ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

УШАКОВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

КОНСТАНТЫ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ И СИСТЕМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, проф. Новиков И.Я.

ВОРОНЕЖ — 2015

Оглавление

Введение **4**

1 Основные понятия, обозначения и факты о константе неопределённости и системах целочисленных сдвигов **18**

1.1 Преобразование Фурье и константа неопределённости. . . . 18

1.2 Функции Эрмита 22

1.3 Когерентные состояния и фреймы 23

1.4 Тета–функция Якоби 26

1.5 Интерполяция и дискретное преобразование Фурье 29

2 О константах неопределённости для линейных комбинаций функций Эрмита **35**

2.1 Вспомогательные интегралы 36

2.2 Случай двух функций Эрмита 38

2.3 Ортогональное преобразование для двух функций Эрмита. 45

2.4 Унитарное преобразование 47

2.5 Случай трёх и более функций Эрмита 49

3 Свойства коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса **53**

3.1 Введение. 53

3.2 Знакочередование и монотонность $d_k^{G_\sigma}$. 54

3.3 Свойства $d_k^{L_s}$. 59

3.4 Сравнение функций Лоренца и Гаусса 62

4 Интерполяция с помощью конечной суммы из сдвигов функции Гаусса 66

4.1 Постановка конечномерной задачи 67

4.2 Уравнений и неизвестных равное число. 68

4.3 Уравнений больше неизвестных. 74

5 О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний 77

5.1 Обозначения, вспомогательные формулы. 77

5.2 Константа неопределённости в общем случае. 79

5.3 Основной результат. 82

5.4 Константа неопределённости для $G(\sigma, x)$. 89

Заключение 94

Литература 95

Введение

Актуальность темы диссертации. Константы неопределённости являются важным инструментом в изучении ортогональных и неортогональных систем функций в гильбертовом пространстве. Они характеризуют локализацию используемых функций как во временной (пространственной), так и в частотной областях. Первый ортонормированный базис, последовательность констант неопределённости элементов которого ограничена сверху, был построен в 1986 году И. Мейером, с чего и началась теория всплесков. В 1988 году Ж. Бургейн доказал, что можно построить ортонормированный базис с константой неопределённости для всех элементов, сколь угодно близкой к минимальной. Однако, что очень важно для теории всплесков, доказательство не дало конструктивных примеров в дальнейшем. Базисы Мейеровского типа, с улучшением свойств масштабирующей функции и уменьшением константы неопределённости, изучались в работах Лебедевой Е.А [18]–[21], [49]. Актуальными остаются задачи улучшения свойств локализованности уже известных базисов функций. Одним из подходов к таким задачам является построение базиса всплескового типа, что на примере системы эрмитовых функций реализовали Ю. Престин и Б. Фишер [48].

В последние годы большое распространение в прикладных задачах получили системы целочисленных сдвигов функций. Они, как правило, не ортогональны. Поэтому разложение по этим системам дискретных оцифрованных сигналов связано с решением сложных интерполяционных задач. Ключевым моментом при решении таких задач часто является построение узловой функции.

Определение. *Функция $g(x)$, являющаяся линейной комбинацией $\varphi_k(x)$, $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \; \varphi_k(x)$, называется узловой функцией, если для неё выполнена система равенств $g(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}$, где δ_{0m} – символ Кронекера.*

Наиболее разработанными в этом плане являются базисные сплайны и системы равномерных сдвигов функции Гаусса $G_\sigma(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Случай функции Гаусса подробно рассмотрен в монографии В.Г. Мазьи, Г. Шмидта [52] и последующих работах этих авторов. В цикле работ В.Л. Вендланда, В. Карлина показано, что системы сдвигов функции Гаусса могут быть применены для аппроксимации различных потенциалов, а также для решения линейных и нелинейных граничных задач математической физики. Различные аспекты интерполяции с помощью системы сдвигов функции Гаусса изучались в работах С.Ф. Бойса, К. Калкатерры.

Изучение систем равномерных сдвигов для других функций, а также для конечномерных дискретизированных вариантов является актуальной задачей. Кроме того, так как нахождение узловой функции связано с получением её коэффициентов d_k, то важными являются вопросы о свойствах этих коэффициентов.

В работах по квантовой оптике, таких авторов как Э. Вольф, Р. Глаубер, Л. Мандель, А.М. Переломов, используются когерентные состояния, представляющие собой функции вида

$$\psi(x) = exp\left(-\frac{(x-a)^2 - ibx}{2\sigma^2}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

с фиксированным параметром σ.

Цель работы. Изучение свойств узловых функций, построенных на основе целочисленных сдвигов функций Лоренца и Гаусса. Изучение констант неопределённости для систем когерентных состояний и базиса из функций Эрмита. Основные задачи работы состояли: в получении явных выражений для констант неопределённости, в исследовании зависимости этих констант от различных параметров.

Методика исследований. В работе используются методы теории функций, линейного функционального анализа, линейной алгебры, теории всплесков и теории специальных функций.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Следующие результаты, полученные в работе, являются новыми.

1. Получены формулы для вычисления константы неопределённости линейных комбинаций функций Эрмита. В случае двух функций минимум константы неопределённости найден аналитически, в случае трёх функций — численно.

2. Доказаны знакочередование и монотонность с ростом по модулю индекса коэффициентов узловой функции, построенной с помощью целочисленных сдвигов функции Гаусса, а также нарушение этих свойств для узловой функции, построенной с помощью целочисленных сдвигов функции Лоренца.

3. Для случая узловой функции, построенной с помощью конечных сумм сдвигов функции Гаусса, предложен способ уменьшения амплитуды колебаний за пределами отрезка интерполяции.

4. Получены формулы для констант неопределённости линейных комбинаций когерентных состояний в общем случае и проведено упрощение этих формул при дополнительных предположениях на коэффициенты линейных комбинаций.

Практическая и теоретическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации теоретически обосновывают свойства узловых функций, полученных с помощью целочисленных сдвигов функции Гаусса или Лоренца.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международной конференции "Всплески и приложения" в г.Санкт–Петербурге в 2012 г., на $VIII$ международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" в г. Новороссийск в 2014 г., в Воронежской зимней математической школе в 2011 г., а также на семинарах Воронежского государственного университета в 2011 – 2014 гг.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах автора [53]–[59]. Из совместных публикаций [55], [56], [59] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Работы [54]–[56], [59] опубликованы в изданиях, соответствующих списку ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации 101 стр.

Краткое содержание диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, определены научная новизна и практическая значимость.

Нумерация приводимых ниже теорем и определений совпадает с их нумерацией в диссертации.

Первая глава является вводной. Здесь приводятся основные определения, необходимые формулы и излагаются результаты, используемые в работе. Важной характеристикой для функции является константа неопределённости.

Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$, причём $\|f\|_{L_2} \neq 0$, тогда радиус $\Delta(f)$ функции $f(x)$ определяется равенством:

$$\Delta_f := \frac{1}{\|f\|_{L_2}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx - \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2\, dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично определяется радиус $\Delta(\widehat{f})$ для преобразования Фурье функции f:

$$\Delta_{\widehat{f}} := \frac{1}{\|\widehat{f}\|_{L_2}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi - \frac{1}{\|\widehat{f}\|_{L_2}^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где прямое преобразование Фурье, задается следующим образом:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \; e^{-ix\xi} dx.$$

Определение 1.1. *Величина*

$$u(f) = \Delta(f) \cdot \Delta(\widehat{f}).$$

называется константой неопределённости функции f.

В том случае, когда интеграл $\Delta(\widehat{f})$ расходится, полагают $u(f) = \infty$. Константа неопределённости даёт информацию о том насколько хорошо функция f локализована как во временной, так и в частотной областях.

Определим стандартизированный многочлен Эрмита $H_n(x)$ при помощи формулы Родриго:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \; n = 0, 1, \ldots,$$

т.е. n–ый полином Эрмита $H_n(x)$ равен n–ой производной от e^{-x^2}, умноженной на $(-1)^n e^{x^2}$.

Ортонормированные функции Эрмита

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

образуют базис в $L_2(\mathbb{R})$. Они являются собственными функциями преобразования Фурье: $\widehat{\varphi}_n(\xi) = (-i)^n \varphi_n(\xi), \; n = 0, 1, 2 \ldots$. Константа неопределённости для функции Эрмита имеет вид:

$$u(\varphi_n(x)) = n + \frac{1}{2}.$$

Определение 1.4. *Функция $g(x)$, являющаяся линейной комбинацией $\varphi_k(x)$,*

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \ \varphi_k(x),$$

называется узловой функцией, если для нее выполнена система равенств $g(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}$, где δ_{0m} – символ Кронекера.

Узловую функцию, построенную из сдвигов функции Гаусса $G_\sigma(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$ обозначим через $\widetilde{G}_\sigma(t)$, а из сдвигов функции Лоренца $L_s(t) = \frac{s^2}{t^2+s^2}$ – через $\widetilde{L}_s(x)$,

$$\widetilde{G}_\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{G_\sigma} G_\sigma(t-k), \quad \widetilde{L}_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{L_s} L_s(t-k),$$

где параметры $\sigma > 0$ и $s > 0$.

В дальнейшем потребуются результаты Мазьи В. и Шмидта Г. из выше упомянутой монографии для коэффициентов $d_k^{G_\sigma}$.

Теорема 1.3. *Справедлива формула*

$$d_k^{G_\sigma} = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Коэффициенты $d_k^{G_\sigma}$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье функции

$$\frac{1}{\vartheta_3\left(\frac{t}{2}; q\right)}, \ q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

где $\vartheta_3(t;q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikt}$, – третья тета-функция Якоби. Заметим, что формула для ряда Фурье этой функции была известна ещё в 1903 году из работы Уиттекера Э.Т. и Ватсона Дж.Н..

Известна формула [11] для коэффициентов $d_k^{L_s}$:

$$d_k^{L_s} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(st)} dt.$$

Во второй главе выписана общая формула константы неопределённости для линейной комбинации $\sum\limits_{j=n_0}^{m-1} a_j\varphi_j(x)$:

$$u\left(\sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j\varphi_j(x)\right) = \left(n_0+\frac{1}{2}+\sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j^2 j+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=n_0}^{n_0+m-3} a_j a_{j+2}\sqrt{(j+1)(j+2)}-2\left(\sum_{j=n_0}^{n_0+m-2} a_j a_{j+1}\sqrt{j+1}\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(n_0+\frac{1}{2}+\sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j^2 j-\sum_{j=n_0}^{n_0+m-3} a_j a_{j+2}\sqrt{(j+1)(j+2)}\right).$$

Во втором параграфе выводится формула для константы неопределённости линейной комбинации $\Psi_{\alpha,n,k}(x)=\cos\alpha\,\varphi_n(x)+\sin\alpha\,\varphi_k(x)$, где параметр $\alpha\in[0;2\pi]$, $n,k=0,1,2\ldots$. Результат сформулирован в виде трёх теорем, в зависимости от разности индексов функций.

Теорема 2.1. *Пусть* $|n-k|>2$, *тогда*

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=n\cos^2\alpha+k\sin^2\alpha+\frac{1}{2},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]} u(\Psi_{\alpha,n,k})=\min(n,\ k)+\frac{1}{2}.$$

Значение $u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)$ в этом случае принадлежит отрезку, концами которого являются константы неопределённости для исходных функций φ_n и φ_k.

Теорема 2.2. *Справедливы формулы:*

$$u(\Psi_{\alpha,n,n+2})=\sqrt{(n^2+3n+6)\sin^4\alpha+(n-n^2)\sin^2\alpha+n^2+n+\frac{1}{4}},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]} u(\Psi_{\alpha,n,n+2})=\sqrt{\frac{2n^4+14n^3+39n^2+27n+6}{4(n^2+3n+6)}},$$

минимум достигается при $\sin^2\alpha_n=\frac{n^2-n}{2(n^2+3n+6)}$.

Теорема 2.3. *Верна формула*

$$u(\Psi_{\alpha,n,n+1}) =$$

$$= \sqrt{2(n+1)\sin^6\alpha + (2n^2+n)\sin^4\alpha - (2n^2+n)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}},$$

минимум достигается при $\sin^2\alpha_n = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, *где* $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$.

Точки минимума в теоремах 2.2 и 2.3 стремятся к одному из следующих углов $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m = 0, 1, 2, 3$. В этом случае для констант неопределённости верно:

$$u(\Psi_{\frac{\pi}{4},n,n+2}) \approx \frac{\sqrt{3}}{2}(n+\frac{3}{2}),\ u(\Psi_{\frac{\pi}{4},n,n+1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+\frac{1}{2}),$$

где $a_n \approx b_n$ — означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$.

Для случая трёх функций Эрмита рассматривается линейная комбинация $f_{i,j}(n,\alpha,\beta) = a_{n-i}\varphi_{n-i}(x) + a_n\varphi_n(x) + a_{n+j}\varphi_{n+j}(x)$, где

$$a_{n-i} = \sin\alpha\cos\beta,\ a_n = \sin\beta,\ a_{n+j} = \cos\alpha\cos\beta,$$

$\alpha, \beta \in [0,\pi]$, i, j, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant i$.

Возможны пять различных случаев. При $i > 1$, $j > 1$ константа неопределённости по тем же причинам, что и в теореме 1, принадлежит отрезку $[n - i + \frac{1}{2}, n + j + \frac{1}{2}]$. Численные значения минимальных значений константы неопределённости для других случаев приведены в таблице 2.1.

В третьей главе рассматриваются системы целочисленных сдвигов функции Гаусса $G_\sigma(t)$ и функции Лоренца $L_s(t)$.

Теорема 3.1 *Коэффициенты* $d_k^{G_\sigma}$ *знакочередуются.*

В отличие от знакочередования, монотонное убывание $|d_k^{G_\sigma}|$ доказать для всех значений параметра σ не удалось. Справедлива

Теорема 3.2 *Начиная с номера*

$$k = \max\left\{\left[\log_q\sqrt{1-q} - 1\right], 0\right\}$$

Таблица 1: Минимальные значения константы неопределённости для функции $f_{i,j}(n, \alpha, \beta)$.

$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{i,j})$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{1,1})$	4.46748	42.8727	426.82
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{2,2})$	7.12383	71.0334	707.457
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{1,2})$	8.27098	68.0436	674.265
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{2,1})$	6.68749	67.338	673.559

коэффициенты $d_k^{G_\sigma}$ монотонно убывают по абсолютной величине.

Следствие 3.1 *Для монотонного убывания $|d_k^{G_\sigma}|$ с нулевого номера достаточно выполнения неравенства: $q < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, что соответствует*

$$\sigma < \sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}} = 1.01933\ldots$$

Следующая теорема показывает, что для случая функции Лоренца при малых значениях параметра s знакочередуемости нет.

Теорема 3.3 *Все коэффициенты $d_k^{L_s}$ отрицательны, за исключением $d_0^{L_s}$, при выполнении неравенства $s < \frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{\pi} = 0.5611\ldots$*

Численные расчеты показывают, что и при больших значениях s знакочередование с некоторого момента прекращается.

Введём обозначения для двух функционалов

$$F_{GL}^{\sigma}(s, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \lambda \frac{s^2}{x^2 + s^2} \right)^2 dx$$

и

$$F_{LG}^{s}(\sigma, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{s^2}{x^2 + s^2} - \lambda e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right)^2 dx.$$

Для первого функционала считаем зафиксированным параметр σ, для второго — параметр s. Через $\mathrm{Erfc}(x)$ обозначим дополнительную функцию ошибок

$$\mathrm{Erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Теорема 3.4 *Пусть $b = \frac{s}{\sigma}$. Минимум $F^{\sigma}_{GL}(s, \lambda)$ достигается при*

$$\lambda_1 = 2e^{\frac{b^2}{2}}\, Erfc\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

и равен

$$F^{\sigma}_{GL}(b, \lambda_1) = \sigma \left(\sqrt{\pi} - 2\pi\, b\, e^{b^2}\, Erfc^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

минимум $F^{s}_{LG}(\sigma, \lambda)$ достигается при

$$\lambda_2 = \sqrt{\pi}\, b\, e^{\frac{b^2}{2}}\, Erfc\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right),$$

и равен

$$F^{s}_{LG}(b, \lambda_2) = s\,\pi \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\pi}\, b\, e^{b^2}\, Erfc^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Минимум по переменной b для функционалов был найден численно с помощью программы "Mathematica". Он достигается в обоих случаях при одном и том же значении $b = 0.925368\ldots$:

$$\min_{b,\,\lambda} F^{\sigma}_{GL}(b, \lambda) = \sigma \cdot 0.0494425\ldots,\ \min_{b,\,\lambda} F^{s}_{LG}(b, \lambda) = s \cdot 0.0438173\ldots.$$

В четвертой главе рассматривается конечномерный вариант задачи интерполяции: узловая функция $g_n(x)$ ищется в виде конечной суммы

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \cdot q^{(x-k)^2},\ q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

причем число уравнений может быть больше числа неизвестных

$$g_n(j) = \delta_{0j},\ j = -m, \ldots, 0, \ldots, m,\ m \geq n.$$

При численном решении системы величины $g_n(j)$ будут играть роль контрольных сумм. Полученную при $m = n$ узловую функцию обозначим через $g_n^\sigma(x)$, а при $m > n$ — через $g_{n,m}^\sigma(x)$. Исходную систему уравнений можно записать в матричной форме:

$$A \cdot d = y, \tag{4.2}$$

где $a_{ij} = q^{(i-j)^2},\ y_j = \delta_{0j},\ i = -n, \dots, n,\ j = -m, \dots, m.$

Обозначим через $W(x_1, \dots, x_n)$ транспонированный определитель Вандермонда, например

$$W(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Для минора $W_{l,k}(x_1, \dots, x_n)$, получающегося при вычеркивании l-ой строки и k-ого столбца, справедливо равенство [4, стр. 273]:

$$W_{l,k}(x_1, \dots, x_n) = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{n-k}} \cdot \prod_{n \geq i > j \geq 1,\ i \neq l, j \neq l} (x_i - x_j), \tag{4.3}$$

где сумма берется по всем сочетаниям $n - k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k}$ из набора $1, 2, \dots, n$.

Система (4.2) в случае равенства числа неизвестных и уравнений имеет единственное решение.

Теорема 4.1 *Матрица A при $m = n$ — невырождена, а её определитель*

$$\det A = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot W(q^{-2n}, \dots 1, \dots, q^{2n}). \tag{4.4}$$

Следствие 4.1 *Поскольку изучаемый в теореме 1 определитель при $m > n$ является наибольшим ненулевым минором матрицы A размера $(2n+1) \times (2m+1)$, то её ранг равен $2n + 1$.*

Теорема 4.3 *Для коэффициентов d_k верна формула:*

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_{k,n+1}(q^{-2n}, \dots, q^0, \dots, q^{2n})}{W(q^{-2n}, \dots, q^0, \dots, q^{2n})}.$$

Следствие 4.2 *Справедлива формула*

$$d_k = \frac{(-1)^k q^{-k^2} \sum q^{\alpha_1} q^{\alpha_2} \dots q^{\alpha_{2n+1-k}} \cdot}{\prod\limits_{i \neq k, i=-n}^{n} |q^k - q^i|},$$

где сумма берется по всем сочетаниям $2n+1-k$ *чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1-k}$ *из набора* $-n, -n+1, \dots, n$.

Следствие 4.3 *Контрольные суммы можно записать в виде отношения определителей:*

$$g_n^\sigma(j) = q^{j^2} \frac{W\left(q^{-2n} \dots q^{-2}, q^{-2j}, q^2, \dots q^{2n}\right)}{W\left(q^{-2n} \dots q^0 \dots q^{2n}\right)}.$$

Следствие 4.4 $\lim_{\sigma \to \infty} |g_n^\sigma(n+1)| = C_{2n+1}^n$.

При $m > n$ система (1) становится несовместной, коэффициенты d_k вычисляются методом наименьших квадратов. Получаем новую систему $C_m \cdot x = z$, где

$$c_{ij}(m) = \sum_{k=-m}^{m} a_{ik} a_{kj},\ z_j = \exp\left(-\frac{j^2}{2\sigma^2}\right),\ i, j = -n \dots, 0, \dots n.$$

Теорема 4.4 *При* $m \to \infty$ *элементы матрицы* $c_{ij}(m) \to c_{ij}$, *где*

$$c_{ij} = \begin{cases} q^{\frac{(i-j)^2}{2}} \vartheta_3\left(\frac{1}{2}; \exp(-\pi\sigma)\right), & \textit{при нечётном } (i+j), \\ q^{\frac{(i-j)^2}{2}} \vartheta_3\left(0; \exp(-\pi\sigma)\right), & \textit{при чётном } (i+j). \end{cases}$$

Численное решение искалось методом Гаусса, для проверки вычислялись контрольные суммы $g_n(j)$. В силу чётности функции q^{x^2} верно соотношение $d_k = d_{-k}$. Благодаря этому уменьшается как число уравнений, так и разрыв в порядке между элементами матрицы. Вне отрезка интерполяции $g_n(x)$ сильно осциллирует. Кроме того, чем больше n, тем меньше растет контрольная сумма $g_n(j)$ за пределами отрезка интерполяции.

Явление осцилляции за пределами отрезка интерполяции в случае $m > n$ может быть значительно уменьшено, хотя при этом возникает эффект регуляризации, при котором значение функции $g_{n,m}(x)$ в нулевой точке "растекается" по соседним узлам.

В пятой главе рассматриваются системы когерентных состояний

$$f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x) = \exp\left(-\frac{(x - k\omega_1)^2}{2}\right) e^{i\,m\omega_2 x}$$

и равномерных сдвигов функции Гаусса

$$f_k(\sigma, x) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\,\sigma^2}\right),$$

изучаются их линейные комбинации

$$F\left(\omega_1, \omega_2, x\right) = \sum_{k,m} c_{k,m} f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x), \tag{5.1}$$

$$G\left(\sigma, x\right) = \sum_{k} c_k f_k\left(\sigma, x\right). \tag{5.2}$$

Все индексы в суммах здесь и в дальнейшем меняются от $-\infty$ до $+\infty$. Предполагается абсолютная сходимость рядов (5.3)–(5.4), чтобы можно было произвольным образом менять порядок суммирования и группировать слагаемые при перемножении рядов. Для этого достаточно, например, выполнения условий

$$c_{km} = O\left((k^2 + m^2)^{-1-\varepsilon}\right),\ c_k = O\left(k^{-1-\varepsilon}\right),\ \varepsilon > 0.$$

Во втором параграфе выписана формула константы неопределённости для системы когерентных состояний в общем случае. Для её упрощения накладываются дополнительные условия на коэффициенты и параметры. Представляет интерес случай неполной системы когерентных состояний:

$$\omega_1\omega_2 = 4\pi N,\ \ N \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

Относительно коэффициентов $c_{k,m}$ предположим, что

$$c_{k,m} = c_k^{\omega_1} \cdot c_m^{\omega_2}, \tag{5.17}$$

где ω_1, ω_2 — это верхние индексы, означающие зависимость коэффициентов от этих параметров. Кроме того, будем считать, что линейная комбинация $F(\omega_1, \omega_2, x)$ является чётной вещественной функцией. Отсюда коэффициенты $c_{k,m}$ вещественные и выполнено

$$c_k^{\omega_1} = c_{-k}^{\omega_1},\ c_m^{\omega_2} = c_{-m}^{\omega_2}. \tag{5.18}$$

Данные предположения естественны при построении узловой функции с помощью линейной комбинации когерентных состояний или проведении ортогонализации с сохранением структуры сдвигов.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия (5.16)–(5.18), тогда верна формула*

$$u^2\left(F\left(\omega_1, \omega_2\right)\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} - \frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} + \omega_1^2\frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} - \frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} + \omega_2^2\frac{D_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}\right),$$

где

$$C_w = \sum_l l^2 \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w,\ D_w = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) d_l^w,$$

$$A_w = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w,\ a_l^w = \sum_{k'} c_{l+k'}^w c_{k'}^w,\ d_l^w = \sum_{k'} {k'}^2 c_{l+k'}^w c_{k'}^w.$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия $c_k \in \mathbb{R}$, $c_k = c_{-k}$. Тогда*

$$u\left(G(\sigma)\right) = \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)} + \frac{\sum\limits_l d_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sigma^4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $a_l = \sum\limits_m c_{l+m}\overline{c}_m$, $d_l = \sum\limits_m m^2 c_{l+m}\overline{c}_m$.

Глава 1

Основные понятия, обозначения и факты о константе неопределённости и системах целочисленных сдвигов

1.1 Преобразование Фурье и константа неопределённости.

Рассматривается пространство комплекснозначных функций $L_2(\mathbb{R})$ со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \tag{1.1}$$

и нормой

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

В дальнейшем, для простоты, вместо $\|\cdot\|_{L_2}$ будем писать $\|\cdot\|$.

Прямое преобразование Фурье, задаваемое следующим образом:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\xi} dx, \tag{1.3}$$

является унитарным оператором из $L_2(\mathbb{R})$в $L_2(\mathbb{R})$. Формула обратного преобразования Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \tag{1.4}$$

Для преобразования Фурье верно равенство Парсеваля (теорема Планшереля) [25, гл.7].

$$\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle, \quad \|f\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{L_2}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем изложении важную роль играет формула суммирования Пуассона [44, теорема 2.25]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \tag{1.6}$$

которая имеет место, если функция $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяет следующим условиям:

а) ряд в левой части равенства (1.6) сходится всюду к некоторой непрерывной функции;

б) ряд Фурье в правой части этого же равенства сходится при всех $x \in [0, 2\pi]$.

Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$ (такие функции называются оконными), причём $\|f\| \neq 0$, тогда центр x_f^* и радиус $\Delta(f)$ функции $f(x)$ определяются равенствами [30], [44]:

$$x_f^* := \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2\, dx}{\|f\|^2}, \tag{1.7}$$

$$\Delta(f) := \frac{1}{\|f\|} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - x_f^*)^2 |f(x)|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

В данной работе для вычисления используется другая формула:

$$\Delta(f) := \frac{1}{\|f\|} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 \, dx - \frac{1}{\|f\|^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 \, dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Аналогично определяются центр $\xi^*_{\widehat{f}}$ и радиус $\Delta(\widehat{f})$ для преобразования Фурье функции f:

$$\xi^*_{\widehat{f}} := \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi}{\|f\|^2}, \tag{1.10}$$

$$\Delta(\widehat{f}) := \frac{1}{\|\widehat{f}\|} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi - \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.11}$$

Центр представляет собой математическое ожидание случайной величины с плотностью вероятности, равной $|f(x)|^2/\|f\|^2$, радиус же является средним квадратическим отклонением этой случайной величины. Таким образом, радиус функции показывает, насколько функция f хорошо локализована.

Определение 1.1 *[30, стр. 49], [44, стр. 103]. Величина*

$$u(f) = \Delta(f) \cdot \Delta(\widehat{f}). \tag{1.12}$$

называется константой неопределённости функции f.

В том случае, когда $\Delta(\widehat{f})$ расходится, полагают $u(f) = \infty$.

Если функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ рассматривать как аналоговый сигнал с конечной энергией, определяемой его нормой $\|f\|$, то её преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ представляет собой спектр этого сигнала. В анализе сигналов аналоговые сигналы определяются во временной области, а спектральная информация об этих сигналах дается в частотной области. Таким образом, константа неопределённости даёт информацию о том насколько хорошо функция f локализована как во временной, так и в частотной областях.

Никакая функция, отличная от тождественного нуля, не может иметь компактного носителя одновременно во временной и в частотной областях:

Теорема 1.1 *([22]) Если $f \neq 0$ имеет компактный носитель, то $\widehat{f}(\xi)$ не может иметь компактного носителя. Аналогично, если $\widehat{f}(\xi)$ имеет компактный носитель, то $f(x)$ не может иметь компактного носителя.*

В следующей теореме устанавливается точная нижняя граница для константы неопределённости $u(f)$.

Теорема 1.2 *([30]) Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ с ненулевой нормой выполняется неравенство*

$$\Delta(f) \cdot \Delta(\widehat{f}) \geq \frac{1}{2}. \tag{1.13}$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$f(x) = C \cdot \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{i\,ax},$$

где $C \neq 0$; $a, b, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$.

В физике эта теорема называется принципом неопределённости Гейзенберга. Этот принцип имеет особенно важную интерпретацию в квантовой механике как неопределённость положения свободной частицы и значения её импульса. Положение одномерной частицы описывается волновой функцией $f(x)$, а её импульс — преобразованием Фурье $\widehat{f}(\xi)$. Среднее положение этой частицы есть центр x^*_f, а средний импульс — центр его преобразования Фурье $\xi^*_{\widehat{f}}$. Таким образом, чем больше $\Delta(f)$, тем более неопределенно положение свободной частицы; чем больше $\Delta(\widehat{f})$, тем более неопределённым является её импульс.

1.2 Функции Эрмита

Определим стандартизированный многочлен Эрмита $H_n(x)$ при помощи формулы Родрига [41], [17]:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)},\ n = 0, 1, \dots, \tag{1.14}$$

т.е. n–ый полином Эрмита $H_n(x)$ равен n–ой производной от e^{-x^2}, умноженной на $(-1)^n e^{x^2}$. Перечислим важные свойства полиномов Эрмита согласно [41].

Функция $H_n(x)$ является нечётной или чётной, в зависимости от того, нечётно или чётно n. Полиномы Эрмита ортогональны на всей вещественной оси с весовой функцией e^{-x^2} и для них верна формула:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\, H_k(x)\, e^{-x^2}\, dx = \begin{cases} 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}. \tag{1.15}$$

Функция $H_n(x)$ является решением дифференциального уравнения:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Для полиномов Эрмита верно рекуррентное соотношение [17, стр. 84]:

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x). \tag{1.16}$$

Ортонормированные функции Эрмита $\varphi_n(x)$ задаются соотношением

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}\, H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1.17}$$

Они образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Для $H_n(x)$ верна формула:

$$\sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} (i)^n H_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ixt - \frac{t^2}{2}\right) H_n(t) dt,\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что функции $\varphi_n(x)$ являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$\widehat{\varphi}_n(\xi) = (-i)^n \varphi_n(\xi),\ n = 0, 1, 2 \dots. \tag{1.18}$$

Отметим, что эти функции играют важную роль в квантовой механике. Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера:

$$\psi''(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - U\right)\psi(x) = 0, \tag{1.19}$$

где функция $\psi(x)$, называемая волновой функцией, определяет движение элементарной частицы в некотором силовом поле, μ — масса этой частицы, E — её полная энергия, U — потенциальная энергия, а $\hbar$ — постоянная Планка. Потенциальная энергия определяется формулой:

$$U(x) = \frac{\mu\omega^2}{2} x^2,$$

т.е. на частицу действует упругая сила по закону $F(x) = -\mu\omega^2 x$, где ω есть собственная частота колебаний частицы. В уравнении (1.19) требуется найти такие значения E — спектр собственных значений энергии, — при которых существуют ограниченные на всей оси решения — собственные функции, принадлежащие пространству $L_2(\mathbb{R})$. Решением (1.19) при $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ являются функции

$$\psi_n(x) = \frac{\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{1/4}}{(\sqrt{\pi} n! 2^n)^{1/2}} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1.3 Когерентные состояния и фреймы

Важными характеристиками неортогональных систем функций являются константы Рисса.

Определение 1.2 *([30, 44]) Функции $\phi_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют систему Рисса с положительными константами A и B, если для любого $c \in l_2$*

выполнена двусторонняя оценка

$$A\|c\|^2_{\ell_2} \le \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \ \phi_k(x) \right\|^2_{L_2} \le B\|c\|^2_{\ell_2} \ , \tag{1.20}$$

где норма в ℓ_2 задаётся обычным образом:

$$\|c\|^2_{\ell_2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Наибольшая из величин A в первом неравенстве (1.20) называется нижней константой Рисса, наименьшая величина B во втором неравенстве – верхней константой Рисса. Если система функций ортонормирована, то A и B равны 1. В монографии К.Чуи [44, глава 1] неравенство (1.20) называется условием устойчивости.

В случае конечной системы функций

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \ \phi(x) \right\|^2_{L_2} = \sum_{k,\ l=1}^{n} c_k \ \overline{c_l} \ \langle \phi_k, \phi_l \rangle,$$

т.е. квадрат нормы линейной комбинации функций представляет собой квадратичную форму от набора коэффициентов c_k с матрицей Грама, элементами которой являются скалярные произведения $\langle \phi_k, \phi_l \rangle$. Для линейно независимой системы функций матрица Грама является самосопряженной и положительно определенной [3, гл.4], [15].

Выпишем конечномерный аналог неравенства (1.20):

$$A\|c\|^2_{\mathbb{C}^n} \le \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \ \phi(x) \right\|^2_{L_2} \le B\|c\|^2_{\mathbb{C}^n}.$$

Наилучшее значение A равно минимальному собственному числу матрицы Грама, а наилучшее значение B – максимальному собственному числу матрицы Грама.

Отношение B к A в данном случае равно числу обусловленности матрицы Грама. В вычислительной математике число обусловленности является одним из ключевых параметров матрицы [3, гл.4], [15]. Если оно велико, то матрица называется плохо обусловленной, и при работе с ней требуется применять специальные приемы с целью обеспечения устойчивости вычислений.

Определение систем Рисса впервые было введено в 1951 году в статье Н.К. Бари [1]. Для систем Рисса важным условием является линейная независимость, но при этом не требуется полнота во всём пространстве. Под полнотой понимается отсутствие ненулевой функции, ортогональной всем функциям системы. В случае линейно зависимых функций в качестве аналога системы Рисса выступают фреймы [7, с.96], [30, с.74], [44, с.121].

Определение 1.3 *([7]) Семейство функций $\psi_k(x)$ из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется фреймом, если существуют такие $A > 0$ и $B < \infty$, что для всех $f \in \mathbb{H}$ верны оценки*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \ . \tag{1.21}$$

Константы A и B называются границами фрейма.

Система функций может быть фреймом только в том случае, если она полна (или переполнена). Действительно, если она неполна, то существует ненулевая f такая, что $\langle f, \psi_k \rangle = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. В этом случае $A = 0$, что невозможно.

Системы функций вида

$$\exp\left(-\frac{(x - k\omega_1)^2}{2}\right) \cdot e^{i\, m\omega_2 x},\ k, m \in \mathbb{Z},$$

нашли свое применение в квантовой механике с первых же лет возникновения этой дисциплины (см. доказательство квантовой эргодической теоремы в монографии И. Неймана [27]). Интерес к данным функциям, получившим после работ Р. Глаубера [5] название когерентные состояния, обусловлен тем, что для них константа неопределённости минимальна.

Основным параметром системы когерентных состояний является величина $\omega_1 \cdot \omega_2$. При условии $\omega_1 \cdot \omega_2 \leq 2\pi$ данная система оказывается полной в $L_2(\mathbb{R})$ [7, гл. 3], [33, гл. 1]. В случае строгого неравенства получаются фреймы, а система оказывается переполненной (она остается переполненной даже после выбрасывания конечного числа функций) [7, гл. 3], [30, гл. 1]. При равенстве $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ система остается полной (с одной лишней функцией), но не является фреймом. Если $\omega_1 \cdot \omega_2 > 2\pi$, то когерентные состояния являются неполной системой. Однако, в работе [13] доказано, что когерентные состояния при $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi n$, $n \in \mathbb{N}$ являются системой Рисса. Данное обстоятельство позволяет использовать эти функции в задачах интерполяции и ортогонализации.

1.4 Тета–функция Якоби

Сведения о тета–функциях Якоби в этом разделе приведены в соответствии с [43, гл.21]. Тета–функции определяются при помощи быстро сходящихся тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z,q) &= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{(k+\frac{1}{2})^2}\sin((2k+1)z),\\
\vartheta_2(z,q) &= 2\sum_{k=0}^{\infty} q^{(k+\frac{1}{2})^2}\cos((2k+1)z),\\
\vartheta_3(z,q) &= 1+2\sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2}\cos(2kz),\\
\vartheta_4(z,q) &= 1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}\cos(2kz),
\end{aligned}$$

где $|q| < 1, q \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$. Эти функции являются целыми по переменной z и связаны между собой следующими соотношениями:

$$\vartheta_1(z,q) = -\vartheta_2(z+\frac{\pi}{2},q), \quad \vartheta_1(z+\frac{\pi}{2},q) = -\vartheta_2(z,q) \tag{1.22}$$

$$\vartheta_1(z,q) = -iM\vartheta_3(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2},q) = -iM\vartheta_4(z+\frac{\pi\tau}{2},q), \tag{1.23}$$

$$\vartheta_3(z,q) = \vartheta_4(z+\frac{\pi}{2},q), \quad \vartheta_4(z,q) = \vartheta_3(z+\frac{\pi}{2},q). \tag{1.24}$$

где

$$q = e^{\pi i\tau}, \quad Im\ \tau > 0, \quad M = \exp\left(\frac{\pi i\tau}{4} + iz\right).$$

В этих формулах аргументы всех четырех тета-функций z и q предполагаются комплексными. Функция $\vartheta_1(z,q)$ — нечётная функция от z, а остальные тета–функии — чётные.

Основным инструментом при изучении тета–функции является произведение Якоби. Приведём его для третьей тета–функции

$$\vartheta_3(t,q) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+2q^{2k-1}\cos(2t)+q^{4k-2}). \tag{1.25}$$

Данная функция положительна при всех значениях $t \in \mathbb{R}$ и $q \in (-1;1)$, так как

$$1+2q^{2k-1}\cos(2t)+q^{4k-2} \geq (1-q^{2k-1})^2 > 0.$$

Кроме того, данная функция периодична по t с периодом π. Она убывает на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и возрастает на интервале $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, так как подобным образом ведут себя все сомножители в (1.25). В дальнейшем нам потребуется соотношение

$$\vartheta_1'(0,q) = \vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q)\vartheta_4(0,q). \tag{1.26}$$

Для $\vartheta_1'(0,q)$ можно использовать и другое равенство

$$\vartheta_1'(0,q) = 2\,q^{\frac{1}{4}}\cdot G^3, \tag{1.27}$$

где $G = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2\,n}\right)$.

Если применить формулу Пуассона (1.6) для $f(x)$, являющейся функцией Гаусса

$$f(x) = \exp\left(-\frac{ax^2}{4}\right), (a > 0)$$

то получится соотношение

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-a(t+\pi k)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{a}\right) e^{2ikt}. \tag{1.28}$$

Формула (1.28) также носит название тета-преобразования.

Отношение тета–функций $\vartheta_1(z,q)/\vartheta_4(z,q)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = \left(\vartheta_2^2(0,q) - \xi^2\vartheta_3^2(0,q)\right)\left(\vartheta_3^2(0,q) - \xi^2\vartheta_2^2(0,q)\right).$$

Это уравнение может быть приведено к каноническому виду при помощи замены переменных:

$$\frac{\xi\vartheta_3(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} = y, \qquad z\vartheta_3^2(0,q) = u;$$

тогда, если написать $k^{\frac{1}{2}}$ вместо $\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$, уравнение, определяющее y как функию от u, будет

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \left(1 - y^2\right)\left(1 - k^2y^2\right).$$

Это дифференциальное уравнение имеет частное решение

$$y = \frac{\vartheta_3(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} \frac{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2}(0,q),q)}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2}(0,q),q)}.$$

Функция y рассматривается как функция от u и k и записывается в виде $y = \operatorname{sn}(u,k)$. Постоянная k называется модулем. Если $k'^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_4(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$, так что $k^2 + k'^2 = 1$, то k' называется дополнительным модулем. Квазипериоды равны $\pi\vartheta_3^2(0,q)$, $\pi\tau\vartheta_3^2(0,q)$ и обозначаются через $2K$, $2iK'$, так что $\operatorname{sn}(u,k)$ имеет периоды $4K$, $2iK'$.

При $|Im\, z| < \frac{1}{2} Im\,(\pi\tau)$ справедлива формула

$$\frac{Kk^{\frac{1}{2}}}{\pi}\frac{\vartheta_4(0,q)}{\vartheta_4(z,q)} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nz, \tag{1.29}$$

где

$$a_n = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+m+\frac{1}{2}\right)}. \tag{1.30}$$

1.5 Интерполяция и дискретное преобразование Фурье

Система целочисленных сдвигов

После появления теории всплесков резко возрос интерес к системам целочисленных (равномерных) сдвигов [22]. Равномерность здесь объясняется тем, что сигнал, как правило, оцифровывается в точках $n\triangle x$, где $\triangle x$ — шаг измерений, а $n \in \mathbb{Z}$.

Рассматривается заданная на всей вещественной оси функция $\phi(x)$ и отвечающая ей система целочисленных сдвигов

$$\phi_j(x) = \phi(x-j),\ \ j \in \mathbb{Z}. \tag{1.31}$$

Задача интерполяции формулируется следующим образом.

Пусть дана функция $f(x)$. Требуется построить интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_j\ \phi_j(x), \tag{1.32}$$

удовлетворяющую условиям

$$\widetilde{f}(m) = f(m),\ \ \ m \in \mathbb{Z}. \tag{1.33}$$

Одним из основных способов решения данной задачи является построение узловой функции.

Определение 1.4 *Функция $g(x)$, являющаяся линейной комбинацией $\phi_k(x)$,*

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \; \phi_k(x), \tag{1.34}$$

называется узловой функцией, если для нее выполнена система равенств

$$g(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{1.35}$$

где δ_{0m} – символ Кронекера.

Замечание. *Вообще говоря, систему равенств* (1.35) *можно записать в более общем виде*

$$g_l(m) = \delta_{lm}, \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{1.36}$$

где $g_l(x) = g(x - l)$. В нашем случае $l = 0$.

Нахождение $g(x)$ равносильно решению линейной системы бесконечного числа уравнений с бесконечным числом неизвестных d_k:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \; \phi_k(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{1.37}$$

Если при интерполяции использовать целочисленные сдвиги (равномерные с одним шагом) одной функции, то (1.37) представляет собой систему типа свертки. В непрерывном случае уравнение типа свертки решается с помощью преобразования Фурье, в дискретном бесконечномерном случае используются ряды Фурье, в конечномерном случае – дискретное преобразование Фурье.

Определение 1.5 *Ряд Фурье*

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \; e^{-ikt}$$

называется символом [44, с.10] или маской [30, с.23] бесконечной последовательности $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Пусть $\Phi(t)$ – маска, построенная по значениям функции $\phi(x)$ в целых узлах, т.е.

$$\Phi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(j)\ e^{-ijt}.$$

Приведём лемму, дающую конструктивный способ построения узловой функции.

Лемма 1.1 *([44, с.168], [52, p.152]) Если ряды Фурье $G(t)$ и $\Phi(t)$ сходятся абсолютно, то для них справедливо равенство:*

$$G(t) \cdot \Phi(t) = 1.$$

Следовательно, для нахождения коэффициентов d_k нужно разложить в ряд Фурье функцию $1/\Phi(t)$.

Вернемся к задаче (1.32), (1.33). В силу (1.35) решение легко строится с помощью узловой функции $g(x)$:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\ g(x-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\ \phi_{k+m}(x).$$

Замена $m+k=j$, приводит к равенству

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k f(j-k).$$

Для получения (1.32), осталось ввести обозначение

$$\widetilde{f}_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\ f(j-k). \tag{1.38}$$

Если в качестве $\phi(x)$ выбрать функцию Гаусса с дисперсией σ^2, т.е.

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

то вспомогательные ряды Фурье $G(t)$ и $\Phi(t)$ записываются в следующем виде:

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-ikt}, \tag{1.39}$$

$$\Phi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{j^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ijt}. \tag{1.40}$$

Тогда $\Phi(t)$ выражается через тета-функцию

$$\Phi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} e^{ijt} = \vartheta_3\left(\frac{t}{2}, q\right) > 0,$$

где параметр $q = \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

В работах В. Г. Мазьи, Г. Шмидта [51]–[52] для коэффициентов $d_k^{G_\sigma}$ получена явная формула. Приведем этот результат.

Теорема 1.3 *([52], гл. 7, лемма 7.8) Справедлива формула*

$$\frac{1}{\Phi(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{G_\sigma} \cdot e^{ikt},$$

где

$$d_k^{G_\sigma} = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{1.41}$$

с константой

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right) = \tag{1.42}$$

$$= \left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-2\pi^2\sigma^2 \cdot (2r+0.5)^2\right). \tag{1.43}$$

Узловую функцию таким же образом можно построить и для функции Лоренца:

$$L_s(t) = \frac{s^2}{t^2+s^2}.$$

Из работы [11] известна формула для коэффициентов $d_k^{L_s}$ узловой функции, построенной по системе сдвигов $L_s(t)$:

$$d_k^{L_s} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(st)} dt. \tag{1.44}$$

Описание дискретного аналога преобразования Фурье, проводится в соответствии с [26], [37]. Для заданного натурального числа N задается величина

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right).$$

Комплексное число ε является простым корнем N-ой степени из единицы, т.е.

$$\varepsilon^N = 1, \quad \varepsilon^k \neq 1, \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

Пусть задан N-мерный вектор f с комплексными координатами

$$f = (f_0, f_1, f_2, ..., f_{N-1}).$$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется равенствами:

$$\widehat{f_j} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \varepsilon^{-kj}, \quad j = 0, 1, ..., N-1. \tag{1.45}$$

Формула обратного ДПФ имеет вид

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{f_j} \, \varepsilon^{kj}, \quad k = 0, 1, ..., N-1. \tag{1.46}$$

Для соотнесения ДПФ с интегральным преобразованием Фурье и рядами Фурье удобнее рассматривать случай, когда индексы координат векторов симметричны относительно нуля. Здесь возможны несколько вариантов. Основные из них – это когда число точек (координат вектора) четное или нечетное.

Пусть $N = 2n+1$ (случай нечетного числа точек). Формулы для прямого и обратного ДПФ принимают вид:

$$\widehat{f_j} = \sum_{k=-n}^{n} f_k \cdot \varepsilon^{-kj}, \quad j = -n, ..., 0, ..., n.$$

$$f_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f_j} \cdot \varepsilon^{kj}, \quad k = -n, ..., 0, ..., n.$$

Если $f_{-k} = f_k$, получается равенство

$$\widehat{f}_j = f_0 + \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot (\varepsilon^{kj} + \varepsilon^{-kj}) = f_0 + 2\sum_{k=1}^{n} f_k \cos\left(\frac{2\pi kj}{2n+1}\right). \tag{1.47}$$

Так вводится дискретное косинусное преобразование (ДКП). Поскольку косинус – функция четная, то $\widehat{f}_{-j} = \widehat{f}_j$. Обратное ДКП имеет вид:

$$f_k = \frac{1}{2n+1}\left(\widehat{f}_0 + 2\sum_{j=1}^{n} \widehat{f}_j \cos\left(\frac{2\pi kj}{2n+1}\right)\right). \tag{1.48}$$

Если $N = 2n$ (случай четного числа точек), появляется условие согласования

$$f_{-n} = f_n, \quad \widehat{f}_{-n} = \widehat{f}_n, \tag{1.49}$$

а формулы прямого и обратного ДПФ имеют вид:

$$\widehat{f}_j = \sum_{k=-n}^{n-1} f_k \cdot \varepsilon^{-kj}, \quad f_k = \frac{1}{2n}\sum_{j=-n}^{n-1} f_j \cdot \varepsilon^{kj}, \tag{1.50}$$

где

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{2n}\right) = \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right).$$

Реализация прямого и обратного ДКП проводится по формулам:

$$\widehat{f}_j = f_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_k \cdot \cos\left(\frac{\pi kj}{n}\right) + (-1)^j f_n, \quad j = 0, 1, ..., n, \tag{1.51}$$

$$f_k = \frac{1}{2n}\left(\widehat{f}_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} \widehat{f}_j \cdot \cos\left(\frac{\pi kj}{n}\right) + (-1)^k \widehat{f}_n\right). \tag{1.52}$$

Глава 2

О константах неопределённости для линейных комбинаций функций Эрмита

Введение

Используемые в теоретической физике ортонормированные базисы (например, функции Эрмита) не имеют равномерно ограниченной константы неопределённости. Хорошо локализованные подсистемы когерентных состояний не ортогональны. А развитие эргодической теории для квантовых систем требует построения базиса, сочетающего свойства ортогональности и локализованности. Существование такого базиса, построенного из полной подсистемы когерентных состояний, было постулировано Дж. фон Нейманом ещё в 1929 году [27], но конструктивных примеров нет до сих пор. Использование базисов всплескового типа [7, 30] в эргодической теории также оказалось затруднительным.

Возникает естественный вопрос о возможности улучшения свойства локализованности у уже имеющихся базисов. Особый интерес в таком случае представляют функции, для которых константу неопределённости можно не только оценить, но и аналитически посчитать. В этом состоит одно из достоинств функций Эрмита.

Как известно, при ортогональном преобразовании один базис переходит в другой. Причём их константы неопределённости ведут себя очень по-разному. Они могут быть равномерно ограниченными (всплески Мейера), неограниченными (функции Эрмита) и даже равными бесконечности [7, 30]. Значит, уместен вопрос об ортогональном преобразовании, уменьшающем константу неопределённости для всех функций базиса.

В этой главе подробно изучен случай двух функций Эрмита. Аналитически получены точки минимума константы неопределённости и её минимум. Изучено применение матрицы унитарного преобразования. Для случая трёх функций точки минимума константы неопределённости найдены численно, с помощью графиков, построенных в пакете Mathematica. Уже при четырех функциях константа неопределённости зависит от трёх параметров, что затрудняет даже приближённое графическое решение. Уменьшение общей константы неопределённости для базиса требует иного подхода, чем минимизация одной линейной комбинации. Например, в работе Юргена Престина и Бернда Фишера [48] при помощи функций Эрмита строится базис всплеского типа.

Везде далее в тексте начало доказательств лемм, теорем и следствий из них обозначается символом $\Box$, а конец доказательства — символом $\blacksquare$.

2.1 Вспомогательные интегралы

В дальнейшем потребуется лемма.

Лемма 2.1 *Справедливы формулы*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 2,\ k \neq n, \\ n + \frac{1}{2}, & k = n, \\ \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}, & k = n+2, \\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} & k = n-2. \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 1, \\ \sqrt{\frac{n+1}{2}}, & k = n+1, \\ \sqrt{\frac{n}{2}}, & k = n-1. \end{cases} \tag{2.2}$$

□ Вычислим (2.1), используя (1.15) и (1.16):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2^{n+k}\,n!\,k!\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x))H_k(x)\,e^{-x^2}\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{2^{2n+1}\,n!\,(n+1)!\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n+1}^2(x)\,e^{-x^2}\,dx, & k = n+1, \\ \frac{n}{\sqrt{2^{2n-1}\,n!\,(n-1)!\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^2(x)\,e^{-x^2}\,dx, & k = n-1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 1, \\ \frac{2^{n+1}\sqrt{\pi}(n+1)!}{2^{n+1}n!\sqrt{2(n+1)\,\pi}}, & k = n+1, \\ \frac{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{2\,n\,\pi}}, & k = n-1. \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 1, \\ \sqrt{\frac{n+1}{2}}, & k = n+1, \\ \sqrt{\frac{n}{2}}, & k = n-1. \end{cases}$$

Аналогично будем действовать и с (2.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2^{n+k}\,n!\,k!\,\pi}}\cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} (H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x))(H_{k+1}(x) + 2kH_{k-1}(x))\,e^{-x^2}\,dx =$$

$$
= \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 2,\ k \neq n \\ \frac{1}{4\sqrt{2^{2n}\, n!\, n!\, \pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(H_{n+1}^2(x) + 4n^2 H_{n-1}^2(x)\right) e^{-x^2}\, dx & k = n, \\ \frac{2(n+2)}{4\sqrt{2^{2n+2}\, n!\, (n+2)!\, \pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n+1}^2(x)\, e^{-x^2}\, dx, & k = n+2, \\ \frac{2n}{4\sqrt{2^{2n-2}\, n!\, (n-2)!\, \pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^2(x)\, e^{-x^2}\, dx, & k = n-2. \end{cases} =
$$

$$
= \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 2,\ k \neq n, \\ \frac{2^{n+1}\,(n+1)!\sqrt{\pi} + 4n^2 2^{n-1}\,(n-1)!\sqrt{\pi}}{4 \cdot 2^n\, n! \sqrt{\pi}} & k = n, \\ \frac{2^{n+1}\,(n+2)!\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2^{n+1}\, n!\, \sqrt{(n+2)(n+1)\,\pi}}, & k = n+2, \\ \frac{2^{n-1}\, n! \sqrt{\pi}}{2^n\,(n-2)!\, \sqrt{n(n-1)\pi}} & k = n-2. \end{cases} =
$$

$$
= \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 2,\ k \neq n, \\ n + \frac{1}{2}, & k = n, \\ \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}, & k = n+2, \\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} & k = n-2. \quad \blacksquare \end{cases}
$$

Из (2.1) – (2.2) и (1.18) видно, что

$$
u(\varphi_n) = \Delta(\varphi_n) \cdot \Delta(\widehat{\varphi}_n) = n + \frac{1}{2}. \tag{2.3}
$$

2.2 Случай двух функций Эрмита

Рассмотрим функцию $\Psi_{\alpha,n,k}(x) = \cos\alpha\,\varphi_n(x) + \sin\alpha\,\varphi_k(x)$, где параметр $\alpha \in [0; 2\pi]$, $n, k = 0, 1, 2\ldots$ (общий случай $\Psi_{a,b,n,k}(x) = a\,\varphi_n(x) + b\,\varphi_k(x)$ совпадает с рассматриваемым, так как при делении функции на $\sqrt{a^2+b^2}$ константа неопределённости не меняется). Естественно, мы предполагаем, что $n \neq k$.

Заметим, что норма $\Psi_{\alpha,n,k}(x)$ равна 1. Вычислим константу неопределённости для функции $\Psi_{\alpha,n,k}(x)$. Вначале найдём её радиус:

$$\Delta^2(\Psi_{\alpha,n,k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|\Psi_{\alpha,n,k}(\xi)|^2 dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|\Psi_{\alpha,n,k}(\xi)|^2 dx\right)^2 .$$

Так как $|\Psi_{\alpha,n,k}(\xi)|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n^2(\xi) + \sin 2\alpha\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_k(\xi) + \sin^2\alpha\,\varphi_k^2(\xi)$, то

$$\Delta^2(\Psi_{\alpha,n,k}) = \cos^2\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi_n^2(x)\,dx + \sin 2\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx +$$

$$+ \sin^2\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi_k^2(x))\,dx - \left(\cos^2\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_n^2(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \sin 2\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx + \sin^2\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_k^2(x)\,dx\right)^2 .$$

Таким образом, с помощью (2.1)–(2.2) получим

$$\Delta^2(\Psi_{\alpha,n,k}) =$$

$$= n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2} - \sin^2 2\alpha \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx\right)^2 . \qquad (2.4)$$

В зависимости от расположения функций друг относительно друга, или иначе говоря, в зависимости от номеров n и k, величина $\Delta(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k})$, вообще говоря, может быть различной. Поэтому основные утверждения параграфа удобно сформулировать в виде трех теорем.

Теорема 2.1 *Пусть* $|n-k| > 2$, *тогда*

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]} u(\Psi_{\alpha,n,k}) = \min(n,\ k) + \frac{1}{2}.$$

□ Из (2.4) следует

$$\Delta^2(\Psi_{\alpha,n,k}) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2}.$$

Найдём радиус $\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}$.

$$\Delta^2(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)|^2dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)|^2dx\right)^2.$$

Учитывая (1.18), $|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)|^2$ может быть равно одному из следующих выражений:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha\,\varphi_n^2(\xi) + \sin^2\alpha\,\varphi_k^2(\xi), \\ \cos^2\alpha\,\varphi_n^2(\xi) + \sin 2\alpha\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_k(\xi) + \sin^2\alpha\,\varphi_k^2(\xi), \\ \cos^2\alpha\,\varphi_n^2(\xi) - \sin 2\alpha\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_k(\xi) + \sin^2\alpha\,\varphi_k^2(\xi). \end{cases}$$

Как видно из (2.2),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)|^2dx = 0.$$

Отсюда и из формулы (2.1) получим:

$$\Delta^2(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$u(\Psi_{\alpha,n,k}) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

Следовательно, константа неопределённости, как функция от α, принимает все значения из отрезка $[\min(n,k)+\frac{1}{2};\ \max(n,k)+\frac{1}{2}]$. Минимум, естественно, достигается при обнулении коэффициента у функции с наибольшим индексом. ■

Замечание 2.1 *Как следует из* (2.3), *границами отрезка* $[\min(n,k)+\frac{1}{2};\ \max(n,k)+\frac{1}{2}]$ *являются константы неопределённости для исходных функций* φ_n *и* φ_k .

Замечание 2.2 *Максимум константы неопределённости будет равен* $\max(n,k)+\frac{1}{2}$, *также, как и во всех рассматриваемых ниже случаях.*

Более интересные результаты получаются в следующей теореме.

Теорема 2.2 *Пусть* $k=n+2$, *тогда*

$$u(\Psi_{\alpha,n,n+2})=\sqrt{(n^2+3n+6)\sin^4\alpha+(n-n^2)\sin^2\alpha+n^2+n+\frac{1}{4}},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]}u(\Psi_{\alpha,n,n+2})=\sqrt{\frac{2n^4+14n^3+39n^2+27n+6}{4(n^2+3n+6)}}$$

и достигается при $\sin^2\alpha_n=\frac{n^2-n}{2(n^2+3n+6)}$.

$\square$ Учитывая (2.4) и (2.2), получим

$$\Delta^2(\Psi_{\alpha,n,n+2})=2\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha+n+\frac{1}{2}.$$

Соотношение (1.18) позволяет определить, что

$$|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,n+2}(\xi)|^2=\cos^2\alpha\,\varphi_n^2(\xi)-\sin 2\alpha\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_{n+2}(\xi)+\sin^2\alpha\,\varphi_{n+2}^2(\xi).$$

Отсюда,

$$\Delta^2(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,n+2})=2\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha+n+\frac{1}{2},$$

$$u^2(\Psi_{\alpha,n,n+2})=(n^2+3n+6)\sin^4\alpha+(n-n^2)\sin^2\alpha+n^2+n+\frac{1}{4}. \qquad (2.6)$$

Подкоренное выражение достигает своего минимума при

$$\sin^2\alpha_n=\frac{n^2-n}{2(n^2+3n+6)}.$$

Выпишем минимальное значение $u(\Psi_{\alpha,n,n+2})$, получая утверждение теоремы

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]}u(\Psi_{\alpha,n,n+2})=\sqrt{\frac{2n^4+14n^3+39n^2+27n+6}{4(n^2+3n+6)}}.\blacksquare$$

Следствие 2.1 *Пусть $n = k - 2$, тогда*

$$u(\Psi_{\alpha,k-2,k}) = \sqrt{(k^2+3k+6)\cos^4\alpha + (k-k^2)\cos^2\alpha + k^2 + k + \frac{1}{4}},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]} u(\Psi_{\alpha,k-2,k}) = \sqrt{\frac{2k^4+14k^3+39k^2+27k+6}{4(k^2+3k+6)}}$$

и достигается при $\cos^2\alpha = \frac{k^2-k}{2(k^2+3k+6)}$.

□ Этот случай легко сводится к предыдущему. Достаточно взять $k = n+2$ и сделать замену $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Тогда роль $\sin\alpha$ будет играть $\cos\alpha$:

$$u(\Psi_{\alpha,k-2,k}) = \sqrt{(k^2+3k+6)\cos^4\alpha + (k-k^2)\cos^2\alpha + k^2 + k + \frac{1}{4}}. \quad (2.7)$$

■

Замечание 2.3 *Если $n \geq 2$, то для $\Psi_{\alpha,n,n+2}(x)$ константа неопределённости меньше $n + \frac{1}{2}$, то есть меньше наименьшей из констант для исходных функций $\varphi_n(x)$ и $\varphi_k(x)$.*

Вычислим этот минимум при $n = 2$ и $n = 3$:

$$\min_{\alpha\in[-\pi;\ \pi]} u(\Psi_{\alpha,2,0}) = \frac{\sqrt{87}}{4} = 2,33\ldots,$$

$$\min_{\alpha\in[-\pi;\ \pi]} u(\Psi_{\alpha,3,1}) = \sqrt{\frac{485}{48}} = 3,18\ldots.$$

Замечание 2.4 *Очевидно, что*

$$\frac{n^2-n}{2(n^2+3n+6)} \to \frac{1}{2}$$

при $n \to \infty$, то есть оптимальное значение α близко к одному из следующих углов $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m = 0, 1, 2, 3$.

Изучим поведение константы неопределённости при $\sin^2\alpha^* = \frac{1}{2}$, которое тем ближе к оптимальному, чем больше n.

$$u(\Psi_{\alpha^*,n,n+2}) = \sqrt{\frac{n^2+3n+6}{4} + \frac{-n^2+n}{2} + n^2 + n + \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3n^2+9n+7}}{2} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}(n+\frac{3}{2}),$$

где $a_n \approx b_n$ - означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Таким образом, мы получили асимптотику

$$u(\Psi_{\alpha^*,n,n+2}) \approx \frac{\sqrt{3}}{2}(n+\frac{3}{2}). \qquad (2.8)$$

Заметим, что $u(\Psi_{\alpha^*,6,8}) = \frac{\sqrt{3n^2+9n+7}}{2} = \frac{13}{2} = n + \frac{1}{2}$, то есть в этом случае $u(\Psi_{\alpha^*,6,8})$ совпадёт с наименьшим значением для констант неопределённости исходных функций. При $n \geq 7$ константа неопределённости $u(\Psi_{\alpha^*,7,9}) = \frac{\sqrt{3n^2+9n+7}}{2} < n + \frac{1}{2}$, то есть меньше этого наименьшего значения.

Теорема 2.3 *Пусть $k = n+1$, тогда*

$$u(\Psi_{\alpha,n,n+1}) =$$

$$= \sqrt{2(n+1)\sin^6\alpha + (2n^2+n)\sin^4\alpha - (2n^2+n)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}},$$

минимум достигается при $\sin^2\alpha_a = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, где $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$.

□ В условиях теоремы формула (2.4) примет вид

$$\Delta^2(\Psi_{\alpha,n,n+1}) = \sin^2\alpha + n + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Для $|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,n+1}(\xi)|^2$ справедливо равенство:

$$|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,n+1}(\xi)|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n^2(\xi) + \sin^2\alpha\,\varphi_k^2(\xi).$$

Тогда,

$$\Delta^2(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,n+1}) = n\cos^2\alpha + (n+1)\sin^2\alpha + \frac{1}{2} = \sin^2\alpha + n + \frac{1}{2}.$$

Приведём значение $u^2(\Psi_{\alpha,n,n+1})$:

$$u^2(\Psi_{\alpha,n,n+1}) = 2(n+1)\sin^6\alpha + (2n^2+n)\sin^4\alpha -$$

$$-(2n^2+n)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}. \tag{2.9}$$

Для простоты рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + at^2 - at + b$, где $a \geq 0$, $b > 0$, $t \in [0,1]$. На этом отрезке минимум достигается при $t = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, то есть для $u(\Psi_{\alpha,n,n+1})$ при $\sin^2\alpha_a = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, где $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$. Формула для минимального значения константы неопределённости оказывается слишком громоздкой. ■

Следствие 2.2 *Пусть $n = k-1$, тогда*

$$u(\Psi_{\alpha,k-1,k}) =$$

$$= \sqrt{2(k+1)\cos^6\alpha + (2k^2+k)\cos^4\alpha - (2k^2+k)\cos^2\alpha + k^2 + k + \frac{1}{4}},$$

минимум достигается при $\cos^2\alpha_a = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, *где* $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$.

□ Этот случай легко сводится к предыдущему. Достаточно взять $k = n+1$ и сделать замену $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Тогда роль $\sin\alpha$ будет играть $\cos\alpha$:

$$u^2(\Psi_{\alpha,k-1,k}) = 2(k+1)\cos^6\alpha + (2k^2+k)\cos^4\alpha -$$

$$-(2k^2+k)\cos^2\alpha + k^2 + k + \frac{1}{4}. \tag{2.10}$$

■

Замечание 2.5 *Заметим, что*

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3} = \lim_{a\to\infty} \frac{3a}{3(\sqrt{a^2+3a}+a)} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим $u(\Psi_{\alpha,n,n-1})$ при $\sin^2\alpha^* = \frac{1}{2}$.

$$u(\Psi_{\alpha^*,n,n-1}) = \sqrt{2(n+1)\frac{1}{8} + (2n^2+n)\frac{1}{4} - (2n^2+n)\frac{1}{2} + n^2 + n + \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n+1-2n^2-n+4n^2+4n+1}{4}}$$

то есть,

$$u(\Psi_{\alpha^*,n,n-1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+1). \tag{2.11}$$

Заметим, что и в этом случае константа неопределённости меньше наименьшего значения констант неопределённости для исходных функций $n+\frac{1}{2}$ при $n \geq 1$.

2.3 Ортогональное преобразование для двух функций Эрмита.

Применим матрицу поворота к паре функций Эрмита:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\,\varphi_k(x) + \cos\alpha\,\varphi_n(x) \\ -\sin\alpha\,\varphi_n(x) + \cos\alpha\,\varphi_k(x) \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\Psi_1(x) = \sin\alpha\,\varphi_k(x) + \cos\alpha\,\varphi_n(x), \tag{2.12}$$

$$\Psi_2(x) = -\sin\alpha\,\varphi_n(x) + \cos\alpha\,\varphi_k(x). \tag{2.13}$$

Заметим, что $\Psi_1(x)$ совпадает с уже рассмотренной $\Psi_{\alpha,n,k}$, $\Psi_2(x)$ можно получить из $\Psi_1(x)$ путём замены:

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha. \tag{2.14}$$

Перед изучением поведения констант неопределённости для $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ было высказано предположение, что они станут минимальными тогда, когда совпадут. В итоге данное предположение не подтвердилось: $u(\Psi_1(x))$ и $u(\Psi_2(x))$ при равенстве не становятся минимальными, но при $n \to \infty$ их минимальные значения к равенству стремятся.

Рассмотрим пять уже знакомых случаев.

1. $|k-n| > 2$.

Из (2.5) и (2.14) следует, что

$$u(\Psi_1) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2},$$

$$u(\Psi_2) = k\cos^2\alpha + n\sin^2\alpha + \frac{1}{2}.$$

Константы будут равны, если

$$(n-k)\cos 2\alpha = 0.$$

То есть $\alpha^* = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m = 0, 1, 2, 3$.

2. $k = n + 2$.

Из (2.6) и (2.14) следует, что

$$u(\Psi_1) = \sqrt{(n^2+3n+6)\sin^4\alpha + (n-n^2)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}},$$

$$u(\Psi_2) = \sqrt{(n^2+3n+6)\cos^4\alpha + (n-n^2)\cos^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}}.$$

Константы будут равны, если

$$(4n+6)\cos 2\alpha = 0.$$

То есть $\alpha^* = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m = 0, 1, 2, 3$. Этот угол нам уже знаком, именно, к нему стремится точка минимума. При этом уже при $n > 6$ константа сразу двух функций Ψ_1 и Ψ_2 станет меньше наименьшей константы исходных функций. А её поведение наглядно показывает (2.8).

3. $k = n - 2$.

Случай принципиально ничем не отличается от предыдущего.

4. $k = n + 1$.

Из (2.9) и (2.14) следует, что

$$u^2(\Psi_1) = 2(n+1)\sin^6\alpha + (2n^2+n)\sin^4\alpha - (2n^2+n)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}.$$

$$u^2(\Psi_2) = 2(n+1)\cos^6\alpha + (2n^2+n)\cos^4\alpha - (2n^2+n)\cos^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}.$$

Константы будут равны, если

$$2(n+1)(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{4})\cos 2\alpha = 0.$$

То есть $\alpha^* = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m = 0,1,2,3$. Как и во втором случае. При этом уже при $n > 1$ константа сразу двух функций Ψ_1 и Ψ_2 станет меньше наименьшей константы исходных функций. А её поведение наглядно показывает (2.11).

5. $k = n-1$. Случай принципиально ничем не отличается от предыдущего.

2.4 Унитарное преобразование

Было бы странно не изучить поведение констант неопределённости при унитарном преобразовании пары функций Эрмита. Матрица унитарного преобразования [15, стр. 170]:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\, e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}} & i\sin\alpha\, e^{i\frac{\beta-\gamma}{2}} \\ i\sin\alpha\, e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}} & \cos\alpha\, e^{-i\frac{\beta+\gamma}{2}} \end{pmatrix},$$

где $0 \le \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$, $-2\pi \le \gamma < 2\pi$.

Рассмотрим две функции:

$$F_1(x) = \cos\alpha\, e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}\varphi_n(x) + i\sin\alpha\, e^{i\frac{\beta-\gamma}{2}}\varphi_k(x), \tag{2.15}$$

$$F_2(x) = i\sin\alpha\, e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}}\varphi_n(x) + \cos\alpha\, e^{-i\frac{\beta+\gamma}{2}}\varphi_k(x). \tag{2.16}$$

Функцию $F_2(x)$ можно получить из $F_1(x)$ путём замен:

$$n = k,\ k = n,\ \beta' = -\beta,\ \gamma' = -\gamma. \tag{2.17}$$

В этом разделе мы не будем приводить длинные выкладки, так как при вычислении не возникает никаких трудностей.

$$|F_1(x)|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n(x) + \sin^2\alpha\,\varphi_k(x) + \sin 2\alpha\,\sin\gamma\,\varphi_n(x)\varphi_k(x).$$

Полученные константы:

1. $|n-k| > 2$.

$$u(F_1) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2}. \tag{2.18}$$

Очевидно, результат ничем не отличается от (2.5).

2. $k = n+1$.

В этом случае

$$|\widehat{F}_1(x)|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n(x) + \sin^2\alpha\,\varphi_k(x) - \sin 2\alpha\,\sin\gamma\,\varphi_n(x)\varphi_k(x).$$

$$\begin{gathered} u^2(F_1) = (n + \tfrac{1}{2} + \sin^2\alpha - \tfrac{n+1}{2}\sin^2\gamma\sin^2 2\alpha)\cdot \\ \cdot(n + \tfrac{1}{2} + \sin^2\alpha - \tfrac{n+1}{2}\cos^2\gamma\sin^2 2\alpha). \end{gathered} \tag{2.19}$$

Чтобы понять как себя ведёт $u^2(F_1)$, рассмотрим вспомогательную функцию $p(\alpha) = (a - b\sin^2\gamma)(a - b\cos^2\gamma)$, где $a, b \geq 0$. Далее,

$$p(\alpha) = (a - b\sin^2\gamma)(a - b\cos^2\gamma) = a^2 - ab(\sin^2\gamma + b\cos^2\gamma) + \frac{b^2}{4}\sin^2 2\gamma =$$

$$= a^2 - ab + \frac{b^2}{4}\sin^2 2\gamma.$$

Теперь видно, что минимум (2.19) достигается при $\sin^2 2\gamma = 0$. В этом случае (2.19) совпадает с (2.10). Максимум достигается при $\sin^2 2\gamma = 1$. При этом

$$u(F_1) = n + \frac{1}{2} + \sin^2\alpha - \frac{n+1}{4}\sin^2 2\alpha. \tag{2.20}$$

Легко видеть, что данная функция достигает минимума при $\sin^2\alpha = \frac{n}{2(n+1)}$, а максимума при $\sin^2\alpha = 1$. При этом

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]}(n + \frac{1}{2} + \sin^2\alpha - \frac{n+1}{4}\sin^2 2\alpha) = \frac{3}{4}(n+1) - \frac{1}{4(n+1)}.$$

3. $k=n-1$. Нет никаких принципиальных отличий от предыдущего случая.

$$\begin{gathered} u^2(F_1)=(n+\tfrac{1}{2}+\cos^2\alpha-\tfrac{n+1}{2}\sin^2\gamma\sin^2 2\alpha)\cdot \\ \cdot(n+\tfrac{1}{2}+\cos^2\alpha-\tfrac{n+1}{2}\cos^2\gamma\sin^2 2\alpha). \end{gathered} \tag{2.21}$$

4. $k=n+2$.

$$|\widehat{F}_1(x)|^2=\cos^2\alpha\,\varphi_n(x)+\sin^2\alpha\,\varphi_k(x)-\sin 2\alpha\,\sin\gamma\,\varphi_n(x)\varphi_k(x).$$

$$\begin{gathered} u^2(F_1)=(n+\tfrac{1}{2}+2\sin^2\alpha+\tfrac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha)\cdot \\ \cdot(n+\tfrac{1}{2}+2\sin^2\alpha-\tfrac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha). \end{gathered} \tag{2.22}$$

Очевидно, что максимум достигается при $\sin\gamma=0$. В этом случае $u(F_1)=n+\frac{1}{2}+2\sin^2\alpha$, то есть максимум не превосходит $n+\frac{5}{2}$. Минимум достигается при $\sin^2\gamma=1$ и совпадает с (1.42).

5. $k=n-2$. Нет никаких принципиальных отличий от предыдущего случая.

$$\begin{gathered} u^2(F_1)=(k+\tfrac{1}{2}+2\cos^2\alpha+\tfrac{\sqrt{(k+2)(k+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha)\cdot \\ \cdot(k+\tfrac{1}{2}+2\cos^2\alpha-\tfrac{\sqrt{(k+2)(k+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha). \end{gathered} \tag{2.23}$$

Из формул (2.18) — (2.23) следует, что границы константы неопределённости при унитарном преобразовании и при умножении на матрицу поворота совпадают в соответствующих случаях.

2.5 Случай трёх и более функций Эрмита

Поиск минимума константы неопределённости для линейной комбинации уже из трёх функций Эрмита вызывает некоторые технические сложности. Будем минимизировать константу неопределённости для линейной комбинации с вещественными коэфициентами

$$a_{n-i}\varphi_{n-i}(x)+a_n\varphi_n(x)+a_{n+j}\varphi_{n+j}(x), \tag{2.24}$$

где $a_{n-i}^2+a_n^2+a_{n+j}^2=1$, i, j, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant i$. Возможны пять различных случаев.

1) $i>1$, $j>1$. Этот случай не представляет большого интереса. Константа неопределённости по тем же причинам, что и в теореме 1, лежит на отрезке $[n-i+\frac{1}{2}, n+j+\frac{1}{2}]$.

В дальнейшем будем предполагать, $a_{n-i}=\sin\alpha\cos\beta$, $a_n=\sin\beta$, $a_{n+j}=\cos\alpha\cos\beta$, где $\alpha,\beta\in[0,\pi]$. Выражение (2.24) обозначим через $f_{i,j}(n,\alpha,\beta)$.

2) $i=1$, $j=1$. Интуитивно понятно, если три функции стоят рядом, то константа для этой линейной комбинации будет уменьшена максимально, так как в этом случае больше всего слагаемых, способных это совершить. Будем рассматривать функцию, зависящую от трех параметров:

$$u(f_{1,1}(n,\alpha,\beta))=\left(n+\frac{1}{2}+(\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{n^2+n}}{2})\cos^2\beta-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin^2 2\beta}{2}(n+\cos^2\alpha+\sqrt{n^2+n}\sin 2\alpha)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(n+\frac{1}{2}+(\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{n^2+n}}{2})\cos^2\beta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Её минимум можно локализовать численно. Двигаясь с шагом 0.01, получим следующие, почти оптимальные значения:

$u(f_{1,1}(10,0.83,0.83))=4.46959$, $u(f_{1,1}(20,0.81,0.83))=8.74$,

$u(f_{1,1}(100,0.84,0.83))=43.0236$, $u(f_{1,1}(1000,0.79,0.83))=426.8$.

Как мы видим, константа уменьшается примерно на 57%, по сравнению со случаем двух переменных, где она в лучшем случае уменьшалась примерно на 29%. То есть существует тенденция к её уменьшению. Есть все основания полагать, что это будет продолжаться с ростом числа функций.

3) $i=2,\ j=2.$

$$u(f_{2,2}(n,\alpha,\beta))=\left[\left(n+\frac{1}{2}+2\cos 2\alpha\cos^2\beta\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\sin^2 2\beta}{2}(\sqrt{(n+2)(n+1)}\cos\alpha+\sqrt{n(n-1)}\sin\alpha)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Действуя аналогично пункту 2, получим почти оптимальное значение:

$$u(f_{2,2}(100,0.81,0.81))=71.1237.$$

4) $i=2,\ j=1.$

$$u(f_{2,1}(n,\alpha,\beta))=\left(n+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+(\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{n^2-n}}{2}\sin 2\alpha)\cos^2\beta-\frac{(n+1)\cos^2\alpha\sin^2 2\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(n+\frac{1}{2}+(\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{n^2-n}}{2}\sin 2\alpha)\cos^2\beta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Почти оптимальное значение: $u(f_{2,1}(100,2.81,0.73))=68.0446.$

5) $i=1,\ j=2.$

$$u(f_{1,2}(n,\alpha,\beta))=\left(n+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+(2\cos 2\alpha-\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha)\cos^2\beta-\frac{n\sin^2\alpha\sin^2 2\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(n+\frac{1}{2}+(2\cos 2\alpha-\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha)\cos^2\beta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Почти оптимальное значение: $u(f_{1,2}((100,1.88,0.73))=67.3407.$

В заключение выпишем общую формулу константы неопределённости для линейной комбинации $\sum\limits_{j=n_0}^{m-1}a_j\varphi_j(x)$ из m подряд идущих функций Эрмита начиная с n_0:

$$u\left(\sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j\varphi_j(x)\right) = \left(n_0 + \frac{1}{2} + \sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j^2 j + \right.$$

$$+ \sum_{j=n_0}^{n_0+m-3} a_j a_{j+2}\sqrt{(j+1)(j+2)} - 2\left(\sum_{j=n_0}^{n_0+m-2} a_j a_{j+1}\sqrt{j+1}\right)^2 \left.\right) \cdot$$

$$\cdot \left(n_0 + \frac{1}{2} + \sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j^2 j - \sum_{j=n_0}^{n_0+m-3} a_j a_{j+2}\sqrt{(j+1)(j+2)}\right).$$

Если часть коэффициентов положить равными нулю, то формула применима и для любой конечной линейной комбинации функций Эрмита, не обязательно идущих подряд.

Глава 3

Свойства коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса

3.1 Введение.

Предметом рассмотрения данной главы являются функция Гаусса $G_\sigma(t)$:

$$G_\sigma(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right),$$

и функция Лоренца $L_s(t)$:

$$L_s(t) = \frac{s^2}{t^2 + s^2},$$

где параметры $\sigma > 0$ и $s > 0$.

Через $\mathrm{Erfc}(x)$ обозначим дополнительную функцию ошибок

$$\mathrm{Erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Узловую функцию, построенную из сдвигов функции Гаусса, обозначим через $\widetilde{G}_\sigma(t)$,

$$\widetilde{G}_\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{G_\sigma} G_\sigma(t-k),$$

а из сдвигов функции Лоренца — через $\widetilde{L}_s(x)$:

$$\widetilde{L}_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{L_s} L_s(t-k).$$

В этой главе изучается вопрос о знакочередовании коэффициентов $d_k^{G_\sigma}$, $d_k^{L_s}$ и о монотонном убывании их модулей с ростом индекса k. Последний параграф главы посвящён наилучшему приближению в $L_2(\mathbb{R})$ функции Лоренца функцией Гаусса и наоборот.

3.2 Знакочередование и монотонность $d_k^{G_\sigma}$.

В этом разделе мы опишем поведение коэффициентов узловой функции $\widetilde{G}_\sigma(t)$. Численные результаты статьи [9] позволяют предположить, что $d_k^{G_\sigma}$ знакочередуются и быстро монотонно убывают по абсолютной величине. Отметим, что $d_{-k}^{G_\sigma} = d_k^{G_\sigma}$, поэтому говоря о монотонном убывании величин $|d_k^{G_\sigma}|$ мы подразумеваем убывание с ростом абсолютной величины номера. Знакочередование можно получить и аналитически. Из работ Мазьи [51], [52] известна явная формула, которая была описана в первой главе. Для удобства выпишем её повторно

$$d_k^{G_\sigma} = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Докажем сначала лемму:

Лемма 3.1

$$C(\sigma) = \frac{1}{2}\vartheta_1'\left(0, \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\right)\right). \tag{3.1}$$

□ Действительно, преобразуем ряд

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(4r+1)^2}{8\,\sigma^2}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(4r+1)\cdot\exp\left(-\frac{(4r+1)^2}{8\,\sigma^2}\right) + \sum_{r=-\infty}^{-1}(4r+1)\cdot\exp\left(-\frac{(4r+1)^2}{8\,\sigma^2}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(4r+1)\cdot\exp\left(-\frac{(4r+1)^2}{8\,\sigma^2}\right) - \sum_{r=1}^{\infty}(4r-1)\cdot\exp\left(-\frac{(4r-1)^2}{8\,\sigma^2}\right).$$

Первый ряд состоит из нечетных чисел, дающих при делении на 4 остаток 1, второй — из нечетных чисел, дающих при делении на 4 остаток 3. Объединим их в один ряд по всем нечётным числам. В итоге

$$C(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\cdot\exp\left(-\frac{(2m+1)^2}{8\,\sigma^2}\right). \tag{3.2}$$

Исследуем его на абсолютную сходимость.

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{(2m+1)\cdot\exp\left(-\frac{(2m+1)^2}{8\,\sigma^2}\right)} = \lim_{m\to\infty}\exp\left(-\frac{(2m+1)^2}{8\,m\,\sigma^2}\right) = 0$$

Таким образом ряд сходится при всех $\sigma > 0$. Остается заметить, что ряд (3.2) получается при дифференцировании $\frac{1}{2}\vartheta_1\left(z, \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\right)\right)$ по z в точке $z = 0$. Таким образом,

$$C(\sigma) = \frac{1}{2}\vartheta_1'\left(0, \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\right)\right).$$

■

Теорема 3.1 *Коэффициенты* $d_k^{G_\sigma}$ *знакочередуются.*

□ Сначала покажем, что $C(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$. Известно [43, стр. 348], что

$$\vartheta_1'(0, q) = 2\,q^{\frac{1}{4}}\cdot G^3,$$

где $G = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2\,n}\right)$. Получаем итоговую формулу:

$$C(\sigma) = \exp\left(-\frac{1}{8\,\sigma^2}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - \exp\left(-\frac{n}{\sigma^2}\right)\right\}^3.$$

Отсюда следует положительность $C(\sigma)$, так как $0 < \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) < 1$ при $\sigma > 0$.

Теперь знак коэффициентов зависит от знака ряда

$$\sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Этот сходящийся, знакочередующийся ряд в силу монотонного убывания по абсолютной величине его членов имеет знак первого члена, то есть

$$\operatorname{sgn}\left(d_k^{G_\sigma}\right) = (-1)^k.$$

■

Формула (1.41) получается из разложения в ряд Фурье функции

$$\frac{1}{\vartheta_3\left(\frac{t}{2}; q\right)},$$

где параметр q задается равенством

$$q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right).$$

Стоит заметить, что формула для ряда Фурье этой функции была известна ещё в 1903 году [43, стр. 371]. Формула (1.29) приводилась в первой главе. Для удобства выпишем её повторно:

$$\frac{Kk^{\frac{1}{2}}}{\pi}\frac{\vartheta_4(0,q)}{\vartheta_4(z,q)} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nz,$$

где

$$a_n = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+m+\frac{1}{2}\right)}.$$

Так как

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0,q), \qquad k^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)},$$

то

$$\frac{1}{\vartheta_4(z,q)} = \frac{1}{\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q)\vartheta_4(0,q)}\left(a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nz\right),$$

Воспользовавшись соотношениями (1.24) и (1.26), получим:

$$\frac{1}{\vartheta_3(z,q)} = \frac{1}{\vartheta_3\left(z+\frac{\pi}{2},q\right)} = \frac{1}{\vartheta_1'(0,q)}\left(a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\vartheta_1'(0,q)}\left(a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \cos 2nz\right).$$

Из (1.41) получим

$$\frac{1}{\vartheta_3(z,q)} = \frac{1}{C(\sigma)}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \cos 2nz\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2nz},$$

где $b_n = \frac{(-1)^n}{2} a_{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь преобразуем коэффициенты b_n, сделав замену индекса $r = m + |n|$,

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+|n|} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(2|n|+m+\frac{1}{2}\right)} = \sum_{r=|n|}^{\infty}(-1)^r q^{\left(r-|n|+\frac{1}{2}\right)\left(r+|n|+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= q^{-n^2}\sum_{r=|n|}^{\infty}(-1)^r q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Таким образом, $d_k^{G_\sigma} = b_k$.

В отличие от знакочередования, монотонное убывание $|d_k^{G_\sigma}|$ доказать для всех значений параметра σ не удалось. Получилось доказать, что данный факт точно верен, начиная с некоторого номера. Однако, это не означает, что до этого номера убывания нет.

Теорема 3.2 *Начиная с номера*

$$k = \max\left\{\left[\log_q \sqrt{1-q} - 1\right], 0\right\} \tag{3.3}$$

коэффициенты $d_k^{G_\sigma}$ *монотонно убывают по абсолютной величине.*

□ Введём ряд для неотрицательных целых k

$$X_k = \left|\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^r \cdot q^{(r+0.5)^2}\right|,$$

где
$$q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right).$$

Рассмотрим отношение для неотрицательных целых k:

$$\frac{d_k^{G_\sigma}}{d_{k+1}^{G_\sigma}} = \frac{q^{-k^2}X_k}{q^{-(k+1)^2}X_{k+1}} = q^{2k+1}\cdot\frac{q^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}-X_{k+1}}{X_{k+1}} = q^{2k+1}\cdot\left(\frac{q^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}{X_{k+1}}-1\right)$$

Заметим, что
$$X_{k+1} \leq q^{\left(k+\frac{3}{2}\right)^2}.$$

Отсюда

$$q^{2k+1}\cdot\left(\frac{q^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}{X_{k+1}}-1\right) \leq q^{2k+1}\cdot\left(\frac{q^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}{q^{\left(k+\frac{3}{2}\right)^2}}-1\right) = q^{-1}-q^{2k+1}.$$

Выясним при каких значениях q и σ последнее выражение больше 1:

$$q^{-1}-q^{2k+1} > 1,\ q^{2k+1} < q^{-1}-1,\ 2k+1 > \log_q\left(q^{-1}-1\right).$$

Тогда
$$2k > \log_q(1-q)-2,\ k > \log_q\sqrt{1-q}-1,$$

откуда и следует доказываемое утверждение. ■

Следствие 3.1 *Для монотонного убывания последовательности коэффициентов ряда* (1.41) *по абсолютной величине, начиная с нулевого номера, достаточно выполнения неравенства:* $q < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, *что соответствует* $\sigma < \sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}} = 1.01933\ldots$.

□ Действительно, из (3.3) следует, что ряд будет убывать весь, если

$$\log_q\sqrt{1-q}-1 \leq 0,\ \sqrt{1-q} \geq q,\ 1-q \geq q^2,\ q^2+q-1 \leq 0.$$

Получаем
$$-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Учитывая, что $q > 0$

$$q < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Переходя к σ и решая полученное неравенство, получим

$$\sigma < \sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}}. \quad \blacksquare$$

3.3 Свойства $d_k^{L_s}$.

Напомним, что коэффициенты $d_k^{L_s}$ задаются формулой

$$d_k^{L_s} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(s\pi)}{s\pi^2} \int_0^\pi \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(st)} dt. \tag{3.4}$$

Интеграл в (3.4) удобно вычислять с помощью ДПФ.

Таблица 3.1: Коэффициенты $d_k^{L_s}$ для $\sigma = 0.5$, $\sigma = 1.0$ и $\sigma = 1.5$

s	0.5	1.0	1.5
$d_0^{L_s}$	1.08273	1.73697	3.89172
$d_1^{L_s}$	−0.20019	−0.78304	−2.49120
$d_2^{L_s}$	−0.01541	0.13838	0.93889
$d_3^{L_s}$	−0.00966	−0.004310	−0.34861
$d_4^{L_s}$	−0.00531	0.00094	0.11382
$d_5^{L_s}$	−0.00341	−0.00530	−0.04562
$d_6^{L_s}$	−0.00237	−0.00242	0.01205
$d_7^{L_s}$	−0.00174	−0.00207	−0.00714
$d_8^{L_s}$	−0.00133	−0.00154	0.00028
$d_9^{L_s}$	−0.00105	−0.00123	−0.00185
$d_{10}^{L_s}$	−0.00085	−0.00100	−0.00077
$d_{11}^{L_s}$	−0.00070	−0.00082	−0.00090
$d_{12}^{L_s}$	−0.00059	−0.00069	−0.00067

Таблица 3.2: Коэффициенты $d_k^{L_s}$ для $\sigma = 2.0$ и $\sigma = 3.0$.

$d_k^{L_s}$	$s = 2.0$	$d_k^{L_s}$	$s = 3.0$
$d_{12}^{L_s}$	0.00103	$d_{26}^{L_s}$	$1.20 \cdot 10^{-5}$
$d_{13}^{L_s}$	-0.00137	$d_{27}^{L_s}$	$3.00 \cdot 10^{-5}$
$d_{14}^{L_s}$	-0.00015	$d_{28}^{L_s}$	$-3.37 \cdot 10^{-5}$
$d_{15}^{L_s}$	-0.00061	$d_{29}^{L_s}$	$-1.75 \cdot 10^{-5}$
$d_{16}^{L_s}$	-0.00032	$d_{30}^{L_s}$	$-7.84 \cdot 10^{-5}$
$d_{17}^{L_s}$	-0.00038	$d_{31}^{L_s}$	$-1.24 \cdot 10^{-5}$
$d_{18}^{L_s}$	-0.00029	$d_{32}^{L_s}$	$-8.65 \cdot 10^{-5}$

Поведение $d_k^{L_s}$ отличается от поведения $d_k^{G_\sigma}$. Согласно таблице 3.1 знакочередования, начиная с некоторого момента нет. Таблица 3.2 показывает, что нет и монотонного убывания. Таблица 3.3 демонстрирует, что $d_k^{L_s}$ убывают очень медленно.

Таблица 3.3: Скорость убывания коэффициентов $d_k^{L_s}$.

d_k	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 3.0$
d_{100}	$-8.52 \cdot 10^{-6}$	$-1.01 \cdot 10^{-5}$	$-1.01 \cdot 10^{-5}$	$-1.01 \cdot 10^{-5}$
d_{200}	$-2.13 \cdot 10^{-6}$	$-2.51 \cdot 10^{-6}$	$-2.53 \cdot 10^{-6}$	$-2.53 \cdot 10^{-6}$
d_{300}	$-9.47 \cdot 10^{-7}$	$-1.11 \cdot 10^{-6}$	$-1.13 \cdot 10^{-6}$	$-1.13 \cdot 10^{-6}$
d_{400}	$-5.33 \cdot 10^{-7}$	$-6.29 \cdot 10^{-7}$	$-6.33 \cdot 10^{-7}$	$-6.33 \cdot 10^{-7}$
d_{500}	$-3.41 \cdot 10^{-7}$	$-4.02 \cdot 10^{-7}$	$-4.05 \cdot 10^{-7}$	$-4.05 \cdot 10^{-7}$
d_{600}	$-2.37 \cdot 10^{-7}$	$-2.80 \cdot 10^{-7}$	$-2.82 \cdot 10^{-7}$	$-2.82 \cdot 10^{-7}$
d_{700}	$-1.74 \cdot 10^{-7}$	$-2.05 \cdot 10^{-7}$	$-2.07 \cdot 10^{-7}$	$-2.07 \cdot 10^{-7}$
d_{800}	$-1.33 \cdot 10^{-7}$	$-1.57 \cdot 10^{-7}$	$-1.59 \cdot 10^{-7}$	$-1.59 \cdot 10^{-7}$
d_{900}	$-1.05 \cdot 10^{-7}$	$-1.24 \cdot 10^{-7}$	$-1.25 \cdot 10^{-7}$	$-1.26 \cdot 10^{-7}$
d_{1000}	$-8.54 \cdot 10^{-8}$	$-1.01 \cdot 10^{-7}$	$-1.02 \cdot 10^{-7}$	$-1.02 \cdot 10^{-7}$

Теорема 3.3 *При выполнении неравенства*

$$s < \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{\pi} = 0.5611\ldots,$$

все коэффициенты $d_k^{L_s}$ *отрицательны, за исключением* $d_0^{L_s}$.

□ Воспользуемся формулой (3.4). Исследуем интеграл, входящий в формулу, на знак.

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos kt}{\operatorname{ch} st} dt = \sum_{\ell=0}^{k-1} \int\limits_{\frac{\pi\ell}{k}}^{\frac{\pi(\ell+1)}{k}} \frac{\cos kt}{\operatorname{ch} st} dt.$$

Замена: $kt = \pi\ell + \tau$, $dt = \frac{d\tau}{k}$. Получим

$$\frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{\ell}\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos\tau}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\ell s}{k} + \tau\frac{s}{k}\right)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{\ell}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\tau}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\ell\sigma}{k} + \tau\frac{s}{k}\right)} d\tau + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos\tau}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\ell\sigma}{k} + \tau\frac{s}{k}\right)} d\tau\right) =$$

В последнем интеграле сделаем замену $\tau' = \pi - \tau$, $\tau\frac{s}{k} = \pi\frac{s}{k} - \tau'\frac{s}{k}$. Отсюда

$$= \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{\ell}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\tau}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\ell s}{k} + \tau\frac{s}{k}\right)} d\tau - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\tau'}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(\ell+1)s}{k} - \tau'\frac{s}{k}\right)} d\tau'\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{\ell}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\tau \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\ell s}{k} + \tau\frac{s}{k}\right)} - \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(\ell+1)s}{k} - \tau\frac{s}{k}\right)}\right) d\tau.$$

Заметим, что если члены знакочередующегося ряда монотонно возрастают по абсолютной величине и начинаются с положительного, то этот ряд имеет знак $(-1)^{k-1}$, где k — число слагаемых.

Введём обозначения $\alpha = \frac{\pi\ell s}{k}$, $c = \frac{s}{k}$. Исследуем функцию

$$f(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha + c\tau)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha + \pi c - c\tau)}.$$

Заметим, что если производная положительна, то ряд будет иметь знак $(-1)^{k-1}$, а, значит, $d_k^{L_s}$ - отрицательны при $k \neq 0$.

Найдём $f'(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = \frac{-\operatorname{ch}^2(\alpha+\pi c - c\tau)\operatorname{sh}(\alpha + c\tau) + \operatorname{ch}^2(\alpha+s\tau)\operatorname{sh}(\alpha+\pi c - c\tau)}{\operatorname{ch}^2(\alpha+c\tau)\operatorname{ch}^2(\alpha+\pi c-c\tau)}.$$

Воспользовавшись соотношением $\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 + 1$ и сгруппировав полученные слагаемые, в итоге получим

$$f'(\alpha) = \frac{(\operatorname{sh}(\alpha+\pi c - c\tau) - \operatorname{sh}(\alpha+c\tau))(1-\operatorname{sh}(\alpha+c\tau)\cdot\operatorname{sh}(\alpha+\pi c-c\tau))}{\operatorname{ch}^2(\alpha+c\tau)\operatorname{ch}^2(\alpha+\pi c-c\tau)}.$$

Так как $\alpha+\pi c - c\tau \geq \alpha + c\tau$, то производная положительна при выполнении неравенства

$$\operatorname{sh}(\alpha+c\tau)\cdot\operatorname{sh}(\alpha+\pi c-c\tau) < 1,$$

или, что тоже самое,

$$\operatorname{ch}(2\alpha+\pi c) - \operatorname{ch}(2\tau c - \pi c) < 2.$$

Выражение $\operatorname{ch}(2\alpha+\pi c) - \operatorname{ch}(2\tau c + \pi c)$ достигает своего максимума при $\tau = \pi/2$.

$$\operatorname{ch}(2\alpha+\pi) < 3.$$

Из последнего неравенства, учитывая что $2\alpha + \pi s > 0$, получим

$$2\alpha + \pi c < \ln(3+2\sqrt{2}).$$

Сделаем обратные замены:

$$\frac{\pi(\ell+1)s}{k} < \ln(3+2\sqrt{2}).$$

Отсюда, учитывая $\ell = 0\dots k-1$, и следует утверждение теоремы. ■

3.4 Сравнение функций Лоренца и Гаусса

В этом разделе мы выясним, насколько одну из этих функций можно приблизить в $L_2(\mathbb{R})$ с помощью другой. Введём обозначения для двух функционалов

$$F^{\sigma}_{GL}(s,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}-\lambda\frac{s^2}{x^2+s^2}\right)^2dx$$

и

$$F^{s}_{LG}(\sigma,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{s^2}{x^2+s^2}-\lambda e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)^2dx.$$

Для первого функционала считаем зафиксированным параметр σ, для второго — параметр s.

Теорема 3.4 *Пусть* $b=\frac{s}{\sigma}$. *Минимум* $F^{\sigma}_{GL}(s,\lambda)$ *достигается при*

$$\lambda_1=2e^{\frac{b^2}{2}}\,Erfc\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

и равен

$$F^{\sigma}_{GL}(b,\lambda_1)=\sigma\left(\sqrt{\pi}-2\pi\,b\,e^{b^2}\,Erfc^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

минимум $F^{s}_{LG}(\sigma,\lambda)$ *достигается при*

$$\lambda_2=\sqrt{\pi}\,b\,e^{\frac{b^2}{2}}\,Erfc\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right),$$

и равен

$$F^{s}_{LG}(b,\lambda_2)=s\,\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\pi}\,b\,e^{b^2}\,Erfc^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

□ Разобъём функционал $F^{\sigma}_{GL}(s,\lambda)$ на сумму интегралов

$$F^{\sigma}_{GL}(s,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}dx-2\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}s^2}{x^2+s^2}dx+\lambda^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{s^4}{(x^2+s^2)^2}dx.$$

Вычислим первый интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}dx=\left\langle\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ z=\frac{x}{\sigma},\ x=z\sigma,\ dt=\sigma dz.\end{array}\right\rangle=$$

$$= \sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sigma\sqrt{\pi},$$

и третий

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s^4}{(s^2+x^2)^2} dx = \left\langle \begin{array}{c} \text{Замена:} \\ z = \frac{x}{s},\ x = zs,\ dx = sdz. \end{array} \right\rangle =$$

$$s \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \frac{s}{2} \left(\frac{z}{1+z^2} + \arctan z \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi s}{2}.$$

Преобразуем второй:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} s^2}{x^2+s^2} dx = \left\langle \begin{array}{l} \text{Замена:} \\ b = \frac{s}{\sigma} \quad z = \frac{x}{s},\ x = z\sigma,\ dt = \sigma dz. \end{array} \right\rangle =$$

$$= s \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{b^2 z^2}{2}\right)}{1+z^2} = \pi\, s\, e^{\frac{s^2}{2\sigma^2}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{s}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

В итоге получим

$$F_{GL}^{\sigma}(s,\lambda) = \sigma\sqrt{\pi} - 2\lambda\pi\, s\, e^{\frac{s^2}{2\sigma^2}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{s}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{\pi s}{2}.$$

Сделаем замену $b = \frac{s}{\sigma}$. Тогда

$$F_{GL}^{\sigma}(b,\lambda) = \sigma \left(\sqrt{\pi} - 2\pi\, b\, e^{\frac{b^2}{2}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) \lambda + \frac{\pi b}{2} \lambda^2 \right).$$

Заметим, что последняя функция по λ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Её минимум достигается при

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\, b\, e^{\frac{b^2}{2}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}{\pi b} = 2e^{\frac{b^2}{2}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Тогда минимум функции

$$F_{GL}^{\sigma}(b,\lambda_1) = \sigma \left(\sqrt{\pi} - 2\pi\, b\, e^{b^2} \operatorname{Erfc}^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

Если мы будем приближать функцию Лоренца функцией Гаусса, то ситуация немного изменится. Теперь требуется найти минимум функционала

$$F^s_{LG}(b,\lambda) = s\left(\sqrt{\pi}\lambda^2 - 2\pi\, b\, e^{\frac{b^2}{2}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\lambda + \frac{\pi b}{2}\right).$$

Её минимум достигается при

$$\lambda_2 = \sqrt{\pi}\, b\, e^{\frac{b^2}{2}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Тогда

$$F^s_{LG}(b,\lambda_2) = s\,\pi\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\pi}\, b\, e^{b^2}\,\mathrm{Erfc}^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

■

Замечание 3.1 *Минимум по переменной b для функционалов был найден численно с помощью программы "Mathematica". Он достигается в обоих случаях при одном и том же значении $b = 0.925368\ldots$:*

$$\min_{b,\lambda} F^\sigma_{GL}(b,\lambda) = \sigma\cdot 0.0494425\ldots,\ \ \min_{b,\lambda} F^s_{LG}(b,\lambda) = s\cdot 0.0438173\ldots.$$

Глава 4

Интерполяция с помощью конечной суммы из сдвигов функции Гаусса

Введение

Процедура обычной интерполяции (многочлены, синусы, косинусы) исследована достаточно подробно. В случае с разложением по целочисленным сдвигам функции Гаусса ситуация немного иная. Несмотря на популярность в последнее время этого метода, остаются малоизвестными и недостаточно изученными возникающие теоретические и вычислительные эффекты. Наличие формул для бесконечномерного варианта задачи ([51], [52]) не означает оптимальности решения для целей, связанных с вычислениями. Это связано как с большим порядком коэффициентов, возникающих при построении узловой функции ([9]), так и с использованием конечного числа функций. В связи с этим возникает интерес к изучению конечномерного варианта задачи. Вопросы о корректности этой задачи, использовании в теории фильтрации электрических сигналов изучались также в работах Ситника С.М. и Тимашова А.С. ([38]–[40]). В данной главе теоретически обоснована корректность задачи построения узловой функции из целочисленных сдвигов функции Гаусса, предложен метод, позволяющий расширить границы использования параметров этой функции.

4.1 Постановка конечномерной задачи

При решении задач интерполяции ключевым моментом является построение узловой функции. В случае, когда в качестве базиса выбираются целочисленные сдвиги функции Гаусса, нахождение соответствующей узловой функции сводится к решению линейной системы бесконечного числа уравнений с бесконечным числом неизвестных. В данной работе рассматривается конечномерный вариант этой задачи: узловая функция $g_n(x)$ ищется в виде конечной суммы

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \cdot q^{(x-k)^2},\ q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

а бесконечная система заменяется конечной, причем число уравнений может быть больше числа неизвестных

$$g_n(j) = \delta_{0j},\ j = -m, \ldots, 0, \ldots, m,\ m \geq n. \tag{4.1}$$

Перепишем систему уравнений (4.1) в матричной форме:

$$A \cdot d = y, \tag{4.2}$$

где соответствующие элементы матриц:

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2},\ y_j = \delta_{0j},\ i = -n, \ldots, 0, \ldots, n,\ j = -m, \ldots, 0, \ldots, m.$$

Для полученных при $m = n$ коэффициентов d_k узловую функцию запишем как $g_n^\sigma(x)$, а при $m > n$ $g_{n,m}^\sigma(x)$

Введём некоторые обозначения. Определитель Вандермонда размера n обозначим через $W(x_1, \ldots, x_n)$, определитель Вандермонда без l-ой строки и k-ого столбца — $W_{l,k}(x_1, \ldots, x_n)$. Возникающие здесь и далее определители и матрицы для наглядности будем, в случае необходимости, рассматривать порядка 5×5, поскольку их размеры принципиально не влияют на ход рассуждений.

$$W\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix},$$

$$W_{3,\,2}\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix}.$$

Как известно [9, стр. 273],

$$W_{l,\,k}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_{n-k}} \cdot \prod_{n \geq i > j \geq 1,\; i \neq l, j \neq l} \left(x_i - x_j\right), \tag{4.3}$$

где сумма берется по всем сочетаниям $n-k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ из набора $1, 2, \ldots, n$.

4.2 Уравнений и неизвестных равное число.

Покажем, что система (4.2) в случае равенства числа неизвестных и уравнений имеет единственное решение.

Теорема 4.1 *Матрица A при $m = n$ — невырождена, а её определитель*

$$|A| = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot W\left(q^{-2n}, \ldots 1, \ldots, q^{2n}\right). \tag{4.4}$$

□

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & q & q^4 & q^9 & q^{16} \\ q & 1 & q & q^4 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 1 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & q & 1 \end{vmatrix}$$

Элементы этого определителя можно разложить на множители

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2} = q^{i^2} \cdot q^{-2ij} \cdot q^{j^2}.$$

Значит, из i-той строки можно вынести q^{i^2}, а из j-ого столбца — q^{j^2}. Проведем эту операцию со всеми строками и столбцами:

$$|A| = q^4 \cdot q \cdot 1 \cdot q \cdot q^4 \cdot \begin{vmatrix} q^{-4} & q^{-3} & 1 & q^5 & q^{12} \\ 1 & q^{-1} & 1 & q^3 & q^8 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^8 & q^3 & 1 & q^{-1} & 1 \\ q^{12} & q^5 & 1 & q^{-3} & q^{-4} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & q^4 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & q^{-2} & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & q^{-4} & q^{-8} \end{vmatrix},$$

теперь элементами промежуточного определителя являются q^{-2ij}, осталось вынести из i–тых строк множители q^{2ni}, $i = -2n, \ldots, 2n$, произведение которых в силу симметрии равно 1:

$$q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & q^4 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & q^{-2} & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & q^{-4} & q^{-8} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^4 & q^8 & q^{12} & q^{16} \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 & q^8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^{-2} & q^{-4} & q^{-6} & q^{-8} \\ 1 & q^{-4} & q^{-8} & q^{-12} & q^{-16} \end{vmatrix} =$$

$$= q^{20} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^4 & \left(q^4\right)^2 & \left(q^4\right)^3 & \left(q^4\right)^4 \\ 1 & q^2 & \left(q^2\right)^2 & \left(q^2\right)^3 & \left(q^2\right)^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^{-2} & \left(q^{-2}\right)^2 & \left(q^{-2}\right)^3 & \left(q^{-2}\right)^4 \\ 1 & q^{-4} & \left(q^{-4}\right)^2 & \left(q^{-4}\right)^3 & \left(q^{-4}\right)^4 \end{vmatrix}.$$

В общем же случае результат проведенных преобразований выглядит так:

$$\det A = \left(\prod_{i=-n}^{n} q^{i^2}\right)^2 \cdot \left(\prod_{j=-n}^{n} q^{j^2}\right)^2 \cdot \prod_{i=-n}^{n} q^{2ni} \cdot W\left(q^{-2n}, \ldots 1, \ldots, q^{2n}\right) =$$

$$= q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot W\left(q^{-2n}, \ldots 1, \ldots, q^{2n}\right) = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot \prod_{i,j=-n, i\neq j}^{n} \left(q^{-2i} - q^{-2j}\right).$$

Отличие от 0 определителя Вандермонда гарантируется монотонностью функции $f(x) = \exp\left(-\frac{x}{2\sigma^2}\right)$. ■

Следствие 4.1 *Поскольку изучаемый в теореме 4.1 определитель при* $m > n$ *является наибольшим ненулевым минором матрицы* A *размера* $(2n+1) \times (2m+1)$, *то её ранг равен* $2n+1$.

Замечание 4.1 *Существование и единственность решения* (4.2) *показаны в [10]. Однако, в нашем доказательстве получен явный вид* (4.4).

Определение 4.1 *Назовём* n*–мерный вектор* x *— палиндромом, если* $x_i = x_{n+1-i}$, $i = 1, .., n$.

Теорема 4.2 *Пусть дана система уравнений*

$$A \cdot x = b, \tag{4.5}$$

где A *- невырожденная матрица размера* $n \times n$, *для элементов которой выполняется* $a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, *вектор* b *— палиндром, тогда и вектор* x *тоже палиндром.*

□ Так как матрица A — невырождена, то существует единственное решение x. Каждую i–тую строчку системы можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j = b_i.$$

Докажем, что вектор $y = (x_n, x_{n-1} \ldots, x_1)$ также является решением 4.5, а это в силу единственности решения и будет означать утверждение теоремы.

Действительно, для i–той строчки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-i,j} \cdot x_j = b_{n+1-i} = b_i. \blacksquare$$

Решение искалось методом Гаусса, для проверки вычислялись контрольные суммы $g_n(j)$, где $j \in \mathbb{Z}$. При этом, для повышения точности решения, воспользуемся Теоремой 4.2. Действительно,

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2} = q^{(n+1-i-(n+1-j))^2} = a_{n+1-i,n+1-j},$$

следовательно, $d_k = d_{-k}$. Благодаря этому предположению уменьшится как число уравнений (почти вдвое), так и разрыв в порядке между элементами матрицы. Очевидно, что разного подхода требует система с числом уравнений равным числу неизвестных и превосходящим его.

Когда $m = n$, система (4.1) по теореме 4.1 совместна. Единственное решение можно найти методом Гаусса. Границы использования σ, при которых счет имеет смысл, естественным образом, зависят от n. Как видно из таблицы 4.1 с практической точки зрения сомнительны вычисления уже при $\sigma > 3.0$. Вне отрезка интерполяции $g_n(x)$ сильно осциллирует. Кроме того, любопытен тот факт, что чем больше n, тем меньше растет контрольная сумма $g_n(j)$ за пределами отрезка интерполяции. Это иллюстрирует уже таблица 4.2.

Таблица 4.1: Контрольные суммы при $n = 12$

σ	1.0	2.0	3.0	4.0
$g_{12}^{\sigma}(0)$	1	1	0.99	52
$g_{12}^{\sigma}(4)$	$-1.7 \cdot 10^{-20}$	$9.9 \cdot 10^{-13}$	$-7.2 \cdot 10^{-5}$	38
$g_{12}^{\sigma}(8)$	$-1.6 \cdot 10^{-20}$	$-8.3 \cdot 10^{-14}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	13
$g_{12}^{\sigma}(12)$	$-7.9 \cdot 10^{-23}$	$-3.8 \cdot 10^{-14}$	10^{-6}	1.8
$g_{12}^{\sigma}(14)$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	63.3	$2.3 \cdot 10^{4}$	$1.8 \cdot 10^{5}$
$g_{12}^{\sigma}(16)$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	67	$2.9 \cdot 10^{5}$	$6.4 \cdot 10^{6}$

Таблица 4.2: Наибольшие значения в целых точках за пределами отрезка интерполяции.

$g_{20}^{1.0}(21)$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$g_{20}^{2.0}(23)$	41.7	$g_{20}^{3.0}(26)$	$2.9 \cdot 10^{7}$
$g_{40}^{1.0}(41)$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$g_{40}^{2.0}(43)$	3.57	$g_{40}^{3.0}(46)$	$4.6 \cdot 10^{6}$
$g_{60}^{1.0}(61)$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$g_{60}^{2.0}(63)$	0.29	$g_{60}^{3.0}(66)$	$1.6 \cdot 10^{6}$
$g_{80}^{1.0}(81)$	$5.1 \cdot 10^{-18}$	$g_{80}^{2.0}(83)$	0.02	$g_{80}^{3.0}(86)$	$4.7 \cdot 10^{5}$

Контрольные суммы можно оценить и аналитически. Для этого воспользуемся следующими элементарными утверждениями:

Теорема 4.3 *Для коэффициентов d_k верна формула:*

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_{k,\,n+1}\left(q^{-2n}, \dots, q^0, \dots, q^{2n}\right)}{W\left(q^{-2n}, \dots, q^0, \dots, q^{2n}\right)}. \tag{4.6}$$

□ Действительно, по правилу Крамера

$$d_k = \frac{\Delta_k}{|A|},$$

Проведя с Δ_k действия аналогичные действиям доказательства теоремы 4.1 , получим

$$\Delta_k = (-1)^{n+1+k+1+n} q^{-k^2} q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} W_k\left(q^{-2n}, \dots, q^0, \dots, q^{2n}\right),$$

отсюда

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_k\left(q^{-2n}, \dots, q^0, \dots, q^{2n}\right)}{W\left(q^{-2n}, \dots, q^0, \dots, q^{2n}\right)}.$$

Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & q & q^4 & 0 & q^{16} \\ q & 1 & q & 0 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & 1 & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 0 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & q^{-1} & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} =$$

$$q^{20} \cdot q^{-1} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^{8} \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^{4} & q^{2} & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^{8} & q^{4} & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot q^{-1} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^{8} \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^{4} & q^{2} & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^{8} & q^{4} & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} =$$

$$= -q^{20} \cdot q^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^{4} & \left(q^{4}\right)^{2} & \left(q^{4}\right)^{4} \\ 1 & q^{2} & \left(q^{2}\right)^{2} & \left(q^{2}\right)^{4} \\ 1 & q^{-2} & \left(q^{-2}\right)^{2} & \left(q^{-2}\right)^{4} \\ 1 & q^{-4} & \left(q^{-4}\right)^{2} & \left(q^{-4}\right)^{4} \end{vmatrix}.$$

■

Следствие 4.2 *С учётом* (4.3),

$$d_k = \frac{(-1)^k q^{-k^2} \sum q^{\alpha_1} q^{\alpha_2} \dots q^{\alpha_{2n+1-k}} \cdot}{\prod\limits_{i \neq k, i=-n}^{n} |q^k - q^i|},$$

где сумма берется по всем сочетаниям $2n+1-k$ *чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1-k}$ *из набора* $-n, -n+1, \dots, n$.

Следствие 4.3 *Контрольные суммы можно записать в виде отношения определителей:*

$$g_n^\sigma(j) = q^{j^2} \frac{W\left(q^{-2n} \dots q^{-2}, q^{-2j}, q^{2}, \dots q^{2n}\right)}{W\left(q^{-2n} \dots q^{0} \dots q^{2n}\right)}.$$

□

$$g_n^\sigma(j) = \sum_{k=-n}^{n} d_k\, q^{(k-j)^2} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} q^{(k-j)^2} (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_{k,\,n+1}\left(q^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}\right)}{W\left(q^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}\right)} =$$

$$= q^{j^2} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k q^{-2kj} \frac{W_{k,\,n+1}\left(q^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}\right)}{W\left(q^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}\right)},$$

Сумма $\sum\limits_{k=-n}^{n}(-1)^k q^{-2kj} W_{k,\,n+1}\left(q^{-2n},\dots,q^0,\dots,q^{2n}\right)$ представляет собой разложение по $n{+}1$ строке определителя $W\left(q^{-2n}\dots q^{-2},q^{-2j},q^2,\dots q^{2n}\right)$.
■

Следствие 4.4 *Учитывая следствие 3, получим*

$$\lim_{\sigma\to\infty}|g_n^\sigma(n+1)| = C_{2n+1}^n.$$

□ Действительно, $g_n^\sigma(n+1)$ с точностью до знака представляет собой определитель Вандермонда без $n+1$ строки. Тогда по (4.3)

$$|g_n^\sigma(n{+}1)| = \left| q^{(n+1)^2}\frac{W_{0,n+1}\left(q^{-2n}\dots q^0\dots q^{2n}\right),q^{2n+2}}{W\left(q^{-2n}\dots q^0\dots q^{2n}\right)}\right| = q^{(n+1)^2}\sum q^{\alpha_1}q^{\alpha_2}\dots q^{\alpha_n},$$

где сумма берется по всем сочетаниям n чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ из набора $-n,-n+1,\dots,n$. При фиксированном n сумма конечна, состоит из C_{2n+1}^n слагаемых, каждый из которых представляет собой q, в степени, зависящей от n. Так как $\lim_{\sigma\to\infty} q = 1$, то

$$\lim_{\sigma\to\infty}|g_n^\sigma(n+1)| = C_{2n+1}^n.$$

■

4.3 Уравнений больше неизвестных.

При $m > n$ система (4.1) становится несовместной, коэффициенты d_k вычисляются методом наименьших квадратов. Для этого уравнение (4.2) умножается на матрицу, сопряженную к A. Как известно, $A^* = \overline{A}^T$, элементы этой матрицы $a_{ij}^* = a_{ji} = \exp\left(-\frac{(j-i)^2}{2\sigma^2}\right)$. Получаем новую систему

$$C\cdot x = z, \tag{4.7}$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=-m}^{m}\exp\left(-\frac{(i-k)^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2}\right),$$

Таблица 4.3: Контрольные суммы при $n = 12$, $m = 13$, и при $m = 24$.

σ	1.0	2.0	3.0	5.0
$g^{\sigma}_{12,13}(0)$	0.99	0.97	0.82	0.62
$g^{\sigma}_{12,13}(6)$	$-6.7 \cdot 10^{-5}$	-0.06	0.05	0.06
$g^{\sigma}_{12,13}(12)$	$-1.1 \cdot 10^{-3}$	$-6.7 \cdot 10^{-3}$	0.03	1.8
$g^{\sigma}_{12,13}(14)$	$5.1 \cdot 10^{-4}$	1.6	7.9	-2.6
$g^{\sigma}_{12,13}(16)$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	3.5	89	-39
$g^{\sigma}_{12,24}(0)$	1.00	0.94	0.78	0.48
$g^{\sigma}_{12,24}(6)$	$-7.2 \cdot 10^{-5}$	-0.04	-0.04	-0.01
$g^{\sigma}_{12,24}(12)$	$-1.1 \cdot 10^{-3}$	-0.01	-0.03	0.01
$g^{\sigma}_{12,24}(14)$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	-0.01	0.03	0.08
$g^{\sigma}_{12,24}(16)$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	0.01	-0.03	-0.09

$$z_j = \exp\left(-\frac{j^2}{2\sigma^2}\right),\ i, j = -n \ldots, 0, \ldots n.$$

Решать систему (4.7) будем, учитывая теорему 4.2. Явление осцилляции за пределами отрезка интерполяции в данном случае может быть значительно уменьшено, хотя при этом возникает эффект регуляризации, при котором значение функции $g_{n,m}(x)$ в нулевой точке "растекается"по соседним узлам. Данные явления можно увидеть в таблице 4.3. Любопытно, что максимальное значение за пределами отрезка интерполяции узловая функция $g^{\sigma}_{n,m}$ при фиксированном σ принимает примерно на одном и том же расстоянии от концов отрезка.

Теорема 4.4 *При $m \to \infty$ элементы матрицы C примут вид*

$$c_{ij} = \begin{cases} q^{\frac{(i-j)^2}{2}} m_{\sigma}, \text{ при нечётном } (i+j), \\ q^{\frac{(i-j)^2}{2}} M_{\sigma}, \text{ при чётном } (i+j), \end{cases} \tag{4.8}$$

где $m_{\sigma} = \vartheta_3\left(\frac{1}{2}; q_{\sigma}\right)$, $M_{\sigma} = \vartheta_3\left(0; q_{\sigma}\right)$, $q_{\sigma} = \exp\left(-\pi\sigma\right)$.

□ Преобразованием Пуассона c_{ij} превращаются в тета-функцию

$$\lim_{m\to\infty} c_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(i-k)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i^2 - 2ik + k^2}{2\sigma^2} - \frac{j^2 - 2jk + k^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 - (i+j)k}{\sigma^2} - \frac{j^2 + i^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(k - \frac{i+j}{2})^2}{\sigma^2} - \frac{2j^2 + 2i^2 - (i+j)^2}{4\sigma^2}\right) =$$

с учётом (1.28)

$$= \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{4\sigma^2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(k - \frac{i+j}{2})^2}{\sigma^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{4\sigma^2}\right) \cdot \vartheta_3\left(\frac{\pi(i+j)}{2}; q_\sigma\right),$$

где $q_\sigma = \exp(-\pi\sigma)$.

В связи с периодичностью и четностью функция $\vartheta_3\left(\frac{i+j}{2\pi}; q_\sigma\right)$ принимает всего лишь два значения, причем это или минимальное значение $m_\sigma = \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}; q_\sigma\right)$ или максимальное $M_\sigma = \vartheta_3(0; q_\sigma)$.

Таким образом, матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} m_\sigma & M_\sigma \cdot q^{0.5} & m_\sigma \cdot q^2 & M_\sigma \cdot q^{4.5} & m_\sigma \cdot q^8 \\ M_\sigma \cdot q^{0.5} & m_\sigma & M_\sigma \cdot q^{0.5} & m_\sigma \cdot q^2 & M_\sigma \cdot q^{4.5} \\ m_\sigma \cdot q^2 & M_\sigma \cdot q^{0.5} & m_\sigma & M_\sigma \cdot q^{0.5} & m_\sigma \cdot q^2 \\ M_\sigma \cdot q^{4.5} & m_\sigma \cdot q^2 & M_\sigma \cdot q^{0.5} & m_\sigma & M_\sigma \cdot q^{0.5} \\ m_\sigma \cdot q^8 & M_\sigma \cdot q^{4.5} & m_\sigma \cdot q^2 & M_\sigma \cdot q^{0.5} & m_\sigma \end{pmatrix}.$$

■

Глава 5

О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний

Введение.

В данной главе рассматриваются линейные комбинации для неполных подсистем когерентных состояний. В общем случае формулы для констант неопределённости получаются достаточно громоздкими и мало пригодными для численной реализации. При дополнительных предположениях на коэффициенты линейной комбинации и параметры системы формулы существенно упрощаются. Но даже в этих случаях вычисление константы неопределённости оказывается нетривиальной задачей, что показывается на примере системы равномерных сдвигов функции Гаусса.

5.1 Обозначения, вспомогательные формулы.

Введём обозначения для когерентных состояний

$$f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x) = \exp\left(-\frac{(x - k\omega_1)^2}{2}\right) e^{i\,m\omega_2 x}$$

и системы равномерных сдвигов функции Гаусса

$$f_k(\sigma,x) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\,\sigma^2}\right).$$

В работе изучаются их линейные комбинации

$$F\left(\omega_1,\omega_2,x\right) = \sum_{k,m} c_{k,m} f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x), \tag{5.1}$$

$$G\left(\sigma,x\right) = \sum_{k} c_k f_k\left(\sigma,x\right). \tag{5.2}$$

Все индексы в суммах здесь и в дальнейшем меняются от $-\infty$ до $+\infty$. Нас будет интересовать случай, когда $G\left(\sigma,x\right)$ — узловая функция, то есть для нее выполнена система равенств

$$G\left(\sigma,m\right) = \delta_{0m},\ m \in \mathbb{Z},$$

где δ_{0m} – символ Кронекера.

Предполагается абсолютная сходимость рядов (5.1)–(5.2), чтобы можно было произвольным образом менять порядок суммирования и группировать слагаемые при перемножении рядов. Для этого достаточно, например, выполнения условий

$$c_{km} = O\left((k^2+m^2)^{-1-\varepsilon}\right),\ c_k = O\left(k^{-1-\varepsilon}\right),\ \varepsilon > 0.$$

При вычислении константы неопределённости возникают интегралы, значения которых выпишем заранее, воспользовавшись [34, стр. 367]:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2(x-r)^2}\, e^{i\,\alpha x}\, dx = e^{i\,\alpha r}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}, \tag{5.3}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\beta^2(x-r)^2}\, e^{i\,\alpha x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\, e^{i\,\alpha r}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}\left(r + \frac{i\alpha}{2\beta^2}\right), \tag{5.4}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta^2(x-r)^2}\, e^{i\,\alpha x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^5}\, e^{i\,\alpha r}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}\left(2\beta^2 - \left(\alpha - 2ir\beta^2\right)^2\right), \tag{5.5}$$

где параметры $\alpha,\beta,r \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

5.2 Константа неопределённости в общем случае.

Формула для константы неопределённости функции $F(\omega_1, \omega_2, x)$ получается слишком громоздкой, поэтому мы в виде лемм просто выпишем все её составные части.

Лемма 5.1 *Справедливы формулы*

$$\|F(\omega_1, \omega_2, x)\|^2 = \sqrt{\pi} \sum_{k,m,k',m'} c_{k,m}\overline{c}_{k',m'} \cdot \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right) \cdot \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right), \qquad (5.6)$$

$$\langle xF(\omega_1, \omega_2, x), F(\omega_1, \omega_2, x)\rangle = \sqrt{\pi} \sum_{k,m,k',m'} c_{k,m}\overline{c}_{k',m'} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{k+k'}{2}\omega_1 + i\frac{m-m'}{2}\omega_2\right), \qquad (5.7)$$

$$\langle x^2F(\omega_1, \omega_2, x), F(\omega_1, \omega_2, x)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{k,m,k',m'} c_{k,m}\overline{c}_{k',m'} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) \cdot \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right) \cdot \left(2 - \left((m-m')\,\omega_2 - i\,(k+k')\,\omega_1\right)^2\right). \qquad (5.8)$$

$\square$ Квадрат модуля функции имеет вид

$$|F(\omega_1, \omega_2, x)|^2 = \sum_{k,m,k',m'} c_{k,m}\overline{c}_{k',m'} f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x)\overline{f}_{k',m'}(\omega_1, \omega_2, x).$$

Преобразуем произведение функций в сумме

$$f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x) \cdot \overline{f}_{k'm'}(\omega_1, \omega_2, x) =$$

$$= \exp\left(-\frac{(x-k\omega_1)^2}{2}\right)\, e^{i\,m\omega_2 x}\cdot \exp\left(-\frac{(x-k'\omega_1)^2}{2}\right)\, e^{-i\,m'\omega_2 x} =$$

$$= \exp\left(-x^2 + k\omega_1 + k'\omega_1 - \frac{k^2\omega_1^2 + k'^2\omega_1^2}{2}\right)\cdot e^{i\,(m-m')\omega_2 x} =$$

$$= \exp\left(-\left(x - \frac{k+k'}{2}\omega_1\right)^2 + \frac{(k+k')^2\,\omega_1^2}{4} - \frac{k^2\omega_1^2 + k'^2\omega_1^2}{2}\right)\cdot e^{i\,(m-m')\omega_2},$$

что приводит в итоге к соотношению

$$f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x)\cdot \overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x) =$$

$$= \exp\left(-\left(x - \frac{k+k'}{2}\omega_1\right)^2 - \frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) e^{i\,(m-m')\omega_2 x}. \tag{5.9}$$

В формулах (5.3)–(5.5) положим $r = \frac{k+k'}{2}\omega_1$, $\beta = 1$, $\alpha = (m-m')\omega_2$. Тогда, используя (5.9), получим

$$\langle f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x), \overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)\rangle = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\cdot \exp\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}, \tag{5.10}$$

$$\langle x f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x), \overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)\rangle =$$

$$= \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot \exp\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\cdot\left(\frac{k+k'}{2}\omega_1 + i\frac{m-m'}{2}\omega_2\right), \tag{5.11}$$

$$\langle x^2 f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x), \overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\cdot$$

$$= \cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\cdot \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2 - \left((m-m')\,\omega_2 - i\,(k+k')\,\omega_1\right)^2\right). \tag{5.12}$$

Из формул (5.1), (5.10)–(5.12) следуют равенства (5.6)–(5.8).■

Лемма 5.2 *Справедливы формулы*

$$\left\|\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right)\right\|^2 =$$

$$= \sqrt{\pi}\sum_{k,m,k',m'} c_{-m,k}\overline{c}_{-m',k'}\, e^{i\,(m'k'-mk)\omega_1\omega_2}\cdot\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_2^2}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)\cdot\exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right), \qquad (5.13)$$

$$\langle\xi\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right),\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right)\rangle = \sqrt{\pi}\sum_{k,m,k',m'} c_{-m,k}\overline{c}_{-m',k'}\, e^{i\,(m'k'-mk)\omega_1\omega_2}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_2^2}{4}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\cdot\left(\frac{k+k'}{2}\omega_2+i\frac{m-m'}{2}\omega_1\right), \qquad (5.14)$$

$$\langle\xi^2\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right),\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k,m,k',m'} c_{-m,k}\overline{c}_{-m',k'}\, e^{i\,(m'k'-mk)\omega_1\omega_2}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_2^2}{4}\right)\cdot\exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)\cdot\left(2-\left(\left(m-m'\right)\omega_1-i\left(k+k'\right)\omega_2\right)^2\right). \qquad (5.15)$$

□ Сначала с помощью формулы (5.3), положив $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha=m\omega_2-\xi$, $r=k\omega_1$, найдём $\widehat{f}_{k,m}$:

$$\widehat{f}_{k,m}(\omega_1,\omega_2,\xi)=\exp\left(-\frac{\left(\xi-m\omega_2\right)^2}{2}\right)\cdot e^{i\,(m\omega_2-\xi)k\omega_1} =$$

$$= e^{i\,mk\omega_1\omega_2}\cdot\exp\left(-\frac{\left(\xi-m\omega_2\right)^2}{2}\right)\cdot e^{-i\,k\omega_1\xi}.$$

В итоге $\widehat{f}_{k,m}(\omega_1,\omega_2,\xi)=e^{i\,mk\omega_1\omega_2}\cdot f_{m,-k}(\omega_2,\omega_1,\xi)$,

$$\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right)=\sum_{k,m} c_{-m,k}e^{-i\,mk\omega_1\omega_2}\cdot f_{k,m}(\omega_2,\omega_1,\xi).$$

Отсюда, используя (5.10)–(5.12), получаем утверждение леммы 2. ■

5.3 Основной результат.

Для получения более содержательных результатов введём дополнительные условия на $F(\omega_1, \omega_2, x)$. Нас будет интересовать случай неполной системы когерентных состояний:

$$\omega_1 \omega_2 = 4\pi N, \;\; N \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

Относительно коэффициентов $c_{k,m}$ предположим, что

$$c_{k,m} = c_k^{\omega_1} \cdot c_m^{\omega_2}, \tag{5.17}$$

где ω_1, ω_2 — это верхние индексы, означающие зависимость констант от этих параметров. Кроме того, будем считать, что линейная комбинация $F(\omega_1, \omega_2, x)$ является чётной вещественной функцией. Отсюда коэффициенты $c_{k,m}$ вещественные и выполнено

$$c_k^{\omega_1} = c_{-k}^{\omega_1}, \;\; c_m^{\omega_2} = c_{-m}^{\omega_2}. \tag{5.18}$$

Данные предположения естественны, если мы строим с помощью линейной комбинации когерентных состояний узловую функцию или проводим ортогонализацию с сохранением структуры сдвигов. В случае выполнения условий (5.16)–(5.18) удается разделить частотную и временную составляющие линейной комбинации (5.1).

Преобразуем формулы (5.6)–(5.8)

$$\|F(\omega_1, \omega_2, x)\|^2 = \sqrt{\pi} \sum_{k,m,k',m'} c_{k,m} \bar{c}_{k',m'} \cdot \exp\left(i\, 2(k+k')(m-m')\pi N\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{(k-k')^2\, \omega_1^2}{4}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(m-m')^2\, \omega_2^2}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \exp\left(-\frac{(k-k')^2\, \omega_1^2}{4}\right) \cdot \sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} \exp\left(-\frac{(m-m')^2\, \omega_2^2}{4}\right).$$

Сделаем замену индексов $l = k - k'$, $k = l + k'$:

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) \sum_{k'} c_{l+k'}^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1}.$$

Введём новое обозначение

$$a_l^w = \sum_{k'} c_{l+k'}^w c_{k'}^w. \tag{5.19}$$

Тогда

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) a_l^{\omega_1}.$$

Аналогично преобразуем другой ряд

$$\sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) a_l^{\omega_2}.$$

Введём обозначение

$$A_w = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w,$$

или, что то же самое,

$$A_w = \sum_{k,k'} c_k^w c_{k'}^w \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,w^2}{4}\right). \tag{5.20}$$

Лемма 5.3 *Для коэффициентов a_l^w верно соотношение*

$$a_{-l}^w = a_l^w.$$

□ В формуле (5.19) сделаем замену индекса $n = l + k'$, получим

$$a_l^w = \sum_{k'} c_{l+k'}^w c_{k'}^w = \sum_n c_n^w c_{n-l}^w.$$

Теперь вместо n запишем k'

$$\sum_{k'} c_{k'-l}^w c_{k'}^w = a_{-l}^w.$$

■

Следствие 5.1 *Справедливы формулы:*

$$\sum_l l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w = 0,$$

$$\sum_{k,k'} c_k^w c_{k'}^w (k-k') \exp\left(-\frac{(k-k')^2 w^2}{4}\right) = 0. \tag{5.21}$$

В итоге

$$\|F(\omega_1,\omega_2,x)\|^2 = \sqrt{\pi}\cdot A_{\omega_1}\cdot A_{\omega_2}. \tag{5.22}$$

С помощью формул (5.16), (5.20) и (5.21) получим

$$\langle xF(\omega_1,\omega_2,x), F(\omega_1,\omega_2,x)\rangle =$$

$$= \sqrt{\pi}\cdot A_{\omega_2}\cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1}\left(\frac{k+k'}{2}\omega_1\right)\exp\left(-\frac{(k-k')^2\omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi}\cdot A_{\omega_2}\cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1}\left(\frac{k-k'}{2}\omega_1\right)\exp\left(-\frac{(k-k')^2\omega_1^2}{4}\right) +$$

$$+\sqrt{\pi}\omega_1\cdot A_{\omega_2}\cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} k' \exp\left(-\frac{(k-k')^2\omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi}\omega_1\cdot A_{\omega_2}\cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} k' \exp\left(-\frac{(k-k')^2\omega_1^2}{4}\right).$$

Сделав замену $l = k-k'$, $k = l+k'$ в последнем ряде, получим

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} k' \exp\left(-\frac{(k-k')^2\omega_1^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)\sum_{k'} k' c_{l+k'}^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1}.$$

Введём новые обозначения

$$b_l^w = \sum_{k'} k' c_{l+k'}^w c_{k'}^w, \tag{5.23}$$

$$B_w = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) b_l^w.$$

Лемма 5.4 *Для коэффициентов b_l^w верны соотношения*

$$b_l^w = -b_{-l}^w,\ b_l^w = b_{-l}^w - la_l^w.$$

□ В силу (5.18)

$$b_l^w = \sum_{k'} k' c_{l+k'}^w c_{k'}^w = \sum_{k'} k' c_{l+k'}^w c_{-k'}^w,$$

сделаем замену $k = -k'$. Тогда

$$b_l^w = -\sum_k k c_{l-k}^w c_k^w = -\sum_k k c_{k-l}^w c_k^w = -b_{-l}^w.$$

Теперь в формуле (5.23) сделаем замену индекса $n = l + k'$, получим

$$b_l^w = \sum_n (n-l) c_n^w c_{n-l}^w = \sum_n n c_n^w c_{n-l}^w - l \sum_n c_n^w c_{n-l}^w = b_{-l}^w - la_{-l}^w = b_{-l}^w - la_l^w.$$

■

Следствие 5.2

$$b_l^w = -\frac{l}{2} a_l^w.$$

Следствие 5.3 *Верно соотношение*

$$B_w = -\sum_l \frac{l}{2} \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w.$$

Следствие 5.4 *Верно соотношение*

$$B_w = 0. \tag{5.24}$$

В итоге

$$\langle xF(\omega_1, \omega_2, x), F(\omega_1, \omega_2, x)\rangle = 0. \tag{5.25}$$

В случае формулы (5.8) сначала распишем

$$\left((m-m')\omega_2 - i(k+k')\omega_1\right)^2 =$$

$$= (m-m')^2 \omega_2^2 - 2i(m-m')(k+k')\omega_1\omega_2 - (k+k')^2 \omega_1^2.$$

С помощью (5.16), (5.20) получим

$$\left\langle x^2 F\left(\omega_1,\omega_2,x\right), F\left(\omega_1,\omega_2,x\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_{\omega_1}\cdot A_{\omega_2} - \frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4} A_{\omega_1} \sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} \left(m-m'\right)^2 \exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4} A_{\omega_2} \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \left(k+k'\right)^2 \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_{\omega_1}\cdot A_{\omega_2} - \frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4} A_{\omega_1} \sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} \left(m-m'\right)^2 \exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4} A_{\omega_2} \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \left(k-k'\right)^2 \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) +$$

$$+\sqrt{\pi}\omega_1^2 A_{\omega_2} \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} kk' \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right).$$

Сделав замену $l = k-k'$, $k = l+k'$, преобразуем получившиеся ряды

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \left(k-k'\right)^2 \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \sum_l l^2 \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) \sum_{k'} c_{l+k'}^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} = \sum_l l^2 \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) a_l^{\omega_1}.$$

Аналогично,

$$\sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} \left(m-m'\right)^2 \exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2 \omega_2^2}{4}\right) = \sum_l l^2 \exp\left(-\frac{l^2\omega_2^2}{4}\right) a_l^{\omega_2}.$$

И последний ряд

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} kk' \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)\sum_{k'}(l+k')k'c_{l+k'}^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1} = \sum_l l\exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)b_l^{\omega_1}+$$

$$+\sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)\sum_{k'}{k'}^2c_{l+k'}^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}.$$

Введём обозначения

$$d_l^{\omega_1} = \sum_{k'}{k'}^2c_{l+k'}^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1},$$

$$D_{\omega_1} = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)d_l^{\omega_1},$$

$$C_w = \sum_l l^2\exp\left(-\frac{l^2w^2}{4}\right)a_l^w.$$

Тогда

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}\left(k-k'\right)^2\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right) = C_{\omega_1},$$

$$\sum_{m,m'} c_m^{\omega_2}c_{m'}^{\omega_2}\left(m-m'\right)^2\exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2\omega_2^2}{4}\right) = C_{\omega_2}.$$

Для вычисления последнего ряда воспользуемся (5.24)

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}kk'\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right) = -\frac{1}{2}C_{\omega_1}+D_{\omega_1}.$$

В итоге

$$\left\langle x^2F\left(\omega_1,\omega_2,x\right), F\left(\omega_1,\omega_2,x\right)\right\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}A_{\omega_1}\cdot A_{\omega_2} -$$

$$-\frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4}A_{\omega_1}\cdot C_{\omega_2} - \frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4}A_{\omega_2}\cdot C_{\omega_1} + \sqrt{\pi}\omega_1^2A_{\omega_2}\cdot D_{\omega_1}. \qquad (5.26)$$

Теперь найдём $\Delta^2\left(F\left(\omega_1,\omega_2\right)\right)$, используя (5.22), (5.25) и (5.26)

$$\Delta^2\left(F\left(\omega_1,\omega_2\right)\right) =$$

$$= \frac{\langle x^2 F(\omega_1, \omega_2, x), F(\omega_1, \omega_2, x) \rangle}{\|F(\omega_1, \omega_2, x)\|^2} - \frac{\langle x F(\omega_1, \omega_2, x), F(\omega_1, \omega_2, x) \rangle^2}{\|F(\omega_1, \omega_2, x)\|^4} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} A_{\omega_1} \cdot A_{\omega_2} - \frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4} A_{\omega_1} \cdot C_{\omega_2} - \frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4} A_{\omega_2} \cdot C_{\omega_1} + \sqrt{\pi}\omega_1^2 A_{\omega_2} \cdot D_{\omega_1}}{\sqrt{\pi} \cdot A_{\omega_1} \cdot A_{\omega_2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\omega_2^2}{4} \frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} - \frac{\omega_1^2}{4} \frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} + \omega_1^2 \frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}.$$

В итоге

$$\Delta^2 (F(\omega_1, \omega_2)) = \frac{1}{2} - \frac{\omega_2^2}{4} \frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} - \frac{\omega_1^2}{4} \frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} + \omega_1^2 \frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}.$$

Теперь найдём $\Delta^2 \left(\widehat{F}(\omega_1, \omega_2) \right)$. Из формул (5.17) и (5.18) следует, что

$$c_{-m,k} = c_m^{\omega_1} c_k^{\omega_2}.$$

Отсюда, из формулы (5.15) и соотношения (5.16) получим

$$\Delta^2 \left(\widehat{F}(\omega_1, \omega_2) \right) = \frac{1}{2} - \frac{\omega_1^2}{4} \frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} - \frac{\omega_2^2}{4} \frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} + \omega_2^2 \frac{D_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}.$$

Теорема 5.1 *Пусть выполнены условия* (5.16)–(5.18), *тогда верна формула*

$$u^2 (F(\omega_1, \omega_2)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_2^2}{4} \frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} - \frac{\omega_1^2}{4} \frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} + \omega_1^2 \frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_1^2}{4} \frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} - \frac{\omega_2^2}{4} \frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} + \omega_2^2 \frac{D_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} \right).$$

Следствие 5.5 *Пусть в условиях теоремы*

$$\omega_1 = \omega_2 = 2\sqrt{\pi N},$$

тогда верна формула

$$u \left(F \left(2\sqrt{\pi N}, 2\sqrt{\pi N} \right) \right) = \frac{1}{2} - 2\pi N \frac{C_{2\sqrt{\pi N}}}{A_{2\sqrt{\pi N}}} + 4\pi N \frac{D_{2\sqrt{\pi N}}}{A_{2\sqrt{\pi N}}}.$$

Следствие 5.6 *Пусть в условиях теоремы*

$$\omega_1 = \omega_2 = 2\sqrt{\pi},$$

тогда верна формула

$$u\left(F\left(2\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}\right)\right) = \frac{1}{2} - 4\pi \frac{\sum\limits_{l=1}^{\infty} l^2 e^{-l^2\pi} a_l^{2\sqrt{\pi}} - \left(d_0^{2\sqrt{\pi}} + 2\sum\limits_{l=1}^{\infty} e^{-l^2\pi} d_l^{2\sqrt{\pi}}\right)}{a_0^{2\sqrt{\pi}} + 2\sum\limits_{l=1}^{\infty} e^{-l^2\pi} a_l^{2\sqrt{\pi}}},$$

где

$$a_l^{2\sqrt{\pi}} = \sum_k c_{l+k}^{2\sqrt{\pi}} c_k^{2\sqrt{\pi}}, \quad d_l^{2\sqrt{\pi}} = \sum_k k^2 c_{l+k}^{2\sqrt{\pi}} c_k^{2\sqrt{\pi}}.$$

5.4 Константа неопределённости для $G(\sigma, x)$.

В этом разделе выводится формула для константы неопределённости линейной комбинации функций $f_k(\sigma, x)$, которые можно рассматривать в качестве подсистемы когерентных состояний. Кроме того, приводятся числовые значения этой величины для узловой функции, построенной из целочисленных сдвигов Гаусса.

Заметим, что

$$f_k(\sigma, x) = f_{k,0}\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{x}{\sigma}\right).$$

Тогда отсюда и из формулы (5.9) получим

$$f_k(\sigma, x) \cdot \overline{f}_m(\sigma, x) = \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\left(t - \frac{k+m}{2}\right)^2 - \frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right). \quad (5.27)$$

Квадрат модуля G имеет вид

$$|G(\sigma, x)|^2 = \sum_{k,m} c_k \overline{c}_m f_k(\sigma, x) f_m(\sigma, x).$$

В формулах (5.3)–(5.5) положим $r = \frac{k+m}{2}$, $\beta = \frac{1}{\sigma}$, $\alpha = 0$. Тогда, используя (5.27), получим

$$\langle f_k(\sigma, x), \overline{f}_m(\sigma, x)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma \exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle x f_k(\sigma,x), \overline{f}_m(\sigma,x)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma\,\frac{k+m}{2}\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle x^2 f_k(\sigma,x), \overline{f}_m(\sigma,x)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^3+(k+m)^2\sigma\right).$$

Соответственно,

$$\|G(\sigma,x)\|^2 = \sqrt{\pi}\sigma\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m \exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle xG(\sigma,x), \overline{G}(\sigma,x)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\frac{k+m}{2}\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle x^2G(\sigma,x), \overline{G}(\sigma,x)\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^3+(k+m)^2\sigma\right).$$

Преобразование Фурье функции $f_k(\sigma,x)$ вычислим с помощью формулы (5.3), положив $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}$, $\alpha = -\xi$, $r = k$:

$$\widehat{f_k}(\sigma,\xi) = \sigma\exp\left(-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}\right)\cdot e^{-i\,k\xi},$$

$$\widehat{f_k}(\sigma,\xi)\overline{\widehat{f}_m}(\sigma,\xi) = \sigma^2\exp\left(-\xi^2\sigma^2\right)\cdot e^{i\,(m-k)\xi}.$$

Теперь найдём $\widehat{G}(\sigma,\xi)$:

$$\widehat{G}(\sigma,\xi) = \sigma\sum_{k,m} c_k\exp\left(-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}\right)\cdot e^{-i\,k\xi}.$$

Квадрат её модуля

$$\left|\widehat{G}(\sigma,\xi)\right|^2 = \sigma^2\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\exp\left(-\xi^2\sigma^2\right)\cdot e^{i\,(m-k)\xi}. \tag{5.28}$$

В формулах (1.6)–(1.8) положим $r = 0$, $\beta = \sigma$, $\alpha = m-k$. Тогда, используя (5.28), получим

$$\left\|\widehat{G}(\sigma,\xi)\right\|^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle \xi\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle = i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\,(k-m)\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle \xi^2\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma^3}\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m \exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2-(k-m)^2\right).$$

Сделав замену индекса $l=k-m$ и введя новые обозначения

$$a_l = \sum_m c_{l+m}\overline{c}_m,\ b_l = \sum_m m c_{l+m}\overline{c}_m,\ d_l = \sum_m m^2 c_{l+m}\overline{c}_m,$$

получим

$$\left\|G\left(\sigma,x\right)\right\|^2 = \sqrt{\pi}\sigma\sum_l a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{5.29}$$

$$\langle xG\left(\sigma,x\right), \overline{G}\left(\sigma,x\right)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma\sum_l\left(a_l\frac{l}{2}+b_l\right)\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{5.30}$$

$$\langle x^2G\left(\sigma,x\right), \overline{G}\left(\sigma,x\right)\rangle =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\ \sum_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^3a_l+\left(l^2a_l+4lb_l+4d_l\right)\sigma\right). \tag{5.31}$$

$$\left\|\widehat{G}(\sigma,\xi)\right\|^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma\sum_l a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{5.32}$$

$$\langle \xi\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle = i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}\sum_l a_l l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{5.33}$$

$$\langle \xi^2\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma^3}\sum_l a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2-l^2\right). \tag{5.34}$$

Теорема 5.2 *Пусть выполнены условия $c_k \in \mathbb{R}$, $c_k = c_{-k}$. Тогда*

$$u\left(G\left(\sigma\right)\right) = \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sum\limits_l l^2a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sum\limits_l a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)} + \frac{\sum\limits_l d_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{\sum\limits_l a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{\sum\limits_l l^2a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sigma^4\sum\limits_l a_l\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□ Из соотношений (5.1) и (5.2) следует, что (5.30) и (5.33) равны нулю. Воспользовавшись (5.29)–(5.34), получим

$$u^2\left(G\left(\sigma\right)\right)=\frac{\sum\limits_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2 a_l+\left(4d_l-l^2 a_l\right)\right)}{4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2-l^2\right)}{4\,\sigma^4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}=$$

$$=\left(\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}+\frac{\sum\limits_l d_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sigma^4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right).\ \blacksquare$$

В таблице 5.1 приведены значения радиусов $\Delta\left(G(\sigma)\right)$, $\Delta\left(\widehat{G}(\sigma)\right)$ и констант неопределённости при разных значениях параметра σ.

Для $G\left(\sigma,x\right)$ коэффициенты известны ([51]) и вычисляются по формуле (1.41). Аспекты численной реализации нахождения $d_k^{G_\sigma}$ обсуждаются в [9]. Стоит отметить быстрый рост коэффициентов $d_k^{G_\sigma}$ при увеличении σ. Это обстоятельство не позволяет получить достоверные значения $u\left(G\left(\sigma\right)\right)$ при $\sigma\geq 2.0$.

Таблица 5.1: Константа неопределённости для узловой функции.

σ	$\Delta\left(G(\sigma)\right)$	$\Delta\left(\widehat{G}(\sigma)\right)$	$u\left(G\left(\sigma\right)\right)$
0.10	0.070711	7.071068	0.500000
0.20	0.141421	3.535535	0.500000
0.30	0.211635	2.363315	0.500160
0.40	0.272663	1.870185	0.509930
0.50	0.322888	1.717851	0.554673
0.60	0.373692	1.689765	0.631451
0.70	0.426811	1.696535	0.724099
0.80	0.481323	1.711056	0.823571
0.90	0.536669	1.725660	0.926108
1.00	0.592555	1.738413	1.030105
1.10	0.648813	1.749076	1.134823
1.20	0.705339	1.757878	1.239899
1.30	0.762064	1.765138	1.345149
1.40	0.818943	1.771152	1.450473
1.50	0.875943	1.776167	1.555821
1.60	0.933039	1.780378	1.661162
1.70	0.990213	1.783942	1.766482
1.80	1.047452	1.786978	1.871774
1.90	1.104745	1.789579	1.977047
2.00	1.165617	1.791853	2.088614

Заключение

Основные результаты диссертации.

1. Получены формулы для вычисления константы неопределённости линейных комбинаций функций Эрмита. В случае двух функций минимум константы неопределённости найден аналитически, в случае трёх функций - численно.

2. Доказаны знакочередование и монотонность коэффициентов с ростом индекса по абсолютной величине узловой функции, построенной с помощью целочисленных сдвигов функции Гаусса, а также нарушение этих свойств для узловой функции, построенной с помощью целочисленных сдвигов функции Лоренца.

3. Для случая узловой функции, построенной с помощью конечных сумм сдвигов функции Гаусса, предложен способ уменьшения амплитуды колебаний за пределами отрезка интерполяции. .

4. Получены формулы для констант неопределённости линейных комбинаций когерентных состояний в общем случае и проведено упрощение этих формул при дополнительных предположениях на коэффициенты линейных комбинаций.

Литература

[1] Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н.К. Бари. // Уч. зап. МГУ. — 1951. — Т. 4, № 148. — С. 69–107.

[2] Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. — М. : Физматлит, 1961. — 937 с.

[3] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. // Учеб. пособие. — М. : Наука, Физматлит, 1987. — 600 с.

[4] Боголюбов Н. Н. Введение в квантовую статистическую механику / Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.). — М.: Наука, 1984. — 384 с.

[5] Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов / Р. Глаубер. — Курс лекций М. : МИР, 1966. 178 с.

[6] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. — М. : УРСС, 2005. 448 с.

[7] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. — Ижевск : НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, 2001. 464 с.

[8] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. — М. : Мир, 2001. — 430 с.

[9] Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций / М.В. Журавлев, Л.А. Минин, С.М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009. №13 (68). вып. 17/2. С. 89–99.

[10] Карлин С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден — М.: Наука. — 1976. — 568 с.

[11] Киселев Е.А. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов / Е.А. Киселев, Л.А. Минин, И.Я. Новиков, С.М. Ситник // Математические заметки. 2014. Т. 96 вып. 2. С. 239–250.

[12] Киселев Е.А. О построении биортогональных систем подпространств, порожденных целочисленными сдвигами одной функции / Е.А. Киселев, Л.А. Минин, И.Я. Новиков // Математические заметки. 2014. Т. 96 вып. 3. С. 468–470.

[13] Киселев Е.А., Минин Л.А. Об устойчивости разложения по дискретным системам когерентных состояний / Киселев Е.А., Минин Л.А. // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика, 2014, № 3. — С. 21-28.

[14] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа (изд. пятое) / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука. — 1981. — 544 с.

[15] Кострикин А.И. Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. — М. : Наука, 1986. — 304 с.

[16] Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Кремер Н.Ш. — М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.

[17] Курант Р. Методы математической физики, т.1. / Р.Курант, Д. Гильберт — М.: Гостехиздат, 1951. — 538 с.

[18] Лебедева Е.А. Минимизация константы неопределенности семейства всплесков Мейера / Е.А. Лебедева // Матем. заметки. 2007. Т. 81 вып. 4.— С. 553–560

[19] Лебедева Е.А. Всплески Мейера с наименьшей константой неопределенности / Е. А. Лебедева, В. Ю. Протасов // Матем. заметки. 2008. Т. 84 вып. 5. — С. 732–740

[20] Лебедева Е.А. Экспоненциально убывающие всплески, имеющие равномерно убывающие константы неопределенности по параметру, определяющему гладкость / Е.А. Лебедева // Сибирский мат. жур. — 2008. — Т. 49, № 3.— С. 574–591

[21] Лебедева Е.А. О принципе неопределенности для всплеск-функций Мейера / Е.А. Лебедева // Исследования по линейным операторам и теории функций. 39, Зап. научн. сем. ПОМИ, 389, ПОМИ, СПб., 2011. — С. 131–142

[22] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов / С.Малла — М.: Мир, 2005. — 671 с.

[23] Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях / Д. Мамфорд. — М. : Мир, 1988. — 448 с.

[24] Мандель Л. Оптическая когерентность и квантовая оптика / Л. Мандель, Э. Вольф. — М.: Физматлит, 2000. — 896 С.

[25] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер. — М. : Мир, 1990. — 288 с.

[26] Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.

[27] Нейман И. Математические основы квантовой механики / И. Нейман — М.: Наука, 1964. — 367 с.

[28] Новиков И.Я. Основные конструкции всплесков / И.Я. Новиков, С.Б. Стечкин // Фундаментальная и прикладная математика. — 1997. — Т. 3, № 4. — С. 999–1028.

[29] Новиков И.Я. Основы теории всплесков / И.Я. Новиков, С.Б. Стечкин // Успехи матем. наук. — 1998. — Т. 53, № 6. — С. 53–128.

[30] Новиков И.Я. Теория всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина // М.: Физматлит, 2005. — 616 с.

[31] Переломов А.М. Замечание о полноте системы когерентных состояний / А.М. Переломов // ТМФ. — 1971. — Т. 6, № 2. — С. 213–224.

[32] Переломов А.М. Когерентные состояния и тэта-функции / А.М. Переломов // Функ. анал. и его приложения. — 1972. — Т. 6, вып. 4. — С. 47–57.

[33] Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А.М. Переломов — М. : Наука, 1987. — 272 с.

[34] Прудников А.П. Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции. 2-е изд., исправ. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев // М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 800 с.

[35] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И.В. — М.: Наука, 1966. — 384 С.

[36] Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику / В.С. Рябенький — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 296 с.

[37] Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. — М. : Наука, 1978. — 592 с.

[38] Ситник С .М. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции / С.М. Ситник,

А.С. Тимашов // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика. — 2013 . — 32 . — С . 184–186.

[39] Ситник С.М. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусс / С.М. Ситник, А.С. Тимашов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. — 2013 . — 2;56 . — С .90–94.

[40] Ситник С.М. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов / С.М. Ситник, А.С. Тимашов // // Вестник Воронежского института МВД России. — 2014. — 2. — С . 163–171 .

[41] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. – М.: Наука, 1979. — 415 с.

[42] Треногин В.А. Функциональный анализ: Учебник / В.А. Треногин. — 3-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2002. — 488 с.

[43] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного Анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон — М., ГИФМЛ, 1963. — 516 с.

[44] Чуи Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи — М.: Мир, 2001. — 412 с.

[45] Balian R. Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique / R. Balian // C. R. Acad. Sci. Paris, 1981, 292, Serie 2. — P. 1357–1361

[46] Bargmann V. On the completeness of coherent states / V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J. R. Klauder. // Rep. Math. Phys., 1971, 2. — P. 221–228.

[47] Bourgain J. A Remark on the Uncertainty Principle for Hilbertian Basis / J. Bourgain. // Journal of Functional Analysis, 1988, 79. — P. 136–143.

[48] Fischer B., Prestin J. Wavelets based on orthogonal polynomials / B. Fisher, J. Prestin // Mathematics of computation. — 1997. — V. 66, №220 — P. 1593–1618.

[49] Lebedeva E. A. Quasispline wavelets and uncertainty constants / E.A. Lebedeva // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 2011. — V. 30, №2, P. 214–230

[50] Low F. Complete sets of wave packets / F. Low // in A Passion for Physics - Essays in Honor of Geoffrey Chew, World Scientific, Singapore, 1985. — P. 17–22.

[51] Maz'ya V. On approximate approximations using Gaussian kernels / V. Maz'ya, G. Schmidt // IMA J. Num. Anal. 1996. V. 16. — P. 13–29.

[52] Maz'ya V. Approximate approximations / V. Maz'ya, G. Schmidt — AMS Mathematical Surveys and Monographs. — 2007. V. 141. — 350 p.

[53] Ушаков С.Н. О константах неопределённости для линейных комбинаций функций Эрмита / С.Н. Ушаков // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы ВЗМШ (доп. выпуск) — 2011. — С. 38–39.

[54] Ушаков С.Н. О константах неопределенности для линейных комбинаций функций Эрмита /С.Н. Ушаков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика, 2012, № 1. — С. 207–212.

[55] Минин Л.А. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса / Л.А. Минин, С.М., Ситник, С.Н. Ушаков // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физика. Математика, 2014, № 12 (183), вып. 35. — С. 214–217.

[56] Журавлев М.А. О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний / М.А. Жу-

равлев, И.Я. Новиков, С.Н. Ушаков // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014, № 7(118) — С. 17–31.

[57] Ушаков С.Н. О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний / С.Н. Ушаков // VIII Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения": Тезисы докладов. — 2014. — С. 36.

[58] Ушаков С.Н. Интерполяция с помощью конечной суммы из сдвигов функции Гаусса. / С.Н. Ушаков //Международная конференция: "Математическое и компьютерное моделирование": Материалы Первой Международной научно–практической конференции. — 2014. — С. 12–13.

[59] Ситник С.М. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции / С.М. Ситник, А.С. Тимашов, С.Н. Ушаков // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физика. Математика. Физика, 2015, № 17 (214), вып. 40. — С. 130–142.