

На правах рукописи



Нгензи Жан Клод

**Анализ нелинейных колебаний упругих прямоугольных  
пластинок в вязкой среде с изменяемой вязкостью при  
наличии внутренних резонансов**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет»

Научный руководитель:

Росихин Юрий Алексеевич  
Заслуженный деятель науки РФ,  
доктор физико-математических наук, профессор  
ФГБОУ ВО Воронежский ГАСУ, Кафедра  
информационных технологий и автоматизированного  
проектирования в строительстве, профессор

Официальные оппоненты:

Ковалев Владимир Александрович  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Московский  
городской университет управления Правительства  
Москвы», кафедра финансового менеджмента,  
профессор

Босьяков Сергей Михайлович  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
Белорусский государственный университет,  
механико-математический факультет,  
кафедра теоретической и прикладной механики,  
доцент

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный  
технический университет»

Защита состоится «13» января 2016 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.24 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, ВГУ, Университетская пл., 1, ауд. 226.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» и на сайте <http://www.science.vsu.ru>

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Воронина Ирина Евгеньевна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Изучение нелинейных колебаний пластин является важной областью прикладной механики, так как пластинки используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники. Для исследования нелинейных колебаний пластин применяют различные методы: аналитические, численные и экспериментальные.

Изучение свободных незатухающих и затухающих нелинейных систем является важной составляющей для определения динамических характеристик системы, зависящих от амплитудно-частотных соотношений и форм колебаний. Кроме того, нелинейные колебания могут сопровождаться таким явлением как внутренний резонанс, приводящий к сильному взаимодействию возбужденных форм колебаний (А. Nayfeh, Ю. А. Россихин и М. В. Шитикова), и, как следствие, к перекачке энергии между взаимодействующими модами. Внутренний резонанс может наблюдаться в случае некоторой комбинации собственных частот одного и того же типа колебаний (Р. Ribeiro и М. Petyt). Другой тип внутреннего резонанса в висячих комбинированных системах был исследован в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, когда одна частота колебаний в плоскости была равна (внутренний резонанс 1:1) или в два раза больше (внутренний резонанс 1:2), чем некоторая частота колебаний из плоскости. Эти типы внутреннего резонанса приводят к перекачке энергии между двумя или тремя подсистемами. Исследования в этом направлении были начаты А. А. Виттом и Г. С. Гореликом, которые были одними из первых, кто теоретически и экспериментально показали явление внутреннего резонанса два-к-одному с перекачкой энергии от одной подсистемы в другую, используя в качестве примера самую простую механическую систему с двумя степенями свободы.

Чтобы исследовать нелинейные затухающие колебания висячих комбинированных систем, для описания реологических свойств среды Ю. А. Россихин и М. В. Шитикова предложили использовать вязкоупругую модель Кельвина-Фойгта с дробной производной, так как эта модель имеет преимущество перед обычной моделью Кельвина-Фойгта, потому что она приводит к результатам, находящимся в хорошем соответствии с экспериментальными данными, полученными А.М. Abdel-Ghaffar во время натурных испытаний висячих мостов Винсент-Томас и Золотые Ворота, которые показали, что различные формы колебаний обладают различными коэффициентами затухания, и порядок малости этих коэффициентов говорит о низкой демпфирующей способности висячих комбинированных систем, которая приводит к длительной перекачке энергии от одной подсистемы в другую. Кроме того, с увеличением собственной частоты колебаний уменьшается соответствующий коэффициент затухания.

Обзоры недавних достижений в области динамики тонких пластинок, приведенные в работах М. Amabili, М. Sathyamoorthy, Ю. А. Россихина и М. В. Шитиковой, показывают, что нелинейные колебания пластинок в вязкой среде, осложненные наличием резонансных явлений, исследованы недостаточно.

В данной диссертационной работе изучаются нелинейные свободные колебания тонких пластинок в вязкой среде, движения которых описываются системой трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений, в случае, когда пластинка находится в условиях внутреннего резонанса, приводящего к взаимодействию форм колебаний, соответствующих взаимно ортогональным перемещениям.

Так как внутренний резонанс является конструкционным резонансом в отличие от внешнего резонанса, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, то внутренний резонанс зачастую неустраним, поскольку готовую

конструкцию уже не переделать, а при конструировании невозможно предугадать наличие в конструкции того или иного резонансного сочетания собственных частот. Поскольку таких сочетаний очень много, то их необходимо детально исследовать.

**Целями данного исследования являются:**

Анализ свободных затухающих колебаний упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой описываются реологической моделью, содержащей дробную производную, при наличии условий внутреннего резонанса и комбинационного резонанса;

Изучение влияния параметра дробности на процесс перекачки энергии, происходящий при нелинейных колебаниях пластинок, находящихся в условиях внутреннего резонанса;

Исследование влияния малой вязкости на характер колебательных режимов пластинки, движения которой описываются системой трех нелинейных уравнений, в условиях всех возможных внутренних резонансов.

**Тематика работы.** Содержание диссертации соответствует п. 2 «Теория моделей деформируемых тел с простой и сложной структурой», п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести», п. 8. «Математические модели, численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела».

**Научная новизна.**

1. Решена задача о свободных нелинейных колебаниях упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными, в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений со связанными линейными частями относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Предложен новый подход, позволяющий развязать линейные части нелинейных уравнений движения пластинок, при этом функции амплитуд колебаний раскладываются в степенные ряды по малому параметру и зависят от различных масштабов времени, а качестве метода решения нелинейных уравнений используется метод многихвременных масштабов, который является одним из методов теории возмущений. Изучены все десять возможных случаев внутреннего резонанса.

2. Показано, что тип внутреннего резонанса зависит от порядка малости вязкости, учитываемой в уравнениях колебаний. Так, если вязкость порядка  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - малая величина, то затухающие колебания могут сопровождаться внутренним резонансом 2:1, когда одна из частот вертикальных колебаний или колебаний в плоскости пластинки в два раза превышает частоту колебаний в плоскости пластинки в другом направлении, и 2:1:1, когда частоты колебаний в трех взаимно перпендикулярных направлениях связаны указанным соотношением. Другие виды внутреннего резонанса: 1:1, 1:1:1, а также комбинационные резонансы аддитивного и разностного типов - возможны в случае малости вязкости порядка  $\varepsilon^2$ .

3. Исследовано влияние параметра дробности на характер нелинейных колебаний и на механизм перекачки энергии между взаимодействующими нелинейными модами колебаний. Показано, что каждая мода характеризуется собственным коэффициентом демпфирования, связанным с собственной частотой колебаний экспоненциальной зависимостью с отрицательной дробной экспонентой.

4. Выполнен феноменологический анализ колебаний пластинки, находящейся в различных условиях внутреннего резонанса, при помощи фазовых портретов, построенных для разных значений параметров пластинки. Проведенный анализ выявил многообразие колебательных движений: стационарные колебания,

двухсторонний энергообмен между рассматриваемыми подсистемами и односторонний энергообмен, при этом при наличии малой вязкости все режимы затухают с течением времени.

5. Для каждого типа внутреннего резонанса из выявленных в результате проведенных исследований десяти видов внутренних резонансов получены системы нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний. Для некоторых частных случаев внутреннего резонанса получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функция тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов. Так, во время свободных колебаний пластинки, сопровождающихся внутренним резонансом, могут наблюдаться три режима колебаний: стационарный (при отсутствии демпфирования), квазистационарный (демпфирование описывается обычной производной целого порядка) и нестационарный (демпфирование описывается производной дробного порядка). Разработанный новый подход позволил решать задачи о колебаниях тонких тел более эффективно.

6. Показано, что внутренний резонанс является конструкционным резонансом. В отличие от внешнего резонанса, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, внутренний резонанс неустраним, поскольку готовую конструкцию уже не переделать, а при конструировании невозможно предугадать наличие в конструкции того или иного резонансного сочетания собственных частот, поскольку таких сочетаний очень много и их необходимо исследовать.

**Достоверность** базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. При стремлении параметра дробности к единице полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка.

**Практическая ценность.** Явление внутреннего резонанса требует очень серьезного изучения, поскольку в тонкой пластине всегда присутствуют какой-либо из десяти найденных типов внутреннего резонанса. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями при проектировании конструкций, которые в процессе колебаний могут оказаться в условиях различных внутренних резонансов.

При наличии возмущающей гармонической силы данный подход позволит избегать наложения внешнего резонанса на внутренний, поскольку такое наложение может привести к необратимым последствиям.

Данные научные исследования выполнялись в рамках проектной части государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности «Новый подход к изучению нелинейных колебаний тонких вязкоупругих тел, демпфирующие свойства которых определяются дробными операторами Ю.Н. Работнова и другими операторами дробного порядка» (проект № 7.22.2014/К).

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного архитектурно-строительного университета в 2013-2015гг.; на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук Воронежского ГАСУ; на семинаре кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета в 2015г.; на международной научной конференции «Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур», Минск, Беларусь, в сентябре 2013г.; на международной конференции «Mechanics, Materials, Mechanical Engineering and

Chemical Engineering» (MMMCE'15) в г. Барселона, Испания, в апреле 2015г.; на международной конференции «3d International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences» (MCSS'15) в г. Дубай, АРЭ, в феврале 2015г.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в пяти печатных работах, из них две в изданиях, проиндексированных в международных базах данных Web of Science и Scopus, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

**Личный вклад автора.** Основные результаты исследований по теме диссертации были получены лично автором и опубликованы в соавторстве с научным руководителем, который определил основные направления исследования в рамках выполнения проектной части государственного задания Министерства образования и науки РФ.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка используемой литературы из 40 наименований. Работа изложена на 147 страницах, содержит 30 рисунков.

Автор выносит благодарность доктору физико-математических наук, профессору Шитиковой М.В. за консультации и обсуждение работы на всем протяжении ее выполнения.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна диссертационной работы, выносимые на защиту научные положения и результаты, практическая значимость работы, а также дана краткая аннотация по главам и краткий обзор работ, касающихся диссертации.

**В первой главе** приводится постановка задачи о свободных нелинейных колебаниях упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными, в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, линейные части которых взаимосвязаны:

$$u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 v_{xy} + w_x \left( w_{xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 w_{yy} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1^2 w_y w_{xy} = \ddot{u} + \alpha_1 D^\gamma u, \quad (1)$$

$$\beta_1^2 v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 u_{xy} + \beta_1 w_y \left( \beta_1^2 w_{yy} + \frac{1-\nu}{2} w_{xx} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 w_x w_{xy} = \ddot{v} + \alpha_2 D^\gamma v, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_2^2}{12} (w_{xxxx} + 2\beta_1^2 w_{xxyy} + \beta_1^4 w_{yyyy}) - w_{xx} (u_x + \nu \beta_1 v_y) - w_x (u_{xx} + \nu \beta_1 v_{xy}) - \\ & - \frac{1-\nu}{2} \beta_1 [w_{xy} (\beta_1 u_y + v_x) + w_y (\beta_1 u_{xy} + v_{xx})] - \beta_1^2 [w_{yy} (\nu u_x + \beta_1 v_y) + w_y (\nu u_{xy} + \beta_1 v_{yy})] - \\ & - \frac{1-\nu}{2} \beta_1 [w_{xy} (\beta_1 u_y + v_x) + w_x (\beta_1 u_{yy} + v_{xy})] = -\ddot{w} - \alpha_3 D^\gamma w \end{aligned} \quad (3)$$

К системе уравнений (1)-(3) необходимо добавить начальные условия

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = w|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$\dot{u}|_{t=0} = \varepsilon U^0(x, y), \quad \dot{v}|_{t=0} = \varepsilon V^0(x, y), \quad \dot{w}|_{t=0} = \varepsilon W^0(x, y), \quad (5)$$

и граничные условия

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad w_{xx}|_{x=0} = w_{xx}|_{x=1} = 0, \quad (6)$$

$$w|_{y=0} = w|_{y=1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \quad v_y|_{y=0} = v_y|_{y=1} = 0, \quad w_{yy}|_{y=0} = w_{yy}|_{y=1} = 0, \quad (7)$$

где  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$  и  $w = w(x, y, t)$  - перемещения точек, расположенных в срединной плоскости пластины в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $\beta_1 = a/b$  и  $\beta_2 = h/a$  - безразмерные параметры, определяющие размеры пластины;  $a$  и  $b$  - размеры пластины в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $h$  - толщина;  $t$  - время; точка обозначает производную по времени, нижние индексы означают производные по соответствующим координатам,  $\varepsilon$  - малый параметр.

В уравнениях (1)-(3) члены  $\alpha_1 D^\gamma u$ ,  $\alpha_2 D^\gamma v$  и  $\alpha_3 D^\gamma w$ , представляют собой силы вязкого сопротивления, появляющиеся при колебании пластинки в вязкой окружающей среде, где  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )- коэффициенты демпфирования и  $D^\gamma$  - дробная производная Римана-Лиувилля порядка  $\gamma$

$$D^\gamma F = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{F(t-t')}{\Gamma(1-\gamma)t'^\gamma} dt'. \quad (8)$$

В отличие от традиционного моделирования вязких сил сопротивления через производные по времени первого порядка, в настоящем исследовании используются производные по времени дробного порядка  $D^\gamma$ , так как это позволит получить модальные коэффициенты демпфирования, зависящие от собственных частот колебаний.

Решение уравнений (1) - (3) ищется в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{1mn}(t) \cos \pi m x \sin \pi n y, \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2mn}(t) \sin \pi m x \cos \pi n y, \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{3mn}(t) \sin \pi m x \sin \pi n y, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_{1mn}(t)$ ,  $x_{2mn}(t)$  и  $x_{3mn}(t)$  - обобщенные перемещения, соответствующие перемещениям в плоскости пластины и ее прогибу,  $m$  и  $n$  - целые числа, отвечающие числу учитываемых полуволн.

Решение задачи на собственные значения позволило определить частоты собственных колебаний в плоскости пластины

$$\omega_{1mn}^2 = \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2), \quad \omega_{2mn}^2 = \frac{1-\nu}{2} \omega_{1mn}^2, \quad (10)$$

а также из плоскости

$$\omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4 \beta_2^2}{12} (m^2 + \beta_1^2 n^2)^2. \quad (11)$$

Подставляя (9) в уравнения (1) - (3), умножая каждое уравнение на соответствующую собственную форму, интегрируя по  $x$  и  $y$  и используя условия ортогональности для линейных мод в пределах областей  $0 \leq x, y \leq 1$ , приходим к бесконечному числу систем, каждая из которых состоит из трех связанных нелинейных обычных дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $x_{i mn}$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\ddot{x}_{\alpha mn} + \alpha_\alpha D^\gamma x_{\alpha mn} + S_{\alpha\beta}^{mn} x_{\beta mn} = -F_{\alpha mn} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (12)$$

$$\ddot{x}_{3mn} + \alpha_3 D^\gamma x_{3mn} + \omega_{3mn}^2 x_{3mn} = -F_{3mn}, \quad (13)$$

где суммирование выполнено по двум повторяющимся индексам,  $F_{i mn}$  - нелинейные части уравнений, а  $S_{ij}^{mn}$  - элементы эрмитовой матрицы, два действительных собственных значения (10) которой соответствуют двум взаимно ортогональным собственным векторам

$$\vec{L}_{mn}^I \left\{ L_{1mn}^I = \frac{\pi m}{\omega_{1mn}}, \quad L_{2mn}^I = \frac{\pi \beta_1 n}{\omega_{1mn}} \right\}. \quad (14)$$

Таким образом, матрица  $S_{\alpha\beta}^{mn}$  и обобщенные перемещения  $x_{\alpha mn}$ , входящие в уравнения (12) и (13), могут быть представлены в виде разложения по собственным векторам (14)

$$S_{\alpha\beta}^{mn} = \omega_{1mn}^2 L_{\alpha mn}^I L_{\beta mn}^I + \omega_{2mn}^2 L_{\alpha mn}^U L_{\beta mn}^U, \quad (15)$$

$$x_{\alpha mn} = X_{1mn} L_{\alpha mn}^I + X_{2mn} L_{\alpha mn}^U. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в уравнения (12) и (13) и затем умножая (12) последовательно на  $L_{i mn}^I$  и  $L_{i mn}^U$ , получаем следующие три уравнения:

$$\ddot{X}_{1mn} + \alpha_1 D^\gamma X_{1mn} + \omega_{1mn}^2 X_{1mn} = -F_{\alpha mn} L_{\alpha mn}^I, \quad (17)$$

$$\ddot{X}_{2mn} + \alpha_2 D^\gamma X_{2mn} + \omega_{2mn}^2 X_{2mn} = -F_{\alpha mn} L_{\alpha mn}^U, \quad (18)$$

$$\ddot{X}_{3mn} + \alpha_3 D^\gamma X_{3mn} + \omega_{3mn}^2 X_{3mn} = -F_{3mn}, \quad (19)$$

где  $X_{3mn} = x_{3mn}$ . Следует отметить, что левые части уравнений (17)-(19), в отличие от уравнений (12) и (13), линейны и независимы друг от друга, а связь между уравнениями осуществляется только с помощью нелинейных членов, стоящих в их правых частях.

Известно, что в процессе нестационарного воздействия на тонкие тела возбуждаются не все возможные моды колебаний. Кроме того, возбуждаются и доминируют в процессе колебаний моды, которые сильно взаимосвязаны любым из, так называемых, условий внутреннего резонанса, приводя к перекачке энергии от одной подсистемы в другую, при этом типы форм колебаний, которые будут инициированы, зависят из характера внешнего воздействия.

Предположим далее, что процесс колебаний происходит таким способом, что возбуждаются и доминируют только три собственных моды, соответствующие обобщенным смещениям и описываемые следующей системой уравнений:

$$\ddot{X}_1 + \alpha_1 D^\gamma X_1 + \omega_1^2 X_1 + \zeta_1 X_3^2 = 0, \quad (20)$$

$$\ddot{X}_2 + \alpha_2 D^\gamma X_2 + \omega_2^2 X_2 + \zeta_2 X_3^2 = 0, \quad (21)$$

$$\ddot{X}_3 + \alpha_3 D^\gamma X_3 + \omega_3^2 X_3 + X_3 (\zeta_{13} X_1 + \zeta_{23} X_2) = 0. \quad (22)$$

Приближенное решение уравнений (20)-(22) для малых, но конечных амплитуд, слабо изменяющихся со временем, может быть представлено в виде разложения до третьего порядка относительно различных временных масштабов в следующем виде:

$$X_i = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^2 X_{i2}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \dots, \quad (23)$$

где  $i=1,2,3$ ,  $T_n = \varepsilon^n t$  - новые независимые переменные, среди них  $T_0 = t$  - быстрое время, характеризующее движения с собственными частотами,  $T_1 = \varepsilon t$  и  $T_2 = \varepsilon^2 t$  - медленные временные масштабы, характеризующие модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

Следуя Ю.А. Россихину и М.В. Шитиковой, оператор дробного дифференцирования будем использовать в виде



$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \gamma [(\gamma-1) D_0^{\gamma-2} D_1^2 + 2 D_0^{\gamma-1} D_2] \quad (24)$$

где  $D_n = \partial / \partial T_n$  и  $D_0^\gamma, D_0^{\gamma-1}, D_0^{\gamma-2}, \dots$  - дробные производные Грюнвальда-Летникова, которые для 'достаточно хороших' функций, например, степенных функций типа  $e^{\pm i\omega t}$ , совпадают с дробными производными Римана-Лиувилля по времени  $t$ , определенными на полуоси

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t}. \quad (25)$$

Полагая, что вязкость среды, окружающей рассматриваемую пластинку, является малой, то есть  $\varkappa_i = \varepsilon^k \mu_i \tau_i^\gamma$ , где  $\tau_i$  - время релаксации  $i$ -го обобщённого перемещения и  $\mu_i$  - конечная величина, а выбор  $k$  зависит от порядка малости коэффициентов вязкости  $\varkappa_i$ , и подставляя (23)-(25) в уравнения (20)-(22), после приравнивания коэффициентов с одинаковыми степенями  $\varepsilon$  к нулю, приходим к системе рекуррентных уравнений различного порядка. Так, если порядок  $\varepsilon$ , то получим систему уравнений

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 0, \quad D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 0, \quad D_0^2 X_{31} + \omega_3^2 X_{31} = 0, \quad (26)$$

решение которой имеет вид

$$X_{j1} = A_j(T_1, T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_1, T_2) \exp(-i\omega_j T_0) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (27)$$

где  $A_j(T_1, T_2)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) - неизвестные комплексные функции и  $\bar{A}_j(T_1, T_2)$  - сопряжённые с ними функции.

Из анализа систем уравнений последующих двух порядков найдено, что если порядок малости вязкости равен  $\varepsilon$ , то на этом шаге возможны следующие типы внутреннего резонанса:

(1) внутренний резонанс два-к-одному, когда одна собственная частота в два раза больше другой собственной частоты,

$$\omega_1 = 2\omega_3 \quad (\omega_2 \neq \omega_1, \omega_2 \neq 2\omega_3), \quad (28)$$

$$\omega_2 = 2\omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq 2\omega_3); \quad (29)$$

(2) внутренний резонанс один-к-одному-к-двум, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = 2\omega_3, \text{ или } 1:1:2. \quad (30)$$

Если порядок малости вязкости равен  $\varepsilon^2$ , то на этом шаге возможны следующие типы внутреннего резонанса:

(1) внутренний резонанс один-к-одному, когда одна собственная частота приблизительно равна другой собственной частоте,

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (\omega_3 \neq \omega_1, \omega_3 \neq \omega_2), \quad (31)$$

$$\omega_1 = \omega_3 \quad (\omega_2 \neq \omega_1, \omega_2 \neq \omega_3), \quad (32)$$

$$\omega_2 = \omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq \omega_3); \quad (33)$$

(2) внутренний резонанс один-к-одному-к-одному

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3; \quad (34)$$

(3) комбинационный резонанс аддитивно-разностного типа, то есть

$$\omega_1 = \omega_2 + 2\omega_3, \text{ или } \omega_2 = \omega_1 - 2\omega_3, \text{ или } 2\omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad (35)$$

$$\omega_1 = 2\omega_3 - \omega_2, \text{ или } \omega_2 = 2\omega_3 - \omega_1, \text{ или } 2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (36)$$

$$\omega_1 = \omega_2 - 2\omega_3, \text{ или } \omega_2 = 2\omega_3 + \omega_1, \text{ или } 2\omega_3 = \omega_2 - \omega_1. \quad (37)$$

Таким образом, предложенный в данной главе новый подход позволил выявить 10 различных типов внутреннего резонанса, каждый из которых требует отдельного анализа.

**Вторая глава** посвящена анализу внутренних резонансов, возникающих в рассматриваемой системе при учете малой вязкости порядка  $\varepsilon$ . Для каждого типа внутреннего резонанса получена система нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний.

Так, представляя комплексные функции в полярном виде

$$A_i = a_i e^{i\varphi_i} \quad (i=1,2,3), \quad (38)$$

для внутреннего резонанса два-к-одному получена следующая система уравнений:

$$(a_1^2)' + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 a_1 a_3^2 \sin \delta = 0, \quad (39)$$

$$(a_3^2)' + s_3 a_3^2 - \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_1 a_3^2 \sin \delta = 0, \quad (40)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} \zeta_1 \omega_1^{-1} a_3^2 a_1^{-1} \cos \delta = 0, \quad (41)$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2} \sigma_3 - \frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_1 \cos \delta = 0, \quad (42)$$

$$(a_2^2)' + s_2 a_2^2 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \sigma_2 = 0, \quad (43,44)$$

где точка обозначает дифференцирование по  $T_1$ ,  $\delta = 2\varphi_3 - \varphi_1$  - сдвиг фаз и

$$s_i = \mu_i \tau_i^\gamma \omega_i^{\gamma-1} \sin \psi, \quad \sigma_i = \mu_i \tau_i^\gamma \omega_i^{\gamma-1} \cos \psi, \quad \psi = \frac{1}{2} \pi \gamma \quad (i=1,2,3). \quad (45)$$

Получено аналитическое решение системы уравнений (39)-(44) методом последовательных приближений, которое позволяет исследовать зависимость поведения амплитуд и фаз колебаний от времени при любом значении параметра дробности  $0 < \gamma \leq 1$ :

$$a_1^2 = a_{10}^2 e^{-s_1 T_1} - \omega_1^{-1} \zeta_1 a_{10} a_{30}^2 \frac{e^{-\Sigma_1 T_1}}{\Sigma_1^2 + \Sigma^2} (\Sigma_1 \sin \Sigma T_1 - \Sigma \cos \Sigma T_1) - \frac{\zeta_1 \Sigma a_{10} a_{30}^2}{\omega_1 (\Sigma_1^2 + \Sigma^2)}, \quad (46)$$

$$a_3^2 = a_{30}^2 e^{-s_3 T_1} - \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_{10} a_{30}^2 \frac{e^{-1/2 s_1 T_1}}{\frac{1}{4} s_1^2 + \Sigma^2} \left( \frac{1}{2} s_1 \sin \Sigma T_1 + \Sigma \cos \Sigma T_1 \right) + \frac{\zeta_{13} \Sigma a_{10} a_{30}^2}{\omega_3 \left( \frac{1}{4} s_1^2 + \Sigma^2 \right)}, \quad (47)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 T_1 + \varphi_{10} + \frac{1}{2} \zeta_1 \omega_1^{-1} a_{30}^2 a_{10}^{-1} \frac{e^{-\Sigma_1 T_1}}{\Sigma_1^2 + \Sigma^2} (\Sigma_1 \cos \Sigma T_1 + \Sigma \sin \Sigma T_1) - \frac{\zeta_1 \Sigma_1 a_{30}^2}{2 \omega_1 a_{10} (\Sigma_1^2 + \Sigma^2)}, \quad (48)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 T_1 + \varphi_{30} + \frac{1}{2} \zeta_{13} \omega_3^{-1} a_{10} \frac{e^{-1/2 s_1 T_1}}{\frac{1}{4} s_1^2 + \Sigma^2} \left( -\frac{1}{2} s_1 \cos \Sigma T_1 + \Sigma \sin \Sigma T_1 \right) + \frac{\zeta_{13} s_1 a_{10}}{\omega_3 (s_1^2 + 4 \Sigma^2)}, \quad (49)$$

$$a_2^2 = a_{20}^2 e^{-s_2 T_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 T_1 + \varphi_{20}, \quad (50,51)$$

где  $a_{i0}$  и  $\varphi_{i0}$  ( $i=1,2,3$ ) – начальные амплитуды и фазы колебаний, определяемые из начальных условий,  $\Sigma = \sigma_3 - 1/2 \sigma_1$ ,  $\Sigma_1 = -s_3 + 1/2 s_1$ .

Вводя новые функции  $\xi_1(T_1)$  и  $\xi_3(T_1)$  так, что

$$a_1^2 = \frac{\zeta_1}{\omega_1} \xi_1(T_1) e^{-s_1 T_1}, \quad a_3^2 = \frac{\zeta_{13}}{\omega_3} \xi_3(T_1) e^{-s_3 T_1}, \quad (52)$$

и подставляя (52) в (39) -(42), получим

$$\dot{\xi}_3 + \dot{\xi}_1 e^{(s_3 - s_1) T_1} = 0, \quad (53)$$

$$G_0 \exp\left(-\Sigma \int_0^{T_1} \operatorname{tg} \delta dT_1\right) = \sqrt{\xi_1 \xi_3} \cos \delta, \quad (54)$$

откуда следует, что

$$\xi_3 = -\left[ \xi_1 e^{(s_3-s_1)T_1} - (s_3-s_1) \int_0^{T_1} \xi_1 e^{(s_3-s_1)T_1} dT_1 \right] + E_0, \quad (54)$$

где  $E_0 = \xi_{10} + \xi_{30}$  - начальная энергия пластины и  $G_0$  - постоянная интегрирования, определяемые начальными условиями

$$\xi_1|_{T_1=0} = \xi_{10}, \quad \xi_2|_{T_1=0} = \xi_{20}, \quad \xi_3|_{T_1=0} = \xi_{30}, \quad \delta|_{T_1=0} = \delta_0. \quad (55)$$

В частном случае, когда  $\gamma = 1$ , получены по два первых интеграла: интеграл энергии

$$\xi_1 + \xi_3 = E_0, \quad (56)$$

откуда следует, что

$$\xi_1 = E_0 \xi, \quad \xi_3 = E_0(1-\xi), \quad (57)$$

и функция тока

$$G(\xi, \delta) = \sqrt{\xi} (1-\xi) \cos \delta = G_0(\xi_0, \delta_0), \quad (58)$$

что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 2\xi^2 + \xi - G_0^2}} = \frac{2b\sqrt{E_0}}{s} \left( e^{\frac{1}{2}sT_1} - 1 \right). \quad (59)$$

Для качественного анализа решения введем в рассмотрение фазовую жидкость, точки которой перемещаются в плоскости  $\xi\delta$  в пределах  $0 \leq \xi \leq 1$  вдоль бесконечно длинного канала  $-\infty < \delta < \infty$  со скоростью  $\mathbf{v}$  ( $v_\xi = \dot{\xi}$  и  $v_\delta = \dot{\delta}$ ). Каждая точка с координатами на фазовой плоскости соответствует некоторой величине  $\xi$ , связанной с амплитудами  $a_1$  и  $a_3$  двух взаимодействующих форм колебаний в фиксированный момент времени, и разности фаз этих форм друг относительно друга в тот же самый момент.

На фазовой плоскости  $\xi\delta$ , уравнение (58) определяет функцию тока  $G(\xi, \delta)$  так, что

$$v_\xi = \dot{\xi} = b\sqrt{E_0} \frac{\partial G}{\partial \delta} e^{-\frac{1}{2}sT_1}, \quad v_\delta = \dot{\delta} = -b\sqrt{E_0} \frac{\partial G}{\partial \xi} e^{-\frac{1}{2}sT_1}, \quad (60)$$

соотношения (60) выполняются вдоль каждой линии тока. Другими словами, изображение линий тока неизменно со временем, но поле скоростей, построенных вдоль линий тока, зависит от времени таким образом, что в каждой точке  $\xi\delta$  этого поля направление вектора скорости  $\mathbf{v}$  остается постоянным, а его модуль уменьшается по экспоненциальному закону, приводя к квазистойчивым колебаниям вязкоупругой пластины.

Следовательно, при  $\gamma = 1$  функция тока  $G(\xi, \delta) = G_0(\xi_0, \delta_0)$ , определяемая соотношением (58), является вторым первым интегралом уравнений (39)- (44), который вместе с первым интегралом (58), соответствующим закону изменения энергии, позволяет частично проинтегрировать определяющую систему уравнений.

Из сравнение решений (58) и (54) видно, что в общем случае линии потока фазовой жидкости исчезают, и а ее частицы начинают описывать сложные траектории

на фазовой плоскости, то есть квазиустановившееся движение фазовой жидкости переходит в неустановившееся.

Таким образом выявлено, что при свободных колебаниях пластины, находящейся в условиях внутреннего резонанса два-к-одному, могут бы реализованы три режима: постоянные колебания (отсутствие демпфирования при  $\gamma = 0$ ), квазистационарные колебания (демпфирование определено обычной производной, когда  $\gamma = 1$ ) и нестационарный процесс (демпфирование определено дробной производной, когда  $0 < \gamma < 1$ ).

Линии тока фазовой жидкости на фазовой плоскости  $\xi - \delta$  приведены на рис. 1, на котором значения функции  $G$  указаны цифрами около соответствующих кривых, а направление течения частиц фазовой жидкости показано стрелками на линиях тока. Из рис. 1 видно, что фазовая жидкость течет внутри циркуляционных зон, ограниченных периметрами прямоугольников, задаваемых линиями  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$  и  $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При этом в каждом таком прямоугольнике течение является изолированным. Вдоль всех четырех сторон функция тока  $G = 0$ , а внутри величина  $G$  сохраняет знак.

Линии тока позволяют сделать качественную оценку связи функции тока  $G$  со всеми возможными типами энергообмена. Так, в случае незатухающих колебаний, т.е. когда коэффициент затухания равен нулю и  $s = 0$ , точки типа центр с координатами  $\xi_0 = 1/3$ ,  $\delta_0 = \pm\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) соответствуют стационарным режимам колебаний, так как при малом отклонении от центра частица фазовой жидкости начинает вращаться вокруг стационарной точки по замкнутой траектории. Замкнутые линии тока соответствуют периодическому изменению амплитуд и фаз колебаний.

Вдоль линий  $\delta = \pm(\pi/2) \pm 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) реализуются аperiodические движения, модулированные только по амплитуде, поскольку с увеличением времени  $t$  от 0 до  $\infty$  величина  $\xi$  возрастает от  $\xi_0$  до 1 (вдоль линии  $\delta = -\pi/2$ ) или убывает от  $\xi_0$  до 0 (вдоль линии  $\delta = \pi/2$ ), и из уравнения (59) следует, что

$$\xi = \left[ \frac{1 + \sqrt{\xi_0} - (1 + \sqrt{\xi_0}) \exp(-b\sqrt{E_0}T_1)}{1 + \sqrt{\xi_0} + (1 + \sqrt{\xi_0}) \exp(-b\sqrt{E_0}T_1)} \right]^2, \quad \delta(T_1) = \delta_0 = \frac{\pi}{2} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вдоль верхней граничной линии  $\xi = 1$  реализуются движения, модулированные только по фазе, так как при  $\xi = \xi_0 = 1$  амплитуды принимают значения  $a_3 = const$  и

$$a_1 = 0, \quad \xi(T_1) = \xi_0 = 1, \quad b\sqrt{E_0}T_1 = \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Перескок частиц фазовой жидкости из точек  $\xi = 0$ ,  $\delta = \pi/2 \pm 2\pi n$  в точки  $\xi = 0$ ,  $\delta = -\pi/2 \pm 2\pi n$  происходит мгновенно, поскольку в соответствии с распределением скоростей точек фазовой жидкости по сечению  $\delta = 0$  величина скорости  $v$  стремится к бесконечно большой величине при  $\xi \rightarrow 0$ . Распределение скорости вдоль вертикальных линий  $\delta = \pm\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) носит аperiodический характер, в то время как вблизи линии  $\xi = 1/3$  оно имеет периодический характер.

При наличии обычной вязкости, т.е. когда  $\gamma = 1$ , картина линий тока не меняется, а скорости частиц фазовой жидкости затухают экспоненциально во время их движения вдоль линий тока. При этом стационарные и граничные режимы

(модулированные только по амплитуде или только по фазе) становятся апериодическими, т.е. амплитуды и фазы затухают экспоненциально с течением времени. Другими словами, в соответствии с формулами (60), поле скоростей, построенное вдоль линий тока, зависит от времени таким образом, что в каждой точке  $\xi\delta$  этого поля направление вектора скорости  $v$  остается постоянным, а его модуль уменьшается по экспоненциальному закону, приводя к квазистационарным колебаниям пластинки в вязкой среде.

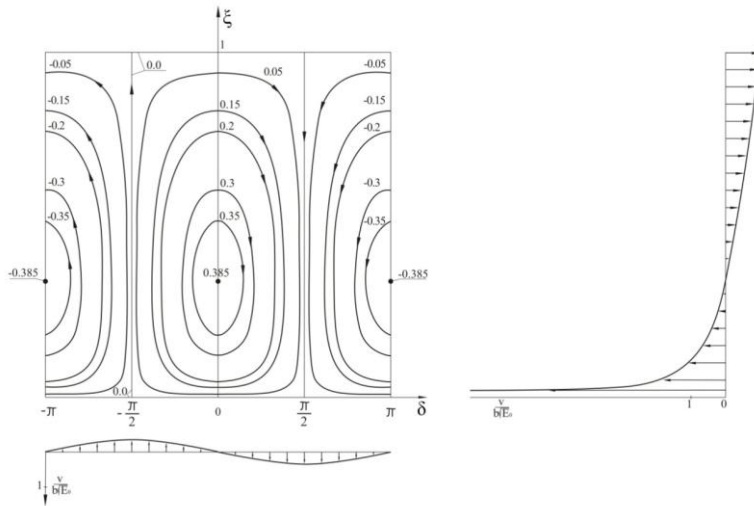


Рис.1. Фазовый портрет для случая внутреннего резонанса 2:1

В общем случае, когда  $0 < \gamma < 1$ , линии тока фазовой жидкости нарушаются, и частицы фазовой жидкости начинают описывать сложные траектории на фазовой плоскости, т.е. квазистационарные движения пластинки переходят в нестационарные.

Зависимости величин  $\xi$  и  $1-\xi$  от времени  $T_1$ , которые пропорциональны квадратам амплитуд  $a_3$  и  $a_1$  при  $\delta_0 = 0$  и  $\xi_0 = 0.5$  приведены на рис. 2, где сплошные и пунктирные линии соответствуют случаям затухающих колебаний при  $\gamma = 1$  и незатухающих колебаний при  $\gamma = 0$ , а цифры 1 и 2 отвечают ветвям  $a_3$  и  $a_1$  соответственно. Рисунок 2 показывает затухающий характер энергообмена между взаимодействующими подсистемами. Зависимость амплитуд колебаний  $a_3$  и  $a_1$  от времени при  $\gamma = 1/2$ , подсчитанная по формулам (46) и (47), показана штрихпунктирами.

Из рис. 2 видно, что с увеличением  $\gamma$  затухающие процессы усиливаются и период колебаний увеличивается, что указывает на то, что параметр дробности позволяет управлять демпфирующими процессами в рассматриваемой системе.

**Третья глава** посвящена анализу внутренних резонансов, возникающих в рассматриваемой системе при учете малой вязкости порядка  $\varepsilon^2$ . Получены системы нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний для случаев внутренних резонансов один-к-одному (31)-(34) и комбинационных резонансов аддитивно-разностного типа (35)-(37) на основе методики, подробно изложенной во второй главе. Для некоторых частных случаев получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функция тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов.

Показано, что во время свободных затухающих колебаний пластинки, сопровождающихся внутренним резонансом, могут наблюдаться три режима колебаний: стационарный (при отсутствии демпфирования), квазистационарный (демпфирование описывается обычной производной целого порядка) и нестационарный (демпфирование описывается производной дробного порядка).

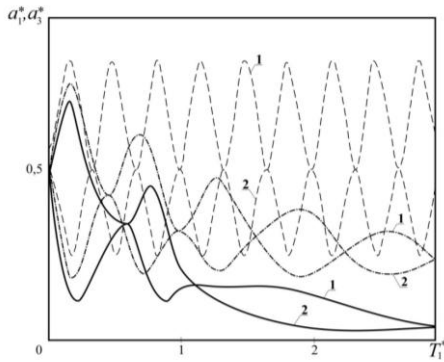


Рис. 2. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от безразмерного времени  $T_1^*$  в случае внутреннего резонанса 1:2

В четвертой главе проводится качественный численный анализ фазовых портретов на основе гидродинамической аналогии для различных внутренних резонансов 2:1, 1:1 и комбинационных резонансов аддитивного и разностного типов при различных значениях параметров пластинки.

На рис. 3 и 4 показаны фазовые портреты для случая комбинационного внутреннего резонанса разностного типа  $\omega_1 - \omega_2 = 2\omega_3$ , когда две различные формы колебаний в плоскости связаны с определенной формой колебаний из плоскости, а функция тока  $G(\xi, \delta)$  определяется соотношением

$$G_1(\xi, \delta) = (c_3 + \xi)\sqrt{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)}\cos\delta + \frac{1}{2}K_1b^{-1}(c_1 + \xi)^2 - \frac{1}{2}K_2b^{-1}(c_2 - \xi)^2 + \frac{1}{2}K_3b^{-1}(c_3 + \xi)^2 = G_1^0(\xi_0, \delta_0) \quad (61)$$

и фазовый портрет, который строится на основании соотношения (61), зависит существенным образом от значений коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$ .

Проведенный анализ выявил многообразие колебательных движений: стационарные колебания, двухсторонний энергообмен между рассматриваемыми подсистемами и односторонний энергообмен, при этом при наличии малой вязкости все режимы затухают с течением времени. Анализ фазовых портретов для различных колебательных режимов показал, что они содержат как замкнутые, так и разомкнутые линии тока, разделенные кривыми-сепаратрисами. Вдоль сепаратрис найдены аналитические решения, определяющие необратимую перекачку энергии из одной подсистемы в другую, которые в теории колебаний соответствуют солитоноподобным решениям.

### Основные результаты работы

Основным результатом настоящей диссертационной работы является разработка нового подхода, позволяющего решать задачи о колебаниях тонких тел более эффективно при учете внутреннего резонанса, который является конструкционным резонансом. В отличие от внешнего резонанса, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, внутренний резонанс неустраним, поскольку готовую конструкцию уже не переделать, а при конструировании невозможно предугадать наличие в конструкции того или иного резонансного сочетания собственных частот, поскольку таких сочетаний очень много, и их необходимо исследовать.

Следует отметить ключевые результаты:

1. Решена задача о свободных нелинейных колебаниях упругих пластин в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными Римана-Лиувилля, в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений со связанными линейными частями относительно трех





нелинейных разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний. Для некоторых частных случаев внутреннего резонанса получены по два первых интеграла: интеграл энергии и функция тока, что позволило свести задачу к вычислению эллиптических интегралов. Показано, что при свободных колебаниях пластинки, сопровождающихся внутренним резонансом, могут наблюдаться три режима колебаний: установившийся (при отсутствии демпфирования), квазиустановившийся (демпфирование описывается обычной производной целого порядка) и неустановившийся (демпфирование описывается производной дробного порядка). Для внутреннего резонанса 2:1 получено аналитическое решение методом последовательных приближений, которое позволяет исследовать зависимость поведения амплитуд и фаз колебаний от времени при любом значении структурного параметра дробности  $0 < \gamma \leq 1$ .

### Публикации автора

#### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Ngenzi J. Cl. A new approach for studying non-linear dynamic response of a thin plate with internal resonance in a fractional viscoelastic medium / Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. Cl. // Shock and Vibration, Vol. 2015, Article ID 795606, 28 pages. Hindawi Publishing Corporation 2015, ISSN: 1991-8747 <http://dx.doi.org/10.1155/2015/795606> (Проиндексировано в Web of Science, Scopus, Compendex, импакт-фактор журнала равен 0.722 в WoSc).

2. Ngenzi J. Cl. Phenomenological analysis of non-linear vibrations of a fractionally damped thin plate / Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. Cl. // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. Vol. 10, 2015, P. 260-277, E-ISSN: 2224-3429 (Проиндексировано в Scopus, Compendex).

#### Статьи и материалы конференций

3. Ngenzi J. Cl. New approach for studying nonlinear dynamic response of thin plates in a viscoelastic medium / Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. Cl. // *Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур* / Материалы международной научной конференции, Минск, Беларусь, 16-20 сентября, 2013, С. 57-59. Минск: Издательский центр БГУ, ISBN: 978-985-553-135-8.

4. Ngenzi J. Cl. Nonlinear dynamic response of a fractionally damped thin plate with 1:1:1 internal resonance / Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. Cl. // Recent Advances on Mechanics, Materials, Mechanical Engineering and Chemical Engineering (N. E. Mastorakis et al., Eds.), Proceedings of the International Conference on Mechanics, Materials, Mechanical Engineering and Chemical Engineering (MMMCE'15), Barcelona, Spain, April 7-9, 2015, Recent Advances in Mechanical Engineering Series, Vol. 14, P. 80–87, ISSN: 2227-4596.

5. Ngenzi J. Cl. Phenomenological analysis of non-linear vibrations of a fractionally damped thin plate with 1:1 internal resonance / Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. Cl. // Advances in Mathematics and Statistical Sciences (N. E. Mastorakis et al., Eds.), Proceedings of the 3d International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences (MCSS'15), Dubai, United Arab Emirates, February 22-24, 2015, Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, Vol. 40, P. 180–189, ISSN: 2227-4588.

Подписано в печать 12.11.2015 г. Формат 60x84 1/16  
Бумага писчая. Усл.-печ. л. 1.0. Уч.-изд. л. 0,95. Тираж 100 экз. Заказ № 452

---

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий Воронежского ГАСУ. 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября,84