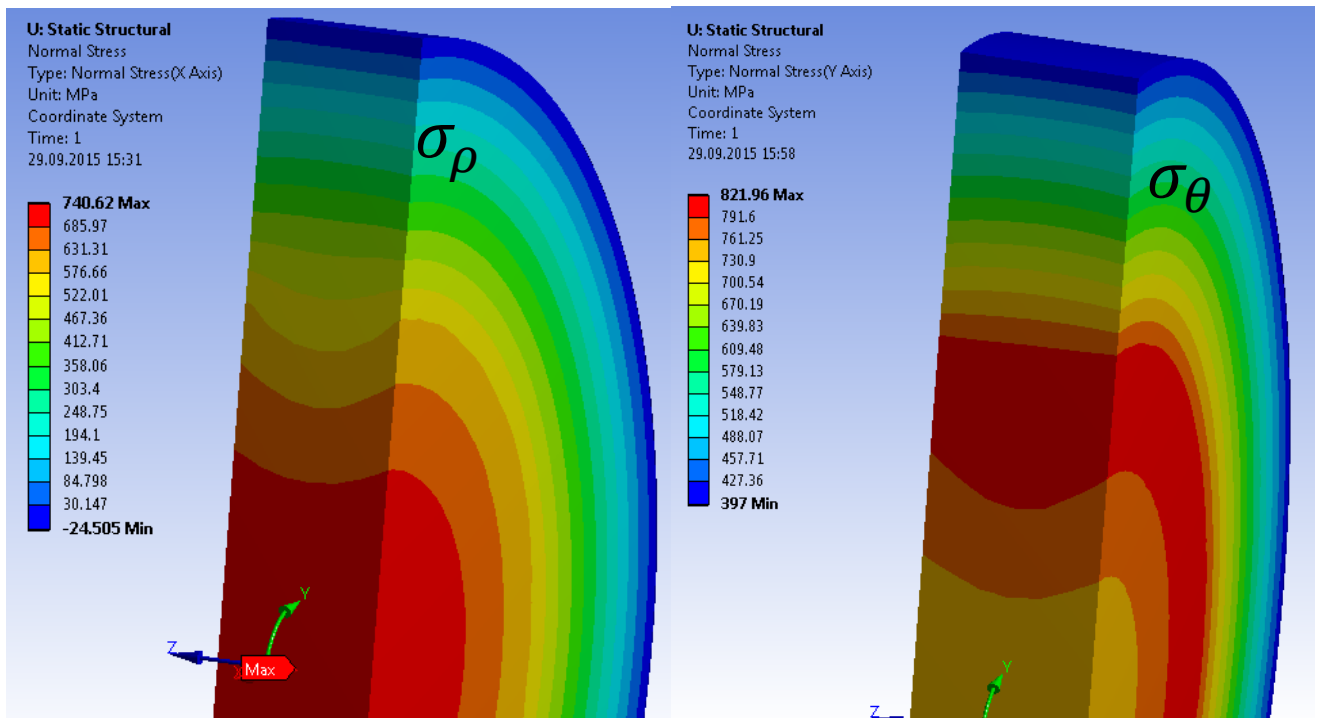


Рис. 3.19

Очевидно, что внешний радиус (обод) диска не свободен от усилий. Для корректного сравнения математических моделей из 1 и 2 параграфов данной главы следует решить задачу в осесимметричной постановке. Зададим на внешнем радиусе дополнительное давление равное среднеинтегральному значению давления на ободе. Среднеинтегральное давление по поверхности обода диска вычисляется в ANSYS CFX с помощью функции AreaAve.

На рисунках 3.20-3.22 показаны зависимости компонент тензора напряжений σ_ρ , σ_θ и σ_z от радиальной координаты. Графики построены по продольной оси симметрии диска.

Напряжения σ_ρ для обоих случаев практически равны: разница составляет не более 0,2% от предела текучести и возникает в районе упругопластической границы.

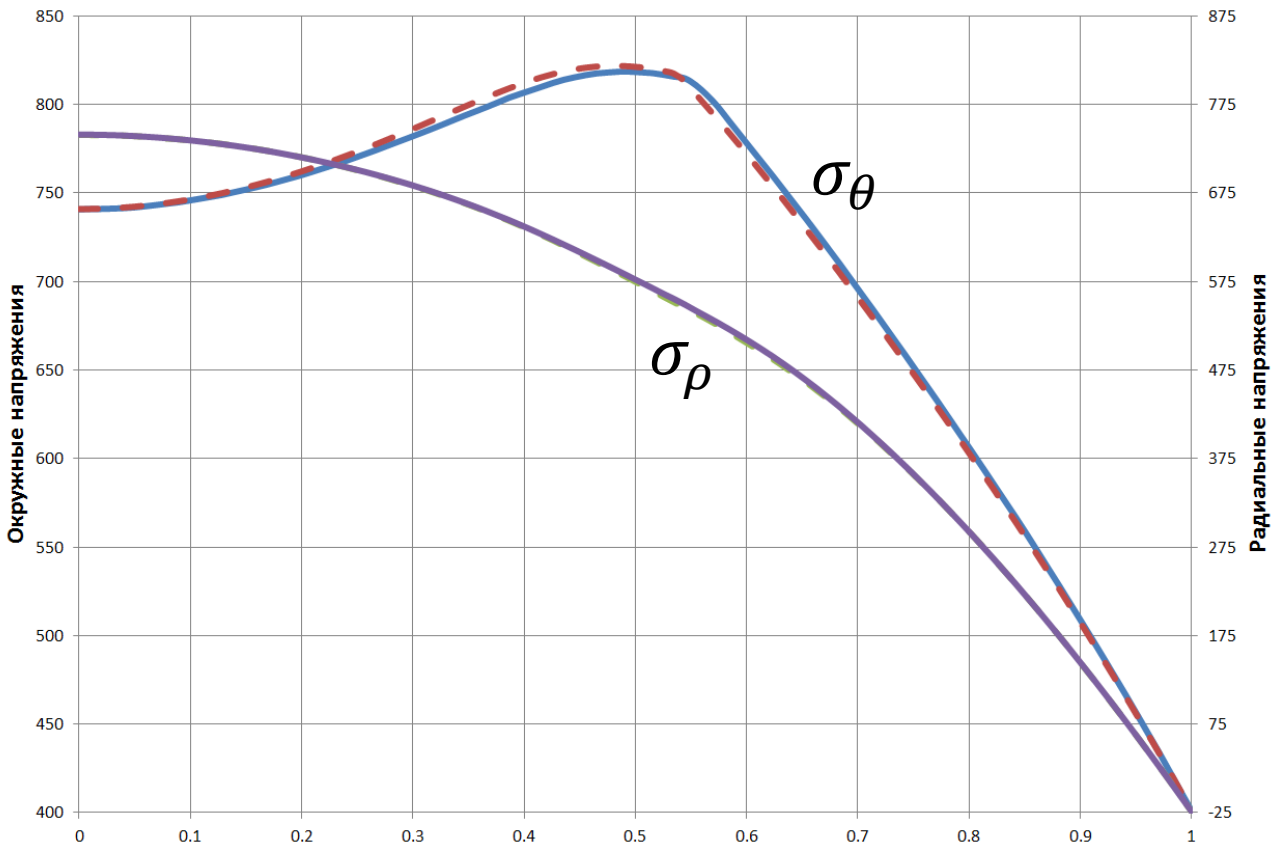


Рис. 3.20

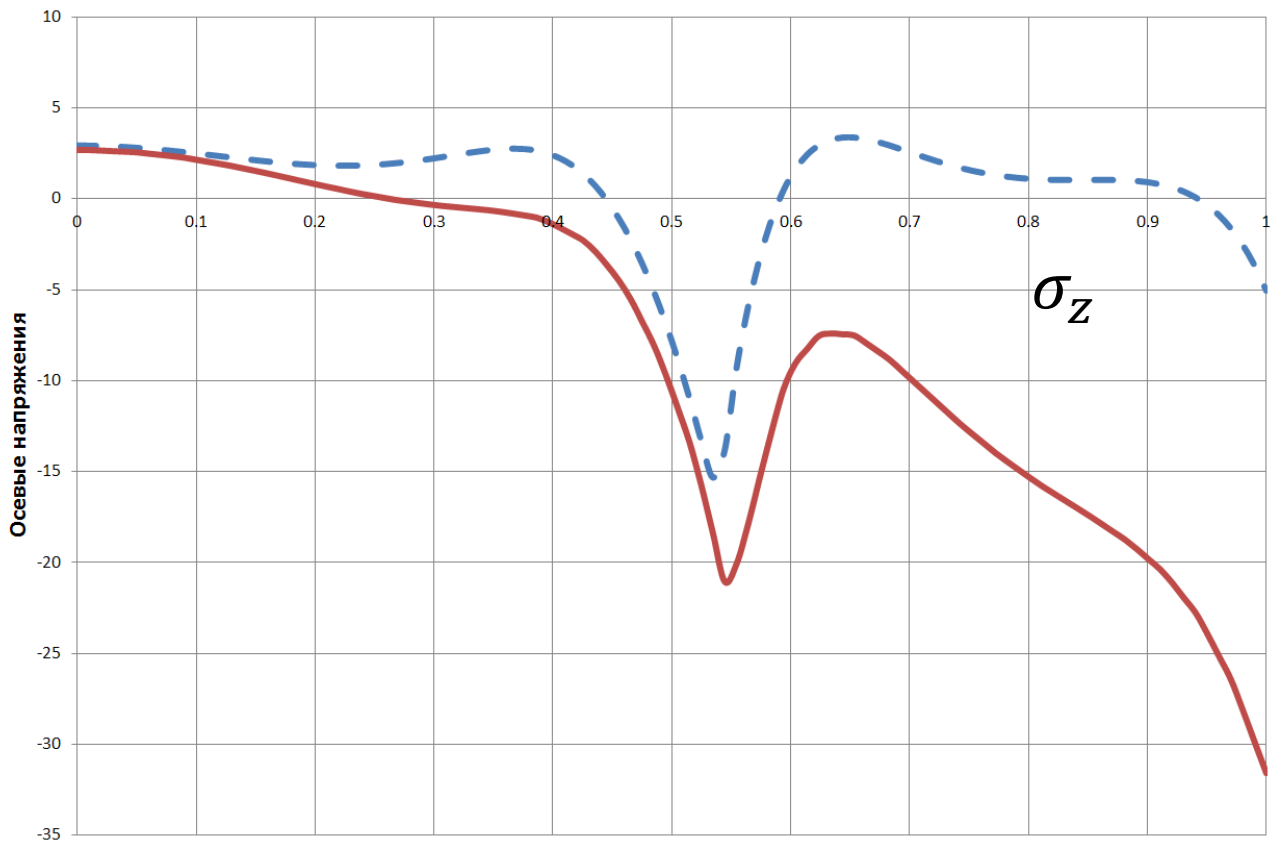


Рис. 3.21

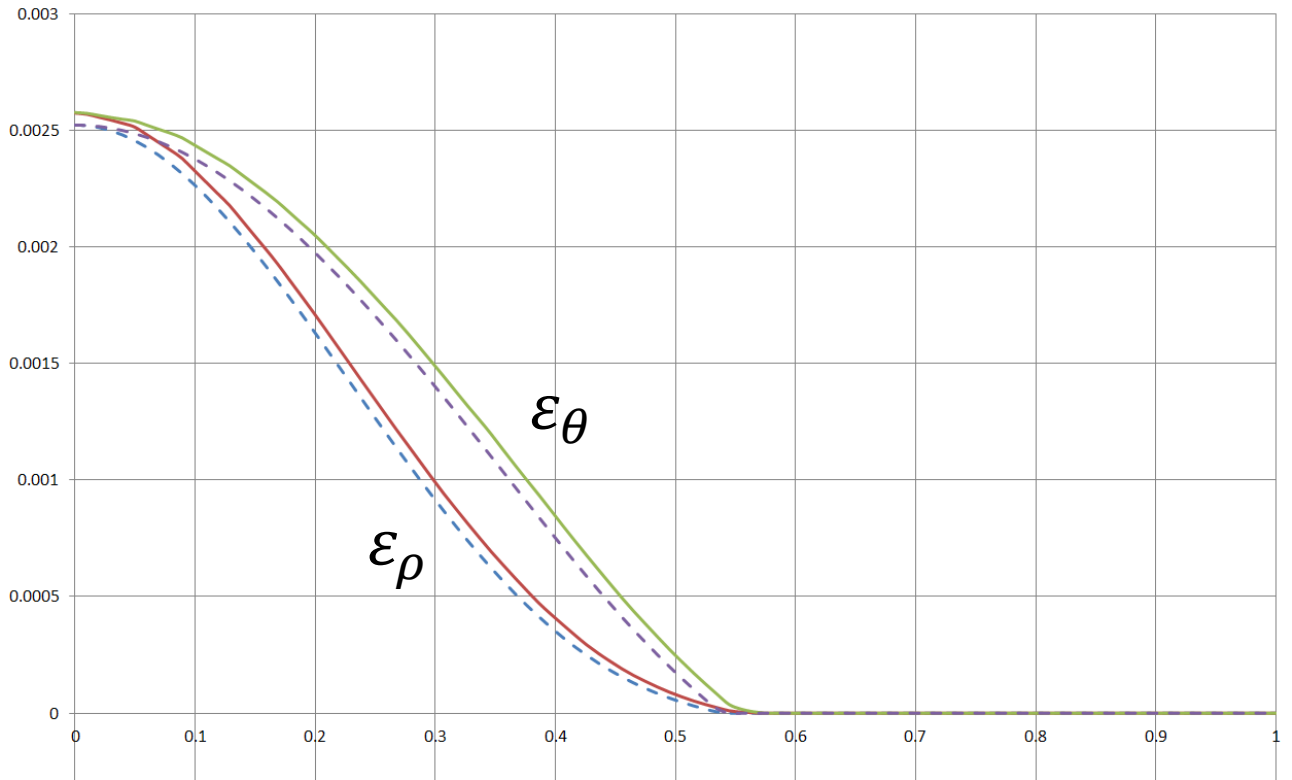


Рис. 3.22

Напряжения σ_θ в осесимметричной задаче в пластической зоне несколько выше, чем в связанной задаче. Максимальная разница достигает величины 0,8% от предела текучести.

Для компонент напряжений σ_z получена значительная разница, обусловленная действием давления со стороны жидкости. На графиках ярко выражен скачок осевых напряжений в районе упругопластической границы.

Таким образом, за счет действия перепада давления в жидкости, вызываемого вращением диска происходит увеличение радиуса упругопластической границы. Пластические деформации на 4-10 % выше в случае связанной задачи. Радиус упругопластической границы $\rho_S = 0,554$ в осесимметричной постановке. В связанной постановке $\rho_S = 0,574$.

Предельные обороты вращения для диска, исследуемого в связанной постановке, ниже, чем для осесимметричного диска. Данная разница будет зависеть от величины перепада давления в полости. Перепад давления в свою очередь линейно зависит от плотности жидкости и квадратично зависит от угловой скорости вращения.

§ 3. Исследование момента сил трения

Преимущество решения задач в связанной постановке заключается в возможности исследовать в масштабах одной математической модели несколько актуальных вопросов смежных отраслей науки [8]. При решении связанной задачи о вращающемся диске был исследован вопрос определения величины момента сил трения диска.

Затраты мощности (дисковые потери) на трение боковых поверхностей рабочего колеса центробежного насоса могут составлять значительную долю в общем балансе энергии, особенно при малых коэффициентах быстроходности. Поэтому при расчете энергетического баланса центробежных насосов необходимо с высокой точностью определять величину данных потерь. Данный вопрос также актуален как для осевых, так и для радиальных турбин.

Момент сопротивления диска радиуса R , смачиваемого с одной стороны, равен [45]

$$M = -2\pi \int_0^R r^2 \cdot \tau_{z\varphi} dr, \quad (3.3.1)$$

где $\tau_{z\varphi}$ – окружная составляющая касательного напряжения.

Безразмерный коэффициент момента сопротивления, определяется по следующей формуле

$$C_M = \frac{2M}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5}. \quad (3.3.2)$$

Для коэффициента момента диска, вращающегося в ограниченном пространстве (кожухе), при турбулентном режиме по расчётам Окайа и Хосегава [45, 99]

$$\frac{C_M}{2} \text{Re}^{0,2} = 0,039, \quad (3.3.3)$$

где $\text{Re} = \frac{R^2 \cdot \omega}{\nu}$ – число Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость жидкости.

При этом предполагалось, что отношение радиуса кожуха к радиусу диска равно 1,05 и окружная скорость диска больше окружной скорости ядра течения в 2,22 раза. При равенстве радиусов диска и кожуха и отношении указанных скоростей равном 2 константа 0,039 становится равной 0,0357.

Сравнивая выражения (3.3.2) и (3.3.3) получим формулу для определения момента трения одной стороны вращающегося диска

$$M = \frac{0,0195}{\sqrt[5]{\text{Re}}} \rho \omega^2 R^5. \quad (3.3.4)$$

Для турбулентного течения вокруг диска, вращающегося в свободном пространстве, в работе [45] решение Кармана для момента сопротивления одной стороны диска радиуса R имеет вид

$$M = \frac{0,0364}{\sqrt[5]{\text{Re}}} \rho \omega^2 R^5. \quad (3.3.5)$$

Согласно многочисленным опытным данным отношение минимального значения $(C_M)_{\text{мин}}$ к значению $(C_M)_{\text{св}}$ для «свободного» диска равно [45]

$$\frac{(C_M)_{\text{мин}}}{(C_M)_{\text{св}}} \approx 0,474. \quad (3.3.6)$$

С учётом зависимостей (3.3.5) и (3.3.6) минимальное значение момента сопротивления для одной стороны диска, вращающегося в ограниченном пространстве при турбулентном режиме будет иметь вид

$$M = \frac{0,0364 \cdot 0,474}{\sqrt[5]{\text{Re}}} \rho \omega^2 R^5 = \frac{0,0172}{\sqrt[5]{\text{Re}}} \rho \omega^2 R^5. \quad (3.3.7)$$

Таким образом, в формуле для момента трения по выражению (3.3.4) для одной стороны диска, вращающегося в ограниченном пространстве (кожухе) при турбулентном режиме, заложен запас $0,0195/0,0172 = 1,13$.

В работе [78] константа в формуле (3.3.4) или (3.3.5) по данным различных авторов может принимать значение от 0,022 до 0,027.

В работе [45] для окружной составляющей местного трения при турбулентном режиме приводится зависимость

$$\frac{\tau_{z\varphi}}{\rho \cdot (R \cdot \omega)^2} = 0,013065 \cdot \text{Re}^{-0,2}. \quad (3.3.8)$$

Интегрируя выражение (3.3.1) с учётом окружной составляющей местного трения по выражению (3.3.8) будем иметь для одной стороны диска

$$M = \frac{2\pi}{5} 0,013065 \rho \omega^2 R^5 = \frac{0,01646}{\sqrt[5]{\text{Re}}} \rho \omega^2 R^5. \quad (3.3.9)$$

Различные подходы к определению момента сопротивления одной стороны диска показывают, что константа в формуле изменяется по данным работы [45] от 0,0146 до 0,0195, а по данным работы [58, 78, 99] со ссылкой на различных авторов - от 0,022 до 0,027.

В работе [78] на основании экспериментального изучения гидродинамического сопротивления дисков, вращающихся в кожухе, получена аппроксимация (примерно по 500 опытным точкам) со среднеквадратичной погрешностью около 1,5% для $\text{Re} > 7 \cdot 10^5$, $S/R = 0,066 \dots 0,49$ (S/R – относительный осевой зазор между кожухом и диском):

$$C_M = \frac{0,338[\lg(S/R + 2,37) - 0,165]}{\text{Re}^{0,2}}. \quad (3.3.10)$$

Если принять относительный осевой зазор равным минимальному значению экспериментального диапазона $S/R = 0,066$, то с учётом определения коэффициента сопротивления (3.3.2) для одной стороны вращающегося в корпусе диска момент равен

$$M = \frac{0,01872}{\text{Re}^{0,2}} \rho \omega^2 R^5. \quad (3.3.11)$$

Для определения момента сил трения также существует эмпирическая интерполяционная формула Пантелла (3.3.12) для учета влияния ширины зазора S на момент сопротивления одной стороны диска радиуса R при отсутствии расхода. Формула справедлива до $S/R = 0,44$.

$$M = \left[\frac{0,151}{\left(\frac{s}{R}\right)^2 \text{Re}^{1,2}} + \frac{1,02 + \frac{s}{R}}{12 \left(6 + \frac{s}{R}\right) \text{Re}^{0,182}} \right] \rho \omega^2 R^5. \quad (3.3.12)$$

Мощность трения одной стороны диска определяется как $N_{TP} = M \cdot \omega$. Многие инженеры, проектирующие турбонасосные агрегаты мощность трения дисков насосов рассчитывают по формуле из работы [27]

$$N_{TP,Д} = 2 \frac{0,039}{\sqrt[5]{\text{Re}}} \rho R^5 \omega^3, \quad (3.3.13)$$

где коэффициент "2" учитывает трение по внешним сторонам обоих дисков.

Природа появления константы 0,039 в формуле (3.3.13) очевидна: неправильное толкование данных работы [45]. На основании изложенного можно утверждать, что формула (3.3.13) даёт завышенную мощность трения дисков центробежного насоса более чем в 2 раза.

Момент сил трения определенный с помощью компьютерного моделирования в ANSYS также подтвердил завышение величины мощности сил трения вычисляемой по формуле (3.3.13). Был проведен ряд компьютерных экспериментов (рисунок 3.23) для относительных осевых зазоров {0,04; 0,08; 0,12; 0,16; 0,2} и нескольких чисел Рейнольдса.

Представленные результаты показывают, что для чисел Рейнольдса порядка 10^4 – 10^5 значения коэффициента C_M несколько меньше коэффициента принимаемого в формуле (3.3.4). С увеличением числа Рейнольдса результаты, полученные в ANSYS CFX, хорошо коррелируют с формулой (3.3.4). Сравнение результатов моделирования с формулой Пантелла показало, что значения C_M по CFD расчету на 1-4% ниже значений вычисленных по формуле (3.3.12).

Одним из определяющих факторов при решении задачи является выбор модели турбулентности. В пакет ANSYS CFX входит более 15 различных моделей. Компьютерный эксперимент проведен для нескольких моделей: $k - \varepsilon$, SSG, SST и BSL. Выбор моделей $k - \varepsilon$ и SSG обусловлен их универсальностью, а моделей SST и BSL их направленностью на расчет закрученных потоков. Модели

$k - \varepsilon$ и SST содержат два параметра. Модели SSG и BSL содержат по семь параметров и являются в свою очередь усложненными для моделей $k - \varepsilon$ и SST соответственно. Модели SST и BSL являются модификациями для модели $k - \omega$. Усложненные модели целесообразно применять для задач со сложной геометрией, так как для простых задач они не дадут выигрыша в точности решения, но значительно увеличат время вычислений. Для верификации расчетов применялась эмпирическая формула (3.3.12) для учета влияния ширины зазора s на момент сопротивления одной стороны диска радиуса R при отсутствии расхода.

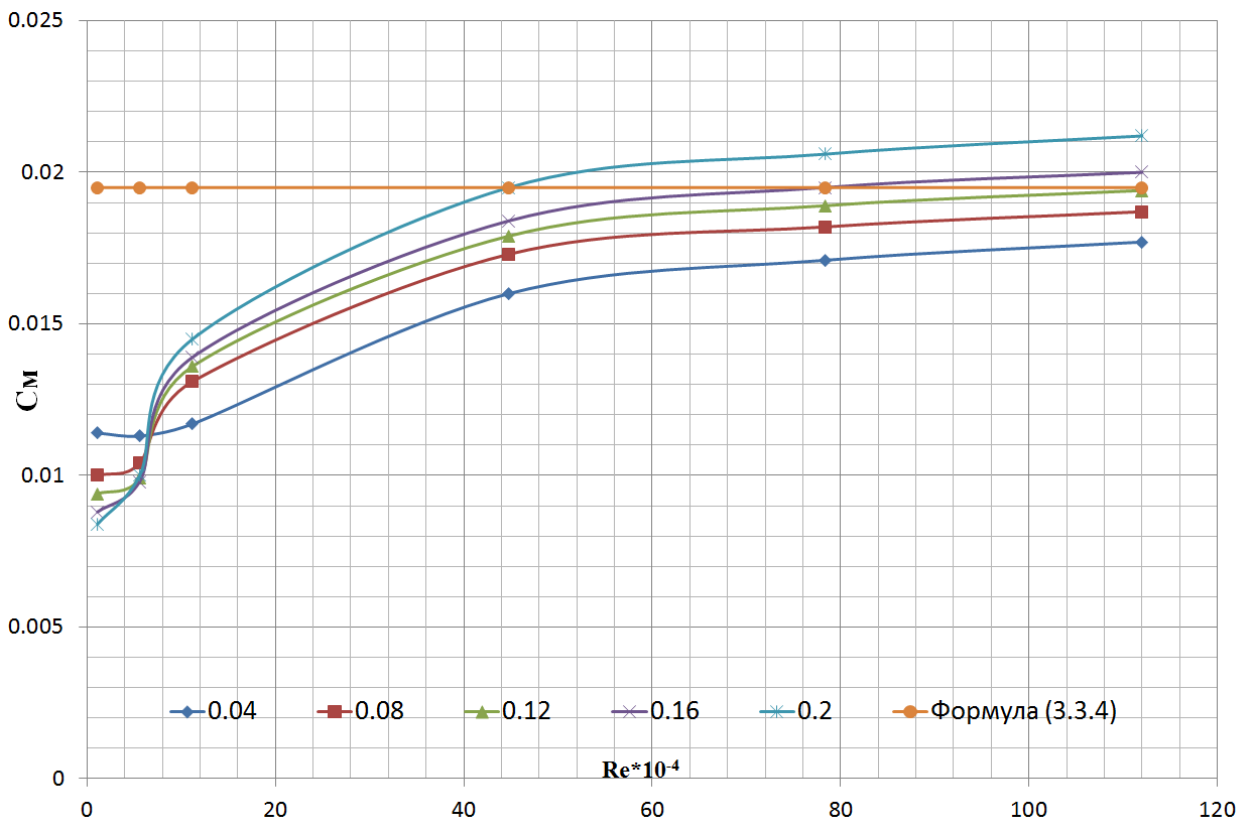


Рис. 3.23

Для сравнения результатов компьютерного моделирования и эмпирической формулы (3.3.12) использовался безразмерный коэффициент момента сопротивления (3.3.2).

На рисунке 3.24 приведены графики зависимости данного коэффициента от величины числа Рейнольдса при фиксированном относительном осевом зазоре осевом зазоре (0,04) между корпусом и диском. На графиках не представлена

модель турбулентности BSL, так как результаты, полученные с ее использованием, отличались от результатов модели SST не более чем на 0,3%.

При малых числах Рейнольдса для моделей турбулентности $k - \varepsilon$ и SSG наблюдается некоторое расхождение с результатами экспериментальных данных. С увеличением числа Рейнольдса погрешность уменьшалась (при $Re > 10^6$ менее 2%) [14]. Качественно и количественно наиболее точно результаты экспериментов повторяет модель SST.

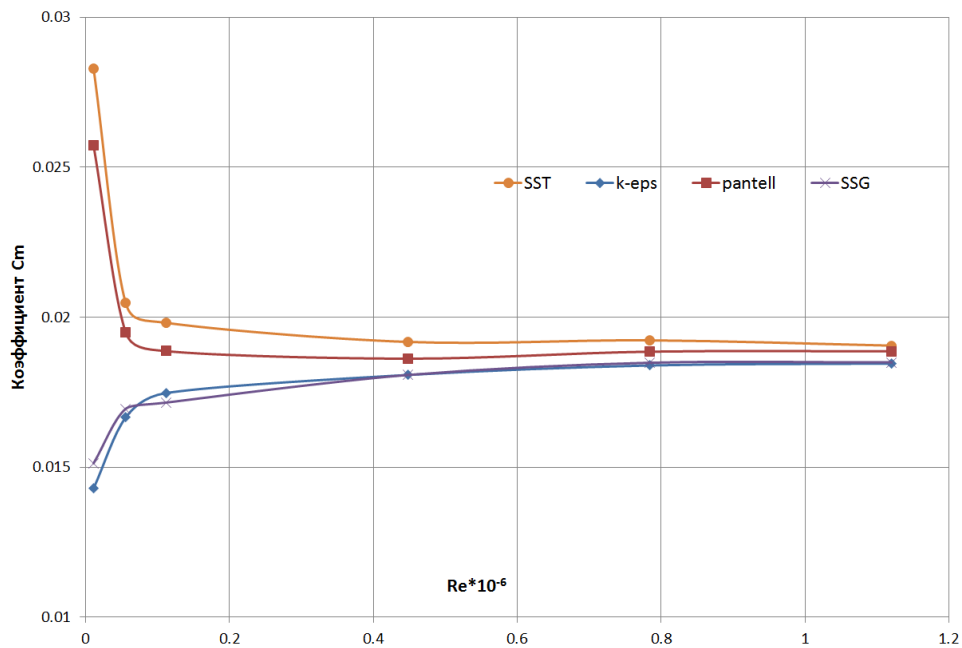


Рис. 3.24.

Выбор модели турбулентности оказывает значительное влияние на вычисляемый в ANSYS CFX момент силы трения для малых чисел Рейнольдса. При развитом турбулентном течении, характерном для оборотов, когда в диске возникает пластическое течение, разница между различными моделями мала.

§ 4. Обсуждение результатов

В третьей главе рассмотрены две упругопластические задачи при условии пластичности Мизеса:

- задача о осесимметричном сплошном диске постоянной толщины
- связанная задача о диске постоянной толщины

Рассматривался материал без упрочнения, так как необходимо изучить фундаментальные законы деформирования для данных задач, а учет упрочнения усложнил бы анализ полученного решения.

В § 1 приводится постановка математической модели осесимметричной задачи в соответствии с [48]. Решение проводится в рамках теории пластического течения. Построенная математическая модель решается методами автоматизированного конструирования. Проводится дискретизация расчетной области на конечные элементы регулярной гексаэдральной сеткой.

Проведена серия расчетов методом компьютерного моделирования, позволившая исследовать зависимость напряженно-деформированного состояния диска от относительной толщины диска.

Получена зависимость формы упругопластической границы от относительной толщины диска.

Одной из целей исследования проведенного в § 1 являлась проверка широко распространённой в практике расчета дисков гипотезы о постоянстве напряженно-деформированного состояния по толщине диска. Показано, что в пределах упругости данная гипотеза справедлива для дисков с $d/R_0 < 0,35$.

Для дисков в упругопластическом состоянии характер напряженно-деформированного состояния остается постоянным при $d/R_0 < 0,15$.

Получены зависимости величины максимальных сдвиговых напряжений $\tau_{\rho z}$ от толщины диска и величины параметра нагружения m . Аналогичное исследование проведено для нормальных напряжений σ_z . Показано, что модули $\tau_{\rho z}$ и σ_z для упругопластического диска могут достигать 5-7% от величины предела текучести.

В § 2 впервые сформулирована математическая модель для упругопластического диска, вращающегося в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Модель сформулирована в рамках теории течения и для условия пластичности Мизеса. Для разрешения задачи механики жидкости и газа выбрана наиболее изученная теоретически и экспериментально модель турбулентности $k - \varepsilon$ для развитого турбулентного

течения. Решение связанной задачи проводилось в пакете автоматизированного конструирования ANSYS.

Показано влияние эпюры давления в жидкости на напряженно-деформированное состояние диска. Сделан вывод об увеличении радиуса упругопластической границы за счет действия гидродинамических сил.

Решение задачи в связанной постановке позволило изучить не только вопросы механики деформируемого твердого тела, но и уточнить некоторые вопросы, касающиеся определения момента сил трения диска. В § 3 параграфе приводится обзор существующих инженерных и эмпирических методов расчета данного параметра. Результаты исследования показали нефизичность некоторых формул. Предложены коэффициенты момента сил трения, наиболее удачно описывающие развитое турбулентное течение. Построены зависимости коэффициента момента сил трения от числа Рейнольдса, для различных относительных осевых зазоров между корпусом и диском.

Заключение

В диссертационной работе сформулированы математические модели и решены задачи об упругопластических вращающихся дисках для случаев плоского напряженного состояния, осесимметричного состояния и связанной задачи механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа. Напряженно-деформированное состояние дисков исследовано с учетом условия пластичности Мизеса и с учетом упрочнения, что позволило уточнить существующие методики расчета, применяемые при решении прикладных задач.

В результате выполнения диссертационного исследования получены следующие основные результаты:

1. Сформулирована и решена связанная задача о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Исследовано влияние давления жидкости на напряженно-деформированное состояние диска.

2. Предложен и верифицирован метод решения упругих и упругопластических задач о вращающихся дисках средствами автоматизированного конструирования. Получены решения для упругопластического состояния диска для случая плоского напряженного состояния, осесимметричной задачи и связанной задачи механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела. Во всех задачах использовано условие пластичности Мизеса.

3. Получены формулы для определения оборотов потери несущей способности сплошного и кольцевого диска. Данные формулы более чем на 8 % уточняют существующие подходы. Предлагаемый в диссертационной работе подход основан на условии пластичности Мизеса и учитывает произвольное упрочнение материала, что особо актуально для задач турбомашиностроения.

4. Исследовано напряженно-деформированное состояние, реализующееся в осесимметричном вращающемся диске, в зависимости от его относительной толщины. Получено значение d/R_0 до которого справедлива гипотеза о

постоянстве напряженно-деформированного состояния по толщине диска. Результаты исследования позволяют уточнить методику расчета дисков высокооборотных машин с развитой ступичной частью.

5. В результате решения связанной задачи была уточнена методика определения момента сил трения диска. Показана нефизичность некоторых общепринятых формул. Построены зависимости коэффициента момента сил трения от числа Рейнольдса.

6. Исследована зависимость напряженно-деформированного состояния диска от свойств материала. Проведен сравнительный анализ для случаев модели без упрочнения, с линейным изотропным упрочнением и с учетом реальной диаграммы растяжения.

Список использованных источников

1. Александров С.Е. Влияние зависимости условия текучести от среднего напряжения на распределение напряжений во вращающемся диске. / С.Е. Александров, Е.В. Ломакин, Й.Р. Дзенг // Доклады Академии наук – 2010 – Т. 435 – №5 – С. 610-612
2. Александров С.Е. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению. / С.Е. Александров, Е.В. Ломакин, Й.Р. Дзенг // Доклады Академии наук – 2012 – Т. 443 – №3 – С. 310
3. Амелянчик А.В. Расчет на прочность дисков и роторов тепловых турбин на машине «Урал-2» / А.В. Амелянчик, Е.П. Струнина // Экспериментальные исследования прочности дисков, лопаток и паропроводов. – М.: ЦНИИТМАШ, 1965 – 120 с.
4. Амензаде Ю.А. Теория упругости. / Ю.А. Амензаде – М.: Высшая школа, 1976 – 272 с.
5. Артемов М.А. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М.А. Артемов, А.П. Якубенко // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика – 2014– №1 – С. 30-38
6. Артемов М.А. О двусосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося материала. / М.А. Артемов // Прикладная механика и техническая физика. – 1985 – №6 – 158 с.
7. Афанасьев А.А. Применение суперЭВМ для трехмерного моделирования работы турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А.А. Афанасьев, Ю.В. Демьяненко, В.К. Першин // Международный научный журнал "Альтернативная энергетика и экология". – Саров: НТЦ "ТАТА", 2013. – № 9. – С. 10-15.
8. Афанасьев А.А. К определению момента сил трения диска, вращающегося в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев // Вестник Воронежского

государственного университета. Серия: Физика, Математика. – Воронеж: изд-во ВГУ, 2014. – № 4.– С. 94-101.

9. Афанасьев А.А. К изучению осевой силы, действующей на вал ротора турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А.А. Афанасьев, Ю.В. Демьяненко, В.К. Першин // Материалы всероссийской научно-технической конференции «Ракетно-космические двигательные установки». – М: ИИУ МГОУ, 2013. –С. 69-71.

10. Афанасьев А.А. К расчету в ANSYS CFX дисков, вращающихся в ограниченном пространстве / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев, В.К. Першин // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж: Научная книга, 2014. – С.35-39.

11. Афанасьев А.А. Трехмерное моделирование течения реальной жидкости в рабочих элементах турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А.А. Афанасьев // Сборник докладов III ежегодной конференции "Информационные технологии на службе оборонно-промышленного комплекса России". – М.: Коннект-ИКТ – С. 134-135.

12. Афанасьев А.А. FSI анализ для решения задач турбомашиностроения / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. – Ч. 1. – С. 28-30.

13. Афанасьев А.А. Трехмерное моделирование течения жидкости в импеллерном уплотнительном устройстве ТНА ЖРД / А.А. Афанасьев, Ю.В. Демьяненко, В.К. Першин // Научно-технический журнал "Насосы. Турбины. Системы". – Воронеж: Научная книга, 2014. – №2 (11). – С. 56-62.

14. Афанасьев А.А. Определение момента сил трения дисков, вращающихся в ограниченном пространстве / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев, В.К. Першин // Сборник трудов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – М: Физматлит, 2015. – С. 27-30.

15. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. / К.-Ю. Бате – М.: Физматлит, 2010 – 1024 с.
16. Биргер И.А. Вариационные методы в строительной механике турбомашин. / И.А. Биргер – М.: Оборонгиз, 1959 – 28 с.
17. Биргер И.А. Вероятность разрушения, запасы прочности и диагностика. / И.А. Биргер // Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л.: Судостроение, 1970 – С.71-82
18. Биргер И.А. Метод дополнительных деформаций в задачах теории пластичности. / И.А. Биргер // Известия АН СССР. Механика, машиностроение – 1963 – №1 – С. 47-56
19. Биргер И.А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости пластичности и ползучести. / И.А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975 – С. 51-73
20. Биргер И.А. Расчет конструкций при циклическом нагружении. / И.А. Биргер, И.В. Демьянушко, Ю.М. Темис // Материалы всесоюзного симпозиума по малоцикловой усталости при повышенной температуре, ЧПИ, 1974 – вып. 1. – С. 3-27
21. Биргер И.А. Расчет на прочность авиационных газотурбинных двигателей. / И.А. Биргер, Н.И. Котеров – М: Машиностроение, 1984 – 208 с.
22. Биргер И.А. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1993 – 640 с.
23. Биргер И. А. Теория пластического течения и расчет дисков. / И.А. Биргер // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1966 – вып 12 – С. 183-200
24. Биргер И.А. Теория пластичности при неизотермическом нагружении. / И.А. Биргер, И.В. Демьянушко // Механика твердого тела – 1968 – №6 – С. 70-77
25. Биргер И.А. Термопрочность деталей машин. / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демьянушко, Р.Н. Сизова, Р.А. Дульнев – М.: Машиностроение, 1975 – 454 с.

26. Бирфельд А.А. Анализ применимости критериев предельного состояния при оценке несущей способности дисков компрессоров ГТД. / А.А. Бирфельд, А.В. Волгин // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2010 – №2 – С. 33-41
27. Боровский Б.И. Энергетические параметры и характеристики высокооборотных лопастных насосов. / Б.И. Боровский – М.: Машиностроение, 1989 – 184 с.
28. Бруйка В.А. Инженерный анализ в ANSYS Workbench: Учеб. пособ. / В.А. Бруйка, В.Г. Фокин, Е.А. Солдусова, Н.А. Глазунова, И.Е. Адеянов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010 – 271 с.
29. Быковцев Г.И. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев. – Владивосток.: Дальнаука, 1998 – 528 с.
30. Волков К.Н. Момент сопротивления диска, вращающегося в закрытой осесимметричной каверне. / К.Н. Волков // Прикладная и теоретическая физика – 2006 – т. 47 – №1 – С. 153-160
31. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ./ Р. Галлагер – М.: Мир, 1984 – 428 с.
32. Глаголев В.В. Задача Дегдейла в рамках одной модели трещины. / В.В. Глаголев, А.А. Фурсаев // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки – 2014 – №4 – С. 44-53
33. Глаголев В.В. О влиянии упрочнения материала на формирование напряженного состояния тупиковой области трещины нормального отрыва / В.В. Глаголев, А.А. Маркин. // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния – 2010 – №8 – С. 106-117
34. Глаголев В.В. Об одной постановке задачи упругопластического разделения / В.В. Глаголев, А.А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика – 2009 – Т. 50 – №4 (296) – С. 187-195
35. Горбатовский А.А. Исследование устойчивости вращающегося диска. / А.А. Горбатовский // Известия высших учебных заведений. Машиностроение – 2013 – №6 – С. 17-21

36. Гохфельд Д.А. Упругопластическое состояние дисков переменной толщины. / Д.А. Гохфельд // Расчет и конструирование машин. вып. 1. М.: Машгиз, 1954 – С. 37-53
37. Демьянушко И.В. Математическое программирование при проектировании дисков минимального веса. / И.В. Демьянушко, Е.Ф. Королева // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1977 – №17 – С. 274-281
38. Демьянушко И.В. Оптимальное проектирование дисков турбомашин. / И.В. Демьянушко, Е.Ф. Королева // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972 – №2 – С. 176-180
39. Демьянушко И.В. Оптимальное проектирование круглых пластин и пологих оболочек. / И.В. Демьянушко // Труды конференции по теории оболочек и пластин. – Л.: изд-во АН СССР, 1976 – С. 259-261
40. Демьянушко И.В. Пластичность и ползучесть пологих оболочек вращения / И.В. Демьянушко // Известия АН СССР. Механика твердого тела – 1970 – №2 – С. 109-122
41. Демьянушко И.В. Проблемы проектирования турбомашин минимального веса. / И.В. Демьянушко, Е.Ф. Королева // Известия вузов. Машиностроение – 1973 – №6 – С. 19-23
42. Демьянушко И.В. Расчет на прочность вращающихся дисков. / И.В. Демьянушко, И.А. Биргер – М.: Машиностроение, 1978 – 247 с.
43. Демьянушко И.В. Расчетные методы исследования прочности дисков турбомашин. / И.В. Демьянушко // Проблемы прочности – 1969 – №2 – С. 18-24
44. Дорфман А.А. Численное решение на ЭЦВМ пространственной осесимметричной задачи теории упругости применительно к толстым турбинным дискам. / А.А. Дорфман, А.Ш. Либстер, М.Б. Ревзюн // Труды ЦКТИ – 1966 – вып. 74 – С. 175.
45. Дорфман Л.А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. / Л.А. Дорфман – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960 – 260 с.

46. Ершов Л.В. О потере устойчивости вращающихся дисков. / Л.В. Ершов, Д.Д. Ивлев // Изв. АН СССР, ОТН – 1958 – №1 – С.124-125
47. Зубченко А.С. Марочник сталей и сплавов / М.М. Колосков, Е.Т. Долбенко и др.; Под общ. ред. А.С. Зубченко – М.: Машиностроение, 2001 – 672 с.
48. Ивлев Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978 – 208 с.
49. Ивлев Д.Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому./ Д.Д. Ивлев // Изв. АН СССР, ОТН – 1957 – №1 – С.141-144.
50. Ильюшин А.А. Пластичность. / А.А. Ильюшин – М.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948 – 376 с.
51. Иноземцев А.А. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. / А.А. Иноземцев, М. А. Нихамкин, В.Л. Сандрацкий – Т. 1 – М.: Машиностроение, 2008 – 204 с.
52. Иноземцев А.А. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок. / А.А. Иноземцев, М. А. Нихамкин, В.Л. Сандрацкий – Т. 2– М.: Машиностроение, 2008 – 365 с.
53. Ишлинский А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А.Ю. Ишлинский // Прикладные задачи механики. – Т. 1. – М.: Наука, 1986 – С. 62-83
54. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов – 2-е изд. перераб и доп. – М.: Наука, 1969 – 420 с.
55. Кинасошвили Р.С. Расчет на прочность дисков турбомашин. / Р.С. Кинасошвили – М.: Оборонгиз, 1954 – 144 с.
56. Кобрин М.М. Прочность вращающихся дисков. / М.М. Кобрин – Л.: Судпромгиз, 1963 – 340 с.
57. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. / А.Г. Костюк – М.: Издательский дом МЭИ, 2007 – 476 с.

58. Краев М.В. Гидродинамические радиальные уплотнения высокооборотных валов.// М.В. Краев, Б.В. Овсянников, А.С. Шапиро – М.: Машиностроение, 1976 – 104 с.
59. Кузьминов А.В. Метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости на основе двухслойной (к-ε)-модели. / А.В. Кузьминов, В.Н. Лапин, С.Г. Черный // Вычислительные технологии – 2001 – Т. 6 – №5 – С. 73-86
60. Кутырев В.В. Расчетно-экспериментальное обоснование несущей способности и ресурса дисков из высокопрочных титановых сплавов. / В.В. Кутырев, С.А. Черкасова, О.Г. Гусарин, А.Л. Михайлов // Конверсия в машиностроении – 2006 – №1 – С. 66-71
61. Левин А.В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. / А.В. Левин – М.: Госэнергоиздат, 1963 – 624 с.
62. Лиля Д.М. О потере устойчивости вращающегося упругопластического кругового диска. / Д.М. Лиля, А.А. Мартынюк // Доклады академии наук Украины – 2011 – №1 – С. 44-51
63. Малинин Н.Н. К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением. / Н.Н. Малинин, Г.М. Хажинский // Известия АН СССР. Механика твердого тела – 1969 – №3 – С. 148-152
64. Малинин Н.Н. Поверочный расчет на прочность дисков. / Н.Н. Малинин // Научные доклады Высшей школы. Машиностроение и приборостроение. – 1958 – №1 – С. 49-62
65. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. / Н.Н. Малинин – Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб и доп. – М.: Машиностроение, 1975 – 400 с.
66. Малинин Н.Н. Применение метода конечных элементов для решения осесимметричных и плоских задач теории упругости. / Н.Н. Малинин, Г.М. Хажинский // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1975 – вып. 16. – С. 25-37
67. Малинин Н.Н. Прочность турбомашин. / Н.Н. Малинин – М.: Машгиз, 1962 – 291 с.

68. Малинин Н.Н. Расчет вращающегося неравномерно нагретого диска переменной толщины. / Н.Н. Малинин // Инженерный сборник – 1953 – т. 17 – С. 151- 163
69. Малкин Я.Ф. Профилирование турбинных дисков в связи с расчетом их на прочность и вибрацию. / Я.Ф. Малкин – М.: ОТНИ, 1937 – 180 с.
70. Микеладзе Т.М. Упругопластические деформации в быстровращающихся дисках переменной толщины. / Т.М. Микеладзе // Инженерный сборник – 1953 – т. 15 – С. 21-34
71. Немировский Ю.В. Оценка предельной скорости вращения искривленных металлокомпозитных дисков в условиях ползучести. / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева – 2010 – №2 – С. 102-111
72. Овсянников Б.В. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей. / Б.В. Овсянников, Б.И. Боровский– 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1986 – 376 с.
73. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. / В.А. Постнов, И.А. Хархурим – Л., «Судостроение», 1974 – 344 с.
74. Рабинович В.П. Прочность турбинных дисков. / В.П. Рабинович – М.: Машиностроение, 1969 – 151 с.
75. Работнов Ю.Н. Упругопластическое состояние вращающегося диска при наличии упрочнения. / Ю.Н. Работнов // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение – 1959 – №5 – С. 154-156
76. Расчеты на прочность в машиностроении. – М., Машгиз, 1956 – 884 с.
77. Рис В.Ф. Расчет дисков турбомашин. / В.Ф. Рис – М.–Л.: Машгиз, 1959 – 55 с.
78. Роговский Т.А. О гидродинамическом сопротивлении дисков колеса центробежного насоса. / Т.А. Роговский, З.Р. Горбис // Теплоэнергетика – 1970. – №9 – С. 46-49
79. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. / Н.А. Слезкин – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1955 – 520 с.

80. Соколовский В.В. Теория пластичности / В. В. Соколовский – М.: Высшая школа, 1969 – 608 с.
81. Сорокин В.Г. Марочник сталей и сплавов / В.Г. Сорокин, А.В. Волосникова и др.; Под общ. ред. В.Г. Сорокина. – М.: Машиностроение, 1989 – 640 с.
82. Темис Ю.М. Вариационно-разностный метод расчета упругопластических круглых пластинок. / Ю.М. Темис // Известия высших учебных заведений. – 1974 – №7 – С. 16-21
83. Тимошенко С.П. Теория упругости, перев. с англ. / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975 – 576 с.
84. Топоров Д.В. Кинетика упругопластического деформирования диска паровой турбины в зависимости от истории нагружения. / Д.В. Топоров // Труды Академэнерго – 2008 – №2 – С. 69-78
85. Тумаркин С.А. Методы расчета напряжений во вращающихся дисках. / С.А. Тумаркин // Труды ЦАГИ, 1936 – вып. 262 – С 42.
86. Федорченко Д.Г. Моделирование реальных условий нагружения при проектировании высокоресурсных турбомашин с использованием моделей высокого уровня. / Д.Г. Федорченко // Вестник Иркутского государственного технического университета – 2014 – № 6 (89) – С. 78-86
87. Холмянский И.А. Исследование ползучести жаропрочных сплавов и расчет долговечности дисков турбин. / И.А. Холмянский // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника – 2002 – №3 – С. 39-42
88. Чванов В.К. Многодисциплинарное исследование одноступенчатой околосзвуковой турбины ЖРД (часть 1). / В.К. Чванов, А.С. Киселев, Е.Н. Попов, С.А. Скибин, Л.Е. Стернин, В.В. Ткач, Ф.Ю. Челькис // Труды НПО Энергомаш им. академика В.П. Глушко – 2006 – №24 – С. 4-82
89. Чванов В.К. Многодисциплинарное исследование одноступенчатой околосзвуковой турбины ЖРД (часть 2). / В.К. Чванов, А.С. Киселев, Е.Н. Попов,

С.А. Скибин, Л.Е. Стернин, В.В. Ткач, Ф.Ю. Челькис // Труды НПО Энергомаш им. академика В.П. Глушко – 2007 – №25 – С. 62-98

90. Шнейдерович Р.М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях. / Р.М. Шнейдерович – М.: Машиностроение, 1968 – 343 с.

91. Clough R.W. The finite element method in plane stress analysis / R.W. Clough // J. Struct. Div., ASCE, Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation – Sept. 1960 – p. 345-378.

92. Courant R. Variational Method for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. Bull./ R. Courant // Amer. Math. Soc – 1943 – № 49 – p. 1-43

93. Guven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion. / U. Guven // ZAMM - Journal of applied mathematics and mechanics –2006 – vol. 77 – issue 9 – p. 714-716

94. Guven U., Altay O. Elastic-plastic rotating solid disk with rigid casing. / U. Guven, O. Altay // ZAMM - Journal of applied mathematics and mechanics. – 2006–vol. 77 – issue 9 – p. 867-870

95. Jiang-jiang Zhu. Thermo-elasto-plastic Stress and Strain Analysis and Life Prediction of Gas Turbine Blade / Jiang-jiang Zhu, Zi-chun Yang, // Int. Conf. on Measuring Technology and Mechatronics Automation, (ICMTMA) – 2010. – V. 3. – p. 1019-1022.

96. Meguid S. A. Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs / S.A. Meguid, P.S. Kanth, A. Czekanski // Finite Elements in Analysis and Design. – 2000. – V. 35 – Issue 4 – p. 305-317

97. Mechanical APDL. Theory references. // ANSYS 15.0

98. Nejad M.Z. Exact elasto-plastic analyses of rotating disks made of functionally graded materials. / M.Z. Nejad, A. Rastgoo, A. Hadi // International Journal of Engineering Science – 2014 – Vol. 85 – p. 47-57

99. Okaya T. On the friction to the disk rotating in a cylinder / T. Okaya, M. Hasegawa // Jap. Journal of Physics – 1939 – vol. 13 – p. 29-38

100. Stodola A. Dampf und Gasturbinen / A. Stodola – Berlin, 1922 – 1109 p.

101. Ta-Cheng Ku. Stress concentration in a rotating disk with a central hole and two additional symmetrically located holes / Ku. Ta-Cheng // J. of Applied mechanics – 1960 – №27 – p. 359-360

102. Wen Xue Qian. Finite Element Analysis of a Compressor Disk / Wen Xue Qian, Li Yang Xie, Xiao Wei Yin. // J. Advanced Materials Research. – 2010. – V. 118. – p. 49-53.