

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный архитектурно-строительный университет»**

На правах рукописи

Нгензи Жан Клод

**АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ С
ИЗМЕНЯЕМОЙ ВЯЗКОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ
ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСОВ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Заслуженный деятель науки РФ, доктор
физико-математических наук,
профессор Ю.А. Россихин

Воронеж –2015

Введение.....	4
Глава 1. Свободные затухающие нелинейные колебания тонких упругих пластин в условиях внутреннего резонанса	15
1.1. Постановка задачи	15
1.2. Метод решения.....	27
1.2.1. Вязкость порядка ε	30
1.2.2. Вязкость порядка ε^2	32
Глава 2. Нелинейные разрешающие дифференциальные уравнения, описывающие амплитудно-фазовую модуляцию для различных типов внутреннего резонанса порядка ε	36
2.1. Внутренний резонанс 2:1	36
2.2. Внутренний резонанс 1:1:2	45
Глава 3. Разрешающие нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие амплитудно-фазовую модуляцию для различных типов внутреннего резонанса порядка ε^2	48
3.1. Внутренний резонанс 1:1	48
3.1.1. Внутренний резонанс $\omega_1 = \omega_2 = \omega$	48
3.1.2. Внутренний резонанс $\omega_1 = \omega_3 = \omega$	53
3.1.3. Внутренний резонанс 1:1:1.....	58
3.3. Комбинационные резонансы аддитивно-разностного типа	59
3.3.1. Комбинационный резонанс $2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ (98).....	59
3.2.2. Комбинационный резонанс: $2\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ (97).....	64
3.2.3. Комбинационный резонанс $2\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ (99).....	69
Глава 4. Численные исследования.....	75
4.1. Внутренний резонанс два-к-одному (77)	76
4.2. Внутренний резонанс один-к-одному $\omega_1 = \omega_2$ (93).....	81
4.3. Внутренний резонанс один-к-одному $\omega_1 = \omega_3$ (94).....	89
4.4. Комбинационный резонанс аддитивного типа $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_3$ (98).....	97
4.4.1. Случай $K_1 = K_2 = K_3 = 0$	97
4.4.2. Влияние коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 на поведение фазовых портретов	113

4.5. Комбинационный резонанс разностного типа $\omega_1 - \omega_2 = 2\omega_3$ (97).....	126
4.5.1. Случай $K_1 = K_2 = K_3 = 0$	126
4.5.2. Влияние коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 на поведение фазовых портретов.....	137
Заключение	141
Список использованных источников	144

Введение

Известно, что изучение нелинейных колебаний пластин является важной областью прикладной механики, так как пластинки используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники. Для исследования нелинейных колебаний пластин применяют различные методы: аналитические [24], [27], [28], [40], численные [12], [25] и экспериментальные [12], [21]. Обзор недавних достижений в данной области можно найти в работах Amabili [13, 14, 17] и Sathyamoorthy [39].

Изучение свободных незатухающих [17], [25] и затухающих [16], [7], [9], [19], [27], [28] нелинейных систем является важной составляющей для определения динамических характеристик системы, зависящих от амплитудно-частотных соотношений и форм колебаний [25]. Кроме того, нелинейные колебания могут сопровождаться таким явлением, как внутренний резонанс, приводящего к сильному взаимодействию возбужденных форм колебаний [20], и, как следствие, к перекачке энергии между взаимодействующими модами. Внутренний резонанс может наблюдаться в случае некоторой комбинации собственных частот одного и того же типа колебаний. В качестве примера, внутренний резонанс 1:3 был обнаружен в [25], когда четвертая собственная частота колебаний из плоскости была в три раза больше, чем фундаментальная частота этого же типа колебаний

Другой тип внутреннего резонанса был исследован в работах [27] и [28], когда одна частота колебаний в плоскости была равна (внутренний резонанс 1:1) или в два раза больше (внутренний резонанс 1:2), чем некоторая частота колебаний из плоскости. Комбинационные резонансы аддитивного и разностного типов были изучены в работе [36]. Эти типы внутреннего резонанса

приводят к перекачке энергии между двумя или тремя подсистемами. Исследования в этом направлении были начаты Виттом и Гореликом [3], которые были одними из первых, кто теоретически и экспериментально показали явление внутреннего резонанса два-к-одному с перекачкой энергии от одной подсистемы в другую, используя в качестве примера самую простую механическую систему с двумя степенями свободы.

Чтобы исследовать нелинейные затухающие колебания изучаемой тонкой пластинки, для описания реологических свойств среды используется вязкоупругая модель Келвина-Фойгта с дробной производной [30, 32], так как эта модель имеет преимущество перед обычной моделью Келвина-Фойгта, потому что она приводит к результатам, находящимся в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Так, например, экспериментальные данные, полученные в работах [10] и [11] во время натуральных испытаний висячих мостов Винсент-Томас и Золотые Ворота, показывают, что различные формы колебаний обладают различными коэффициентами затухания, и порядок малости этих коэффициентов говорит о низкой демпфирующей способности висячих комбинированных систем, которая приводит к длительной перекачке энергии от одной подсистемы в другую. Кроме того, с увеличением собственной частоты колебаний уменьшается соответствующий коэффициент затухания. Чтобы привести теоретические исследования в соответствие с экспериментом, в работе [26] было предложено использовать дробные производные для того, чтобы описывать процессы внутреннего трения, происходящие в комбинированных висячих системах при нелинейных свободных колебаниях, что позволило получить коэффициенты демпфирования, зависящие от собственной частоты колебаний. Более того, хорошее соответствие между теоретическими результатами и экспериментальными

данными, было найдено при помощи соответствующего выбора параметра дробности (порядка дробной производной) и коэффициента вязкости [29].

В данной диссертационной работе изучаются нелинейные свободные колебания тонких пластинок в вязкой среде, движения которых описываются системой трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений, в случае, когда пластинка находится в условиях внутреннего резонанса, приводящего к взаимодействию форм колебаний, соответствующих взаимно ортогональным перемещениям.

Актуальность темы. Поскольку пластинки используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их колебаний в условиях внутренних резонансов два-к-одному, один-к-одному и комбинационных внутренних резонансов является весьма актуальным. Эти резонансы сопровождаются перекачкой энергии из одной подсистемы в другую, что, в конечном счете, может привести к разрушению пластинки и конструкции в целом.

Так как внутренний резонанс является конструкционным резонансом в отличие от внешнего резонанса, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, то внутренний резонанс зачастую неустраним, поскольку готовую конструкцию уже не переделать, а при конструировании невозможно предугадать наличие в конструкции того или иного резонансного сочетания собственных частот. Поскольку таких сочетаний очень много, то их необходимо исследовать.

Основными целями диссертационной работы являются:

1) Анализ свободных затухающих колебаний упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой описываются реологической моделью,

содержащей дробную производную, при наличии условий внутреннего резонанса или комбинационного резонанса;

2) Изучение влияния параметра дробности на процесс перекачки энергии, происходящий при нелинейных колебаниях пластинок, находящихся в условиях внутреннего резонанса;

3) Исследование влияния малой вязкости на характер колебательных режимов пластинки, движения которой описываются системой трех нелинейных уравнений, в условиях всех возможных внутренних резонансов.

Научная новизна. Решена задача о свободных нелинейных колебаниях упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными, в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, линейные части которых взаимосвязаны. Предложен новый подход, позволяющий развязать линейные части нелинейных уравнений движения пластинок, при этом функции амплитуд колебаний раскладываются в степенные ряды по малому параметру и зависят от различных масштабов времени, а качестве метода решения нелинейных уравнений используется метод многих временных масштабов, который является одним из методов теории возмущений. Изучены все десять возможных случаев внутреннего резонанса.

Показано, что тип внутреннего резонанса зависит от порядка малости вязкости, учитываемой в уравнениях колебаний. Так, если вязкость порядка ε , где ε - малая величина, то затухающие колебания могут сопровождаться внутренним резонансом 2:1, когда одна из частот вертикальных колебаний или колебаний в плоскости пластинки в два раза превышает частоту колебаний в плоскости пластинки в другом направлении, и 2:1:1, когда частоты колебаний в

трех взаимно перпендикулярных направлениях связаны указанным соотношением. Другие виды внутреннего резонанса: 1:1, 1:1:1, а также комбинационные резонансы аддитивного и разностного типов - возможны в случае малости вязкости порядка ε^2 .

Исследовано влияние параметра дробности на характер нелинейных колебаний и на механизм перекачки энергии между взаимодействующими нелинейными модами колебаний. Показано, что каждая мода характеризуется собственным коэффициентом демпфирования, связанным с собственной частотой колебаний экспоненциальной зависимостью с отрицательной дробной экспонентой. Выполнен феноменологический анализ колебаний пластинки, находящейся в различных условиях внутреннего резонанса, при помощи фазовых портретов, построенных для разных значений параметров пластинки. Проведенный анализ выявил многообразие колебательных движений: стационарные колебания, двухсторонний энергообмен между рассматриваемыми подсистемами и односторонний энергообмен, при этом при наличии малой вязкости все режимы затухают с течением времени. Анализ фазовых портретов для различных колебательных режимов показал, что они содержат как замкнутые, так и разомкнутые линии тока, разделенные кривыми-сепаратрисами. Вдоль сепаратрис найдены аналитические решения, определяющие необратимую перекачку энергии из одной подсистемы в другую, которые в теории колебаний соответствуют солитоноподобным решениям.

Для каждого типа внутреннего резонанса из выявленных в результате проведенных исследований десяти видов внутренних резонансов получены системы нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний. Для некоторых частных случаев внутреннего резонанса получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функция тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов. Так, во время свободных

колебаний пластинки, сопровождающихся внутренним резонансом, могут наблюдаться три режима колебаний: стационарный (при отсутствии демпфирования), квазистационарный (демпфирование описывается обычной производной целого порядка) и нестационарный (демпфирование описывается производной дробного порядка). Разработанный новый подход позволил решать задачи о колебаниях тонких тел более эффективно. Было показано, что внутренний резонанс является конструкционным резонансом. В отличие от внешнего резонанса, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, внутренний резонанс неустраним, поскольку готовую уже не переделать, а при конструировании невозможно предугадать наличие в конструкции того или иного резонансного сочетания собственных частот, поскольку таких сочетаний очень много и их необходимо исследовать.

Сравнение результатов, полученных с помощью разработанного в данной работе нового подхода, с данными других авторов для нелинейных пластин, движение которых описывается либо одним уравнением относительно прогиба пластинки, либо тремя связанными нелинейными уравнениями без развязывания линейных частей разрешающих уравнений, показало, что предложенный подход позволил выявить большее разнообразие внутренних резонансов: дополнительные типы внутренних резонансов $1:1:1$, $2:1:1$, а также новые виды комбинационных резонансов, которые не изучались в ранее опубликованных исследованиях.

Достоверность базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. При стремлении параметра дробности к единице

полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка.

Практическая ценность. Явление внутреннего резонанса требует очень серьезного изучения, поскольку в тонкой пластине всегда присутствуют какой-либо из десяти найденных типов внутреннего резонанса. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями в процессе проектирования конструкций, которые в процессе колебаний могут оказаться в условиях различных внутренних резонансов.

При наличии возмущающей гармонической силы данный подход позволит избегать наложения внешнего резонанса на внутренний, поскольку такое наложение может привести к необратимым последствиям.

Данные научные исследования выполнялись в рамках проектной части государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности «Новый подход к изучению нелинейных колебаний тонких вязкоупругих тел, демпфирующие свойства которых определяются дробными операторами Ю.Н. Работнова и другими операторами дробного порядка» (проект № 7.22.2014/К).

На защиту выносятся следующие основные результаты работы:

- Новый подход решения задачи о свободных нелинейных колебаниях упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными, в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений относительно трех перемещений во взаимно перпендикулярных направлениях, позволяющий развязать линейные части нелинейных уравнений движения пластинок и изучить все десять возможных случаев внутреннего резонанса.

- Управление процессом перекачки энергии, происходящим при нелинейных колебаниях упругой пластинки в вязкой среде за счет варьирования значений параметра дробности.
- Феноменологический анализ колебаний пластинки, находящейся в различных условиях внутреннего резонанса, при помощи фазовых портретов, построенных для разных значений параметров пластинки.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались: 1) на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного архитектурно-строительного университета в 2013-2015 годах; 2) на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук Воронежского ГАСУ; 3) на международной научной конференции «Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур», Минск, Беларусь, 16-20 сентября 2013 года; 4) на международной конференции «Mechanics, Materials, Mechanical Engineering and Chemical Engineering» (MMMCE'15) в г. Барселона, Испания, 7-9 апреля 2015 г.; 5) на международной конференции «3d International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences» (MCSS'15) в г. Дубай, АРЭ, 22-24 февраля 2015 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 научных работах, 2 из которых в международных научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

Личное участие автора. Основные результаты исследований по теме диссертации были получены лично автором и опубликованы в соавторстве с научными руководителями, которые определили основные направления

исследования в рамках выполнения проектной части государственного задания Министерства образования и науки РФ.

В диссертации отсутствует заимствованный материал без ссылок на автора или источник заимствования.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 147 страницах машинописного текста, содержит 30 рисунков, список использованных источников из 40 наименований.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе приводится постановка задачи о свободных нелинейных колебаниях упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными, в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, линейные части которых взаимосвязаны. Описывается новый подход, позволяющий развязать линейные части нелинейных уравнений движения пластинок, используя свойства эрмитовых матриц, при этом функции амплитуд колебаний раскладываются в степенные ряды по малому параметру и зависят от различных масштабов времени, а качестве метода решения нелинейных уравнений используется метод многих временных масштабов, который является одним из методов теории возмущений.

Приведена классификация типов внутреннего резонанса в зависимости от порядка малости вязкости, учитываемой в уравнениях колебаний.

Вторая глава посвящена анализу внутренних резонансов, возникающих в рассматриваемой системе при учете малой вязкости порядка ε . Получены системы нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний.

Для некоторых частных случаев внутреннего резонанса два-к-одному получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функции тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов.

Для внутреннего резонанса два-к-одному получено аналитическое решение методом последовательных приближений, которое позволяет исследовать зависимость поведения амплитуд и фаз колебаний от времени при любом значении параметра дробности $0 < \gamma \leq 1$.

Третья глава посвящена анализу внутренних резонансов, возникающих в рассматриваемой системе при учете малой вязкости порядка ε^2 . Получены системы нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний для случаев внутренних резонансов один-к-одному и комбинационных резонансов аддитивно-разностного типа. Для некоторых частных случаев получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функция тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов.

Так, во время свободных колебаний пластинки, сопровождающихся внутренним резонансом, могут наблюдаться три режима колебаний: стационарный (при отсутствии демпфирования), квазистационарный (демпфирование описывается обычной производной целого порядка) и нестационарный (демпфирование описывается производной дробного порядка).

В четвертой главе проводится качественный численный анализ фазовых портретов на основе гидродинамической аналогии для различных внутренних резонансов 2:1, 1:1 и комбинационных резонансов аддитивного и разностного типов при различных значениях параметров пластинки. Проведенный анализ выявил многообразие колебательных движений: стационарные колебания, двухсторонний энергообмен между рассматриваемыми подсистемами и односторонний энергообмен, при этом при наличии малой вязкости все режимы затухают с течением времени. Анализ фазовых портретов для различных колебательных режимов показал, что они

содержат как замкнутые, так и разомкнутые линии тока, разделенные кривыми-сепаратрисами. Вдоль сепаратрис найдены аналитические решения, определяющие необратимую перекачку энергии из одной подсистемы в другую, которые в теории колебаний соответствуют солитоноподобным решениям.

Глава 1. Свободные затухающие нелинейные колебания тонких упругих пластин в условиях внутреннего резонанса

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическое поведение свободно опёртой нелинейной тонкой упругой прямоугольной пластины (рис. 1), колебания которой в вязкоупругой среде описываются в декартовой системе координат следующими тремя дифференциальными уравнениями, записанными в безразмерном виде [27]:

$$u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 v_{xy} + w_x \left(w_{xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 w_{yy} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1^2 w_y w_{xy} = \ddot{u} + \alpha_1 D^\gamma u, \quad (1)$$

$$\beta_1^2 v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 u_{xy} + \beta_1 w_y \left(\beta_1^2 w_{yy} + \frac{1-\nu}{2} w_{xx} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 w_x w_{xy} = \ddot{v} + \alpha_2 D^\gamma v, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_2^2}{12} (w_{xxxx} + 2\beta_1^2 w_{xxyy} + \beta_1^4 w_{yyyy}) - w_{xx} (u_x + \nu \beta_1 v_y) - w_x (u_{xx} + \nu \beta_1 v_{xy}) - \\ & - \frac{1-\nu}{2} \beta_1 [w_{xy} (\beta_1 u_y + v_x) + w_y (\beta_1 u_{xy} + v_{xx})] - \\ & - \beta_1^2 [w_{yy} (\nu u_x + \beta_1 v_y) + w_y (\nu u_{xy} + \beta_1 v_{yy})] - \\ & - \frac{1-\nu}{2} \beta_1 [w_{xy} (\beta_1 u_y + v_x) + w_x (\beta_1 u_{yy} + v_{xy})] = -\ddot{w} - \alpha_3 D^\gamma w \end{aligned} \quad (3)$$

К системе уравнений (1)-(3) необходимо добавить начальные условия

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = w|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$\dot{u}|_{t=0} = \varepsilon U^0(x, y), \quad \dot{v}|_{t=0} = \varepsilon V^0(x, y), \quad \dot{w}|_{t=0} = \varepsilon W^0(x, y), \quad (5)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} w|_{x=0} &= w|_{x=1} = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \\ w_{xx}|_{x=0} &= w_{xx}|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} w|_{y=0} &= w|_{y=1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \quad v_y|_{y=0} = v_y|_{y=1} = 0, \\ w_{yy}|_{y=0} &= w_{yy}|_{y=1} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ и $w = w(x, y, t)$ - перемещения точек, расположенных в срединной плоскости пластины в направлении осей x , y и z соответственно; ν - коэффициент Пуассона; $\beta_1 = a/b$ и $\beta_2 = h/a$ - безразмерные параметры, определяющие размеры пластины; a и b - размеры пластины в направлениях осей x и y соответственно; h - толщина; t - время; точка обозначает производную по времени, нижние индексы означают производные относительно соответствующих координат, ε - малый параметр. В уравнениях (1) - (7) безразмерные величины введены так же, как и в работе [27].

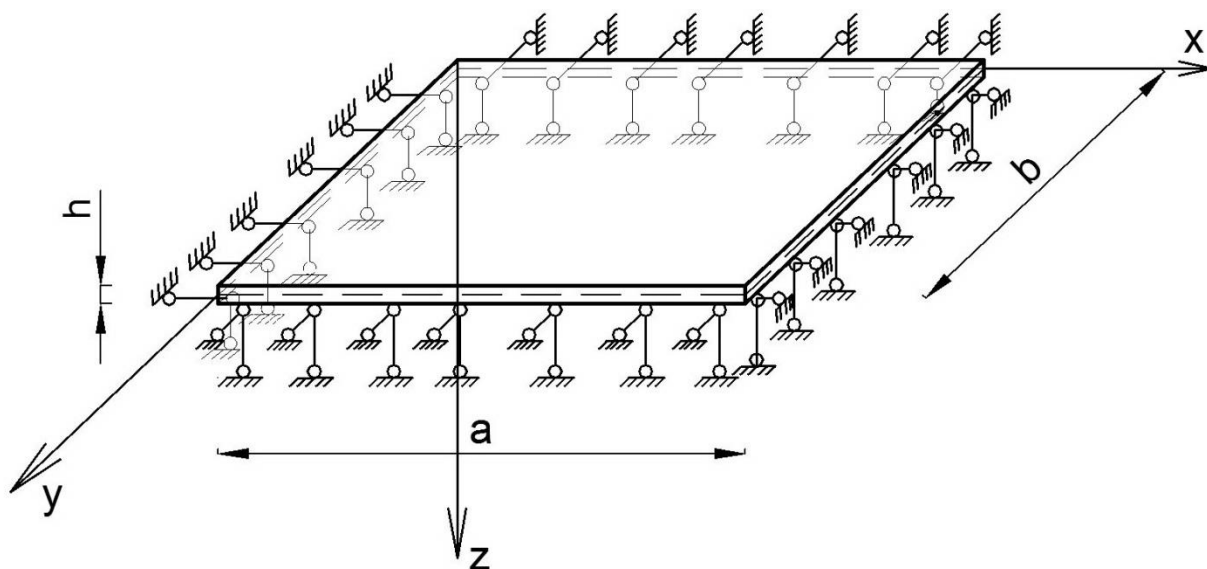


Рис. 1. Схема шарнирно опертой прямоугольной пластинки

В уравнениях (1)-(3) члены $\alpha_1 D^\gamma u$, $\alpha_2 D^\gamma v$ и $\alpha_3 D^\gamma w$, представляют собой силы вязкого сопротивления, появляющиеся при колебании пластинки в вязкой окружающей среде, где α_i ($i=1,2,3$) - коэффициенты демпфирования и D^γ - дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ [25]

$$D^\gamma F = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{F(t-t')}{\Gamma(1-\gamma)t'^\gamma} dt'. \quad (8)$$

В отличие от традиционного моделирования вязких сил сопротивления через производные по времени первого порядка [11] в настоящем исследовании мы используем производные по времени дробного порядка D^γ , так как это позволит нам получать коэффициенты демпфирования, зависящие от собственных частот колебаний. В работах [26], [29] было показано, что такой подход в моделировании затухающих нелинейных колебаний тонких тел обеспечивает хорошее согласование между теоретическими результатами и экспериментальными данными через соответствующий выбор дробного параметра (порядок дробной производной) и коэффициента вязкости.

В работах [26] и [27] было показано, что дробная производная является непосредственным обобщением обычной производной. Действительно, когда $\delta \rightarrow 1$, $D^\gamma x$ стремится к \dot{x} , то есть при $\gamma \rightarrow 1$ дробная производная переходит в обычную производную, и математическая модель рассматриваемой вязкоупругой пластинки преобразовывается в модель Кельвина-Фойгта, у которой упругий элемент ведет себя нелинейно, а вязкий элемент - линейно. Когда $\gamma \rightarrow 0$, дробная производная $D^\gamma x$ стремится к $x(t)$. Другими словами, введение нового параметра дробности наряду с параметрами α_i позволяет изменять не только величину вязкости за счет увеличения или уменьшения

параметров α_i , но также и характер вязкости при помощи варьирования параметром дробности.

Из начальных условий (5) видно, что свободные колебания вызываются слабым отклонением от положения равновесия.

Решение уравнений (1) - (3) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{1mn}(t) \eta_{1mn}(x, y), \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2mn}(t) \eta_{2mn}(x, y), \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{3mn}(t) \eta_{3mn}(x, y), \end{aligned} \quad (9)$$

где $x_{1mn}(t)$, $x_{2mn}(t)$ и $x_{3mn}(t)$ - обобщенные перемещения, соответствующие перемещениям в плоскости пластины и ее прогибу, m и n - целые числа, соответствующие числу учитываемых полуволн, а собственные функции, удовлетворяющие граничные условия (6) и (7) имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_{1mn}(x, y) &= \cos \pi m x \sin \pi n y, \\ \eta_{2mn}(x, y) &= \sin \pi m x \cos \pi n y, \\ \eta_{3mn}(x, y) &= \sin \pi m x \sin \pi n y. \end{aligned} \quad (10)$$

Линейные незатухающие собственные формы колебаний в плоскости и из плоскости пластины являются решением задачи на собственные значения

$$-\ddot{x}_{1mn} \eta_{1mn} + x_{1mn} \left(\eta_{1mn,xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 \eta_{1mn,yy} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \eta_{2mn,xy} x_{2mn} = 0, \quad (11)$$

$$-\ddot{x}_{2mn} \eta_{2mn} + x_{2mn} \left(\beta_1^2 \eta_{2mn,yy} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{2mn,xx} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \eta_{1mn,xy} x_{1mn} = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{x}_{3mn} \eta_{3mn} + \frac{\beta_2^2}{12} (\eta_{3mn,xxxx} + 2\beta_1^2 \eta_{3mn,xyxy} + \beta_1^4 \eta_{3mn,yyyy}) x_{3mn} = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (11) и (12) имеет характеристическое уравнение

$$\omega_{mn}^4 - (S_{11}^{mn} + S_{22}^{mn}) \omega_{mn}^2 + S_{11}^{mn} S_{22}^{mn} - S_{12}^{mn} S_{21}^{mn} = 0, \quad (14)$$

корнями которого являются безразмерные собственные частоты изгибных колебаний в плоскости пластины

$$\omega_{1mn}^2 = \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2), \quad \omega_{2mn}^2 = \frac{1-\nu}{2} \omega_{1mn}^2, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} S_{11}^{mn} &= \pi^2 \left(m^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 n^2 \right), & S_{12}^{mn} = S_{21}^{mn} &= \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \pi^2 mn, \\ S_{22}^{mn} &= \pi^2 \left(\frac{1-\nu}{2} m^2 + \beta_1^2 n^2 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Собственные частоты изгибных колебаний из плоскости пластины могут быть получены из уравнения (13)

$$\omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4 \beta_2^2}{12} (m^2 + \beta_1^2 n^2)^2. \quad (17)$$

Подставляя (9) в уравнения (1) - (3), умножая (1), (2), и (3) на η_{1lk} , η_{2lk} и η_{3lk} соответственно, интегрируя по x и y и используя условия ортогональности для линейных мод в пределах областей $0 \leq x, y \leq 1$, приходим к бесконечному числу систем, каждая из которых состоит из трех связанных нелинейных обычных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $x_{i mn}$ ($i=1,2,3$):

$$\ddot{x}_{\alpha mn} + \varkappa_{\alpha} D^{\gamma} x_{\alpha mn} + S_{\alpha\beta}^{mn} x_{\beta mn} = -F_{\alpha mn} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (18)$$

$$\ddot{x}_{3mn} + \mathfrak{a}_3 D^\gamma x_{3mn} + \omega_{3mn}^2 x_{3mn} = -F_{3mn}, \quad (19)$$

где суммирование выполнено по двум повторяющимся индексам, а элементы матрицы S_{ij}^{mn} определены в (16).

Нелинейные части $F_{i mn}$ уравнений (18) и (19) имеют вид

$$F_{1mn} = 4 \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{m_2} \sum_{n_2} x_{3m_1 n_1} x_{3m_2 n_2} A_{1mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \quad (20)$$

$$F_{2mn} = 4 \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{m_2} \sum_{n_2} x_{3m_1 n_1} x_{3m_2 n_2} A_{2mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \quad (21)$$

$$F_{3mn} = -4 \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{m_2} \sum_{n_2} \left[x_{3m_1 n_1} x_{1m_2 n_2} C_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} + x_{3m_1 n_1} x_{2m_2 n_2} D_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} \right], \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A_{1mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \pi^3 m_1 \left(m_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 n_2^2 \right) a_{1mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} - \frac{1+\nu}{2} \pi^3 \beta_1^2 n_1 m_2 n_2 a_{2mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \\ A_{2mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \pi^3 \beta_1 n_1 \left(\beta_1^2 n_2^2 + \frac{1-\nu}{2} m_2^2 \right) a_{3mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} - \frac{1+\nu}{2} \pi^3 \beta_1 m_1 m_2 n_2 a_{4mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \\ C_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \pi^3 m_2 \left(m_1^2 + \nu \beta_1^2 n_1^2 \right) a_{5mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} + (1-\nu) \pi^3 \beta_1^2 m_1 n_1 n_2 a_{6mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} - \\ &- \pi^3 m_1 \left(m_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 n_2^2 \right) a_{7mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} - \frac{1+\nu}{2} \beta_1^2 \pi^3 n_1 m_2 n_2 a_{8mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \\ D_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \pi^3 \beta_1 n_2 \left(\nu m_1^2 + \beta_1^2 n_1^2 \right) a_{5mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} + (1-\nu) \beta_1 \pi^3 m_1 n_1 m_2 a_{6mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} - \\ &- \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \pi^3 m_1 m_2 n_2 a_{7mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} - \pi^3 \beta_1 n_1 \left(\frac{1-\nu}{2} m_2^2 + \beta_1^2 n_2^2 \right) a_{8mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \end{aligned}$$

и коэффициенты $a_{k mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}$ ($k=1, 2, \dots, 8$), зависящие от комбинаций функций синуса и косинуса, входящих в собственные функции (10), имеют вид

$$\begin{aligned}
a_{1mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi m_1 x \sin \pi n_1 y \sin \pi m_2 x \sin \pi n_2 y \cos \pi m x \sin \pi n y \, dx dy, \\
a_{2mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \sin \pi m_1 x \cos \pi n_1 y \cos \pi m_2 x \cos \pi n_2 y \cos \pi m x \sin \pi n y \, dx dy, \\
a_{3mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \sin \pi m_1 x \cos \pi n_1 y \sin \pi m_2 x \sin \pi n_2 y \sin \pi m x \cos \pi n y \, dx dy, \\
a_{4mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi m_1 x \sin \pi n_1 y \cos \pi m_2 x \cos \pi n_2 y \sin \pi m x \cos \pi n y \, dx dy, \\
a_{5mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \sin \pi m_1 x \sin \pi n_1 y \sin \pi m_2 x \sin \pi n_2 y \sin \pi m x \sin \pi n y \, dx dy, \\
a_{6mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi m_1 x \cos \pi n_1 y \cos \pi m_2 x \cos \pi n_2 y \sin \pi m x \sin \pi n y \, dx dy, \\
a_{7mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi m_1 x \sin \pi n_1 y \cos \pi m_2 x \sin \pi n_2 y \sin \pi m x \sin \pi n y \, dx dy, \\
a_{8mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \sin \pi m_1 x \cos \pi n_1 y \sin \pi m_2 x \cos \pi n_2 y \sin \pi m x \sin \pi n y \, dx dy,
\end{aligned}$$

при этом интегралы могут быть вычислены при помощи следующих формул [2]:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= \frac{1}{4} [\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)], \\
\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{1}{4} [\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)], \\
\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma &= \frac{1}{4} [-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)], \\
\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{1}{4} [\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)].
\end{aligned}$$

Так как тензор второго ранга $S_{\alpha\beta}^{mn}$ является симметричным, то он имеет два действительных собственных значения (15), которые соответствуют двум взаимно ортогональным собственным векторам

$$\vec{L}_{mn}^I \left\{ L_{1mn}^I = \frac{\pi m}{\omega_{1mn}}, \quad L_{2mn}^I = \frac{\pi \beta_1 n}{\omega_{1mn}} \right\}, \quad (23)$$

$$\bar{L}_{mn}^U \left\{ L_{1mn}^U = \frac{\pi\beta_1 n}{\omega_{1mn}}, L_{2mn}^U = -\frac{\pi m}{\omega_{1mn}} \right\}, \quad (24)$$

т.е.,

$$L_{\alpha mn}^I L_{\alpha mn}^I = L_{\alpha mn}^U L_{\alpha mn}^U = 1, \quad L_{\alpha mn}^I L_{\alpha mn}^U = 0, \quad (25)$$

где здесь и ниже суммирование выполнено по повторяющемуся индексу α , в то время как индексы m и n свободные.

Таким образом, матрица $S_{\alpha\beta}^{mn}$ и обобщенные перемещения $x_{\alpha mn}$, входящие в уравнения (18) и (19), могут быть представлены в виде разложения по собственным векторам (23) и (24) [36]

$$S_{\alpha\beta}^{mn} = \omega_{1mn}^2 L_{\alpha mn}^I L_{\beta mn}^I + \omega_{2mn}^2 L_{\alpha mn}^U L_{\beta mn}^U, \quad (26)$$

$$x_{\alpha mn} = X_{1mn} L_{\alpha mn}^I + X_{2mn} L_{\alpha mn}^U. \quad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в уравнения (18) и (19) и затем умножая (18) последовательно на $L_{i mn}^I$ и $L_{i mn}^U$ с учетом (25), мы получаем следующие три уравнения:

$$\ddot{X}_{1mn} + \alpha_1 D^\gamma X_{1mn} + \omega_{1mn}^2 X_{1mn} = -F_{\alpha mn} L_{\alpha mn}^I, \quad (28)$$

$$\ddot{X}_{2mn} + \alpha_2 D^\gamma X_{2mn} + \omega_{2mn}^2 X_{2mn} = -F_{\alpha mn} L_{\alpha mn}^U, \quad (29)$$

$$\ddot{X}_{3mn} + \alpha_3 D^\gamma X_{3mn} + \omega_{3mn}^2 X_{3mn} = -F_{3mn}, \quad (30)$$

где $X_{3mn} = x_{3mn}$.

Следует отметить, что левые части уравнений (28)-(30) линейны и независимы друг от друга, в то время как уравнения (28)-(30) связаны только с помощью нелинейных членов, стоящих в их правых частях.

Чтобы показывать влияние начальных условий (4) и (5) на решение, которое будет построено, разложим искомые функции X_{imn} ($i=1,2,3$) в ряд по малому параметру ε

$$X_{imn} = \varepsilon X_{imn}^0 + \varepsilon^2 X_{imn}^1 + \dots \quad (i=1,2,3). \quad (31)$$

Подставляя (31) в систему уравнений (28)-(30) и ограничиваясь членами порядка ε , приходим к линейной однородной системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{X}_{imn}^0 + \omega_{imn}^2 X_{imn}^0 = 0 \quad (i=1,2,3). \quad (32)$$

решение которой имеет вид

$$X_{imn}^0 = A_{imn}(\varepsilon t) \exp(i\omega_{imn} t) + \bar{A}_{imn}(\varepsilon t) \exp(-i\omega_{imn} t) \quad (i=1,2,3), \quad (33)$$

где $A_{imn}(\varepsilon t)$ и $\bar{A}_{imn}(\varepsilon t)$ - искомые комплексно сопряженные функции.

Представляя функции $A_{imn}(\varepsilon t)$ в полярной форме

$$A_{imn}(\varepsilon t) = a_{imn}(\varepsilon t) e^{i\psi_{imn}(\varepsilon t)} \quad (i=1,2,3), \quad (34)$$

решение (33) принимает вид

$$X_{imn} = \varepsilon X_{imn}^0 = 2\varepsilon a_{imn}(\varepsilon t) \cos[\omega_{imn} t + \psi_{imn}(\varepsilon t)] \quad (i=1,2,3), \quad (35)$$

где $a_{imn}(\varepsilon t)$ и $\psi_{imn}(\varepsilon t)$ - амплитуды и фазы нелинейных колебаний.

Дифференцируя (35) по времени и отбрасывая члены порядка ε^2 , получим

$$\dot{X}_{imn} = -2\varepsilon a_{imn}(\varepsilon t) \omega_{imn} \sin[\omega_{imn} t + \psi_{imn}(\varepsilon t)] \quad (i=1,2,3). \quad (36)$$

Подставляя теперь (27) в (9) с учётом (35), находим

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= 2\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{1mn}(\varepsilon t) \cos[\omega_{1mn}t + \psi_{1mn}(\varepsilon t)] L_{1mn}^I + \right. \\
&\quad \left. + a_{2mn}(\varepsilon t) \cos[\omega_{2mn}t + \psi_{2mn}(\varepsilon t)] L_{1mn}^{II} \right\} \eta_{1mn}(x, y), \\
v(x, y, t) &= 2\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{1mn}(\varepsilon t) \cos[\omega_{1mn}t + \psi_{1mn}(\varepsilon t)] L_{2mn}^I + \right. \\
&\quad \left. + a_{2mn}(\varepsilon t) \cos[\omega_{2mn}t + \psi_{2mn}(\varepsilon t)] L_{2mn}^{II} \right\} \eta_{2mn}(x, y), \\
w(x, y, t) &= 2\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3mn}(\varepsilon t) \cos[\omega_{3mn}t + \psi_{3mn}(\varepsilon t)] \eta_{3mn}(x, y).
\end{aligned} \tag{37}$$

Используя начальные условия (4) и (5) с учетом (36), из соотношений (37) при $t = 0$ получаем бесконечную систему алгебраических уравнений для определения $a_{imn}(0)$ и $\psi_{imn}(0)$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
&a_{1mn}(0) L_{1mn}^I \cos \psi_{1mn}(0) + a_{2mn}(0) L_{1mn}^{II} \cos \psi_{2mn}(0) = 0, \\
&a_{1mn}(0) L_{2mn}^I \cos \psi_{1mn}(0) + a_{2mn}(0) L_{2mn}^{II} \cos \psi_{2mn}(0) = 0, \\
- &a_{1mn}(0) \omega_{1mn} L_{1mn}^I \sin \psi_{1mn}(0) - a_{2mn}(0) \omega_{2mn} L_{1mn}^{II} \sin \psi_{2mn}(0) = \mathfrak{a}_{1mn}, \\
- &a_{1mn}(0) \omega_{1mn} L_{2mn}^I \sin \psi_{1mn}(0) - a_{2mn}(0) \omega_{2mn} L_{2mn}^{II} \sin \psi_{2mn}(0) = \mathfrak{a}_{2mn}, \\
&a_{3mn}(0) \cos \psi_{3mn}(0) = 0, \\
- &a_{3mn}(0) \omega_{3mn} \sin \psi_{3mn}(0) = \mathfrak{a}_{3mn},
\end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{1mn} &= \frac{\int_0^1 \int_0^1 U^0(x, y) \eta_{1mn}(x, y) dx dy}{\int_0^1 \int_0^1 \eta_{1mn}^2(x, y) dx dy}, & \mathfrak{a}_{2mn} &= \frac{\int_0^1 \int_0^1 V^0(x, y) \eta_{2mn}(x, y) dx dy}{\int_0^1 \int_0^1 \eta_{2mn}^2(x, y) dx dy}, \\
\mathfrak{a}_{3mn} &= \frac{\int_0^1 \int_0^1 W^0(x, y) \eta_{3mn}(x, y) dx dy}{\int_0^1 \int_0^1 \eta_{3mn}^2(x, y) dx dy}.
\end{aligned}$$

Все последующие приближения определяются от неоднородных систем дифференциальных уравнений с известными правыми частями. Так как общее решение такой системы является суммой двух решений: частного решения

неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы, то произвольные константы могут быть выбраны таким способом, что начальные условия всех последующих приближений будут нулевыми.

Известно [6], что в процессе нестационарного воздействия на тонкие тела возбуждаются не все возможные моды колебаний. Кроме того, возбуждаются и доминируют в процессе колебаний моды, которые сильно взаимосвязаны любым из, так называемых, условий внутреннего резонанса, приводя к перекачке энергии от одной подсистемы в другую, при этом типы форм колебаний, которые будут инициированы, зависят из характера внешнего воздействия.

Предположим далее, что процесс колебаний происходит таким способом, что возбуждаются и доминируют только три собственных моды, соответствующие обобщенным смещениям $X_{1s_1s_2}$, $X_{2l_1l_2}$ и $X_{3k_1k_2}$. В этом случае, правые части уравнений (28) - (30) значительно упрощаются и принимают вид

$$\ddot{X}_{1s_1s_2} + \alpha_1 D^\gamma X_{1s_1s_2} + \omega_{1s_1s_2}^2 X_{1s_1s_2} = -\zeta_{1s_1s_2}^{k_1k_2} X_{3k_1k_2}^2, \quad (39)$$

$$\ddot{X}_{2l_1l_2} + \alpha_2 D^\gamma X_{2l_1l_2} + \omega_{2l_1l_2}^2 X_{2l_1l_2} = -\zeta_{2l_1l_2}^{k_1k_2} X_{3k_1k_2}^2, \quad (40)$$

$$\ddot{X}_{3k_1k_2} + \alpha_3 D^\gamma X_{3k_1k_2} + \omega_{3k_1k_2}^2 X_{3k_1k_2} = -\zeta_{13k_1k_2}^{s_1s_2} X_{1s_1s_2} X_{3k_1k_2} - \zeta_{23k_1k_2}^{l_1l_2} X_{2l_1l_2} X_{3k_1k_2}, \quad (41)$$

где

$$\zeta_{1s_1s_2}^{k_1k_2} = 4 \left(A_{1s_1s_2}^{k_1k_2k_1k_2} L_{1s_1s_2}^I + A_{2s_1s_2}^{k_1k_2k_1k_2} L_{2s_1s_2}^I \right), \quad (42)$$

$$\zeta_{2l_1l_2}^{k_1k_2} = 4 \left(A_{1l_1l_2}^{k_1k_2k_1k_2} L_{1l_1l_2}^{II} + A_{2l_1l_2}^{k_1k_2k_1k_2} L_{2l_1l_2}^{II} \right), \quad (43)$$

$$\zeta_{13k_1k_2}^{s_1s_2} = 4 \left(C_{k_1k_2}^{k_1k_2s_1s_2} L_{1s_1s_2}^I + D_{k_1k_2}^{k_1k_2s_1s_2} L_{2s_1s_2}^I \right), \quad (44)$$

$$\zeta_{23k_1k_2}^{l_1l_2} = 4 \left(C_{k_1k_2}^{k_1k_2l_1l_2} L_{1l_1l_2}^{II} + D_{k_1k_2}^{k_1k_2l_1l_2} L_{2l_1l_2}^{II} \right), \quad (45)$$

$$A_{1s_1s_2}^{k_1k_2k_1k_2} = \pi^3 k_1 \left(k_1^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 k_2^2 \right) a_{1s_1s_2}^{k_1k_2k_1k_2} - \frac{1+\nu}{2} \pi^3 \beta_1^2 k_1 k_2^2 a_{2s_1s_2}^{k_1k_2k_1k_2}, \quad (46)$$

$$A_{2l_1l_2}^{k_1k_2k_1k_2} = \pi^3 \beta_1 k_2 \left(\beta_1^2 k_2^2 + \frac{1-\nu}{2} k_1^2 \right) a_{3l_1l_2}^{k_1k_2k_1k_2} - \frac{1+\nu}{2} \pi^3 \beta_1 k_1^2 k_2 a_{4l_1l_2}^{k_1k_2k_1k_2}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} C_{k_1k_2}^{k_1k_2s_1s_2} &= \pi^3 s_1 (k_1^2 + \nu \beta_1^2 k_2^2) a_{5k_1k_2}^{k_1k_2s_1s_2} + (1-\nu) \pi^3 \beta_1^2 k_1 k_2 s_2 a_{6k_1k_2}^{k_1k_2s_1s_2} - \\ &- \pi^3 k_1 \left(s_1^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 s_2^2 \right) a_{7k_1k_2}^{k_1k_2s_1s_2} - \frac{1+\nu}{2} \beta_1^2 \pi^3 s_1 s_2 k_2 a_{8k_1k_2}^{k_1k_2s_1s_2}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} D_{k_1k_2}^{k_1k_2l_1l_2} &= \pi^3 \beta_1 l_2 (\nu k_1^2 + \beta_1^2 k_2^2) a_{5k_1k_2}^{k_1k_2l_1l_2} + (1-\nu) \beta_1 \pi^3 l_1 k_1 k_2 a_{6k_1k_2}^{k_1k_2l_1l_2} - \\ &- \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \pi^3 k_1 l_1 l_2 a_{7k_1k_2}^{k_1k_2l_1l_2} - \pi^3 \beta_1 k_2 \left(\frac{1-\nu}{2} l_1^2 + \beta_1^2 l_2^2 \right) a_{8k_1k_2}^{k_1k_2l_1l_2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Опуская далее нижние индексы s_1s_2 , l_1l_2 и k_1k_2 для простоты изложения, уравнения (39)- (41) могут быть переписаны в виде

$$\ddot{X}_1 + \alpha_1 D^\nu X_1 + \omega_1^2 X_1 + \zeta_1 X_3^2 = 0, \quad (50)$$

$$\ddot{X}_2 + \alpha_2 D^\nu X_2 + \omega_2^2 X_2 + \zeta_2 X_3^2 = 0, \quad (51)$$

$$\ddot{X}_3 + \alpha_3 D^\nu X_3 + \omega_3^2 X_3 + X_3 (\zeta_{13} X_1 + \zeta_{23} X_2) = 0. \quad (52)$$

1.2. Метод решения

Приближенное решение уравнений (50)-(52) для малых, но конечных амплитуд, слабо изменяющихся со временем, может быть представлено в виде разложения третьего порядка относительно различных временных масштабов в следующем виде [6]:

$$X_i = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^2 X_{i2}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \dots, \quad (53)$$

где $i=1,2,3$, ε - малый безразмерный параметр, $T_n = \varepsilon^n t$ - новые независимые переменные, среди них $T_0 = t$ - быстрое время, характеризующее движения с собственными частотами, $T_1 = \varepsilon t$ и $T_2 = \varepsilon^2 t$ - медленные масштабы, характеризующие модуляцию амплитуд и фаз.

Первая и вторая производные по времени определены, соответственно, следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (54)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (55)$$

Далее в качестве дробной производной мы будем использовать определение Грюнвальда-Летникова, которое определено на полуоси [7]

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma \varphi(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^\gamma \varphi(t)}{h^\gamma} \quad 0 < \gamma < 1, \quad (56)$$

где $\Delta_h^\gamma \varphi(t)$ - конечная разность порядка γ функции $\varphi(t)$ с шагом h и с центром в точке t , $\Delta_h^\gamma \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\gamma}{k} \varphi(t - kh)$ и $\binom{\gamma}{k}$ - биномиальные коэффициенты, которые определены формулой

$$\binom{\gamma}{k} = (-1)^{k-1} \frac{\gamma \Gamma(k - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(k + \gamma)}.$$

Подставляя (54) в (56), получаем, следуя [26], что

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)^\gamma &= (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^\gamma = \\ &= D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \gamma [(\gamma - 1) D_0^{\gamma-2} D_1^2 + 2 D_0^{\gamma-1} D_2] + \dots, \end{aligned} \quad (57)$$

где $D_n = \partial / \partial T_n$ и D_0^γ , $D_0^{\gamma-1}$, $D_0^{\gamma-2}$, ... - дробные производные Грюнвальда-Летникова, которые для "достаточно хороших" функций, например, степенных функций типа $e^{\pm i\omega t}$, совпадают с дробными производными Римана-Лиувилля по времени t , определенными на полуоси [7].

Полагая, что вязкость среды, окружающей рассматриваемую пластинку, является малой, то есть, $\varkappa_i = \varepsilon^k \mu_i \tau_i^\gamma$, где τ_i - время релаксации i -ого обобщённого перемещения и μ_i - конечная величина, а выбор k зависит от порядка малости коэффициентов вязкости \varkappa_i , подставляя (53)-(57) в уравнения (50)-(52), после приравнивания коэффициентов с одинаковыми степенями ε к нулю, мы приходим к системе рекуррентных уравнений различного порядка:

порядок ε

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 0, \quad (58)$$

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 0, \quad (59)$$

$$D_0^2 X_{31} + \omega_3^2 X_{31} = 0; \quad (60)$$

порядок ε^2

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2D_0 D_1 X_{11} - \zeta_1 X_{31}^2 - \mu_1(2-k)\tau_1^\gamma D_0^\gamma X_{11}, \quad (61)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2D_0 D_1 X_{21} - \zeta_2 X_{31}^2 - \mu_2(2-k)\tau_2^\gamma D_0^\gamma X_{21}, \quad (62)$$

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = -2D_0 D_1 X_{31} - \zeta_{13} X_{11} X_{31} - \zeta_{23} X_{21} X_{31} - \mu_3(2-k)\tau_3^\gamma D_0^\gamma X_{31}, \quad (63)$$

порядок ε^3

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = & -2D_0 D_1 X_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{11} - 2\zeta_1 X_{31} X_{32} - \\ & - \mu_1(2-k)\tau_1^\gamma (D_0^\gamma X_{12} + D_0^{\gamma-1} D_1 X_{11}) - \mu_1(k-1)\tau_1^\gamma D_0^\gamma X_{11}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = & -2D_0 D_1 X_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{21} - 2\zeta_2 X_{31} X_{32} - \\ & - \mu_2(2-k)\tau_2^\gamma (D_0^\gamma X_{22} + D_0^{\gamma-1} D_1 X_{21}) - \mu_2(k-1)\tau_2^\gamma D_0^\gamma X_{21}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{33} + \omega_3^2 X_{33} = & -2D_0 D_1 X_{32} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{31} - \\ & - \zeta_{13} (X_{11} X_{32} + X_{12} X_{31}) - \zeta_{23} (X_{21} X_{32} + X_{22} X_{31}) - \\ & - \mu_3(2-k)\tau_3^\gamma (D_0^\gamma X_{32} + D_0^{\gamma-1} D_1 X_{31}) - \mu_3(k-1)\tau_3^\gamma D_0^\gamma X_{31}. \end{aligned} \quad (66)$$

Чтобы построить равномерно пригодное решение, необходимо на каждом шаге использовать решение с предыдущего шага и исключать вековые члены во время интегрирования [6].

Мы будем искать решение уравнений (58)-(60) в виде

$$X_{j1} = A_j(T_1, T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_1, T_2) \exp(-i\omega_j T_0) \quad (j=1, 2, 3), \quad (67)$$

где $A_j(T_1, T_2)$ ($j=1, 2, 3$)- неизвестные комплексные функции и $\bar{A}_j(T_1, T_2)$ - сопряжённые функции с $A_j(T_1, T_2)$.

Чтобы решить системы уравнений (61)-(63) и (64)-(66), необходимо определить действие дробной производной D_0^γ (8) на функции X_{j1} , то есть, вычислить $D_0^\gamma e^{i\omega_j t}$. В работе [33] показано, что

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t} + \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^\gamma}{u + i\omega_j} e^{-u} du. \quad (68)$$

Первое слагаемое в (68) эквивалентно действию дробной производной с нижним пределом, стремящимся к $-\infty$,

$$D_0^\gamma x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^\gamma}, \quad (69)$$

действие которого на экспоненциальную функцию сводится к

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t}, \quad (70)$$

а второе слагаемое в (68), как это было показано в работе [31], не влияет на решение, построенное методом многих временных масштабов в пределах первого и второго приближений.

Для дальнейшего анализа необходимо определить порядок слабого демпфирования.

1.2.1. Вязкость порядка ε

Рассмотрим сначала случай с вязкостью порядка ε . Тогда при $k=1$ уравнения (61)-(63) запишутся так

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = -2D_0 D_1 X_{31} - X_{31} (\zeta_{13} X_{11} + \zeta_{23} X_{21}) - \mu_3 \tau_3^\gamma D_0^\gamma X_{31}. \quad (71)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2D_0 D_1 X_{21} - \zeta_2 X_{31}^2 - \mu_2 \tau_2^\gamma D_0^\gamma X_{21}, \quad (72)$$

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = -2D_0 D_1 X_{31} - X_{31} (\zeta_{13} X_{11} + \zeta_{23} X_{21}) - \mu_3 \tau_3^\gamma D_0^\gamma X_{31}. \quad (73)$$

Подставляя (67) в правые части уравнений (71)-(73) с учетом (70), получим

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) - \zeta_1 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] - \mu_1 \tau_1^\gamma A_1 (i\omega_1)^\gamma \exp(i\omega_1 T_0) + \text{cc}, \quad (74)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) - \zeta_2 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] - \mu_2 \tau_2^\gamma A_2 (i\omega_2)^\gamma \exp(i\omega_2 T_0) + \text{cc}, \quad (75)$$

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = -2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) - \mu_3 \tau_3^\gamma A_3 (i\omega_3)^\gamma \exp(i\omega_3 T_0) - \zeta_{13} \{A_1 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_3) T_0] + A_1 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_1 - \omega_3) T_0]\} - \zeta_{23} \{A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3) T_0] + A_2 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_2 - \omega_3) T_0]\} + \text{cc}, \quad (76)$$

где cc - сопряженная часть к предыдущим членам.

Из уравнений (74)-(76) видно, что на этом шаге возможны следующие типы внутреннего резонанса:

(1) внутренний резонанс два-к-одному, когда одна собственная частота в два раза больше другой собственной частоты,

$$\omega_1 = 2\omega_3 \quad (\omega_2 \neq \omega_1, \omega_2 \neq 2\omega_3), \quad (77)$$

$$\omega_2 = 2\omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq 2\omega_3); \quad (78)$$

(2) внутренний резонанс один-к-одному-к-двум, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = 2\omega_3, \text{ или } 1:1:2. \quad (79)$$

1.2.2. Вязкость порядка ε^2

Теперь рассмотрим колебания нелинейной пластины, подставляя $k = 2$ уравнения движения (61)-(63):

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2D_0 D_1 X_{11} - \zeta_1 X_{31}^2, \quad (80)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2D_0 D_1 X_{21} - \zeta_2 X_{31}^2, \quad (81)$$

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = -2D_0 D_1 X_{31} - X_{31} (\zeta_{13} X_{11} + \zeta_{23} X_{21}). \quad (82)$$

Подставляя (67) в правые части уравнений (80)-(82), получим

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) - \zeta_1 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] + \text{cc}, \quad (83)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) - \zeta_2 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] + \text{cc}, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = & -2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) - \\ & - \zeta_{13} \{A_1 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_3) T_0] + A_1 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_1 - \omega_3) T_0]\} - \\ & - \zeta_{23} \{A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3) T_0] + A_2 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_2 - \omega_3) T_0]\} + \text{cc}. \end{aligned} \quad (85)$$

Предположим, что собственные частоты ω_j ($j=1,2,3$) обладают такими величинами, что любая из комбинаций из (77)-(79) не имеет места. Тогда функции $\exp(\pm i\omega_j T_0)$, стоящие в правых частях уравнений (83)-(85), порождают вековые члены. Чтобы их устранить, необходимо приравнять к нулю коэффициенты, стоящие перед $\exp(\pm i\omega_j T_0)$, то есть,

$$D_1 A_j(T_1, T_2) = 0, \quad (86)$$

откуда следует, что функции A_j ($j=1,2,3$) не зависят от T_1 .

С учетом соотношения (86) решение уравнений (83)-(85) при $j=1,2,3$ имеет вид

$$X_{12} = F_1(T_2) \exp(i\omega_1 T_0) + k_1 A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + k_2 A_3 \bar{A}_3 + \text{cc}, \quad (87)$$

$$X_{22} = F_2(T_2) \exp(i\omega_2 T_0) + k_3 A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + k_4 A_3 \bar{A}_3 + \text{cc}, \quad (88)$$

$$\begin{aligned} X_{32} = & F_3(T_2) \exp(i\omega_3 T_0) + k_5 A_1 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_3) T_0] + \\ & + k_6 A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3) T_0] + k_7 A_3 \bar{A}_1 \exp[i(\omega_3 - \omega_1) T_0] + \\ & + k_8 A_3 \bar{A}_2 \exp[i(\omega_3 - \omega_2) T_0] + \text{cc}, \end{aligned} \quad (89)$$

где $F_j(T_2)$ ($j=1,2,3$) - новые функции, которые необходимо определить, а коэффициенты k_i ($i=1,2,\dots,8$) имеют вид

$$k_1 = \frac{\zeta_1}{4\omega_3^2 - 1}, \quad k_2 = -\frac{\zeta_1}{\omega_1^2}, \quad k_3 = \frac{\zeta_2}{4\omega_3^2 - 1}, \quad k_4 = -\frac{\zeta_2}{\omega_2^2}, \quad k_5 = \frac{\zeta_{13}}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_3)},$$

$$k_6 = \frac{\zeta_{23}}{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_3)}, \quad k_7 = \frac{\zeta_{13}}{\omega_1(\omega_1 - 2\omega_3)}, \quad k_8 = \frac{\zeta_{23}}{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_3)}.$$

Подставляя (66) и (86)-(88) с учетом (85) в уравнения (64)-(66) при $k=2$, мы имеем

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = & - \left[2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 \tau_1' (i\omega_1)^\gamma A_1 + 2\zeta_1 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 \right] \exp(i\omega_1 T_0) - \\ & - 2\zeta_1 \left\{ F_3 A_3 \exp(2i\omega_3 T_0) + \bar{F}_3 A_3 + k_5 A_1 A_3^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_3) T_0] + \right. \\ & + k_6 A_2 A_3^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_3) T_0] + k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 \exp(i\omega_2 T_0) + \\ & \left. + k_7 \bar{A}_1 A_3^2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_1) T_0] + k_8 A_3^2 \bar{A}_2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_2) T_0] \right\} + \text{cc}, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = & - \left[2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 \tau_2^\gamma (i\omega_2)^\gamma A_2 + 2\zeta_2 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 \right] \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - 2\zeta_2 \left\{ F_3 A_3 \exp(2i\omega_3 T_0) + \bar{F}_3 A_3 + k_5 A_1 A_3^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_3)T_0] \right\} + \\
& + k_6 A_2 A_3^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_3)T_0] + k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 \exp(i\omega_1 T_0) + \\
& + k_7 \bar{A}_1 A_3^2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_1)T_0] + k_8 A_3^2 \bar{A}_2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_2)T_0] \left. \right\} + cc,
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{33} + \omega_3^2 X_{33} = & - \left[2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 \tau_3^\gamma (i\omega_3)^\gamma A_3 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) A_3^2 \bar{A}_3 + \right. \\
& + \left. \zeta_{13} k_7 A_1 \bar{A}_1 A_3 + \zeta_{23} k_8 A_2 \bar{A}_2 A_3 \right] \exp(i\omega_3 T_0) - (\zeta_{13} k_1 + \zeta_{23} k_3) A_3^3 \exp(3i\omega_3 T_0) - \\
& - \zeta_{13} \left\{ (F_3 A_1 + F_1 A_3) \exp[i(\omega_3 + \omega_1)T_0] + (A_3 \bar{F}_1 + \bar{A}_1 F_3) \exp[i(\omega_3 - \omega_1)T_0] \right\} - \\
& - \zeta_{23} \left\{ (F_3 A_2 + F_2 A_3) \exp[i(\omega_3 + \omega_2)T_0] + (A_3 \bar{F}_2 + \bar{A}_2 F_3) \exp[i(\omega_3 - \omega_2)T_0] \right\} - \\
& - \zeta_{13} \left\{ k_5 A_1^2 A_3 \exp[i(2\omega_1 + \omega_3)T_0] + k_7 A_1^2 \bar{A}_3 \exp[i(2\omega_1 - \omega_3)T_0] \right\} - \\
& - \zeta_{23} \left\{ k_6 A_2^2 A_3 \exp[i(2\omega_2 + \omega_3)T_0] + k_8 A_2^2 \bar{A}_3 \exp[i(2\omega_2 - \omega_3)T_0] \right\} - \\
& - (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_5) A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)T_0] - \\
& - (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7) \bar{A}_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)T_0] - \\
& - (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5) A_1 \bar{A}_2 A_3 \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)T_0] - \\
& - (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_7) \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \exp[i(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)T_0] + cc.
\end{aligned} \tag{92}$$

Из уравнений (90)-(92) следует, что на этом шаге могут иметь место следующие типы внутреннего резонанса:

(1) внутренний резонанс один-к-одному, когда одна собственная частота приблизительно равна другой собственной частоте,

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (\omega_3 \neq \omega_1, \omega_3 \neq \omega_2), \tag{93}$$

$$\omega_1 = \omega_3 \quad (\omega_2 \neq \omega_1, \omega_2 \neq \omega_3), \tag{94}$$

$$\omega_2 = \omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq \omega_3); \tag{95}$$

(2) внутренний резонанс один-к-одному-к-одному

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3; \tag{96}$$

(3) комбинационный резонанс аддитивно-разностного типа, то есть

$$\omega_1 = \omega_2 + 2\omega_3, \text{ или } \omega_2 = \omega_1 - 2\omega_3, \text{ или } 2\omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad (97)$$

$$\omega_1 = 2\omega_3 - \omega_2, \text{ или } \omega_2 = 2\omega_3 - \omega_1, \text{ или } 2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (98)$$

$$\omega_1 = \omega_2 - 2\omega_3, \text{ или } \omega_2 = 2\omega_3 + \omega_1, \text{ или } 2\omega_3 = \omega_2 - \omega_1. \quad (99)$$

Глава 2. Нелинейные разрешающие дифференциальные уравнения, описывающие амплитудно-фазовую модуляцию для различных типов внутреннего резонанса порядка ε

Чтобы вывести нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие амплитудно-фазовую модуляцию рассматриваемой нелинейной пластины, нужно рассмотреть отдельно каждый тип внутреннего резонанса, который может наступить в случае слабого демпфирования порядка ε .

2.1. Внутренний резонанс 2:1

Рассмотрим случай (77), когда $\omega_1 = 2\omega_3$, в то время как $\omega_2 \neq \omega_1$ и $\omega_2 \neq 2\omega_3$. Случай (78) можно будет рассмотреть подобным образом.

Тогда устраняя вековые члены в уравнениях (74)-(76), мы получаем следующие разрешающие уравнения:

$$2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 + \zeta_1 A_3^2 = 0, \quad (100)$$

$$2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 = 0, \quad (101)$$

$$2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + \zeta_{13} A_1 \bar{A}_3 = 0. \quad (102)$$

Из системы уравнений (100)-(102) видно, что второе уравнение (101) независимо от двух других, в то время как первое (100) и третье (102) образуют систему двух нелинейных уравнений. Подобная ситуация была отмечена в [27] для слабо демпфированной нелинейной пластины в случае внутреннего резонанса два-к-одному, когда уравнения, описывающие движение в плоскости пластины, связаны.

Умножим уравнения (100)-(102) соответственно на \bar{A}_1 , \bar{A}_2 и \bar{A}_3 и найдем сопряжённые к ним уравнения. Складывая каждую пару взаимно сопряженных уравнений друг с другом и вычитая одно из другого, а также полагая, что

$$A_i = a_i e^{i\varphi_i} \quad (i=1,2,3), \quad (103)$$

в результате получим

$$(a_1^2)' + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 a_1 a_3^2 \sin \delta = 0, \quad (104)$$

$$(a_3^2)' + s_3 a_3^2 - \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_1 a_3^2 \sin \delta = 0, \quad (105)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} \zeta_1 \omega_1^{-1} a_3^2 a_1^{-1} \cos \delta = 0, \quad (106)$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2} \sigma_3 - \frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_1 \cos \delta = 0, \quad (107)$$

$$(a_2^2)' + s_2 a_2^2 = 0, \quad (108)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \sigma_2 = 0, \quad (109)$$

где точка обозначает дифференцирование относительно T_1 , $\delta = 2\varphi_3 - \varphi_1$, и

$$s_i = \mu_i \tau_i^\gamma \omega_i^{\gamma-1} \sin \psi, \quad \sigma_i = \mu_i \tau_i^\gamma \omega_i^{\gamma-1} \cos \psi, \quad \psi = \frac{1}{2} \pi \gamma \quad (i=1,2,3). \quad (110)$$

Из уравнений (104)-(107) мы находим

$$\frac{\frac{\omega_1}{\zeta_1} [(a_1^2)' + s_1 a_1^2]}{\frac{\omega_1}{\zeta_1} [(a_1^2)' + s_1 a_1^2]} = -1, \quad (111)$$

$$\dot{\delta} - \Sigma - \frac{1}{a_1} \left[\frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_1^2 - \zeta_1 \omega_1^{-1} a_3^2 \right] \cos \delta = 0, \quad (112)$$

где $\Sigma = \sigma_3 - \frac{1}{2}\sigma_1$.

Вводя новые функции $\xi_1(T_1)$ и $\xi_3(T_1)$ так, что

$$a_1^2 = \frac{\zeta_1}{\omega_1} \xi_1(T_1) e^{-s_1 T_1}, \quad a_3^2 = \frac{\zeta_{13}}{\omega_3} \xi_1(T_1) e^{-s_3 T_1}, \quad (113)$$

и подставляя (113) в (111), получим

$$\dot{\xi}_3 + \dot{\xi}_1 e^{(s_3 - s_1)T_1} = 0, \quad (114)$$

откуда следует, что

$$\xi_3 = - \left[\xi_1 e^{(s_3 - s_1)T_1} - (s_3 - s_1) \int_0^{T_1} \xi_1 e^{(s_3 - s_1)dT_1} \right] + E_0, \quad (115)$$

где $E_0 = \xi_{10} + \xi_{30}$ - начальная энергия пластины, определяемая начальными условиями

$$\xi_1|_{T_1=0} = \xi_{10}, \quad \xi_2|_{T_1=0} = \xi_{20}, \quad \xi_3|_{T_1=0} = \xi_{30}, \quad \delta|_{T_1=0} = \delta_0. \quad (116)$$

Из уравнений (92) и (93) находим

$$a_1 = \frac{\omega_3}{\zeta_{13}} \left(2 \frac{\dot{a}_3}{a_3} + s_3 \right) \frac{1}{\sin \delta} = 2 \frac{\omega_3}{\zeta_{13}} \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \frac{1}{\sin \delta} \quad (117)$$

$$a_3^2 a_1^{-1} = - \frac{\omega_1}{\zeta_1} (2 \dot{a}_1 + s_1 a_1) \frac{1}{\sin \delta} = 2 \frac{\omega_1}{\zeta_1} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} \frac{1}{\sin \delta} \quad (118)$$

Учитывая (117) и (118), можно переписать уравнение (112) следующим образом:

$$\operatorname{tg} \delta (\dot{\delta} - \Sigma) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3}, \quad (119)$$

интегрируя которое, находим

$$G_0 \exp\left(-\Sigma \int_0^{T_1} \operatorname{tg} \delta dT_1\right) = \sqrt{\xi_1 \xi_3} \cos \delta, \quad (120)$$

где G_0 - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий (116).

Подставляя (113) в (104) и (105), имеем

$$\dot{\xi}_1 = -b \sqrt{\xi_1 \xi_3} e^{\left(\frac{1}{2}s_1 - s_3\right)T_1} \sin \delta, \quad (121)$$

$$\dot{\xi}_3 = -b \sqrt{\xi_1 \xi_3} e^{\frac{1}{2}s_1 T_1} \sin \delta, \quad (122)$$

где $b = \frac{\zeta_{13}}{\omega_3} \sqrt{\frac{\zeta_1}{\omega_1}}$.

Нелинейная система уравнений (112), (115) и (121) с начальными условиями (116) полностью описывают колебательный процесс рассматриваемой механической системы, находящейся в условиях внутреннего резонанса два-к-одному, и может быть решена численными методами.

Частный случай. В частном случае, когда $\gamma = 1$, $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ и, следовательно, $\Sigma = 0$. Учитывая, что при этом $s_1 = s_3 = 0$, из соотношения (114) находим

$$\xi_1 + \xi_3 = E_0, \quad (123)$$

откуда следует, что

$$\xi_1 = E_0 \xi, \quad \xi_3 = E_0 (1 - \xi) \quad (124)$$

или

$$a_1^2 = E_0 \frac{\zeta_1}{\omega_1} \xi \exp(-sT_1), \quad a_3^2 = E_0 \frac{\zeta_{13}}{\omega_1} (1 - \xi) \exp(-sT_1). \quad (125)$$

Интегрируя уравнение (114) с учетом соотношения (124), получим закон изменения энергии

$$E = \frac{\omega_1}{\zeta_1} a_1^2 + \frac{\omega_3}{\zeta_{13}} a_3^2 = E_0 e^{-sT_1}, \quad (126)$$

где E - энергия системы.

В рассматриваемом случае уравнения (112) и (121) примут вид

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{2} b \sqrt{E_0} \frac{1-3\xi}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{1}{2}sT_1} \cos \delta, \quad (127)$$

$$\dot{\xi} = -b \sqrt{E_0} \sqrt{\xi} (1-\xi) e^{-\frac{1}{2}sT_1} \sin \delta, \quad (128)$$

в то время уравнение (120) можно переписать следующим образом:

$$\delta \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3}. \quad (129)$$

Интегрируя (129) с учетом (124), получим

$$G(\xi, \delta) = \sqrt{\xi} (1-\xi) \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0). \quad (130)$$

Исключая переменную δ из (128) и (130) и интегрируя по T_1 , имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 2\xi^2 + \xi - G_0^2}} = \frac{2b\sqrt{E_0}}{s} \left(e^{-\frac{1}{2}sT_1} - 1 \right). \quad (131)$$

Интеграл в левой части уравнения (131) может быть преобразован к неполному эллиптическому интегралу первого вида и легко вычислен, используя специальные таблицы [1].

Для качественного анализа решения введем в рассмотрение фазовую жидкость, точки которой перемещаются в плоскости $\xi\delta$ в пределах $0 \leq \xi \leq 1$ вдоль бесконечно длинного канала $-\infty < \delta < \infty$ со скоростью \mathbf{v} ($\mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}$ и $\mathbf{v}_\delta = \dot{\delta}$) [12]. Каждая точка с координатами на фазовой плоскости соответствует некоторой величине амплитуд a_1 и a_3 двух взаимодействующих форм

колебаний в фиксированный момент времени и разности фаз этих форм друг относительно друга в тот же самый момент.

На фазовой плоскости $\xi\delta$, уравнение (130) определяет функцию потока $G(\xi, \delta)$ так, что

$$\mathbf{v}_\xi = \dot{\xi} = b\sqrt{E_0} \frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-\frac{1}{2}sT_1}, \quad \mathbf{v}_\delta = \dot{\delta} = -b\sqrt{E_0} \frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-\frac{1}{2}sT_1}, \quad (132)$$

соотношения (132) выполняются вдоль каждой линии потока. Другими словами, изображение линий потока неизменно со временем, но поле скоростей, построенных вдоль линий потока, зависит от времени таким образом, что в каждой точке $\xi\delta$ этого поля направление вектора скорости \mathbf{v} остается постоянным, а его модуль уменьшается по экспоненциальному закону, приводя к квазиустойчивым колебаниям вязкоупругой пластины.

Следовательно, при $\gamma = 1$ функция тока $G(\xi, \delta) = G_0(\xi_0, \delta_0)$, определяемая соотношением (130), является вторым первым интегралом уравнений (104)-(107), вместе с первым интегралом (126), соответствующим закону изменения энергии.

Из сравнение решений (120) и (130) видно, что в общем случае линии потока фазовой жидкости исчезают, и а ее частицы начинают описывать сложные траектории на фазовой плоскости, то есть квазиустойчивое движение пластины переходит в нестационарное.

Таким образом выявлено, что при свободных колебаниях пластины, находящейся в условиях внутреннего резонанса два-к-одному, могут бы реализованы три режима: постоянные колебания (отсутствие демпфирования при $\gamma = 0$), квази-стационарные колебания (демпфирование определено

обычной производной, когда $\gamma = 1$) и переходный процесс (демпфирование определено дробной производной, когда $0 < \gamma < 1$).

Приближенное решение системы нелинейных уравнений (104)-(109) может быть найдено при помощи метода вариаций произвольных постоянных. Тогда в качестве начального приближения рассмотрим однородную часть системы (104)-(109)

$$\left(a_1^2\right)' + s_1 a_1^2 = 0, \quad (133)$$

$$\left(a_3^2\right)' + s_3 a_3^2 = 0, \quad (134)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 = 0, \quad (135)$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2} \sigma_3 = 0, \quad (136)$$

$$\left(a_2^2\right)' + s_2 a_2^2 = 0, \quad (137)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \sigma_2 = 0, \quad (138)$$

решение которой имеет вид

$$a_1^2 = a_{10}^2 e^{-s_1 T_1}, \quad (139)$$

$$a_3^2 = a_{30}^2 e^{-s_3 T_1}, \quad (140)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 T_1 + \varphi_{10}, \quad (141)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 T_1 + \varphi_{30}, \quad (142)$$

$$a_2^2 = a_{20}^2 e^{-s_2 T_1}, \quad (143)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 T_1 + \varphi_{20}, \quad (144)$$

где a_{i0} и φ_{i0} ($i=1,2,3$) – начальные амплитуды и фазы колебаний, определяемые из начальных условий (38).

Все последующие приближения определяются от неоднородных систем дифференциальных уравнений с известными правыми частями. Так, поставляя найденное решение на нулевом шаге (139)-(144) в неоднородную систему уравнений (104)-(107), получим

$$\left(a_1^2\right)' + s_1 a_1^2 = -\omega_1^{-1} \zeta_1 a_{10} a_{30}^2 e^{(-s_3 - 1/2 s_1) T_1} \sin(\Sigma T_1 + \delta_0), \quad (145)$$

$$\left(a_3^2\right)' + s_3 a_3^2 = \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_{10} a_{30}^2 e^{(-s_3 - 1/2 s_1) T_1} \sin(\Sigma T_1 + \delta_0), \quad (146)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{2} \zeta_1 \omega_1^{-1} a_{30}^2 a_{10}^{-1} e^{(-s_3 + 1/2 s_1) T_1} \cos(\Sigma T_1 + \delta_0), \quad (147)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_{10} e^{-1/2 s_1 T_1} \cos(\Sigma T_1 + \delta_0), \quad (148)$$

где $\delta_0 = 2\varphi_{30} - \varphi_{10}$ - значение сдвига фаз в момент времени $T_1 = 0$ и $\Sigma = \sigma_3 - \frac{1}{2} \sigma_1$.

Задавая решение уравнений (145) и (146) в виде

$$a_1^2 = C_1(T_1) e^{-s_1 T_1}, \quad a_3^2 = C_3(T_1) e^{-s_3 T_1}, \quad (149)$$

где $C_1(T_1)$ и $C_3(T_1)$ - произвольные искомые функции, полагая начальный сдвиг фаз равным нулю и подставляя (149) в уравнения (145) и (146), получим

$$\dot{C}_1(T_1) = -\omega_1^{-1} \zeta_1 a_{10} a_{30}^2 e^{(-s_3 + 1/2 s_1) T_1} \sin \Sigma T_1, \quad (150)$$

$$\dot{C}_3(T_1) = \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_{10} a_{30}^2 e^{-1/2 s_1 T_1} \sin \Sigma T_1, \quad (151)$$

Интегрируя уравнения (150) и (151), а также уравнения (147) и (148)

находим

$$\begin{aligned} C_1(T_1) &= -\omega_1^{-1} \zeta_1 a_{10} a_{30}^2 \int e^{(-s_3+1/2s_1)T_1} \sin \Sigma T_1 dT_1 = \\ &= -\omega_1^{-1} \zeta_1 a_{10} a_{30}^2 \frac{e^{(-s_3+1/2s_1)T_1}}{\Sigma_1^2 + \Sigma^2} (\Sigma_1 \sin \Sigma T_1 - \Sigma \cos \Sigma T_1) + c_{10}, \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} C_3(T_1) &= \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_{10} a_{30}^2 \int e^{-1/2s_1 T_1} \sin \Sigma T_1 dT_1 = \\ &= -\omega_3^{-1} \zeta_{13} a_{10} a_{30}^2 \frac{e^{-1/2s_1 T_1}}{\frac{1}{4}s_1^2 + \Sigma^2} \left(\frac{1}{2}s_1 \sin \Sigma T_1 + \Sigma \cos \Sigma T_1 \right) + c_{30}, \end{aligned} \quad (153)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 T_1 + \frac{1}{2} \zeta_1 \omega_1^{-1} a_{30}^2 a_{10}^{-1} \int e^{(-s_3+1/2s_1)T_1} \cos \Sigma T_1 dT_1 + c_{\varphi_{10}}, \quad (154)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 T_1 + \frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_{10} \int e^{-1/2s_1 T_1} \cos \Sigma T_1 dT_1 + c_{\varphi_{30}}, \quad (155)$$

где c_{10} , c_{30} , $c_{\varphi_{10}}$ и $c_{\varphi_{30}}$ - постоянные интегрирования.

Вычисляя интегралы в соотношениях (152)-(155), окончательно получим

$$a_1^2 = a_{10}^2 e^{-s_1 T_1} - \omega_1^{-1} \zeta_1 a_{10} a_{30}^2 \frac{e^{-\Sigma_1 T_1}}{\Sigma_1^2 + \Sigma^2} (\Sigma_1 \sin \Sigma T_1 - \Sigma \cos \Sigma T_1) + c_{10}, \quad (156)$$

$$a_3^2 = a_{30}^2 e^{-s_3 T_1} - \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_{10} a_{30}^2 \frac{e^{-1/2s_1 T_1}}{\frac{1}{4}s_1^2 + \Sigma^2} \left(\frac{1}{2}s_1 \sin \Sigma T_1 + \Sigma \cos \Sigma T_1 \right) + c_{30}, \quad (157)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 T_1 + \varphi_{10} + \frac{1}{2} \zeta_1 \omega_1^{-1} a_{30}^2 a_{10}^{-1} \frac{e^{-\Sigma_1 T_1}}{\Sigma_1^2 + \Sigma^2} (\Sigma_1 \cos \Sigma T_1 + \Sigma \sin \Sigma T_1) + c_{\varphi_{10}}, \quad (158)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 T_1 + \varphi_{30} + \frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_{10} \frac{e^{-1/2s_1 T_1}}{\frac{1}{4}s_1^2 + \Sigma^2} \left(-\frac{1}{2}s_1 \cos \Sigma T_1 + \Sigma \sin \Sigma T_1 \right) + c_{\varphi_{30}}, \quad (159)$$

где $\Sigma_1 = -s_3 + 1/2s_1$.

Так как общее решение такой системы является суммой двух решений: частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы, то произвольные константы могут быть выбраны таким способом, что начальные условия всех последующих приближений будут нулевыми. Так, для первого приближения константы принимают вид

$$c_{10} = -\frac{\zeta_1 \Sigma a_{10} a_{30}^2}{\omega_1 (\Sigma_1^2 + \Sigma^2)}, \quad c_{30} = \frac{\zeta_{13} \Sigma a_{10} a_{30}^2}{\omega_3 \left(\frac{1}{4} s_1^2 + \Sigma^2 \right)},$$

$$c_{\varphi_{10}} = -\frac{\zeta_1 \Sigma_1 a_{30}^2}{2\omega_1 a_{10} (\Sigma_1^2 + \Sigma^2)}, \quad c_{\varphi_{30}} = \frac{\zeta_{13} s_1 a_{10}}{4\omega_3 \left(\frac{1}{4} s_1^2 + \Sigma^2 \right)}.$$

Таким образом, соотношения (156)-(159) определяют аналитическое решение для случая внутреннего резонанса 2:1 с точностью до первого приближения при любом значении параметра дробности $0 < \gamma \leq 1$.

2.2. Внутренний резонанс 1:1:2

Теперь рассмотрим случай (79), когда $\omega_1 = \omega_2 = 2\omega_3$. Устраняя вековые члены в уравнениях (74)-(76), получаем следующие разрешающие уравнения:

$$2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 + \zeta_1 A_3^2 = 0, \quad (160)$$

$$2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 + \zeta_2 A_3^2 = 0, \quad (161)$$

$$2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + \zeta_{13} A_1 \bar{A}_3 + \zeta_{23} A_2 \bar{A}_3 = 0. \quad (162)$$

Из системы уравнений (160)-(162) видно, что, в отличие от уравнений (100)-(102), соответствующих случаю (77), когда $\omega_1 = 2\omega_3$, а $\omega_2 \neq \omega_1$ и $\omega_2 \neq 2\omega_3$, теперь мы получаем систему трех связанных нелинейных уравнений.

Представляя функции A_j , входящие в (160)-(162), в полярной форме (103) и применяя ту же самую процедуру, как это было выполнено выше для внутреннего резонанса 2:1, имеем

$$\left(a_1^2\right)' + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 a_1 a_3^2 \sin(2\varphi_3 - \varphi_1) = 0, \quad (163)$$

$$\left(a_2^2\right)' + s_2 a_2^2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 a_2 a_3^2 \sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (164)$$

$$\left(a_3^2\right)' + s_3 a_3^2 - \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_1 a_3^2 \sin(2\varphi_3 - \varphi_1) - \omega_3^{-1} \zeta_{23} a_2 a_3^2 \sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (165)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} \zeta_1 \omega_1^{-1} a_3^2 a_1^{-1} \cos(2\varphi_3 - \varphi_1) = 0, \quad (166)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \sigma_2 - \frac{1}{2} \zeta_2 \omega_2^{-1} a_3^2 a_2^{-1} \cos(2\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (167)$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2} \sigma_3 - \frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_1 \cos(2\varphi_3 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \zeta_{23} \omega_3^{-1} a_2 \cos(2\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (168)$$

Нелинейная система уравнений (163)-(168) с соответствующими начальными условиями полностью описывает колебательный процесс исследуемой механической системы в условиях внутреннего резонанса 1:1:2 и может быть решена численно.

Вводя новые функции $\xi_1(T_1)$, $\xi_2(T_1)$ и $\xi_3(T_1)$ так, что

$$a_1^2 = \frac{\zeta_1 \omega_3}{\zeta_{13} \omega_1} \xi_1 e^{-s_1 T_1}, \quad a_2^2 = \frac{\zeta_2 \omega_3}{\zeta_{23} \omega_2} \xi_2 e^{-s_2 T_1}, \quad a_3^2 = \xi_3 e^{-s_3 T_1}, \quad (169)$$

и складывая уравнения (163)-(165) с учетом (169), получим

$$\dot{\xi}_1 e^{-s_1 T_1} + \dot{\xi}_2 e^{-s_2 T_1} + \dot{\xi}_3 e^{-s_3 T_1} = 0. \quad (170)$$

Уравнение (170) описывает закон изменения энергии для этого случая внутреннего резонанса.

Глава 3. Разрешающие нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие амплитудно-фазовую модуляцию для различных типов внутреннего резонанса порядка ε^2

Чтобы получить нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие модуляцию амплитуд и фаз рассматриваемой нелинейной пластины, рассмотрим отдельно каждый тип внутреннего резонанса, который мог иметь место в случае слабого демпфирования порядка ε^2 .

3.1. Внутренний резонанс 1:1

Внутренний резонанс один-к-одному может быть двух типов: когда собственные частоты двух форм колебаний в плоскости пластинки близки друг к другу, то есть, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, или когда собственная частота колебаний из плоскости близка собственной частоте одной из форм изгибных колебаний в плоскости пластины, то есть $\omega_3 = \omega_1 = \omega$ или $\omega_3 = \omega_2 = \omega$.

3.1.1. Внутренний резонанс $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Рассмотрим сначала случай внутреннего резонанса 1:1, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, но $\omega_3 \neq \omega$. Устраняя вековые члены в уравнениях (90)-(92), получаем следующие разрешающие уравнения:

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 + 2\zeta_1 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_1 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 = 0, \quad (171)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 + 2\zeta_2 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_2 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 = 0, \quad (172)$$

$$2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) A_3^2 \bar{A}_3 + \zeta_{13} k_7 A_1 \bar{A}_1 A_3 + \zeta_{23} k_8 A_2 \bar{A}_2 A_3 + (173)$$

$$+ (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5) A_1 \bar{A}_2 A_3 + (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7) \bar{A}_1 A_2 A_3 = 0.$$

Умножим уравнения (171)-(173) соответственно на \bar{A}_1 , \bar{A}_2 и \bar{A}_3 и найдем сопряженные к ним уравнения. Складывая каждую пару взаимно сопряженных уравнений друг с другом и вычитая одно от другого, а также представляя функции $A_i(T_2)$ в полярной форме (103), где a_i и φ_i ($i=1,2,3$) зависят от T_2 , в результате имеем

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 = -2\omega^{-1} \zeta_1 k_6 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (174)$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = 2\omega^{-1} \zeta_2 k_5 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (175)$$

$$(a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 = -\omega_3^{-1} [\zeta_{13} (k_6 - k_8) + \zeta_{23} (k_7 - k_5)] a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (176)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 + \omega^{-1} \zeta_1 k_5 a_3^2 + \omega^{-1} \zeta_1 k_6 a_1^{-1} a_2 a_3^2 \cos \delta, \quad (177)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 + \omega^{-1} \zeta_2 k_6 a_3^2 + \omega^{-1} \zeta_2 k_5 a_1 a_2^{-1} a_3^2 \cos \delta, \quad (178)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) a_3^2 + (179)$$

$$+ \frac{1}{2} \omega_3^{-1} [\zeta_{13} (k_6 - k_8) + \zeta_{23} (k_7 - k_5)] a_1 a_2 \cos \delta,$$

где $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ - разность фаз, а точка обозначает дифференцирование по T_2 .

Можно показать, что выражения, стоящие в квадратных скобках в уравнениях (176) и (179), обращаются в ноль при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда уравнение (176) оказывается независимым от всех других уравнений из системы (174)–(179):

$$\dot{(a_3^2)} + s_3 a_3^2 = 0, \quad (180)$$

решение которого имеет вид

$$a_3^2 = c_3 e^{-s_3 T_2}, \quad (181)$$

где c_3 - постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий, в то время как уравнение (179) принимает вид

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} [\zeta_{13} k_7 a_1^2 + \zeta_{23} k_8 a_2^2 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) a_3^2], \quad (182)$$

откуда следует, что фаза φ_3 зависит только от квадратов величин всех амплитуд трех взаимодействующих форм колебаний.

Вводя новые функции $\xi_1(T_2)$ и $\xi_2(T_2)$ так, что

$$a_1^2 = \frac{\zeta_1 k_6}{\omega} \xi_1 \exp(-s_1 T_2), \quad a_2^2 = \frac{\zeta_2 k_5}{\omega} \xi_2 \exp(-s_2 T_2), \quad (183)$$

и складывая уравнения (174) и (175) с учетом (183), получим

$$\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_1 e^{(s_2 - s_1) T_2} = 0, \quad (184)$$

а вычитая соотношение (177) из (178), находим

$$\dot{\delta} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 = \Sigma + \omega^{-1} (\zeta_2 k_6 - \zeta_1 k_5) a_3^2 + \omega^{-1} (\zeta_2 k_5 a_1^2 - \zeta_1 k_6 a_2^2) \frac{a_3^2}{a_1 a_2} \cos \delta, \quad (185)$$

где $\Sigma = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1)$.

Из равнений (174) и (175) следует, что

$$\frac{a_2 a_3^2}{a_1} = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{\zeta_1 k_6} \frac{1}{\sin \delta} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1}, \quad \frac{a_1 a_3^2}{a_2} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\zeta_2 k_5} \frac{1}{\sin \delta} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2}. \quad (186)$$

Учитывая соотношения (183) и (186), уравнение (185) перепишем в виде

$$\dot{\delta} - \Sigma = Ke^{-s_3 T_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} \right) \cot \delta, \quad (187)$$

где $K = \omega^{-1} (\zeta_2 k_6 - \zeta_1 k_5) c_3$.

Уравнения (174) и (185) можно представить в другом виде, если подставим соотношения (183) и (181) во все слагаемые

$$\dot{\xi}_1 = -2b \sqrt{\xi_1 \xi_2} e^{-(s_3 + 1/2 s_2 - 1/2 s_1) T_2} \sin \delta, \quad (188)$$

$$\dot{\delta} - \Sigma = Ke^{-s_3 T_2} + b \left(\xi_1 e^{-s_1 T_2} - \xi_2 e^{-s_2 T_2} \right) \frac{\cos \delta}{\sqrt{\xi_1 \xi_2}} e^{-(s_3 + 1/2 s_2 + 1/2 s_1) T_2}, \quad (189)$$

где $b = \omega^{-1} \sqrt{\zeta_1 \zeta_2 k_5 k_6}$.

Нелинейная система уравнений (184), (188) и (189), или (187), с начальными условиями

$$\xi_1 |_{T_2=0} = \xi_{10}, \quad \xi_2 |_{T_2=0} = \xi_{20}, \quad \xi_3 |_{T_2=0} = \xi_{30}, \quad \delta |_{T_2=0} = \delta_0 \quad (190)$$

полностью описывает колебательный процесс исследуемой механической системы в условиях внутреннего резонанса один-к-одному $\omega_1 = \omega_2$ и может быть решена численно.

Следует отметить то, что уравнение, определяющее функцию тока, может быть получено из (187), если мы пренебрегаем первым слагаемым в уравнении (187), которое затухает быстрее по сравнению с его последним слагаемым.

В частном случае, когда $\Sigma = 0$ и $s_1 = s_2 = s_3 = s$, уравнение (184) принимает вид

$$\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_1 = 0, \quad (191)$$

откуда следует, что

$$\xi_2 + \xi_1 = E_0, \quad (192)$$

и

$$\xi_1 = E_0 \xi, \quad \xi_2 = E_0(1 - \xi). \quad (193)$$

С учетом равенств (193), уравнения (188) и (189), в которых отброшены члены, быстро затухающие со временем, принимают вид:

$$\dot{\xi} = -2b\sqrt{\xi(1-\xi)}e^{-sT_2} \sin \delta, \quad (194)$$

$$\dot{\delta} = -b\left[-\xi^{1/2}(1-\xi)^{-1/2} + \xi^{-1/2}(1-\xi)^{1/2}\right] \cos \delta e^{-sT_2} = -b\frac{(1-2\xi)}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \cos \delta e^{-sT_2}, \quad (195)$$

в то время как уравнение (187), в котором опущен его первый член, быстро затухающий со временем, приводится к виду

$$\dot{\delta} \tan \delta \approx \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1}, \quad (196)$$

В результате интегрирование уравнения (196) получаем первый интеграл

$$G(\xi, \delta) = \xi^{1/2}(1-\xi)^{1/2} \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0). \quad (197)$$

Второй первый интеграл (197) определяет функцию тока $G(\xi, \delta)$ так, что

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2b\frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = -2b\frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-sT_2}, \quad (198)$$

которая описывает установившиеся колебания упругой пластины, затухающие со временем.

Исключая переменную δ из уравнений (194) и (197) и интегрируя по T_2 , имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)} - G_0^2} = \frac{2b}{s} (e^{-sT_2} - 1). \quad (199)$$

Интеграл в левой части уравнения (199) может быть преобразован к неполному эллиптическому интегралу первого рода и легко подсчитан, используя специальные таблицы [1].

Решение (199) позволяет найти функцию $\xi(T_2)$ и, таким образом, решить рассматриваемую задачу.

Если мы представим $\dot{\delta}$ с учетом (167) как

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dT_2} = \frac{d\delta}{d\xi} \dot{\xi} = -2b \frac{d\delta}{d\xi} \xi^{1/2} (1-\xi)^{1/2} e^{-sT_2} \sin \delta, \quad (200)$$

и сохраним все члены в уравнении (189) с учетом (193), тогда соотношение (189) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d \cos \delta}{d\xi} + \frac{1}{2} \frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)} \cos \delta = \frac{K}{2b\sqrt{\xi(1-\xi)}}. \quad (201)$$

Интегрируя (201), получим

$$G_1(\xi, \delta) = \xi^{1/2} (1-\xi)^{1/2} \cos \delta - \frac{1}{2} Kb^{-1} \xi = G_1^0(\xi_0, \delta_0). \quad (202)$$

Следует отметить, что отношения (198) и (199) остаются справедливыми и в этом случае.

3.1.2. Внутренний резонанс $\omega_1 = \omega_3 = \omega$

Теперь рассмотрим случай (94), когда $\omega_1 = \omega_3 = \omega$, но $\omega_2 \neq \omega$. Следует отметить, что случай (95), когда $\omega_2 = \omega_3 = \omega$, но $\omega_1 \neq \omega$, можно исследовать аналогичным образом.

Тогда устраняя вековые члены в уравнениях (90)-(92), получаем следующие разрешающие уравнения:

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 + 2\zeta_1 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_1 k_7 \bar{A}_1 A_3^2 = 0, \quad (203)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 + 2\zeta_2 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 = 0, \quad (204)$$

$$2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) A_3^2 \bar{A}_3 + \zeta_{13} k_7 A_1 \bar{A}_1 A_3 + \zeta_{23} k_8 A_2 \bar{A}_2 A_3 + \zeta_{13} k_7 A_1^2 \bar{A}_3 = 0. \quad (205)$$

Представляя функции A_i , входящие в (203)-(205), в полярной форме и применяя ту же самую процедуру, как это было выполнено выше для другого случая внутреннего резонанса 1:1, в результате имеем

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 = -2\omega^{-1} \zeta_1 k_7 a_1^2 a_3^2 \sin \delta, \quad (206)$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = 0, \quad (207)$$

$$(a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 = \omega^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 a_3^2 \sin \delta, \quad (208)$$

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 + \omega^{-1} \zeta_1 k_5 a_3^2 + \omega^{-1} \zeta_1 k_7 a_3^2 \cos \delta, \quad (209)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_6 a_3^2, \quad (210)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_3 &= \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \omega^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \frac{1}{2} \omega^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) a_3^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \omega^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 \cos \delta, \end{aligned} \quad (211)$$

где $\delta = 2(\varphi_3 - \varphi_1)$ - разность фаз.

Поскольку уравнение (207) независимо от других уравнений системы (206)-(211), то его решение имеет вид

$$a_2^2 = c_2 e^{-s_2 T_2}, \quad (212)$$

где c_2 - постоянная интегрирования, которая будет определена из начальных условий.

Вводя новые функции $\xi_1(T_2)$ и $\xi_3(T_2)$ так, что

$$a_1^2 = \frac{\zeta_1 k_7}{\omega} \xi_1 \exp(-s_1 T_2), \quad a_3^2 = \frac{\zeta_{13} k_7}{\omega} \xi_3 \exp(-s_3 T_2), \quad (213)$$

и складывая уравнения (206) и (208) с учетом (213), получим

$$\dot{\xi}_1 e^{-s_1 T_2} + 2\dot{\xi}_3 e^{-s_3 T_2} = 0, \quad (214)$$

а вычитая (209) из (211), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= 2(\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_1) = \Sigma + \omega^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4 - 2\zeta_1 k_5) a_3^2 + \\ &+ \omega^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \omega^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \omega^{-1} k_7 (\zeta_{13} a_1^2 - 2\zeta_1 a_3^2) \cos \delta, \end{aligned} \quad (215)$$

где $\Sigma = \sigma_3 - \sigma_1$.

Из уравнений (206) и (208) находим

$$-2 \frac{\zeta_1 k_7}{\omega} a_3^2 = \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} \frac{1}{\sin \delta}, \quad \frac{\zeta_{13} k_7}{\omega} a_1^2 = \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \frac{1}{\sin \delta}. \quad (216)$$

Учитывая (213) и (216), уравнения (206) и (215) приводятся к виду

$$\dot{\xi}_1 = -2b \xi_1 \xi_3 e^{-s_3 T_2} \sin \delta, \quad (217)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta} - \Sigma &= b \xi_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \xi_3 e^{-s_3 T_2} + \left(\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \cot \delta = \\ &= b \xi_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \xi_3 e^{-s_3 T_2} + b \left(\xi_1 e^{-s_1 T_2} - 2\xi_3 e^{-s_3 T_2} \right) \cos \delta, \end{aligned} \quad (218)$$

где

$$b = \omega^{-2} k_7^2 \zeta_1 \zeta_{13}, \quad K_2 = \omega^{-1} \zeta_{23} k_8 c_2, \quad K_3 = \omega^{-2} \zeta_{13} k_7 (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4 - 2\zeta_1 k_5).$$

Нелинейная система уравнений (214), (217) и (218) с начальными условиями (190) полностью описывают колебательный процесс рассматриваемой механической системы в условиях внутреннего резонанса один-к-одному $\omega_1 = \omega_3$ и может быть решена численно.

В частном случае, когда $\Sigma = 0$ и $s_1 = s_2 = s_3 = s$, уравнение (214) имеет вид

$$\dot{\xi}_1 + 2\dot{\xi}_3 = 0, \quad (219)$$

откуда следует, что

$$\xi_1 + 2\xi_3 = E_0, \quad (220)$$

и

$$\xi_1 = E_0\xi, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}E_0(1-\xi). \quad (221)$$

С учетом (221) уравнения (217) и (218) принимают вид

$$\dot{\xi} = -bE_0\xi(1-\xi)e^{-sT_2} \sin \delta, \quad (222)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \left(bE_0\xi + K_2 + \frac{1}{2}K_3E_0(1-\xi) \right) e^{-sT_2} + \left(\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \cot \delta = \\ &= \left[bE_0\xi + K_2 + \frac{1}{2}K_3(1-\xi) \right] e^{-sT_2} - bE_0(1-2\xi)e^{-sT_2} \cos \delta, \end{aligned} \quad (223)$$

Пренебрегая в уравнении (223) первым членом, быстро затухающим со временем, перепишем его в виде

$$\dot{\delta} \tan \delta \approx \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3}, \quad (224)$$

Интегрируя (224), получаем первый интеграл

$$G(\xi, \delta) = \xi(1-\xi) \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0), \quad (225)$$

который определяет функцию тока $G(\xi, \delta)$ так, что

$$v_\xi = \dot{\xi} = bE_0 \frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = -bE_0 \frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-sT_2}, \quad (226)$$

которая описывает установившиеся колебания упругой пластины, затухающие со временем.

Исключая переменную δ из соотношений (222) и (225) и интегрируя по T_2 , имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2(1-\xi)^2 - G_0^2}} = \frac{bE_0}{s} (e^{-sT_2} - 1). \quad (227)$$

Решение уравнения (227) позволяет найти функцию $\xi(T_2)$ и, таким образом, решить поставленную задачу.

Если мы представим $\dot{\delta}$ с учетом (222) в виде

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dT_2} = \frac{d\delta}{d\xi} \dot{\xi} = -bE_0 \frac{d\delta}{d\xi} \xi(1-\xi) e^{-sT_2} \sin \delta = bE_0 \frac{d \cos \delta}{d\xi} \xi(1-\xi) e^{-sT_2}, \quad (228)$$

и сохраним все члены в соотношении (223) с учетом (221), тогда уравнение (223) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d \cos \delta}{d\xi} + \frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)} \cos \delta = \frac{K_3}{b\xi} + \frac{1}{1-\xi} + \frac{K_2}{bE_0\xi(1-\xi)}. \quad (229)$$

Интегрируя (229), получим

$$G_1(\xi, \delta) = \xi(1-\xi) \cos \delta + \frac{1}{2} K_3 b^{-1} (1-\xi)^2 - \frac{1}{2} \xi^2 - K_2 (bE_0)^{-1} \xi = G_1^0(\xi_0, \delta_0). \quad (230)$$

Следует отметить, что соотношения (226) и (227) действительны и в этом случае.

Таким образом, при свободных колебаниях пластинки, находящейся в условиях внутреннего резонанса один-к-одному, возможны три режима: стационарный (отсутствие демпфирования, когда $\gamma = 0$), квазистационарный (демпфирование определяется обычной производной, когда $\gamma = 1$) и нестационарный (демпфирование описывается при помощи дробной производной, когда $0 < \gamma < 1$).

3.1.3. Внутренний резонанс 1:1:1

Теперь рассмотрим случай (96), когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$. Тогда устрояя вековые члены в уравнениях (90)-(92), получаем следующие разрешающие уравнения

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 + 2\zeta_1 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_1 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_1 k_7 \bar{A}_1 A_3^2 + 2\zeta_1 k_8 \bar{A}_2 A_3^2 = 0, \quad (231)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 + 2\zeta_2 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_2 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_2 k_7 \bar{A}_1 A_3^2 + 2\zeta_2 k_8 \bar{A}_2 A_3^2 = 0, \quad (232)$$

$$2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) A_3^2 \bar{A}_3 + \zeta_{13} k_7 A_1 \bar{A}_1 A_3 + \zeta_{23} k_8 A_2 \bar{A}_2 A_3 + \zeta_{13} k_7 A_1^2 \bar{A}_3 + \zeta_{23} k_8 A_2^2 \bar{A}_3 + (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7) \bar{A}_1 A_2 A_3 + (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5) A_1 \bar{A}_2 A_3 = 0 \quad (233)$$

Представляя функции A_i , входящие в уравнения (231)-(233), в полярной форме и применяя ту же самую процедуру, как это было выполнено выше для случаев внутреннего резонанса 1:1, в результате имеем

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 = -2\omega^{-1} \zeta_1 x [k_7 a_1^2 \sin 2(\varphi_3 - \varphi_1) + k_6 a_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + k_8 a_1 a_2 \sin(2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)] a_3^2, \quad (234)$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = -2\omega^{-1} \zeta_2 [k_8 a_2^2 \sin 2(\varphi_3 - \varphi_2) - k_5 a_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + k_7 a_1 a_2 \sin(2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)] a_3^2, \quad (235)$$

$$(a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 = \omega^{-1} [\zeta_{13} k_7 a_1^2 \sin 2(\varphi_3 - \varphi_1) + \zeta_{23} k_8 a_2^2 \sin 2(\varphi_3 - \varphi_2)] a_3^2, \quad (236)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 + \omega^{-1} \zeta_1 [k_5 + k_7 \cos 2(\varphi_3 - \varphi_1) + k_6 a_1^{-1} a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + k_8 a_1^{-1} a_2 \cos(2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)] a_3^2, \quad (237)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 \left[k_6 + k_8 \cos 2(\varphi_3 - \varphi_2) + k_5 a_1 a_2^{-1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + k_7 a_1 a_2^{-1} \cos(2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1) \right] a_3^2, \quad (238)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_3 &= \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \omega^{-1} \left[\zeta_{13} k_7 a_1^2 + \zeta_{23} k_8 a_2^2 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) a_3^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \omega^{-1} \left[\zeta_{13} k_7 a_1^2 \cos 2(\varphi_3 - \varphi_1) + \zeta_{23} k_8 a_2^2 \cos 2(\varphi_3 - \varphi_2) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \omega^{-3} \zeta_{13} \zeta_{23} a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (239)$$

Нелинейная система уравнений (234)-(239) с начальными условиями (190) полностью описывают колебательный процесс рассматриваемой механической системы в условии внутреннего резонанса 1:1:1 и может быть решена численными методами.

3.3. Комбинационные резонансы аддитивно-разностного типа

Из уравнений (90)-(92) видно, что возможны три случая комбинационного внутреннего резонанса аддитивно-разностного типа (97)-(99), каждый из которых будет подробно рассмотрен ниже в данной главе.

3.3.1. Комбинационный резонанс $2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ (98)

Рассмотрим сначала случай (97), когда $2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Устраняя тогда вековые члены в уравнениях (90)-(92), получаем следующие разрешающие уравнения:

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^{\gamma} A_1 + 2\zeta_1 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_1 k_8 \bar{A}_2 A_3^2 = 0, \quad (240)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 + 2\zeta_2 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_2 k_7 \bar{A}_1 A_3^2 = 0, \quad (241)$$

$$2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) A_3^2 \bar{A}_3 + \zeta_{13} k_7 A_1 \bar{A}_1 A_3 + \zeta_{23} k_8 A_2 \bar{A}_2 A_3 + (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_7) A_1 A_2 \bar{A}_3 = 0. \quad (242)$$

Умножим уравнения (240)-(242) соответственно на \bar{A}_1 , \bar{A}_2 и \bar{A}_3 и найдем сопряженные к ним уравнения. Складывая каждую пару взаимно сопряженных уравнений друг с другом и вычитая одно из другого, а также представляя функции $A_i(T_2)$ в полярной форме (103), где a_i и φ_i ($i=1,2,3$) зависят от T_2 , в результате имеем

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 = -2\omega_1^{-1} \zeta_1 k_8 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (243)$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = -2\omega_2^{-1} \zeta_2 k_7 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (244)$$

$$(a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 = \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_7) a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (245)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_5 a_3^2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_8 a_1^{-1} a_2 a_3^2 \cos \delta, \quad (246)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_6 a_3^2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_7 a_1 a_2^{-1} a_3^2 \cos \delta, \quad (247)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_3 = & \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) a_3^2 + \\ & + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_7) a_1 a_2 \cos \delta, \end{aligned} \quad (248)$$

где $\delta = 2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$ - разность фаз.

Введем новые функции $\xi_1(T_2)$, $\xi_2(T_2)$ и $\xi_3(T_2)$ так, что

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\zeta_1 k_8}{\omega_1} \xi_1 \exp(-s_1 T_2), & a_2^2 &= \frac{\zeta_2 k_7}{\omega_2} \xi_2 \exp(-s_2 T_2), \\ a_3^2 &= \frac{\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_7}{\omega_3} \xi_3 \exp(-s_3 T_2), \end{aligned} \quad (249)$$

Складывая уравнения (243)-(245) с учетом (249), получим

$$\dot{\xi}_1 e^{-s_1 T_2} + \dot{\xi}_2 e^{-s_2 T_2} + 4\dot{\xi}_3 e^{-s_3 T_2} = 0, \quad (250)$$

а вычитая сумму соотношений (246) и (247) из удвоенного равенства (248),

находим

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= 2\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \Sigma + \left[\omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) - \omega_1^{-1} \zeta_1 k_5 - \omega_2^{-1} \zeta_2 k_6 \right] a_3^2 \\ &+ \omega_3^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \omega_3^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \\ &+ \left[\omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_7) a_1 a_2 - \omega_1^{-1} \zeta_1 k_8 \frac{a_2 a_3^2}{a_1} - \omega_2^{-1} \zeta_2 k_7 \frac{a_1 a_3^2}{a_2} \right] \cos \delta, \end{aligned} \quad (251)$$

где $2\Sigma = 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2$.

Из уравнений (243)-(245) можно получить, что

$$\begin{aligned} -2 \frac{\zeta_1 k_8 a_2 a_3^2}{\omega_1 a_1} &= \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} \frac{1}{\sin \delta}, & -2 \frac{\zeta_2 k_7 a_1 a_3^2}{\omega_2 a_2} &= \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} \frac{1}{\sin \delta}, \\ \frac{\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_7}{\omega_3} a_1 a_2 &= \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \frac{1}{\sin \delta}, \end{aligned} \quad (252)$$

Тогда уравнения (243), (245) и (251) можно переписать в следующей форме:

$$\dot{\xi}_1 = -2b \sqrt{\xi_1 \xi_2} \xi_3 e^{-(s_3 + 1/2 s_2 - 1/2 s_1) T_2} \sin \delta, \quad (253)$$

$$\dot{\xi}_3 = b \sqrt{\xi_1 \xi_2} \xi_3 e^{-1/2 (s_2 + s_1) T_2} \sin \delta, \quad (254)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} - \Sigma &= K_1 \dot{\xi}_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 \dot{\xi}_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \dot{\xi}_3 e^{-s_3 T_2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \cot \delta = \\
&= K_1 \dot{\xi}_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 \dot{\xi}_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \dot{\xi}_3 e^{-s_3 T_2} + \\
&+ b \left(\sqrt{\frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1 \xi_2}} e^{-1/2(s_1+s_2)T_2} - \frac{\xi_3 \sqrt{\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}} e^{-(s_3+1/2s_2-1/2s_1)T_2} - \right. \\
&\left. - \frac{\xi_3 \sqrt{\xi_1}}{\sqrt{\xi_2}} e^{-(s_3+1/2s_1-1/2s_2)T_2} \right) \cos \delta,
\end{aligned} \tag{255}$$

$$\text{где } b = \frac{\zeta_{13}k_8 + \zeta_{23}k_7}{\omega_3} \sqrt{\frac{\zeta_1 \zeta_2 k_7 k_8}{\omega_1 \omega_2}}, \quad K_1 = \frac{\zeta_1 \zeta_{13} k_7 k_8}{\omega_1 \omega_3}, \quad K_2 = \frac{\zeta_2 \zeta_{23} k_7 k_8}{\omega_2 \omega_3},$$

$$K_3 = \frac{\zeta_{13}k_8 + \zeta_{23}k_7}{2\omega_3} \left(\frac{\zeta_{13}k_2 + \zeta_{23}k_4}{\omega_3} - \frac{\zeta_1 k_5}{\omega_1} - \frac{\zeta_2 k_6}{\omega_2} \right).$$

Нелинейная система уравнений (250) и (253)-(255) с начальными условиями (190) полностью описывают колебательный процесс рассматриваемой механической системы в условиях комбинационного внутреннего резонанса (98) и может быть решена численно.

В частном случае, когда $\Sigma = 0$ и $s_1 = s_2 = s_3 = s$, уравнение (250) имеет вид

$$\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 + 4\dot{\xi}_3 = 0, \tag{256}$$

откуда следует, что

$$\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 = E_0, \tag{257}$$

и

$$\xi_1 = 2E_0(c_1 - \xi), \quad \xi_2 = 2E_0(c_2 - \xi), \quad \xi_3 = E_0(c_3 + \xi), \tag{258}$$

где c_1 , c_2 и c_3 - константы интегрирования, при этом $2c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 1$.

С учетом (258) уравнения (253) и (255) приводятся к виду

$$\dot{\xi} = 2bE_0 \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)} (c_3 + \xi) e^{-sT_2} \sin \delta, \quad (259)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= 2E_0 [K_1(c_1 - \xi) + K_2(c_2 - \xi) + K_3(c_3 + \xi)] e^{-sT_2} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \cot \delta = \\ &= 2E_0 [K_1(c_1 - \xi) + K_2(c_2 - \xi) + K_3(c_3 + \xi)] e^{-sT_2} + \\ &+ bE_0 \left[2\sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)} - \frac{(c_3 + \xi)\sqrt{c_2 - \xi}}{\sqrt{c_1 - \xi}} - \frac{(c_3 + \xi)\sqrt{c_1 - \xi}}{\sqrt{c_2 - \xi}} \right] e^{-sT_2} \cos \delta. \end{aligned} \quad (260)$$

Если в уравнении (260) пренебречь его первым слагаемым, которое быстро затухает со временем, тогда приходим к следующему соотношению:

$$\dot{\delta} \tan \delta \approx \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3}, \quad (261)$$

интегрирование которого дает его первый интеграл

$$G(\xi, \delta) = (c_3 + \xi) \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)} \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0). \quad (262)$$

Этот первый интеграл (262) определяет функцию тока $G(\xi, \delta)$ так, что

$$v_\xi = \dot{\xi} = -2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-sT_2}, \quad (263)$$

которая описывает установившиеся колебания упругой пластины, затухающие со временем.

Исключая переменную δ из соотношений (259) и (262) и интегрируя по T_2 , имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(c_3 + \xi)^2 (c_1 - \xi)(c_2 - \xi) - G_0^2}} = \frac{2bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}). \quad (264)$$

Решение уравнения (264) позволяет найти величину $\xi(T_2)$ и, таким образом, решить рассматриваемую задачу.

Если мы представим $\dot{\delta}$ с учетом соотношения (259) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \frac{d\delta}{dT_2} = \frac{d\delta}{d\xi} \dot{\xi} = 2bE_0 \frac{d\delta}{d\xi} \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)} (c_3 + \xi) e^{-sT_2} \sin \delta = \\ &= -2bE_0 \frac{d \cos \delta}{d\xi} \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)} (c_3 + \xi) e^{-sT_2}\end{aligned}\quad (265)$$

и сохраним все члены в уравнении (260) с учетом (258), тогда равенство (260) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}- \frac{d \cos \delta}{d\xi} + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c_1 - \xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{c_2 - \xi} - \frac{1}{c_3 + \xi} \right) \cos \delta = \\ = \frac{K_1 \sqrt{c_1 - \xi}}{b(c_3 + \xi) \sqrt{c_2 - \xi}} + \frac{K_2 \sqrt{c_2 - \xi}}{b(c_3 + \xi) \sqrt{c_1 - \xi}} + \frac{K_3}{b \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)}}.\end{aligned}\quad (266)$$

Интегрируя (266), получим

$$\begin{aligned}G_1(\xi, \delta) &= (c_3 + \xi) \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)} \cos \delta - \frac{1}{2} K_1 b^{-1} (c_1 - \xi)^2 - \\ &- \frac{1}{2} K_2 b^{-1} (c_2 - \xi)^2 + \frac{1}{2} K_3 b^{-1} (c_3 + \xi)^2 = G_1^0(\xi_0, \delta_0).\end{aligned}\quad (267)$$

Следует отметить, что соотношения (263) и (264) действительны и в этом случае.

3.2.2. Комбинационный резонанс: $2\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ (97)

Теперь рассмотрим случай (97), когда $2\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$. Тогда избавляясь от вековых членов в уравнениях (90)-(92), получаем следующие разрешающие уравнения:

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 + 2\zeta_1 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_1 k_6 A_2 A_3^2 = 0, \quad (268)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 + 2\zeta_2 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_2 k_7 A_1 \bar{A}_3^2 = 0, \quad (269)$$

$$2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) A_3^2 \bar{A}_3 + \zeta_{13} k_7 A_1 \bar{A}_1 A_3 + \zeta_{23} k_8 A_2 \bar{A}_2 A_3 + (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7) A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 = 0. \quad (270)$$

Применяя к уравнениям (268)-(270) та же самую процедуру, что были использована выше для уравнений (240)-(242), в результате имеем

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 = -2\omega_1^{-1} \zeta_1 k_6 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (271)$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = 2\omega_2^{-1} \zeta_2 k_7 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (272)$$

$$(a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 = \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7) a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (273)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_5 a_3^2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_6 a_1^{-1} a_2 a_3^2 \cos \delta, \quad (274)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_6 a_3^2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_7 a_1 a_2^{-1} a_3^2 \cos \delta, \quad (275)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_3 &= \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) a_3^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7) a_1 a_2 \cos \delta, \end{aligned} \quad (276)$$

где $\delta = 2\varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_1$ - разность фаз.

Вводя новые функции $\xi_1(T_2)$, $\xi_2(T_2)$ и $\xi_3(T_2)$ таким образом, что

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\zeta_1 k_6}{\omega_1} \xi_1 \exp(-s_1 T_2), & a_2^2 &= \frac{\zeta_2 k_7}{\omega_2} \xi_2 \exp(-s_2 T_2), \\ a_3^2 &= \frac{\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7}{\omega_3} \xi_3 \exp(-s_3 T_2), \end{aligned} \quad (277)$$

и складывая уравнения (271)-(273) с учетом (277), получим

$$2\dot{\xi}_1 e^{-s_1 T_2} + \dot{\xi}_2 e^{-s_2 T_2} + 2\dot{\xi}_3 e^{-s_3 T_2} = 0, \quad (278)$$

а вычитая соотношение (273) из суммы соотношения (274) и удвоенного равенства (275), находим

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= 2\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 = \Sigma + \left[\omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) - \omega_1^{-1} \zeta_1 k_5 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_6 \right] a_3^2 + \\ &+ \omega_3^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \omega_3^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \left[\omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7) a_1 a_2 - \omega_1^{-1} \zeta_1 k_6 \frac{a_2 a_3^2}{a_1} + \right. \\ &\left. + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_7 \frac{a_1 a_3^2}{a_2} \right] \cos \delta, \end{aligned} \quad (279)$$

где $2\Sigma = 2\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_2$.

Из уравнений (271)-(273) можно получить, что

$$\begin{aligned} -2 \frac{\zeta_1 k_6 a_2 a_3^2}{\omega_1 a_1} &= \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} \frac{1}{\sin \delta}, \quad 2 \frac{\zeta_2 k_7 a_1 a_3^2}{\omega_2 a_2} = \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} \frac{1}{\sin \delta} \\ \frac{\zeta_{13} k_6 + \zeta_{23} k_7}{\omega_3} a_1 a_2 &= \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \frac{1}{\sin \delta}, \end{aligned} \quad (280)$$

тогда уравнения (271), (273) и (279) можно переписать в следующей форме:

$$\dot{\xi}_1 = -2b \sqrt{\xi_1 \xi_2 \xi_3} e^{-(s_3 + 1/2 s_2 - 1/2 s_1) T_2} \sin \delta, \quad (281)$$

$$\dot{\xi}_3 = b \sqrt{\xi_1 \xi_2 \xi_3} e^{-1/2(s_2 + s_1) T_2} \sin \delta, \quad (282)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta} - \Sigma &= K_1 \xi_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 \xi_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \xi_3 e^{-s_3 T_2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \cot \delta = \\ &= K_1 \xi_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 \xi_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \xi_3 e^{-s_3 T_2} + \\ &+ b \left(\sqrt{\xi_1 \xi_2} e^{-1/2(s_1 + s_2) T_2} - \frac{\xi_3 \sqrt{\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}} e^{-(s_3 + 1/2 s_2 - 1/2 s_1) T_2} + \right. \\ &\left. + \frac{\xi_3 \sqrt{\xi_1}}{\sqrt{\xi_2}} e^{-(s_3 + 1/2 s_1 - 1/2 s_2) T_2} \right) \cos \delta, \end{aligned} \quad (283)$$

где

$$b = \frac{\zeta_{13}k_6 + \zeta_{23}k_7}{\omega_3} \sqrt{\frac{\zeta_1\zeta_2k_6k_7}{\omega_1\omega_2}}, \quad K_1 = \frac{\zeta_1\zeta_{13}k_6k_7}{\omega_1\omega_3}, \quad K_2 = \frac{\zeta_2\zeta_{23}k_7k_8}{\omega_2\omega_3},$$

$$K_3 = \frac{\zeta_{13}k_6 + \zeta_{23}k_7}{2\omega_3} \left(\frac{\zeta_{13}k_2 + \zeta_{23}k_4}{\omega_3} - \frac{\zeta_1k_5}{\omega_1} + \frac{\zeta_2k_6}{\omega_2} \right).$$

Нелинейная система уравнений (278) и (281)-(283) с начальными условиями (190) полностью описывает колебательный процесс рассматриваемой механической системы в условии комбинационного внутреннего резонанса (97) и может быть решена численно.

В частном случае, когда $\Sigma = 0$ и $s_1 = s_2 = s_3 = s$, уравнение (278) принимает вид

$$2\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 + 2\dot{\xi}_3 = 0, \quad (284)$$

откуда следует, что

$$2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = E_0, \quad (285)$$

и

$$\xi_1 = 2E_0(c_1 - \xi), \quad \xi_2 = 2E_0(c_2 + \xi), \quad \xi_3 = E_0(c_3 + \xi), \quad (286)$$

где c_1 , c_2 и c_3 - константы интегрирования, при этом $4c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1$.

С учетом соотношения (286) уравнения (281) и (283) приводятся к виду

$$\dot{\xi} = 2bE_0\sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 + \xi)}(c_3 + \xi)e^{-sT_2} \sin \delta, \quad (287)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} &= 2E_0 [K_1(c_1 - \xi) + K_2(c_2 + \xi) + K_3(c_3 + \xi)] e^{-sT_2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \cot \delta = \\
&= 2E_0 [K_1(c_1 - \xi) + K_2(c_2 + \xi) + K_3(c_3 + \xi)] e^{-sT_2} + \\
&+ bE_0 \left[2\sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 + \xi)} - \frac{(c_3 + \xi)\sqrt{c_2 + \xi}}{\sqrt{c_1 - \xi}} + \frac{(c_3 + \xi)\sqrt{c_1 - \xi}}{\sqrt{c_2 + \xi}} \right] e^{-sT_2} \cos \delta,
\end{aligned} \tag{288}$$

Если в уравнении (288) отбросить его первый член, быстро затухающий со временем, то оно приводится к виду

$$\dot{\delta} \tan \delta \approx \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3}, \tag{289}$$

интегрирование которого дает его первый интеграл

$$G(\xi, \delta) = (c_3 + \xi)\sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 + \xi)} \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0). \tag{290}$$

Этот первый интеграл (290) определяет функцию тока $G(\xi, \delta)$ таким образом, что

$$v_\xi = \dot{\xi} = -2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-sT_2}, \tag{291}$$

которая описывает установившиеся колебания упругой пластины, затухающие со временем.

Исключая переменную δ из соотношений (287) и (290) и интегрируя по T_2 , имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(c_3 + \xi)^2 (c_1 - \xi)(c_2 + \xi) - G_0^2}} = \frac{2bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}). \tag{292}$$

Решение уравнения (292) позволяет найти функцию $\xi(T_2)$ и, таким образом, решить поставленную задачу.

Если мы представим $\dot{\delta}$ с учетом соотношения (287) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \frac{d\delta}{dT_2} = \frac{d\delta}{d\xi} \dot{\xi} = 2bE_0 \frac{d\delta}{d\xi} \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 + \xi)} (c_3 + \xi) e^{-sT_2} \sin \delta = \\ &= -2bE_0 \frac{d \cos \delta}{d\xi} \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 + \xi)} (c_3 + \xi) e^{-sT_2},\end{aligned}\quad (293)$$

и сохраним все члены в уравнении (288) с учетом (286), тогда равенство (288) может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned}- \frac{d \cos \delta}{d\xi} + \left(\frac{1}{2c_1 - \xi} - \frac{1}{2c_2 + \xi} - \frac{1}{c_3 + \xi} \right) \cos \delta = \\ = \frac{K_1 \sqrt{c_1 - \xi}}{b(c_3 + \xi) \sqrt{c_2 + \xi}} + \frac{K_2 \sqrt{c_2 + \xi}}{b(c_3 + \xi) \sqrt{c_1 - \xi}} + \frac{K_3}{b \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 + \xi)}}.\end{aligned}\quad (294)$$

Интегрируя (294), получим

$$\begin{aligned}G_1(\xi, \delta) &= (c_3 + \xi) \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 + \xi)} \cos \delta - \frac{1}{2} K_1 b^{-1} (c_1 - \xi)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} K_2 b^{-1} (c_2 + \xi)^2 + \frac{1}{2} K_3 b^{-1} (c_3 + \xi)^2 = G_1^0(\xi_0, \delta_0).\end{aligned}\quad (295)$$

Следует отметить, что соотношения (291) и (292) остаются справедливыми в этом случае.

3.2.3. Комбинационный резонанс $2\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ (99)

Теперь рассмотрим третий возможный случай комбинационного резонанса (99), то есть, когда $2\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$. Тогда устраняя вековые члены в уравнениях (90)-(92), получаем следующие разрешающие уравнения:

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 + 2\zeta_1 k_5 A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_1 k_8 A_2 \bar{A}_3^2 = 0, \quad (296)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)' A_2 + 2\zeta_2 k_6 A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\zeta_2 k_5 A_1 A_3^2 = 0, \quad (297)$$

$$2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)' A_3 + (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) A_3^2 \bar{A}_3 + \zeta_{13} k_7 A_1 \bar{A}_1 A_3 + \zeta_{23} k_8 A_2 \bar{A}_2 A_3 + (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5) \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 = 0, \quad (298)$$

которые приводятся к системе шести дифференциальных уравнений относительно амплитуд и фаз трех взаимодействующих форм

$$(a_1^2)' + s_1 a_1^2 = 2\omega_1^{-1} \zeta_1 k_8 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (299)$$

$$(a_2^2)' + s_2 a_2^2 = -2\omega_2^{-1} \zeta_2 k_5 a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (300)$$

$$(a_3^2)' + s_3 a_3^2 = \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5) a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta, \quad (301)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_5 a_3^2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_8 a_1^{-1} a_2 a_3^2 \cos \delta, \quad (302)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_6 a_3^2 + \omega_2^{-1} \zeta_2 k_5 a_1 a_2^{-1} a_3^2 \cos \delta, \quad (303)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_3 &= \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) a_3^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5) a_1 a_2 \cos \delta, \end{aligned} \quad (304)$$

где $\delta = 2\varphi_3 + \varphi_1 - \varphi_2$ - разность фаз колебаний.

Вводя новые функции $\xi_1(T_2)$, $\xi_2(T_2)$ и $\xi_3(T_2)$ так, что

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\zeta_1 k_8}{\omega_1} \xi_1 \exp(-s_1 T_2), & a_2^2 &= \frac{\zeta_2 k_5}{\omega_2} \xi_2 \exp(-s_2 T_2), \\ a_3^2 &= \frac{\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5}{\omega_3} \xi_3 \exp(-s_3 T_2), \end{aligned} \quad (305)$$

складывая уравнения (299)-(301) с учетом (305), получим

$$\dot{\xi}_1 e^{-s_1 T_2} + 2\dot{\xi}_2 e^{-s_2 T_2} + 2\dot{\xi}_3 e^{-s_3 T_2} = 0, \quad (306)$$

а вычитая соотношение (303) из суммы соотношений (302) и удвоенного (305), находим

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= 2\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 = \Sigma + \left[\omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_2 + \zeta_{23} k_4) + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_5 - \omega_2^{-1} \zeta_2 k_6 \right] a_3^2 + \\ &+ \omega_3^{-1} \zeta_{13} k_7 a_1^2 + \omega_3^{-1} \zeta_{23} k_8 a_2^2 + \\ &+ \left[\omega_3^{-1} (\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5) a_1 a_2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 k_8 \frac{a_2 a_3^2}{a_1} - \omega_2^{-1} \zeta_2 k_5 \frac{a_1 a_3^2}{a_2} \right] \cos \delta, \end{aligned} \quad (307)$$

где $2\Sigma = 2\sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_2$.

Из уравнений (299) -(301) можно получить, что

$$\begin{aligned} 2 \frac{\zeta_1 k_8 a_2 a_3^2}{\omega_1 a_1} &= \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} \frac{1}{\sin \delta}, \quad -2 \frac{\zeta_2 k_5 a_1 a_3^2}{\omega_2 a_2} = \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} \frac{1}{\sin \delta} \\ \frac{\zeta_{13} k_8 + \zeta_{23} k_5}{\omega_3} a_1 a_2 &= \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \frac{1}{\sin \delta}, \end{aligned} \quad (308)$$

тогда уравнения (299), (301) и (307) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\dot{\xi}_1 = -2b \sqrt{\xi_1 \xi_2} \xi_3 e^{-(s_3+1/2s_2-1/2s_1)T_2} \sin \delta, \quad (309)$$

$$\dot{\xi}_3 = b \sqrt{\xi_1 \xi_2} \xi_3 e^{-1/2(s_2+s_1)T_2} \sin \delta, \quad (310)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta} - \Sigma &= K_1 \xi_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 \xi_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \xi_3 e^{-s_3 T_2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \cot \delta = \\ &= K_1 \xi_1 e^{-s_1 T_2} + K_2 \xi_2 e^{-s_2 T_2} + K_3 \xi_3 e^{-s_3 T_2} + \\ &+ b \left(\sqrt{\xi_1 \xi_2} e^{-1/2(s_1+s_2)T_2} + \frac{\xi_3 \sqrt{\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}} e^{-(s_3+1/2s_2-1/2s_1)T_2} - \right. \\ &\left. - \frac{\xi_3 \sqrt{\xi_1}}{\sqrt{\xi_2}} e^{-(s_3+1/2s_1-1/2s_2)T_2} \right) \cos \delta, \end{aligned} \quad (311)$$

где

$$b = \frac{\zeta_{13}k_8 + \zeta_{23}k_5}{\omega_3} \sqrt{\frac{\zeta_1\zeta_2k_5k_8}{\omega_1\omega_2}}, \quad K_1 = \frac{\zeta_1\zeta_{13}k_7k_8}{\omega_1\omega_3}, \quad K_2 = \frac{\zeta_2\zeta_{23}k_5k_8}{\omega_2\omega_3},$$

$$K_3 = \frac{\zeta_{13}k_8 + \zeta_{23}k_5}{2\omega_3} \left(\frac{\zeta_{13}k_2 + \zeta_{23}k_4}{\omega_3} + \frac{\zeta_1k_5}{\omega_1} - \frac{\zeta_2k_6}{\omega_2} \right).$$

Нелинейная система уравнений (306) и (309)-(311) вместе с начальными условиями (190) полностью описывают колебательный процесс рассматриваемой механической системы в условиях комбинационного внутреннего резонанса $2\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ и может быть решена численно.

В частном случае, когда $\Sigma = 0$ и $s_1 = s_2 = s_3 = s$, уравнение (306) принимает вид

$$\dot{\xi}_1 + 2\dot{\xi}_2 + 2\dot{\xi}_3 = 0, \quad (312)$$

откуда следует, что

$$\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = E_0, \quad (313)$$

и

$$\xi_1 = 2E_0(c_1 + \xi), \quad \xi_2 = 2E_0(c_2 - \xi), \quad \xi_3 = E_0(c_3 + \xi), \quad (314)$$

где c_1 , c_2 и c_3 - константы интегрирования, причем $2c_1 + 4c_2 + 2c_3 = 1$.

С учетом (287), уравнения (282) и (284) приводятся к виду

$$\dot{\xi} = 2bE_0\sqrt{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)(c_3 + \xi)}e^{-sT_2} \sin \delta, \quad (315)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} &= 2E_0[K_1(c_1 + \xi) + K_2(c_2 - \xi) + K_3(c_3 + \xi)]e^{-sT_2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3} \right) \text{ctg } \delta = \\
&= 2E_0[K_1(c_1 + \xi) + K_2(c_2 - \xi) + K_3(c_3 + \xi)]e^{-sT_2} + \\
&+ bE_0 \left[2\sqrt{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)} + \frac{(c_3 + \xi)\sqrt{c_2 - \xi}}{\sqrt{c_1 + \xi}} - \frac{(c_3 + \xi)\sqrt{c_1 + \xi}}{\sqrt{c_2 - \xi}} \right] e^{-sT_2} \cos \delta,
\end{aligned} \tag{316}$$

Уравнение (316), в котором его первый член, быстро затухающий со временем, можно отбросить, принимает вид

$$\dot{\delta} \text{tg } \delta \approx \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3}{\xi_3}, \tag{317}$$

Интегрирование уравнения (317) приводит к его первому интегралу

$$G(\xi, \delta) = (c_3 + \xi)\sqrt{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)} \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0), \tag{318}$$

который определяет функцию тока $G(\xi, \delta)$ таким образом, что

$$v_\xi = \dot{\xi} = -2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-sT_2}, \tag{319}$$

которая описывает установившиеся колебания упругой пластины, затухающие со временем.

Исключая переменную δ в равенствах (315) и (318) и интегрируя по T_2 , имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(c_3 + \xi)^2(c_1 + \xi)(c_2 - \xi) - G_0^2}} = \frac{2bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}). \tag{320}$$

Решение уравнения (320) позволяет найти функцию $\xi(T_2)$ и, таким образом, решить рассматриваемую задачу.

Если мы представим $\dot{\delta}$ с учетом (315) в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} &= \frac{d\delta}{dT_2} = \frac{d\delta}{d\xi} \dot{\xi} = 2bE_0 \frac{d\delta}{d\xi} \sqrt{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)} (c_3 + \xi) e^{-sT_2} \sin \delta = \\
&= -2bE_0 \frac{d \cos \delta}{d\xi} \sqrt{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)} (c_3 + \xi) e^{-sT_2}
\end{aligned} \tag{321}$$

и сохраним все члены в уравнении (316) с учетом (314), тогда соотношение (316) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& - \frac{d \cos \delta}{d\xi} + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{c_1 + \xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{c_2 - \xi} - \frac{1}{c_3 + \xi} \right) \cos \delta = \\
& = \frac{K_1 \sqrt{c_1 + \xi}}{b(c_3 + \xi) \sqrt{c_2 - \xi}} + \frac{K_2 \sqrt{c_2 - \xi}}{b(c_3 + \xi) \sqrt{c_1 + \xi}} + \frac{K_3}{b \sqrt{(c_1 - \xi)(c_2 - \xi)}}.
\end{aligned} \tag{322}$$

Интегрируя (322), получим

$$\begin{aligned}
G_1(\xi, \delta) &= (c_3 + \xi) \sqrt{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)} \cos \delta + \frac{1}{2} K_1 b^{-1} (c_1 + \xi)^2 - \\
& - \frac{1}{2} K_2 b^{-1} (c_2 - \xi)^2 + \frac{1}{2} K_3 b^{-1} (c_3 + \xi)^2 = G_1^0(\xi_0, \delta_0).
\end{aligned} \tag{323}$$

Следует отметить, что соотношения (319) и (320) остаются справедливыми в этом случае

Глава 4. Численные исследования

Для каждого типа внутреннего резонанса из выявленных в результате проведенных исследований десяти видов внутренних резонансов (77)-(79) и (93)-(99) получены системы нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний в главах 2 и 3 соответственно для внутренних резонансов порядка ε и ε^2 . Для некоторых частных случаев внутреннего резонанса получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функции тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов. Полученные численные результаты опубликованы в статьях [37,38]. Так, во время свободных колебаний пластинки, сопровождающихся внутренним резонансом, могут наблюдаться три режима колебаний: стационарный (при отсутствии демпфирования), квазистационарный (демпфирование описывается обычной производной целого порядка) и нестационарный (демпфирование описывается производной дробного порядка).

В данной главе в качестве примеров приведем качественный анализ результатов для

- а) внутреннего резонанса 2:1 (77), когда собственная частота колебаний в плоскости пластинки равна удвоенной собственной частоте колебаний из плоскости,
- б) внутреннего резонанса 1:1 (93), когда в резонанс вступают две различные моды изгибных колебаний в плоскости пластины,
- в) внутреннего резонанса 1:1 (94), когда одна из мод изгибных колебаний из плоскости связана с одной из мод колебаний в плоскости пластинки,
- г) комбинационного резонанса аддитивного типа (98) и

д) комбинационного резонанса разностного типа (97).

4.1. Внутренний резонанс два-к-одному (77)

В качестве примера рассмотрим внутренний резонанс 2:1 (77), когда собственная частота колебаний в плоскости пластинки равна удвоенной собственной частоте колебаний из плоскости.

В этом случае функция тока $G(\xi, \delta)$ строится на основе формулы (130), а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ приведены на рис. 2, на котором значения функции G указаны цифрами около соответствующих кривых, а направление течения частиц фазовой жидкости показано стрелками на линиях тока.

Из рис. 2 видно, что фазовая жидкость течет внутри циркуляционных зон, ограниченных периметрами прямоугольников, задаваемых линиями $\xi = 0$, $\xi = 1$ и $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом в каждом таком прямоугольнике течение является изолированным. Вдоль всех четырех сторон функция тока $G = 0$, а внутри величина G сохраняет знак.

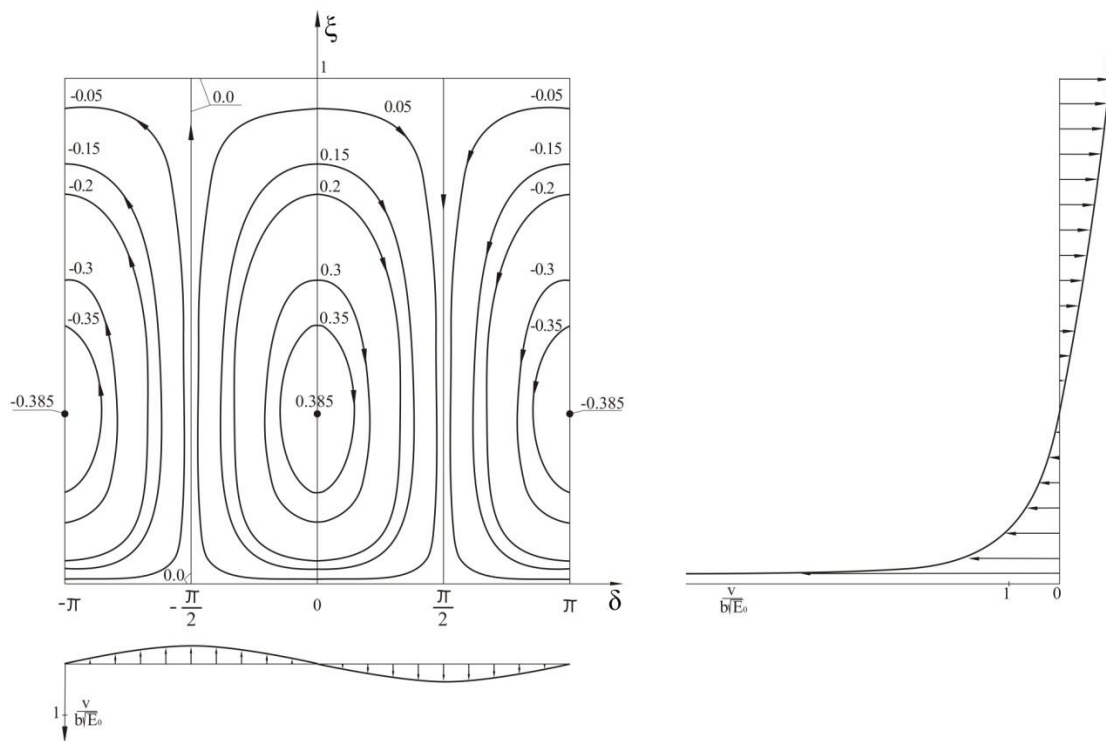


Рис.2. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса 2:1

Линии тока позволяют сделать качественную оценку связи функции тока G со всеми возможными типами энергообмена. Так, в случае незатухающих колебаний, т.е. когда коэффициент затухания равен нулю и $s = 0$, точки с координатами $\xi_0 = \frac{1}{3}$, $\delta_0 = \pm\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) соответствуют стационарным режимам колебаний, поскольку $\dot{\delta} = 0$ и $\dot{\xi} = 0$ согласно формул (127) и (128). Стационарные точки $\xi_0 = \frac{1}{3}$, $\delta_0 = \pm\pi n$ являются точками типа центра, так как при малом отклонении от центра частица фазовой жидкости начинает вращаться вокруг стационарной точки по замкнутой траектории. Замкнутые линии тока соответствуют периодическому изменению амплитуд и фаз колебаний.

Вдоль линий $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) реализуются аperiodические движения, модулированные только по амплитуде, поскольку при с увеличением времени t от 0 до ∞ величина ξ возрастает от ξ_0 до 1 (вдоль линии $\delta = -\pi/2$) или убывает от ξ_0 до 0 (вдоль линии $\delta = \pi/2$), и из уравнения (131) следует, что

$$\xi = \left[\frac{1 + \sqrt{\xi_0} - (1 + \sqrt{\xi_0}) \exp(-b\sqrt{E_0}T_1)}{1 + \sqrt{\xi_0} + (1 + \sqrt{\xi_0}) \exp(-b\sqrt{E_0}T_1)} \right]^2, \quad \delta(T_1) = \delta_0 = \frac{\pi}{2} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вдоль верхней граничной линии $\xi = 1$ реализуются движения, модулированные только по фазе, так как при $\xi = \xi_0 = 1$ амплитуды принимают значения $a_3 = const$ и $a_1 = 0$, и из уравнений (125) и (127) находим

$$\xi(T_1) = \xi_0 = 1, \quad b\sqrt{E_0}T_1 = \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Перескок частиц фазовой жидкости из точек $\xi = 0$, $\delta = \pi/2 \pm 2\pi n$ в точки $\xi = 0$, $\delta = -\pi/2 \pm 2\pi n$ происходит мгновенно, поскольку в соответствии с распределением скоростей точек фазовой жидкости по сечению $\delta = 0$ (см. рис. 2) величина скорости v стремится к бесконечно большой величине при $\xi \rightarrow 0$. Распределение скорости вдоль вертикальных линий $\delta = \pm\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) носит аperiodический характер, в то время как вблизи линии $\xi = 1/3$ оно имеет периодический характер.

При наличии обычной вязкости, т.е., когда $\gamma = 1$, картина линий тока не меняется, а скорости частиц фазовой жидкости затухают экспоненциально во время их движения вдоль линий тока. При этом стационарные и граничные

режимы (модулированные только по амплитуде или только по фазе) становятся апериодическими, т.е. амплитуды и фазы затухают экспоненциально с течением времени. Другими словами, в соответствии с формулами (132), поле скоростей, построенное вдоль линий тока, зависит от времени таким образом, что в каждой точке $\xi\delta$ этого поля направление вектора скорости v остается постоянным, а его модуль уменьшается по экспоненциальному закону, приводя к квазистационарным колебаниям пластинки в вязкой среде.

Так, вдоль линий $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при наличии традиционной вязкости решение уравнения (131) можно записать в виде

$$\xi = \left[\frac{1 - c_0 e^{f(T_1)}}{1 + c_0 e^{f(T_1)}} \right]^2, \quad \delta(T_1) = \delta_0 = \frac{\pi}{2} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где $f(T_1) = \frac{2b\sqrt{E_0}}{s} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}sT_1} \right)$ и $c_0 = \frac{1 - \sqrt{\xi_0}}{1 + \sqrt{\xi_0}}$.

В общем случае, когда $0 < \gamma < 1$, линии тока фазовой жидкости нарушаются, и частицы фазовой жидкости начинают описывать сложные траектории на фазовой плоскости, т.е. квазистационарные движения пластинки переходят в нестационарные.

Зависимости величин ξ и $1 - \xi$ от времени T_1 , которые пропорциональны квадратам амплитуд a_3 и a_1 при $\delta_0 = 0$ и $\xi_0 = 0.5$ приведены на рис. 3, где сплошные и пунктирные линии соответствуют случаям затухающих колебаний при $\gamma = 1$ и незатухающих колебаний при $\gamma = 0$, а цифры 1 и 2 отвечают ветвям a_3 и a_1 соответственно. Рисунок 3 показывает затухающий характер энергообмена между взаимодействующими подсистемами. Более того, точки касания сплошных кривых, т.е. точки наклона огибающих колебаний

$(\xi_i = 1 - \xi_i, T_{1i})$, позволяют определить величину, характеризующую затухание

энергии колебаний, по формуле $\frac{\ln\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)}{T_{1(i-1)} - T_{1i}}$, где амплитуды a_i определяются

по формулам (125).

Зависимость амплитуд колебаний a_3 и a_1 от времени при $\gamma = 1/2$, подсчитанная по формулам (156) и (157), показана штрих-пунктирными линиями.

Из рис. 3 видно, что с увеличением γ затухающие процессы усиливаются и период колебаний увеличивается, что указывает на то, что параметр дробности позволяет управлять демпфирующими процессами в рассматриваемой системе.

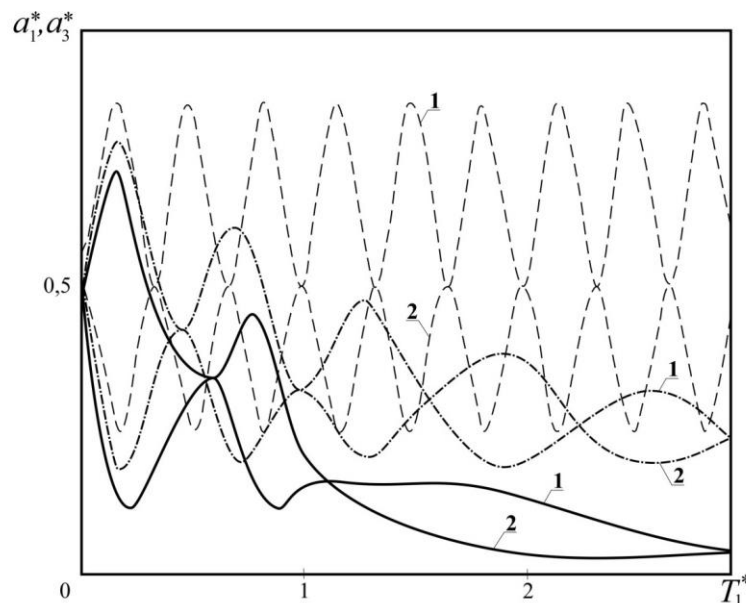


Рис. 3. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от безразмерного времени T_1^* в случае внутреннего резонанса 1:2

4.2. Внутренний резонанс один-к-одному $\omega_1 = \omega_2$ (93)

В этом случае функция тока $G(\xi, \delta)$ определяется соотношением (202), а фазовый портрет, построенный в соответствии с (202), зависит в значительной степени от величины коэффициента K . Рассмотрим несколько вариантов значений этого коэффициента, что позволит проанализировать его влияние на характер колебательных движений.

1 случай: $K = 0$. Тогда функция тока $G(\xi, \delta)$ описывается соотношением (197), и линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ приведены на рис. 4. Значения величины G указаны цифрами у соответствующих кривых, а направление течения фазовой жидкости показано стрелками на линиях тока.

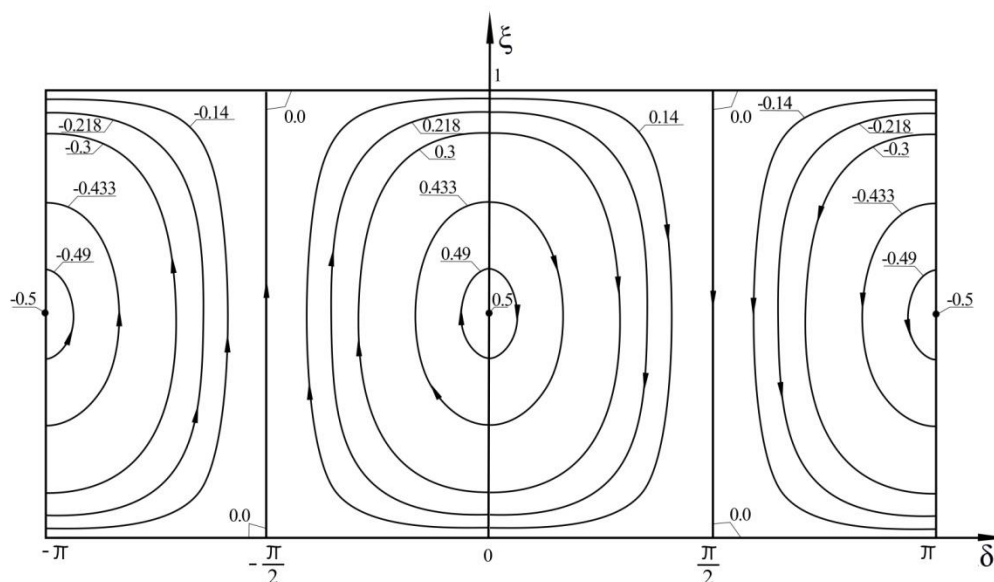


Рис.4. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса 1:1, когда $\omega_1 = \omega_2$ и $K = 0$

Из рис. 4 видно, что фазовая жидкость циркулирует внутри зон, ограниченных периметром прямоугольников, границами которых служат прямые линии $\xi = 0$, $\xi = 1$ и $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом течение внутри каждого прямоугольника изолировано. На всех четырех сторонах прямоугольников $G = 0$, а внутри функция G сохраняет свой знак. Функция G достигает экстремальных значений ± 0.5 в точках с координатами $\xi = \frac{1}{2}$, $\delta = \pm\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Переход элементов жидкости из точек $\xi = 0$, $\delta = \pi/2 \pm 2\pi n$ в точки $\xi = 0$, $\delta = -\pi/2 \pm 2\pi n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) и из точек $\xi = 1$, $\delta = -\pi/2 \pm 2\pi n$ в точки $\xi = 1$, $\delta = \pi/2 \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) осуществляется мгновенно, поскольку из распределения фазовых скоростей вдоль прямой $\delta = 0$ видно, что скорость v стремится к бесконечности при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 1$. Распределение скоростей вдоль вертикальных линий $\delta = \pm\pi n$ носит аperiодический характер, в то время как вблизи линии $\xi = 1/2$ оно является периодическим.

Переход частиц жидкости из точек $\xi = 1$, $\delta = -\pi/2 \pm 2\pi n$ в точки $\xi = 1$, $\delta = \pi/2 \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) происходит мгновенно, поскольку в соответствии с распределением фазовой скорости вдоль сечения $\delta = 0$ величина v стремится к бесконечности при $\xi \rightarrow 1$.

Вдоль линий $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) реализуется аperiодическое движение, модулированное только по амплитуде, поскольку с течением времени t величина ξ возрастает от ξ_0 до 1 (вдоль линии $\delta = -\pi/2$) или убывает от ξ_0 до 0 (вдоль линии $\delta = \pi/2$), и решение (172) может быть записано в виде солитоноподобного решения:

$$-\arcsin(1-2\xi)\Big|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{2b}{s}(e^{-sT_2} - 1), \quad \delta(T_2) = \delta_0 = \frac{\pi}{2} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Линии тока дают наглядную связь функции G со всеми типами энергообменных механизмов. Так, в случае незатухающих колебаний, т.е. когда коэффициент демпфирования равен нулю и $s=0$, точки с координатами $\xi_0 = 1/2$, $\delta_0 = \pm\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$) соответствуют стационарным режимам, поскольку $\dot{\xi} = 0$ и $\dot{\delta} = 0$ согласно соотношению (198). Стационарные точки $\xi_0 = 1/2$, $\delta_0 = \pm\pi n$ являются точками типа центр, так как при слабом отклонении от центра частица фазовой жидкости начинает двигаться вокруг стационарной точки по замкнутой траектории. Замкнутые линии тока соответствуют периодическим изменениям амплитуд и фаз колебаний.

Зависимости величин ξ и $1-\xi$ от T_2 , которые пропорциональны соответственно квадратам амплитуд a_1 и a_2 , при $\delta_0 = \pi/4$ и $\xi_0=0.5$ приведены на рис. 5, на котором сплошные и пунктирные линии соответствуют случаям затухающих и незатухающих колебаний. Из рис. 5 видно, что происходит затухание энергообмена, при этом точки касания сплошных линий, т.е. огибающих амплитуд колебаний $(\xi_i = 1-\xi_i, T_{2i})$, позволяют определить величину, характеризующую затухание энергии колебаний по формуле $\frac{\ln(a_{i+1}/a_i)}{T_{2(i-1)} - T_{2i}}$, где a_i определяются соотношениями (183) с учетом (193).

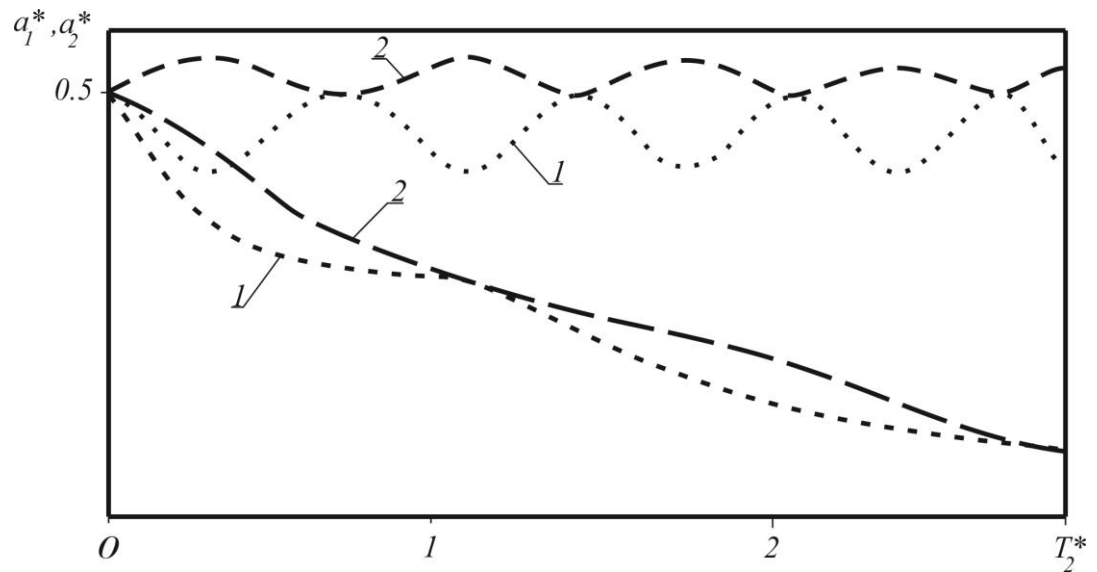


Рис.5: Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от безразмерного времени T_2^* в случае внутреннего резонанса 1:1

2) случай: $\frac{1}{2}Kb^{-1} = 0.1$. Тогда функция тока $G(\xi, \delta)$ (202) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \sqrt{\xi(1-\xi)} \cos \delta - 0.1\xi = G(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости приведены на рис. 6.

Как и в предыдущем случае, фазовая жидкость течет внутри длинного канала, границами которого служат линии $\xi = 0$ и $\xi = 1$, соответствующие движениям, модулированным по фазе. Одна часть линий тока не замкнута, что соответствует периодическому изменению амплитуд и аperiodическому изменению фаз. Другая часть линий тока замкнута, что отвечает периодическому изменению и амплитуд, и фаз. Линии, отвечающие аperiodическому режиму, являются границами зон замкнутых и незамкнутых линий тока. Из фазового портрета, приведенного на рис. 6, видно, что

циркуляционные зоны расположены в шахматном порядке у правого и левого берегов канала (такое расположение напоминает вихревые дорожки Кармана).

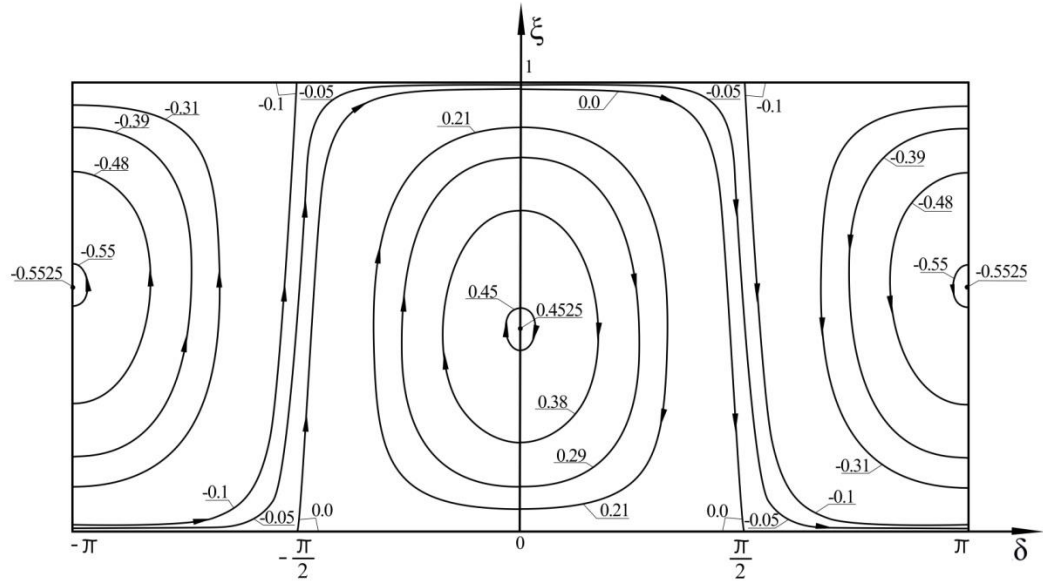


Рис.6. Фазовый портрет в случае резонанса 1:1 $\omega_1 = \omega_2$ при $\frac{1}{2}Kb^{-1} = 0.1$

Каждая зона у берега $\xi = 1$ окружена линией, для которой значение функции тока принимает значение $G = -0.1$. Однако только те части линии $G = -0.1$, которые окружают эти зоны снизу и приближаются к $\xi = 1$ в точках $\xi = 1$, $\delta = \pi/2 \pm \pi n$, принадлежат к области течения жидкости. Переход частиц жидкости из точек $\xi = 1$, $\delta = (3\pi/2) \pm \pi n$ в точки $\xi = 0$, $\delta = (\pi/2) \pm \pi n$ происходит мгновенно. Солитоноподобное решение вдоль сепаратрисы можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1.01}} \arcsin[1 - 2.02(1 - \xi)] \Big|_{1-\xi_0}^{1-\xi} = \frac{2b}{s} (e^{-s\tau_2} - 1), \quad \cos \delta = -0.1 \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}},$$

где ξ изменяется от $\xi_{min} = 0.0099$ до $\xi_{max} = 1$.

Циркуляционные зоны у берега $\xi = 0$ окружены линией, на которой $G = 0$. Однако только те части линии $G = 0$, которые ограничивают эти зоны сверху и приближаются к берегу $\xi = 0$ в точках $\xi = 0$, $\delta = \pi/2 \pm \pi n$, принадлежат к области течения жидкости. Переход частиц жидкости из точек $\xi = 0$, $\delta = (\pi/2) \pm \pi n$ в точки $\xi = 0$, $\delta = (-\pi/2) \pm \pi n$ происходит мгновенно. Солитоноподобное решение вдоль линии-сепаратрисы $G = 0$ имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{1.01}} \arcsin(1 - 2.02\xi) \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{2b}{s} (e^{-sT_2} - 1), \quad \cos \delta = 0.1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}},$$

где ξ изменяется от $\xi_{min} = 0.0099$ до $\xi_{max} = 1$.

Внутри обеих циркуляционных зон есть точки с экстремальными значениями функций тока: максимальное $G_{max} = 0.4525$ и минимальное $G_{min} = -0.5525$. Эти точки являются центрами, соответствующими устойчивым стационарным режимам $\xi = \xi_0 = 0.45$, $\delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$ и $\xi = \xi_0 = 0.55$, $\delta = \delta_0 = \pi \pm 2\pi n$ соответственно.

Между линиями, отвечающими значениям $G = 0$ и $G = -0.1$, расположены незамкнутые линии тока, которые соответствуют периодическому изменению амплитуд и аperiodическому изменению разности фаз.

3) случай: $\frac{1}{2}Kb^{-1} = \pm 1$. В этом случае функция тока $G(\xi, \delta)$ (202) принимает

вид

$$G(\xi, \delta) = \sqrt{\xi(1-\xi)} \cos \delta \mp \xi = G(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости приведены на рис. 7 и 8 соответственно.

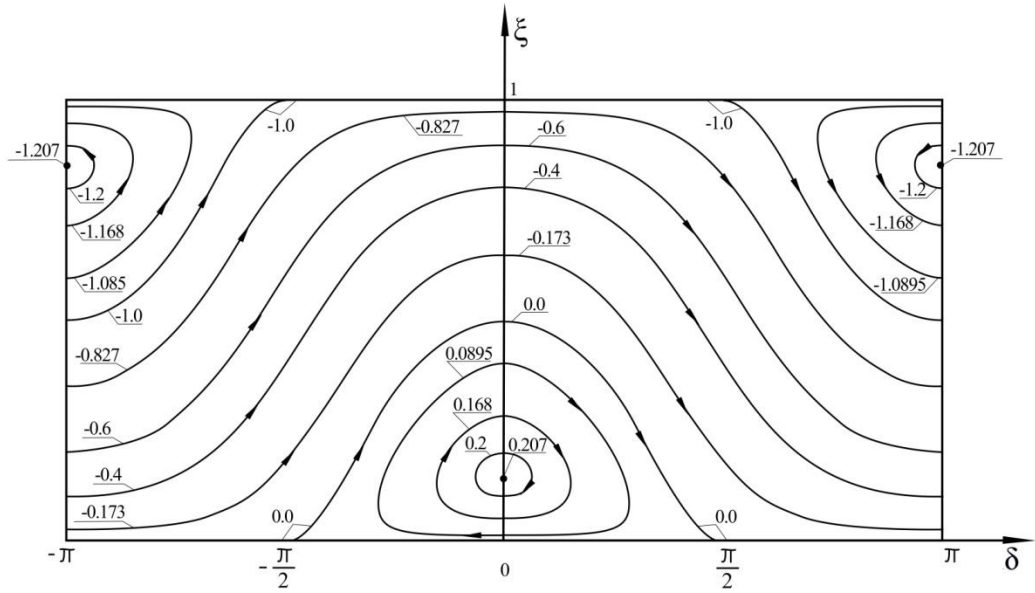


Рис.7. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса 1:1 $\omega_1 = \omega_2$ при

$$\frac{1}{2}Kb^{-1} = 1$$

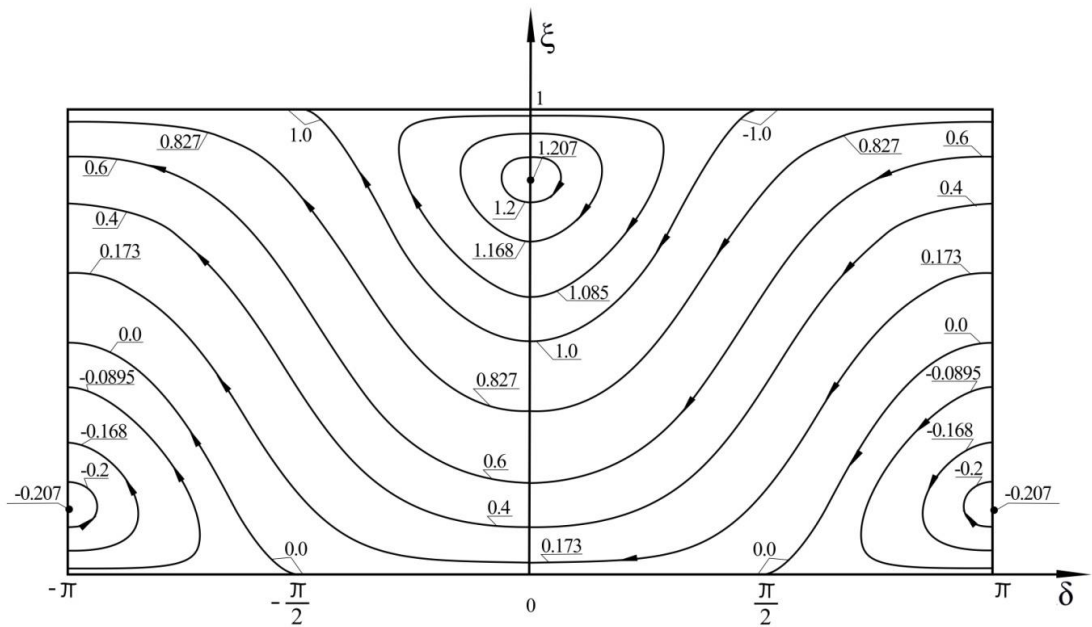


Рис.8. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса 1:1 $\omega_1 = \omega_2$ при

$$\frac{1}{2}Kb^{-1} = -1$$

Из сравнения рисунков 6 и 7 видно, что при увеличении параметра K зона незамкнутых линий тока становится шире, в то время как циркуляционные зоны, расположенные в шахматном порядке вдоль берегов канала $\xi = 0$ и $\xi = 1$, становятся уже.

Солитоноподобное решение вдоль сепаратрисы $G = 0$ вблизи берега $\xi = 0$ имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(1 - 4\xi) \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{2b}{s} (e^{-sT_2} - 1), \quad \cos \delta = \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}},$$

где ξ изменяется от $\xi_{\min} = 0$ до $\xi_{\max} = 0.5$, а вдоль сепаратрисы $G = -1$, примыкающей к линии $\xi = 1$, запишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin[1 - 4(1 - \xi)] \Big|_{1-\xi_0}^{1-\xi} = \frac{2b}{s} (e^{-sT_2} - 1), \quad \cos \delta = -\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}},$$

где ξ изменяется от $\xi_{\min} = 0.5$ до $\xi_{\max} = 1$.

Внутри циркуляционных зон расположены стационарные точки, т.е., центры, соответствующие устойчивым стационарным режимам, у которых функции тока принимают экстремальные значения: $G_{\max} = 0.207$ в точках с координатами $\xi = \xi_0 = 0.1465$, $\delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$ и $G_{\min} = -1.207$ в точках с координатами $\xi = \xi_0 = 0.8535$, $\delta = \delta_0 = \pi \pm 2\pi n$.

В случае отрицательного значения параметра Kb^{-1} портрет течения фазовой жидкости, показанный на рис. 7, сдвигается вдоль оси δ на величину π , а течение жидкости меняет направление на противоположное (см. рис. 8), и максимумы и минимумы меняются местами. При этом решения вдоль кривых-сепаратрис $G = 0$ и $G = 1$ записываются аналогично, как и в случаях, соответствующих фазовому портрету на рис. 7.

4.3. Внутренний резонанс один-к-одному $\omega_1 = \omega_3$ (94)

В данном параграфе рассмотрим другой случай внутреннего резонанса один-к-одному (94), когда одна из мод изгибных колебаний из плоскости связана с одной из мод колебаний в плоскости пластинки. В этом случае функция тока $G(\xi, \delta)$ определяется соотношением (230), а фазовый портрет, построенный в соответствии с (230), зависит значительно от величин коэффициентов K_2 и K_3 .

1) случай: $K_2 = K_3 = 0$. Тогда функция тока $G(\xi, \delta)$ строится на основе соотношения (198), а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ приведены на рис. 9. Значения функции G показаны цифрами у соответствующих кривых; направление течения частиц фазовой жидкости показаны стрелками на линиях тока.

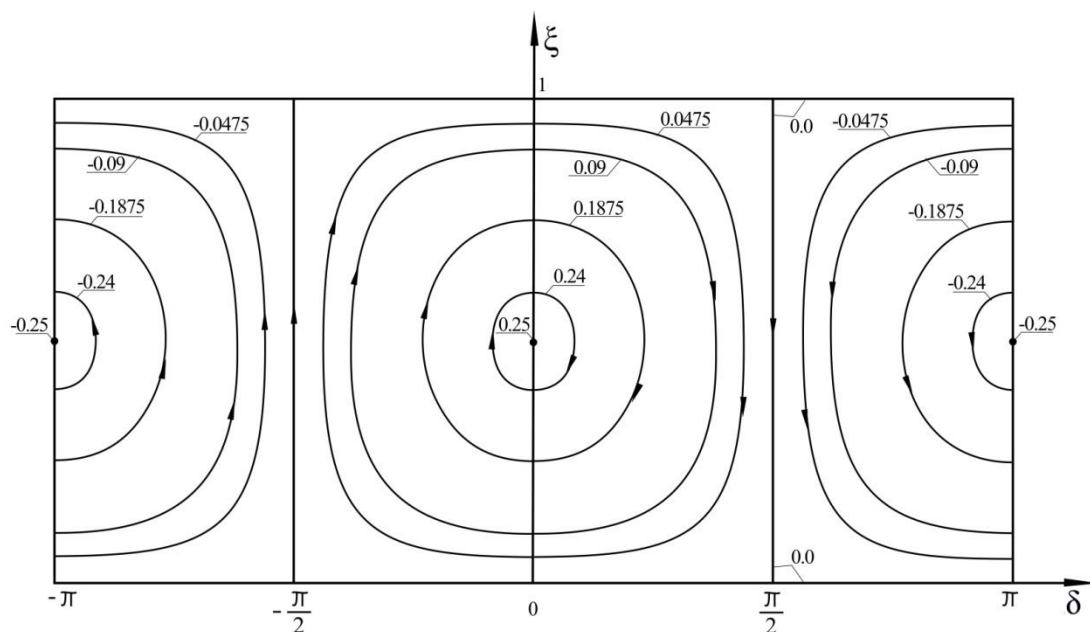


Рис. 9. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса $\omega_1 = \omega_3$ при

$$K_2 = K_3 = 0$$

Из рис. 9 видно, что фазовая жидкость течет внутри циркуляционных зон, расположенных внутри прямоугольников, ограниченных линиями $\xi = 0$, $\xi = 1$ и $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение внутри каждого такого прямоугольника изолировано. На всех четырех сторонах прямоугольника $G = 0$, а внутри величина G сохраняет свой знак. Функция G достигает экстремальных значений ± 0.25 в точках с координатами $\xi = \frac{1}{2}$, $\delta = \pm\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Вдоль границ $\xi = 0$ и $\xi = 1$ реализуются режимы, модулированные по амплитуде и фазе, поскольку частицы фазовой жидкости движутся с конечными скоростями (в отличие от аналогичного случая, приведенного на рис. 4 для внутреннего резонанса $\omega_1 = \omega_2$, где скорости частиц жидкости стремятся к бесконечности при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 1$), в то время как вдоль линий $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) существуют апериодические режимы, модулированные только по амплитуде, поскольку с увеличением времени t величина ξ увеличивается от ξ_0 до 1 (вдоль линии $\delta = -\pi/2$) или уменьшается от ξ_0 до 0 (вдоль линии $\delta = \pi/2$), а решение (227) может быть записано в виде солитоноподобного решения:

$$\ln \left| \frac{1-\xi}{\xi} \right|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{bE_0}{s} (1 - e^{-st_2}), \quad \delta(T_2) = \delta_0 = \frac{\pi}{2} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2) случай: $K_2(bE_0)^{-1} = -1$, $K_3 b^{-1} = 1/2$. В этом частном случае функция тока $G(\xi, \delta)$ (203) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \xi(1-\xi) \cos \delta + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{4} \xi^2 = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости показаны на рис. 10.

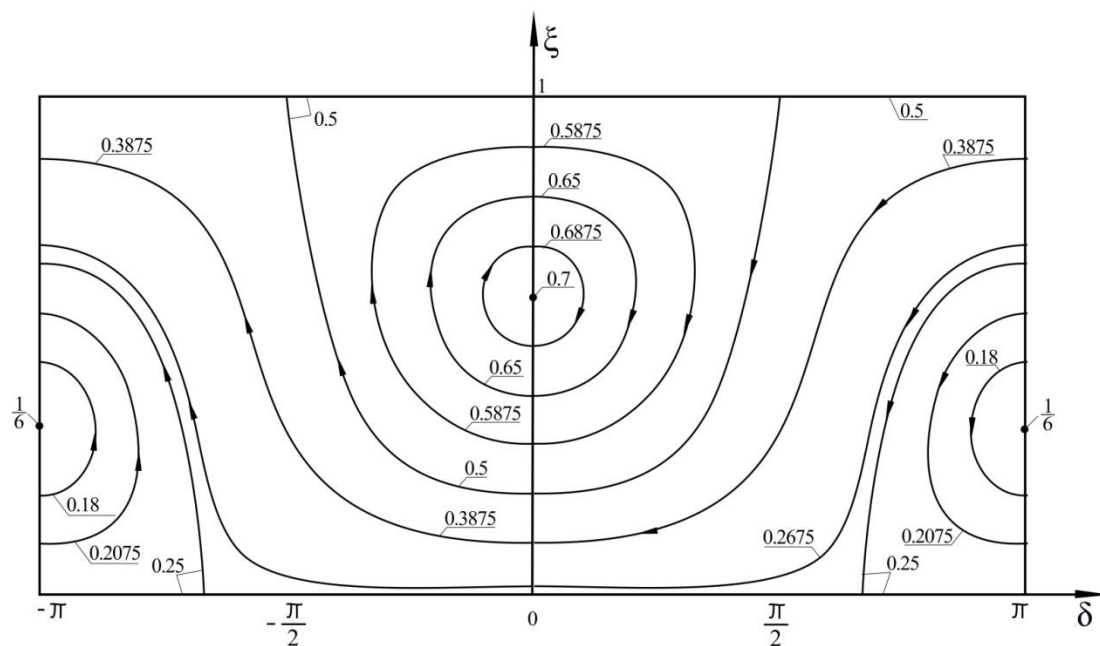


Рис. 10. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса $\omega_1 = \omega_3$ при

$$K_2(bE_0)^{-1} = -1 \text{ и } K_3b^{-1} = 1/2$$

Как и в предыдущем случае, частицы фазовой жидкости движутся вдоль бесконечно длинного канала, границами которого являются прямые $\xi = 0$ и $\xi = 1$, соответствующие режимам, модулированным по фазе. В одной части линии тока являются незамкнутыми, что соответствует периодическому изменению амплитуд и аperiodическому изменению фаз; в другой части они замкнуты, что отвечает периодическому изменению амплитуд и фаз. Линии аperiodического режима являются границами замкнутых и незамкнутых линий тока. Из фазового портрета на рис. 10 видно, что циркуляционные зоны расположены в шахматном порядке у берегов канала, что напоминает расположение вихревых дорожек Кармана.

Каждая зона у берега $\xi = 1$ окружена линией, на которой $G = 0.5$. Эта линия состоит из двух частей, соединенных друг с другом в точках ветвления с

координатами $\xi = 1$, $\delta = \pi/2 \pm \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Одна ветвь этой линии соответствует режиму $\xi = 1$, модулированному по фазе, а другая ветвь – аperiodическому режиму, в котором ξ изменяется от $\xi_{\min} = 0.2$ до $\xi_{\max} = 1$. В самой точке ветвления скорость течения фазовой жидкости равна нулю. Солитоноподобное решение вдоль сепаратрисы $G = 0.5$ записывается в виде

$$\ln \left| \frac{8}{1-\xi} \left(\sqrt{\left(\xi - \frac{1}{5} \right) \left(\xi + \frac{1}{3} \right)} - 4(1-\xi) + 4 \right) \right|_{1-\xi_0}^{1-\xi} = \frac{bE_0}{s} (e^{-sT_2} - 1),$$

$$\cos \delta = \frac{1-\xi}{4\xi}, \quad \frac{1}{5} \leq \xi \leq 1.$$

Циркуляционные зоны около берега $\xi = 0$ окружены линиями, на которых $G = 0.25$. Эти линии состоят из двух частей, соединенных друг с другом в точках ветвления с координатами $\xi = 0$, $\delta = 2\pi/3 \pm \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Одна ветвь каждой линии соответствует режиму $\xi = 0$, модулированному по фазе, а другая – аperiodическому режиму, у которого ξ изменяется от $\xi_{\min} = 0$ до $\xi_{\max} = 2/3$. В самой точке ветвления скорость течения фазовой жидкости равна нулю. Солитоноподобное решение вдоль сепаратрисы $G = 0.25$ имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{4}{\xi} \left(\sqrt{\left(\frac{2}{3} - \xi \right) \left(\frac{6}{5} - \xi \right)} - 7\xi + 6 \right) \right|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}),$$

$$\cos \delta = -\frac{2-\xi}{4(1-\xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{2}{3}.$$

Внутри обеих циркуляционных зон есть точки с экстремальными значениями функции тока: максимальное $G_{\max} = 0.7$ и минимальное $G_{\min} = 1/6$. Эти точки являются центрами, соответствующими устойчивым стационарным режимам $\xi = \xi_0 = 0.6$, $\delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$ и $\xi = \xi_0 = 1/3$, $\delta = \delta_0 = \pi \pm 2\pi n$ соответственно.

Между линиями, отвечающими $G = 0.25$ и $G = 0.5$, расположены незамкнутые линии тока, которые соответствуют периодическому изменению амплитуд и аperiodическому изменению разности фаз.

3) случай: $K_2(bE_0)^{-1} = -1$, $K_3b^{-1} = -1$. В этом случае функция тока $G(\xi, \delta)$ (203) имеет вид

$$G(\xi, \delta) = \xi(1 - \xi) \cos \delta - \frac{1}{2} + 2\xi - \xi^2 = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости показаны на рис. 11.

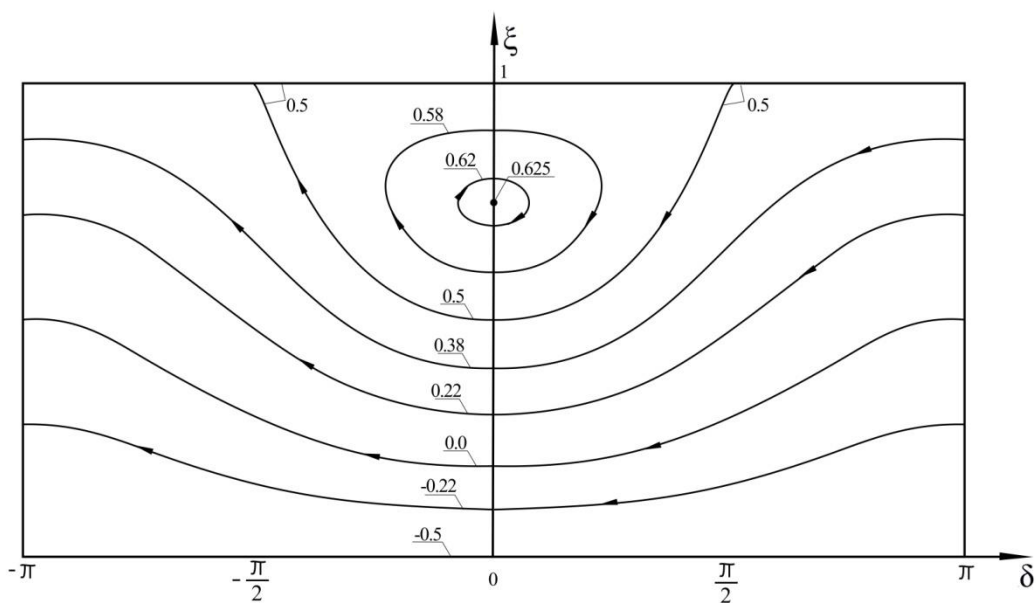


Рис. 11. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса $\omega_1 = \omega_3$ при

$$K_2(bE_0)^{-1} = -1 \text{ и } K_3b^{-1} = -1$$

Из рис. 11 видно, что в отличие от предыдущего случая, приведенного на рис. 10, циркуляционные зоны у берега $\xi = 0$ и аperiodический режим

исчезают. При $\xi \rightarrow 0$ линии тока становятся более пологими и стремятся к линии $\xi = 0$ с $G = G_{\min} = -0.5$, где реализуется режим, модулированный по амплитуде и фазе.

Каждая циркуляционная зона у берега $\xi = 1$ окружена линией, на которой $G = 0.5$. Эта линия состоит из двух частей, связанных с друг с другом в точках ветвления с координатами $\xi = 1$, $\delta = \pi/2 \pm \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Одна ветвь этой линии соответствует режиму $\xi = 1$, модулированному по фазе, а другая – аperiодическому режиму, у которого ξ изменяется от $\xi_{\min} = 0.5$ до $\xi_{\max} = 1$. В самой точке ветвления скорость течения фазовой жидкости равна нулю. Солитоноподобное решение вдоль сепаратрисы $G = 0.5$ имеет вид

$$\ln \left| \frac{\sqrt{2\xi - 1} - 1}{\sqrt{2\xi - 1} + 1} \right|_{1-\xi_0}^{1-\xi} = \frac{bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \cos \delta = \frac{1-\xi}{\xi}, \quad \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1.$$

Внутри циркуляционных зон имеются точки с максимальным значением $G_{\max} = 0.625$. Эти точки являются центрами, соответствующими устойчивым стационарным колебаниям $\xi = \xi_0 = 0.75$, $\delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$. Линии, у которых $-0.5 < G < 0.5$, являются незамкнутыми и соответствуют периодическому изменению амплитуд и аperiодическому изменению разности фаз.

4) случай: $K_2(bE_0)^{-1} = 1$, $K_3 b^{-1} = 1$. Тогда функция тока $G(\xi, \delta)$ (230) имеет вид

$$G(\xi, \delta) = \xi(1-\xi)\cos\delta + \frac{1}{2} - 2\xi = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости показаны на рис. 12.

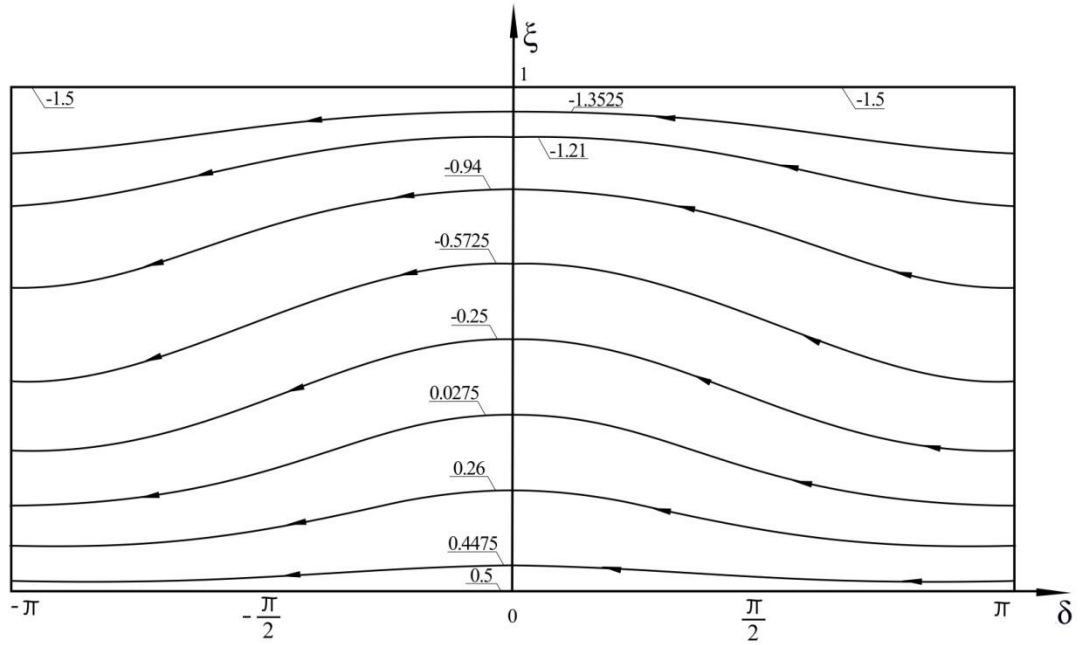


Рис. 12. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса $\omega_1 = \omega_3$ при

$$K_2(bE_0)^{-1} = 1 \text{ и } K_3b^{-1} = 1$$

На рис. 12 показан фазовый портрет, на котором есть только незамкнутые линии тока, вдоль которых частицы фазовой жидкости движутся в направлении уменьшения величины δ . При $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 1$ линии тока становятся более пологими и стремятся соответственно к линиям $\xi = 0$ с $G = G_{\max} = 0.5$ и $\xi = 1$ с $G = G_{\min} = -0.5$, где реализуются режимы, модулированные по фазе.

5) случай: $K_2 = 0$, $K_3b^{-1} = 1$. В этом случае функция тока $G(\xi, \delta)$ (230) имеет вид

$$G(\xi, \delta) = \xi(1 - \xi) \cos \delta - \frac{1}{2} + \xi - \xi^2 = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости приведены на рис. 13.

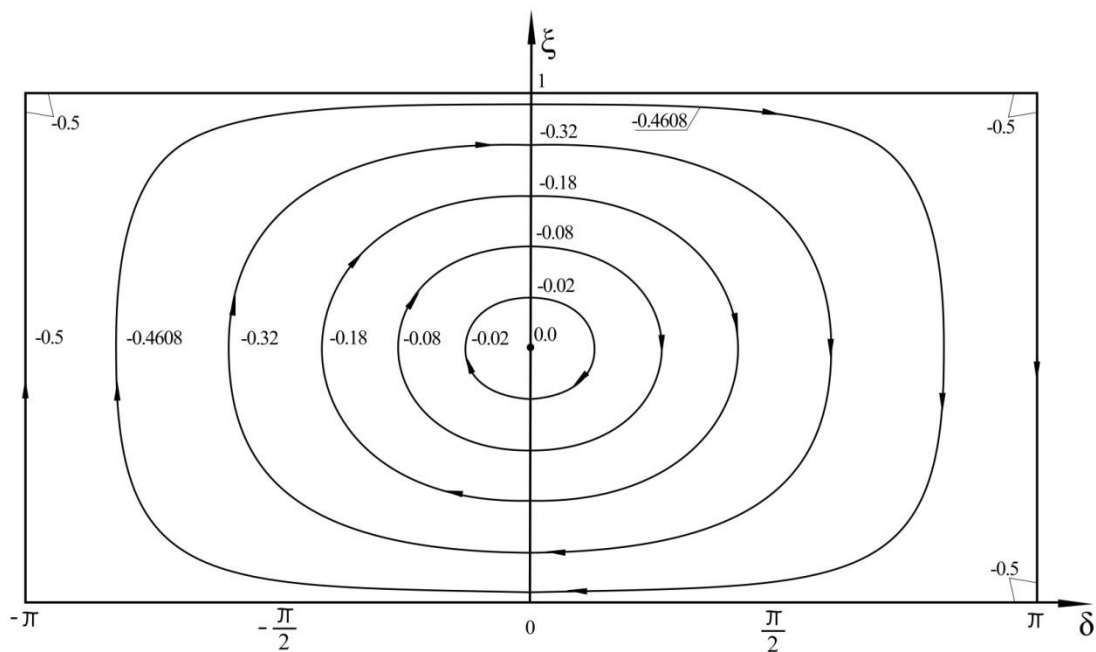


Рис. 13. Фазовый портрет в случае внутреннего резонанса $\omega_1 = \omega_3$ при

$$K_2 = 0 \text{ и } K_3 b^{-1} = 1$$

Из рис. 13 видно, что фазовая жидкость течет внутри циркуляционных зон, ограниченных периметром прямоугольников со сторонами $\xi = 0$, $\xi = 1$ и $\delta = \pm(\pi) \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение внутри каждого из прямоугольников изолировано. На всех четырех сторонах $G = -0.5$, а внутри $-0.5 < G < 0$, достигая максимальной величины $G_{\max} = 0$ в точках с координатами $\xi = \frac{1}{2}$, $\delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Вдоль границ $\xi = 0$ и $\xi = 1$ реализуются режимы, модулированные по фазе, так как частицы фазовой жидкости движутся с конечными скоростями

$v_\delta = \mp bE_0(1 + \cos \delta)e^{-sT_2}$, при этом $\tan \frac{\delta}{2} \Big|_{\delta_0} = \mp \frac{bE_0}{s}(1 - e^{-sT_2})$, где знаки «-» и «+» соответствуют границам $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Вдоль вертикальных прямых $\delta = \delta_0 = const = \pi \pm 2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots$) для всех $0 \leq \xi_0 \leq 1$ существуют стационарные режимы, затухающие со временем.

4.4. Комбинационный резонанс аддитивного типа $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_3$ (98)

Теперь проведем численный анализ случая комбинационного внутреннего резонанса аддитивного типа $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_3$, когда две различные формы колебаний в плоскости связаны с определенной формой колебаний из плоскости.

Для этого случая функция тока $G(\xi, \delta)$ определяется соотношением (267), а фазовый портрет, который можно построить на основании соотношения (267), зависит существенным образом от значений коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 .

4.4.1. Случай $K_1 = K_2 = K_3 = 0$

Для этого случая функция тока $G(\xi, \delta)$ определяется соотношением (262), из которого видно, что функция тока также зависит от констант интегрирования c_1 , c_2 , и c_3 , поэтому рассмотрим их различные сочетания.

1) случай: $c_1 = c_2 = 0$ и $c_3 = \frac{1}{4}$. Тогда функция тока (262) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\frac{1}{4} + \xi \right) (-\xi) \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ приведены на рис. 14. Значения величины G указаны цифрами у соответствующих кривых, а

направление движения точек фазовой жидкости показано стрелками на линиях тока.

В данном случае скорости частиц фазовой жидкости определяются следующими соотношениями:

$$v_{\xi} = \dot{\xi} = -2bE_0 \left(\frac{1}{4} + \xi \right) \sin \delta e^{-sT_2}, \quad v_{\delta} = \dot{\delta} = -2bE_0 \left(\frac{1}{4} + \xi \right) \cos \delta e^{-sT_2}.$$

Из рис. 14 видно, что фазовая жидкость течет в пределах циркуляционных зон, которые ограничены периметрами прямоугольников, границами которых являются линии $\xi = 0$, $\xi = 1$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение в каждом прямоугольнике является изолированным. Вдоль трех сторон прямоугольника, а именно: $\xi = 0$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, $G = 0$, и внутри каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак. Вдоль стороны $\xi = 1$ функции тока G изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1$, $\delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 14).

Горизонтальная и вертикальные линии тока, на которых $G = 0$, являются сепаратрисами, которые связаны друг с другом в седлообразных стационарных точках с координатами $\xi = \xi_0 = 0$, $\delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$.

Все линии тока внутри каждого прямоугольника не замкнуты, при этом их начальные и конечные точки находятся на линии $\xi = 1$. На рис. 14 показано распределение скоростей точек фазовой жидкости вдоль линий $\xi = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ и линий $\delta = 0$ и $\delta = -\frac{\pi}{2}$, где $v_{\delta или \xi}^* = \frac{v_{\delta или \xi}}{2bE_0}$.

Вдоль линии $\xi = 0$ наблюдается режим, модулированный по фазе и затухающий с течением времени:

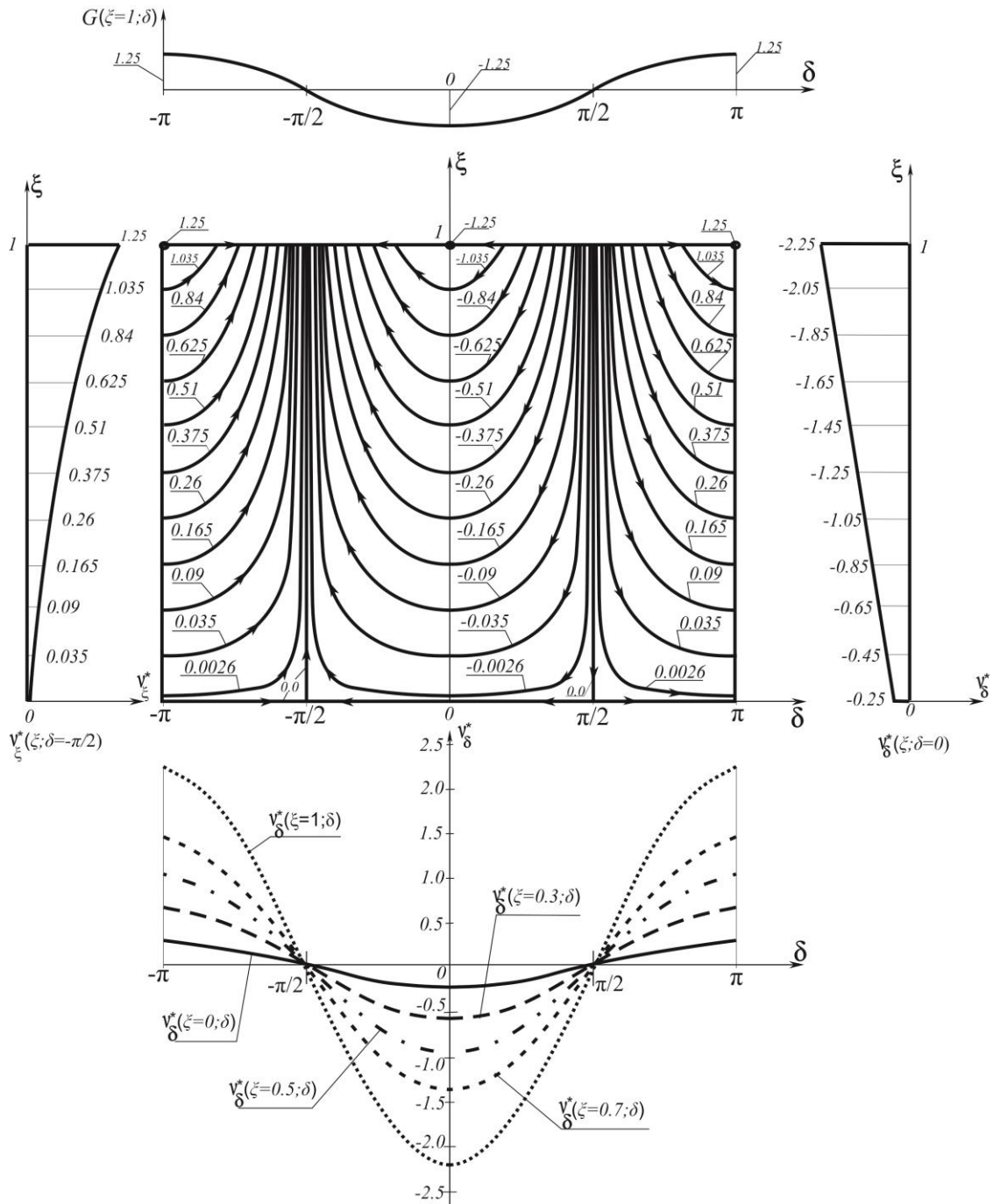


Рис. 14. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{4}$$

$$\xi(T_2) = \xi_0 = 0, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right|_{\delta_0}^{\delta} = -\frac{2bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}).$$

Вдоль линий $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при обычной вязкости решение может быть записано для режимов, модулированных по амплитуде и затухающих во времени:

$$\ln \left| \frac{\xi}{\frac{1}{4} + \xi} \right|_{\xi_0}^{\xi} = \pm \frac{2bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta(T_2) = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

2) случай: $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{8}$. Тогда функция тока (262) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\frac{1}{64} - \xi^2 \right) \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ представлены на рис. 15, из которого видно, что бесконечный канал $-\infty < \delta < \infty$, ограниченный линиями $\xi = 0$ и $\xi = 1$, разделен на совокупность прямоугольников линиями $\delta(T_2) = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В пределах каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак, и все линии тока не замкнуты с начальными и конечными точками на границах $\xi = 0$ и $\xi = 1$, вдоль которых функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1, \delta = \pm \pi n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $\xi = 0, \delta = \pm \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 15).

В рассматриваемом случае скорости частиц фазовой жидкости определяются соотношениями:

$$v_{\xi} = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\frac{1}{64} - \xi^2 \right) \sin \delta e^{-sT_2}, \quad v_{\delta} = \dot{\delta} = -2bE_0 (-2\xi) \cos \delta e^{-sT_2},$$

откуда следует, что вдоль сепаратрис с $G(\xi, \delta) = 0$, которые являются границами прямоугольников, могут быть найдены следующие аналитические решения:

а) режим, модулированный по фазе, вдоль линии $\xi = \frac{1}{8}$

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{8}, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = -\frac{2bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}),$$

и б) режимы, модулированные по амплитуде и затухающие во времени, вдоль линий $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\left| \ln \frac{\xi - \frac{1}{8}}{\xi + \frac{1}{8}} \right|_{\xi_0}^{\xi} = \mp \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta(T_0) = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При этом прямолинейные сепаратрисы связаны друг с другом в седлообразных точках, соответствующих неустойчивым стационарным режимам, с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{1}{8}, \delta(T_0) = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$.

На нижней границе $\xi = 0$ для любого значения разности фаз δ скорость $v_{\delta} = \dot{\delta}(T_2) = 0$, в то время как скорость $v_{\xi} = \dot{\xi}(\delta, T_2)$ стремится к нулю при $\delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Поэтому точки типа центр с координатами $\xi = \xi_0 = 0, \delta = \delta_0 = 2\pi n, G = \frac{1}{64}$ и $\xi = \xi_0 = 0, \delta = \delta_0 = \pi \pm 2\pi n, G = -\frac{1}{64}$ соответствуют устойчивым стационарным режимам.

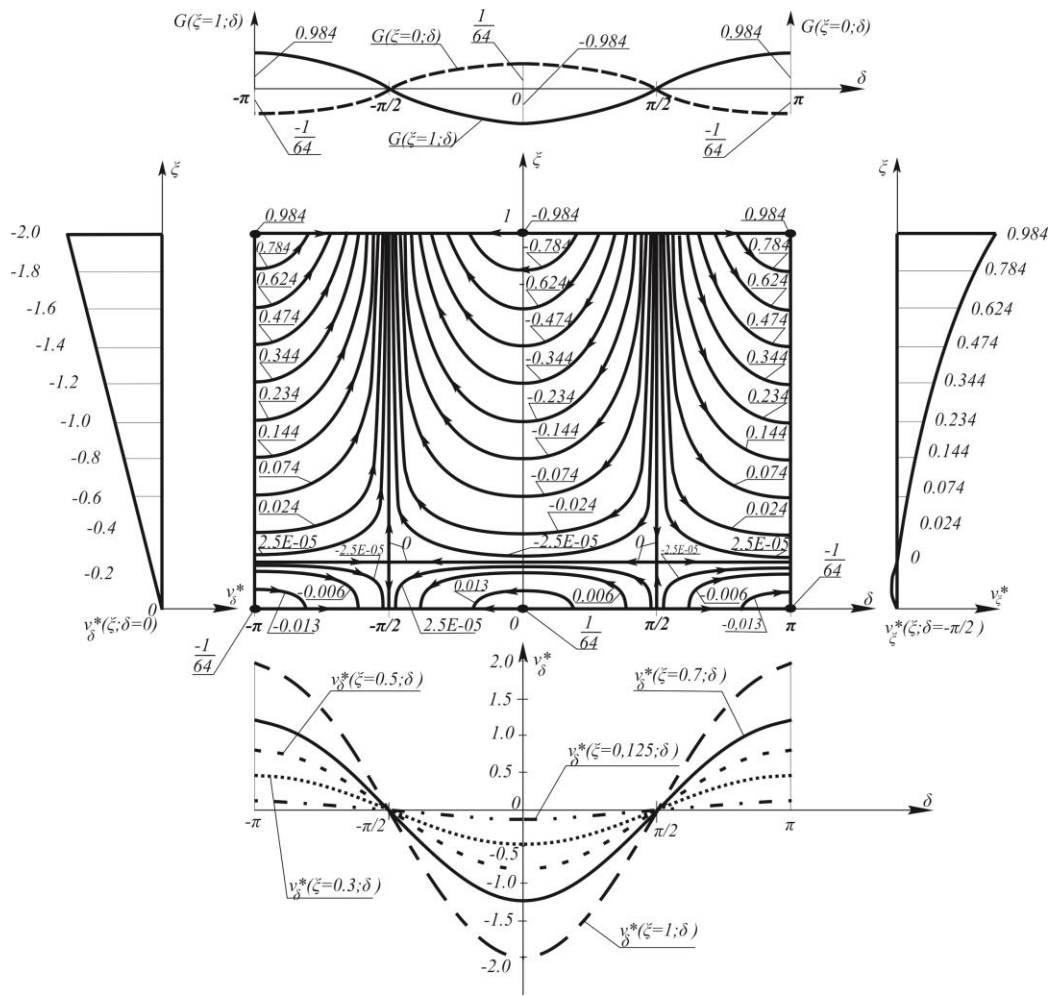


Рис. 15. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{8}$$

3) случай: $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$ и $c_3 = 0$. Тогда функция тока (262) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\frac{1}{4} - \xi \right) \xi \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0)$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ представлены на рис. 16, на котором видно, что бесконечный канал $(-\infty < \delta < \infty)$, ограниченный линиями $\xi = 0$ и $\xi = 1$, разделён на совокупность прямоугольников линиями $\xi = \frac{1}{4}$

и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В пределах каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак, при этом в верхних прямоугольниках все линии тока не замкнуты с начальными и конечными точками на границе $\xi = 1$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1, \delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 16). В то же время вдоль линии $\xi = 0$ значение функции тока постоянно и равно нулю, и внутри нижних прямоугольников все линии тока замкнуты. Функция G достигает экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1, \delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $\xi = \frac{1}{8}, \delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) в пределах верхних и нижних прямоугольников соответственно, при этом точки с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{1}{8}, \delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$ являются центрами, соответствующими стационарным движениям.

В рассматриваемом случае скорости частиц фазовой жидкости определяются следующими соотношениями:

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\frac{1}{4} - \xi \right) \xi \sin \delta e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left(\frac{1}{4} - 2\xi \right) \cos \delta e^{-sT_2},$$

откуда следует, что вдоль сепаратрис с $G(\xi, \delta) = 0$, которые являются границами прямоугольников, можно найти следующие аналитические решения:

а) модулированный по фазе режим вдоль линии $\xi = 0$

$$\xi(T_2) = \xi_0 = 0, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2});$$

б) модулированный по фазе режим вдоль линии $\xi = \frac{1}{4}$

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{3bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}),$$

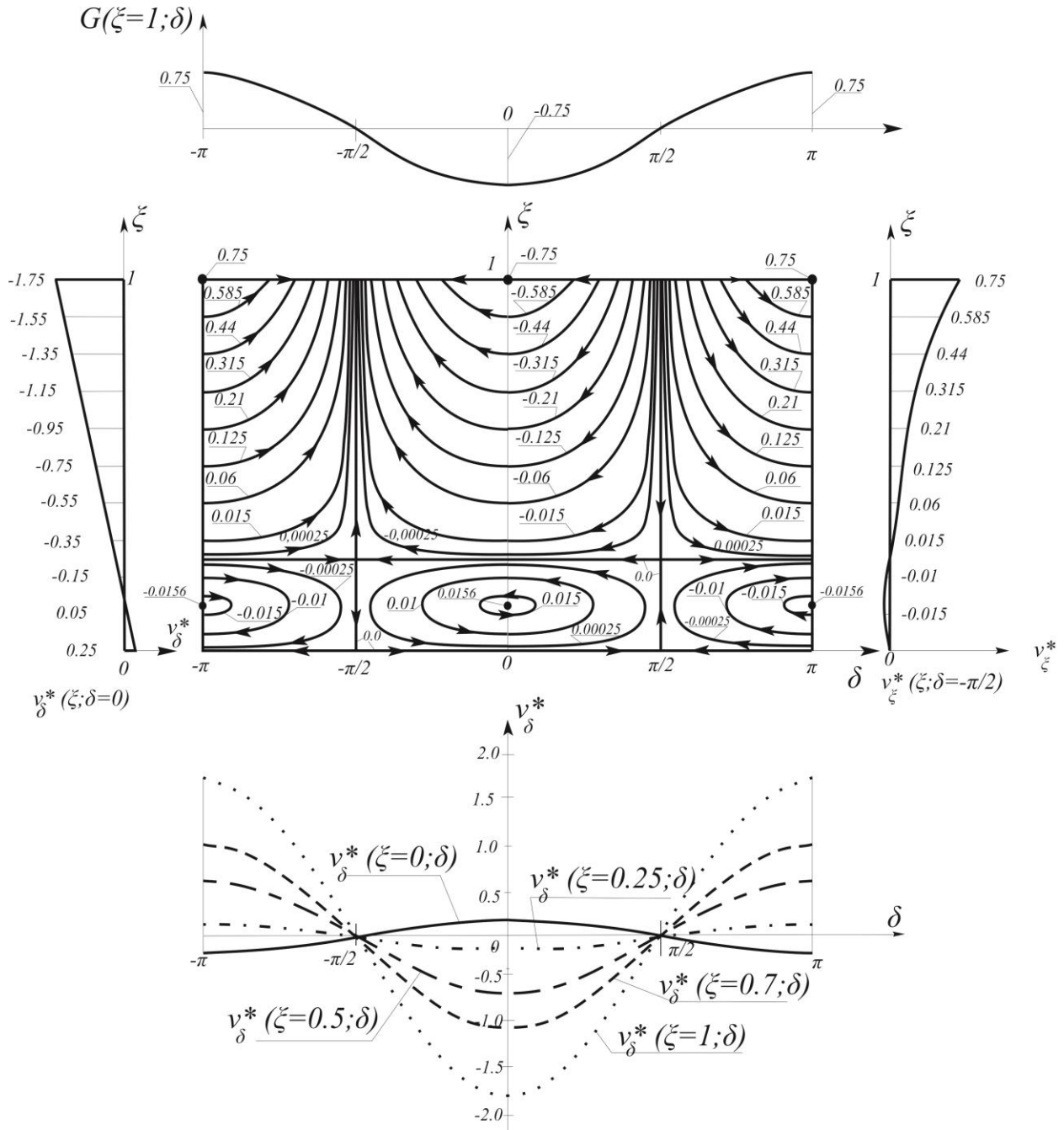


Рис. 16. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

(98) при $K_1 = K_2 = K_3 = 0$ и $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = 0$

и в) модулированный по амплитуде режим вдоль линий $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$)

$$\left| \ln \frac{\xi}{\xi + \frac{1}{4}} \right|_{\xi_0}^{\xi} = \mp \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta(T_0) = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n, \quad n=0,1,2,\dots$$

При этом прямолинейные сепаратрисы связаны друг с другом в седлообразных точках, соответствующих неустойчивым стационарным режимам, с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{1}{4}$, $\delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ и $\xi = \xi_0 = 0$, $\delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$).

Сравнение рис. 15 и 16 показывает, что точки типа центр, где $G(\xi, \delta) = \pm \frac{1}{64}$, смещены от линии $\xi = 0$ к линии $\xi = \frac{1}{8}$.

4) случай: $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ и $c_3 = -\frac{1}{4}$. Тогда функция тока (262) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\frac{1}{4} - \xi \right) \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а скорости частиц фазовой жидкости определяются следующим образом:

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\frac{1}{4} - \xi \right) \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \sin \delta e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left(\frac{3}{4} - 2\xi \right) \cos \delta e^{-sT_2}.$$

Линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ представлены на рис. 17, из которого видно, что бесконечный канал ($-\infty < \delta < \infty$), ограниченный линиями $\xi = 0$ и $\xi = 1$, разделен на совокупность прямоугольников линиями $\xi = \frac{1}{4}$, $\xi = \frac{1}{2}$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$), вдоль которых $G(\xi, \delta) = 0$.

Внутри каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак, при этом в верхних прямоугольниках все линии тока не замкнуты с начальными и конечными точками на верхней границе $\xi=1$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi=1, \delta=\pm 2\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$) (рис. 17). Внутри нижних прямоугольников все линии тока также не замкнуты с начальным и конечным точками на нижней границе $\xi=0$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi=0, \delta=\pm 2\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$). Внутри средних прямоугольников все линии тока замкнуты, что соответствует периодическим изменениям амплитуд и в разности фаз. При этом функция G достигает экстремальных значений в точках с координатами $\xi=\frac{3}{8}, \delta=\pm 2\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$), которые являются точками типа центр, соответствующими стационарным устойчивым колебаниям.

Сравнение рис. 16 и 17 показывает, что на фазовом портрете область шириной $\frac{1}{4}$, содержащая замкнутые линии тока, смещена вверх.

Вдоль сепаратрис с $G(\xi, \delta)=0$, которые являются границами прямоугольников, найдены следующие аналитические решения:

а) модулированный по фазе режим вдоль линии $\xi=\frac{1}{4}$

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2});$$

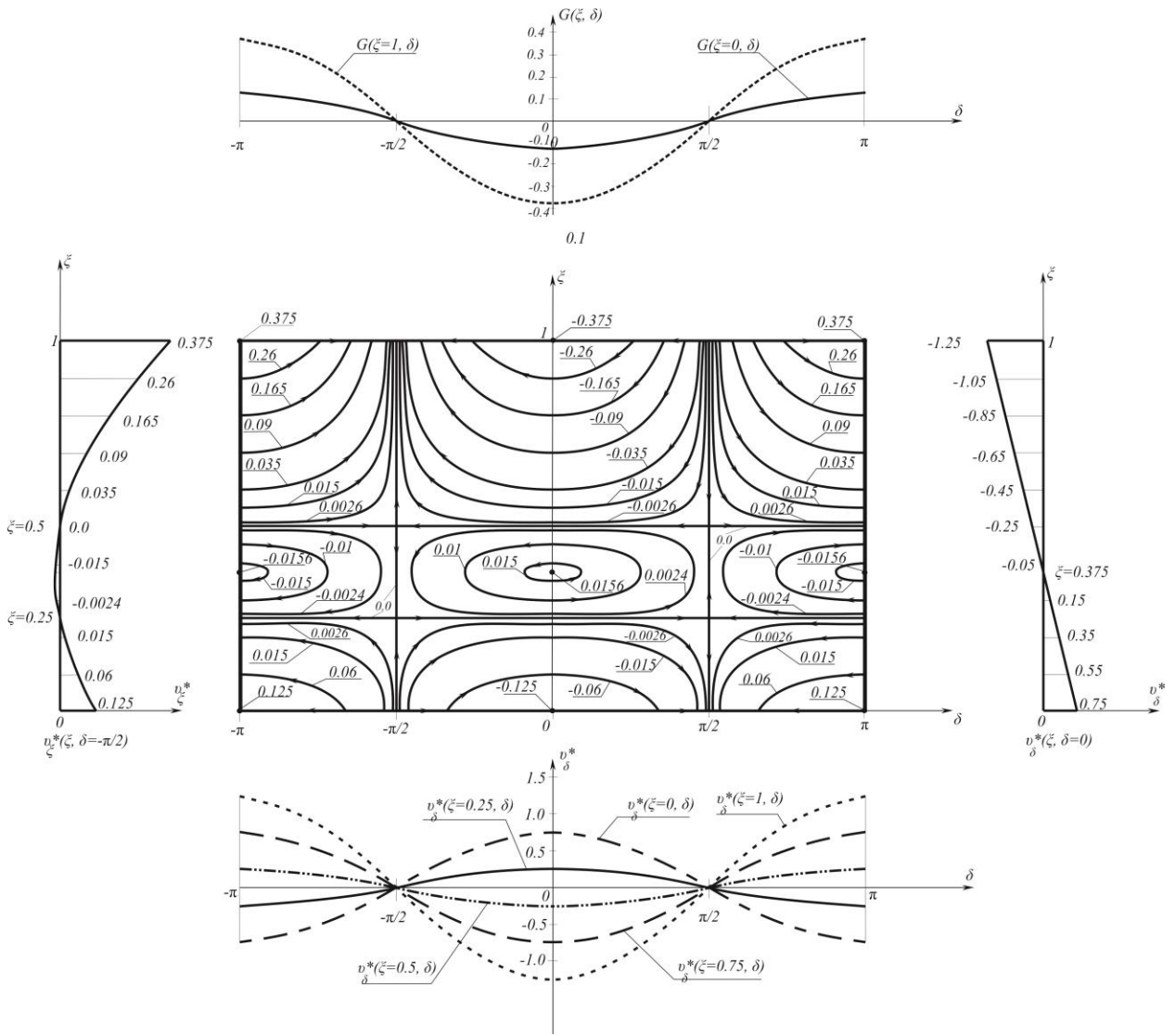


Рис. 17. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -\frac{1}{4}$$

б) модулированный по фазе режим вдоль линии $\xi = \frac{1}{2}$

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = -\frac{3bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}),$$

и в) модулированный по амплитуде режим вдоль линий $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\left| \ln \frac{\xi - \frac{1}{2}}{\xi - \frac{1}{4}} \right|_{\xi_0}^{\xi} = \mp \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta(T_0) = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При этом сепаратрисы соединены друг с другом в седлообразных точках, соответствующих неустойчивым стационарным режимам, с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{1}{4}$, $\delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ и $\xi = \xi_0 = \frac{1}{2}$, $\delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

5) случай: $c_1 = c_2 = 1$ и $c_3 = -\frac{3}{4}$. Тогда функция тока (262) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{3}{4} \right) (1 - \xi) \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а скорости частиц фазовой жидкой определяются следующими соотношениями:

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{3}{4} \right) (1 - \xi) \sin \delta e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left(\frac{3}{4} - 2\xi \right) \cos \delta e^{-sT_2}$$

Линии тока фазовой жидкости на плоскости $\xi - \delta$ представлены на рис. 18, из которого видно, что бесконечный канал ($-\infty < \delta < \infty$), ограниченный линиями $\xi = 0$ и $\xi = 1$, разделен на совокупность прямоугольников линиями $\xi = \frac{3}{4}$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), вдоль которых $G(\xi, \delta) = 0$. В пределах каждого прямоугольника значения G сохраняют свой знак.

При этом в пределах нижних прямоугольников все линии тока являются незамкнутыми с начальными и конечными токами на нижней границе $\xi = 0$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 0, \delta = \pm \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Внутри верхних прямоугольников все линии тока замкнуты, что соответствует периодическому изменению амплитуд и разности фаз, при этом функция G достигает

экстремальных значений в точках с координатами $\xi = \frac{3}{8}$, $\delta = \pm\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), которые являются точками типа центр, соответствующими стационарным устойчивым колебаниям.

Из сравнения рис. 17 и 18 видно, что зона шириной $\frac{1}{4}$, содержащая замкнутые линии тока, смещена вверх еще раз, а ее нижняя и верхняя границы $\xi = \frac{3}{4}$ и $\xi = 1$ соответствуют двум режимам, модулированным по фазе, где $G_0 = 0$:

$$\text{а) } \xi(T_2) = \xi_0 = 1, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = -\frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}),$$

$$\text{б) } \xi(T_2) = \xi_0 = \frac{3}{4}, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}).$$

Вдоль линий $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) с $G_0 = 0$ выполняются режимы, модулированные по амплитуде

$$\left| \ln \frac{\xi - 1}{\xi - \frac{3}{4}} \right| \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \mp \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta(T_0) = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

при этом сепаратрисы соединены друг с другом в седлообразных точках с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{3}{4}$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ и $\xi = \xi_0 = 1$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, соответствующих неустойчивым стационарным режимам.

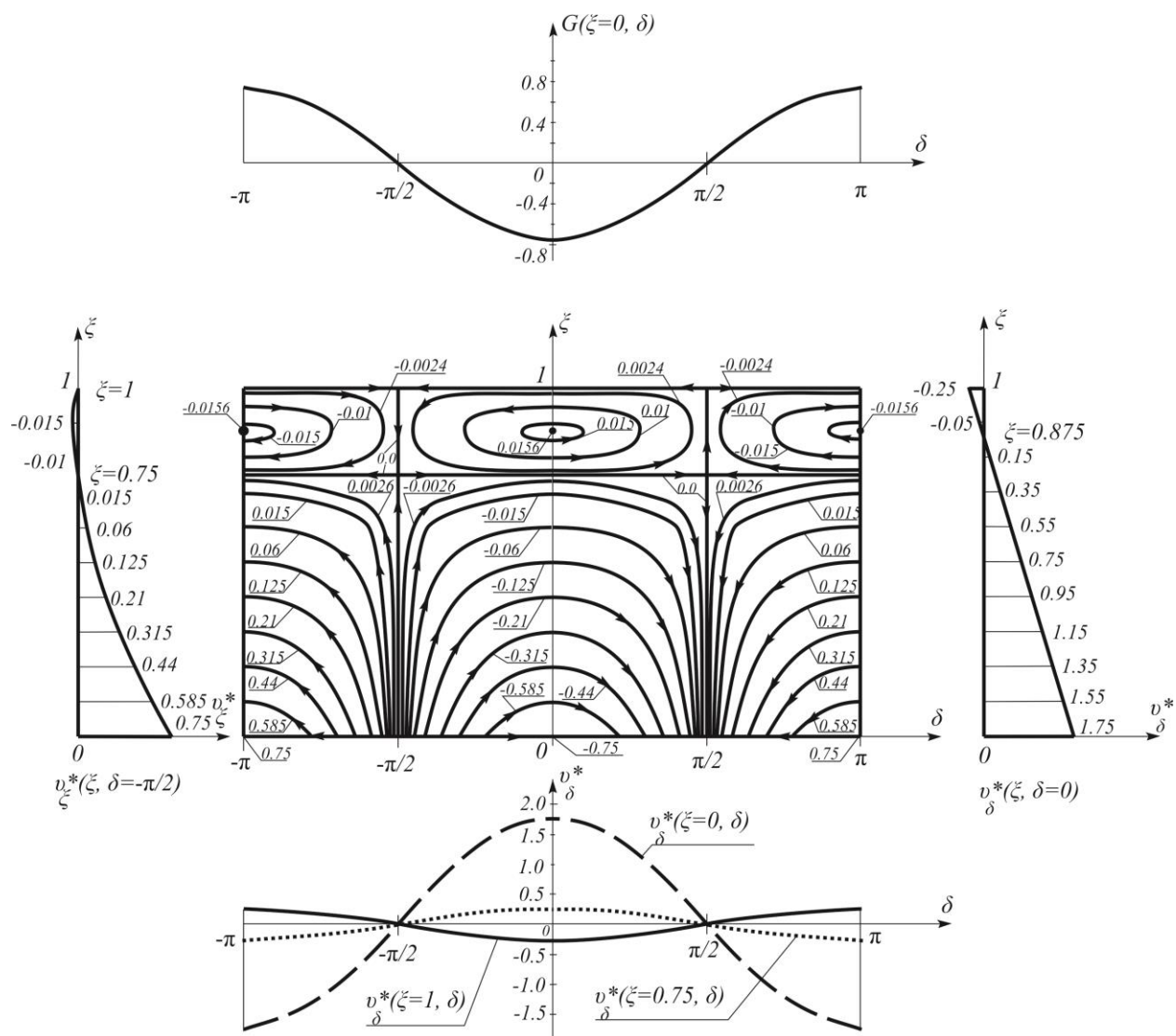


Рис. 18. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = 1 \text{ и } c_3 = -\frac{3}{4}$$

б) случай: $c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{3}{5}, c_3 = -\frac{1}{4}$. В этом случае функция тока (262) принимает

ВИД

$$G(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi\right) \left(\frac{3}{5} - \xi\right)} \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а скорости частиц фазовой жидкой определяются из следующих соотношений:

$$v_{\xi} = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{1}{4} \right) \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi \right) \left(\frac{3}{5} - \xi \right)} \sin \delta e^{-sT_2},$$

$$v_{\delta} = \dot{\delta} = 2bE_0 \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi \right) \left(\frac{3}{5} - \xi \right)}}{2\sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi \right) \left(\frac{3}{5} - \xi \right)}} - \frac{\left(\xi - \frac{1}{4} \right) (1 - 2\xi)}{2\sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi \right) \left(\frac{3}{5} - \xi \right)}} \right] \cos \delta e^{-sT_2}.$$

Линии тока приведены на рис. 19, из которого видно, что если константы c_1 и c_2 не равны друг другу, тогда вдоль канала существует зона, свободная от линий тока.

При этом верхняя зона бесконечного канала ($-\infty < \delta < \infty$) ограничена линиями $\xi = \frac{3}{5}$ и $\xi = 1$ и разделена на совокупность прямоугольников линиями $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), вдоль которых $G(\xi, \delta) = 0$. В пределах каждого прямоугольника значение G сохраняет свой знак, и все линии тока являются незамкнутыми с начальным и конечным точками на верхней границе $\xi = 1$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1, \delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 19).

Нижняя зона бесконечного канала ограничена линиями $\xi = 0$ и $\xi = \frac{2}{5}$ и, в свою очередь, подразделяется на две подзоны линией $\xi = \frac{1}{4}$ и на совокупность прямоугольников линиями $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), вдоль которых $G(\xi, \delta) = 0$. Внутри нижних прямоугольников все линии тока не замкнуты с начальным и конечным точками на нижней границе $\xi = 0$, вдоль которой функция тока

изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 0$, $\delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В пределах средних прямоугольников все линии тока замкнуты, что соответствует периодическим изменениям амплитуд и разности фаз, при этом функции G достигает экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 0.348$, $\delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), которые являются точками типа центр, соответствующими устойчивым стационарным движениям.

Вдоль границы $\xi = \frac{1}{4}$, где $G = 0$, реализуется режим, модулированный по фазе,

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{\sqrt{2} b E_0}{10s} (1 - e^{-sT_2}),$$

при этом седлообразные точки с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{1}{4}$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, соединяющие сепаратрисы друг с другом, соответствуют неустойчивым стационарным режимам.

Из рис. 19 видно, что на линиях $\xi = \frac{2}{5}$ и $\xi = \frac{3}{5}$, ограничивающих пустую зону, скорость частиц жидкой фазы стремится к бесконечности, поэтому переход частиц от точек с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{3}{5}$, $\delta = -\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ к точкам $\xi = \xi_0 = \frac{3}{5}$, $\delta = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, а так же от точек $\xi = \xi_0 = \frac{3}{5}$, $\delta = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ к точкам $\xi = \xi_0 = \frac{3}{5}$, $\delta = -\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ происходит мгновенно.

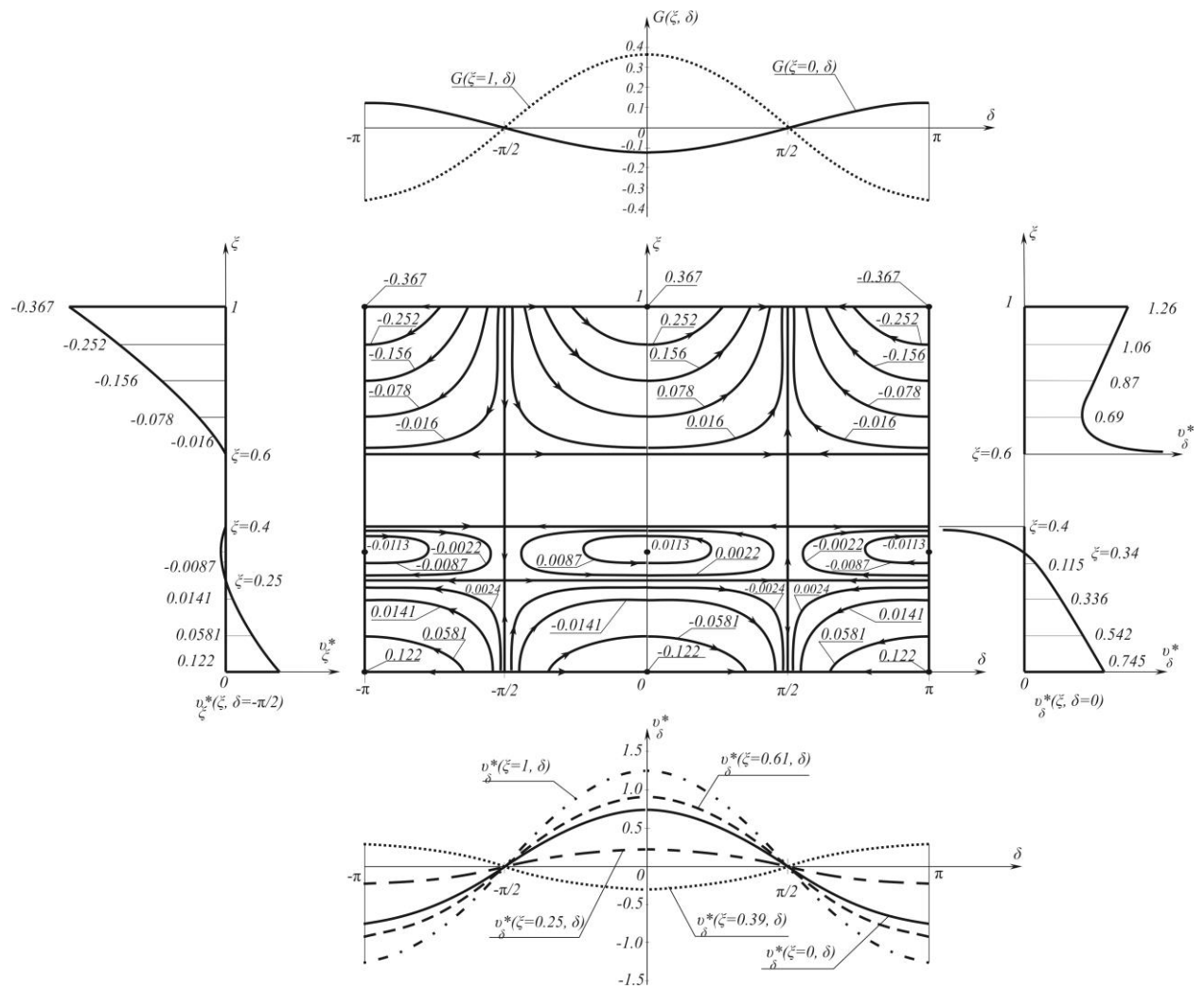


Рис. 19. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{3}{5}, c_3 = -\frac{1}{4}$$

4.4.2. Влияние коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 на поведение фазовых портретов

Теперь мы проследим влияние параметров K_1 , K_2 и K_3 на характер фазовых портретов при фиксированных значениях коэффициентов c_1 , c_2 и c_3 .

1 случай: $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = 0$ и $K_1 b^{-1} = 1, K_2 = K_3 = 0$. Тогда функция тока (267)

принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\frac{1}{4} - \xi\right) \xi \cos \delta - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \xi\right)^2 = G_0(\xi_0, \delta_0).$$

В этом случае скорости частиц фазовой жидкости определяются соотношениями

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\frac{1}{4} - \xi\right) \xi \sin \delta e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left[\left(\frac{1}{4} - 2\xi\right) \cos \delta - \xi + \frac{1}{4} \right] e^{-sT_2},$$

откуда следует, что вдоль сепаратрис с $G(\xi, \delta) = 0$ справедливы следующие аналитические решения:

а) модулированный по фазе режим вдоль линии $\xi = \frac{1}{4}$

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}),$$

и б) вдоль криволинейных частей сепаратрис

$$\left| \ln \frac{\xi}{\xi - \frac{1}{4}} \right|_{\xi_0}^{\xi} = -\frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \dot{\delta} = 2bE_0 \left[\left(\frac{1}{4} - 2\xi\right) \cos \delta - \xi + \frac{1}{4} \right] e^{-sT_2},$$

где ξ изменяется от $\xi_{\min} = \frac{1}{12}$ при $\delta = \pm 2\pi n$ до $\xi_{\max} = 1$ при $\delta = \pm \arccos\left(\frac{3}{8}\right) \pm 2\pi n$.

Линия $\xi = \xi_0 = \frac{1}{4}$ делит бесконечный канал на две прямоугольных области. В пределах верхней прямоугольной зоны все линии тока незамкнутые с начальными и конечными точками на верхней границе $\xi = 1$, вдоль которой

функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi=1$, $\delta=\pm\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$) (рис. 20), при этом линии тока, на которых $G(\xi,\delta)=0$, разделяют зоны, где значение G сохраняет свой знак.

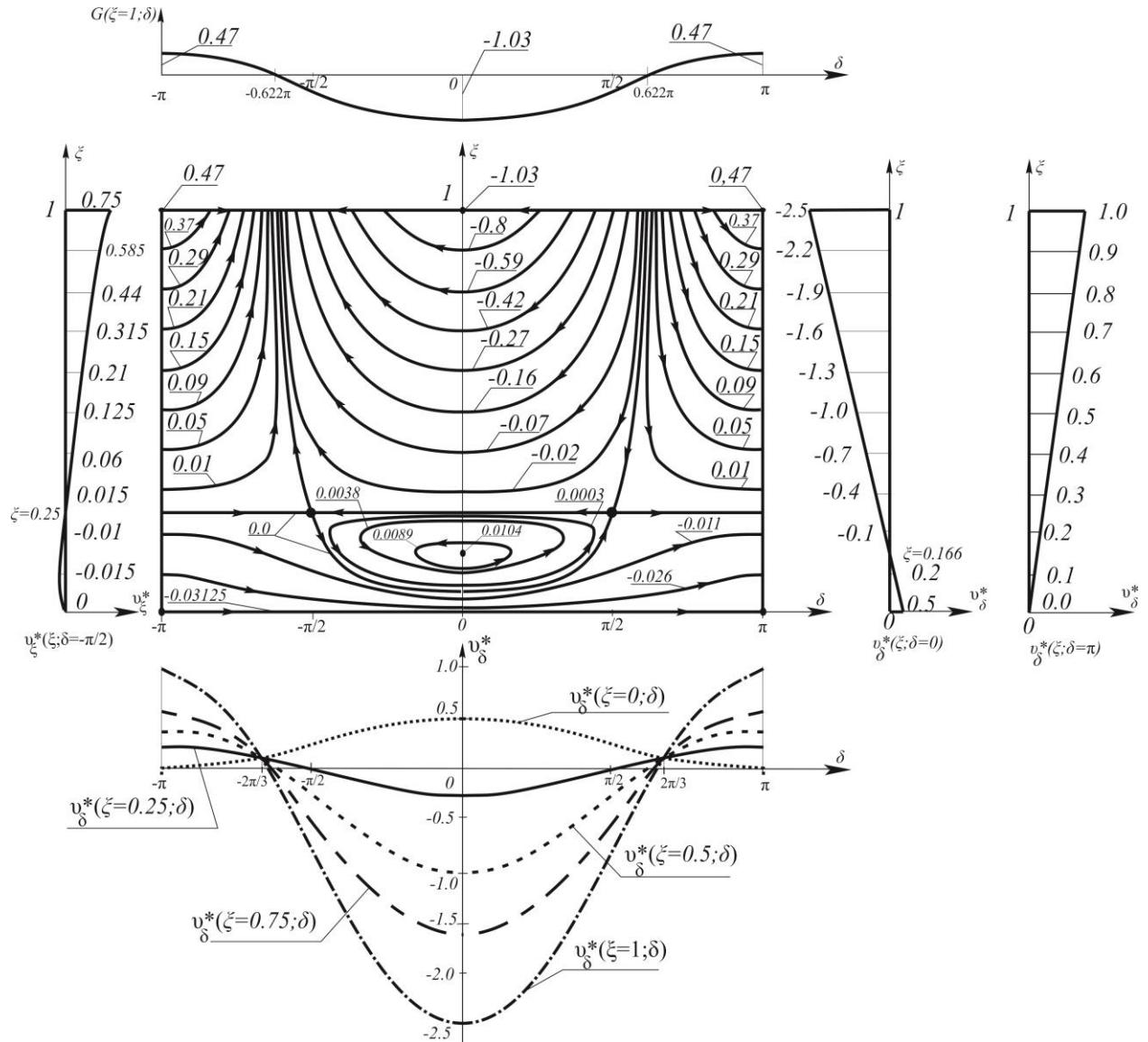


Рис. 20. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = 0$$

Криволинейные и прямолинейные части сепаратрис пересекаются в седлообразных стационарных точках с координатами $\xi_0 = \frac{1}{4}$ и $\delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi n$ (рис. 20), разделяющих нижнюю прямоугольную область канала на зоны, в пределах которых все линии тока либо замкнуты либо незамкнуты. Внутри зон с замкнутыми линиями тока функция G достигает экстремальные значения, равные $\frac{1}{96}$, в точках типа центра с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{1}{6}$, $\delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$, соответствующих устойчивым стационарным движениям. Вдоль незамкнутых линий тока амплитуды изменяются периодически, в то время как фазы меняются аperiodически, и точки фазовой жидкости движутся в положительном направлении.

На нижней границе $\xi_0 = 0$, где $G_0 = -\frac{1}{32}$, реализуется режим, модулированный по фазе,

$$\xi(T_2) = \xi_0 = 0, \quad \tan\left(\frac{1}{2}\delta\right)\Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{bE_0}{2s}(1 - e^{-sT_2}),$$

при этом фазовая скорость v_δ изменяется периодически от 0 в точках $\delta = \pm\pi \pm 2\pi n$ до максимальных значений в точках $\delta = \pm 2\pi n$. На кривых, показывающих распределение фазовой скорости на различных уровнях амплитуд, видно, что все кривые пересекаются в точках с $\delta = \pm \frac{2\pi}{3} \pm 2\pi n$.

2 случай: $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = 0$ и $K_1 b^{-1} = K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1$, т.е. все параметры K_i ($i = 1, 2, 3$) являются отличными от нуля. Тогда функция тока (267) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\frac{1}{4} - \xi\right) \xi \cos \delta - \left(\frac{1}{4} - \xi\right)^2 + \frac{1}{2} \xi^2 = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi-\delta$ представлены в рис. 21, из которого видно, что бесконечный канал $(-\infty < \delta < \infty)$, ограниченный линиями $\xi = 0$ и $\xi = 1$, разделен на прямоугольные зоны линиями $\xi = \frac{1}{4}$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

В рассматриваемом случае скорости частиц жидкой фазы определяются следующими соотношениями:

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\frac{1}{4} - \xi\right) \xi \sin \delta e^{-sT_2}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left[\left(\frac{1}{4} - 2\xi\right) \cos \delta - \xi + \frac{1}{4} \right] e^{-sT_2}.$$

Вдоль прямолинейных частей сепаратрис с $G(\xi, \delta) = \frac{1}{32}$, то есть вдоль линии $\xi = \frac{1}{4}$, реализуется режим, модулированный по фазе:

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \cot\left(\frac{1}{2} \delta\right) \Big|_{\delta_0}^{\delta} = -\frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}).$$

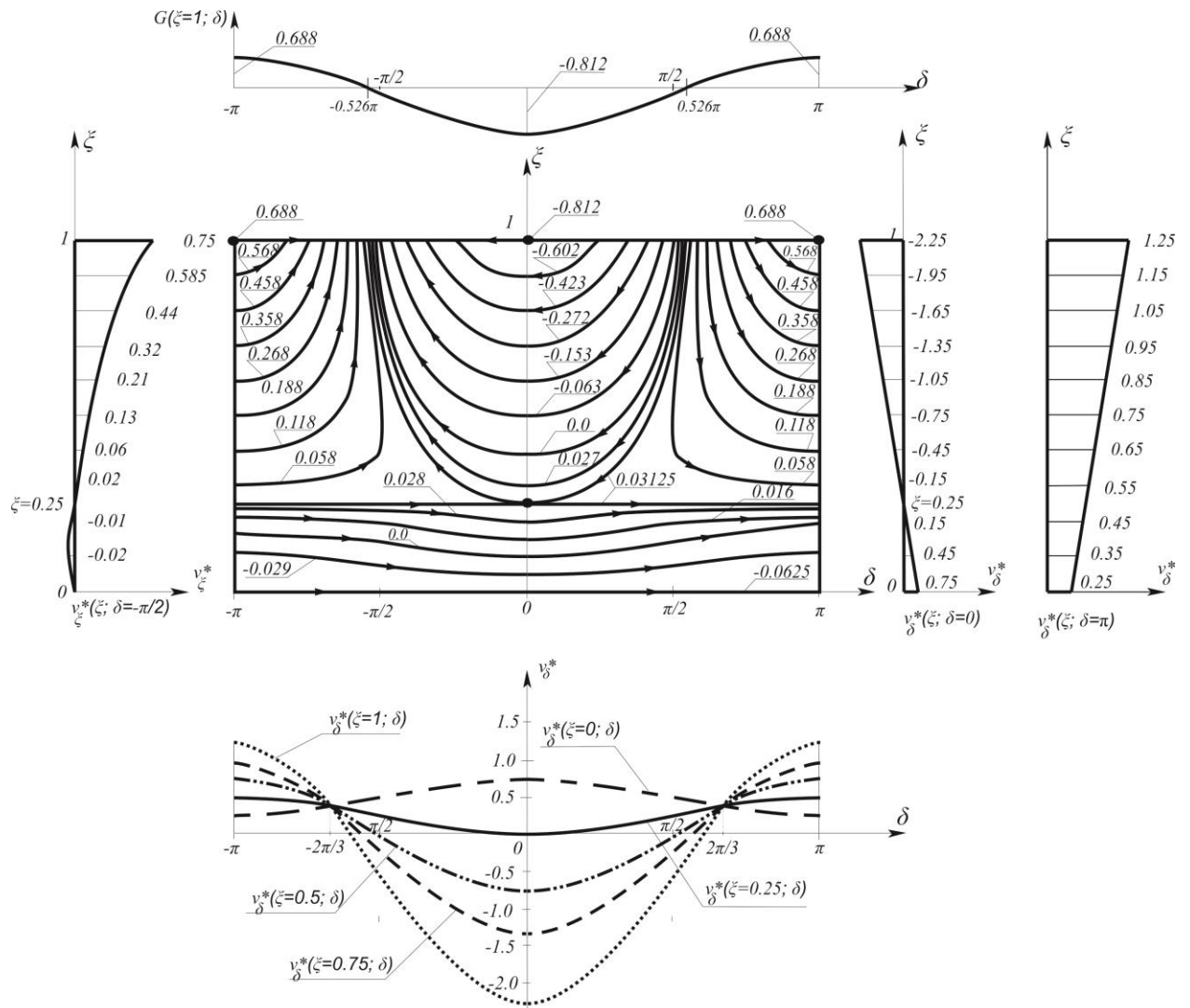


Рис. 21. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 b^{-1} = K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1 \text{ и } c_1 = c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = 0$$

Вдоль нижней границы $\xi = 0$ реализуется второй режим, модулированный по фазе:

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\delta\right)}{\sqrt{3}} \Big|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{bE_0}{2s} (1 - e^{-sT_2}).$$

В пределах нижней прямоугольной области, ограниченной линиями $\xi = 0$ и $\xi = \frac{1}{4}$, все линии тока не замкнуты, а фазовая жидкость течет с положительными фазовыми скоростями. Незамкнутые линии соответствуют колебательным движениям с амплитудами, изменяющимися периодически, и фазами, изменяющимися аperiodически.

Криволинейные и прямолинейные части сепаратрис связаны друг с другом в седлообразных точках с координатами $\xi = \frac{1}{4}$, $\delta_0 = \pm 2\pi n$. Внутри верхней прямоугольной области криволинейные сепаратрисы делят эту область на зоны, в которых фазовая жидкость течет в одном направлении. При этом в верхней прямоугольной области все линии тока не замкнуты с начальными и конечными точками на верхней границе $\xi = 1$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1$, $\delta = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 21).

3) случай: $c_1 = \frac{2}{5}, c_2 = \frac{3}{5}, c_3 = -\frac{1}{4}$ и $K_1 b^{-1} = 1, K_2 = K_3 = 0$. Тогда функция тока (267) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi\right) \left(\frac{3}{5} - \xi\right)} \cos \delta - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} - \xi\right)^2 = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а скорости частиц фазовой жидкости определяются следующими соотношениями:

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi\right) \left(\frac{3}{5} - \xi\right)} \sin \delta e^{-sT_2},$$

$$v_{\delta} = \dot{\delta} = 2bE_0 \left\{ \left[\sqrt{\left(\frac{2}{5}-\xi\right)\left(\frac{3}{5}-\xi\right)} - \frac{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-2\xi)}{2\sqrt{\left(\frac{2}{5}-\xi\right)\left(\frac{3}{5}-\xi\right)}} \right] \cos\delta + \left(\frac{2}{5}-\xi\right) \right\} e^{-sT_2}.$$

Линии тока в этом случае представлены на рис. 22, из которого видно, что горизонтальные прямолинейные сепаратрисы $\xi = \frac{1}{4}$, $\xi = \frac{2}{5}$ и $\xi = \frac{3}{5}$ остаются теми же самыми, как в случае, приведенном на рис. 19, с той лишь разницей, что значения функции тока G становятся равными соответственно $-\frac{9}{800}$ ($= -0.01125$), 0 и $-\frac{1}{50}$ ($= -0.02$).

Если один из коэффициентов K_i ($i=1,2,3$) отличен от нуля, как это имеет место в рассматриваемом случае, то вертикальные прямолинейные сепаратрисы переходят в криволинейные. Таким образом, в верхней зоне бесконечного канала ($-\infty < \delta < \infty$), ограниченного линиями $\xi = \frac{3}{5}$ и $\xi = 1$, сепаратрисы, вдоль которых $G = -0.02$, соединяют эти границы в точках с координатами $\xi = 1$, $\delta = \pm 0.3566\pi \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $\xi = 1$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом они разделяют верхнюю зону на области, в пределах которых фазовая жидкость движется в одном направлении: по часовой стрелке или против часовой стрелки. В каждой такой области все линии тока не замкнуты с начальными и конечными точками на верхней границе $\xi = 1$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1$, $\delta = \pm \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 22).

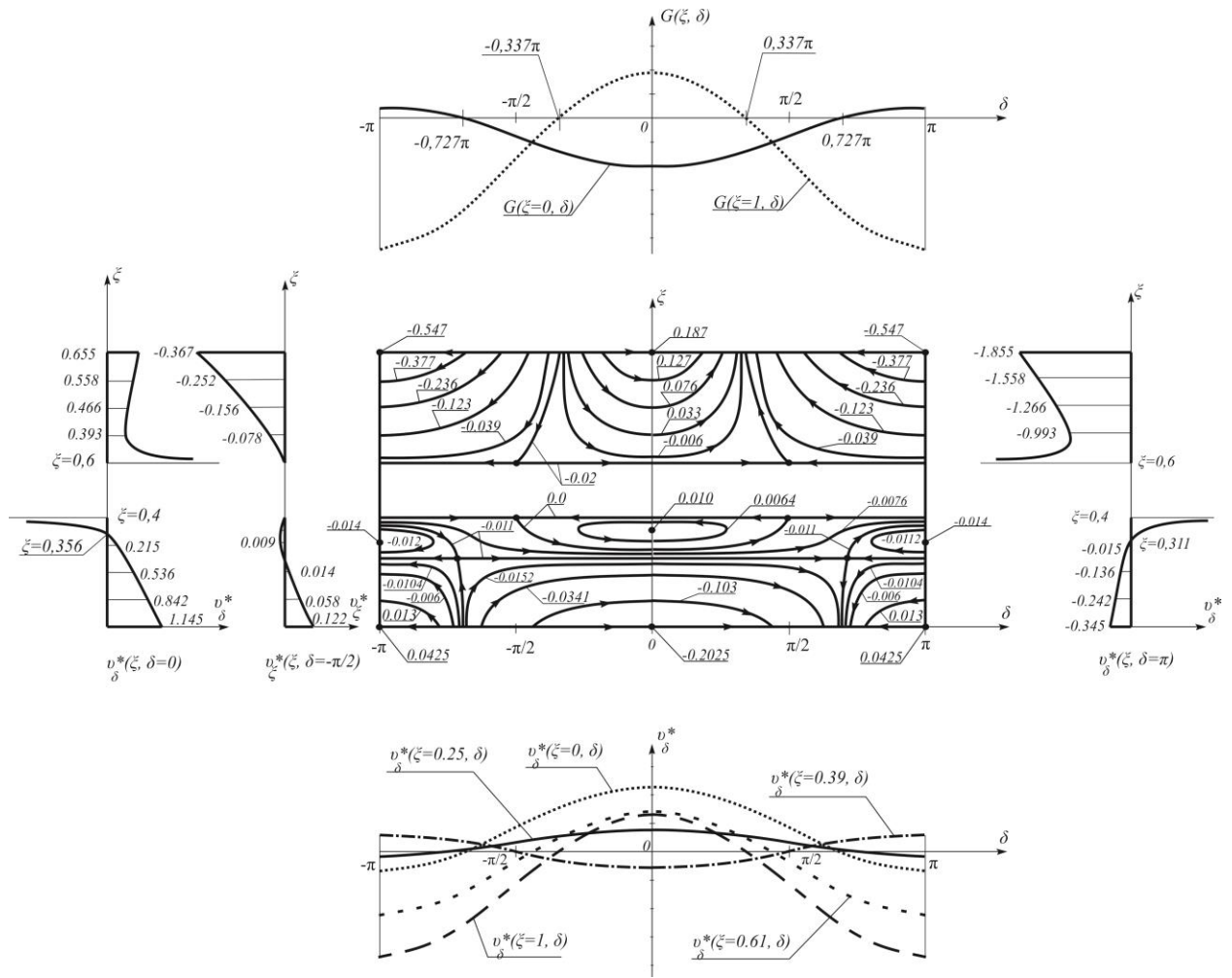


Рис. 22. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

$$(98) \text{ при } K_1 b^{-1} = 1, \quad K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = \frac{2}{5}, \quad c_2 = \frac{3}{5}, \quad c_3 = -\frac{1}{4}$$

В средних и нижних зонах наблюдаются два типа криволинейных сепаратрис, вдоль которых $G=0$ и $G=-0.01125$ и между которыми в средней зоне существуют незамкнутые линии тока, соответствующие периодическим изменениям амплитуд и аperiодическим изменениям разности фаз.

Линии тока с $G=0$ разделяют среднюю зону на области, в которых замкнутые линии тока окружают точки типа центр с координатами $\xi = 0.365$,

$\delta = \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$ и $G_{\max} = 0.01$. Криволинейные ветви сепаратрис с $G = 0$ связаны с соответствующей прямолинейной ветвью $\xi = \frac{2}{5} = const$ в точках с $\xi = \frac{2}{5}$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$, при этом частицы фазовой жидкости движутся против часовой стрелки в направлении от точки $\xi = \frac{2}{5}$, $\delta = -\frac{\pi}{2}$ до точки $\xi = \frac{2}{5}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$, пересекая минимальную точку на этой сепаратрисе с координатами $\xi = 0.285$, $\delta = \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Криволинейные сепаратрисы с $G = -0.01125$ пересекают прямолинейную сепаратрису $\xi = const = \frac{1}{4}$ в седлообразных точках с координатами $\xi = \frac{1}{4}$, $\delta = \pm 0.727 \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$, их начальные и конечные точки находятся на нижней границе $\xi = 0$ в точках $\delta = \pm 0.6897 \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$, а верхние точки имеют координаты $\xi = 0.363$, $\delta = \pm 0.6897 \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Вдоль линии $\xi = \frac{1}{4}$ реализован режим, модулированный по фазе:

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b-a) \tan \frac{\delta}{2} + \sqrt{b^2 - a^2}}{(b-a) \tan \frac{\delta}{2} - \sqrt{b^2 - a^2}} \right|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{2bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}),$$

где $a = \frac{3}{20}$ и $b = \frac{\sqrt{21}}{20}$.

В пределах средней зоны сепаратрисы отделяют замкнутые линии тока, окружающие точки типа центр с координатами $\xi = 0.3107$, $\delta = \pm \pi \pm \pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$. В пределах нижней зоны сепаратрисы с $G = -0.01125$ делят ее на области, где частицы фазовой жидкости движутся в одном направлении: по часовой стрелке или против. В каждой такой подзоне все линии тока не замкнуты с начальными

и конечными точками на нижней границе $\xi = 0$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальные значения в точках с координатами $\xi = 0, \delta = \pm\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$ (рис. 22).

4) случай: $c_1 = \frac{2}{5}, c_2 = \frac{3}{5}, c_3 = -\frac{1}{4}$ и $K_1 b^{-1} = K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1$, т.е. все параметры $K_i (i = 1, 2, 3)$ являются отличными от нуля. Тогда функция тока (240) принимает вид

$$G(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi\right)\left(\frac{3}{5} - \xi\right)} \cos\delta - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} - \xi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} - \xi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{4}\right) = G_0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока представлены на рис. 23, из которого видно, что горизонтальные прямолинейные сепаратрисы $\xi = \frac{1}{4}, \xi = \frac{2}{5}$ и $\xi = \frac{3}{5}$ остаются теми же самыми, как и в случаях, показанных на рис. 19 и 22, с той лишь разницей, что значения функции тока G теперь равны соответственно величинам $-\frac{29}{400}(0.0725), -\frac{7}{800}(0.00875)$ и $\frac{33}{800}(0.04125)$.

Скорости частиц фазовой жидкости в этом случае определяются следующими соотношениями:

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi\right)\left(\frac{3}{5} - \xi\right)} \sin\delta e^{-sT_2},$$

$$v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left\{ \left[\sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi\right)\left(\frac{3}{5} - \xi\right)} - \frac{\left(\xi - \frac{1}{4}\right)(1 - 2\xi)}{2\sqrt{\left(\frac{2}{5} - \xi\right)\left(\frac{3}{5} - \xi\right)}} \right] \cos\delta + \left(\frac{2}{5} - \xi\right) \right\} e^{-sT_2}.$$

В верхней зоне бесконечного канала ($-\infty < \delta < \infty$), ограниченного линиями $\xi = \frac{3}{5}$ и $\xi = 1$, сепаратрисы, вдоль которых $G = 0.04125$, соединяют эти граничные линии в точках с координатами $\xi = 1$, $\delta = \pm 0.4829 \pm \pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$ и $\xi = \frac{3}{5}$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$, при этом они разделяют верхнюю зону на области, в пределах которых фазовая жидкость движется в одном направлении: по или против часовой стрелки. В каждой такой области все линии тока не замкнуты с начальным и конечным точками на верхней границе $\xi = 1$, вдоль которой функция тока изменяется периодически, достигая экстремальных значений в точках с координатами $\xi = 1$, $\delta = \pm \pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$ (рис. 23).

В средней зоне вблизи ее верхней границы $\xi = \frac{2}{5}$ существуют точки типа центр с координатами $\xi = 0.3927$, $\delta = \pm \pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$ и $G_{min} = -0.017$, расположенные в пределах узких областей, отделенных криволинейными сепаратрисами с $G = -0.00875$, которые связаны с соответствующими прямолинейными ветвями сепаратрис $\xi = \frac{2}{5}$ в точках с координатами $\xi = \frac{2}{5}$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

В нижней зоне, ограниченной линиями $\xi = 0$ и $\xi = \frac{1}{4}$, одна часть незамкнутых линий тока с начальными и конечными точками на нижней границе $\xi = 0$ отделена от другой части с незамкнутыми бесконечно длинными линиями тока, расположенными вблизи прямолинейной сепаратрисы $\xi = \frac{1}{4}$, линией тока с $G = -0.1063$ и начальными и конечными точками на нижней границе $\xi = 0$, $\delta = \pm \pi \pm \pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Вдоль линии $\xi = \frac{1}{4}$ реализован режим, модулированный по фазе:

$$\xi(T_2) = \xi_0 = \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arctg g \frac{\delta}{\sqrt{b^2 - a^2}} \bigg|_{\delta_0}^{\delta} = \frac{2bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}),$$

где $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{\sqrt{21}}{20}$.

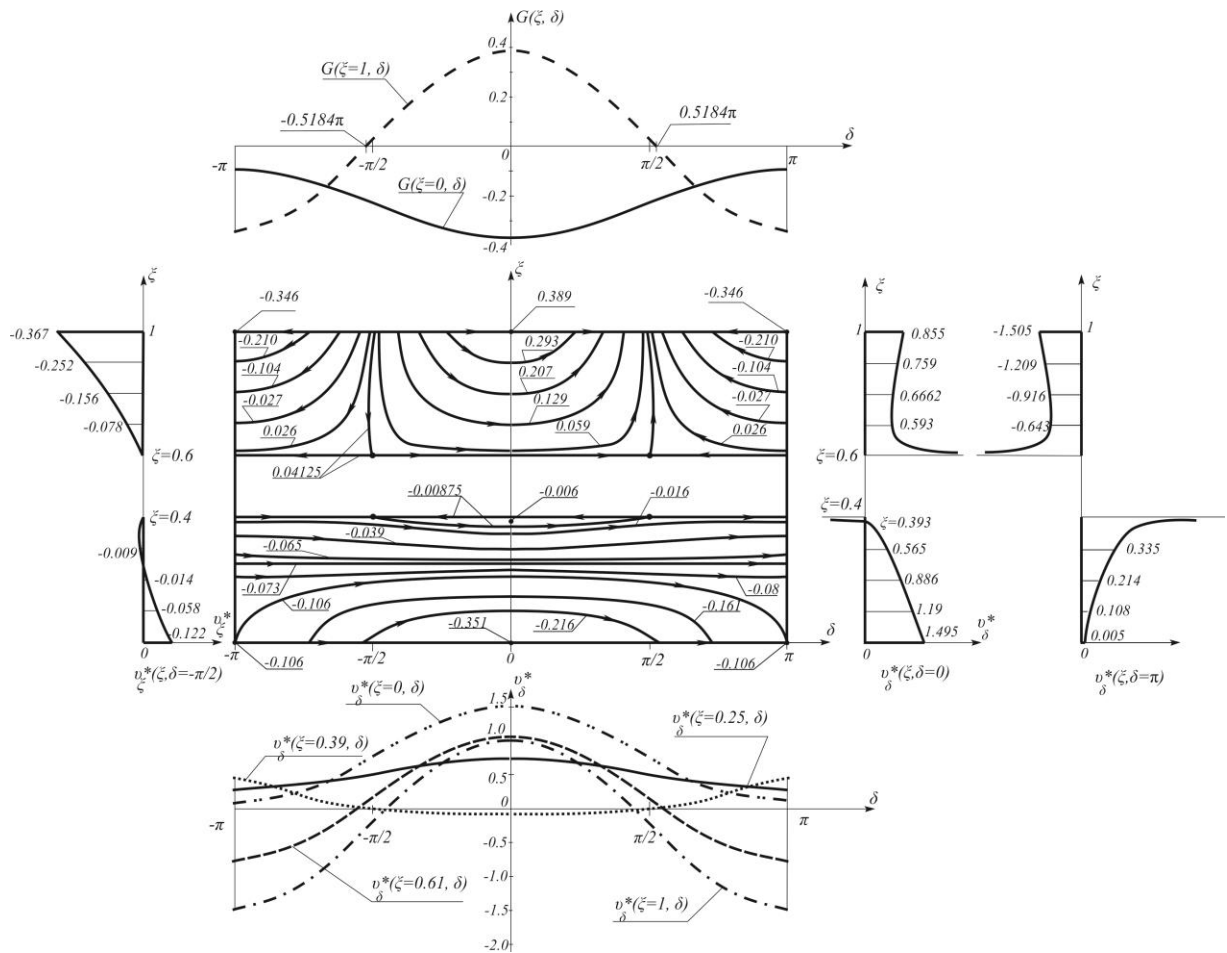


Рис. 23. Фазовый портрет аддитивного комбинационного внутреннего резонанса

(98) при $K_1 b^{-1} = K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1$ и $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{3}{5}$, $c_3 = -\frac{1}{4}$

4.5. Комбинационный резонанс разностного типа $\omega_1 - \omega_2 = 2\omega_3$ (97)

Теперь проведем численный анализ случая комбинационного внутреннего резонанса разностного типа $\omega_1 - \omega_2 = 2\omega_3$, когда две различные формы колебаний в плоскости связаны с определенной формой колебаний из плоскости.

Для этого случая функция тока $G(\xi, \delta)$ определяется соотношением (267), а фазовый портрет, который можно построить на основании соотношения (267), зависит существенным образом от значений коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 .

4.5.1. Случай $K_1 = K_2 = K_3 = 0$

Для этого случая функция тока $G(\xi, \delta)$ определяется соотношением (263), из которого видно, что функция тока также зависит от констант интегрирования c_1 , c_2 и c_3 , связанных соотношением $4c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1$, поэтому рассмотрим их различные сочетания.

1) случай: $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = c_3 = 0$. Тогда функция тока (290) принимает вид

$$G_1(\xi, \delta) = \xi \sqrt{\xi \left(\frac{1}{4} - \xi \right)} \cos \delta = G_1^0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ приведены на рис. 24. Значения величины G указаны цифрами у соответствующих кривых, а направление движения точек фазовой жидкости показано стрелками на линиях тока.

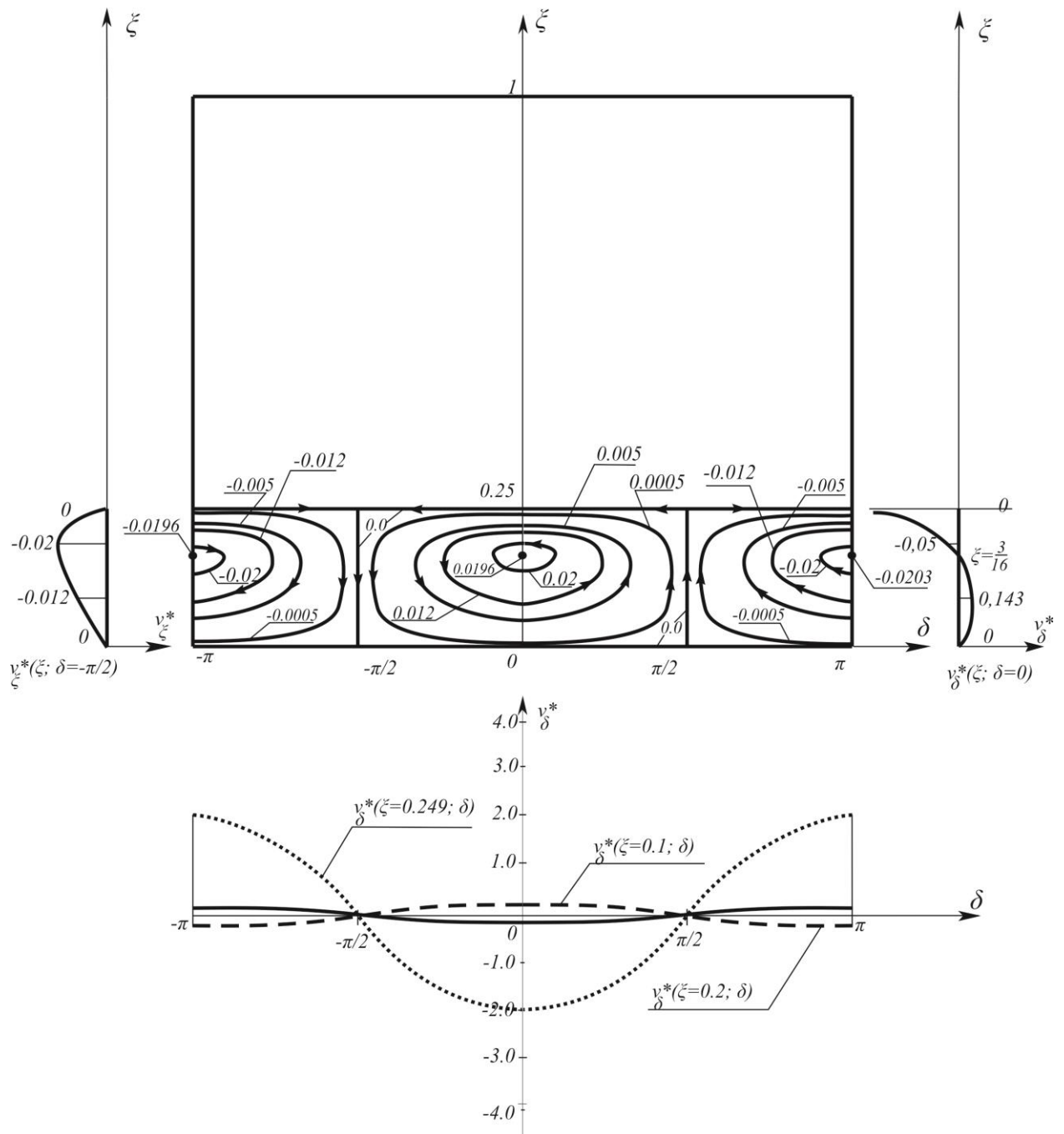


Рис. 24. Фазовый портрет разностного комбинационного внутреннего резонанса

$$(97) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = c_3 = 0$$

В данном случае скорости частиц фазовой жидкости определяются следующими соотношениями:

$$v_{\xi} = \dot{\xi} = 2bE_0\xi\sqrt{\xi\left(\frac{1}{4}-\xi\right)}\sin\delta e^{-sT_2}, \quad v_{\delta} = \dot{\delta} = 2bE_0\left(-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\xi(-3+16\xi)}}{\sqrt{(1-4\xi)}}\right)\cos\delta e^{-sT_2},$$

Из рис. 24 видно, что фазовая жидкость течет в пределах циркуляционных зон, которые ограничены периметрами прямоугольников, границами которых являются линии $\xi = 0$, $\xi = 1/4$ и $\delta = \pm\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение в каждом прямоугольнике является изолированным. Вдоль всех четырех сторон прямоугольников $G = 0$, а внутри каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак.

Горизонтальные и вертикальные линии тока, на которых $G = 0$, являются сепаратрисами, которые связаны друг с другом в седлообразных стационарных точках с координатами $\xi = 1/4$, $\delta = \pm\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ и в точках типа центр с координатами $\xi = \xi_0 = 0$, $\delta = \delta_0 = \pm\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$.

Все линии тока внутри каждого прямоугольника замкнуты, что соответствует периодическому изменению амплитуд и разности фаз колебаний, в точках с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{3}{16}$, $\delta_0 = 0 \pm 2\pi n$ наблюдаются стационарные устойчивые колебания.

Вдоль вертикальных сепаратрис наблюдаются модулированные по амплитуде режимы:

$$-\frac{8}{\xi}\sqrt{\xi\left(\frac{1}{4}-\xi\right)}\Bigg|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{2bE_0}{s}(1-e^{-sT_2}), \quad \delta = \delta_0 = \pm\frac{\pi}{2},$$

а нижний граничный режим является стационарным, так как $\xi = \xi_0 = 0$ при любых δ .

2) случай: $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{8}$. Тогда функция тока (290) принимает вид

$$G_1(\xi, \delta) = \left(\frac{1}{8} + \xi\right) \sqrt{\left(\frac{1}{64} - \xi^2\right)} \cos\delta = G_1^0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости $\xi - \delta$ приведены на рис. 25. В данном случае скорости частиц фазовой жидкости определяются следующими соотношениями:

$$v_\xi = \dot{\xi} = -2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-sT_2} = 2bE_0 \left(\frac{1}{8} + \xi\right) \sqrt{\left(\frac{1}{64} - \xi^2\right)} \sin\delta e^{-sT_2},$$

$$v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-sT_2} = 2bE_0 \left(-\frac{128\xi^2 + 8\xi - 1}{8\sqrt{-64\xi^2 + 1}}\right) \cos\delta e^{-sT_2}.$$

Из рис. 25 видно, что фазовая жидкость течет в пределах циркуляционных зон, которые ограничены периметрами прямоугольников, границами которых являются линии $\xi = 0$, $\xi = 1/8$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение в каждом прямоугольнике является изолированным. Вдоль всех четырех сторон прямоугольников $G = 0$, а внутри каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак.

Горизонтальные и вертикальные линии тока, на которых $G = 0$, являются сепаратрисами, которые связаны друг с другом в седлообразных стационарных точках с координатами $\xi = 1/8$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ и $\xi = \xi_0 = 0$, $\delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$.

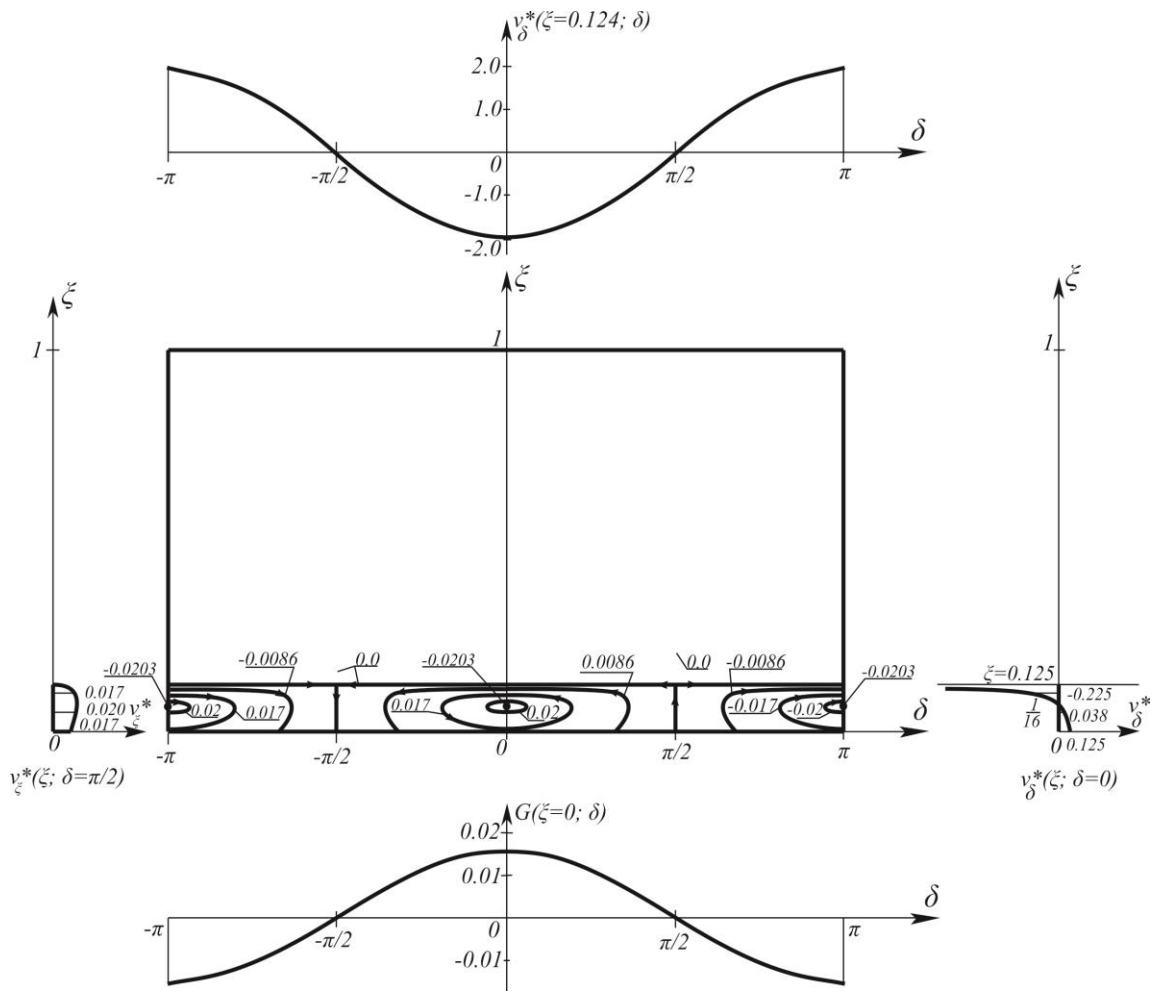


Рис. 25. Фазовый портрет разностного комбинационного внутреннего резонанса

$$(97) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{8}$$

Вдоль вертикальных сепаратрис наблюдаются модулированные по амплитуде режимы:

$$\left(\frac{1}{8} + \xi \right)^{-1} \sqrt{\frac{1}{64} - \xi^2} \Big|_{\xi_0}^{\xi} = -\frac{bE_0}{4s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Внутри каждого прямоугольника имеются как замкнутые, так и незамкнутые линии тока, которые окружают точки типа центр с координатами

$\xi = \xi_0 = \frac{3}{16}$, $\delta_0 = 0 \pm 2\pi n$, в которых наблюдаются стационарные устойчивые колебания.

3) случай: $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = 2$. В этом случае функция тока принимает вид

$$G_1(\xi, \delta) = (2 + \xi) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)} \cos \delta = G_1^0(\xi_0, \delta_0),$$

а соответствующие линии тока показаны на рис. 26, и скорости частиц фазовой жидкости определяются соотношениями

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 (2 + \xi) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)} \sin \delta e^{-sT_2},$$

$$v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left[\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)} - (2 + \xi) \left(\frac{2\xi}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)}} \right) \right] \cos \delta e^{-sT_2}.$$

Из рис. 26 видно, что фазовая жидкость течет в пределах циркуляционных зон, которые ограничены периметрами прямоугольников, границами которых являются линии $\xi = 0$, $\xi = 1/2$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение в каждом прямоугольнике является изолированным. Вдоль всех четырех сторон прямоугольников $G = 0$, а внутри каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак.

Вдоль вертикальных сепаратрис наблюдаются модулированные по амплитуде режимы:

$$\arcsin \frac{4\xi + \frac{1}{2}}{|\xi + 2|} \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{\sqrt{15bE_0}}{s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

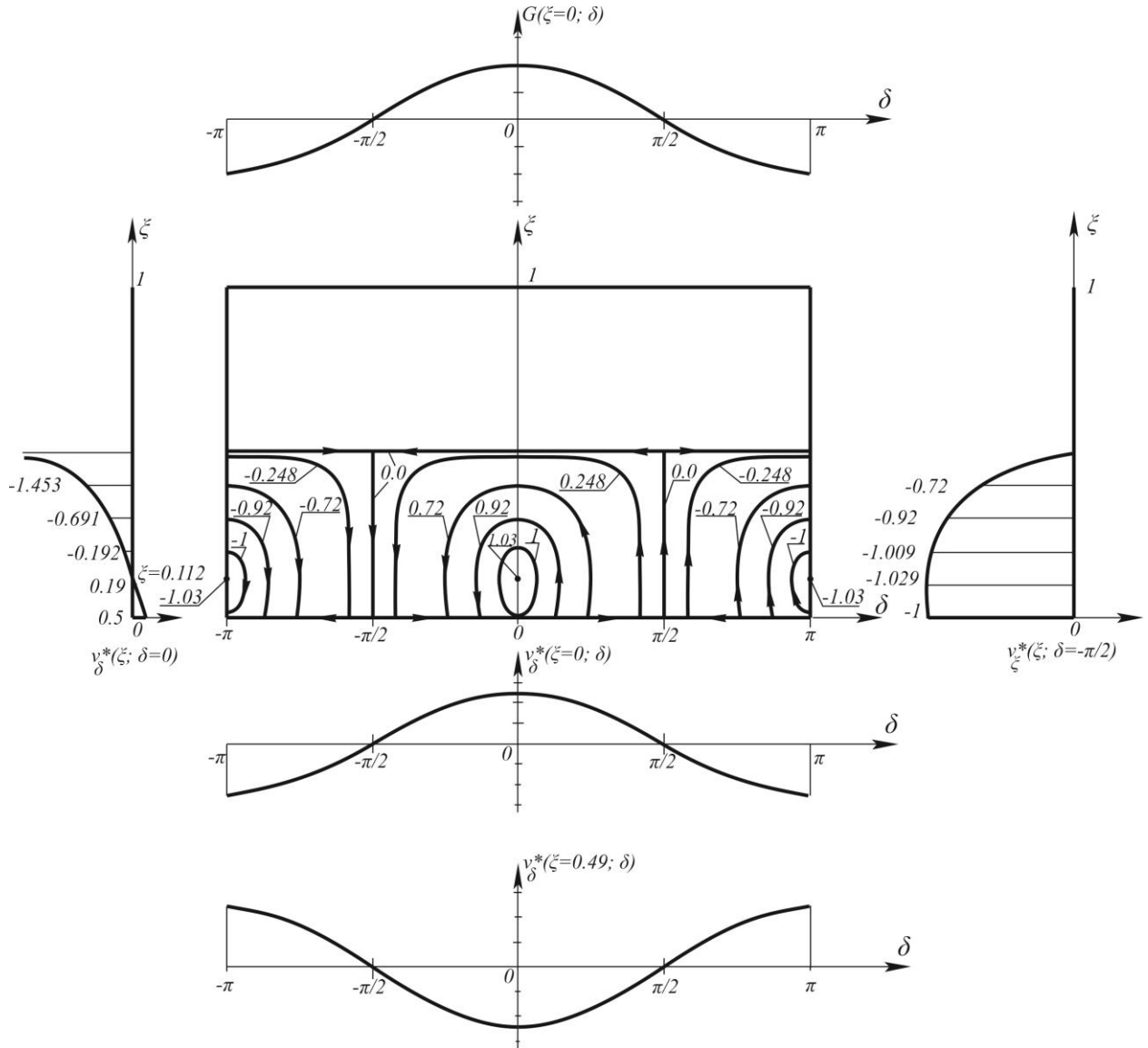


Рис. 26. Фазовый портрет разностного комбинационного внутреннего резонанса

$$(97) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = 2$$

Внутри каждого прямоугольника имеются как замкнутые, так и незамкнутые линии тока, которые окружают точки типа центр с координатами

$\xi = \xi_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0.112$, $\delta_0 = 0 \pm 2\pi n$, в которых наблюдаются стационарные устойчивые колебания. Начальные и конечные точки незамкнутых линий тока находятся на нижней границе канала.

4) случай: $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = -\frac{1}{4}$. В этом случае функция тока имеет вид

$$G_1(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{16} - \xi^2\right)} \cos\delta = G_1^0(\xi_0, \delta_0),$$

соответствующие линии тока показаны на рис. 27,а скорости частиц фазовой жидкости определяются соотношениями

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{16} - \xi^2\right)} \sin\delta e^{-sT_2},$$

$$v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left[\sqrt{\left(\frac{1}{16} - \xi^2\right)} - \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{2\xi}{2\sqrt{\left(\frac{1}{16} - \xi^2\right)}} \right) \right] \cos\delta e^{-sT_2}.$$

Из рис. 27 видно, что фазовая жидкость течет в пределах циркуляционных зон, которые ограничены периметрами прямоугольников, границами которых являются линии $\xi = 0$, $\xi = 1/4$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение в каждом прямоугольнике является изолированным. Вдоль всех четырех сторон прямоугольников $G = 0$, а внутри каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак.

Вдоль вертикальных сепаратрис наблюдаются модулированные по амплитуде режимы:

$$\left. \frac{4\sqrt{\frac{1}{8} - \xi^2}}{\xi - \frac{1}{4}} \right|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{2bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} = const.$$

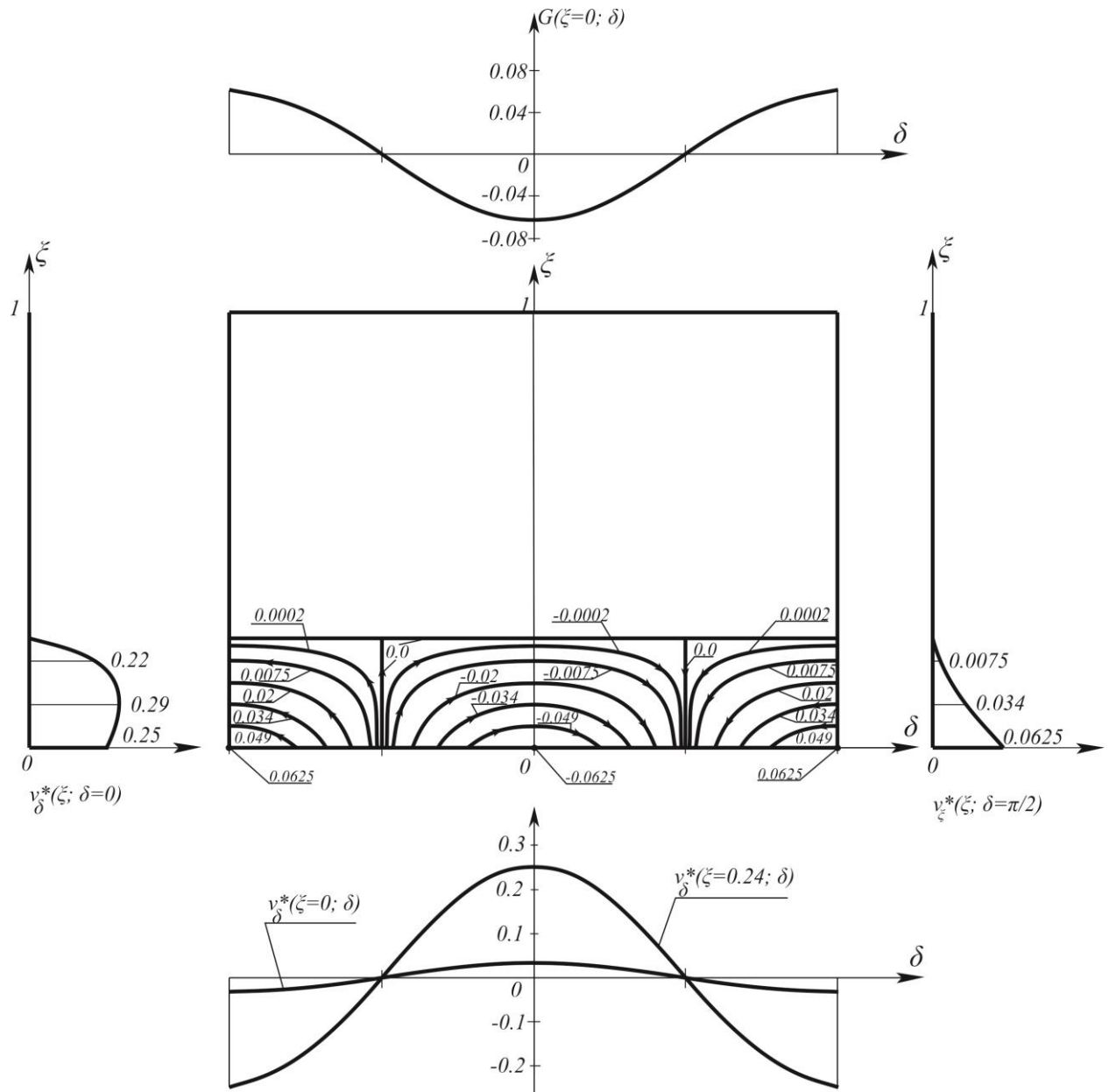


Рис. 27. Фазовый портрет разностного комбинационного внутреннего резонанса

(97) при $K_1 = K_2 = K_3 = 0$ и $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = -\frac{1}{4}$

Внутри каждого прямоугольника на рис.27 фазовая жидкость движется вдоль незамкнутых линий тока, начальные и конечные точки находятся на нижней границе канала $\xi = 0$.

5) случай: $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{3}{2}$. Тогда функция тока принимает вид

$$G_1(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\xi(1-\xi)} \cos\delta = G_1^0(\xi_0, \delta_0),$$

а линии тока приведены на рис. 28. Скорости точек фазовой жидкости определяются соотношениями

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\xi(1-\xi)} \sin\delta e^{-sT_2},$$

$$v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left(-\frac{8\xi^2 - 12\xi + 3}{4\sqrt{1-\xi}}\right) \cos\delta e^{-sT_2}.$$

Из рис. 28 видно, что фазовая жидкость течет в пределах циркуляционных зон, которые ограничены периметрами прямоугольников, границами которых являются линии $\xi = 0$, $\xi = 1$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при этом течение в каждом прямоугольнике является изолированным. Вдоль всех четырех сторон прямоугольников $G = 0$, а внутри каждого прямоугольника величина G сохраняет свой знак. Внутри прямоугольных зон все линии тока замкнуты, а в

центре находятся точки типа центр с координатами $\xi = \xi_0 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.317$,

$$\delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n.$$

Горизонтальные и вертикальные линии тока, на которых $G = 0$, являются сепаратрисами, которые связаны друг с другом в седлообразных стационарных точках с координатами $\xi = 1, \delta = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ и $\xi = \xi_0 = 0, \delta = \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$.

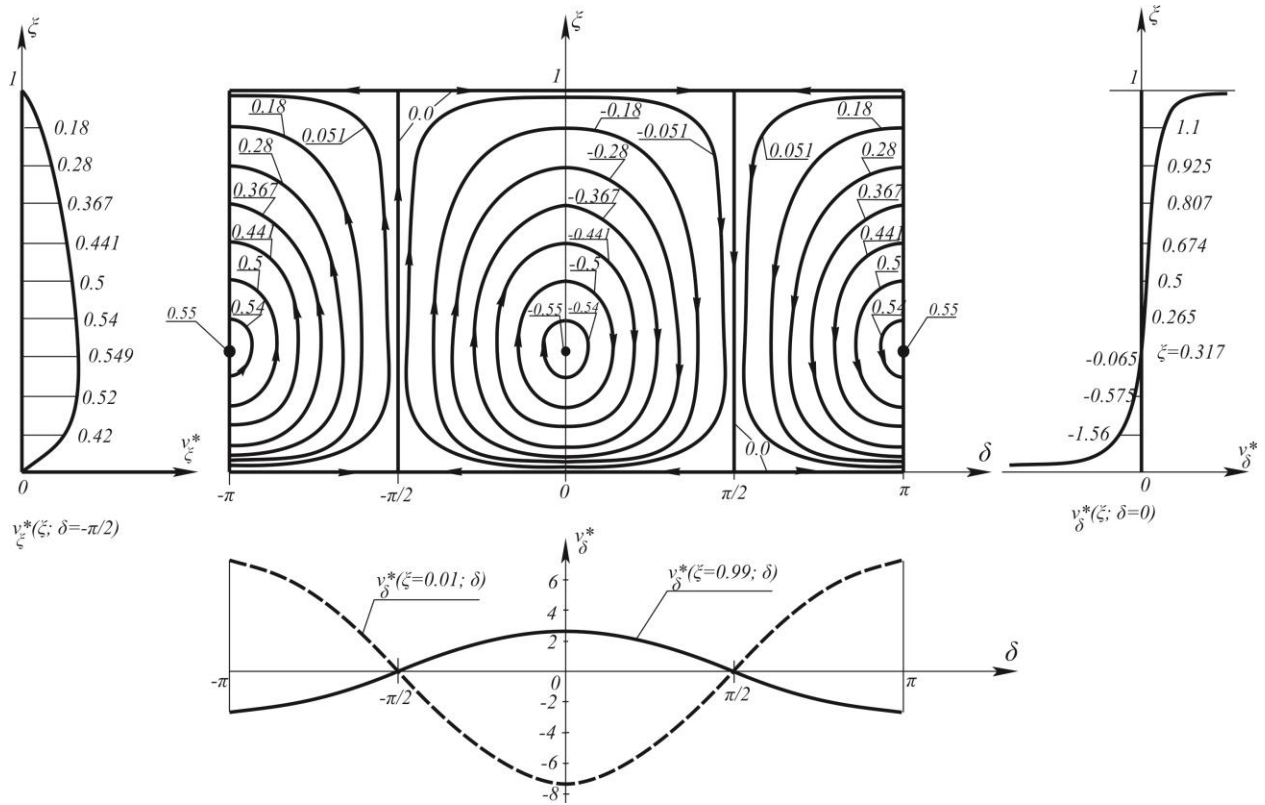


Рис. 28. Фазовый портрет разностного комбинационного внутреннего резонанса

$$(97) \text{ при } K_1 = K_2 = K_3 = 0 \text{ и } c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{3}{2}$$

Вдоль вертикальных сепаратрис реализуются модулированные по амплитуде режимы, описываемые следующими соотношениями:

$$\arcsin \frac{-2\xi - \frac{3}{2}}{\xi - \frac{3}{2}} \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{\sqrt{3}bE_0}{s} (1 - e^{-sT_2}), \quad \delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} = const$$

4.5.2. Влияние коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 на поведение фазовых портретов

Теперь мы проследим влияние параметров K_1 , K_2 и K_3 на характер фазовых портретов при фиксированных значениях коэффициентов c_1 , c_2 и c_3 .

1) случай: $K_1 b^{-1} = K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1$ и $c_1 = 1$; $c_2 = 0$; $c_3 = -\frac{3}{2}$. В этом случае функция тока (268) принимает вид

$$G_1(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{3}{2}\right) \sqrt{(1-\xi)\xi} \cos\delta - \frac{1}{2}(1-\xi)^2 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{3}{2}\right)^2 = G_1^0(\xi_0, \delta_0),$$

соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 29, а скорости частиц фазовой жидкости задаются соотношениями

$$v_\xi = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{3}{2}\right) \sqrt{(1-\xi)\xi} \sin\delta e^{-sT_2},$$

$$v_\delta = \dot{\delta} = 2bE_0 \left\{ \left[\sqrt{(1-\xi)(\xi)} - \left(\xi - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{-1+2\xi}{2\sqrt{(1-\xi)\xi}} \right) \right] \cos\delta + (1-\xi) + \xi + \left(\xi - \frac{3}{2}\right) \right\} e^{-sT_2}$$

На верхней $\xi = \xi_0 = 1$ и нижней $\xi = \xi_0 = 0$ границах канала функция $G = 0.625$. Из сравнения рис.28 и 29 видно, что вертикальные сепаратрисы на рис. 28 трансформировались в криволинейные ветви сепаратрис, на которых функция тока $G = 0.625$, при этом криволинейные и прямолинейные части сепаратрис пересекаются в седлообразных стационарных точках с координатами $\xi_0 = 1$, $\delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi n$ и $\xi_0 = 0$, $\delta_0 = \pm \pi n$ (рис. 29). Внутри каждой зоны, отделенной сепаратрисами, фазовая жидкость течет в одном направлении по замкнутым

траекториям вокруг стационарных точек типа центр с координатами $\xi = \xi_0 = 0.358$, $\delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$; и $\xi = \xi_0 = 0.26$, $\delta = \delta_0 = \pm \pi n$, в которых функция тока G достигает соответственно экстремальных значений, равных -0.04 и 1.07. На рис. 29 также приведены распределения скоростей точек фазовой жидкости вдоль характерных сечений канала.

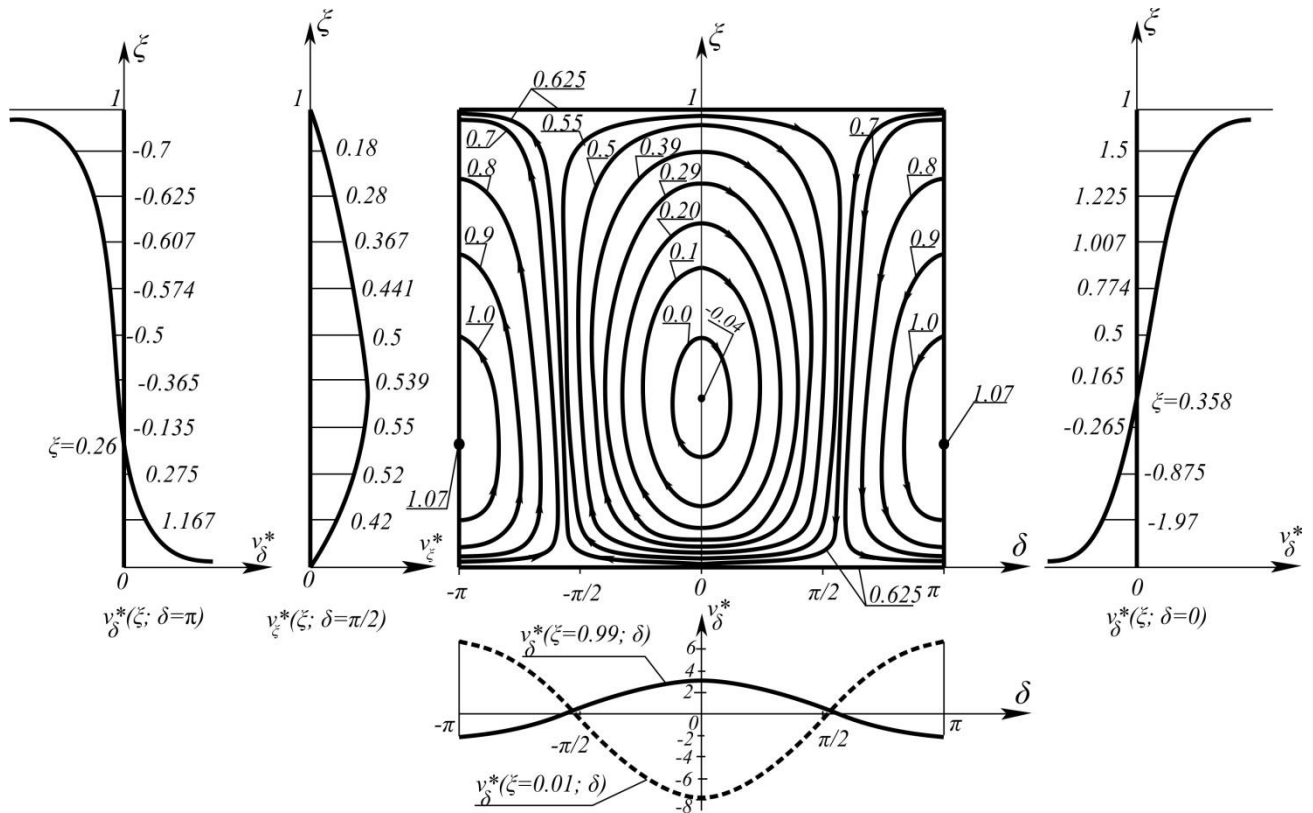


Рис. 29. Фазовый портрет разностного комбинационного внутреннего резонанса

$$(97) \text{ при } K_1 b^{-1} = K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1 \text{ и } c_1 = 1; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = -\frac{3}{2}$$

2) случай: $K_1 = 0$, $K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1$ и $c_1 = 1$; $c_2 = 0$; $c_3 = -\frac{3}{2}$. Тогда

функция тока принимает вид

$$G_1(\xi, \delta) = \left(\xi - \frac{3}{2}\right) \sqrt{(1-\xi)\xi} \cos \delta + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{3}{2}\right)^2 = G_1^0(\xi_0, \delta_0),$$

а фазовый портрет показан на рис.30, и скорости частиц фазовой жидкости определяются соотношениями

$$v_{\xi} = \dot{\xi} = 2bE_0 \left(\xi - \frac{3}{2} \right) \sqrt{(1-\xi)\xi} \sin\delta e^{-sT_2},$$

$$v_{\delta} = \dot{\delta} = 2bE_0 \left\{ \left[\sqrt{(1-\xi)(\xi)} - \left(\xi - \frac{3}{2} \right) \left(\frac{-1+2\xi}{2\sqrt{(1-\xi)\xi}} \right) \right] \cos\delta + \xi + \left(\xi - \frac{3}{2} \right) \right\} e^{-sT_2}.$$

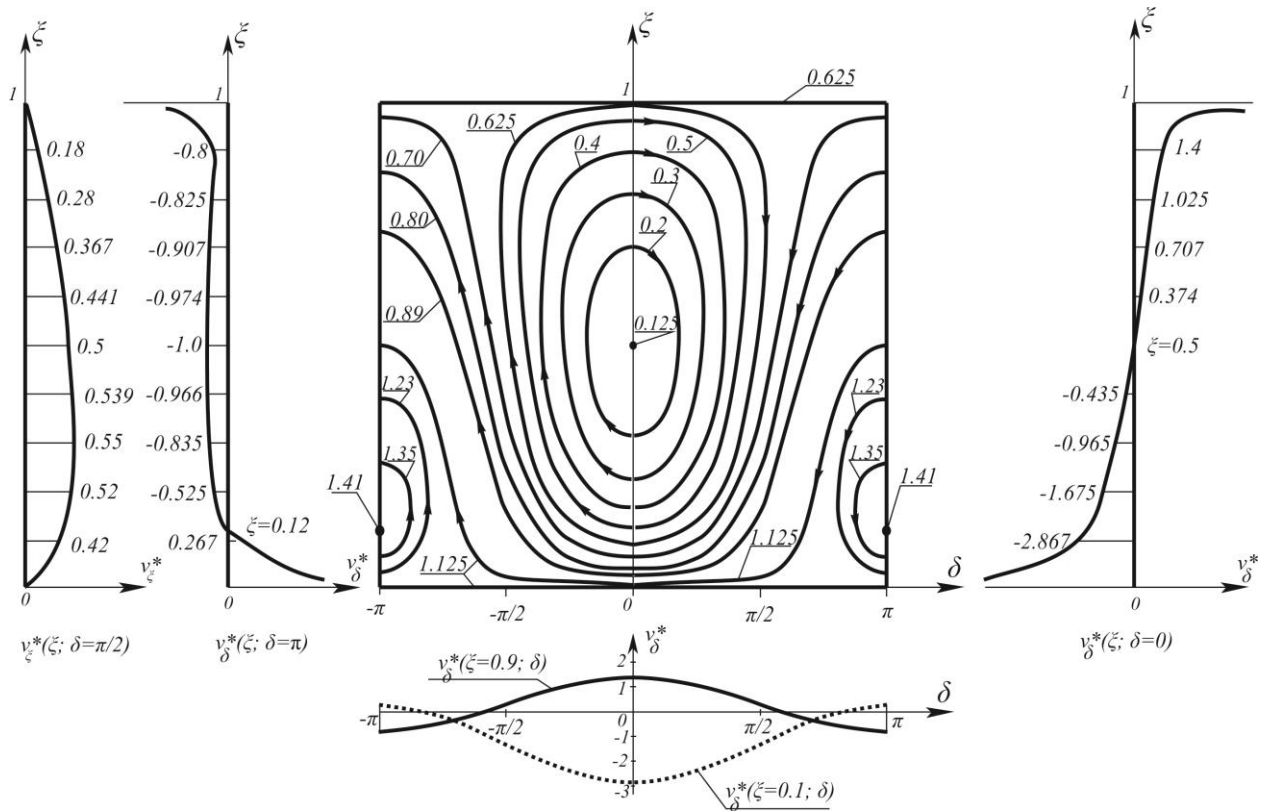


Рис. 30. Фазовый портрет разностного комбинационного внутреннего

резонанса (97) при $K_1 = 0$, $K_2 b^{-1} = K_3 b^{-1} = 1$ и $c_1 = 1$; $c_2 = 0$; $c_3 = -\frac{3}{2}$

На верхней $\xi = \xi_0 = 1$ и нижней $\xi = \xi_0 = 0$ границах канала функция тока принимает соответственно значения $G = 0.625$ и $G = 1.125$, при этом криволинейные ветви сепаратрис, на которых функция тока $G = 0.625$ и $G =$

1.125 пересекаются с соответствующими прямолинейными ветвями сепаратрис в седлообразных стационарных точках с координатами $\xi_0 = 1$, $\delta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi n$ и $\xi_0 = 0$, $\delta_0 = \pm \pi n$ (рис. 30). Внутри каждой зоны, отделенной сепаратрисами, фазовая жидкость течет в одном направлении по замкнутым траекториям вокруг стационарных точек типа центр с координатами $\xi = \xi_0 = 0.5$, $\delta = \delta_0 = \pm 2\pi n$; и $\xi = \xi_0 = 0.12$, $\delta = \delta_0 = \pm \pi n$, в которых функция тока G достигает соответственно экстремальных значений, равных 0.124 и 1.41. На рис. 30 также приведены распределения скоростей точек фазовой жидкости вдоль характерных сечений канала.

В отличие от фазового портрета, приведенного на рис 29, в данном примере между верхней и нижней зонами замкнутых линий тока, отделенными криволинейными сепаратрисами, на которых функция тока $G = 0.625$ и $G = 1.125$ соответственно, существует область с незамкнутыми бесконечными линиями тока, соответствующих периодическому изменению амплитуд и аperiodическому изменению фаз колебаний.

Заключение

Основные результаты данной диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Решена задача о свободных нелинейных колебаниях упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными Римана-Лиувалля, в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, линейные части которых взаимосвязаны. Предложен новый подход, позволяющий развязать линейные части уравнений движения пластинок, а качестве метода решения нелинейных уравнений используется метод многих временных масштабов, который является одним из методов теории возмущений.

2. Изучены все возможные внутренние резонансы: 2:1, 1:1, 1:1:1, 1:1:2, а также комбинационные резонансы. Показано, что тип внутреннего резонанса зависит от порядка малости вязкости, учитываемой в уравнениях колебаний. Так, если вязкость порядка ε , где ε - малая величина, то затухающие колебания могут сопровождаться внутренним резонансом 2:1, когда одна из частот вертикальных колебаний или колебаний в плоскости пластинки в два раза превышает частоту колебаний в плоскости пластинки в другом направлении, и 2:1:1, когда частоты колебаний в трех взаимно перпендикулярных направлениях связаны указанным соотношением. Другие виды внутреннего резонанса: 1:1, 1:1:1, а также комбинационные резонансы аддитивного и разностного типов - возможны в случае малости вязкости порядка ε^2 .

3. Исследовано влияние параметра дробности на характер нелинейных колебаний и на механизм перекачки энергии между взаимодействующими нелинейными модами колебаний. Показано, что каждая мода характеризуется собственным коэффициентом демпфирования, связанным с собственной

частотой колебаний экспоненциальной зависимостью с отрицательной дробной экспонентой. Выполнен феноменологический анализ колебаний пластинки, находящейся в условиях внутреннего резонанса, при помощи фазовых портретов, построенных для различных значений параметров пластинки. Проведенный анализ выявил многообразие колебательных движений: стационарные колебания, двухсторонний энергообмен между рассматриваемыми подсистемами и односторонний энергообмен, при этом при наличии малой вязкости все режимы затухают с течением времени. Анализ фазовых портретов для различных колебательных режимов показал, что они содержат как замкнутые, так и разомкнутые линии тока фазовой жидкости, разделенные кривыми-сепаратрисами. Вдоль сепаратрис найдены аналитические решения, определяющие необратимую перекачку энергии из одной подсистемы в другую, которые в теории колебаний соответствуют солитоноподобным решениям.

4. Для каждого типа внутреннего резонанса из выявленных в результате проведенных исследований десяти видов внутренних резонансов получены системы нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний. Для некоторых частных случаев внутреннего резонанса получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функция тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов. Так, во время свободных колебаний пластинки, сопровождающихся внутренним резонансом, могут наблюдаться три режима колебаний: установившийся (при отсутствии демпфирования), квази-установившийся (демпфирование описывается обычной производной целого порядка) и неустановившийся (демпфирование описывается производной дробного порядка). Для внутреннего резонанса 2:1 получено аналитическое решение методом последовательных приближений, которое позволяет исследовать зависимость поведения амплитуд и фаз колебаний от времени при любом значении параметра дробности $0 < \gamma \leq 1$.

5. Разработанный новый подход позволил решать задачи о колебаниях тонких тел более эффективно. Показано, что внутренний резонанс является конструкционным резонансом. В отличие от внешнего резонанса, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, внутренний резонанс неустраним, поскольку готовую конструкцию уже не переделать, а при конструировании невозможно предугадать наличие в конструкции того или иного резонансного сочетания собственных частот, поскольку таких сочетаний очень много, и их необходимо исследовать.

Список использованных источников

- [1] Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва: Наука. 1979. - 832 с.
- [2] Бронштейн, И.Н., Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов./ И.Н. Бронштейн Bronshtein, К.А. Семендяев. – Москва: Наука, 1986. 544 с.
- [3] Витт, А. А. Колебания упругого маятника как пример двух параметрических связанных линейных систем [Текст] / А. А. Витт, Г. С. Горелик // Журн. техн. физики, 1933, т. 3, № 2-3, с. 294-307.
- [4] Вольмир, А.С. (1972) Нелинейная динамика пластинок и оболочек [текст]: монография/ А.С. Вольмир.-Москва: Наука, 1972.-432с.
- [5] Клаф, Пензиен / Clough RW, Penzien J (1975) Dynamics of structures. McGraw-Hill, New York
- [6] Найфэ, А.Х. Методы возмущений: монография / А.Х. Найфэ. – Москва: Наука, 1973. – 474 с.
- [7] Самко, С.Г. Дробные интегралы и производные: Теория и приложения/ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск:Наука и техника, 1987. – 688с
- [8] Ходжаев, Д.А. Нелинейные колебания вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами./ Д.А. Ходжаев, Б.Х. Ешматов // Прикладная механика и техническая физика, 2007, Т.48, №6, С. 905—914.
- [9] Abdel-Ghaffar AM, Housner GW (1978) Ambient vibration tests of suspension bridge. ASCE J Eng Mech 104(5):983--999
- [10] Abdel-Ghaffar AM, Scanlan RH (1985) Ambient vibration studies of Golden Gate Bridge. I: Suspended structure. ASCE J Eng Mech 111(4):463--482
- [11] Amabili M (2004) Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments. Comput & Struct 82:2587--2605

- [12] Amabili M (2008) *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, New York
- [13] Anderson TJ, Balachandran B, Nayfeh AH (1994) Nonlinear resonances in a flexible cantilever beam. *J Vibr Acoust* 116:480--484
- [14] Anlas G, Elbeyli O (2002) Nonlinear vibrations of a simply supported rectangular metallic plate subjected to transverse harmonic excitation in the presence of a one-to-one internal resonance. *Nonlinear Dyn* 30: 1--28
- [15] Breslavsky ID, Amabili M, Legrand M (2014) Physically and geometrically nonlinear vibrations of thin rectangular plates. *Int J Non-Linear Mech* 58:30--40
- [16] Chang, SI, Bajaj AK, Krousgrill CM (1993) Nonlinear vibrations and chaos in harmonically excited rectangular plates with one-to-one internal resonance. *Nonlinear Dyn* 4:433--460
- [17] Kim TW, Kim JH (2002) Nonlinear vibration of viscoelastic laminated composite plates. *Int J Solids Struct* 39(10):2857--2870
- [18] Nayfeh AH (2000) *Nonlinear interaction: Analytical, computational, and experimental methods*. Wiley, New York
- [19] Nayfeh A H., Balachandran B (1990) Experimental investigation of resonantly forced oscillations of a two-degree- of-freedom structure. *Int J Non-Linear Mech* 25(2/3):199--209
- [20] Nayfeh SA, Nayfeh A.H. (1994) Energy transfer from high-to-low-frequency modes in a flexible structure via modulation. *J Vibr Acoust* 116:203--207
- [21] Popovic P, Nayfeh A.H., Oh K (1995) An experimental investigation of energy transfer from a highfrequency mode to a low-frequency mode in a flexible structure. *J Vibr Control* 1:115--128
- [22] Rashidi MM, Shooshtari A, Beg OA (2012) Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Karman rectangular plates. *Comput & Struct* 106-107:46--55
- [23] Ribeiro P, Petyt M (2000) Non-linear free vibration of isotropic plates with

- internal resonance. *Int J Non-Linear Mech* 35(2):263--278
- [24] Rossikhin Yu.A, Shitikova M.V. (2014a) Nonlinear dynamic response of a thin plate in a fractional viscoelastic medium under internal resonance 1:1:2. *Appl Mech Mat* 518: 60--65
- [25] Rossikhin Yu.A, Shitikova M.V. (2014b) Nonlinear dynamic response of a thin plate embedded in a fractional viscoelastic medium under combinational internal resonances. *Appl Mech Mat* 595: 105--110
- [26] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. (1998) Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges. *ASCE J Eng Mech* 124:1029--1036
- [27] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. (2003) Free damped nonlinear vibrations of a viscoelastic plate under the two-to-one internal resonance. *Materials Science Forum* 440--441:29--36
- [28] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. (2006) Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances. *Int J Non-Linear Mech* 41:313--325
- [29] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. (2008) Nonlinear free damped vibrations of suspension bridges with uncertain fractional damping. *Journal European des Systemes Automatises* 42(6-8):879--894
- [30] Rossikhin YuA, Shitikova M.V. (2010) Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Appl Mech Reviews* 63(1):010801-1--010801-52
- [31] Rossikhin YuA, Shitikova M.V. (2012a) On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator. *Mech Research Commun* 45:22--27
- [32] Rossikhin YuA, Shitikova M.V. (2012b) Analysis of damped vibrations of thin bodies embedded into a fractional derivative viscoelastic medium. *J Mech Behav*

Mater 21(5-6): 155--159

- [33] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Shcheglova TA (2009) Forced vibrations of a nonlinear oscillator with weak fractional damping. *J Mech Mat Struct* 4(9):1619-1636
- [34] Sathyamoorthy M (1996) Nonlinear vibrations of plates: an update of recent research developments. *Appl Mech Review* 49(10):55--62
- [35] Shooshtari A, Khadem S.E. (2007) A multiple scale method solution for the nonlinear vibration of rectangular plates. *Scientia Iranica* 14:64—71
- [36] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. (2015) A new approach for studying nonlinear dynamic response of a thin plate in a fractional viscoelastic medium, глава в коллективной монографии “*Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: From Macro- to Nanoscale Structures*”, (H. Altenbach and V. Eremeev, Eds), *Advanced Structured Materials*, vol. 41, Chapter 15, Springer, 267–288
- [37] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. (2014) Nonlinear dynamic response of a thin plate in a fractional viscoelastic medium under internal resonance 1:1:2, *Applied Mechanics and Materials*, 2014, Vol. 518, pp. 60-65
- [38] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Nonlinear dynamic response of a thin plate embedded in a fractional viscoelastic medium under combinational internal resonances *Applied Mechanics and Materials*, 2014, Vol. 595, pp. 105-110
- [39] Sathyamoorthy M Nonlinear vibrations of plates: an update of recent research developments. *Appl Mech Review*, 1996. – Vol. 49(10). P. 55—62.
- [40] Shooshtari A, Khadem S.E. A multiple scale method solution for the nonlinear vibration of rectangular plates. *Scientia Iranica*, 2007. – Vol. 14. P. 64—71.