

На правах рукописи

Афанасьев Александр Александрович

**Задачи определения напряженно-деформированного
состояния вращающихся дисков**

Специальность 01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж –2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель: Ковалев Алексей Викторович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Глаголев Вадим Вадимович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО Тульский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра математического моделирования

Сумин Александр Иванович
доктор физико-математических наук, профессор,
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени
профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
кафедра математики, заведующий

Ведущая организация: ОАО "Турбонасос"

Защита диссертации состоится 24 декабря 2015 г. в 13-30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.24 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» по адресу 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, ауд. 226

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» и на сайте [http //www.science.vsu.ru](http://www.science.vsu.ru)

Автореферат разослан «__» _____ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Воронина Ирина Евгеньевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Вращающиеся диски являются важнейшей деталью многих машин и агрегатов. Ключевую роль они играют в теории турбомашиностроения. Прочность дисков определяет возможность получения высоких параметров работы машин, обеспечивает необходимый срок их службы. Развитие вычислительной техники и пакетов автоматизированного конструирования позволяет переходить на современные методы анализа напряженно-деформированного состояния и уточнять существующие методики расчета на основе проводимых компьютерных экспериментов.

Основными нагрузками, действующими на диски, являются центробежные силы, возникающие при вращении. Определение напряжений и деформаций от центробежных сил – главный этап расчета дисков на прочность. Диски постоянной толщины встречаются редко, однако решения, полученные для них, необходимы для контроля расчетов, упрощенных первичных оценок и обоснования результатов, полученных, например, методом конечных элементов, методом переменных параметров упругости или методом дополнительных деформаций.

Вопросы исследования напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков и решения упругопластических задач методом конечных элементов изучались многими отечественными и иностранными учеными: И.А. Биргером, И.В. Демьянушко, Н.Н. Малининым, Д.Д. Ивлевым, Ю.Н. Работновым, В.В. Глаголевым, М.А. Артемовым, В.В. Соколовским, К.-Ю. Бате, A. Stodola, U. Guven, M.Z. Nejad и др.

Во многих современных турбомашинах диски работают в условиях повышенной нагруженности, приводящей к возникновению пластических деформаций. Обычно, приближенные методы расчета упругопластического состояния дисков основаны на деформационной теории пластичности и используют итерационные процедуры последовательного решения упругих задач. Данный подход не позволяет подробно исследовать кинетику напряженно-деформированного состояния дисков, работающих в процессе эксплуатации при различных режимах. Использование теории течения в сочетании с методом конечных элементов позволяет перейти на качественно более совершенные методы исследования напряженно-деформированного состояния вращающихся упругопластических дисков.

Актуальность темы. Из-за повышающихся требований к надежности и эффективности работы современных турбомашин возникает необходимость разработки и применения новых методов исследования напряженно-деформированного состояния элементов изучаемых конструкций с учетом возникновения пластических деформаций. Данные задачи актуальны для авиационной, аэрокосмической техники, применяются при проектировании различных энергетических установок. Одним из наиболее перспективных методов исследования данной темы является метод автоматизированного конструирования, в основе которого лежит метод конечных элементов.

Метод конечных элементов универсальный метод решения задач механики деформируемого твердого тела. Развитие вычислительных технологий позволило вывести его применение на качественно новый уровень. На данный момент

большинство натуральных экспериментов стало возможно заменить компьютерными экспериментами в различных пакетах прикладных программ.

Наибольшее распространение в мире получили пакеты автоматизированного конструирования, разработанные в США и Европе, однако, отечественное программное обеспечение также развивается быстрыми темпами. Для верификации вновь создаваемых отечественных программных продуктов требуется проведение тестирования на задачах, математические модели физически корректны.

В масштабах компьютерного эксперимента можно уточнить ключевые параметры, влияющие на надежность элементов турбомашин, например, обороты потери несущей способности диска. Моделирование возможно проводить для нелинейных условий пластичности.

Развитие вычислительных технологий привело к тому, что значимость приближенного численного решения, полученного в результате компьютерного моделирования, возросла для задач, где получить аналитическое приближенное решение невозможно.

Еще одной тенденцией в сфере автоматизированного конструирования является решение задач механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела в связанной постановке. Характерной является задача о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Междисциплинарный анализ позволяет в одной математической модели решить вопросы смежных отраслей знания и максимально приблизиться к условиям натурального эксперимента.

Целями данного исследования являются:

Разработка алгоритма решения упругопластических задач о вращающихся дисках с использованием пакета автоматизированного конструирования.

Определение в рамках модели упругопластического тела распределения поля напряжений, деформаций и перемещений для упругопластического диска в состоянии плоского напряженного состояния и в осесимметричной постановке.

Постановка и решение связанной задачи об упругопластическом диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью.

Уточнение существующих формул для определения предельных оборотов вращения диска, когда диск полностью переходит в пластическое состояние.

Исследование зависимости получаемого напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков с учетом линейного изотропного упрочнения и истинной диаграммы деформирования.

Тематика работы. Содержание диссертации соответствует п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести», п. 8. «Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела».

Научная новизна.

1. Получено распределение напряжений, деформаций и перемещений для вращающегося упругопластического сплошного и кольцевого диска для плоского напряженного состояния. Использовалось условие пластичности Мизеса для трех

моделей материала: без упрочнения, линейно изотропно упрочняющегося материала и материала, учитывающего истинную диаграмму растяжения.

2. Получены формулы для определения предельных оборотов вращения сплошного и кольцевого диска, более чем на 8% уточняющие существующие общепринятые формулы. Полученные формулы основаны на условии пластичности Мизеса и в них включен учет упрочнения материала.

3. Получено решение упругопластической задачи в рамках теории течения для условия пластичности Мизеса для осесимметричного диска постоянной толщины. Исследована зависимость напряженно-деформированного состояния диска от его относительной толщины. Показано, до какого значения относительной толщины диска справедлива гипотеза о постоянстве напряженно-деформированного состояния по толщине диска.

4. Построена математическая модель и решена связанная задача для упругопластического диска, вращающегося в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью.

5. На основе решения связанной задачи уточнена методика определения момента сил трения диска и показана неточность в формуле, широко применяемой инженерами, работающими в аэрокосмической отрасли.

Достоверность проведенных исследований основывается на физически корректно сформулированных математических моделях. Для решения задач используется метод конечных элементов, доказавший свою эффективность при решении многих проблем механики сплошных сред. Кроме того на примере известного аналитического решения проведена верификация предлагаемого метода решения.

Практическая ценность. Результаты могут быть использованы при проектировании конструкций авиационной и аэрокосмической техники, а также при создании различных энергетических установок. Полученные математические модели также можно использовать для верификации создаваемых пакетов автоматизированного конструирования.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета 2012 – 2014гг.; на научных сессиях факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета 2012 – 2014гг.; на международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проходившей в Воронежском государственном университете в 2013г.; на всероссийской научно-технической конференции "Ракетно-космические двигательные установки", проходившей в МГТУ им. Н.Э. Баумана в г. Москва, в октябре 2013г.; на III всероссийской конференции "Информационные технологии на службе оборонно-промышленного комплекса России", проходившей в г. Саров в 2014г.; на VIII конференции по механике деформируемого твердого тела, проходившей в г. Чебоксары в 2014г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано восемь печатных работ, из них две в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Личный вклад автора. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем или совместно с научным руководителем в процессе научной деятельности. В совместных публикациях диссертант участвовал в постановках и решении всех задач и лично проводил все компьютерные эксперименты. Результаты решения связанной задачи и модифицированные формулы для определения оборотов потери несущей способности диска получены лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 102 наименований. Работа изложена на 124 листах машинного текста, содержит 67 рисунков и 3 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель работы и задачи исследования, научная новизна диссертационной работы, выносимые на защиту научные положения и результаты, дана краткая аннотация по главам и краткий обзор работ, касающихся темы диссертации.

В первой главе приведены основные соотношения метода конечных элементов при решении задач о вращающихся дисках. Дается общее описание методов автоматизированного конструирования. Проводится верификация предлагаемого метода решения.

В рамках метода конечных элементов рассмотрено равновесие треугольного цилиндрического конечного элемента (рисунок 1), характерного для задач о вращающихся дисках.

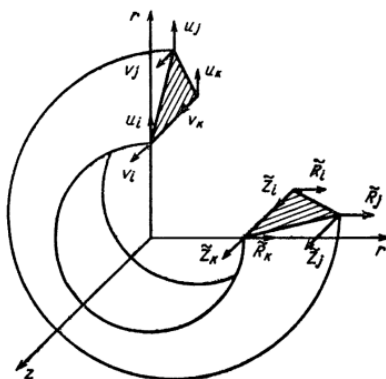


Рис. 1

Для данного элемента записывается уравнение равновесия

$$\bar{g}_n = S_n \bar{\xi}_n - \bar{f}_n^t - \bar{f}_n^m - \bar{f}_n^q, \quad (1)$$

где \bar{f}_n^t , \bar{f}_n^m , \bar{f}_n^q – векторы тепловых, центробежных и поверхностных нагрузок, S_n – матрица жесткости элемента.

С помощью алгоритма перенумерации узлов и введения «ключевой матрицы», связывающей векторы узловых перемещений с поэлементной нумерацией и со сквозной нумерацией, матричное уравнение (1) обобщается для случая ансамбля из N элементов

$$A\bar{\chi} = \bar{F}^t + \bar{F}^m + \bar{F}^q + \bar{P}, \quad (2)$$

где $\bar{F}^t, \bar{F}^m, \bar{F}^q$ – векторы тепловых, центробежных и поверхностных нагрузок для ансамбля элементов, A – матрица жесткости системы.

С помощью алгоритмов метода конечных элементов, заложенных в пакете автоматизированного конструирования ANSYS, проводится верификации предлагаемого подхода решения о вращающихся дисках.

В пределах линейной теории упругости рассмотрены две задачи о плоском напряженном состоянии сплошного и кольцевого вращающихся дисков. Данные задачи имеют известное аналитическое точное решение. Показано, что полученное численное решение имеет погрешность менее 0,04% для сплошного диска и менее 0,1% для кольцевого диска. Зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от радиуса, полученные численно и аналитически, показаны на рисунке 2.

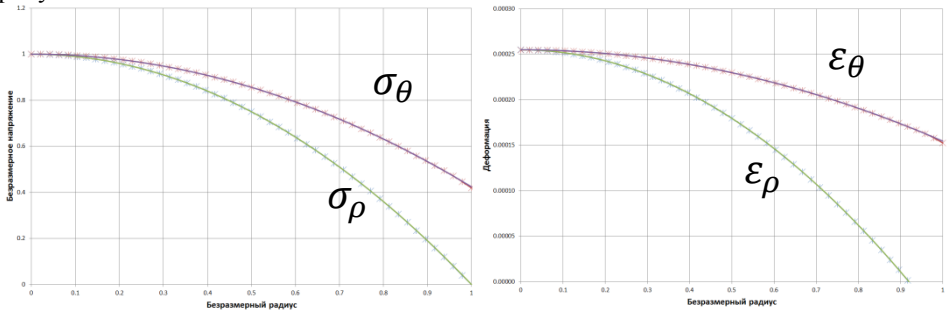


Рис.2

Кроме того решение задачи исследовано на сеточную независимость и определено, что необходимо вдоль радиуса расположить не менее 30 конечных элементов для достижения требуемой точности.

Во второй главе рассматривается плоское напряженное состояние упругопластического сплошного и кольцевого вращающихся дисков. Математическая модель в рамках теории пластического течения для условия пластичности Мизеса включает следующие уравнения:

1. Уравнение равновесия

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \quad (3)$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 – плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k_0}.$$

2. Кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p. \quad (4)$$

3. Соотношения закона Гука и условие совместности деформации

$$\frac{E}{k} \varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \quad \frac{E}{k} \varepsilon_\rho^e = \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \quad \rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \quad (5)$$

4. Соотношения Коши

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}. \quad (6)$$

5. Пусть выполняется условие пластичности Мизеса, с учетом того, что предел текучести является функцией интенсивности пластической деформации

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = f(\varepsilon_i^p), \quad (7)$$

где

$$\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_\rho^{p2} - \varepsilon_\rho^p \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\theta^{p2}}.$$

6. Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_\rho^p = 2d\lambda(\sigma_\rho - \sigma_\theta), \quad d\varepsilon_\theta^p = 2d\lambda(\sigma_\theta - \sigma_\rho). \quad (8)$$

Пусть внешний контур свободен от усилий, тогда

$$\sigma_\rho(1) = 0. \quad (9)$$

Окружные и радиальные напряжения в центре диска равны

$$\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0). \quad (10)$$

На упругопластической границе выполняются условия неразрывности вектора напряжений и перемещений

$$[\sigma_\rho]_{\rho_s} = 0, \quad [\sigma_\theta]_{\rho_s} = 0, \quad [u]_{\rho_s} = 0. \quad (11)$$

При решении задачи методом конечных элементов рассмотрим три варианта условия пластичности (7)

- упрочнение отсутствует, то есть когда функция $f(\varepsilon_i^p) = 1$ и условие пластичности приобретает вид

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 1; \quad (12)$$

- упрочнение происходит изотропно по линейному закону с постоянным коэффициентом упрочнения

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 1 + c\varepsilon_i^p; \quad (13)$$

- упрочнение происходит по сложному закону в соответствии с истинной диаграммой деформирования. Истинная диаграмма деформирования аппроксимирована кусочно-линейной функцией

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = f_k(\varepsilon_i^p). \quad (14)$$

Для кольцевого диска отличие в математической модели заключается в граничных условиях

$$\sigma_\rho(1) = 0, \quad \sigma_\rho(a) = 0, \quad (15)$$

где a – радиус центрального отверстия.

Сформулированные математические модели исследуются в пакете автоматизированного конструирования ANSYS. На рисунке 3 представлены полученные зависимости компонент напряжения от радиальной координаты (слева для сплошного диска, справа для кольцевого).

Предельная угловая скорость вращения, при которой пластическая область заполняет весь сплошной диск, и несущая способность его полностью исчерпывается, при условии пластичности Треска имеет вид

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{3k}{\rho_0 R_0^2}} \quad (16)$$

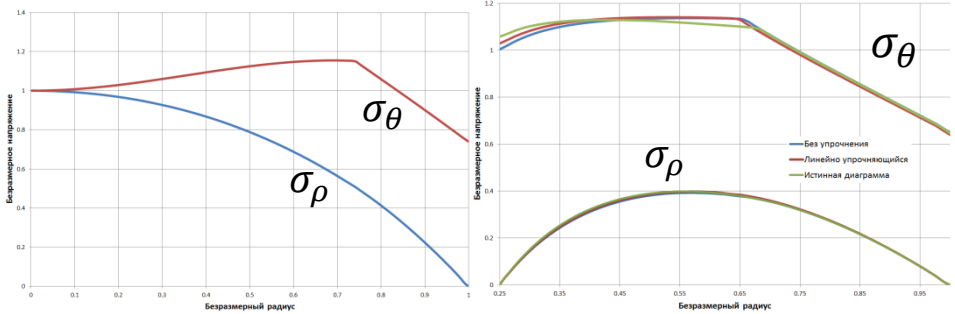


Рис. 3

Согласно (16) исследуемый сплошной диск (частное значение радиуса и параметров материала) полностью перейдет в пластическое состояние при $\omega = 3421$ рад/с, что соответствует $m = 3$. Однако, например при $m = 3,141$, радиус упругопластической границы был $\rho_s < 0,77$. Очевидно, что формула (16) дает заниженное значение оборотов потери несущей способности. В современных условиях повышения эффективности турбомашин, когда масса ротора имеет большое значение, очень важна разработка более эффективного метода определения оборотов потери несущей способности.

По результатам серии компьютерных экспериментов для различных условий пластичности (12-14) получены зависимости радиуса упругопластической границы, от величины параметра нагружения, представленные на рисунке 4.

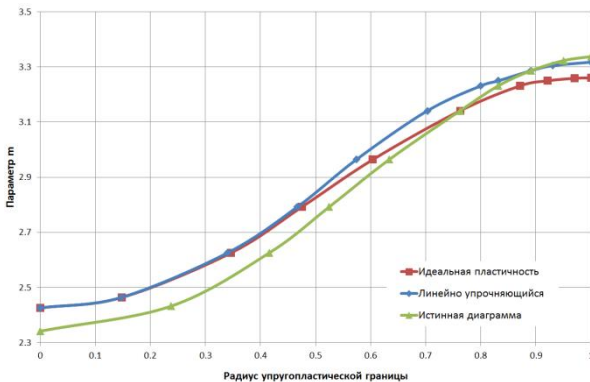


Рис. 4

На основании проведенных компьютерных экспериментов предложена следующая формула для определения предельных оборотов вращения сплошного диска с учетом коэффициента упрочнения

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{(3,2605 + 2,65 \cdot 10^{-11} \cdot c) \cdot \sigma_{\text{тек}}}{\rho_0 R_0^2}}, \quad (17)$$

где c – коэффициент упрочнения, $\sigma_{\text{тек}}$ – предел текучести, ρ_0 – плотность материала, R_0 – радиус диска.

Исследования по определению предельных оборотов вращения для кольцевого диска потребовали также изучить влияние относительного радиуса отверстия на

характер напряженно-деформированного состояния. На рисунке 5 показана зависимость предельного параметра нагружения m от относительного радиуса отверстия. Для сравнения на графике представлена кривая при условии пластичности Треска, которая во всем диапазоне лежит ниже кривой при условии Мизеса.

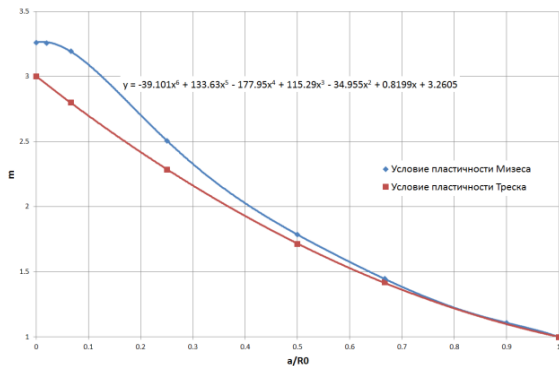


Рис. 5

Анализ результатов решения задачи позволил получить следующую формулу для определения предельных оборотов вращения для кольцевого диска

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\left(M \left(\frac{a}{R_0} \right) + 2,65 \cdot 10^{-11} \cdot c \right) \cdot \sigma_{\text{тек}}}{\rho_0 R_0^2}} \quad (18)$$

где c – коэффициент упрочнения, $\sigma_{\text{тек}}$ – предел текучести, ρ_0 – плотность материала, R_0 – радиус диска и $M \left(\frac{a}{R_0} \right)$ – полином 6 порядка, имеющий следующий вид

$$M \left(\frac{a}{R_0} \right) = -39,101 \left(\frac{a}{R_0} \right)^6 + 133,63 \left(\frac{a}{R_0} \right)^5 - 177,95 \left(\frac{a}{R_0} \right)^4 + 115,29 \left(\frac{a}{R_0} \right)^3 - 34,955 \left(\frac{a}{R_0} \right)^2 + 0,8199 \frac{a}{R_0} + 3,2605. \quad (19)$$

В третьей главе рассмотрим осесимметричный сплошной упругопластический вращающийся диск постоянной толщины (рисунок 6). Рассмотрено два случая: несвязанная задача (слева) и связанная задача механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела (справа).

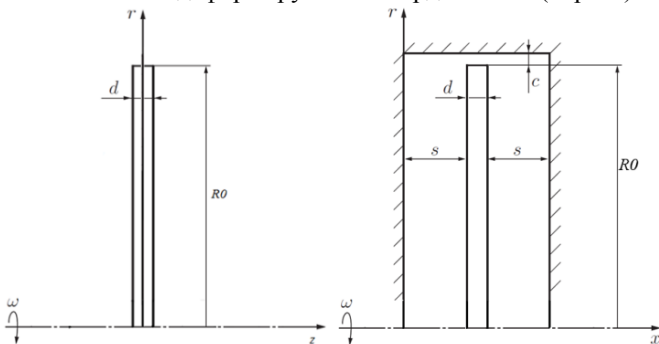


Рис. 6

Для связанной упругопластической задачи математическая модель в рамках теории пластического течения для условия пластичности Мизеса включает следующие уравнения:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 &= 0, \\ \rho \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \tau_{\rho\theta} &= 0, \quad \rho \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \tau_{\rho z} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 – плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k}.$$

Запишем кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, & \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, & \varepsilon_z &= \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p, & \varepsilon_{\rho z} &= \varepsilon_{\rho z}^e + \varepsilon_{\rho z}^p, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{\theta z}^e + \varepsilon_{\theta z}^p, & \varepsilon_{\rho\theta} &= \varepsilon_{\rho\theta}^e + \varepsilon_{\rho\theta}^p. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения равновесия дополняются соотношениями закона Гука

$$\begin{aligned} \frac{E}{k} \varepsilon_\rho^e &= \sigma_\rho - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z), & \frac{E}{k} \varepsilon_\theta^e &= \sigma_\theta - \nu(\sigma_\rho + \sigma_z), \\ \frac{E}{k} \varepsilon_z^e &= \sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_\rho), & \frac{2G}{k} \varepsilon_{\rho z}^e &= \tau_{\rho z}, \\ \frac{2G}{k} \varepsilon_{\rho\theta}^e &= \tau_{\rho\theta}, & \frac{2G}{k} \varepsilon_{\theta z}^e &= \tau_{\theta z}. \end{aligned} \quad (22)$$

Дополним систему уравнений соотношениями Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{u}{\rho}, & \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v}{\rho} \right) \right), & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z}, & \varepsilon_{\rho z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6(\tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho\theta}^2) = 1. \quad (24)$$

Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned} d\varepsilon_\rho^p &= 4d\lambda \left(\sigma_\rho - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \right), \\ d\varepsilon_\theta^p &= 4d\lambda \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) \right), \\ d\varepsilon_z^p &= 4d\lambda \left(\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_\rho) \right), \\ d\varepsilon_{\rho z}^p &= 6d\lambda \tau_{\rho z}, & d\varepsilon_{\theta z}^p &= 6d\lambda \tau_{\theta z}, & d\varepsilon_{\rho\theta}^p &= 6d\lambda \tau_{\rho\theta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Обороты вращения диска, в котором возникают пластические деформации, достаточно велики, чтобы в жидкости реализовался развитый турбулентный режим течения. Запишем условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (26)$$

С учетом обобщенной гипотезы Ньютона для несжимаемой жидкости компоненты напряжений выражаются через скорости движения среды следующим образом

$$\begin{aligned} p_{\rho\rho} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}, & p_{\theta\rho} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} - \frac{v_\theta}{\rho} \right), & p_{\theta\theta} &= -P + 2\mu \frac{v_\rho}{\rho}, \\ p_{\theta z} &= \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, & p_{zz} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & p_{z\rho} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда уравнения Рейнольдса несжимаемой жидкости для осредненного турбулентного движения примут вид

$$\begin{aligned} v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{\rho} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{P}{\rho_{\text{ж}}} + \frac{2}{3} K \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(2(v_{\text{ж}} + v_t) \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left((v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \right) + \frac{2(v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} - \frac{v_\rho}{\rho} \right)}{\rho}, \\ v_\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\rho v_\theta}{\rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left((v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} - \frac{v_\theta}{\rho} \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left((v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right) + \frac{2(v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} - \frac{v_\theta}{\rho} \right)}{\rho}, \\ v_\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\rho_{\text{ж}}} + \frac{2}{3} K \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left((v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left((v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) + \frac{(v_{\text{ж}} + v_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right)}{\rho}, \end{aligned} \quad (28)$$

где v_ρ, v_θ, v_z – осредненные компоненты вектора скорости, K – кинетическая энергия турбулентности, $v_{\text{ж}}$ – кинематическая вязкость жидкости, $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости, v_t – турбулентная вязкость, P – осредненное давление.

В рамках модели турбулентности $k - \varepsilon$ для развитого турбулентного течения, где прямое влияние вязкости на структуру турбулентности пренебрежимо мало, турбулентная вязкость может быть определена по формуле

$$v_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad (29)$$

где $C_\mu = 0,09$, ε – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии, которая в свою очередь определяется из уравнений переноса

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\varepsilon v_\rho - v_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} G_{\rho\rho} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}, \quad (30)$$

где $v_\varepsilon = v_{\text{ж}} + v_t/1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$. Аналогично (30) записываются соотношения поочередной перестановкой индексов с учетом, что

$$G_{\rho\rho} = 2v_t \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right)^2, G_{\rho z} = v_t \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \dots \quad (31)$$

Дополним полученную систему уравнений граничными условиями и условиями неразрывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе.

Перемещение точек твердого тела, находящихся на оси вращения, отсутствует и окружные и радиальные напряжения в центре диска равны

$$u(0, \theta, z) = 0, \sigma_\rho(0, \theta, z) = \sigma_\theta(0, \theta, z).$$

На упругопластической границе

$$\begin{aligned} [\sigma_\rho]_{\rho_s} &= 0, & [\sigma_\theta]_{\rho_s} &= 0, & [\sigma_\rho]_{\rho_s} &= 0, & [\tau_{\rho z}]_{\rho_s} &= 0, \\ [\tau_{\rho\theta}]_{\rho_s} &= 0, & [\tau_{\theta z}]_{\rho_s} &= 0, & [u]_{\rho_s} &= 0, & [v]_{\rho_s} &= 0, & [w]_{\rho_s} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

В качестве граничного условия важно учесть условие прилипания жидкости к твердой стенке, то есть отсутствие относительной скорости скольжения жидкости по поверхности твердого тела. С его учетом на поверхности дискабудет выполняться условие неразрывности напряжений в жидкости и в твердом теле

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_S} &= p_{\rho\rho_S}, & \sigma_{\theta_S} &= p_{\theta\theta_S}, & \sigma_{z_S} &= p_{zz_S}, & \tau_{\rho z_S} &= p_{\rho z_S}, \\ \tau_{\rho\theta_S} &= p_{\rho\theta_S}, & \tau_{\theta z_S} &= p_{\theta z_S}. \end{aligned} \quad (33)$$

В результате исследования сформулированной математической модели методами автоматизированного конструирования получено напряженно-деформированное состояние диска и решение задачи течения вязкой жидкости. На рисунке 7 представлено распределение компонент напряжений σ_ρ и σ_θ .

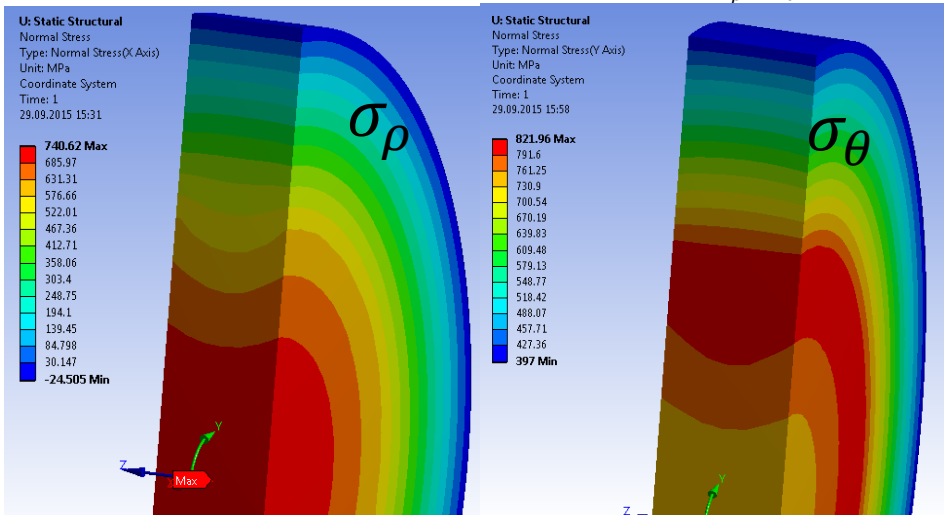


Рис. 7

За счет действия перепада давления в жидкости, вызываемого вращением диска, происходит увеличение радиуса упругопластической границы. Пластические деформации на 4-10 % выше в случае связанной задачи. Радиус упругопластической

границы $\rho_S \approx 0,554$ в осесимметричной постановке. В связанной постановке $\rho_S \approx 0,574$.

Предельные обороты вращения для диска, исследуемого в связанной постановке, ниже, чем для осесимметричного диска. Данная разница будет зависеть от величины перепада давления в полости. Перепад давления в свою очередь линейно зависит от плотности жидкости.

Проверена широко распространенная в прикладных задачах расчета дисков гипотеза о постоянстве напряженно-деформированного состояния по толщине диска. Показано, что в пределах упругости данная гипотеза справедлива для дисков с $d/R_0 < 0,35$. Для дисков в упругопластическом состоянии характер напряженно-деформированного состояния остается постоянным при $d/R_0 < 0,15$.

Заметное изменение радиуса упругопластической границы по толщине диска начинается со значения $d/R_0 > 0,1$. При относительной толщине диска $d/R_0 \leq 0,3$ максимальный радиус упругопластической границы достигается на боковой стенке диска. При больших, чем 0,3 значениях относительной толщины максимальный радиус достигается на продольной оси симметрии. Форма упругопластической границы для различных d/R_0 представлена на рисунке 8.

Таким образом, гипотеза о постоянстве компонент напряженно-деформированного состояния по толщине диска с точки зрения радиуса упругопластической границы выполняется для дисков $d/R_0 \leq 0,1$.

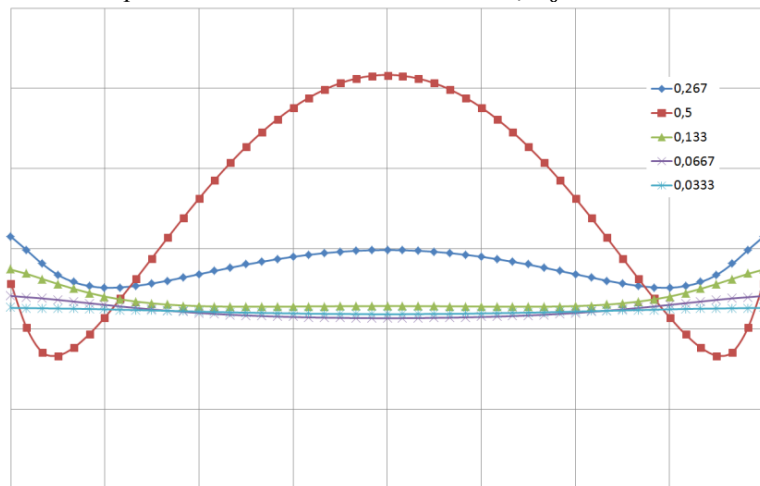


Рис. 8

Получены зависимости величины максимальных сдвиговых напряжений $\tau_{\rho z}$ от толщины диска и величины параметра нагружения m . Аналогичное исследование проведено для нормальных напряжений σ_z . Показано, что модули $\tau_{\rho z}$ и σ_z для упругопластического диска могут достигать 5-7% от величины предела текучести.

Заключение

В диссертационной работе сформулированы математические модели и решены задачи об упругопластических вращающихся дисках для случаев плоского

напряженного состояния, осесимметричного состояния и связанной задачи механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа. Напряженно-деформированное состояние дисков исследовано с учетом условия пластичности Мизеса и с учетом упрочнения, что позволило уточнить существующие методики расчета, применяемые в турбомашиностроении.

В результате выполнения диссертационного исследования получены следующие основные результаты:

1. Сформулирована и решена связанная задача о диске, вращающемся в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Исследовано влияние давления жидкости на напряженно-деформированное состояние диска.

2. Предложен и верифицирован метод решения упругих и упругопластических задач о вращающихся дисках средствами автоматизированного конструирования. Получены решения для упругопластического состояния диска для случая плоского напряженного состояния, осесимметричной задачи и связанной задачи механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела. Во всех задачах использовано условие пластичности Мизеса.

3. Получены формулы для определения оборотов потери несущей способности сплошного и кольцевого диска. Данные формулы более чем на 8 % уточняют существующие подходы. Предлагаемый в диссертационной работе подход основан на условии пластичности Мизеса и учитывает произвольное упрочнение материала, что особо актуально для прикладных задач.

4. Исследовано напряженно-деформированное состояние, реализующееся в осесимметричном вращающемся диске, в зависимости от его относительной толщины. Получено значение d/R_0 до которого справедлива гипотеза о постоянстве напряженно-деформированного состояния по толщине диска. Результаты исследования позволяют уточнить методику расчета дисков высокооборотных машин с развитой ступичной частью.

5. В результате решения связанной задачи была уточнена методика определения момента сил трения диска. Показана некорректность некоторых общепринятых формул. Построены зависимости коэффициента момента сил трения от числа Рейнольдса.

6. Исследована зависимость напряженно-деформированного состояния диска от свойств материала. Проведен сравнительный анализ для случаев модели без упрочнения, с линейным изотропным упрочнением и с учетом реальной диаграммы растяжения.

Публикации автора

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Афанасьев А.А. Применение суперЭВМ для трехмерного моделирования работы турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А.А. Афанасьев, Ю.В. Демьяненко, В.К. Першин // Международный научный журнал "Альтернативная энергетика и экология". – Саров: НТЦ "ТАТА", 2013. – № 9. – С. 10-15.

2. Афанасьев А.А. К определению момента сил трения диска, вращающегося в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, Математика. – Воронеж: изд-во ВГУ, 2014. – № 4.– С. 94-101.

Статьи и материалы конференций

3. Афанасьев А.А. К изучению осевой силы, действующей на вал ротора турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А.А. Афанасьев, Ю.В. Демьяненко, В.К. Першин // Материалы всероссийской научно-технической конференции «Ракетно-космические двигательные установки». – М: ИИУ МГОУ, 2013. –С. 69-71.

4. Афанасьев А.А. К расчету в ANSYSCFX дисков, вращающихся в ограниченном пространстве / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев, В.К. Першин // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж: Научная книга, 2014. – С.35-39.

5. Афанасьев А.А. Трехмерное моделирование течения реальной жидкости в рабочих элементах турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А.А. Афанасьев // Сборник докладов III ежегодной конференции "Информационные технологии на службе оборонно-промышленного комплекса России". – М.: Коннект-ИКТ – С. 134-135.

6. Афанасьев А.А. FSI анализ для решения задач турбомашиностроения / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – Чебоксары: Чуваш.гос. пед. ун-т, 2014. – Ч. 1. – С. 28-30.

7. Афанасьев А.А. Трехмерное моделирование течения жидкости в импеллерном уплотнительном устройстве ТНА ЖРД / А.А. Афанасьев, Ю.В. Демьяненко, В.К. Першин // Научно-технический журнал "Насосы. Турбины. Системы". – Воронеж: Научная книга, 2014. – №2 (11). – С. 56-62.

8. Афанасьев А.А. Определение момента сил трения дисков, вращающихся в ограниченном пространстве / А.А. Афанасьев, А.В. Ковалев, В.К. Першин // Сборник трудов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – М: Физматлит, 2015. – С. 27-30.