Черникова Анастасия Сергеевна

Изучение свойств решения задачи о распределении тепла в плоскости с трещиной на стыке двух неоднородных материалов

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Глушко Андрей Владимирович**

Официальные оппоненты:

Корниенко Василий Васильевич,
доктор физико-математических наук,
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,
кафедра прикладной математики и информатики, профессор.

Ларин Александр Александрович,
кандидат физико-математических наук,
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» Министерства обороны Российской Федерации,
кафедра 206 математики, доцент.

Ведущая организация:
Тамбовский Государственный университет им. Г.Р. Державина.

Защита состоится 19 января 2016 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» по адресу 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2807.

Автореферат разослан «   » ноября 2015 года.

Ученый секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Гликлих Ю.Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Несколько последних десятилетий усилия исследователей были сосредоточены на изучении математических моделей, описывающих характеристики материалов с трещинами. Одним из направлений в изучении подобных задач является исследование тепловых процессов в материалах с трещинами. Количество таких моделей велико и во многом определяется свойствами материалов, геометрией областей, заполненных материалами, количеством трещин и их расположением. Так, например, ранее изучались следующие задачи: краевая задача для эллиптического уравнения и начально-краевая задача для параболического уравнения в области, являющейся плоскостью с разрезом (указанные задачи моделируют стационарное и нестационарное распределение тепла соответственно в функционально-градиентном материале, заполняющем всю плоскость, с конечной трещиной); краевые задачи для эллиптических уравнений в различных областях, в некоторых из которых разрез ортогонален границе области.

В настоящей работе изучен ряд задач трансмиссии (сопряжения) для эллиптических уравнений, описывающих распределение тепла в двумерной области с трещиной на стыке двух неоднородных материалов (в частности, в качестве области может рассматриваться плоскость, составленная из двух полуплоскостей с различной теплопроводностью).

Основными особенностями рассматриваемых задач являются:

- сама постановка краевых задач сопряжения для систем уравнений эллиптического типа является неклассической;
- наличие сингулярных составляющих в компонентах производных решений вблизи границы ведет к неклассическим постановкам граничных условий.

Все это, а также очевидная практическая направленность подчеркивает актуальность изучения поставленных задач.

Цель работы. Основной целью работы является формирование и применение методики изучения качественных свойств компонентов решения задач трансмиссии для эллиптических уравнений в области с разрезом на границе. Для задачи для уравнений с постоянными коэффициентами, с математической точки зрения, это, в первую очередь, влечет необходимость четкой формулировки понятия ее решения (так как специфика постановки задачи не предполагает существования классического решения). Во-вторых, возникает цель сведения исходной задачи к обобщенной, построение решения обобщенной задачи. Наконец, заключительной является изучение сингулярных компонентов решения (и его производных) в окрестности концов разреза-трещины на границе области. Последнее также относится и к задаче для уравнений с переменными коэффициентами.

Методы исследования. Используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, методы получения асимптотических оценок интегралов, зависящих от внешнего параметра, интегральные преобразования, метод ВКБ, метод Фурье, метод построения функции Грина.

Научная новизна. В изучаемых ранее задачах подобного типа рассматривался материал, заполняющий плоскость с трещиной, что приводило к изучению краевой задачи для скалярного эллиптического уравнения с граничными условиями специального вида типа скачка решения на трещине. В настоящей работе изучаются задачи, моделирующие процессы теплопроводности в области, состоящей из двух подобластей, заполненных различными материалами, что приводит к системам уравнений с классическими условиями типа трансмиссии. Условия на границе сформулированы таким образом, что моделируется трещина на границе материалов. При отсутствии дополнительных условий сглаживания это приводит к краевым задачам, вообще, не имеющим классических решений. Показана возможность перехода к подобной задаче с правыми частями граничных условий специального вида с сохранением асимптотических свойств вблизи трещины. При изучении последней задачи работы разработан новый подход, основанный на применении метода ВКБ, изучении спектральных свойств задачи и построению на этой основе функций Грина. Как изученные задачи, так и некоторые из примененных в их исследовании методов, являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Однако, ее результаты могут быть полезны для понимания процессов распределения тепла в современных неоднородных материалах с наличием трещины. Разработанная в ней методика и полученные результаты могут быть использованы при исследовании подобных задач.

Апробация работы. Основные результаты и содержание работы докладывались на конференциях «Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения»» на Воронежских весенних математических школах 2012 г., 2013 г., 2014 г. и 2015 г.; всероссийской научно-практической конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация» (Москва, 2013 г.); международных научных конференциях: «40-ые Гагаринские чтения» (Москва, 2014 г.), «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях» (Воронеж, 2014 г.), «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014)» (Воронеж, 2014 г.); научных семинарах под руководством проф. А. В. Глушко (Воронеж, 2013 г. – 2015 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[14]. Работы [8], [10], [11] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1], [3], [9], [10] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, и списка литературы, содержащего 50 наименований. Объем диссертации составляет 117 страниц.

Содержание диссертации

Нумерация приводимых ниже теорем совпадает с их нумерацией в диссертации.

Диссертация является цельным научным исследованием, три главы которой последовательно направлены на изучение одной и той же проблемы при последовательно усложняющихся условиях рассмотрения задачи. При этом все результаты, полученные на более раннем этапе исследования, находят свое применение и являются основой нового этапа рассмотрения задачи.

Перейдем к краткому изложению результатов исследования по главам.

Замечание 0.1. Через R_+^2 и R_-^2 будем обозначать множества точек $\mathrm{R}_+^2=\{x=(x_1,x_2)|\,x_1\in\mathrm{R};\,x_2>0\}$, $\mathrm{R}_-^2=\{x=(x_1,x_2)|\,x_1\in\mathrm{R};\,x_2<0\}$, а через Δ – оператор Лапласа: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В **первой** главе изучается случай стационарного распределения тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, имеющими экспоненциальный вид. На стыке полуплоскостей предполагается наличие конечной трещины.

Предполагается, что в полуплоскостях $\mathrm{R}_\pm^2$ коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют вид $k(x)=c_{1,5\mp0,5}e^{k_{1,5\mp0,5}x_2}$, где $c_{1,5\mp0,5}$ – произвольные, отличные от нуля константы, а $k_{1,5\mp0,5}$ – произвольные положительные константы. При указанных коэффициентах уравнение стационарной теплопроводности может быть записано для каждой из полуплоскостей

$$\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_2^2}+k_p\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2}=0,\; x\in\mathrm{R}^2_{\mathrm{sgn}(3-2p)},\; p=1;2. \tag{0.1}$$

Граничные условия заданы следующим образом

$$u_1(x_1,+0)-u_2(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in \mathrm{R}, \qquad (0.2)$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in \mathrm{R}. \qquad (0.3)$$

Будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3\left([-1;1]\right)$, а носители функций $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ содержатся в отрезке $[-1;1]$, то есть $\operatorname{supp} q_0(x_1)\subseteq[-1;1]$, $\operatorname{supp} q_1(x_1)\subseteq[-1;1]$.

Условие (0.2) описывает разность между температурами верхнего и нижнего берегов трещины, а условие (0.3) – разность между тепловыми потоками через эти берега.

Замечание 0.2. Условия (0.2), (0.3) понимаются в смысле главного значения:

$$u_1(x_1,+0)-u_2(x_1,-0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(u_1(x_1,\varepsilon)-u_2(x_1,-\varepsilon)\right),$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\partial u_1(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right).$$

Определение 0.1. Решением задачи (0.1)-(0.3) назовем пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных соответственно на R^2_+ и R^2_-, таких что $u_1(x)\in C^2\left(\mathrm{R}^2_+\right)\cap C^1\left(\overline{\mathrm{R}^2_+}\right)$, $u_2(x)\in C^2\left(\mathrm{R}^2_-\right)\cap C^1\left(\overline{\mathrm{R}^2_-}\right)$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (0.1), условиям (0.2) и (0.3), и такие, что функции $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$ ограничены на R^2_+, функции $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}$ – на R^2_-, функции $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}$ – при $x_2\ge\delta>0$, функции $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}$ – при $x_2\le-\delta<0$, функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathrm{R}^2_+)$, функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ – пространству $L_1(\mathrm{R}^2_-)$, а функции $u_1(x_1,+0)$, $u_2(x_1,-0)$, $\dfrac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathrm{R})$.

Замечание 0.3. В указанном определении δ – произвольная константа.

С помощью введенных функций

$$u_p(x_1,x_2)=e^{-0,5k_px_2}v_p(x_1,x_2),\ p=1;2, \qquad v_2(x_1,x_2)=z(x_1,-x_2), \qquad (0.4)$$

задача (0.1)-(0.3) может быть переписана в виде

$$\Delta v_1(x)-0,25k_1^2v_1(x)=0,\ x\in\mathrm{R}^2_+, \qquad (0.5)$$

$$\Delta z(x)-0,25k_2^2 z(x)=0,\ x\in \mathrm{R}_+^2, \tag{0.6}$$

$$v_1(x_1,+0)-z(x_1,+0)=q_0(x_1),\ x_1\in \mathrm{R}, \tag{0.7}$$

$$-\frac{k_1}{2}v_1(x_1,+0)+\frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k_2}{2}z(x_1,+0)+\frac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in \mathrm{R}. \tag{0.8}$$

Замечание 0.4. Аналогично определению 0.1 может быть сформулировано определение решения задачи (0.5)-(0.8) и будет приведено в главе 1.

Замечание 0.5. Пусть $f(x_1)$ и $\tilde f(x)$ – обычные функции, такие что $f(x_1)\in L_1(\mathrm{R})$, а $\tilde f(x)\in L_1(\mathrm{R}^2)$. Будем использовать следующие обозначения: $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[\tilde f(x)]=\int_{\mathrm{R}^2} e^{i(x_1s_1+x_2s_2)}\tilde f(x)dx_1dx_2$ – преобразование Фурье функции $\tilde f(x)$ по переменным $x_1,\, x_2$; $F_{x_1\to s_1}[f(x_1)]=\int_{\mathrm{R}} e^{ix_1s_1} f(x_1)dx_1$ – преобразование Фурье функции $f(x_1)$ по переменной x_1; $F^{-1}_{s_1\to x_1}[f(s_1)]=(2\pi)^{-1}\int_{\mathrm{R}} e^{-ix_1s_1} f(s_1)ds_1$ – обратное преобразование Фурье по переменной s_1; $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\tilde f(s)]=(2\pi)^{-2}\int_{\mathrm{R}^2} e^{-i(x_1s_1+x_2s_2)}\tilde f(s)ds_1ds_2$ – обратное преобразование Фурье по переменным $s_1,\, s_2$.

С помощью перехода к обобщенной задаче в пространстве $S'(\mathrm{R}^2)$ удалось построить регулярное обобщенное решение задачи (0.5)-(0.8). Эти результаты приведены в теореме 0.1.

Теорема 0.1. Если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то задача (0.5)-(0.8) имеет решение, причем для функций $v_1(x)$ и $z(x)$ справедливы следующие представления:

$$v_1(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}{|s|^2+0,25k_1^2}w_1^0(s_1)\right],\ z(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}{|s|^2+0,25k_2^2}w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}}w_1^0(s_1)\right],\ z(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}}w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x)=\frac{k_1x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(0,5k_1\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5}F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w_1^0(s_1)\right]dy_1,$$

$$z(x)=\frac{k_2x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(0,5k_2\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\cdot\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0,5}F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w_2^0(s_1)\right]dy_1,$$

где $|s|^2=s_1^2+s_2^2$, $K_1(z)$ – функция Макдональда, $P_p(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_p(x_1)]$ при $p=0;1$, а $w_p^0(s_1)=-\dfrac{P_1(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0,25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0,5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0,25k_1^2}+0,5k_1+\sqrt{s_1^2+0,25k_2^2}-0,5k_2}$ при $p=1;2$.

Для построения решения задачи (0.1)-(0.3) достаточно воспользоваться формулами (0.4) и результатами теоремы 0.1.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [1], [4], [7], [9], [10].

Во **второй** главе строятся асимптотики компонентов решения задачи (0.1)-(0.3) путем ее сведения к задаче с полуограниченной трещиной и задаче с граничными функциями специального вида. Предполагается, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны ($\operatorname{supp} q_0(x_1) = \operatorname{supp} q_1(x_1) = [-1;1]$) и принадлежат пространству $C^4\left([-1;1]\right)$, но, в отличие от главы 1, не накладываются дополнительные условия $q_p(-1) = q_p(1) = q'_p(-1) = q'_p(1) = 0$, что приводит к появлению сингулярных составляющих в асимптотических представлениях первых производных компонентов решения $\left(u_1(x), u_2(x)\right)$ указанной задачи вблизи концов трещины.

Граничные функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ можно представить в виде

$$q_p(x_1) = q_{p,1}(x_1) + q_{p,2}(x_1),\ p = 0;1, \tag{0.9}$$

где $q_{p,2}(x_1)$ при $p = 0;1$ принадлежат классу $\Im = \{ f(x) \big| f(x) \in C^3(\mathrm{R});$ $f(x) = 0, x < -1;\ f^{(k)}(-1) = 0, k = \overline{0;3}; \left| f^{(k)}(x) \right| \le Ce^{-x}, x \ge -1, k = \overline{0;3}\}$ и

$$q_{p,1}(x_1) = \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n+1} e^{-\left(x_1 + (-1)^{n+1}\right)} \theta\left(x_1 + (-1)^{n+1}\right) \sum_{m=0}^{3} (m!)^{-1} \left(x_1 + (-1)^{n+1}\right)^m \sum_{l=0}^{m} C_m^l q_p^{(l)}\left((-1)^n\right), \tag{0.10}$$

где $\theta(z)$ – функция Хэвисайда, $C_m^l = m!\left(l!\,(m-l)!\right)^{-1}$. Согласно представлениям (0.9), компоненты решения $\left(u_1(x), u_2(x)\right)$ задачи (0.1)-(0.3) будем искать в виде

$$u_p(x) = u_{p,1}(x) + u_{p,2}(x),\ p = 1;2, \tag{0.11}$$

где $\left(u_{1,j}(x), u_{2,j}(x)\right)$ – решение задачи

$$\Delta u_{p,j}(x) + k_p \frac{\partial u_{p,j}(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathrm{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p = 1;2, \tag{0.12}$$

$$u_{1,j}(x_1, +0) - u_{2,j}(x_1, -0) = q_{0,j}(x_1),\ x_1 \in \mathrm{R}, \tag{0.13}$$

$$\frac{\partial u_{1,j}(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{2,j}(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_{1,j}(x_1),\ x_1 \in \mathrm{R} \tag{0.14}$$

при $j = 1;2$.

Задача (0.12)-(0.14) при $j = 2$ описывает стационарное распределение тепла в плоскости, состоящей их различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной. Определение решения данной задачи формулируется аналогично определению 0.1. Указанная задача исследуется с помощью тех же методов, что и задача в главе 1. Показано, что компоненты ее решения имеют представления вида теоремы 0.1 с точностью до замены $w_p^0(s_1)$ на $w_{p,2}^0(s_1)$, где

$$w^0_{p,j}(s_1) = -\frac{P_{1,j}(s_1) + (-1)^p\left(\sqrt{s_1^2 + 0,25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0,5k_{3-p}\right)P_{0,j}(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0,25k_1^2} + 0,5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0,25k_2^2} - 0,5k_2},\ p, j = 1;2, \quad (0.15)$$

$$P_{p,j}(s_1) = F_{x_1 \to s_1}[q_{p,j}(x_1)],\ p = 0;1,\ j = 1;2. \quad (0.16)$$

Теорема 0.2. Компоненты решение задачи (0.12)-(0.14) при $j = 2$ и их первые производные являются непрерывными, ограниченными функциями.

Перейдем к задаче (0.12)-(0.14) при $j = 1$. Сделаем замены, подобные (0.4),

$$u_{p,1}(x_1, x_2) = e^{-0,5k_p x_2} v_{p,1}(x_1, x_2),\ p = 1;2, \qquad v_{2,1}(x_1, x_2) = z_1(x_1, -x_2), \quad (0.17)$$

и обозначим через $V_{1,1}(x)$ $(V_{2,1}(x))$ функцию, полученную с помощью продолжения функции $v_{1,1}(x)$ $(z_1(x))$ четным образом на нижнюю полуплоскость.

Определение 0.2. Обобщенным решением задачи (0.12)-(0.14) при $j = 1$ назовем решение обобщенной задачи

$$\Delta V_{p,1}(x) - 0,25k_p^2 V_{p,1}(x) = 2\frac{\partial V_{p,1}(x_1, +0)}{\partial x_2} \cdot \delta(x_2),\ p = 1;2, \quad (0.18)$$

с учетом обозначений $V_{1,1}(x)$, $V_{2,1}(x)$ и замен (0.17).

С помощью определений задач (0.12)-(0.14) при $j = 1;2$ можно сформулировать определение обобщенного решения задачи (0.1)-(0.3).

В главе 1 было построено явное решение обобщенной задачи, подобной (0.18), тогда имеем следующие равенства для функций $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$ при $x_2 > 0$

$$v_{1,1}(x) = F^{-1}_{s_1, s_2 \to x_1, x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + 0,25k_1^2}}{|s|^2 + 0,25k_1^2} w^0_{1,1}(s_1)\right], z_1(x) = F^{-1}_{s_1, s_2 \to x_1, x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + 0,25k_2^2}}{|s|^2 + 0,25k_2^2} w^0_{2,1}(s_1)\right], (0.19)$$

где функции $w^0_{p,1}(s_1)$ при $p = 1;2$ заданы равенствами (0.15).

Функции $q_{p,1}(x_1),\ p = 0;1$ строились таким образом, чтобы можно было легко получить их образ Фурье. Используя представлениями (0.10), (0.11), (0.16), (0.17), (0.19), доказаны следующие теоремы.

Теорема 0.3. Для компонентов вектор-функции $\left(u_1(x), u_2(x)\right)$, которая является решением задачи (0.1)-(0.3), справедливы следующие свойства:

1. функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathrm{R}^2_+\right)$, а функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ – пространству $L_2\left(\mathrm{R}^2_-\right)$;

2. выполнены равенства

$$\lim_{x_2 \to +0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_1(x_1,x_2) - u_2(x_1,-x_2) - q_0(x_1)\right)^2 dx_1 = 0,\ \lim_{x_2 \to +0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1,-x_2)}{\partial x_2} - q_1(x_1)\right)^2 dx_1 = 0.$$

Теорема 0.4. Для компонентов вектор-функции $\left(u_1(x),u_2(x)\right)$, которая является решением задачи (0.1)-(0.3), и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек $(\pm 1;0)$:

$$u_1(x)=R_1(x), \qquad u_2(x)=R_2(x),$$

$$\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1}=\frac{e^{-0,5k_px_2}}{2\pi}\left(\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)}+\frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{-1}(x)\right)q_0(-1)-\left(\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)}+\frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{+1}(x)\right)q_0(1)+\right.$$
$$\left.+\ln r_{-1}(x)\, q_1(-1)-\ln r_{+1}(x)\, q_1(1)\right)+R_{p+2}(x),$$

$$\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2}=\frac{e^{-0,5k_px_2}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)+\frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)-\ln r_{-1}(x)\,q_0'(-1)+\ln r_{+1}(x)\,q_0'(1)\right)+R_{p+4}(x),$$

где $p=1;2$, $r_{-1}(x)=\sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2}$ и $r_{+1}(x)=\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}$, а функции $R_j(x)$ равномерно ограничены на любых компактах $K_j\subset\overline{\mathrm{R}^2_{\operatorname{sgn}\left\{(-1)^{j+1}\right\}}}$ при $j=\overline{1;6}$.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [2]-[9], [11].

Третья глава посвящена изучению задачи о стационарном распределении тепла в области $D=D_+\cup D_-\cup\left\{(x_1,x_2)\middle|\,1<|x_1|<2;x_2=0\right\}$ из пространства R^2, где $D_+=\left\{(x_1,x_2)\middle|\,|x_1|<2;0<x_2<2\right\}$, $D_-=\left\{(x_1,x_2)\middle|\,|x_1|<2;-2<x_2<0\right\}$. Области D_+ и D_- заполнены неоднородными материалами с коэффициентами внутренней теплопроводности $e^{k_1(x_2)}$ и $e^{k_2(x_2)}$ соответственно. Стационарное распределение поля температуры в каждой из этих областей описывается уравнением $\operatorname{div}\left(e^{k_{1,5\mp0,5}(x_2)}\operatorname{grad}u_{1,5\mp0,5}(x)\right)=0$ (см. [40]). Условия на границе областей D_+ и D_-, моделирующие процесс теплообмена и теплового потока через их общую часть границы, с математической точки зрения, являются условиями сопряжения (трансмиссии). Кроме этого, граничные условия моделируют наличие трещины на границе указанных областей, что приводит к появлению неоднородностей в граничных условиях.

Вид коэффициентов внутренней теплопроводности материалов вообще гарантирует только положительность этих величин. Действительно, если $k_p(x_2)=\ln G_p(x_2)$, где $p=0;1$, то есть коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют вид $G_p(x_2)$, где $p=0;1$, свободный от присутствия экспоненты в представлениях. Вид коэффициентов $e^{k_{1,5\mp0,5}(x_2)}$ используется лишь для указания связи с задачами, рассматриваемыми в первой и второй главах.

Изучение задачи основано на построении ее решения с помощью функции Грина с использованием метода ВКБ и сравнении сингулярных составляющих компонентов ее решения с аналогичными составляющими компонентов решения специально подобранной задачи с постоянными коэффициентами и граничными функциями особого вида.

Изучаемая задача моделируется следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\Delta\tilde{u}_p(x)+k_p'(x_2)\frac{\partial\tilde{u}_p(x)}{\partial x_2}=0,\ x\in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p=1;2, \tag{0.20}$$

$$e^{0,5k_1(0)}\tilde{u}_1(x_1,+0)-e^{0,5k_2(0)}\tilde{u}_2(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in[-2;2], \tag{0.21}$$

$$\begin{gathered} e^{0,5k_1(0)}\left(\frac{k_1'(0)}{2}\tilde{u}_1(x_1,+0)+\frac{\partial\tilde{u}_1(x_1,+0)}{\partial x_2}\right)- \\ -e^{0,5k_2(0)}\left(\frac{k_2'(0)}{2}\tilde{u}_2(x_1,-0)+\frac{\partial\tilde{u}_2(x_1,-0)}{\partial x_2}\right)=q_1(x_1),\ x_1\in[-2;2], \end{gathered} \tag{0.22}$$

$$e^{0,5k_1(x_2)}\tilde{u}_1((-1)^p2,x_2)=f_p(x_2),\ x_2\in[0;2],\ p=1;2, \tag{0.23}$$

$$e^{0,5k_2(x_2)}\tilde{u}_2((-1)^p2,x_2)=f_{p+2}(x_2),\ x_2\in[-2;0],\ p=1;2. \tag{0.24}$$

Для согласования граничных условий выполнены равенства

$$f_p(0)-f_{p+2}(0)=f_p'(0)-f_{p+2}'(0)=0,\ p=1;2. \tag{0.25}$$

Будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$, $k_1(x_2)$, $k_2(x_2)$, $f_1(x_2)$, $f_2(x_2)$, $f_3(x_2)$ и $f_4(x_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны ($\operatorname{supp}q_0(x_1)=\operatorname{supp}q_1(x_1)=[-1;1]$) и принадлежат пространству $C^4\left([-1;1]\right)$;

2) функция $k_1(x_2)$ принадлежит пространству функций $C^\infty\left([0;2]\right)$, а функция $k_2(x_2)$ – пространству $C^\infty\left([-2;0]\right)$;

3) справедливы оценки $\tilde{k}_p(0)>0$, где $\tilde{k}_p(x_2)=\left(k_p'(x_2)\right)^2+2k_p''(x_2)$, $p=1;2$.

4) функции $f_1(x_2)$ и $f_2(x_2)$ принадлежат пространству $C^2\left([0;2]\right)$, а функции $f_3(x_2)$ и $f_4(x_2)$ – пространству $C^2\left([-2;0]\right)$.

Замечание 0.6. Пусть $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)$ – четное продолжение функции $\tilde{k}_p(x_2)$, то есть $\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)=\tilde{k}_p\left((-1)^{p+1}x_2\right)$, $x_2\in[0;2]$, $p=1;2$. Следовательно, согласно условиям на функции $\tilde{k}_1(x_2)$ и $\tilde{k}_2(x_2)$, выполнены неравенства $\tilde{\tilde{k}}_p(0)>0$ при $p=1;2$.

Условия (0.21), (0.22) понимаются в смысле главного значения (аналогично замечанию 0.2).

Определение 0.3. Решением задачи (0.20)-(0.25) назовем пару функций $\tilde{u}_1(x)$

и $\tilde{u}_2(x)$, заданных соответственно на D_+ и D_-, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (0.20) и условиям (0.23), (0.24) и условиям (0.21), (0.22) в смысле главного значения.

Введем обозначения:

$$\gamma_1(x_1,j)=\begin{cases} q_0(x_1), & j=1, \\ 0, & j=2; \end{cases} \qquad \gamma_3(x_2,j,p)=\begin{cases} \tilde{v}_1((-1)^p 2,x_2), & j=1, \\ f_p(x_2)-\tilde{v}_1((-1)^p 2,x_2), & j=2; \end{cases}$$
$$\gamma_2(x_1,j)=\begin{cases} q_1(x_1), & j=1, \\ 0, & j=2; \end{cases} \qquad \gamma_4(x_2,j,p)=\begin{cases} \tilde{z}((-1)^p 2,-x_2), & j=1, \\ f_{p+2}(x_2)-\tilde{z}((-1)^p 2,-x_2), & j=2, \end{cases} \tag{0.26}$$

где $p=1;2$, а $(\tilde{v}_1(x),\tilde{z}(x))$ – решение задачи, подобной (0.5)-(0.8),

$$\Delta\tilde{v}_1(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_1(0)\tilde{v}_1(x)=0,\ x\in \mathrm{R}^2_+, \tag{0.27}$$

$$\Delta\tilde{z}(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_2(0)\tilde{z}(x)=0,\ x\in \mathrm{R}^2_+, \tag{0.28}$$

$$\tilde{v}_1(x_1,+0)-\tilde{z}(x_1,+0)=q_0(x_1),\ x_1\in \mathrm{R}, \tag{0.29}$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{z}(x_1,+0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in \mathrm{R}. \tag{0.30}$$

Замечание 0.7. Задача (0.27)-(0.30) может быть изучена так же, как и задача (0.5)-(0.8).

Рассмотрим вспомогательные задачи

$$\Delta\tilde{u}_{p,j}(x)+k_p'(x_2)\frac{\partial\tilde{u}_{p,j}(x)}{\partial x_2}=0,\ x\in D_{\mathrm{sgn}(3-2p)},\ p=1;2, \tag{0.31}$$

$$e^{0,5k_1(0)}\tilde{u}_{1,j}(x_1,+0)-e^{0,5k_2(0)}\tilde{u}_{2,j}(x_1,-0)=\gamma_1(x_1,j),\ x_1\in[-2;2], \tag{0.32}$$

$$\begin{aligned} &e^{0,5k_1(0)}\left(\frac{k_1'(0)}{2}\tilde{u}_{1,j}(x_1,+0)+\frac{\partial\tilde{u}_{1,j}(x_1,+0)}{\partial x_2}\right)- \\ &\quad -e^{0,5k_2(0)}\left(\frac{k_2'(0)}{2}\tilde{u}_{2,j}(x_1,-0)+\frac{\partial\tilde{u}_{2,j}(x_1,-0)}{\partial x_2}\right)=\gamma_2(x_1,j),\ x_1\in[-2;2], \end{aligned} \tag{0.33}$$

$$e^{0,5k_1(x_2)}\tilde{u}_{1,j}((-1)^p 2,x_2)=\gamma_3(x_2,j,p),\ x_2\in[0;2],\ p=1;2, \tag{0.34}$$

$$e^{0,5k_2(x_2)}\tilde{u}_{2,j}((-1)^p 2,x_2)=\gamma_4(x_2,j,p),\ x_2\in[-2;0],\ p=1;2, \tag{0.35}$$

$$f_p(0)-f_{p+2}(0)=f_p'(0)-f_{p+2}'(0)=0,\ p=1;2, \tag{0.36}$$

где $j=1;2$. Очевидно, что компоненты решения задачи (0.20)-(0.25) представимы в виде

$$\tilde{u}_p(x)=\tilde{u}_{p,1}(x)+\tilde{u}_{p,2}(x),\ \ p=1;2, \tag{0.37}$$

где $(\tilde{u}_{1,1}(x),\tilde{u}_{2,1}(x))$ – решение задачи (0.31)-(0.35) при $j=1$, $(\tilde{u}_{1,2}(x),\tilde{u}_{2,2}(x))$ – решение задачи (0.31)-(0.36) при $j=2$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{u}_{p,1}(x_1,x_2)=e^{-0,5k_p(x_2)}\tilde{v}_{p,1}(x_1,x_2),\ p=1;2,\qquad \tilde{v}_{2,1}(x_1,x_2)=\tilde{z}_1(x_1,-x_2),\quad (0.38)$$

можно выписать задачу относительно функций $\tilde{v}_{1,1}(x)$ и $\tilde{z}_1(x)$, вычитая из равенств которой соответствующие равенства задачи (0.27)-(0.30), относительно функций $\tilde{V}_1(x)=\tilde{v}_{1,1}(x)-\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{V}_2(x)=\tilde{z}_1(x)-\tilde{z}(x)$ получим следующую задачу

$$\Delta\tilde{V}_1(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\tilde{V}_1(x)=0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_1(0)-\tilde{\tilde{k}}_1(x_2)\right)\tilde{v}_1(x),\ x\in D_+,\qquad (0.39)$$

$$\Delta\tilde{V}_2(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\tilde{V}_2(x)=0,25\left(\tilde{\tilde{k}}_2(0)-\tilde{\tilde{k}}_2(x_2)\right)\tilde{z}(x),\ x\in D_+,\qquad (0.40)$$

$$\tilde{V}_1(x_1,+0)-\tilde{V}_2(x_1,+0)=0,\ x_1\in[-2;2],\qquad (0.41)$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{V}_2(x_1,+0)}{\partial x_2}=0,\ x_1\in[-2;2],\qquad (0.42)$$

$$\tilde{V}_1((-1)^p2,x_2)=\tilde{V}_2((-1)^p2,x_2)=0,\ x_2\in[0;2],\ p=1;2.\qquad (0.43)$$

Компоненты решения (а соответственно и их первые производные) последней задачи строятся в виде рядов с помощью методов Фурье, ВКБ и построения функций Грина. Исследуется каждый из указанных рядов и, таким образом, доказывается, что функции $\tilde{V}_p(x)$, $\frac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial\tilde{V}_p(x)}{\partial x_2}$ при $p=1;2$ непрерывны на $\overline{D_+}$, следовательно, функции $\tilde{v}_{1,1}(x)$, $\tilde{z}_1(x)$, $\frac{\partial\tilde{v}_{1,1}(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\tilde{z}_1(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\tilde{v}_{1,1}(x)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\tilde{z}_2(x)}{\partial x_2}$ имеют такие же асимптотические представления вблизи точек $(\pm1;0)$, что и функции $\tilde{v}_1(x)$, $\tilde{z}(x)$, $\frac{\partial\tilde{v}_1(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\tilde{z}(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\tilde{v}_1(x)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\tilde{z}(x)}{\partial x_2}$ соответственно, где $(\tilde{v}_1(x),\tilde{z}(x))$ – решение задачи (0.27)-(0.30). Использовав равенства (0.38), можно построить соответствующие асимптотические представления функций $\tilde{u}_{p,1}(x)$ при $p=1;2$ и их первых производных.

Перейдем к задаче (0.31)-(0.36) при $j=2$. Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{u}_{p,2}(x_1,x_2)=e^{-0,5k_p(x_2)}\tilde{v}_{p,2}(x_1,x_2),\ p=1;2,\qquad \tilde{v}_{2,2}(x_1,x_2)=\tilde{z}_2(x_1,-x_2),\ (0.44)$$

$$\mu_1(x)=f_1(x_2)-\tilde{v}_1(-2,x_2)+0,25(x_1+2)\left(f_2(x_2)-\tilde{v}_1(2,x_2)-f_1(x_2)+\tilde{v}_1(-2,x_2)\right),$$

$$\mu_2(x)=f_3(-x_2)-\tilde{z}(-2,x_2)+0,25(x_1+2)\left(f_4(-x_2)-\tilde{z}(2,x_2)-f_3(-x_2)+\tilde{z}(-2,x_2)\right),$$

$$W_1(x)=\tilde{v}_{1,2}(x)-\mu_1(x),\qquad W_2(x)=\tilde{z}_2(x)-\mu_2(x),\qquad (0.45)$$

где $(\tilde{v}_1(x),\tilde{z}(x))$ – решение задачи (0.27)-(0.30). Тогда относительно функций $W_1(x)$ и $W_2(x)$ имеем следующую задачу

$$\Delta W_p(x)-0,25\tilde{\tilde{k}}_p(x_2)W_p(x)=F_p(x),\ x\in D_+,\ p=1;2, \qquad (0.46)$$

$$W_1(x_1,+0)-W_2(x_1,+0)=0,\ x_1\in[-2;2], \qquad (0.47)$$

$$\frac{\partial W_1(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{\partial W_2(x_1,+0)}{\partial x_2}=0,\ x_1\in[-2;2], \qquad (0.48)$$

$$W_1((-1)^p 2,x_2)=W_2((-1)^p 2,x_2)=0,\ x_2\in[0;2],\ p=1;2, \qquad (0.49)$$

где явный вид функций $F_p(x)$ при $p=1;2$ приведен в главе 3.

Таким образом, получили задачу, аналогичную (0.39)-(0.43), различия в правых частях уравнений (0.39), (0.40) и (0.46). Действуя так же, как и с рядами $\tilde{V}_p(x)$, $\frac{\partial \tilde{V}_p(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \tilde{V}_p(x)}{\partial x_2}$ при $p=1;2$, можно доказать, что функции $W_p(x)$, $\frac{\partial W_p(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial W_p(x)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, непрерывны на $\overline{D_+}$. Вернувшись к функциям $\tilde{u}_{p,2}(x)$, $p=1;2$, с помощью замен указанных выше, получаем, что $\tilde{u}_{p,2}(x)$, $\frac{\partial \tilde{u}_{p,2}(x)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \tilde{u}_{p,2}(x)}{\partial x_2}$ непрерывны на $\overline{D_{\mathrm{sgn}(3-2p)}}$ при $p=1;2$.

Согласно равенствам (0.37) и вышеуказанным рассуждениям, получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 0.5. Для компонентов вектор-функции $(\tilde{u}_1(x),\tilde{u}_2(x))$, которая является решением задачи (0.20)-(0.25), и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек $(\pm 1;0)$:

$$\tilde{u}_p(x)=\tilde{R}_p(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_p(x)}{\partial x_1}=\frac{e^{-0,5k_p(x_2)}}{2\pi}\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)-\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)+\ln r_{-1}(x)q_1(-1)-\ln r_{+1}(x)q_1(1)\right)+\tilde{R}_{p+2}(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_p(x)}{\partial x_2}=\frac{e^{-0,5k_p(x_2)}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1)+\frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1)-\ln r_{-1}(x)q_0'(-1)+\ln r_{+1}(x)q_0'(1)\right)+\tilde{R}_{p+4}(x),$$

где $p=1;2$, $r_{-1}(x)=\sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2}$ и $r_{+1}(x)=\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}$, а функции $\tilde{R}_j(x)$ равномерно ограничены на $\overline{D_{\mathrm{sgn}\{(-1)^{j+1}\}}}$ при $j=\overline{1;6}$.

Результаты главы 3 опубликованы в работах [12]-[14].

Публикации автора по теме диссертации

[1] Глушко А. В. Построение стационарного поля температуры для двух связных полупространств с межфазовой трещиной / А. В. Глушко, А. С. Рябенко,

А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXIII». – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. – С. 49-50.

[2] Черникова А. С. Асимптотики решения задачи о сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной на границе / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXIV». – Воронеж: ВГУ, 2013. – С. 216-217.

[3] Глушко А. В. Задача о распределении тепла при сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной / А. В. Глушко, А. С. Черникова // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация: тр. Всерос. науч.-практич. конф. Москва, РУДН, 23-26 апреля 2013 г. – М.: РУДН, 2013. – С. 58-59.

[4] Черникова А. С. Задача о стационарном распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с межфазной трещиной / А. С. Черникова // XL Гагаринские чтения. Науч. тр. Междунар. молодежной науч. конф. в 9 т. Москва, 7-11 апреля 2014 г. – М.: МАТИ, 2014. Т. 5. – С. 191-193.

[5] Черникова А. С. Асимптотика решения задачи о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух неоднородных материалов, с межфазной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXV». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. – С. 192-193.

[6] Черникова А. С. Задача о распределении тепла в биматериале с полуограниченной межфазной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения-XXV». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. – С. 193-194.

[7] Черникова А. С. Задача о стационарном распределении тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов, с межфазной трещиной / А. С. Черникова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сб. науч. тр. по материалам междунар. заоч. науч.-практич. конф. – 2014 г. – № 4 ч. 2 (9-2) – С. 151-154.

[8] Черникова А. С. Задача о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной / А. С. Черникова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. – 2014. – Вып. 3. – С. 66-81.

[9] Глушко А. В. Асимптотика решения вблизи границы для задачи сопряжения материалов в плоскости с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко,

А. С. Черникова // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. VII междунар. конф. «ПМТУКТ-2014» – Воронеж: изд-во «Научная книга», 2014. – С 105-108.

[10] Глушко А. В. О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 111-134.

[11] Черникова А. С. Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины / А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2014. – №1. – С. 188-206.

[12] Черникова А. С. Свойства решения задачи о распределении тепла в биматериале с межфазной трещиной / А. С. Черникова // Науч.-практич. журнал «Аспирант». – 2015. – №3. – С. 5-9.

[13] Черникова А. С. Распределение тепла в плоском биматериале с трещиной / А. С. Черникова // Науч.-практич. журнал «Аспирант». – 2015. – №3. – С. 10-18.

[14] Черникова А. С. Асимптотическое поведение решения задачи о распределении тепла в биматериале с конечной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конф.: Воронеж. весенняя матем. школа «Понтрягинские чтения-XXVI». – Воронеж: ВГУ, 2015. – С. 210-211.

Работы [8], [10], [11] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.