Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

На правах рукописи

Бунеев
Сергей Сергеевич

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Научный руководитель:
доктор физико – математических
наук, профессор Баев А.Д.

Елец- 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы диссертации. Под процессом с вырождением понимается модель, для которой граница области значительно влияет на те процессы, которые происходят внутри области. В таких случаях на границе области возможно изменение, как типа уравнения, так и его порядка. Подобные уравнения появляются при исследовании математических моделей разнообразных физических процессов. К примеру, такого рода уравнения появляются при исследовании стационарных процессов конвекции-диффузии в неоднородной анизотропной среде, для которой характерным является стремление коэффициента диффузии к нулю при приближении к границе. Подобные уравнениям возникают, в частности, при математическом моделировании процессов фильтраций идеальных баротропных газов в неоднородных анизотропных пористых средах (см. [16]), процесса фильтрации двухфазной жидкости (см. [33], [22]), например, процесса вытеснения нефти водой из пористых сред [31]. Такие уравнения появляются при математическом моделировании процессов распространения примесей в жидкокристаллических растворах, находящихся во внешнем электрическом поле (см. [28]), при расчетах линейного стационарного магнитного осесимметричного поля в неоднородной анизотропной среде (см. [30]). Такие уравнения являются обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии (см.[31]). Известно, что нахождение решения граничной задачи для уравнения эллиптического типа эквивалентно минимизации некоторого функционала. Из теории управления известно, что задаче о минимизации некоторого функционала соответствует задача об оптимальном управлении. Для вырождающегося уравнения эллиптического типа соответствующим является вырожденное или особое оптимальное управление (см. [32] – [33]).

Краевые задачи для уравнений с вырождением относят к «неклассическим» задачам математической физики. Одной из основных трудностей, которая возникает в теории эллиптических уравнений с вырождением, является влияние младших членов уравнений на коэрцитивную разрешимость краевых задач и их постановку.

Фундаментальные результаты в изучении краевых задах для эллиптических уравнений второго порядка с вырождением получены М. В. Келдышем [2]. Результаты, полученные им, были развиты и обобщены О. А. Олейник [1] и др. Обобщенные решения для эллиптических уравнений с вырождением второго порядка были получены впервые в работах С. Г. Михлина [5] и М. И. Вишика [4]. Затем появляется ряд работ, где методами, которые близки к методу М. И. Вишика, были изучены уравнения второго порядка с вырождением. Довольно полная библиография этих работ содержится в книгах М. М. Смирнова [3], О. А. Олейник, Е. В. Радкевича [6]. В работах В. А. Кондратьева [8], [9], В. А. Кондратьева, Е. М. Ландиса [9], Ю. В. Егоровыа, В. А. Кондратьева, О. А. Олейник [10] были получены основополагающие результаты по исследованию асимптотических свойств решений линейных и нелинейных уравнений и систем эллиптического и параболического типа. В работе О. А. Олейник [11] был использован метод "эллиптической регуляризации", а впоследствии этот метод применили Дж. Кон и Л. Ниренберг [12] при изучении эллиптико - параболических уравнений второго порядка. Для уравнений эллиптического типа второго порядка с вырождением коэрцитивная разрешимость общих краевых задач была установлена В. П. Глушко [13], [14] в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной выпуклой области была исследована в работе В. А. Рукавишникова, А. Г. Ереклинцева [15], а в работе В. А. Рукавишникова [17] была исследована задача Дирихле с несогласованным вырождением. С. Н. Антонцев, С. И. Шмарев в работе [16] рассмотрели задачу Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с неоднородным анизотропным вырождением в области.

Впоследствии результаты для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка были получены Х. Леопольдом [21], С. З. Левендорским [20], С. А. Исхоковым [19]. Следует отметить, что существенное условие работы [20] состоит в том, что основная весовая функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{\infty}(R^1)$.

Задачей настоящей диссертационной работы является доказательство коэрцитивных априорных оценок и теорем существования и единственности решений краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащих невырожденную производную третьего порядка по одной из переменных.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [18].

Исследование краевых задач для эллиптических уравнений с вырождением актуально ввиду того, что такого рода задачи могут быть использованы при моделировании различных стационарных процессов с вырождением.

Цель работы. Цель работы состоит в следующем:

1. Доказательство априорных оценок решений двух классов краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка
2. Доказательство теорем о существовании и единственности решений для этих классов краевых задач

Научная новизна. Получены следующие новые результаты:

1. Исследованы новые классы краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка.

2. Получены коэрцитивные априорные оценки решений новых классов краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащих невырожденную производную третьего порядка по одной из переменных.

3. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений новых классов краевых задач в полосе для вырождающихся

эллиптических уравнений высокого порядка, содержащих невырожденную производную третьего порядка по одной из переменных.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при развитии теории краевых задач для вырождающихся эллиптических и параболических уравнений, а также при исследовании математических моделей процессов с вырождением.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных научных конференциях: «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж 2013 г., 2015 г.), «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна» (Воронеж 2012 г., 2014 г.); «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2012 - 2015 г.); «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2011 г., 2012 г.); в школе молодых ученых Липецкой области «Школа молодых ученых по проблемам гуманитарных, естественных, технических наук» (г. Елец 2014 г), на научных семинарах ВГУ (рук. проф. А.Д. Баев) а также на научных сессиях Воронежского государственного университета и Елецкого государственного университета.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [20]. Из совместных публикаций в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору. Работы [4], [6], [7], [10], [12] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 55 наименований. Общий объем диссертации 152 страниц.

Краткое содержание диссертации. Во введении содержится обзор литературы по теме диссертации, Формулируются постановки задач, а также основные определения и утверждения.

В главе 1 устанавливаются коэрцитивные априорные оценки в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева решений одного класса краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащих невырожденную производную третьего порядка.

В главе 2 доказывается теорема о существовании и единственности решения для рассмотренной в главе 1 краевой задачи.

В третьей главе устанавливаются априорные оценки решений другого класса краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащих невырожденную производную третьего порядка.

В главе 4 доказывается теорема о существовании и единственности решения краевой задачи, рассмотренной в главе 3.

Перейдем к более детальному изложению результатов, полученных в диссертации.

В первой главе устанавливаются априорные оценки решений одного класса краевых задач в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, содержащего невырожденную производную третьего порядка по переменной t.

В полосе $R_d^n = \left\{ x \in R^{n-1},\, 0 < t < d \right\}$, где $d > 0$ - некоторое число,

рассмотрим уравнение

$$A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) v = L_{2m}\left(D_x, D_{\alpha,t}\right) v + b\partial_t^3 v$, $L_{2m}\left(D_x, D_{\alpha,t}\right) = \sum\limits_{|\tau| + j \le 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$,

$a_{\tau j}, b$ - комплексные числа, $\operatorname{Im} \bar{b} a_{0,2m} = 0$.

Здесь $D_{\alpha,t} = i\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t=0$ полосы R_d^n задается условие

$$B(D_x)v\big|_{t=0} = \sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau D_x^\tau v\big|_{t=0} = G(x) \qquad (2)$$

коэффициенты b_τ - комплексные.

Условия на границе $t=d$ полосы R_d^n задаются условия

$$v\big|_{t=d} = \partial_t v\big|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1} v\big|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Предполагается выполнение следующих условий.

Условие 1. Для любых $(\xi,\eta)\in R^n$ выполняется неравенство $\operatorname{Re}\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \ge c\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^m$, с константой $c>0$ не зависящей от (ξ,η).

Условие 2. Для $s \ge 2m+m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, при этом $\alpha(0)=\alpha'(0)=0,\ \alpha(t)>0$ при $t>0$.

Условие 3. $B(\xi) \ne 0$ для любых $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим следующее интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

которое определено первоначально на функциях $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$, где $C_0^\infty(R_+^1)$ - пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R_+^1. Это преобразование было введено в работах В.П. Глушко и А.Д. Баева. Преобразование F_α и преобразование Фурье

$F_{\tau\to\eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau,\ \eta\in R^1$ связаны следующим соотношением

$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$ где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \dfrac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\left\|F_\alpha[u](\eta)\right\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\left\|u\right\|_{L_2(R^1_+)},$$

что дает возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также определить преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье.

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства

$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,...,$ где $D_{\alpha,t} = \dfrac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}.$ Таким образом, преобразование F_α переводит оператор весового дифференцирования $D_{\alpha,t}$ в оператор умножения на двойственную переменную η.

Введем пространства, в которых будут изучаться краевые задачи.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R^n_d\right)$ ($s \geq 0$ - целое число) состоит из таких функций $v(x,t) \in L_2\left(R^n_d\right)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} = \left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{3s}{2m}\right]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha \left[\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s-\frac{2m}{3}l\right)} F_\alpha F_{x\to\xi}\left[\partial^l_t v(x,t)\right]\right]\right\|^2_{L_2\left(R^n_d\right)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

Здесь через $\left[\dfrac{3s}{2m}\right]$ обозначена целая часть $\dfrac{3s}{2m}$.

Если s - натуральное число такое, что число $\dfrac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}=\left\{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l\le s}\left\|D_x^{\tau}D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^l v\right\|_{L_2(R_d^n)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_s\left(R^{n-1}\right)$ (s -действительное число) состоит из таких функций $u\left(x\right)\in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_s=\left\|F_{\xi\to x}^{-1}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Если s - натуральное число, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_s=\left\{\sum_{|\tau|\le s}\left\|D_x^{\tau}u(x)\right\|_{L_2(R^{n-1})}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Наряду с пространствами $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$, $H_s\left(R^{n-1}\right)$ введем пространства $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$, $H_{s,k}\left(R^{n-1}\right)$, где $k\ge 0$ - целое число.

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$ ($s\ge 0\,,k\ge 0$ - целые числа) состоит из таких функций $v\left(x,t\right)\in L_2\left(R_d^n\right)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}=\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{3s}{2m}\right]}\left\|(1+|x|)^k F_{\xi\to x}^{-1}F_{\alpha}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s-\frac{2m}{3}l\right)}F_{\alpha}F_{x\to\xi}\left[\partial_t^l v\left(x,t\right)\right]\right]\right\|_{L_2\left(R_d^n\right)}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 4. Пространство $H_{s,k}\left(R^{n-1}\right)$ ($s,\,k$ -действительные числа) состоит из таких функций $u\left(x\right)\in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{s,k}=\left\|(1+|x|)^k F_{\xi\to x}^{-1}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

В главе 1 доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s\ge\max\left\{2m,\,m^*+\frac{m}{3}\right\}$ - целое число, $m\ge 3$ и выполнены условия 1- 3. Тогда для любого решения $v\left(x,t\right)$ задачи (1) - (3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} \le c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}} + \left\|Bv|_{t=0}\right\|_{s-m^*-\frac{m}{3}} \right),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от v.

Теорема 2. Пусть $s \ge \max\left\{2m,\, m^* + \dfrac{m}{3}\right\},\, m \ge 3,\, k \ge 0$ - целые числа. Пусть выполнены условия 1 - 3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1) - (3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k} \le c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},k} + \left\|Bv|_{t=0}\right\|_{s-m^*-\frac{m}{3},k} \right),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от v.

В главе 2 доказываются теоремы о существовании и единственности решения задачи (1) - (3).

Теорема 3. Пусть $s \ge \max\left\{2m, m^* + \dfrac{m}{3}\right\}$- целое число, $m \ge 3$ и выполнены условия 1 - 3. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$, $G(x) \in H_{s-m^*-\frac{m}{3}}\left(R^{n-1}\right)$. Тогда существует единственное решение $v(x,t)$ задачи (1) - (3) принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$.

Теорема 4. Пусть $s \ge \max\left\{2m,\, m^* + \dfrac{m}{3}\right\},\, m \ge 3,\, k \ge 0$ - целые числа, Пусть выполнены условия 1 - 3. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$, $G(x) \in H_{s-m^*-\frac{m}{3},k}\left(R^{n-1}\right)$. Тогда существует единственное решение $v(x,t)$ задачи (1) - (3) принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$.

В главе 3 доказываются априорные оценки решений другого класса краевых задач в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе $t=0$ в уравнение третьего порядка по переменной t. Дифференциальное уравнение отличается от уравнения, рассмотренного в главах 1 – 2 тем, что перед производной $\frac{\partial^3}{\partial t^3}$ изменен знак на противоположный. Это привело к тому, что на границе $t=0$ потребовалось ставить не одно, а два граничных условия.

В полосе R_d^n рассмотрим уравнение

$$A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)v(x,t) = F(x,t), \tag{4}$$

где $A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)v = L_{2m}\left(D_x, D_{\alpha,t}\right)v - b\partial_t^3 v$, $L_{2m}\left(D_x, D_{\alpha,t}\right) = \sum\limits_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$,

b, $a_{\tau j}$ - комплексные числа, $Im\bar{b}a_{02m} = 0$.

На границе $t=0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j\left(D_x\right)v\big|_{t=0} = \sum_{|\tau|\le m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1} v\big|_{t=0} = G_j(x),\ j=1,2 \tag{5}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t=d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v\big|_{t=d} = \partial_t v\big|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1} v\big|_{t=d} = 0. \tag{6}$$

Предполагается выполнение следующих условий.

Условие 4. Для любых $(\xi,\eta)\in R^n$ выполняется неравенство $\mathrm{Re}\,\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \ge c\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^m$, с постоянной $c>0$ не зависящей от (ξ,η).

Условие 5. Для некоторого $s\ge 2m+\max(m_1,m_2)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0)=\alpha'(0)=0,\ \alpha(t)>0$ при $t>0$.

Условие 6. $B_j(\xi)\neq 0,\ j=1,2$ при всех $\xi\in R^{n-1}$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. Пусть $s \geq \max\left\{2m, \max\left(m_1, m_2 + \frac{2m}{3}\right) + \frac{m}{3}\right\}$ - целое число, $m \geq 3$ и выполнены условия 4 - 6. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (4) - (6), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,m} \leq c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,m} + \sum_{j=1}^{2} \left\| B_j\, v|_{t=0} \right\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{3}-\frac{m}{3}} \right), \tag{7}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v.

Теорема 6. Пусть $s \geq \max\left\{2m, m^* + \frac{m}{3}\right\}, m \geq 3, k \geq 0$ - целые числа. Пусть выполнены условия 4 - 6. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1) - (3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k} \leq c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},k} + \sum_{j=1}^{2} \left\| B_j\, v|_{t=0} \right\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{3}-\frac{m}{3},k} \right), \tag{8}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v.

В главе 4 доказывается теорема о существовании и единственности решений краевой задачи (4) - (6). Доказаны следующие теоремы.

Теорема 7. При выполнении условий теоремы 5 для любых $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{3}-\frac{m}{3}}\left(R^{n-1}\right)$, $(j = 1;2)$ существует единственное решение задачи (4) - (6), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$.

Теорема 8. При выполнении условий теоремы 6 для любых $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{3}-\frac{m}{3},k}\left(R^{n-1}\right)$, $(j = 1;2)$ существует единственное решение задачи (4) - (6), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$.

ГЛАВА 1

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)-(3)

1.1. Вспомогательные оценки

Применим преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ к уравнению (1) и условиям (2) - (3). Получим задачу, которая будет зависеть от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u(\xi,t) = L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)u(\xi,t) + b\partial_t^3 u(\xi,t) = f(\xi,t), \tag{1.1.1}$$

$$\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau u(\xi,t)|_{t=0} = g(\xi), \tag{1.1.2}$$

$$u(\xi,t)|_{t=d} = \partial_t u(\xi,t)|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1} u(\xi,t)|_{t=d} = 0. \tag{1.1.3}$$

Здесь $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]$, $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}\left[F(x,t)\right]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}\left[G(x)\right]$.

По аналогии с определенными выше пространствами вводятся пространства $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$.

Определение 1.2. Будем говорить, что функция $u(t) \in L_2(0;d)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ ($s \ge 0$ - целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} = \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{3}j\le s} \left\| F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha\left[\partial_t^j u\right]\right]\right\|_{L_2(0;d)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Утверждение теоремы 1 следует из теоремы:

Теорема 1.1 Пусть $s \ge \max\left\{2m, m^* + \dfrac{m}{3}\right\}$ - целое число, $m \ge 3$ - целое число. Пусть $f(\xi,t) \in \widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ и выполнены условия 1-3. Тогда для любого решения $u(\xi,t)$ задачи (1.1.1) - (1.1.3), принадлежащего при всех $\xi \in R^{n-1}$ пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, справедлива априорная оценка

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\| f \|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m^*-\frac{m}{3}} |g(\xi)|^2 \right), \tag{1.1.4}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $\xi \in R^{n-1}$, u , f , g .

Пользуясь определением преобразования F_α (см. [18]), получим, что для любых $u(t) \in L_2(0;d)$, $w(t) \in L_2(0;d)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\alpha[u](\eta) \cdot \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta = 2\pi(u,w). \tag{1.1.5}$$

Здесь и в дальнейшем символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(0;d)$.

Помимо этого, из определения преобразования F_α вытекает, что если $u(t) \in C^s[0;d]$ и удовлетворяет условиям

$$u(d) = \partial_t u(d) = \ldots = \partial_t^{s-1}(d) = 0, \tag{1.1.6}$$

то выполняется равенство

$$F_\alpha\left[D^j_{\alpha,t} u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \tag{1.1.7}$$

для любых $j = 0,1,2,\ldots,s$.

Из равенства (1.1.7) вытекает, что если $u(t) \in C^s[0;d]$, $w(t) \in C^s[0;d]$ и для этих функций выполняются условия (1.1.6), то справедливо равенство

$$\left(D^j_{\alpha,t} u(t), w(t)\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta^j F_\alpha[u](\eta) \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta. \tag{1.1.8}$$

Воспользуемся известным неравенством Эрлинга – Ниренберга (см. [34]), которое в нашем случае можно записать в виде

$$\int\limits_0^d \left|\partial_t^l u(t)\right|^2 dt \le \varepsilon^{2(s-l)} \int\limits_0^d (\left|\partial_t^s u(t)\right|^2 + |u(t)|^2) dt + c\varepsilon^{-2l} \int\limits_0^d |u(t)|^2 dt.$$

Здесь $s > l$, константа $c > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$ и функции $u(t)$.

Из этого неравенства также, как в [18] получим утверждение.

Лемма 1.1. Пусть $u(t) \in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ (s- натуральное число). Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $j = 0,1,2,...,s-1$ справедливо неравенство

$$\left\| D_{\alpha,t}^{j} u \right\|^2 \le \varepsilon^{2(s-j)} \left\| D_{\alpha,t}^{s} u \right\|^2 + \left(c\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)} \right) \|u\|^2, \qquad (1.1.9)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от u.

Здесь и далее в главе 1 символом $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в пространстве $L_2(0;d)$.

Следствие 1.1. Пусть $u(t) \in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $j = 0,1,2,...,2m-1$, $\xi \in R^{n-1}$ выполняется неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left\| D_{\alpha,t}^{j} u \right\|^2 \le \varepsilon^{2(2m-j)} \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + c\left(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(2m-j)} \right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2, \qquad (1.1.10)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u, ξ.

Из следующей совокупности утверждений вытекает утверждение теоремы 1.1. В этих утверждениях константы $c > 0, \varepsilon > 0$, во всех оценках не зависят от u, ξ.

Лемма 1.2. Пусть выполнены условия 1, 2; $m \ge 3$. Тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, удовлетворяющей равенствам (1.1.3) справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{m} \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left\| D_{\alpha,t}^{j} u \right\|^2 \le c\Bigg(\left\| A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u(t) \right\|^2 + \\ + \left(1+|\xi|^2\right)^{m} \left\{ \operatorname{Re} \partial_t^2 u(0)\overline{u(0)} - \frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2 \right\} \Bigg), \qquad (1.1.11)$$

константа $c > 0$, не зависит от ξ, u.

Доказательство. Исходя из того, что пространство $C^{2m}[0;d]$ плотно в пространстве $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ получим, что неравенство (1.1.11) достаточно доказать для функций из $C^{2m}[0;d]$. Умножим скалярно в $L_2(0;d)$ правую и левую части (1.1.1) на функцию $bu(t)$. Получаем

$$\mathrm{Re}\left(\bar{b}L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)u,u\right)+\mathrm{Re}\left(b\partial_t^3 u, bu\right)=\mathrm{Re}\left(A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, bu\right). \qquad (1.1.12)$$

Воспользовавшись равенством (1.1.7) и условием 1, получаем оценку

$$\mathrm{Re}\left(\bar{b}L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)u,u\right)\geq c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2, \qquad (1.1.13)$$

где $c_1 > 0$- некоторая константа, не зависящая от $\xi \in R^{n-1}$, $u(t)$.

С использованием условия (1.1.3) получим равенство

$$\int_0^d \partial_t^3 u\cdot \bar{u}dt = -\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}+\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2. \qquad (1.1.14)$$

Применяя (1.1.13), (1.1.14) в (1.1.12), получим оценку

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\frac{|b|^2}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\leq\left|\left(f,bu\right)\right|+\sum_{j=0}^{l}\mathrm{Re}\,\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}|b|^2.$$

Умножая это неравенство на $\left(1+|\xi|^2\right)^m$ и используя неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\left(f,bu\right)\right|\leq\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2+\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

получаем оценку

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\frac{|b|^2}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2+\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\mathrm{Re}\,\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}|b|^2,$$

справедливо при любом $\varepsilon>0$.

Если в этом неравенстве выбрать достаточно малое $\varepsilon>0$, то получим оценку (1.1.11).

Следствие 1.2. При выполнении условий леммы 1.2 справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\leq c\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\mathrm{Re}\,\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right).$$

с константой $c>0$, не зависящей от ξ, u.

Лемма 1.3. Если выполнены условия леммы 1.2, то для всякой функции $u(t)\in\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$, удовлетворяющей условию (1.1.3), справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \quad (1.1.15)$$

для любого $\varepsilon>0$.

Доказательство. Умножим обе части (1.1.1) скалярно на $bD_{\alpha,t}^{2m}u$, получим оценку

$$\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\operatorname{Re}\left(b\partial_t^3u,bD_{\alpha,t}^{2m}u\right)\le$$
$$\le\left|\left(\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ |\tau|\ge 1}} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^{j}u,bD_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right)\right|+\left|\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(t),bD_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right|. \quad (1.1.16)$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского, выводим оценку

$$\left|\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(t),bD_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right|\le\varepsilon|b|^2\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(t)\right\|^2. \quad (1.1.17)$$

С помощью неравенства (1.1.10) и неравенства Коши – Буняковского получим для любых $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1>0$ неравенство

$$\left|\left(\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ |\tau|\ge 1}} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^{j}u,bD_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right)\right|\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\frac{c_1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2\le .$$
$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\frac{c_1}{\varepsilon}\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c(\varepsilon,\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Выбирая $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon^2}{c_1}$, получим из последнего неравенства оценку

$$\left|\left(\sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^{j}u,bD_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right)\right|\le 2\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \quad (1.1.18)$$

справедливую для любого $\varepsilon>0$.

Используя (1.1.17) и (1.1.18) в правой части (1.1.16), получим оценку

$$\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\operatorname{Re}\left(b\partial_t^3u,bD_{\alpha,t}^{2m}u\right)\le 3\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$
$$+c_3(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \quad (1.1.19)$$

Заметим, что

$$-\mathrm{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right) = \mathrm{Re}\left(\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{2m}\partial_t u\right) + \mathrm{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^m\right)u\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(D_{\alpha,t}^m \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^m \partial_t u\right) + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^j \partial_t^2 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u(d)} +$$

$$+\mathrm{Re}(\partial_t^2 u, I_{1,2m}(\partial_t, D_{\alpha,t}),$$

где $I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) = \partial_t D_{\alpha,t}^{2m} - D_{\alpha,t}^{2m}\partial_t$ – коммутатор операторов ∂_t и $D_{\alpha,t}^{2m}$,

можно доказать, что $I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) = \sum_{j_1=0}^{2m}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{1,2m}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}$, где функции $c_{j_1,j_2}^{1,2m}$ непрерывны на отрезке $[0,d]$ и зависят только от функции $\alpha(t)$ и ее производных до порядка $2m+1$.

Коммутируя операторы ∂_t и $D_{\alpha,t}^m$, получим

$$\mathrm{Re}\left(\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{2m}\partial_t u\right) = \mathrm{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^m \partial_t u, D_{\alpha,t}^m \partial_t u\right) +$$

$$+\mathrm{Re}\left(I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m \partial_t u\right) + \mathrm{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^m\right)u\right) +$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^j \partial_t^2 u \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u}\,|_{t=d}.$$

Здесь $I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)$ - коммутатор операторов ∂_t и $D_{\alpha,t}^m$.

$$I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u = \sum_{j_1=0}^{m}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{m,1}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2} u.$$

Заметим, что

$$\mathrm{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^m \partial_t u, D_{\alpha,t}^m \partial_t u\right) = \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\,|_{t=d}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\,|_{t=0}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\,|_{t=d}\right|^2.$$

Используя это равенство, получим

$$-\mathrm{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right) = \mathrm{Re}\left(\partial_t^2 u, \partial_t D_{\alpha,t}^{2m} u\right) = \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\,|_{t=d}\right|^2 + \mathrm{Re}\left(I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m \partial_t u\right) +$$

$$+\mathrm{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^m\right)u\right) + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^j \partial_t^2 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u(d)}.$$

Используя последнее равенство, получим из (1.1.19) оценку

$$\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \le 3\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + c(\varepsilon)\left(\|Au\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)+$$
$$+c\left(\left|I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m\partial_t u\right| + \left|\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m-1}\left|\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u(d)}\right|\right).$$

Из последнего равенства следует оценка

$$\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \le 3\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + c(\varepsilon)\left(\|Au\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)+$$
$$+c\left(\left|I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m\partial_t u\right| + \left|\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right)\right|+\right. \tag{1.1.20}$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m-1}\left|\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u(d)}\right|\right).$$

Используя неравенство Коши - Буняковского и неравенство (1.1.10), получим

$$\left|\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right)\right| \le \varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right) + c_4(\varepsilon)\left(1+|\varepsilon|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.22}$$

Аналогично получим оценку

$$\left|\left(I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right) + c_5(\varepsilon)\left(1+|\varepsilon|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.23}$$

Применив известную теорему «о следах» (см. [35]) получаем оценку

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left|\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u(d)\right| + \left|D_{\alpha,t}^m\partial_t u\,|_{t=d}\right|^2 \le c\sum_{j=1}^{2m-1}\left|\partial_t^j u(d)\right|^2 \le$$

$$\le \varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2 dt + c_6(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|u(t)\right|^2 dt \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c_7(\varepsilon)\cdot\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Пользуясь последним неравенством и неравенствами (1.1.22), (1.1.23) в правой части неравенства (1.1.20), получим, выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым, оценку (1.1.15).

Лемма 1.4. Если выполнены условия леммы 1.2, то для всякой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, удовлетворяющей условию (1.1.3) справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \le c\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \tag{1.1.24}$$

Доказательство. Из уравнения (1.1.1) получим, используя неравенство (1.1.10) оценку

$$|b|^2\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \le \left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Применив (1.1.15) в данном неравенстве и выбрав достаточно малое $\varepsilon > 0$, получим оценку (1.1.24).

Лемма 1.5. Пусть выполнены условия леммы 1.2 и m кратно трем, тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, удовлетворяющей условию (1.1.3) справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) + \tag{1.1.25}$$
$$+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2\right),$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Умножив скалярно (1.1.1) на функцию $-bD_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u$, получим равенство

$$-\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)u, bD_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right) - \operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)|b|^2 = \tag{1.1.26}$$
$$= -\operatorname{Re}\left(A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u, bD_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right).$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right) = \operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right) + R_1 = \tag{1.1.27}$$
$$= \operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right) + \operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1}\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right) + R_1,$$

где $I_{\frac{m}{3},1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right) = D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t - \partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} = \sum_{j_1=0}^{\frac{m}{3}-1}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{\frac{m}{3},1}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}$,

$$R_1=\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1} i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^3u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}-1-j}\partial_t^2u(d)}\ .$$

Отсюда и из (1.1.27) получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right)=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2u(d)\right|^2+\operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t^2u,D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2u\right)+R_1. \qquad (1.1.28)$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в левой части равенства (1.1.26). Имеем

$$-\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right)=-\operatorname{Re}\left(\bar{b}a_{02m}D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right)-$$

$$-\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\bar{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right)=k_1+k_2.$$

Исследуем первое слагаемое в правой части этого равенства

$$k_1=-\operatorname{Re}\left(\bar{b}a_{02m}D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right)=-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right).$$

Так как $\operatorname{Im}\bar{b}a_{02m}=0$ по условию 1, то

$$k_1=-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t^2u\right)-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^3u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j}\partial_t^2u(d)}=$$

$$=-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t^2u\right)+R_2.$$

где

$$R_2=-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^3u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j}\partial_t^2u(d)}.$$

Коммутируя операторы $D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}$ и ∂_t, получим

$$k_1=-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,\partial_tD_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_tu\right)+R_2-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_tu\right),$$

где $I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)=D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t-\partial_tD_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}$ - коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}$ и ∂_t,

$$I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)=\sum_{j_1=0}^{\frac{4m}{3}-1}\sum_{j_2=0}^{1}c_{j_1,j_2}^{\frac{4m}{3},1}(t)D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}.$$

Таким образом,

$$k_1=\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left\{\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-\operatorname{Re}D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u\cdot D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\,|_0^d+\right.$$

$$\left.+R_2-\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right\}=\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left\{\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\right.$$

$$+\operatorname{Re}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-\operatorname{Re}D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)}+$$

$$\left.R_2-\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right\}.$$

Здесь $I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)=-I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)=\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u-D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u$.

Таким образом

$$-\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u,bD_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left\{\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\right.$$

$$+\operatorname{Re}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-\operatorname{Re}D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)+ \qquad (1.1.29)$$

$$R_2+\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)-\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}},\partial_t^2 u\right).$$

Отсюда и из (1.1.26), (1.1.27) с учетом (1.1.10), получим оценку

$$a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+$$

$$+\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D^{j}_{\alpha,t}u, D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right)\right|+\left|a_{02m}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right)\right|+$$

$$+\left|a_{02m}\left(D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right|+\left|a_{02m}\operatorname{Re}D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u(d)\cdot\overline{D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u(d)}\right|+ \tag{1.1.30}$$

$$+|R_1|+|R_2|+\frac{1}{2}\left|D^{\frac{m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u(d)\right|^2,$$

где R_1 и R_2 определены выше.

Оценим правую часть неравенства (1.1.30). С помощью неравенства Коши – Буняковского и оценки (1.1.10), получим неравенства

$$\left|a_{02m}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right)\right|\le\varepsilon\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|+\varepsilon\left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+ \tag{1.1.31}$$

$$+c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

$$\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D^{j}_{\alpha,t}u, D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right)\right|\le\varepsilon\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right\|^2\right)+ \tag{1.1.32}$$

$$+c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

С помощью теоремы «о следах» получим при $m\ge 3$ оценку

$$\left|a_{02m}D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u(d)\cdot\overline{D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u(d)}\right|+|R_1|+|R_2|+\frac{1}{2}\left|D^{\frac{m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u(d)\right|^2\le \tag{1.1.33}$$

$$\le\varepsilon\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2+c_3(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Применяя неравенство (1.1.31) - (1.1.33) в правой части (1.1.30) и выбирая достаточно малое $\varepsilon>0$, получим (1.1.25).

Лемма 1.6. При выполнении условии леммы 1.5 для всякой функции $u(t)\in\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ выполняется оценка

$$\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+$$

$$+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right), \tag{1.1.34}$$

здесь $\varepsilon>0$ любое число.

Доказательство. Умножая обе части (1.1.1) на функцию $-bD_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u$ скалярно, получим

$$-\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-\mathrm{Re}\sum_{\substack{j+|\tau|\le 2m\\ j\ne 2m}}\bar{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-$$
$$-|b|^2\,\mathrm{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=-\mathrm{Re}\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u,bD_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right). \tag{1.1.35}$$

Интегрируя по частям, получим

$$-\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=-\frac{\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2-$$
$$+\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\alpha(d)\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\frac{m}{3}}iD_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j-1}u(d)}- \tag{1.1.36}$$
$$-\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u,I_{\frac{5m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right),$$

где $I_{\frac{5m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)$– коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}$ и ∂_t.

Аналогично получим равенство

$$-\mathrm{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\frac{2m}{3}}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-j}u(d)}+$$
$$+\mathrm{Re}\left(\partial_t^2 u,I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t^2 u\right), \tag{1.1.37}$$

где $I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)$ - коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}$ и ∂_t

Применяя (1.1.36) и (1.1.37) в равенстве (1.1.35), получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \left|\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| + \left|\sum_{\substack{j+|\tau|\le 2m\\ j\ne 2m}} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| +$$

$$+c\left[\sum_{j=1}^{\frac{m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j-1}u(d)}\right| + \left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u, I_{1,\frac{5m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right)\right| + \right. \tag{1.1.38}$$

$$\left. +\sum_{j=1}^{\frac{2m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-j}u(d)}\right| + \left|\partial_t^2 u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right| + \left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2\right].$$

Оценим слагаемые в правой части неравенства (1.1.38). Используя неравенство Коши – Буняковского и неравенство (1.1.10) получим оценку

$$\left|\sum_{\substack{j+|\tau|\le 2m\\ j\ne 2m}} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| + \left|\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 + (1+|\xi|^2)^{2m}\|u\|^2\right). \tag{1.1.39}$$

Используя теорему о «следах», получим оценку

$$\sum_{j=1}^{\frac{m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j-1}u(d)}\right| + \left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2 + \sum_{j=1}^{\frac{2m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-j}u(d)}\right| \le$$

$$\le \varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2 dt + c(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}|u(t)|^2 dt \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.40}$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского и оценки (1.1.10) получим неравенства

$$\left|(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u, I_{1,\frac{5m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u)\right| \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.41}$$

$$\left|(\partial_t^2 u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u)\right| \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) +$$

$$+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.42}$$

Применяя оценки (1.1.39) – (1.1.42) в правой части неравенства (1.1.38), получим оценку (1.1.34).

Лемма 1.7. Пусть $\frac{m}{3}$ – целое число, тогда если выполнены условия леммы 1.2, то для всякой функции $u(t)\in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$, удовлетворяющей условиям (1.1.3), справедлива оценка

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right). \quad (1.1.43)$$

Доказательство. Складывая почленно неравенства (1.1.11), (1.1.15), (1.1.24), (1.1.25) и (1.1.34), получим оценку

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2+\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+ \quad (1.1.44)$$

$$+\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m(\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2)\right),$$

которая справедлива при любом $\varepsilon>0$.

В силу неравенства (1.1.11) получим, что

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right).$$

Используя это неравенство в (1.1.44), получим оценку

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2+\left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2+\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+$$

$$+c(\varepsilon)\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m(\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2)\right).$$

Выбирая в данном неравенстве достаточно малое $\varepsilon>0$, получим, учитывая определение нормы в пространстве $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0,d\right)$, оценку (1.1.43).

Рассмотрим теперь случай, когда $\frac{m}{3}$ не является целым числом. В этом случае для доказательства теоремы 1.1 вместо лемм 1.5-1.7 используются следующие леммы $1.5'-1.7'$.

Лемма 1.5′ Пусть выполнены условия леммы 1.2 и $\frac{m}{3}$ не является целым числом. Тогда для любой функции $u(t)\in\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$, удовлетворяющей условиям (1.1.3), справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\right.$$
$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2+ \tag{1.1.45}$$
$$\left.+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+c\left(\varepsilon\right)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right),$$

при всех целых $k\in\left[0,\frac{m}{3}\right]$ и любых $\varepsilon>0$.

Доказательство. Умножив обе части (1.1.1) на функцию $-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}bD_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u$ скалярно, получим равенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-2k}\left[-\operatorname{Re}ba_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u\right)+|b|^2\operatorname{Re}\left(\partial_t^3u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u\right)\right]=$$
$$=-\operatorname{Re}\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}bD_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u\right)+\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\bar{b}a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^{j}u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u\right). \tag{1.1.46}$$

Преобразуем слагаемые в левой части равенства (1.1.46). Интегрируя по частям, получим равенство

$$-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right) = -\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\Big[-\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2 -$$

$$-\operatorname{Re}\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right) + \operatorname{Re} D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)} + R_1 + K_1\Big], \tag{1.1.47}$$

где $\widetilde{R_1} = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m-k} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{2k+j+1}\partial_t^2 u(d)$,

$\widetilde{K_1} = \operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)$,

$I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)$.- коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{m+k}$ и ∂_t.

Аналогично получаем равенство

$$-\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2k}u\right) =$$

$$= -\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\Big[\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{k}\partial_t u(d)\right|^2 + \operatorname{Re}\partial_t^2 D_{\alpha,t}^{k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{k}u(d)} + \tag{1.1.48}$$

$$+\operatorname{Re}\left(I_{k,3}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right), D_{\alpha,t}^{k}u\right) + \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{k-1} D_{\alpha,t}^{k+j-1}\partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j}u(d)}\cdot i\alpha(d)\Big].$$

Используя (1.1.47) и (1.1.48) в (1.1.46), получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k} \le \varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 +$$

$$+\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}} \bar{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}, \left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k} D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right| +$$

$$+c\Big\{\left|\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right| + \left|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}\right| +$$

$$+\widetilde{R_1} + \widetilde{K_1} + \frac{1}{2}\left|\partial_t D_{\alpha,t}^{k}u(d)\right|^2 + \left|\partial_t^2 D_{\alpha,t}^{k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{k}u(d)}\right| + \left|\left(I_{k,3}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{k}u\right)\right| +$$

$$+\left|\sum_{j=1}^{k-1} D_{\alpha,t}^{k+j-1}\partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j}u(d)\cdot i\alpha(d)}\right|\Big\}\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}. \tag{1.1.49}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (1.1.49). Используя неравенство Коши – Буняковского и оценку (1.1.10), получим неравенства

$$\left| \sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}} \bar{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j},\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k} D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u \right) \right| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} \left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \right) + c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}. \tag{1.1.50}$$

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k} \left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \right) + c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.51}$$

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(I_{k,3}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{k}u\right)\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} \left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k} \cdot \left\|D_{\alpha,t}^{4m}\partial_t u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \right) \tag{1.1.52}$$

$$+c_3(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(I_{k,3}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{k}u\right)\right| + \left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\widetilde{K_1 \le}$$

$$\le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} \left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k} \left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \right) \tag{1.1.53}$$

$$+c_4(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

С помощью теоремы «о следах» (см. [35]) и оценки (1.1.10), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{ \widetilde{R_1} + \frac{1}{2}\left|\partial_t D_{\alpha,t}^{k}u(d)\right|^2 + \left|\partial_t^2 D_{\alpha,t}^{k}u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{k}u(d)}\right| + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1} D_{\alpha,t}^{k+j-1}\partial_t^3 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j}u(d)}i\alpha(d) + \left|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}\right| \le$$

$$\le \varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + c_5(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.54}$$

Применяя неравенства (1.1.50)-(1.1.54) в правой части (1.1.49), получаем оценку (1.1.45).

Лемма 1.6′. При выполнений условий леммы $1.5'$ для всякой функции $u(t)\in\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$,удовлетворяющей условиям (1.1.3), справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(1+|\xi|\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right),\tag{1.1.55}$$

при всех $k\in\left[0,\dfrac{m}{3}\right]$ и любого $\varepsilon>0$.

Доказательство. Умножая обе части (1.1.1) на функцию $-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}bD_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u$ скалярно, получаем равенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left[-\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)-|b|^2\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right]=-\operatorname{Re}\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4m}\partial_t u\right).\tag{1.1.56}$$

С помощью интегрирования по частям получим равенство

$$-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u(d)\right|^2-\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\widehat{R}_1+\widehat{M}_1\right\},\tag{1.1.57}$$

где $\widehat{R}_1=\operatorname{Re}i\sum_{j=12}^{m-2k}\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k+j-1}u(d)}$,

$\widehat{M}_1=\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u,I_{1,m+2k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}^{m+2k}\right)u\right)$, $I_{1,m+2k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u=\partial_t D_{\alpha,t}^{m+2k}u-D_{\alpha,t}^{m+2k}\partial_t u$.

Аналогично получим равенство

$$-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2+$$

$$+a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)-\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u(d)}+\right. \tag{1.1.58}$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2k} D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k-j}u(d)\frac{1}{i}\alpha(d)}\right\},$$

где $I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)=\partial_t D_{\alpha,t}^{4k}-D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t$.

Используя равенства (1.1.57) и (1.1.58) в равенстве (1.1.56), получим

$$\frac{\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}}{2}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}+\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2\le$$

$$\le\left|\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|+\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|\bar{b}a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^{j}u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|+$$

$$+\left|\bar{b}a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\left|\overline{R_1}\right|+\left|\overline{M_1}\right|\right\}\right|+\left|\bar{b}a_{02m}\right|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\left|\partial_t^2 u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u(d)}\right|+\left|\sum_{j=1}^{2k}D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k-j}\partial_t u(d)\frac{1}{i}\alpha(d)}\right|\right\}. \tag{1.1.59}$$

Чтобы оценить каждое слагаемое из правой части (1.1.59) воспользуемся неравенством Коши – Буняковского. В результате получим

$$\left|\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|\le\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2. \tag{1.1.60}$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского и оценку (1.1.10), получаем оценку

$$\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^{j}u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|\le$$

$$\le\varepsilon\left\{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right\}+c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.61}$$

С помощью теоремы «о следах» получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\left|\widehat{R_1}\right|+\left|\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u(d)}\right|+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2k} D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k-j}u(d)}\cdot\overline{\frac{1}{i}\alpha(d)}\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.\right. \tag{1.1.62}$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского и оценки (1.1.10), получим неравенства

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\widehat{M_1}\right|\le\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k},I_{1,m+2k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.63}$$

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\partial_t^2 u,I_{1,4k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{1.1.64}$$

Используя неравенства (1.1.60) - (1.1.64) в правой части неравенства (1.1.59), получим оценку (1.1.55).

Теперь мы сможем доказать аналог леммы 1.7 в случае, когда $\frac{m}{3}$ не является целым числом.

Лемма $1.7'$**.** Пусть условия леммы $1.5'$ выполнены, тогда для любой функции $u(t)\in\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ выполняется оценка

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\|Au\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\right)\left\{\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right\}. \tag{1.1.65}$$

Причем константа $c>0$ не зависит от ξ, u.

Доказательство. Складывая почленно неравенства (1.1.11), (1.1.15), (1.1.24), (1.1.45) и (1.1.55) и применяя в полученном неравенстве оценку (1.1.11), получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-\left[\frac{m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{m+\left[\frac{m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2 \le c(\varepsilon)\left(\|Au\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left\{\operatorname{Re}\partial_t u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right\}\right)+$$

$$+\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-\left[\frac{m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\right).$$

Выбирая в этом неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+$$

$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-\left[\frac{m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \qquad (1.1.66)$$

$$\le c\left(\|Au\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right)\right).$$

Заметим, что левая часть неравенства (1.1.66) есть выражение, эквивалентное норме $\|\cdot\|_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}$. Отсюда и из (1.1.66) получаем оценку (1.1.65).

1.2Доказательство теорем 1 и 2.

Из лемм 1.7 и $1.7'$ вытекает, что оценки (1.1.43) и (1.1.65) справедливы для любых решений $u(\xi,t)$ задачи (1.1.1) - (1.1.3), принадлежащих при всех $\xi\in R^{n-1}$ по переменной t пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, причем константы $c>0$ в (1.1.43) и (1.1.65) не зависят от u, ξ.

Используя неравенство Коши, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right|\le\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\varepsilon\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|u(\xi,0)\right|^2\right),$$

для любого $\varepsilon>0$.

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon=\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{2m}{3}}$, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{m}\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right|\le\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2,$$

где ε_1 – любое число.

Заметим, что $\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2 = -2\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)$. Отсюда получим оценку

$$\begin{aligned}&\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le \\ &\le 2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)\right| + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2.\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Применяя для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (1.2.1) неравенство Коши, получим оценку

$$\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)\right| \le \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left(\varepsilon_2\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\partial_t^2 u\right\|\right)^2.$$

Выберем в этом неравенстве $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{m}{3}}$, получим оценку

$$\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)\right| \le \varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2.$$

Применив данное неравенство к правой части (1.2.1), получаем оценку

$$\begin{aligned}&\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{m} \partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le 2\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2 + \\ &+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2.\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Применяя неравенство (1.2.2) к правой части (1.1.43), если m кратно 3, и к правой части (1.1.65), если m не кратно 3, получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\|Au\|^2 + 2\varepsilon_1\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\cdot\left\|\partial_t u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2\right).$$

Выбирая в вышеуказанном неравенстве достаточно малое $\varepsilon_1 > 0$, получаем неравенство

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_1\left(\|Au\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2\right). \tag{1.2.3}$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$\left|u(\xi,0)\right|=\left|\frac{\sum\limits_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau u(\xi,0)}{\sum\limits_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau}\right|\le c\left(1+|\xi|\right)^{-m^*}\left|B(\xi)u\,|_{t=0}\right|\le c\left|g(\xi)\right|\left(1+|\xi|\right)^{-m^*}.$$

Применяя это неравенство в (1.2.3) получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left(1+|\xi|^2\right)^{-m^*}\left|g(\xi)\right|^2\right),$$

или

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m^*-\frac{m}{3}}\left|g(\xi)\right|^2\right).$$

Таким образом, доказана оценка (1.1.4) при $s=2m$.

Таким образом, теорема 1.1 доказана при $s=2m$. Докажем теперь справедливость теоремы 1.1 при $s>2m$. Для этого нам потребуется неравенство, являющееся аналогом неравенства Эрлинга Ниренберга (см. [34]), которое в нашем случае можно сформулировать следующим образом:

Лемма 2.1. Пусть $s\ge 2m$, целое число, тогда для любой функции $u(t)\in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, и любого числа $\varepsilon>0$ выполнимо неравенство

$$\left|\partial_t^l u\,|_{t=0}\right|\le \varepsilon^{2m(p-l)-\frac{m}{3}}\left(\left\|\partial_t^p u\right\|+\|u\|\right)+c\varepsilon^{-2ml-\frac{m}{3}}\|u\|, \qquad (1.2.4)$$

где $0\le l\le p-1$, $p=\left[\dfrac{s}{2m}\right]$, константа $c>0$ не зависящая от u и ξ.

Лемма 2.2. Пусть $s\ge 2m$, целое число и функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s-1}[0;d]$. Тогда для любой функции $u(t)\in C^{s-1}[0;d]$, удовлетворяющей условию (1.1.3) справедлива оценка

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\|Au\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m}\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right), \qquad (1.2.5)$$

с постоянной, не зависящей от u и ξ. Здесь $0\le p\le\left[\dfrac{s}{2m}\right]$ - целое число.

Доказательство. Пусть $\psi_0(t)+\psi_1(t)=1$ при всех $0\le t\le d$ $\psi_k\in C^\infty[0;d]$, $0\le\psi_k\le 1$ $(k=0,1)$при всех $0\le t\le d$; $\psi_0(t)=0$, при $\frac{d}{2}\le t\le d,\psi_1(t)=0$ при $0\le t\le\frac{d}{4}$. Пусть $j+\frac{2m}{3}l\le 2mp$. Тогда справедливо следующее равенство

$$A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)(\psi_k(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u)=\psi_k(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l f+I_{k,j,l}(u), \tag{1.2.6}$$

где $f=A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u$,

$$I_{k,j,l}(u)=L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})(\psi_k D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u)-\psi_k D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})+$$
$$+b\left[\partial_t^3(\psi_k D_{\alpha,t}^j\partial_t^l)u-\psi_k D_{\alpha,t}^j\partial_t^{l+3}u\right].$$

Докажем при $p\le\left[\frac{s}{2m}\right]$ неравенство

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3}}\le c\left(\|Au\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3}}+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2\right).$$

Для этого применим неравенство (1.4.3) если $\frac{m}{3}$ - целое число или неравенство (1.1.65), если $\frac{m}{3}$ не является целым числом к функции $u_0(t)=\psi_0(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u$, где $j+\frac{2m}{3}l\le 2mp$. В результате получим при $j\ne 0$ неравенство

$$\left\|\psi_0(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^l f\right\|^2+\left\|I_{0,j,l}(u)\right\|^2\right). \tag{1.2.7}$$

А при $j=0$ неравенство

$$\left\|\psi_0\partial_t^l u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\left\|\partial_t^l f\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m \mathrm{Re}\,\partial_t^{l+2}u(0)\cdot\overline{\partial_t^l u(0)}\right)+$$
$$+\left\|I_{0,0,l}(u)\right\|^2. \tag{1.2.7$'$}$$

Чтобы оценить последнее слагаемое в правой части неравенств (1.2.7) и (1.2.7′) заметим, что функцию $I_{k,j,l}(u)$ при $j+\frac{2m}{3}l\le 2mp$ можно представить в следующем виде

$$I_{k,j,l}(u)=\sum_{\substack{|\tau'|+j'+\frac{2m}{3}l'\le 2m(p+1)-1\\ l'\le l}} r^{k,j,l}_{\tau',j',l'}(t)\,\xi^{\tau'}D^{j'}_{\alpha,t}\partial^{l'}_t u+$$
$$+b\left[\partial^3_t\left(\psi_k D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right)-\psi_k D^j_{\alpha,t}\partial^{l+3}_t u\right], \tag{1.2.8}$$

где функции $r^{k,j,l}_{\tau',j',l'}(t)$ непрерывны на отрезке $[0;d]$ и зависят от функций $\psi_k(t)$, $\alpha(t)$ и их производных.

Таким образом, справедлива оценка

$$\left\|I_{k,j,l}(u)\right\|\le c\left(\sum_{\substack{|\tau'|+j'+\frac{2m}{3}l'\le 2m(p+1)-1\\ l'\le l}}\xi^{\tau'}\left\|D^{j'}_{\alpha,t}\partial^{l'}_t u\right\|+\left\|\partial^3_t D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u-D^j_{\alpha,t}\partial^{l+3}_t u\right\|\right). \tag{1.2.9}$$

Используя неравенства (1.1.9) – (1.1.10), получим оценку

$$\sum_{\substack{|\tau'|+j'+\frac{2m}{3}l'\le 2m(p+1)-1\\ l'\le l}}\xi^{\tau}\left\|D^{j'}_{\alpha,t}\partial^{l'}_t u\right\|^2\le\varepsilon\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}. \tag{1.2.10}$$

Заметим, что $\partial^2_t D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u-D^j_{\alpha,t}\partial^{l+2}_t u\equiv 0$ при $j=0$, а при $j\ge 1$ справедливо равенство $\partial^3_t D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u-D^j_{\alpha,t}\partial^{l+3}_t u=\sum_{j_1=0}^{j-1}\sum_{l_1=0}^{3}c_{j_1,l_1}(t)D^{j_1}_{\alpha,t}\partial^{l+l_1}_t u$, где $c_{j_1,l_1}(t)$ – непрерывные на $[0;d]$ функции, зависящие только от функции $\alpha(t)$ и ее производных до порядка j.

Таким образом, справедлива оценка

$$\left\|\partial^3_t\left(\psi_k D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right)-\psi_k D^j_{\alpha,t}\partial^{l+3}_t u\right\|^2\le c\sum_{l_1=0}\left\|\partial^{l_1}_t u\right\|^2_{j+\frac{2m}{3}(l+l_1)-1,\alpha,\frac{2m}{3}}\le$$
$$\le c_1\|u\|^2_{2m+j+\frac{2m}{3}l-1,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le\varepsilon\|u\|^2_{2m+j+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+j+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2. \tag{1.2.11}$$

Применив (1.2.10) и (1.2.11) в правой части (1.2.9), получаем оценку

$$\left\|I_{k,j,l}(u)\right\|^2 \le \varepsilon\|u\|^2_{2m+j+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+j+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2, \qquad (1.2.12)$$

справедливую для любого $\varepsilon > 0$.

Применяя (1.2.12) в (1.2.7), получим

$$\left\|\psi_0(t) D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\left\|D^j_{\alpha,t}\partial^l_t f\right\|^2 + \varepsilon\|u\|^2_{2m+j+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$
$$\left. + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+j+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2\right). \qquad (1.2.13)$$

Применив (1.2.12) при $j=0$ в (1.2.7′), получим неравенство

$$\left\|\psi_0(t)\partial^l_t u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\left\|\partial^l_t f\right\|^2 + \varepsilon\|u\|^2_{2m+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$
$$\left. + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2\right) + \left(1+|\xi|^2\right)^m \operatorname{Re}\partial^{l+2}_t u(0)\cdot\overline{\partial^l_t u(0)}. \qquad (1.2.14)$$

Неравенства (1.2.13) и (1.2.14) справедливы при всех $\varepsilon > 0$ и $j + \frac{2m}{3}l \le 2mp$,

где $p \le \left[\frac{s}{2m}\right]$.

Оценим последнее слагаемое в правой части (1.2.14). С помощью неравенства Коши Буняковского получим

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \partial^{l+2}_t u(0)\overline{\partial^l_t u(0)}\right| \le \left(1+|\xi|^2\right)^m\left[\varepsilon\left|\partial^{l+2}_t u(0)\right| + \frac{1}{\varepsilon}\left|\partial^l_t u(0)\right|^2\right].$$

Положим $\varepsilon = \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{2m}{3}}$, тогда получим неравенство

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \partial^{l+2}_t u(0)\overline{\partial^l_t u(0)}\right| \le \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial^{l+2}_t u(0)\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|\partial^l_t u(0)\right|^2. \qquad (1.2.15)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (1.2.15). Получим, используя оценку (1.2.4), неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial^{l+2}_t u(0)\right|^2 \le \left[\varepsilon^{2m(l+3-l-2)-\frac{m}{3}}\left(\left\|\partial^{l+3}_t u\right\|^2 + \|u\|^2\right) + c\varepsilon^{-2m(l+2)-\frac{m}{3}}\|u\|^2\right]\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}.$$

Положим $\varepsilon^{2m-\frac{m}{3}}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}=\varepsilon_1^{2m-\frac{m}{3}}$, тогда

$$\varepsilon^{\frac{5m}{3}}=\frac{\varepsilon_1^{2m-\frac{m}{3}}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}},\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}\cdot\frac{3}{5m}}}=\frac{\varepsilon_1}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{5}}}.$$

Отсюда $\varepsilon^{-2m(l+2)-\frac{m}{3}}=\dfrac{\varepsilon_1^{-2m(l+2)-\frac{m}{3}}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{5}\left(-2m(l+2)-\frac{m}{3}\right)}}=c(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{5}\left(2m(l+2)+\frac{m}{3}\right)}$.

То есть, получаем оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^{l+2}u(0)\right|^2\le\varepsilon_1\left(\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2+\|u\|^2\right)+c(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{5}(2m(l+2))+\frac{m}{3}}\|u\|^2.$$

Так как $\dfrac{1}{5}\left(2m(l+2)\right)+\dfrac{m}{3}\le\dfrac{2m}{3}(l+3)$, то получаем неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^{l+2}u(0)\right|^2\le\varepsilon_1\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2+c_1(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}(l+3)}\|u\|^2. \tag{1.2.16}$$

Аналогично получаем неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|\partial_t^{l}u(0)\right|\le\varepsilon_2\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2+c(\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}(l+3)}\|u\|^2. \tag{1.2.17}$$

Применяя неравенства (1.2.16) и (1.2.17) в правой части неравенства (1.2.15), получаем оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{m}\partial_t^{l+2}u(0)\cdot\overline{\partial_t^{l+2}u(0)}\right|\le\varepsilon\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}(l+3)}\|u\|^2. \tag{1.2.18}$$

Применив неравенство (1.2.18) к правой части (1.2.14), получим неравенство

$$\begin{gathered}\left\|\psi_0\partial_t^l u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\left\|\partial_t^l f\right\|^2+\varepsilon\|u\|^2_{2m+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\right.\\ \left.+\varepsilon\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2\right).\end{gathered} \tag{1.2.19}$$

Непосредственно из уравнения (1.2.6) при $k=0,\ j=0$ получим

$$L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})\left(\psi_1(t)\partial_t^l u\right)+b\partial_t^3\left(\psi_1(t)\partial_t^l u\right)=\psi_1(t)\partial_t^l u+I_{1,0,l}(u),$$

где

$$I_{1,0,l}(u)=L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})(\psi_1\partial_t^l u)-\psi_1\partial_t^l L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u+$$
$$+b\left(\partial_t^3(\psi_1\partial_t^l)u-\psi_1\partial_t^{l+3}u\right).$$

Отсюда с учетом того, что $\psi_1=0$ при $0\le t\le\dfrac{d}{4}$,вытекает оценка

$$\left\|\psi_1(t)\partial_t^{l+3}u\right\|\le c\left(\left\|\partial_t^l f\right\|+\sum_{\substack{|\tau'|+j'\le 2m-1\\ l'\le l}}|\xi|^{|\tau'|}\left\|D_{\alpha,t}^{j'+l'}u\right\|\right),$$

или

$$\left\|\psi_1(t)\partial_t^{l+3}u\right\|\le c\left(\left\|\partial_t^l f\right\|+\sum_{|\tau|+j\le 2m+l}|\xi|^{\tau}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|\right).$$

Применив к правой части вышеуказанного неравенства оценку (1.1.10) получаем

$$\left\|\psi_1(t)\partial_t^{l+3}u\right\|^2\le c_1\left\|\partial_t^l f\right\|^2+\varepsilon\|u\|^2_{2m+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3}}+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2. \qquad (1.2.20)$$

Из (1.2.19) и (1.2.20) вытекает оценка

$$\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2\le\varepsilon\|u\|^2_{2m+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3}}+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2+c_1\left\|\partial_t^l f\right\|^2\ , \qquad (1.2.21)$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$.

Непосредственно из уравнения (1.2.6) при $j\ne 0,k=1$ получим

$$L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})\left(\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right)+b\partial_t^3\left(\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right)=\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l+I_{1,j,l}(u),$$

где

$$I_{1,j,l}(u)=L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u-\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u+$$
$$+b\left(\partial_t^3\left(\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l f\right)u-\psi_1(t)\partial_t^3 D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right).$$

Отсюда, учитывая, что $\psi_1(t)\equiv 0$ при $0\le t\le\dfrac{d}{4}$, выводим оценку

$$\left\|\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right\|_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\sum_{|\tau_1|+j_1\le 2m}|\xi|^{\tau_1}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}\left(\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right)\right\|+\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^l f\right\|\right).$$

Отсюда с учетом неравенств (1.1.9) и (1.1.10) получим оценку

$$\left\|\psi_1(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right\|_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\|u\|^2_{2m+j+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ +c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+j+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2 + c_1\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^l f\right\|. \tag{1.2.22}$$

Из (1.2.13) и (1.2.22), вытекает оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right\|_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\|u\|^2_{2m+j+\frac{2m}{3}l,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ +c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m+j+\frac{2m}{3}l}\|u\|^2 + c_1\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^l f\right\|^2. \tag{1.2.23}$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\sum_{j+\frac{2m}{3}l\le 2mp}\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right\|^2 \le \varepsilon_1\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2 + \\ +c_2\sum_{j+\frac{2m}{3}l\le 2mp}\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^l u\right\|^2. \tag{1.2.24}$$

Из (1.2.21) и (1.2.24) получим неравенство

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2 + \\ +c_3\|f\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}.$$

Для оценки слагаемого $c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2$ применим лемму 1.2, и выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$. В результате получаем

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\|f\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m}\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}. \tag{1.2.25}$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3 Пусть $s \ge 0$ – целое число и функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s+2m-1}[0;d]$. Тогда для любой функции $u(t) \in C^{s+2m}[0;d]$, удовлетворяющей условию (1.1.3), выполняется

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\|Au\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right), \tag{1.2.26}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ξ и u.

Доказательство. Пусть $s = 2mp + j,\ p = \left[\dfrac{s}{2m}\right]$. Применим неравенство (1.2.5) к функциям $\psi_0 D_{\alpha,t}^{j} u$. Воспользуемся равенством

$$A\psi_0 D_{\alpha,t}^{j} u = \psi_0 D_{\alpha,t}^{j} f + I_{0,j,0}(u), \tag{1.2.27}$$

где

$$\begin{gathered} I_{0,j,0}(u) = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t})\psi_0(t) D_{\alpha,t}^{j} u - \psi_0(t) D_{\alpha,t}^{j} L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u + \\ + b\left[\partial_t^3\left(\psi_0(t) D_{\alpha,t}^{j} u\right) - \psi_0(t) D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^3 u\right]. \end{gathered} \tag{1.2.28}$$

Из (1.2.27) вытекает оценка

$$\left\|\psi_0 D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\left\|\psi_0 D_{\alpha,t}^{j} f\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left\|I_{0,j,0}(u)\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right). \tag{1.2.29}$$

Тем же образом, что и в доказательстве леммы 2.2 получаем оценку

$$\left\|I_{0,j,0}(u)\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c(\varepsilon)\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}. \tag{1.2.30}$$

Так же как и в лемме 2.2 из уравнения $A\psi_1 D_{\alpha,t}^{j} u = \psi_1 D_{\alpha,t}^{j} u + I_{1,j,0}(u)$, получим оценку

$$\left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}\psi_1 D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^m \left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right) \le$$

$$\le c_1\left(\left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^{j} f\right\|_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \sum_{|\tau'|+j' \le 2m+j-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}|\tau'|}\left\|D_{\alpha,t}^{j'} u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{|\tau'|+j' \le 2m+j-1 \\ 1 \le j' \le 2m-1}}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}|\tau'|}\left\|D_{\alpha,t}^{j'} u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left\|D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right).$$

Применив в правой части этого неравенства оценки (1.1.9), (1.1.10), получим неравенство

$$\begin{gathered} \left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3}} \le c\left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^{j} f\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3}} + \\ + \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{j} u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3}} + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}j}\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3}}, \end{gathered} \tag{1.2.31}$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$.

Из неравенств (1.2.29), (1.2.30) и (1.2.31) при достаточно $\varepsilon > 0$ малом получим неравенство

$$\left\| D_{\alpha,t}^{j} u \right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3}} \le c \left(\left\| D_{\alpha,t}^{j} f \right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3}} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}j} \|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3}} \right). \tag{1.2.32}$$

Таким образом, выводим оценку

$$\begin{gathered} \|u\|_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3}} \le \sum_{j=0}^{s-2mp} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(s-j-2mp)} \left\| D_{\alpha,t}^{j} u \right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3}} \le \\ \le c \left(\| f \|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(s-2mp)} \|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3}} \right). \end{gathered} \tag{1.2.33}$$

Из неравенств (1.2.33) и (1.2.5) получим требуемое неравенство (1.2.26).

Лемма 2.4 Пусть $s \ge 0$ – целое число и функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s+2m+m^*-1}[0;d]$. Пусть выполнены условия 1 – 3. Тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, удовлетворяющей условиям (1.1.3), справедлива оценка

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c \left(\|Au\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m+s-m^*-\frac{m}{3}} |g(\xi)|^2 \right). \tag{1.2.34}$$

Доказательство. Так как множество $C^{s+2m}[0;d]$ плотно вложено в пространство $\widetilde{H}_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и константы $c > 0$ в оценках (1.2.5), (1.2.6) не зависят от $\xi \in R^{n-1}$, то оценки (1.2.5), (1.2.6) справедливы для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$.

Воспользуемся неравенством (1.2.2) в правой части неравенства (1.2.26), получим неравенство

$$\begin{gathered} \|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c \left(\|Au\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s} \cdot \left(2\varepsilon_1 \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) + \right. \\ \left. +2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}} \|\partial_t u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}} |u(0)|^2 \right). \end{gathered}$$

Отсюда получим неравенство

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\|Au\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \varepsilon \|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{5m}{3}} |u(0)|^2,\right.$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$.

Выбирая в этом неравенстве число $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку

$$\|u\|_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_1 \|Au\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-\frac{m}{3}} |u(0)|^2. \tag{1.2.35}$$

Используя условие 3, получим неравенство

$$|u(\xi,0)| \le c\left(1+|\xi|\right)^{-m^*} |g(\xi)|.$$

Применяя это неравенство в (1.2.35), получим

$$\|u\|_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3}} \le c\left(\|Au\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-m^*-\frac{m}{3}} |g(\xi)|^2 \right).$$

Таким образом, неравенство (1.2.34) доказано.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $s \ge \max\left(2m, m^* + \dfrac{m}{3}\right)$. Заменяя в оценке (1.2.34) s на $s-2m$, получим из (1.2.34) оценку (1.1.4).

Доказательство теоремы 1. Пусть решение $v(x,t)$ задачи (1) – (3) принадлежит пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R^n_d\right)$. Тогда функция $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]$ при почти всех $\xi \in R^n$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и является решением задачи (1.1.1) – (1.1.3). Следовательно, в силу теоремы 1.1 для функции $u(\xi,t)$ справедлива оценка (1.1.4). Интегрируя эту оценку по $\xi \in R^{n-1}$ получим неравенство

$$\int_{R^{n-1}} \|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} d\xi \le c \int_{R^{n-1}} \left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m^*-\frac{m}{3}} |g(\xi)|^2 \right) d\xi, \tag{1.2.36}$$

где $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}\left[F(x,t)\right], g(\xi) = F_{x\to\xi}\left[G(x)\right]$.

Из (1.2.36) с помощью (1.1.8) и равенства Парсеваля получим справедливость априорной оценки (4) в теореме 1.

Доказательство теоремы 2. Неравенство (1.2.36) означает, что для функции $\nu(x,t)$справедлива оценка (4) при $k=0$. Для того, чтобы доказать оценку (4) при $k>0$ – целом заметим, что производные $D_\xi^\beta u(\xi,t)$, где $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[\nu(x,t)\right]$, $\nu(x,t)\in H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}$ при $|\beta|\le k$ и почти всех $\xi\in R^{n-1}$ принадлежат пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Кроме того, функции $D_\xi^\beta u(\xi,t)$ являются решениями следующей задачи:

$$A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)D_\xi^\beta u=D_\xi^\beta f+I_\beta(\xi,D_\xi,D_{\alpha,t})u, \tag{1.2.37}$$

$$B(\xi,\partial_t)D_\xi^\beta u|_{t=0}=D_\xi^\beta g(\xi)+I'_\beta(\xi,D_\xi,\partial_t)u|_{t=0}, \tag{1.2.38}$$

$$D_\xi^\beta u|_{t=0}=\partial_t D_\xi^\beta u|_{t=0}=\ldots=\partial_t^{m-1}D_\xi^\beta u|_{t=0}=0, \tag{1.2.39}$$

где

$$I_\beta(\xi,D_\xi,D_{\alpha,t})=\sum_{|\tau|+j\le 2m}\sum_{\substack{|\gamma|>0\\ \gamma\le\beta,|\gamma|\le|\tau|}} a_{\tau,j}c_{\tau\gamma}^\beta \xi^{\tau-\gamma}D_\xi^{\beta-\gamma}D_\xi^{\beta-\gamma}D_{\alpha,t}^j, \tag{1.2.40}$$

$$I'_\beta(\xi,D_\xi,\partial_t)=\sum_{|\tau|\le m^*}\sum_{\substack{|\gamma|>0\\ \gamma\le\beta,|\gamma|\le|\tau|}} b_\tau c_{\tau\gamma}^\beta \xi^{\tau-\gamma}D_\xi^{\beta-\gamma}D_\xi^{\beta-\gamma}. \tag{1.2.41}$$

Здесь постоянные $c_{\tau\gamma}^\beta$ зависят лишь от β,τ,γ и n.

Из (1.2.40) и (1.2.41) с помощью неравенства (1.2.4) получим оценку

$$\left\|I_\beta u\right\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s-m^*-\frac{m}{3}\right)}\left|I'_\beta u|_{t=0}\right|\le c\sum_{|\beta'|\le|\beta|-1}\left\|D_\xi^{\beta'}u\right\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}. \tag{1.2.42}$$

Таким образом, из (1.2.36) – (1.2.42), получим оценку

$$\begin{gathered}\sum_{|\beta|\le k}\int_{R^{n-1}}\left\|D_\xi^\beta u\right\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 d\xi\le c\left(\sum_{|\beta|\le k}\int_{R^{n-1}}\left\|D_\xi^\beta f\right\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 d\xi+\right.\\ \left.+\sum_{|\beta|\le k}\int_{R^{n-1}}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-m^*-\frac{m}{3}}\left|D_\xi^\beta g(\xi)\right|^2 d\xi+\sum_{|\beta|\le k-1}\int_{R^{n-1}}\left\|D_\xi^\beta u\right\|_{s,\alpha,|\xi|}^2 d\xi\right).\end{gathered} \tag{1.2.43}$$

Последовательное (по k) применение неравенств (1.2.43), (1.2.36) приводит нас к требуемому неравенству (4) при $k>0$ – целом.

ГЛАВА 2

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1) – (3)

В этой главе доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи (1) – (3). Доказательство этой теоремы существенно опирается на априорную оценку, полученную в главе 1. Так же как и в главе 1 наряду с задачей (1) – (3) рассмотрим задачу, полученную из нее применением к обеим частям уравнения (1) и условий (2), (3) преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$.

$$A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(\xi,t)=L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u(\xi,t)+b\partial_t^3u(\xi,t)=f(\xi,t), \tag{2.1}$$

$$\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau u(\xi,t)|_{t=0}=g(\xi), \tag{2.2}$$

$$u(\xi,t)|_{t=d}=\partial_t u(\xi,t)|_{t=d}=\ldots=\partial_t^{m-1}u(\xi,t)|_{t=d}=0. \tag{2.3}$$

Здесь $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right], g(\xi)=F_{x\to\xi}\left[G(x)\right], f(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[F(x)\right]$.

Аналогично главе 1 рассмотрим пространства $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$.($s\ge 0$ - целое число) функций $u(t)$. Введем норму в этом пространстве, зависящую от параметра $\xi\in R^n$ по формуле

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}=\left\{\sum_{|\tau|+\frac{2m}{3}j\le s}\left\|F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\tau-\frac{1}{2}}F_\alpha\left[\partial_t^j u\right]\right]\right\|^2_{L_2(0;d)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Из следующей теоремы вытекает утверждение теоремы 3:

Теорема 2.1. Пусть $s\ge\max\left\{2m,m^*+\frac{m}{3}\right\}$ - целое число, $m\ge 3$ - целое число. Пусть $f(\xi,t)\in\widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и выполнены условия 1 – 3. Тогда при всех

$\xi \in R^{n-1}$ существует единственное решение задачи (2.1) - (2.3), принадлежащее пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$.

Чтобы доказать теорему 3 для начала сведём задачу (2.1) - (2.3) к нелокальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

Рассмотрим функцию $\gamma(t)=\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{2m}{2m-3}}$, тогда

$$D_{\alpha,t}^{k}u=\left(\frac{1}{i}\right)^{k}\sum_{j=0}^{k}\psi_{kj}\left(t\right)\gamma^{\frac{3(2m-j)}{2m}}\left(t\right)\gamma^{j-3}\left(t\right)\partial_{t}^{j}u\,, \tag{2.5}$$

где функции $\psi_{kj}\left(t\right),\ \left(0\le j\le k\right)$ вычисляются из рекуррентных соотношений

$$\begin{cases}\psi_{k+1,k+1}\left(t\right)=\psi_{k,k}\left(t\right),\ \psi_{0,0}\left(t\right)=1,\\ \psi_{j+1,0}\left(t\right)=\alpha\left(t\right)\partial_{t}\psi_{j,0}\left(t\right)+\dfrac{1}{2}\alpha'\left(t\right)\psi_{j,0}\left(t\right),\\ \psi_{j+1,\chi}\left(t\right)=\alpha\left(t\right)\partial_{t}\psi_{j,\chi}\left(t\right)+\psi_{j,\chi-1}\left(t\right)+\left(\chi+\dfrac{1}{2}\right)\alpha'\left(t\right)\psi_{j,\chi}\left(t\right),\ \left(1\le\chi\le j-1\right),\\ \psi_{j+1,j}\left(t\right)=\psi_{j,j-1}\left(t\right)+\left(j+\dfrac{1}{2}\right)\alpha'\left(t\right).\end{cases} \tag{2.6}$$

Воспользовавшись формулой (2.5) уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\sum_{k=4}^{2m}b_{2m-k}\left(\xi,t\right)\gamma^{k-3}\partial_{t}^{k}u+\sum_{k=0}^{3}b_{2m-k}\left(\xi,t\right)\partial_{t}^{k}u=f\left(\xi,t\right), \tag{2.7}$$

где $b_{0}\left(\xi,t\right)\equiv1$, а функции $b_{2m-k}\left(\xi,t\right),\ k=0,1,\ldots,2m-1$ вычисляются по следующим соотношениям

$$b_{2m-k}\left(\xi,t\right)=\sum_{j=k}^{2m}\sum_{|\tau|\le2m-j}\left(-1\right)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,k}\left(t\right)\gamma^{\frac{(2m-k)3}{2m}}\left(t\right), \tag{2.8}$$

где $4\le k\le2m-1$,

$$b_{2m-3}\left(\xi,t\right)=\sum_{j=3}^{2m}\sum_{|\tau|\le2m-j}\left(-1\right)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,3}\left(t\right)\gamma^{\frac{3(2m-3)}{2m}}\left(t\right)+\frac{\left(-1\right)^{m}b}{a_{02m}}, \tag{2.9}$$

$$b_{2m-k}\left(\xi,t\right)=\sum_{j=k}^{2m}\sum_{|\tau|\le2m-j}\left(-1\right)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,k}\left(t\right)\gamma^{\frac{j(2m-3)}{2m}}\left(t\right), \tag{2.10}$$

где $k=1,2$;

$$b_{2m}(\xi,t)=\sum_{j=0}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}(-1)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,0}(t)\,. \qquad (2.11)$$

Обозначим

$$\begin{cases} w_{2m-k}(\xi,t)=\partial_t^k u(\xi,t),\ k=0,1,2,3\\ w_{2m-k}(\xi,t)=\gamma^{k-3}(t)\partial_t^k u(\xi,t),\ k=4,...,2m. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Исходя из этого, верны следующие соотношения

$$\gamma(t)\partial_t w_{2m-k}(\xi,t)-w_{2m-(k+1)}(\xi,t)-(k-3)\gamma'(t)w_{2m-k}(\xi,t)=0, \qquad (2.13)$$

где $k=4,...,2m-2$;

$$\begin{cases} \gamma(t)\partial_t w_1(\xi,t)=(2m-4)\gamma'(t)w_1(\xi,t)+\partial_t^{2m}u(\xi,t),\\ \gamma(t)\partial_t w_{2m-3}(\xi,t)-w_{2m-4}(\xi,t)=0,\\ \partial_t w_{2m-k}(\xi,t)-w_{2m-k-1}(\xi,t)=0,\ k=0,1,2. \end{cases} \qquad (2.14)$$

С использованием этих формул уравнение (2.7) можно представить в виде

$$\begin{cases} \gamma(t)\dfrac{d\bar{u}_1}{dt}+B_{11}(\xi,t)\bar{u}_1+B_{12}(\xi,t)\bar{u}_2=\bar{f}(\xi,t),\\ \dfrac{d\bar{u}_2}{dt}+B_{22}\bar{u}_2+B_{12}\bar{u}_1=0, \end{cases} \qquad (2.15)$$

где $\bar{u}_1=\left(w_1(\xi,t),w_2(\xi,t),...,w_{2m-3}(\xi,t)\right)^T$; $\bar{u}_2=\left(w_{2m-2},w_{2m-1},...,w_{2m}\right)^T$, символ T обозначает транспонирование. $\bar{f}(\xi,t)=f(\xi,t)\bar{e}_1$, $\bar{e}_1=\left\{\delta_{1j}\right\}_{j=1}^{2m-3}$, δ_{ij} - символ Кронекера($\begin{cases}\delta_{ii}=0\\ \delta_{ij}=0, i\ne j\end{cases}$).

$B_{11}(\xi,t)=\left\{c_{ij}\right\}_{i,j=1}^{2m-3}$ - матрица размерности $(2m-3)\times(2m-3)$ вида

$$B_{11}(\xi,t)=\begin{pmatrix} b_1(\xi,t)-(2m-4)\gamma'(t) & b_2(\xi,t) & b_3(\xi,t) & ... & b_{2m-3}(\xi,t)\\ -1 & -(2m-4)\gamma'(t) & 0 & ... & 0\\ 0 & -1 & -(2m-5)\gamma'(t) & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

$B_{12}(\xi,t)$ - матрица размера $(2m-3)\times 3$ вида

$$B_{12}(\xi,t)=\begin{pmatrix} b_{2m-2}(\xi,t) & b_{2m-1}(\xi,t) & b_{2m}(\xi,t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

$B_{21}(\xi,t)$ - матрица размера $3\times(2m-3)$ вида

$$B_{21}(\xi,t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.18)$$

$B_{22}(\xi,t)$ - матрица размера 3×3 вида

$$B_{22}(\xi,t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.19)$$

Вместе с системой (2.15) рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma(t)\dfrac{d\overline{u}_1}{dt}+\left(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I\right)\overline{u}_1+B_{12}^0(\xi,0)\overline{u}_2=\overline{f}(\xi,t), \\ \dfrac{d\overline{u}_2}{dt}+B_{22}\overline{u}_2+B_{21}\overline{u}_1=0. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Отличие матрицы $B_{12}^0(\xi,0)$ от матрицы $B_{12}(\xi,0)$ заключается в том, что элемент $b_{2m}(\xi,0)$ заменяется на элемент $b_{2m}^0(\xi,0)$, где $b_{2m}^0(\xi,0)$ - главная часть многочлена $b_{2m}(\xi,0)$.

Из [18] известно, что нахождение «гладких» вплоть до $t=0$ решений системы (2.20) зависит от расположения спектра матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Исходя из условий, накладываемых на функцию $\alpha(t)$ и используя определение функции $\gamma(t)$ получаем, что $\gamma(0)=\gamma'(0)=0$. Учитывая это и (2.8) - (2.11) получаем

$$b_{2m-k}(\xi,0)=0,\ k=1,2,...,2m-1,\ k\neq 3;\ b_{2m-3}(\xi,0)=\frac{(-1)^m b}{a_{02m}}.$$

Теперь займемся нахождением собственных чисел матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Из ее вида получаем, что $\det\left(B_{11}(\xi,0)-\lambda I\right)=(-\lambda)^{2m-3}+b_{2m-3}(\xi,0)=0.$

Отсюда $\lambda^{2m-3} = (-1)^m \dfrac{b}{a_{02m}}$. Условие 1 дает, что $\operatorname{Im}\dfrac{b}{a_{02m}} = 0, \operatorname{Re}\dfrac{b}{a_{02m}} > 0$.

Следовательно у матрицы $B_{11}(\xi,t)$ собственные числа различны и среди них не имеется собственных чисел, которые лежат на мнимой оси. Заметим, что в левой полуплоскости лежат $(m-2)$ собственных числа и в правой полуплоскости лежат $(m-1)$ собственных чисел. То есть инвариантное пространство $E_-(E_+)$ оператора $B_{11}(\xi,0)$, который соответствует собственным числам λ_k, что лежат в левой (правой) полуплоскости имеет размерность равную $m-2$ $(m-1)$. Через $P_-(P_+)$ обозначим проекторы на $E_-(E_+)$. Также обозначим через P_k $(k=1,2,...,2m)$ операторы, которые действуют по формулам

$$\begin{aligned} &P_k\overline{u}_1 = w_k,\ k=1,2,..,2m-3; \\ &P_k\overline{u}_2 = w_k,\ k=2m-2,\ 2m-1, 2m. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Проектируя первое уравнение системы (2.20) на E_- и E_+, получим

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt} + \left(B_{11}(\xi,0) + \gamma'(t)I\right)\overline{u_1^-} = \left(f(\xi,t) - b_{2m}^0(\xi,0)u\right)P_-\overline{e}_1, \tag{2.22}$$

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^+}}{dt} + \left(B_{11}(\xi,0) + \gamma'(t)I\right)\overline{u_1^+} = \left(f(\xi,t) - b_{2m}^0(\xi,0)u\right)P_+\overline{e}_1, \tag{2.23}$$

где $u(\xi,t) = w_{2m}(\xi,t)$, $\overline{u_1^-} = P_-\overline{u}_1$, $\overline{u_1^+} = P_1\overline{u}_1$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt} + \left(B_{11}(\xi,0) + \gamma'(t)I\right)\overline{u_1^-} = 0. \tag{2.24}$$

Пространство решений уравнения (2.24), рассматриваемое как уравнение в $E_- \subset C^{2m-3}$, имеет размерность $(m-2)$ (это следует из работы [18]).

Краевые условия (2.3) можно переписать в виде

$$P_{2m}\overline{u}_2|_{t=d} = P_{2m-1}\overline{u}_2|_{t=d} = P_{2m-2}\overline{u}_2|_{t=d} = 0, \tag{2.25}$$

$$P_{2m-3}\overline{u}_1|_{t=d} = P_{2m-4}\overline{u}_1|_{t=d} = ... = P_{m+1}\overline{u}_1|_{t=d} = 0. \tag{2.26}$$

Далее рассмотрим краевое условие (2.2). С использованием обозначения (2.12) и равенства (2.25) перепишем условие (2.2) в виде

$$\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau (-1)\int_0^t\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2\Big|_{t=d} = g(\xi). \tag{2.27}$$

Исходя из этого заключаем, что условия (2.2) - (2.3) при $t=d$ можно переписать в виде (2.26), (2.27).

То есть, для системы (2.15) получим задачу Коши (2.26), (2.27). Тем самым задача (2.1) - (2.3) сведена к задаче (2.26), (2.27).

Перед тем как доказывать существование и единственность решения данной задачи, докажем существование и единственность решения задачи (2.20), (2.26), (2.27). Обратив операторы в левой части (2.22) и (2.23), получаем

$$\begin{cases} \overline{u_1^-}(\xi,t) = U_1^-(t,d)q^- - \int_t^d U_1^-(t,s)P_-\bar{e}_1\big(f(s)-b_{2m}^0(\xi,0)u(s)\big)\dfrac{ds}{\gamma(s)}, \\ \overline{u_1^+}(\xi,t) = \int_0^t U_1^+(t,s)P_+\bar{e}_1\big(f(s)-b_{2m}^0(\xi,0)u(s)\big)\dfrac{ds}{\gamma(s)}, \end{cases} \tag{2.28}$$

Здесь $U_1^\pm(t,s) = \dfrac{\gamma(s)}{\gamma(t)}\exp\left(P_\pm B_{11}(\xi,0)\int_t^s \dfrac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)$, q^- - произвольный вектор из E_-. $\bar{u}_1(\xi,t) = \overline{u_1^-}(\xi,t) + \overline{u_1^+}(\xi,t)$. Следовательно из (2.28) получаем равенство

$$\bar{u}_1(\xi,t) = U_1^-(t,d)q^- - \int_0^d \Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau + b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d \Phi(t,\tau)u(\tau)d\tau, \tag{2.29}$$

где

$$\Phi(t,\tau) = \begin{cases} -U_1^+(t,\tau)P_+\bar{e}_1\dfrac{1}{\gamma(\tau)} & \text{при} \quad 0<\tau<t \\ U_1^-(t,\tau)P_-\bar{e}_1\dfrac{1}{\gamma(\tau)} & \text{при} \quad t<\tau<d. \end{cases} \tag{2.30}$$

Учитывая, что $u(\xi,t)|_{t=d} = \partial_t u(\xi,t)|_{t=d} = \partial_t^2 u(\xi,t)|_{t=d} = 0$, получим

$$u(\xi,t) = (-1)\int_t^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d \partial_t^3(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 = -\int_t^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2. \tag{2.31}$$

Применяя (2.31) в (2.29), получим равенство

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\xi,t) &= U_1^-(t,d)q^- - \int_0^d \Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau - b_{2m}^0(\xi,0)\cdot \\ &\cdot\int_0^d \Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Кроме этого функция $\bar{u}_1(\xi,t)$ удовлетворяет условиям (2.26), (2.27). Из (2.32) получим равенства

$$P_\nu \bar{u}_1 = w_\nu = P_\nu U_1^-(t,d)q^- - \int_0^d P_\nu \Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau -$$
$$-b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d P_\nu \Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \quad (2.33)$$

Подставляя в (2.33) $t=d$, получим

$$w_\nu|_{t=d} = P_\nu U_1^-(d,d)q^- - \int_0^d P_\nu \Phi(d,\tau)f(\tau)d\tau -$$
$$-b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d P_\nu \Phi(d,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau.$$

Заметим, что $U_1(d,d)=1$ и $w_\nu|_{t=d}=0$ при $m+1\le\nu\le 2m-3$. Отсюда, при $m+1\le\nu\le 2m-3$, получим равенства

$$P_\nu q^- = d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3}, \quad \nu = m+1, m+2, ..., 2m-3, \quad (2.34)$$

где

$$d_\nu = \int_0^d P_\nu \Phi(d,\tau)f(\tau)d\tau, \quad (2.35)$$

$$M_\nu w_{2m-3} = \int_0^d\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d P_\nu \Phi(d,\tau)w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \quad (2.36)$$

Теперь рассмотрим условия (2.27). Их можно записать в виде

$$\theta(\xi)\int_0^t\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2|_{t=d} = g(\xi), \text{ где } \theta(\xi) = -\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau. \quad (2.37)$$

Подставляя функцию w_{2m-3}, заданную равенством (2.33) при $\nu=2m-3$, в равенство (2.37), получаем равенство

$$\theta(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d P_{2m-3}U_1^-(\tau_0,d)q^- d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 = d_m + b_{2m}^0(\xi,0)M_m w_{2m-3} \quad , \quad (2.38)$$

где

$$d_m = g(\xi) + \theta(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)f(\tau)d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 d\tau. \quad (2.39)$$

$$M_m w_{2m-3} = \theta(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\Big[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)\cdot$$
$$\cdot\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,s_0)ds_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau\Big]d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4. \quad (2.40)$$

Подставив в уравнение (2.34) $\nu = m+1, m+2, ..., 2m-3$, и, принимая во внимание, уравнение (2.38) получим $(m-2)$ уравнений для вычисления вектора q^-. Покажем, что эта система будет иметь единственное решение, если $d>0$ достаточно малы.

Пусть $\overline{r}_1, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_{m-2}$ - собственные векторы матрицы $B_{11}(\xi,0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой полуплоскости. Векторы $\overline{r}_1, ..., \overline{r}_{m-2}$ образуют базис в E_- и $q^- \in E_-$, следовательно, существуют числа μ_p, $p=1,2,..,m-2$ такие, что

$$q^- = \mu_1\overline{r}_1 + \mu_2\overline{r}_2 + ... + \mu_{m-2}\overline{r}_{m-2}. \tag{2.41}$$

Пользуясь условием $B_{11}(\xi,0)\overline{r}_p = \lambda_p\overline{r}_p$ и принимая во внимание вид матрицы $B_{11}(\xi,0)$, получим

$$r_{p,k} = (-\lambda_p)^{2m-3-k} r_{p,2m-3},\ p=1,2,...,2m-3. \tag{2.42}$$

Через $r_{p,k}$ обозначена – k - ая координата вектора $\overline{r}_p$.

Из соотношения (2.42) вытекает, что $\overline{r}_p \neq \overline{0}$, значит $r_{p,2m-3} \neq 0$. Из (2.41) и (2.42) вытекает соотношение

$$P_\nu q^- = \sum_{p=1}^{m-2}\mu_p P_\nu \overline{r}_p = \sum_{p=1}^{m-2}\mu_p r_{p\nu} = d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3},\ \nu = m+1, m+2, ..., 2m-3.$$

Используя в этих равенствах равенство (2.42), получим

$$\sum_{p=1}^{m-2}\mu_p r_{p,2m-3}(\lambda_p)^{2m-3-\nu} = (-1)^{2m-3-\nu}\left(d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3}\right), \text{где} \tag{2.43}$$
$$\nu = m+1, m+2, ..., 2m-3.$$

Теперь рассмотрим условие (2.38). Так как $\overline{r}_p$ - собственный вектор матрицы $B_{11}(\xi,0)$, который отвечает собственному значению λ_p, то

$$U_1^-(\tau,d)\overline{r}_p = \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau)}\exp\left(\lambda_p\int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\overline{r}_p.$$

Из этого равенства и (2.38) вытекает равенство

$$\sum_{p=1}^{m-2}\mu_p\theta(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau_0)}\exp\left(\lambda_p\int_0^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)r_{p,2m-3}d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 = \tag{2.44}$$
$$= d_m + b_{2m}^0(\xi,0)M_m w_{2m-3}.$$

Заметим, что

$$\int_{\tau_1}^{d} \frac{1}{\gamma(\tau_0)} \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_0}^{d} \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) d\tau_0 = -\frac{1}{\lambda_p} \left(1 - \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_1}^{d} \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) \right). \qquad (2.45)$$

Используя (2.45), получим из (2.44) равенство

$$\sum_{p=1}^{m-2} \mu_p \theta(\xi) \gamma(d) \int_0^d \int_0^d \frac{1}{\lambda_p} \left(1 - \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_3}^{d} \frac{d\rho}{\gamma(p)} \right) \right) r_{p,2m-3} d\tau_3 d\tau_4 =$$

$$= d_m + b_{2m}^0(\xi,0) M_m w_{2m-3}.$$

или

$$\theta(\xi) \sum_{p=1}^{m-2} \mu_p \gamma(d) \int_0^d \int_{\tau_4}^d \frac{1}{\lambda_p} r_{p,2m-3} d\tau_3 d\tau_4 - \theta(\xi) \sum_{p=1}^{m-2} \mu_p \gamma(d) \int_0^d \int_{\tau_4}^d \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_3}^{d} \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) r_{p,2m-3} d\tau_3 d\tau_4 =$$

$$= d_m + b_{2m}^0(\xi,0) M_m w_{2m-3}.$$

Отсюда получим равенство

$$\sum_{p=1}^{m-2} \theta(\xi) \gamma(d) \mu_p \frac{d^2}{2} \frac{1}{\lambda_p} r_{p,2m-3} - \sum_{p=1}^{m-2} \theta(\xi) \gamma(d) \mu_p \frac{1}{\lambda_p} \int_0^d \int_{\tau_4}^d \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_3}^{d} \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) r_{p,2m-3} d\tau_3 d\tau_4 =$$

$$= d_m + b_{2m}^0(\xi,0) M_m w_{2m-3}.$$

Перепишем его в виде

$$\theta(\xi) \gamma(d) \frac{d^2}{2} \sum_{p=1}^{m-2} \frac{1}{\lambda_p} \mu_p r_{p,2m-3} - \theta(\xi) \gamma(d) \sum_{p=1}^{m-2} J_p \frac{1}{\lambda_p} \mu_p r_{p,2m-3} = \qquad (2.46)$$

$$= d_m + b_{2m}^0(\xi,0) M_m w_{2m-3},$$

где $J_p = \int_0^d \int_{\tau}^d \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_3}^{d} \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) d\tau_3 d\tau.$

Замечая, что, так как $\operatorname{Re}\lambda_p < 0,\ p = 1,2,...,m-2,$ то $J_p = o\left(d^N\right)$ при $d \to +0$ $\forall$ $N > 0$.

Тогда, из (2.43) и (2.46) получаем систему $(m-2)$ уравнений для вычисления $\mu_p r_{p,2m-3}$ $p = 1,2,...,m-2$. Выпишем детерминант этой системы:

$$M=\theta(\xi)\gamma(d)\begin{vmatrix} \frac{d^2}{\lambda_1}-\frac{I_1}{\lambda_1} & \frac{d^2}{\lambda_2}-\frac{I_2}{\lambda_2} & \frac{d^2}{\lambda_3}-\frac{I_3}{\lambda_3} & \ldots & \frac{d^2}{\lambda_{m-2}}-\frac{I_{m-2}}{\lambda_{m-2}} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_{m-2} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_{m-2}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{m-4} & \lambda_2^{m-4} & \lambda_3^{m-4} & \ldots & \lambda_{m-2}^{m-4} \end{vmatrix}$$

Справедливо равенство

$$M=\theta(\xi)\gamma(d)M_1-\theta(\xi)\gamma(d)M_2,$$

где

$$M_1=d\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \ldots & \frac{1}{\lambda_{m-2}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{m-2} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_{m-2}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{m-4} & \lambda_2^{m-4} & \ldots & \lambda_{m-2}^{m-4} \end{vmatrix}$$

$$M_2=\begin{vmatrix} I_1 & I_2 & \ldots & I_{m-2} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{m-2} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_{m-2}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{m-4} & \lambda_2^{m-4} & \ldots & \lambda_{m-2}^{m-4} \end{vmatrix}$$

где числа $I_j,\ j=1,2,...,m-2$, определены в (2.47). M_1 является определителем Вронского и так как $\lambda_p,\ p=1,2,...,m-2$ различны, то $M_1\neq 0$. Из (2.47) выводим, что $M_2=o\left(d^N\right)$ при $d\to +0$ при любом $N>0$. Выбирая $N>2$ получим из (2.48), и при истинности условия 3 $M\neq 0$ при достаточно малом $d>0$.

Таким образом, при любых правых частях система (2.43), (2.46) имеет единственное решение при достаточно малом $d>0$. Решение данной системы может быть записано в виде

$$\mu_p = \sum_{\nu=m}^{2m-3} \beta_{p,\nu}\left(d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0) M_\nu w_{2m-3}\right)\frac{1}{r_{p,2m-3}}, \quad p=1,2,...,m-2, \tag{2.49}$$

где $\beta_{p,\nu}$ - некоторые коэффициенты.

Применяя (2.49) и (2.41) в (2.33) при $\nu = 2m-3$, имеем уравнение

$$w_{2m-3}(\xi,t) = \widetilde{F}(\xi,t) + b_{2m}^0(\xi,0)\widetilde{M} w_{2m-3}(\xi,t), \tag{2.50}$$

где

$$\widetilde{F}(\xi,t) = \sum_{\nu=m}^{2m-3}\sum_{p=1}^{m-2}\beta_{p,\nu}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) - \int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau) f(\tau)d\tau, \tag{2.51}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{M} w_{2m-3} = \sum_{\nu=m}^{2m-3}\sum_{p=1}^{m-2}\beta_{p,\nu} M_\nu w_{2m-3}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) - \\ -\int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau.\end{gathered} \tag{2.52}$$

Вначале докажем, что уравнение (2.50) разрешимо с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} \max\limits_{1\le j\le m-2}\operatorname{Re}\lambda_j + \max\limits_{0\le t\le d}|\gamma'(t)| \le \delta_- < 0 \\ \min\limits_{m-1\le j\le 2m-3}\operatorname{Re}\lambda_j - \max\limits_{0\le t\le d}|\gamma'(t)| \ge \delta_+ > 0. \end{cases} \tag{2.53}$$

Для доказательства существования решения уравнения (2.50) выпишем ряд оценок

$$\left\|\int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_{2(0,d)}} \le (m-1)\left(\frac{1}{\delta_-}+\frac{1}{\delta_+}\right)\|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{2.54}$$

$$\sum_{p=1}^{m-2}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right\|_{L_2(0;d)} \le (m-1)\left(\frac{1}{\delta_-}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.55}$$

$$\sum_{j=m-1}^{2m-3}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp\left(-\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right\|_{L_2(0;d)} \le (m-1)\left(\frac{1}{\delta_+}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.56}$$

$$\sup_{0<t_1<d}\left\|\int_0^t P_\nu\Phi(t_1,t)d\tau\right\|_{L_2(0;d)} \le 3(m-1)\left(\frac{1}{\delta_+}+\frac{1}{\delta_-}\right)\sqrt{d}\ . \tag{2.57}$$

Эти оценки можно непосредственно вывести из (2.30) и (2.53). Оценки (2.54) - (2.57) позволяют сделать вывод, что функция $\widetilde{F}(x,t)$, определяемая в (2.51), принадлежит пространству $L_2(0;d)$. Оператор $\widetilde{M}$, определяемый в соотношении (2.52) - ограниченный оператор в $L_2(0;d)$. Выбирая далее $\delta > 0$ настолько малым, чтобы при всех $|\xi| \le \delta$ было выполнено условие $\left|b_{2m}^0(\xi,0)\right| \left\|\widetilde{M}\right\|_{L_2 \to L_2} \le \frac{1}{2}$. Следовательно, существует единственное решение уравнения (2.50) в $L_2(0;d)$ и

$$w_{2m-3} = \left(I - b_{2m}^0(\xi,0)\widetilde{M}\right)^{-1} \widetilde{F}. \tag{2.58}$$

Кроме того, выполняется оценка

$$\left\|w_{2m-3}\right\|_{L_2(0;d)} \le 2\left\|\widetilde{F}\right\|_{L_2(0;d)}. \tag{2.59}$$

Решение системы (2.20) получим подставив решение (2.58) в (2.33). Решение будет удовлетворять условиям (2.25), (2.26), (2.27), а, это означает, что выполняются условия (2.2), (2.3).

Равенство (2.33) и неравенство (2.59) позволяют сделать вывод, что координаты векторных функций $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ принадлежат пространству $L_2(0;d)$ по переменной t при любых $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \le \delta$.

То есть векторные функции $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ будут являться решением системы (2.20), и, кроме того, для них будут справедливы условия (2.25), (2.26), (2.27).

Из (2.12) – (2.14) следует, что $u(\xi,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$i^{-2m}\alpha^{2m}(t)\partial_t^{2m}u + \frac{b}{a_{02m}}\partial_t^3 u + \sum_{|\tau|=2m} \frac{a_{\tau,0}}{a_{02m}}\xi^\tau u = f. \tag{2.60}$$

В силу того, что

$$i^{-2m}\alpha^{2m}(t)\partial_t^{2m}u = D_{\alpha,t}^{2m}u + R_{2m}u, \tag{2.61}$$

где $R_{2m}u = \sum_{j=0}^{2m-1} z_{2m,j}(t) D_{\alpha,t}^j u$, а $z_{2m,j}(t)$ - ограниченные и непрерывные функции на отрезке $[0;d]$.

Тогда, из (2.60) и (2.61) заключаем, что функция $u(\xi,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$a_{02m}D_{\alpha,t}^{2m}u+b\partial_t^3u+\sum_{|\tau|=2m}a_{\tau,0}\xi^{\tau}u+R_{2m}u=f\left(\xi,t\right). \tag{2.62}$$

Можно показать, что это уравнение имеет решение $u(\xi,t)$ принадлежащее пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$ по переменной t

Введем обозначение $\widetilde{A}=a_{02m}D_{\alpha,t}^{2m}+\sum_{|\tau|=2m}a_{\tau,0}\xi^{\tau}+b\partial_t^3+a_{02m}R_{2m}$.

Рассмотрим оператор $A^{\mu}=\mu A+\left(1-\mu\right)\widetilde{A}$, где $A=L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)+b\partial_t^3$. Можно показать справедливость априорной оценки, аналогичной оценке из теоремы 1 для оператора A^{μ} при $|\xi|\leq\delta$ с константой, не зависящей от $\mu\in[0,1]$. Исходя из предыдущих выкладок, можем сделать вывод, что уравнение (2.62) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (2.2), (2.3). Пользуясь этим, при помощи метода продолжения по параметру μ и используя априорную оценку, получаем, что уравнение $Au=f$ будет иметь единственное решение, которое удовлетворяет условию (2.2) и (2.3) при $|\xi|\leq\delta$.

Рассмотрим оператор $A\left(\lambda\dot{\xi},D_{\alpha,t},\partial_t\right)$, где $|\dot{\xi}|=\delta$. Используем априорную оценку из теоремы 1, а также при помощи метода продолжения по параметру $\lambda>0$. Из ранее установленной разрешимости задачи (2.2) - (2.3) для уравнения $A\left(\lambda\dot{\xi},D_{\alpha,t},\partial_t\right)u=f$ при $\lambda=1$, получаем, что данная задача имеет единственное решение для любых $\lambda>0$. Теперь положим $\lambda=\frac{|\xi|}{\delta}$, в результате получим, что задача (2.2) - (2.3) для уравнения $A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u=f$ будет иметь единственное решение для любых $\xi\in R^{n-1}$. Значит, установлены существование и единственность решения задачи (2.1) - (2.3) при дополнительных условиях (2.53). В случае невыполнения хотя бы одного этого условия, будем рассматривать оператор $\hat{A} = L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right) + \hat{b}\partial_t^3$. Здесь $\mathrm{Re}\bar{\hat{b}}a_{02m} > 0$, $\mathrm{Im}\bar{\hat{b}}a_{02m} = 0$. Следовательно, оператор $\hat{A}$ будет удовлетворять тем же условиям, что и оператор A. Выбираем $\mathrm{Re}\hat{b} > 0$ настолько большим, чтобы условия (2.53) были выполнены. Выше было показано, что задача (2.2) - (2.3) для уравнения $\hat{A}u = f$ имеет единственное решение в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$. Заметим, что можно показать справедливость априорной оценки, аналогичной оценке теоремы 1, которая будет выполняться и для оператора $\hat{A}^{\mu} = L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right) + \left(b\mu + \left(1-\mu\right)\hat{b}\right)\partial_t^3$, при этом постоянная в этой оценке не зависит от $\mu \in [0;1]$. Это дает возможность опять применять метод продолжения по параметру $\mu \in [0;1]$ и получить существование и единственность решения этой задачи при $\mu = 1$ из существования и единственности задачи (2.2) - (2.3) для уравнения $\hat{A}^{\mu} u = f$ при $\mu = 0$. Исходя из того, что $\hat{A}^1 = A$, получим, что существование и единственность решения задачи (2.2) - (2.3) доказана в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$, откуда и следует существование и единственность решения задачи (1) - (3) в $H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$. При доказательстве существования и единственности решения задачи (1) - (3) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$ при $s > 2m$, необходимо использовать известный метод повышения гладкости (см [3]).

При достаточно малых $d > 0$ разрешимость показана. При $t \geq d$ уравнение не будет являться вырождающимся, а, это означает, что решение задачи (1) - (3) существует при $t \in \left[d; d_1\right]$ (см. [34]). Тогда при помощи «склеивания» (см. [34]), получим существование и единственность решения задачи (1) - (3) при $t \in \left[0; d_1\right]$ для любого $d_1 > 0$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Утверждение теоремы 4 при $k=0$ следует из теоремы 3. Докажем теорему 4 при $k>0$ - целом. Повторяя доказательство априорной оценки решения задачи (1) – (3) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(\overline{R_d^n}\right)$ при $s>2m$ получим оценку

$$\sum_{|\beta|\le k}\left\|D_\xi^\beta u(\xi,t)\right\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\sum_{|\beta|\le k}\left\|D_\xi^\beta A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\right.$$
$$\left.\sum_{|\beta|\le k}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s-m^*-\frac{m}{3}\right)}\left|D_\xi^\beta g(\xi)\right|+\sum_{|\beta|\le k-1}\left\|D_\xi^\beta u(\xi,t)\right\|_{L_2(0;d)}\right). \tag{2.36}$$

Последовательное применение неравенств (2.36) и априорной оценки из теорем 1 и 2 позволяет установить существование и единственность решения (1) – (3) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$ при $k>0$.

ГЛАВА 3

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (4) – (6)

3.1 Вспомогательные утверждения

Применим преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ к обеим частям уравнения (4) – (6). Получим зависящую от параметра $\xi\in R^{n-1}$ задачу:

$$A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(\xi,t)=L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u(\xi,t)-b\partial_t^3u(\xi,t)=f(\xi,t), \tag{3.1.1}$$

$$\begin{gathered}\sum_{|\tau|\le m_1^*}b_{\tau,1}\xi^\tau u(\xi,t)|_{t=0}=g_1(\xi)\\ \sum_{|\tau|\le m_2^*}b_{\tau,2}\xi^\tau u(\xi,t)|_{t=0}=g_2(\xi),\end{gathered} \tag{3.1.2}$$

$$u(\xi,t)|_{t=d}=\partial_t u(\xi,t)|_{t=d}=\ldots=\partial_t^{m-1}u(\xi,t)|_{t=d}=0. \tag{3.1.3}$$

Здесь $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]$, $f(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[F(x,t)\right]$ $g_i(\xi)=F_{x\to\xi}\left[G_i(x)\right]$, $j=1,2$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1.1 Пусть $s\ge\max\left\{2m,\max\limits_{j=1,2}\left(m_j^*+\frac{2m}{3}(j-1)+\frac{m}{3}\right)\right\}$ - целое число, $m\ge3$. Пусть $f(\xi,t)\in\widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ при всех $\xi\in R^{n-1}$ и выполнены условия 4 - 6. Тогда для любого решения $u(\xi,t)\in\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ задачи (3.1.1) - (3.1.3) справедлива априорная оценка

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\sum_{j=1}^{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_j^*-\frac{m}{3}-\frac{2m}{3}(j-1)}\left|g_j(\xi)\right|^2\right), \tag{3.1.4}$$

с константой $c>0$, не зависящей от u, ξ.

Пространство $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ определено в главе 1.

Утверждение теоремы 3.1.1 вытекает из совокупности вспомогательных утверждений, доказанных ниже.

Лемма 3.1.1 Пусть функция $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и удовлетворяет равенствам (3.1.3). Пусть выполнены условия 4 – 5. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2 \le c\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \right.$$
$$\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{m}\left\{\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right\}\right). \tag{3.1.5}$$

Здесь и в дальнейшем в главе 3 $\|\bullet\|$ есть норма в пространстве $L_2(0;d)$.

Доказательство. В силу плотности пространства $C^{2m}[0;d]$ в пространстве $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ достаточно доказать неравенство (3.1.5) для функций $u(t) \in C^{2m}[0;d]$. Умножим на функцию $\overline{bu(t)}$ обе части уравнения (3.1.1) и проинтегрируем по отрезку $[0;d]$.

$$\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)u, bu\right) - |b|^2 \operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, u\right) = \operatorname{Re}\left(f, bu\right). \tag{3.1.6}$$

Здесь и в дальнейшем в главе 3 $(u,v) = \int_0^d u(t)\overline{v(t)}dt$ - скалярное произведение в $L_2(0;d)$.

Воспользовавшись равенствами (1.1.5), (1.1.7) и (1.1.8), получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)u, bu\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta)\left|F_\alpha[u](\eta)\right|^2 d\eta.$$

Из этого равенства и условия 4 получим неравенство

$$\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)u, bu\right) \ge c\left\|F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{m}{2}} F_\alpha[u]\right]\right\|^2 \ge$$
$$\ge c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2, \tag{3.1.7}$$

где постоянные $c > 0, c_1 > 0$ не зависят от $\xi \in R^{n-1}$, u.

Так же как в главе 1, получим равенство

$$\left(\partial_t^3 u, u\right) = \frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}. \qquad (3.1.8)$$

Используя оценки (3.1.7) и (3.1.8) в (3.1.6), получим оценку

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le \left|(f, bu)\right| + \left(-\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)} + \frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right)|b|^2,$$

или, умножив обе части этого неравенства на $\left(1+|\xi|^2\right)^m$, получим неравенство

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le \left(1+|\xi|^2\right)^m (f, bu) - |b|^2\left(1+|\xi|^2\right)^m \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)} + \qquad (3.1.9)$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t u(0)\right|^2|b|^2).$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, получаем оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m (f, bu) \le |b|^2\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2.$$

Применив данное неравенство в правой части (3.1.9), получим неравенство

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le |b|^2\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2 +$$
$$+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left[\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t u(0)\overline{u(0)}\right]|b|^2.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым. В результате имеем неравенство

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le c\left(\|f\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \left(1+|\xi|^2\right)^m \operatorname{Re}\partial_t u(0)\overline{u(0)}\right),$$

константа $c > 0$, не зависит от u и ξ.

Следствие 3.1.1 При выполнении условий леммы 3.1.1 справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 \le c\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\| + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right),$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u и ξ.

Лемма 3.1.2 Пусть функция $u(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и удовлетворяет равенствам (3.1.3), а также выполняются условия 4,5. Тогда справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right), \quad (3.1.10)$$

справедливая при любом $\varepsilon > 0$.

Константа $c > 0$ зависит лишь от $\varepsilon > 0$, но не зависят от u и ξ.

Доказательство. Умножим обе части равенства (3.1.1) на функцию $\overline{bD_{\alpha,t}^{2m}u}$ и проинтегрируем получившееся равенство по отрезку $[0;d]$. В результате получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}^{2m}\right)u, bD_{\alpha,t}^{2m}u\right) - |b|^2 \operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right) = \operatorname{Re}\left(f, bD_{\alpha,t}^{2m}u\right).$$

Учитывая вид оператора $L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right)$ и равенство $\operatorname{Im}\bar{b}a_{02m} = 0$, получим из этого равенства следующее равенство

$$\operatorname{Re}\bar{b}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ j\ne 2m}} \bar{b}a_{\tau j}\xi^\tau \left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right) - |b|^2 \operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right) = \quad (3.1.11)$$

$$= \operatorname{Re}\left(f, bD_{\alpha,t}^{2m}u\right).$$

Интегрируя по частям, получим равенство

$$\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right) = -\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, \partial_t D_{\alpha,t}^{2m}u\right). \quad (3.1.12)$$

В этом равенстве внеинтегральные члены равны нулю в силу равенств (3.1.3) и условия $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$.

Заметим, что

$$\partial_t D_{\alpha,t}^{2m}u = D_{\alpha,t}^{2m}\partial_t + I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^{2m}\right)u, \quad (3.1.13)$$

где $I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^{2m}\right)$- коммутатор операторов ∂_t и $D_{\alpha,t}^{2m}$.

Можно показать, что

$$I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^{2m}\right)u = \partial_t D_{\alpha,t}^{2m}u - D_{\alpha,t}^{2m}\partial_t u = \sum_{j_1=0}^{2m-1}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{1,2m}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u, \quad (3.1.14)$$

где коэффициенты $c_{j_1,j_2}^{1,2m}(t)$ – непрерывные на $[0;d]$ функции, зависящие только от функции $\alpha(t)$ и ее производных до порядка $2m-1$.

Применяя (3.1.13) в (3.1.12) получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right) = -\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{2m}\partial_t u\right) - \operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right).$$

Проинтегрируем в первом слагаемом в правой части этого равенства по частям m раз, получим

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right) = -\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u\right) - \\ -\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{m-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^2 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t u(d)} - \operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right). \tag{3.1.15}$$

Заметим, что

$$D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^2 u = \partial_t D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u + I_{m,1}\left(D_{\alpha,t}^{m}, \partial_t\right)\partial_t u,$$

где

$I_{m,1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right)\partial_t u = D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^2 u - \partial_t D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u$ - коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{m}$ и ∂_t.

Можно показать, что

$$I_{m,1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right)\partial_t u = \sum_{j_1=0}^{m-1}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{m,1}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2+1} u. \tag{3.1.17}$$

Используя (3.1.17) в правой части равенства (3.1.15) получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right) = -\operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u, D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u\right) - \operatorname{Re}\left(I_{m,1}\left(D_{\alpha,t}^{m}, \partial_t\right)u, D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u\right) - \\ -\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{m-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^2 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t u(d)} - \operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right). \tag{3.1.18}$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u, D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u\right) = \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u\right|^2 \Big|_0^d = \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u(d)\right|^2, \tag{3.1.19}$$

так как в силу условия $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$ получим, что $D_{\alpha,t}^{m}\partial_t u(0) = 0$ для любой функции $u(t) \in C^{2m}[0;d]$.

Из (3.1.18) и (3.1.19) выводим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right) = -\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^m \partial_t u(d)\right|^2 - \operatorname{Re}\left(I_{m,1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u, D_{\alpha,t}^m \partial_t u\right) -$$
$$-\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{m-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^j \partial_t^2 u(d) \overline{D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t u(d)} - \operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) u\right). \tag{3.1.20}$$

Из (3.1.11) и (3.1.20) выводим неравенство

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 \le c\left(\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ j\ne 2m}} a_{\tau j}\xi^\tau \left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right)\right| + \left|\left(f, bD_{\alpha,t}^{2m} u\right)\right| + \right.$$
$$+\left|\left(I_{m,1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u, D_{\alpha,t}^m \partial_t u\right)\right| + \left|\left(\partial_t^2 u, I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) u\right)\right| +$$
$$\left. +\left|D_{\alpha,t}^m \partial_t u(d)\right|^2 + \sum_{j=0}^{m-1}\left|D_{\alpha,t}^j \partial_t^2 u(d) \overline{D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t u(d)}\right|\right), \tag{3.1.21}$$

где константа $c > 0$ не зависит от u и ξ.

Займемся оценкой каждого слагаемого из правой части (3.1.21). Применив неравенство Коши – Буняковского получим неравенство

$$\left\|\left(f, D_{\alpha,t}^{2m}\right)\right\| \le \varepsilon |b|^2 \left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|. \tag{3.1.22}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и оценку (1.1.10) получим неравенство

$$\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ j\ne 2m}}^{m} a_{\tau j}\xi^\tau \left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right)\right| \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 + \frac{c}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{2m-1} a_{\tau j}\xi^\tau \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le$$
$$\le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 + \frac{c_1}{\varepsilon}\left(\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 + c_2\left(\varepsilon_1\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|\right), \tag{3.1.23}$$

справедливое при всех $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$. Причем константы c_1 и c_2 не зависят от ξ и u, $c_2(\varepsilon)$ зависит только от ε_1.

Выбирая в неравенстве (3.1.23) $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon^2}{c_1}$, получим неравенство

$$\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ j\ne 2m}}^{m} a_{\tau j}\xi^\tau \left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2m} u\right)\right| \le 2\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 + c_3(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \tag{3.1.24}$$

справедливое при всех $\varepsilon>0$. Константа $c_3(\varepsilon)$ зависит лишь от $\varepsilon>0$, но не зависит от ξ и u.

Используя (3.1.17), неравенство Коши – Буняковского и оценку (1.1.10), получим неравенство

$$\left|\left(I_{m,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u,D_{\alpha,t}^m\partial_t u\right)\right|\le\varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \qquad (3.1.25)$$

справедливое при любом $\varepsilon>0$. Здесь константа $c(\varepsilon)>0$ зависит только от ε, но не зависит от ξ и u.

Аналогично получим оценку

$$\left|\left(\partial_t^2 u,I_{1,2m}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right)\right|\le\varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \qquad (3.1.26)$$

С помощью известной теоремы «о следах» (см. [35]), выводим, учитывая равенства (3.1.3), оценку

$$\begin{aligned}&\left|D_{\alpha,t}^m\partial_t u(d)\right|^2+\sum_{j=0}^{m-1}\left|D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t^2 u(d)}\right|\le c\sum_{j=m}^{m+1}\left|\partial_t^j u(d)\right|^2\le\\ &\le\varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2dt+c(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}|u(t)|^2dt\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c(\varepsilon)\|u\|^2,\end{aligned} \qquad (3.1.27)$$

для любого $\varepsilon>0$ с константой $c(\varepsilon)>0$,зависящей только от $\varepsilon>0$.

Применим неравенства (3.1.23) – (3.1.27) в правой части неравенства (3.1.21), получим неравенство

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\le\left(|b|^2+5\right)\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left(\tilde{c}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t u\right)\right\|^2\right)+2\varepsilon\left\|\partial_t^3 u\right\|^2.$$

Выбирая $\varepsilon_1=\varepsilon\left(|b|^2+5\right)$, получим неравенство

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\le\varepsilon_1\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|\right)^2+\tilde{c}_1(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

справедливое при всех $\varepsilon_1>0$, причем $\tilde{c}_1(\varepsilon_1)$ - постоянная, которая зависит только от ε_1 но не зависит от ξ и u.

Лемма 3.1.3. Если функция $u(t)$, принадлежащая пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и удовлетворяющая равенствам (3.1.3). Пусть условия 4 и 5 также выполняются. Тогда справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \le c(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right) + \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right), \qquad (3.1.28)$$

эта оценка справедлива при всех $\varepsilon > 0$, с константой $c(\varepsilon) > 0$, зависящей только от ε.

Доказательство. Из уравнения (3.1.1) получим оценку

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \le c\left(\|f\|^2 + \left\|L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t},\right)u\right\|^2\right). \qquad (3.1.29)$$

Учитывая вид оператора $L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t},\right)$, получим

$$\begin{aligned}\left\|L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t},\right)u\right\| &\le \left|a_{02m}\right| \cdot \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ j\ne 2m}} \left\|a_{\tau,j}\xi^\tau D_{\alpha,t}^j u\right\| \le \\ &\le c\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + \sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|\right).\end{aligned} \qquad (3.1.30)$$

Используя неравенство (1.1.10), получим оценку

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\| \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^m\|u\|,$$

справедливую для любого $\varepsilon > 0$.

Применив данное неравенство к правой части (3.1.30), получим неравенство

$$\left\|L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t},\right)u\right\| \le c\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^m\|u\|\right)^2. \qquad (3.1.31)$$

Применим неравенство (3.1.31) к правой части (3.1.29). Имеем оценку

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \le c_1\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \|f\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \qquad (3.1.32)$$

Применим к правой части неравенства (3.1.32) оценку (3.1.10). Имеем неравенство

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \le c_1 \cdot \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(\|f\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right),$$

или, выбирая $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{c_1}$, получим неравенство

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 \le \varepsilon_1\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+c_2\left(\varepsilon_1\right)\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right),$$

справедливое для любого $\varepsilon_1>0$ с постоянной $c_2\left(\varepsilon_1\right)>0$, зависящей только от ε.

Лемма 3.1.3 доказана

Лемма 3.1.4. Пусть функция $u(t)$, принадлежащая пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и удовлетворяет равенствам (3.1.3). Пусть условия 4 и 5 выполнены и $\dfrac{m}{3}$ – целое число. Тогда справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+$$
$$+c(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \tag{3.1.33}$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon>0$ с постоянной $c(\varepsilon)>0$, зависящей только от ε.

Доказательство. Умножим обе части равенства (3.1.3) на функцию $\overline{-bD_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u}$ и проинтегрируем по отрезку $[0;d]$. Получим равенство

$$-\mathrm{Re}\left(L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u,bD_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)+|b|^2\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=-\mathrm{Re}\left(f,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right),$$

или

$$-\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)-\mathrm{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\bar{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)+$$
$$+|b|^2\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=-\mathrm{Re}\left(f,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right). \tag{3.1.34}$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части равенства (3.1.34). Интегрируя по частям $\frac{2m}{3}$ раз, получим равенство

$$-\left(D^{2m}_{\alpha,t}u, D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial^2_t u\right) = -\left(D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial^2_t u\right) - -\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d) D^{2m-1-j}_{\alpha,t}u(d)\cdot \overline{D^{\frac{2m}{3}+j}_{\alpha,t}\partial^2_t u(d)}. \tag{3.1.35}$$

Коммутируя операторы $D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}$ и ∂_t, получим равенство

$$-\left(D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial^2_t u\right) = -\left(D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u, \partial_t D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right) - \left(D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right), \tag{3.1.36}$$

где $I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)$ – коммутатор операторов $D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}$ и ∂_t.

$$I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u = D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u - \partial_t D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u = \sum_{j_1=0}^{\frac{4m}{3}-1}\sum_{j_2=0}^{1} c^{\frac{4m}{3},1}_{j_1,j_2}(t) D^{j_1}_{\alpha,t}\partial^{j_2}_t u. \tag{3.1.37}$$

Интегрируя по частям, получим равенство

$$-\left(D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u, \partial_t D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right) = \left(\partial_t D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right) - D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u(t)\cdot\overline{D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u(t)}\Big|_0^d = \left(D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right) + \left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right) - -D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u(d)\cdot\overline{D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u(d)} = \left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2 + \left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right) - -D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u(d)\cdot\overline{D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u(d)}, \tag{3.1.38}$$

где $I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)$ - коммутатор операторов ∂_t и $D_{\alpha,t}$.

$$I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u = \partial_t D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}u - D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u = \sum_{j_1=0}^{\frac{4m}{3}-1}\sum_{j_2=0}^{1} c^{1,\frac{4m}{3}}_{j_1,j_2}(t) D^{j_1}_{\alpha,t}\partial^{j_2}_t u. \tag{3.1.39}$$

Применяя (3.1.39) в (3.1.36),получим равенство

$$-\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t^2 u \right) = \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right\|^2 + \left(I_{1,\frac{4m}{3}} \left(\partial_t, D_{\alpha,t} \right) u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) -$$
$$-D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u(d)} - \left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u, I_{\frac{4m}{3},1} \left(D_{\alpha,t}, \partial_t \right) \partial_t u \right).$$

Используя это равенство в равенстве (3.1.35), получим равенство

$$-\left(D_{\alpha,t}^{2m} u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right) = \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right\|^2 + \left(I_{1,\frac{4m}{3}} \left(\partial_t, D_{\alpha,t} \right) u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) -$$
$$-D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u(d)} - \left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u, I_{\frac{4m}{3},1} \left(D_{\alpha,t}, \partial_t \right) \partial_t u \right) - \tag{3.1.40}$$
$$-\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{2m-1-j} u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j} \partial_t^2 u(d)}.$$

Интегрируя по частям $\frac{m}{3}$ – раз, поучим равенство

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right) &= \operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u \right) + \\ &+ \operatorname{Re}\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}+j} \partial_t^3 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}-1-j} \partial_t^2 u(d)}.\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

Коммутируя операторы $D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}$ и ∂_t, получим равенство

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u \right) &= \operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u \right) + \\ &+ \operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1} \left(D_{\alpha,t} \partial_t \right) \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u \right),\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

где $$I_{\frac{m}{3},1} \left(D_{\alpha,t}, \partial_t \right) u = D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t u - \partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} u = \sum_{j_1=0}^{\frac{m}{3}-1} \sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{\frac{4m}{3},1}(t) D_{\alpha,t}^{j_1} \partial_t^{j_2} u. \tag{3.1.43}$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u \right) = \frac{1}{2} \left| D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u(t) \right|^2 \Big|_{t=0}^{d} = \frac{1}{2} \left| D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u(d) \right|^2. \tag{3.1.44}$$

Применяя (3.1.44) в правой части равенства (3.1.42), получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right)=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u(d)\right|^2+\operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1}\left(D_{\alpha,t}\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right). \tag{3.1.45}$$

Применяя (3.1.45) в правой части (3.1.41), получим равенство

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u(d)\right|^2+\operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1}\left(D_{\alpha,t}\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right)+\\+\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}+j}\partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}-1-j}\partial_t^2 u(d)}.\end{gathered} \tag{3.1.46}$$

Применим равенства (3.1.40) и (3.1.46) в (3.1.34), получим равенство

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\Bigg[\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\operatorname{Re}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-\\-\operatorname{Re}D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)}-\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)-\\-\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j}\partial_t^2 u(d)}\Bigg]-\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\bar{b}a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)+\\+|b|^2\left[\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u(d)\right|^2+\operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}^{\frac{m}{3}-1} D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}+j}\partial_t^3(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}-j-1}\partial_t^2 u(d)}\cdot i\alpha(d)\right)+\right.\\\left.\operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right)=\operatorname{Re}\left(f, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right).\right.\end{gathered}$$

Из этого равенства выводим следующее неравенство

$$
\begin{aligned}
&\left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right\|^2 \le c\Bigg(\left| f, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right| + \left| \left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) \right| + \\
&+\left| \left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right) \partial_t u \right) \right| + \left| \left(I_{\frac{m}{3},1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right) \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}} \partial_t^2 u \right) \right| + \\
&+\left| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u(d)} \right| + \sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} \left| D_{\alpha,t}^{2m-1-j} u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j} \partial_t^2 u(d)} \right| + \\
&+\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1} \left| D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}+j} \partial_t^3 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}-j-1} \partial_t^2 u(d)} \right| + \sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ j\ne 2m}} \left| a_{\tau j} \xi^{\tau} \left(D_{\alpha,t}^{j} u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right) \right| \Bigg).
\end{aligned}
\tag{3.1.47}
$$

Оценим слагаемые в правой части (3.1.47). Используя неравенство Коши – Буняковского получим оценку

$$
\left| \left(f, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right) \right| \le \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| f \|^2, \tag{3.1.48}
$$

справедливую при любом $\varepsilon > 0$.

С помощью неравенства Коши – Буняковского получим неравенство

$$
\left| \left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) \right| \le \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right\|^2 + \frac{c}{\varepsilon} \sum_{j_1=0}^{\frac{4m}{3}-1} \sum_{j_2=0}^{1} \left\| D_{\alpha,t}^{j_1} \partial_t^{j_2} u \right\|^2,
$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от u и ξ.

Применяя (1.1.10), для оценки последней суммы в правой части этого неравенства получаем неравенство

$$
\begin{aligned}
&\left| \left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) \right| \le \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right\|^2 + \\
&+\frac{c}{\varepsilon} \left(\varepsilon_1 \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right\|^2 + \varepsilon_1 \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} u \right\| + \varepsilon_1 \left\| \partial_t^3 u \right\|^2 \right) + c(\varepsilon_1)\left(1 + |\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2.
\end{aligned}
$$

Полагая в данном неравенстве $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon^2}{c}$, получим оценку

$$\left|\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le 2\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \varepsilon\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|$$

$$+c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

полагая $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим оценку

$$\left|\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon_2\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|\right)$$
$$+c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.49}$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon_2 > 0$ с константой $c_2(\varepsilon) > 0$, зависящей только от ε_2 ,но не зависящей от u и ξ.

Аналогично получим оценки

$$\left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \right.$$
$$\left.\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.50}$$

$$\left|\left(I_{\frac{m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right)\right| \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) +$$
$$+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.51}$$

Учитывая условия (3.1.3), получим

$$\left|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\right| \cdot \left|\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)}\right| \le \sum_{j=m}^{\frac{4m}{3}+1}\left|\partial_t^j u(d)\right|^2.$$

С помощью теоремы «о следах», получим оценку

$$\left|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\right| \cdot \left|\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)}\right| \le \varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2 dt + c(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}|u(t)|^2 dt \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 +$$
$$+(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.52}$$

Аналогично получим оценку

$$\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1}\left|D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j}\partial_t^2 u(d)}\right|\le c\sum_{j=m}^{2m-1}\left|\partial_t^j u(d)\right|\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+ \tag{3.1.53}$$
$$+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}+j}\partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}-j-1}\partial_t^2 u(d)}\right|\le\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.54}$$

С помощью неравенства Коши - Буняковского и оценки (1.1.10), получим неравенство

$$\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)\right|\le\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\frac{c}{\varepsilon_1}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|\le$$
$$\le\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\frac{c}{\varepsilon_1}\left(\varepsilon_2\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_1(\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)\le \tag{3.1.55}$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Оценки (3.1.50) – (3.1.55) справедливы при любом $\varepsilon>0$ с константами $c(\varepsilon)>0$, зависящими только от ε.

Применяя оценки (3.1.48) – (3.1.55) в правой части неравенства (3.1.47), получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|\right)+ \tag{3.1.56}$$
$$+c(\varepsilon)\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right),$$

что и доказывает лемму 3.1.4.

Лемма 3.1.5. Пусть $u(t)$ функция, принадлежащая пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и удовлетворяющая равенствам (3.1.3). Пусть условия 4, 5 выполняются и $\dfrac{m}{3}$ - целое число. Тогда справедлива оценка

$$\left\| D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right\|^2 \le \varepsilon \left(\left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right\|^2 + \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right\|^2 + \left\| \partial_t^3 u \right\|^2 \right) + \tag{3.1.57}$$
$$+ c(\varepsilon) \left(\left(1 + |\xi|^2 \right)^{2m} \|u\|^2 + \left\| A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u \right\|^2 \right).$$

Здесь $\varepsilon > 0$ - любое число, $c(\varepsilon) > 0$ - константа, которая зависит лишь от $\varepsilon > 0$, но не зависит от u и ξ.

Доказательство. Умножим обе части равенства (3.1.1) скалярно на функцию $\overline{b D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u}$ и проинтегрируем по отрезку $[0;d]$. Получим равенство

$$\operatorname{Re} \bar{b} a_{02m} \left(D_{\alpha,t}^{2m} u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) + \operatorname{Re} \sum_{\substack{j+|\tau| \le 2m \\ j \ne 2m}} \bar{b} a_{\tau j} \xi^{\tau} \left(D_{\alpha,t}^{j} u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) - \tag{3.1.58}$$
$$- |b|^2 \operatorname{Re} \left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) = \operatorname{Re} \left(f, b D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right).$$

Интегрируя по частям $\dfrac{2m}{3}$ - раз, получим равенство

$$\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) = \left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right) + \tag{3.1.59}$$
$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j} \partial_t^3 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-1-j} \partial_t u(d)}.$$

Коммутируя операторы $D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}$ и ∂_t, получим равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right) = \left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right) + \tag{3.1.60}$$
$$\left(I_{\frac{2m}{3},1} \left(D_{\alpha,t} \partial_t \right) \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right),$$

где $I_{\frac{2m}{3},1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u = D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u - \partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} u = \sum_{j_1=0}^{\frac{2m}{3}-1} \sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{\frac{2m}{3},1}(t) D_{\alpha,t}^{j_1} \partial_t^{j_2} u,$

$c_{j_1,j_2}^{\frac{2m}{3},1}$ - непрерывные на отрезке $[0;d]$ функции, зависящие от $\alpha(t)$ и производных ее до порядка $\frac{2m}{3}-1$.

Интегрируя по частям, получим равенство

$$\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u\right) = -\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, \partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u\right) + D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u(d)}. \quad (3.1.61)$$

Коммутируя операторы ∂_t и, $D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}$ получим равенство

$$\begin{aligned}
&-\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, \partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u\right) = -\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right) - \\
&-\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right) \qquad (3.1.62)\\
&= -\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 - \left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right),
\end{aligned}$$

где

$$I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u = \partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}u - D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u = \sum_{j_1=0}^{\frac{2m}{3}-1}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{1,\frac{2m}{3}}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u, \quad (3.1.63)$$

где функции $c_{j_1,j_2}^{1,\frac{2m}{3}}$ - непрерывные на отрезке $[0;d]$ функции, зависящие только от $\alpha(t)$ и производных этой функции до порядка $\frac{2m}{3}-1$.

Применяя (3.1.62) к правой части (3.1.61), получаем равенство

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u\right) = -\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u} - \\
&-\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right).
\end{aligned} \quad (3.1.64)$$

Применяя (3.1.64) к правой части (3.1.60), получаем равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right) = -\left\| D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right\|^2 + D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u} -$$

$$-\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}} \left(\partial_t, D_{\alpha,t} \right) \partial_t u \right) + \left(I_{\frac{2m}{3},1} \left(D_{\alpha,t}, \partial_t \right) \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right). \quad (3.1.65)$$

Применяя (3.1.65) к правой части (3.1.59), получим равенство

$$\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) = -\left\| D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right\|^2 + D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u(d)} -$$

$$-\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}} \left(\partial_t, D_{\alpha,t} \right) \partial_t u \right) + \left(I_{\frac{2m}{3},1} \left(D_{\alpha,t}, \partial_t \right) \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j} \partial_t^3 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-1-j} \partial_t u(d)}.$$

Отсюда получим равенство

$$-|b|^2 \operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) = |b|^2 \left\{ \left\| D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u \right\|^2 + \right.$$

$$+ \operatorname{Re}\left\{ \left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}} \left(\partial_t, D_{\alpha,t} \right) \partial_t u \right) - D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t^2 u(d)} - \right. \quad (3.1.66)$$

$$-\left(I_{\frac{2m}{3},1} \left(D_{\alpha,t}, \partial_t \right) \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}} \partial_t u \right) -$$

$$\left. \left. - \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j} \partial_t^3 u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-1-j} \partial_t u(d)} \right\} \right\}.$$

Рассмотрим теперь слагаемое в левой части равенства (3.1.56). Интегрируя по частям $\frac{m}{3}$ раз, получим равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^{2m} u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}} \partial_t u \right) = \left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}} u, D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}} \partial_t u \right) + \sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{2m-1-j} u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j} \partial_t u(d)}. \quad (3.1.67)$$

Коммутируя операторы $D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}$ и ∂_t, получим равенство

$$D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}} \partial_t u = \partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}} u + I_{\frac{5m}{3},1} \left(D_{\alpha,t}, \partial_t \right) u, \quad (3.1.68)$$

где $I_{\frac{5m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u=D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}\partial_t u-\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u=\sum_{j_1=0}^{\frac{5m}{3}-1}\sum_{j_2=0}^{1}c_{j_1,j_2}^{\frac{5m}{3},1}(t)D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u.$

Используя равенство (3.1.68) в правой части равенства (3.1.67), получим равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u,\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u\right)+\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u,I_{\frac{5m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j}\partial_t u(d)}.$$

Из этого равенства, учитывая условие $\operatorname{Im}\bar{b}a_{02m}=0$, получим равенство

$$\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\cdot\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\cdot\left\{\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u,\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u\right)+\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u,I_{\frac{5m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j}\partial_t u(d)}\right\}.$$

Отсюда получим равенство

$$\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\cdot\left\{\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u,I_{\frac{5m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2+\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j}\partial_t u(d)}\right\}. \tag{3.1.69}$$

Используя равенства (3.1.66) и (3.1.67), выводим из (3.1.58) неравенство

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 \le c\left(\left|\left(f, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| + \sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| + \right.$$

$$+\left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right| + \left|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u(d)}\right| + \tag{3.1.70}$$

$$+\left|\left(I_{\frac{2m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u(d)\right)\right| +$$

$$\left. +\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1}\left|i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j}\partial_t u(d)}\right|\right).$$

С некоторой константой $c>0$, не зависящей от u и ξ.

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (3.1.70). Применив неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\left|\left(f, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2. \tag{3.1.71}$$

Применив неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \frac{c_1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2,$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$,с константой $c_1>0$, не зависящей от ε, u, ξ. Используя оценку (1.1.10) в правой части данного неравенства, получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \tag{3.1.72}$$

$$+\frac{c_1}{\varepsilon}\left(\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c_2(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right).$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon_1>0$, константа $c_2(\varepsilon)>0$ зависит только от $\varepsilon_1>0$.

Выбирая в неравенстве (3.1.72) $\varepsilon_1=\varepsilon^2\dfrac{1}{c_1}$, получим оценку

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon_1\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \right.$$

$$\left. +\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c_3\left(\varepsilon_1\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right), \tag{3.1.73}$$

справедливую при любом $\varepsilon_1 > 0$ с константой $c_3\left(\varepsilon\right) > 0$,зависящей только от ε_1.

С помощью неравенство Коши – Буняковского получим оценку

$$\left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \frac{c_4}{\varepsilon}\sum_{j_1=0}^{\frac{2m}{3}-1}\sum_{j_2=0}^{1}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u\right\|^2,$$

справедливую при любом $\varepsilon > 0$ с константой $c_4 > 0$,не зависящей только от ξ и u.

Используя оценку (1.1.10) в правой части данного неравенства, получим неравенство

$$\left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \frac{c_4}{\varepsilon}\left(\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + \varepsilon_1\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right.$$

$$\left. +\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + c_5\left(\varepsilon_1\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right),$$

справедливую при любом $\varepsilon_1 > 0$. Константа $c_5\left(\varepsilon_1\right) > 0$ зависит только от ε_1.

Выбирая в этом неравенстве, например, $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon^2}{c_4}$, получим при любом $\varepsilon_1 > 0$ неравенство

$$\left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u, I_{1,\frac{2m}{3}}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon_1\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right.$$

$$\left. +\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2\right) + c_6\left(\varepsilon_1\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.74}$$

Здесь константа $c_6\left(\varepsilon_1\right) > 0$ зависит лишь от $\varepsilon_1 > 0$.

Аналогично получим оценку

$$\left|\left(I_{\frac{2m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2\right) + c_7(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.75}$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon > 0$ с константой $c_7(\varepsilon) > 0$, зависящей только от $\varepsilon > 0$.

Аналогично равенствам (3.1.72) и (3.1.73) выводим при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}\partial_t u, I_{\frac{5m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)\right| \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2\right) + c_8(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.76}$$

Здесь константа $c_8(\varepsilon) > 0$ зависит только от ε.

С помощью теоремы «о следах» получим оценку

$$\left|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u(d)\right| \le c_9\sum_{j=m}^{\frac{2m}{3}+2}\left|\partial_t^j u(d)\right|^2 \le \varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2 dt +$$

$$+c_{10}(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}|u(t)|^2 dt \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c_{11}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.77}$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon > 0$ с постоянной $c(\varepsilon) > 0$, зависящей от ε.

Аналогично получим оценку

$$\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1}\left|i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j}\partial_t^3u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-j-1}\partial_tu(d)}\right|\le c_{10}\sum_{j=m}^{\frac{4m}{3}+2}\left|\partial_t^ju(d)\right|^2\le$$

$$\le\varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2dt+ \qquad (3.1.78)$$

$$+c_{12}(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|u(t)\right|^2dt\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_{13}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Здесь $\varepsilon>0$ – любое число, $c_{13}(\varepsilon)>0$ - константа, зависящая от ε.

Аналогично оценкам (3.1.77) и (3.1.78) получим неравенства

$$\left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_{14}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \qquad (3.1.79)$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1}\left|\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-j-1}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j}\partial_tu(d)}\right|\le\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_{15}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \qquad (3.1.80)$$

Эти неравенства справедливы при любом $\varepsilon>0$ с константами, зависящими только от ε.

Применим неравенства (3.1.71), (3.1.73) – (3.1.80) в правой части неравенства (3.1.70), получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_tu\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right\|^2\right)+c_{16}(\varepsilon)\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right),$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$ с константой $c_{16}(\varepsilon)>0$, зависящей только от ε.

Лемма 3.1.5 доказана.

Лемма 3.1.6 Пусть функция $u(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и удовлетворяет равенствам (3.1.3). При выполнении условий 4; 5 и при $\dfrac{m}{3}$ - целом, выполняется оценка

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 - \left(1+|\xi|^2\right)^m\left\{\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)} - \left|\partial_t u(0)\right|^2\right\}\right), \quad (3.1.81)$$

с константой $c>0$, не зависящей от u и ξ.

Доказательство. Сложим почленно неравенства (3.1.5), (3.1.10), (3.1.28), (3.1.32) и (3.1.55), получим оценку

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2 +$$

$$+\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2 + \left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right\|^2\right) +$$

$$+c(\xi)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right),$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$ с константой $c(\varepsilon)$,зависящей только от ε. Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым в данном неравенстве, получим

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left\|D^{\frac{4m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t u\right\|^2 +$$

$$+\left\|D^{\frac{2m}{3}}_{\alpha,t}\partial_t^2 u\right\|^2 \le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \right. \quad (3.1.82)$$

$$\left.\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right).$$

Из неравенства (3.1.5) выводим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 \le c_1\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right).$$

Используя в правой части неравенства (3.1.82) вышеуказанное неравенство, имеем оценку

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2u\right\|^2+$$

$$+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_tu\right\|^2\le \tag{3.1.83}$$

$$\le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_tu(0)\right|^2-\operatorname{Re}\partial_t^2u(0)\overline{u(0)}\right)\right).$$

Заметим, что выражение, стоящее в левой части неравенства (3.1.83) есть норма, эквивалентная норме в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$. Отсюда и из (3.1.83) получим оценку (3.1.81).

Лемма 3.1.6 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $\dfrac{m}{3}$ не является целым числом. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.1.4′. Пусть $u(t)\in\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$ и удовлетворяет равенствам (3.1.3). Пусть выполнены условия 4 и 5, $\dfrac{m}{3}$ не является целым числом.

Тогда справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_tu\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|+\right.$$

$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_tu\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u\right\|^2\right)+ \tag{3.1.84}$$

$$+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right).$$

Справедливая при любом $\varepsilon>0$ с константой $c(\varepsilon)>0$, зависящей только от $\varepsilon>0$.

В этом неравенстве k – целое число такое, что $k\in\left[0;\dfrac{m}{3}\right]$.

Доказательство. Умножим обе части равенства (3.1.3) на функцию $-bD_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}$. Затем проинтегрируем получено равенство по $t\in[0;d]$.

Получим равенство

$$-\mathrm{Re}\,\overline{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k} -$$

$$-\mathrm{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}} \overline{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)+$$

$$+|b|^2\,\mathrm{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k} = -\mathrm{Re}\left(f, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}.$$

(3.1.85)

Так как по условию $\mathrm{Im}\,\overline{b}a_{02m}=0$, то получим равенство

$$-\mathrm{Re}\,\overline{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right) = -\mathrm{Re}\,\overline{b}a_{02m}\cdot \mathrm{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right). \qquad (3.1.86)$$

Интегрируя по частям $(m-k)$ – раз получим

$$\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right) = \left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t^2 u\right)+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-k-1} i\alpha(d)\cdot D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k+j}\partial_t u(d)}. \qquad (3.1.87)$$

Прокоммутируем операторы $D_{\alpha,t}^{m+k}$ и ∂_t, получим

$$D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u = \partial_t D_{\alpha,t}^{m+k}u + I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, \qquad (3.1.88)$$

где $I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u = D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u - \partial_t D_{\alpha,t}^{m+k}u = \sum_{j_1=0}^{m+k-1}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{m+k,1}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u,$

здесь $c_{j_1,j_2}^{m+k,1}$ - непрерывные на $[0;d]$ функции, зависящие только от функции $\alpha(t)$ и производных ее до порядка $m+k-1$.

Используя (3.1.88), получим равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t^2 u\right) = \left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, \partial_t D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right) + \left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, I_{m+k}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right). \qquad (3.1.89)$$

Интегрируя по частям, получим равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, \partial_t D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right) = -\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{m+k}u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right) + D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}. \qquad (3.1.90)$$

Коммутируя операторы ∂_t и $D_{\alpha,t}^{m+k}$, получим

$$\partial_t D_{\alpha,t}^{m+k}u = D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t + I_{1,m+k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, \qquad (3.1.91)$$

где $I_{1,m+k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) = \sum_{j_1=0}^{m+k}\sum_{j_2=0}^{1} c_{j_1,j_2}^{1,m+k}(t) D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u.$

Применяя равенство (3.1.91) в равенстве (3.1.90), получим равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u,\partial_t D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)=-\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2-\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)+$$
$$+D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}.$$

Используя равенство, записанное выше, в правой части (3.1.89), получим

$$\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t^2 u\right)=-\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2-\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)+$$
$$+D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}+\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u,I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right).$$

Применим равенство, записанное выше, в правой части (3.1.87), получим

$$\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)=-\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2-\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)+$$
$$+D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}+\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u,I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)+\tag{3.1.92}$$
$$+\sum_{j=0}^{m-k-1}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2k+j}u(d)}.$$

Из (3.1.86) и (3.1.90) получим равенство

$$-\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)=\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2-\mathrm{Re}\,\bar{b}a_{02m}\left\{-\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)+\right.$$
$$+D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}+\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u,I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)+$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{m-k-1}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2k+j}u(d)}\right\}.$$

(3.1.93)

Рассмотрим теперь выражение $\mathrm{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)$. Интегрируя в этом выражении по частям k, получим равенство

$$\mathrm{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\mathrm{Re}\left(D_{\alpha,t}^{k}\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{k}\partial_t^2 u\right)+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-k-1}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^3 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j-1}\partial_t^2 u(d)}.\tag{3.1.94}$$

Коммутируя операторы $D_{\alpha,t}^{k}$ и ∂_t, получим

$$D_{\alpha,t}^{k}\partial_t u=\partial_t D_{\alpha,t}^{k}u+I_{k,1}\left(D_{\alpha,t}^{k},\partial_t\right)u,\tag{3.1.95}$$

где $I_{k,1}\left(D_{\alpha,t}^{k},\partial_t\right)u=\sum_{j_1=0}^{k-1}\sum_{j_2=0}^{1}c_{j_1,j_2}^{k,1}(t)D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u,$

а функции $c_{j_1,j_2}^{k,1}(t)$, непрерывны на отрезке $[0;d]$, зависящие от $\alpha(t)$ и производных ее до порядка $k-1$.

Используя (3.1.93) в правой части (3.1.94), получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right) = \operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^k \partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^k \partial_t^2 u\right) + \operatorname{Re}\left(I_{k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^k \partial_t^2 u\right) + $$
$$+\sum_{j=0}^{k-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^j \partial_t^3 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j-1}\partial_t^2 u(d)}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right) = \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^k \partial_t^2 u(d)\right|^2 + \operatorname{Re}\left(I_{k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^k \partial_t^2 u\right) + $$
$$+\sum_{j=0}^{k-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^j \partial_t^3 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j-1}\partial_t^2 u(d)}. \qquad (3.1.96)$$

Используя равенства (3.1.93) и (3.1.94) в равенстве (3.1.85), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2 \le c\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\{\left|\left(f, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right| + \right.$$
$$+\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right| + \left|\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right| +$$
$$\left|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}\right| + \left|\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)\right| + \qquad (3.1.97)$$
$$+\sum_{j=0}^{m-k-1}\left|\alpha(d) D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k+j}u(d)}\right| + \left|D_{\alpha,t}^k \partial_t^2 u(d)\right|^2 +$$
$$\left. +\left|\left(I_{k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t^2 u, D_{\alpha,t}^k \partial_t^2 u\right)\right| + \sum_{j=0}^{k-1}\left|\alpha(d) D_{\alpha,t}^j \partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j-1}\partial_t^2 u(d)}\right|\right\},$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (3.1.95). Используя неравенство Коши – Буняковского, получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left|\left(f, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right| \le \varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2. \qquad (3.1.98)$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon > 0$.

Аналогично, с использованием неравенства Коши – Буняковского, получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right|=$$

$$=\sum_{j=0}^{2m-1}\left|\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}D_{\alpha,t}^{j}u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right|\leq$$

$$+\sum_{j=0}^{2m-1}\left\{\varepsilon\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|\right|\right\}.$$

Это неравенство справедливо для любого $\varepsilon>0$.

Используя оценку (1.1.10)в правой части данного неравенства, получим

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)+\frac{m}{3}-k}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right|\leq(2m-1)\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}+$$

$$=\sum_{j=0}^{2m-1}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right\}\leq\varepsilon_2\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\cdot\right. \quad (3.1.99)$$

$$\left.\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2\right)+c_1(\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon_2>0$. С константой $c_1(\varepsilon_2)>0$, зависящей только от ε_2.

Учитывая вид оператора $I_{1,m+k}(\partial_t, D_{\alpha,t})$, получим с помощью неравенства Коши - Буняковского оценку.

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left|\left(I_{1,m+k}(\partial_t, D_{\alpha,t})u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right|\leq\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\cdot$$

$$\cdot\left\{\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2+\frac{c_2}{\varepsilon}\sum_{j_1=0}^{m+k-1}\sum_{j_2=0}^{1}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u\right\|^2\right\}.$$

Используя в этом неравенстве оценку (1.1.10), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left|\left(I_{1,m+k}(\partial_t, D_{\alpha,t})u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right|\leq\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\cdot$$

$$\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2+\frac{c_2}{\varepsilon}\left(\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2+\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_1\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+c_3(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right).$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon^2}{c_2}$, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left|\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right| \le 2\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2 + \\ +\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \varepsilon\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + c_4(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.100}$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$. С константой $c_4(\varepsilon) > 0$, зависящей только от ε.

Аналогично неравенству (3.1.100) получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left|\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u, I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \right. \\ \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \\ +c_5(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.101}$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$. С константой $c_5(\varepsilon) > 0$, зависящей только от ε.

$$\left|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)\right|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k} \le c_6\left(1+|\xi|\right)^{\frac{m}{3}-k}\sum_{j=0}^{m+k+1}\left|\partial_t^j u(d)\right| \le \\ \le \varepsilon\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u(t)\right|^2 dt + c_7(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|u(t)\right|^2 dt \le \varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\| + \\ +c_8(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.102}$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon_1 > 0$. С константой $c_8(\varepsilon_1) > 0$, зависящей только от ε_1.

Аналогично получим неравенства, учитывая равенства (3.1.3),

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\sum_{j=0}^{m-k-1}\left|\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k+j}u(d)}\right|\le c_9\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=m-2k}^{m-k-1}\left|D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k+j}u(d)}\right|\le c_{10}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\sum_{j_1=0}^{m+2k-1}\left|\partial_t^{j_1}u(d)\right|^2\le \tag{3.1.103}$$

$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_{10}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left|D_{\alpha,t}^{k}\partial_t^2u(d)\right|^2\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_{11}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{3.1.104}$$

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\sum\left|\alpha(d)D_{\alpha,t}^{j}u(d)\partial_t^3u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j-1}\partial_t^2u(d)}\right|\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+ \tag{3.1.105}$$

$$+c_{12}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Неравенства (3.1.103) – (1.3.105) справедливы при любом $\varepsilon>0$ с константами $c_j(\varepsilon)$, $j=10,11,12$, зависящими только от ε.

Применим неравенства (3.1.98) – (3.1.105) в правой части неравенства (3.1.97), получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2\le\varepsilon\left\{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2\right\}+$$

$$+c_{13}(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\|f\|^2\right),$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$ с константой $c_{13}(\varepsilon)>0$,зависящей только от ε.

Лемма 3.1.4' доказана.

Следствие 3.1. При выполнении условий леммы 3.1.4' справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2 \le \varepsilon\left\{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 + \right.$$

$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\Bigg\} + \qquad (3.1.106)$$

$$+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2\right),$$

справедливая при любом $\varepsilon > 0$ с константой $c\ (\varepsilon) > 0$,зависящей только от ε.

Для доказательства достаточно в оценке (3.1.84) положить $k = \left[\frac{m}{3}\right]$,

тогда так как $\frac{m}{3} - k = \frac{m}{3} - \left[\frac{m}{3}\right] = \frac{4m}{3} - \left[\frac{4m}{3}\right]$, то из (3.1.82) вытекает (3.1.106).

Лемма 3.1.4' доказана.

Лемма 3.1.5'. Пусть $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ и удовлетворяет равенствам (3.1.3).

Пусть выполнены условия 4 и 5, $\frac{m}{3}$ не является целым числом. Тогда при

любом целом $k \in \left[0;\frac{m}{3}\right]$ справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right.$$

$$\left. +\left(1+|\xi|\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2\right). \qquad (3.1.107)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ - любое число, константа $c(\varepsilon) > 0$ зависит лишь от ε.

Доказательство. Умножим обе части равенства (3.1.1) на функцию $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\overline{bD_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u}$, и проинтегрируем по обе части равенства по отрезку $[0;d]$. Получим равенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)+\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\bar{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{4m}\partial_t u\right)-\right.$$

$$\left.-|b|^2\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right\}=\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(f,\bar{b}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right).$$

Так как по условию $\operatorname{Im}\bar{b}a_{02m}=0$, то получим равенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\cdot\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)-|b|^2\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right\}=$$

$$=\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(f,bD_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\cdot \tag{3.1.108}$$

$$\cdot\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\operatorname{Re}\bar{b}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{4m}\partial_t u\right).$$

Рассмотрим вначале слагаемые, стоящие в левой части равенства (3.1.108). Интегрируя по частям $(2m-k)$ раз получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u, D_{\alpha,t}^{m+2k}\partial_t u\right)+$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{m-2k-1} i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k+j}\partial_t u(d)}. \tag{3.1.109}$$

Коммутируя операторы $D_{\alpha,t}^{m+2k}$ и ∂_t, получил равенство

$$D_{\alpha,t}^{m+2k}\partial_t u=\partial_t D_{\alpha,t}^{m+2k}u+I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, \tag{3.1.110}$$

где $I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u=\sum_{j_1=0}^{m+2k-1}\sum_{j_2=0}^{1}c_{j_1,j_1}^{m+2k,1}(t)D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u.$

Используя равенство (3.1.110) в правой части равенство (3.1.109), получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u, \partial_t D_{\alpha,t}^{m+2k}u\right)+$$

$$+\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u, I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k},\partial_t\right)u\right)+ \tag{3.1.111}$$

$$+\sum_{j=0}^{m-2k-1} i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k+j}\partial_t u(d)}.$$

Заметим, что так как $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$, то

$$\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u,\partial_t D_{\alpha,t}^{m+2k}u\right)=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u\right|^2\Big|_0^d=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u(d)\right|^2.$$

Применив к правой части равенства (3.1.111) это равенство, получим

$$\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u(d)\right|^2+\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u,I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{m-2k-1} i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-1-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k+j}\partial_t u(d)}.$$

Отсюда получим равенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\cdot\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\cdot\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=\operatorname{Re}\bar{b}a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u(d)\right|^2+\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u,I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)+\right. \tag{3.1.112}$$
$$\left.+\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{m-2k-1} i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{2m-j-1}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k+j}\partial_t u(d)}\right.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в левой части равенства (3.1.108). Интегрируя по частям и учитывая равенства (3.1.3), получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=-\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u,\partial_t D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right). \tag{3.1.113}$$

Коммутируя операторы ∂_t и $D_{\alpha,t}^{4k}$, получим равенство

$$\partial_t D_{\alpha,t}^{4k}u=D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u+I_{1,4k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right), \tag{3.1.114}$$

где $I_{1,4k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u=\sum\limits_{j_1=0}^{4k-1}\sum\limits_{j_2=0}^{1}c_{j_1,j_1}^{1,4k}(t)D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u$.

Применяя равенство (3.1.114) в правой части равенства (3.1.113), получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)=-\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t^2 u\right)-\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u,I_{1,4k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right). \tag{3.1.115}$$

Интегрируя по частям $2k$ раз, получим равенство

$$\left(\partial_t^2 u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t^2 u\right)=\left(D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)+\sum_{j=0}^{2k-1}D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^2 u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{4k-1-j}\partial_t^2 u(d)\cdot i\alpha(d).$$

Используя это равенство в правой части равенства (3.1.115), получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right) = -\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 - \sum_{j=0}^{2k-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^2 u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{4k-1-j}\partial_t^2 u(d) -$$
$$-\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right).$$

Из этого равенства получим следующее равенство

$$-|b|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right) = |b|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 +$$
$$+|b|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\sum_{j=0}^{2k-1} i\alpha(d) D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k-1-j}\partial_t^2 u(d)} + \right. \tag{3.1.116}$$
$$\left. +\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right\}.$$

Используя равенства (3.1.112) и (3.1.116) в левой части равенства (3.1.108), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 \le c\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\left|\left(f, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right| + \right.$$
$$+\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right| + \left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u(d)\right|^2 +$$
$$+\left|\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u, I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)\right| + \sum_{j=0}^{m-2k-1}\left|D_{\alpha,t}^{2m-j-1}u(d), \overline{D_{\alpha,t}^{4k+j}\partial_t u(d)}\right| + \tag{3.1.117}$$
$$\left. +\sum_{j=0}^{2k-1}\left|D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^2 u(d)\right|\cdot\left|D_{\alpha,t}^{4k-1-j}\partial_t^2 u(d)\right| + \left|\left(\partial_t^2 u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right|\right\}.$$

В этой оценке константа $c>0$ не зависит от ξ и u.

Оценим каждый член из правой части (3.1.117). Используя неравенство Коши – Буняковского, получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(f, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right| \le \varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2, \tag{3.1.118}$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$.

Аналогично, с помощью неравенства Коши – Буняковского, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|\le\sum_{j=0}^{2m-1}\left\{\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2\right\}.$$

Применяя для оценки последнего слагаемого в правой части этого неравенства оценку (1.1.10), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|\le 2m\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\varepsilon_2\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_1(\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right).$$

Возьмем в этом неравенстве $\varepsilon_2=\varepsilon_1{}^2$, получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|\le 2m\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+2m\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_2(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

справедливую при любом $\varepsilon_1>0$ с константой $c_2(\varepsilon_1)>0$, зависящей только от ε_1.

Возьмем в этом неравенстве $\varepsilon=2m\varepsilon_1$, получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}(2m-j)}\left|\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right|\le$$

$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|\right)+c_3(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Эта оценка справедлива для любого $\varepsilon>0$ константой $c_3(\varepsilon)>0$,зависящей от ε, но не зависящей от ξ и u.

Учитывая вид оператора $I_{m+2k,1}(D_{\alpha,t},\partial_t)$, используя неравенство Коши – Буняковского, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u,I_{m+2k,1}(D_{\alpha,t},\partial_t)u\right)\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$

$$+c_4(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\sum_{j_1=0}^{4k-1}\sum_{j_2=0}^{1}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u\right\|^2.$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon>0$ с константой $c_4(\varepsilon)>0$, зависящей только от ε.

С использованием (1.1.10) в правой части данного неравенства, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u, I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)\right|\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$
$$+\varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}+\varepsilon_1\left\|\partial_t^3u\right\|^2+c_5(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \quad (3.1.119)$$

Из этого неравенства выводим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u, I_{m+2k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right)\right|\le\varepsilon_2\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}+\left\|\partial_t^3u\right\|^2\right)+c_6(\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \quad (3.1.120)$$

здесь $\varepsilon_2>0$ – любое число, константа $c_6(\varepsilon_2)>0$ зависит от ε, но не зависит от ξ и u.

Аналогично оценке (3.1.120) получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(\partial_t^2u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right|\le\varepsilon_1\left\|\partial_t^3u\right\|^2+c_7(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\cdot$$
$$\cdot\sum_{j_1=0}^{4k-1}\sum_{j_2=0}^{1}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}\partial_t^{j_2}u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|\partial_t^3u\right\|+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2\right)+ \quad (3.1.121)$$
$$+c_7(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

В этом неравенстве $\varepsilon>0$ – любое число, константа $c_7(\varepsilon)>0$ зависит от ε, но не зависит от ξ и u.

С помощью теоремы «о следах» и оценки (1.1.10) получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u(d)\right|^2\le c_8\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\sum_{j=0}^{m+k}\left|\partial_t^j u(d)\right|^2\le$$

$$\le \varepsilon_1 \int\limits_{\frac{d}{2}}^{d} \left| \partial_t^{2m} u(t) \right|^2 dt + c_9(\varepsilon_1) \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \int\limits_{\frac{d}{2}}^{d} \left| u(t) \right|^2 dt \le \varepsilon_2 \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + \tag{3.1.122}$$

$$+ c_{10}(\varepsilon_2) \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2,$$

где $\varepsilon_2 > 0$ – произвольное число, константа $c_{10}(\varepsilon_2) > 0$ не зависит от ξ и u.

Аналогично оценке (3.1.122) получим неравенства

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} \sum_{j=0}^{m-2k-1} \left| D_{\alpha,t}^{m-j-1} u(d) \cdot \overline{D_{\alpha,t}^{4k+j} \partial_t u(d)} \right|^2 \le \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + \tag{3.1.123}$$

$$+ c_{11}(\varepsilon) \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2,$$

и

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} \sum_{j=0}^{2k-1} \left| D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^2 u(d) \right|^2 \cdot \left| D_{\alpha,t}^{4k-1-j} \partial_t^2 u(d) \right| \le \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + \tag{3.1.124}$$

$$+ c_{12}(\varepsilon) \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2.$$

В этих неравенствах $\varepsilon > 0$, константы $c_{11}(\varepsilon) > 0$ и $c_{12}(\varepsilon) > 0$ не зависят от ξ и u.

Применяя неравенства (3.1.118), (3.1.120) – (3.1.124) в правой части неравенства (3.1.117), получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} \left\| D_{\alpha,t}^{2k} \partial_t^2 u \right\|^2 \le \varepsilon \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k} \left\| D_{\alpha,t}^{4k} \partial_t u \right\|^2 + \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + \tag{3.1.125}$$

$$+ \varepsilon \left\| \partial_t^3 u \right\|^2 \Big) + c_{13}(\varepsilon) \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2 + \| f \|^2 \right),$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное число, постоянная $c_{12}(\varepsilon) > 0$ не зависит от ξ и u.
Из (3.1.125) вытекает оценка (3.1.107)

Лемма 3.1.5' доказана.

Следствие 3.2. При выполнении условий леммы 3.1.5' справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\right)+c\ (\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t}\partial_t\right)u\right\|^2\right). \tag{3.1.126}$$

Для доказательства оценки (3.1.126) достаточно в неравенстве (3.1.107) положить $k=\left[\dfrac{m}{3}\right]$.

Лемма 3.1.6'. Пусть $u(t)\in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$ и удовлетворяет равенствам (3.1.3). Пусть выполнены условия 4; 5 и $\dfrac{m}{3}$ – не является целым числом. Тогда справедлива оценка

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le$$

$$c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2-\left(1+|\xi|^2\right)^m\right)\left\{\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\left|\partial_t u(0)\right|^2\right\}, \tag{3.1.127}$$

здесь постоянная $c>0$, не зависит от ξ и u.

Доказательство. Сложим почленно неравенства (3.1.5), (3.1.10), (3.1.27), (3.1.84), (3.1.106), (3.1.107), (3.1.126).

Получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\cdot$$

$$\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\Bigg)+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\right.$$

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2+ \tag{3.1.128}$$

$$+c\ (\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t}\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2-\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right),$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$ с константой $c\ (\varepsilon) > 0$, не зависящей от ξ и u. Заметим, что из неравенства (3.1.5) следует оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 \le c_1\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right).$$

Применяя в правой части (3.1.128) это неравенство, получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\cdot$$

$$\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right.$$

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2 +$$

$$\left.+c_2(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right)\right),$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$ с константой $c_2(\varepsilon) > 0$, не зависящей от ξ и u.

Выбрав в данном неравенстве достаточно малое число $\varepsilon > 0$, получим

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\cdot$$

$$\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \tag{3.1.129}$$

$$c\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right),$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ξ и u.

Заметим, что в левой части неравенства (3.1.129) стоит выражение, эквивалентное норме в пространстве $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, отсюда и из (3.1.129) вытекает оценка.

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\right)+c_2(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t}\partial_t\right)u\right\|^2\right).$$

Лемма 3.1.6' доказана.

3.2 Доказательство априорных оценок решений задачи (4) – (6).

Докажем вначале априорную оценку при $s=2m$.

Рассмотрим функцию $v(x,t)\in H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$, тогда функция $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]$ при всех $\xi\in R^{n-1}$ принадлежит пространству $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Если $v(x,t)$ является решением задачи (4) – (6), то функция $u(\xi,t)$ удовлетворяет условиям лемм 3.1.1 – 3.1.6 или 3.1.4' – 3.1.6'.

Применяя неравенство (3.1.81) если $\frac{m}{3}$ – целое число или неравенство (3.1.127) если $\frac{m}{3}$ не является целым числом, получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|-\left(1+|\xi|^2\right)^m\left\{\operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}-\left|\partial_t u(0)\right|\right\}\right),\qquad(3.2.1)$$

используя условие 6, получим

$$\left(1+|\xi|\right)^m\left|\partial_t u(0)\right|^2=\frac{\left(1+|\xi|\right)^m}{\left|\sum\limits_{|\tau|\le m_2^*}b_{\tau_2}\xi^\tau\right|^2}\left|\sum_{|\tau|\le m_2^*}b_{\tau_2}\xi^\tau\partial_t u(\xi,0)\right|^2=$$

$$=\frac{\left(1+|\xi|\right)^m}{\left|\sum\limits_{|\tau|\le m_2^*}b_{\tau_2}\xi^\tau\right|^2}\left|g_2(\xi)\right|^2\le c\left(1+|\xi|\right)^{m-m_2^*}\left|g_2(\xi)\right|^2=c_1\left(1+|\xi|\right)^{2m-m-m_2^*}\left|g_2(\xi)\right|^2,\qquad(3.2.2)$$

в этом неравенстве константа $c>0$ не зависит от ξ и u.

Заметим, что при любом $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right| \le \varepsilon\left|\partial_t^2 u(0)\right|^2\left(1+|\xi|\right)^{\frac{m}{3}} + \frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(0)\right|^2. \qquad (3.2.3)$$

Заметим, что

$$\left|\partial_t^2 u(0)\right|^2 \le \varepsilon_1\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2.$$

Отсюда

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2 \le \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2.$$

Возьмем в этом неравенстве $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}}$, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2 \le \varepsilon_2\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2.$$

Применяя в правой части (3.2.3) это неравенство, получим неравенство

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right| \le \varepsilon\left|\partial_t^2 u(0)\right|^2\left(1+|\xi|\right)^m\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right|^2 \le \varepsilon\cdot\varepsilon_2\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 +$$
$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2.$$

Выбрав в данном неравенстве $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}$, получим оценку

$$\begin{aligned}&\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right|^2 \le \varepsilon^{\frac{3}{2}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2 + \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2,\end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

справедливую при любом $\varepsilon > 0$.

Применим неравенства (3.2.2) и (3.2.4) в правой части неравенства (3.2.1). Получим неравенство

$$\begin{aligned}&\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_2\Bigg(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{m-m_2^*}\left|g_2(\xi)\right|^2 + \\ &+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2\Bigg).\end{aligned} \qquad (3.2.5)$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon > 0$. Константа $c_2 > 0$ не зависит от ξ и u. Заметив, что слагаемые $\left\|\partial_t^3 u\right\|^2$ и $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}} \left\|\partial_t^2 u\right\|^2$ входят в выражение $\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}$, получим, выбирая число $\varepsilon > 0$ достаточно малым, следующую оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_3\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{m-m_2^*} \left|g_2(\xi)\right|^2 + \right.$$
$$\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}} \left|u(\xi,0)\right|^2 \right). \tag{3.2.6}$$

Заметим, что

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{5m}{3}} \left|u(0)\right|^2 = \frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}}{\left|\sum\limits_{|\tau|\le m_2^*} b_{\tau_1}\xi^\tau\right|^2} \left|\sum_{|\tau|\le m_1^*} b_{\tau_1}\xi^\tau u(\xi,0)\right|^2 = \frac{\left(1+|\xi|\right)^{\frac{5m}{3}}}{\left|\sum\limits_{|\tau|\le m_1^*} b_{\tau_1}\xi^\tau\right|^2} \left|g_1(\xi)\right|^2. \tag{3.2.7}$$

В силу условия 6 получим оценку

$$\left|\sum_{|\tau|\le m_1^*} b_{\tau_1}\xi^\tau u(\xi,0)\right|^2 \ge c_4\left(1+|\xi|^2\right)^{m_1^*}, \tag{3.2.8}$$

с константой $c_4 > 0$ не зависящей от ξ и u.

Используя оценку (3.2.8) в правой части оценки (3.2.7) получим неравенство

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{5m}{3}} \left|u(0)\right|^2 \le c_5\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}-m_1^*} \left|g_1(\xi)\right|^2 = c_5\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m_1^*-\frac{m}{3}} \left|g_1(\xi)\right|^2, \tag{3.2.9}$$

с константой $c_5 > 0$ не зависящей от ξ и u.

Применяя неравенство (3.2.9) в правой части неравенства (3.2.6), получим неравенство

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_6\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-2m_2^*-m} \left|g_2(\xi)\right|^2 + \right.$$
$$\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m_1^*-\frac{m}{3}} \left|g_1(\xi)\right|^2 \right), \tag{3.2.10}$$

с константой $c_6 > 0$ не зависящей от ξ и u.

Из этого неравенства следует оценка (3.1.4) при $s = 2m$.

Таким образом, теорема 3.1.1 доказана при $s = 2m$.

Докажем теперь теорему 3.1.1 при $s > 2m$ целых. Вначале докажем следующее утверждение

Лемма 3.2.1 Пусть $s \geq 0$ – целое число. Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1 . Тогда для любой функции $u(t) \in C^{s+2m}[0;d]$, удовлетворяющей условию (3.1.3) справедлива оценка

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \leq c_1\left(\left\|A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \mathrm{Re}\,\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right), \tag{3.2.11}$$

с константой, не зависящей от ξ и u.

Доказательство. Рассмотрим разбиение единицы, то есть функции $\psi_\tau(t)$ $\tau = 0;1$ такие, что $\psi_\tau(t) \in C^\infty[0;d]$, $0 \leq \psi_\tau(t) \leq 1$ при всех $t \in [0;d]$; $\psi_0(t) + \psi_1(t) = 1$ при всех $t \in [0;d]$; $\psi_0(t) = 0$ при $t \in \left[\frac{d}{2};d\right]$, $\psi_1(t) = 0$ при $t \in \left[0;\frac{d}{4}\right]$. Пусть $j + \frac{2m}{3}l \leq s$. Тогда справедливо равенство

$$A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\left(\psi_\tau D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right) = \psi_\tau(t) D^j_{\alpha,t}\partial^l_t A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u + I^{j,l}_\tau(u), \tag{3.2.12}$$

где

$$I^{j,l}_\tau(u) = A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\left(\psi_\tau D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right) - \psi_\tau D^j_{\alpha,t}\partial^l_t A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u =$$
$$L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})\left(\psi_\tau D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right) - \psi_\tau D^j_{\alpha,t}\partial^l_t L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u - \tag{3.2.13}$$
$$b\left(\partial^3_t\left(\psi_\tau D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right) - \psi_\tau D^j_{\alpha,t}\partial^{l+3}_t u\right).$$

Докажем вначале при $0 \leq p \leq \left[\frac{s}{2m}\right]$ оценку

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_2\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right). \tag{3.2.14}$$

Применим неравенство (3.2.1) к функции $\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u$, где $j+\dfrac{2m}{3}l \le 2mp$.

Получим неравенство

$$\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)\left(\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right)\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left\{\left|\partial_t\left(\psi_0(0)D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u(0)\right)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2\left(\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right)\cdot\overline{\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u}\,|_{t=0}\right\}\right). \tag{3.2.15}$$

Заметим, что при $j\ne 0$ справедливо равенство $D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u(0)=0$. Отсюда получаем при $j\ne 0$ неравенство

$$\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_3\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)\left(\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right)\right\|^2\right). \tag{3.2.16}$$

Применяя в неравенствах (3.2.15) и (3.2.16) равенство (3.2.12) получим при $j=0$ неравенство

$$\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_4\left(\left\|\psi_0\partial^l_t A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left\{\left|\partial_t\left(\psi_0(0)\partial^l_t u(0)\right)\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2\left(\psi_0\partial^l_t u\right)\cdot\overline{\psi_0\partial^l_t u}\,|_{t=0}\right\} + \left\|I^{0,l}_0(u)\right\|^2\right), \tag{3.2.17}$$

а при $j\ne 0$ неравенство

$$\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_5\left(\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial^l_t A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2 + \left\|I^{j,l}_0(u)\right\|^2\right). \tag{3.2.18}$$

Здесь постоянные $c_4>0, c_5>0$ не зависят от ξ и u.

Из (3.2.13) выводим, что функции $I^{j,l}_\tau(u)$ можно представить в следующем виде

$$I^{j,l}_\tau(u) = \sum_{\substack{|\tau'|+j'+\frac{2m}{3}l'\le 2m(p+1)-1\\ l'\le l}} K^{\tau,j,l}_{\tau',j',l'}(t)\,\xi^{\tau'}D^{j'}_{\alpha,t}\partial^{l'}_t u -$$
$$-b\left(\partial_t^3\left(\psi_\tau(t)D^j_{\alpha,t}\partial^l_t u\right)-\psi_\tau(t)D^j_{\alpha,t}\partial^{l+3}_t u\right), \tag{3.2.19}$$

где функции $K_{\tau',j',l'}^{\tau,j,l}(t)$ являются непрерывными на $[0;d]$ функциями, зависящими лишь от функций $\psi_\tau(t)$ и $\alpha(t)$ их производных до порядка $2m(p+1)-1$.

Отсюда получим неравенство

$$\left\|I_\tau^{j,l}(u)\right\| \le c_6 \left\{ \sum_{\substack{|\tau'|+j'+\frac{2m}{3}l' \le 2m(p+1)-1 \\ l' \le l}} |\xi|^{|\tau'|} \left\|D_{\alpha,t}^{j'} \partial_t^{l'} u\right\| + \left\|\partial_t^3 D_{\alpha,t}^j \partial_t^l u - D_{\alpha,t}^j \partial_t^{l+3} u\right\| \right\}. \qquad (3.2.20)$$

Используя неравенство Эрлинга – Ниренберга и оценку (1.1.10), получим неравенство

$$\sum_{\substack{|\tau'|+j'+\frac{2m}{3}l' \le 2m(p+1)-1 \\ l' \le l}} |\xi|^{|\tau'|} \left\|D_{\alpha,t}^{j'} \partial_t^{l'} u\right\|^2 \le \varepsilon \|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_7(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)} \|u\|. \qquad (3.2.21)$$

Здесь постоянная $c_7(\varepsilon) > 0$ зависит от $\varepsilon > 0$, но не зависит от ξ, u. $\varepsilon > 0$ - любое число.

Заметим, что

$$\partial_t^3 D_{\alpha,t}^j \partial_t^l u - D_{\alpha,t}^j \partial_t^{l+3} u = \sum_{j_1=0}^{j-1} \sum_{j_2=0}^{3} c_{j_1,j_2}^{3,j}(t) D_{\alpha,t}^{j_1} \partial_t^{l+j_2}, \qquad (3.2.22)$$

где $c_{j_1,j_2}^{3,j}(t)$ – непрерывные на отрезке $[0;d]$ функции, зависящие лишь от функции $\alpha(t)$ и ее производных до порядка $j+2$.

Отсюда, используя неравенство Эрлинга – Ниренберга и оценку (1.1.10), поучим неравенство

$$\left\|\partial_t^3 D_{\alpha,t}^j \partial_t^l u - D_{\alpha,t}^j \partial_t^{l+3} u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^j \partial_t^3 u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) + c_8(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2, \qquad (3.2.23)$$

для любого $\varepsilon > 0$ с константой $c_8(\varepsilon) > 0$, не зависящей от u и ξ.

Используя в правой части (3.2.20) неравенства (3.2.21) и (3.2.23), выводим неравенство

$$\left\|I_\tau^{j,l}(u)\right\|^2 \le \varepsilon \|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + c_9(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2, \qquad (3.2.24)$$

для любого $\varepsilon > 0$ с константой $c_9(\varepsilon) > 0$, не зависящей от u и ξ.

Применяя оценку (3.2.24) в правой части неравенства (3.2.17), получим неравенство

$$\left\|\psi_0 \partial_t^l u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{10}\left(\left\|\partial_t^l A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m \cdot\right.$$
$$\cdot\left\{\left|\partial_t\left(\psi_0 \partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 - \mathrm{Re}\,\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\cdot\overline{\psi_0\partial_t^l u}\,|_{t=0}\right\} + \varepsilon\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \tag{3.2.25}$$
$$\left. + c_{11}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2\right.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ - любое число. Постоянные $c_{10}(\varepsilon) > 0, c_{11}(\varepsilon) > 0$, не зависят от u и ξ.

Применяя оценку (3.2.23) в правой части неравенства (3.2.18), получим неравенство

$$\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t}\partial_t^l u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{12}(\varepsilon)\left(\left\|D^j_{\alpha,t}\partial_t^l A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2\right). \tag{3.2.26}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ - любое число. $c_{12}(\varepsilon) > 0$- константа, не зависящая от u и ξ.

Продолжим оценку (3.2.25). Так как

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t\left(\psi_0(t)\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 = 2\left(1+|\xi|^2\right)^m \mathrm{Re}\left(\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right), \partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right),$$

то с помощью неравенства Коши – Буняковского получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t\left(\psi_0(t)\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 \le 2\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\left(\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right), \partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right)\right| \le$$
$$\le \left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\varepsilon\left\|\partial_t^{l+2}u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\partial_t^{l+1}u\right\|^2\right).$$

Возьмем в этом неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{m}{3}}$, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 \le \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^{l+2}u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}}\left\|\partial_t^{l+1}u\right\|^2,$$

справедливое для любого $\varepsilon_1 > 0$.

Применим в правой части этого неравенства неравенство Эрлинга - Ниренберга, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m \left|\partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 \le \varepsilon_1\left(\varepsilon_2\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2 + c_{13}(\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\varepsilon_3\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + c_{14}(\varepsilon_3)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right),$$

справедливое при любых $\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0, \varepsilon_3>0$, с постоянными $c_{13}(\varepsilon_2)>0, c_{14}(\varepsilon_2)>0$, не зависящими от u и ξ.

Выбирая в этом неравенстве, например, $\varepsilon_2=1$ и $\varepsilon_3=\varepsilon_1^2$,получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m \left|\partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 \le \varepsilon_1\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2 + c_{15}(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \qquad (3.2.27)$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon_1>0$ с константой $c_{15}(\varepsilon_1)>0$, не зависящей от u и ξ.

Оценим теперь слагаемое $\mathrm{Re}\,\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\cdot\overline{\psi_0\partial_t^l u}\,|_{t=0}$.

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m \left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\cdot\overline{\psi_0\partial_t^l u}\,|_{t=0}\right| \le \frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\varepsilon_1\left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon_1}\left|\psi_0\partial_t^l u\,|_{t=0}\right|^2\right).$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon_1>0$. Возьмем в этом неравенстве $\varepsilon_1=\varepsilon_2\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{2m}{3}}$, где $\varepsilon_2>0$ – любое число. Получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m \left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\cdot\overline{\psi_0\partial_t^l u}\,|_{t=0}\right| \le \frac{1}{2}\varepsilon_2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|\psi_0\partial_t^l u\,|_{t=0}\right|^2. \qquad (3.2.28)$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 = -\mathrm{Re}\left(\partial_t^3\left(\psi_0\partial_t^l u\right), \partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right).$$

Отсюда с помощью неравенство Коши – Буняковского, получим оценку

$$\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 \le \left|\left(\partial_t^3\left(\psi_0\partial_t^l u\right), \partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right)\right|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}} \le$$

$$\le \varepsilon_3\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left\|\partial_t^3\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_3}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left\|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2.$$

Это неравенство справедливо для любого $\varepsilon_3 > 0$.

Выберем в этом неравенстве $\varepsilon_3 = \varepsilon_4\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{m}{3}}$, получим оценку

$$\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)|_{t=0}\right|^2 \le \varepsilon_4\left\|\partial_t^3\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_4}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2, \quad (3.2.29)$$

справедливую при любом $\varepsilon_4 > 0$.

Аналогично

$$\frac{1}{2}\left|\psi_0\partial_t^l u|_{t=0}\right|^2 = -\mathrm{Re}\left(\partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right), \psi_0\partial_t^l u\right).$$

Отсюда с помощью неравенства Коши – Буняковского поучим при любом $\varepsilon_5 > 0$ оценку

$$\frac{1}{2}\left|\psi_0\partial_t^l u|_{t=0}\right|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}} \le \varepsilon_5\left\|\partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_5}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2. \quad (3.2.30)$$

Применим неравенства (3.2.29) и (3.2.30) в правой части неравенства (3.2.28), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\cdot\psi_0\partial_t^l u|_{t=0}\right| \le \varepsilon_2\left(\varepsilon_4\left\|\partial_t^3\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2 +\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_4}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\varepsilon_5\left\|\partial_t\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\right\|^2\cdot\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}} +\right. \quad (3.2.31)$$

$$\left.\frac{1}{\varepsilon_5}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\psi_0\partial_t^l u\right\|^2\right).$$

Это неравенство справедливо при любых $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_4 > 0, \varepsilon_5 > 0$. Выбирая, например, $\varepsilon_4 = \sqrt{\varepsilon_2}, \varepsilon_5 = \varepsilon_2^2$, получим из (3.2.31) оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m \left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\cdot\psi_0\partial_t^l u\,|_{t=0}\right| \le \varepsilon\left(\left\|\partial_t^{3+l}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^{l+2}u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}}\left\|\partial_t^{l+1}u\right\|^2\right)+c_{16}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\partial_t^l u\right\|^2.$$

Здесь – $\varepsilon>0$ любое число, постоянная $c_{16}(\varepsilon)>0$ не зависит от ξ,u.

Применяя в правой части этого неравенства неравенство Эрлинга - Ниренберга, получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m \left|\partial_t^2\left(\psi_0\partial_t^l u\right)\cdot\psi_0\partial_t^l u\,|_{t=0}\right| \le \tilde{\varepsilon}\left\|\partial_t^{3+l}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)+$$
$$+c_{17}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\partial_t^l u\right\|^2. \tag{3.2.32}$$

Применим неравенства (3.2.27), (3.2.32) в правой части неравенства (3.2.25). Получим оценку

$$\left\|\psi_0\partial_t^l u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\left(\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2\right)+$$
$$+c_{17}(\varepsilon)\left(\left\|\partial_t^l u\right\|^2\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2+\right. \tag{3.2.33}$$
$$\left.\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\partial_t^l u\right\|^2\right),$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$. Константа $c_{17}(\varepsilon)>0$ не зависит от ξ,u.

С помощью неравенства Эрлинга – Ниренберга получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\partial_t^l u\right\|^2 \le \varepsilon_1\left\|\partial_t^{l+3}u\right\|^2+c_{18}(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2.$$

Используя в правой части неравенства (3.2.33) это неравенство, выводим, с учетом неравенства $j+\frac{2m}{3}l\le 2mp$ оценку

$$\left\|\psi_0\partial_t^l u\right\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon_2\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+c_{18}(\varepsilon_2)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2\right). \tag{3.2.34}$$

Непосредственно из уравнения (3.2.12) при $j=0,\tau=1$ получим

$$L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)\left(\psi_1\partial_t^l u\right)-b\partial_t^3\left(\psi_1\partial_t^l u\right)=\psi_1\partial_t^l A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u+I_1^{0,l}\left(u\right).$$

Отсюда

$$\left\|\psi_1\partial_t^{l+3}u\right\|^2\le c_{19}\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left\|I_1^{0,l}\left(u\right)\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{|\tau'|+j_1\le 2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{|\tau'|}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}\left(\psi_1\partial_t^l u\right)\right\|^2\right). \tag{3.2.35}$$

Так как $\psi_1(t)\equiv 0$ при $t\in\left(0;\dfrac{d}{4}\right)$, то

$$\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}\left(\psi_1\partial_t^l u\right)\right\|^2=\int_{\frac{d}{4}}^{d}\left|D_{\alpha,t}^{j_1}\left(\psi_1\partial_t^l u\right)\right|^2dt\le c_{20}\sum_{j_2=0}^{j_1+l}\int_{\frac{d}{4}}^{d}\left|D_{\alpha,t}^{j_2}u\right|^2dt\le c_{21}\sum_{j_2=0}^{j_1+l}\left\|D_{\alpha,t}^{j_2}u\right\|^2,$$

с константой $c_{21}>0$ не зависящей от u,ξ.

Используя в правой части неравенства (3.2.35) это неравенство, выводим неравенство

$$\left\|\psi_1\partial_t^{l+3}u\right\|^2\le c_{22}\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\sum_{|\tau'|+j_1\le 2m+l}\left(1+|\xi|^2\right)^{|\tau'|}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left\|I_1^{0,l}\left(u\right)\right\|^2\right). \tag{3.2.36}$$

Применяя оценку (1.1.10), получим неравенство

$$\sum_{|\tau'|+j_1\le 2m+l}\left(1+|\xi|^2\right)^{|\tau'|}\left\|D_{\alpha,t}^{j_1}u\right\|^2\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m(p+1)}u\right\|^2+c_{23}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\left\|u\right\|^2\le$$
$$\le\varepsilon\left\|u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+c_{23}(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\left\|u\right\|^2. \tag{3.2.37}$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon>0$ с постоянной $c_{23}(\varepsilon)>0$, не зависящей от ξ,u.

Используя неравенства (3.2.24) и (3.2.27) в правой части неравенства (3.2.26), получим неравенство

$$\left\|\psi_1\partial_t^{l+3}u\right\|^2\le\varepsilon\left\|u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+c_{24}(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\left\|u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right), \tag{3.2.38}$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$ с постоянной $c_{24}(\varepsilon) > 0$, не зависящей от ξ, u.

Заметим теперь, что из неравенства (3.2.34) следует оценка

$$\left\|\psi_0 \partial_t^{l+3} u\right\|^2 \le \varepsilon_2 \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{18}(\varepsilon_2)\Big(\left\|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u\right\|^2 + \\ +\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)} \|u\|^2\Big). \tag{3.2.39}$$

Из (3.2.38) и (3.2.39) выводим неравенство

$$\left\|\partial_t^{l+3} u\right\|^2 \le \varepsilon \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{25}(\varepsilon)\Big(\left\|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u\right\|^2 + \\ \left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)} \|u\|^2\Big). \tag{3.2.40}$$

Так же, как и при выводе оценки (3.2.29), непосредственно из уравнения

$$A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)\left(\psi_1 D^j_{\alpha,t}\partial_t^l u\right) = \psi_1 D^j_{\alpha,t}\partial_t^l A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u + I_1^{j,l}(u),$$

Используя неравенство (1.1.10), выводим оценку

$$\left\|\psi_1 D^j_{\alpha,t}\partial_t^l u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{26}\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}\left(\psi_1 D^j_{\alpha,t}\partial_t^l u\right)\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\psi_1 D^j_{\alpha,t}\partial_t^l u\right\|^2\right) \le \\ \le \varepsilon \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{27}(\varepsilon)\Big(\left\|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ +\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2\Big), \tag{3.2.41}$$

справедливую при любом $\varepsilon > 0$ с постоянной $c_{27}(\varepsilon) > 0$, не зависящей от u, ξ.

Из неравенств (3.2.26) и (3.2.41) выводим оценку

$$\left\|D^j_{\alpha,t}\partial_t^l u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{28}(\varepsilon)\Big(\left\|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ +\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)}\|u\|^2\Big). \tag{3.2.42}$$

Здесь любое $\varepsilon > 0$ число, постоянная $c_{28}(\varepsilon) > 0$ не зависит от u, ξ.

Из неравенств (3.2.40) и (3.2.42) при $j + \frac{2m}{3}l \le 2mp$ получим неравенство

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{29}(\varepsilon)\Bigg(\left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)} \|u\|^2 \Bigg). \tag{3.2.43}$$

В силу следствия 3.1.1 выводим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)} \|u\| \le c_{30}(\varepsilon)\Bigg(\left(1+|\xi|^2\right)^{2mp} \left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2 + \\ + \left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m} \left(\left|\partial_t u(0)\right| - \operatorname{Re} \partial_t^2 u(0) \overline{u(0)} \right) \Bigg),$$

с постоянной, не зависящей от u, ξ.

Отсюда получаем оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m(p+1)} \|u\| \le c_{31}(\varepsilon)\Bigg(\left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ + \left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m} \left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re} \partial_t^2 u(0) \overline{u(0)} \right) \Bigg).$$

Здесь постоянная c_{31} не зависит от u, ξ.

Используя в правой части неравенства (3.2.43) это неравенство, выводим оценку

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{32}(\varepsilon)\Bigg(\left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ + \left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m} \left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re} \partial_t^2 u(0) \overline{u(0)} \right) \Bigg),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольное число, $c_{32}(\varepsilon) > 0$ не зависит от u, ξ.

Выбирая число $\varepsilon > 0$ достаточно малым в этом неравенстве, выводим неравенство

$$\|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{33}\Bigg(\left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2 + \\ + \left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m} \left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \operatorname{Re} \partial_t^2 u(0) \overline{u(0)} \right) \Bigg). \tag{3.2.44}$$

Таким образом, неравенство (3.2.14) доказано.

Пусть далее $s = 2mp + j, 0 < j < 2m, p = \left[\dfrac{s}{2m} \right]$.

Применим неравенство (3.2.14) к функции $\psi_0 D^j_{\alpha,t} u$.

Учитывая, что

$$A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)\psi_0 D^j_{\alpha,t} u = \psi_0 D^j_{\alpha,t} A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u + I_0^{j,0},$$

где $I_0^{j,0}$ определяется в (3.2.13) при $l = 0, r = 0$, получим неравенство

$$\begin{gathered}\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t} u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{34}\left(\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t} A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right. \\ +\left\|I_0^{j,0}(u)\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{2mp+m}\left(\left|\partial_t\left(\psi_0 D^j_{\alpha,t} u\right)|_{t=0}\right|^2 - \right. \\ \left.\left. -\operatorname{Re}\partial_t^2\left(\psi_0 D^j_{\alpha,t} u(t)\right)\cdot\overline{\psi_0 D^j_{\alpha,t} u(t)}|_{t=0}\right)\right).\end{gathered} \tag{3.2.45}$$

Заметим, что

$$\left|\partial_t\left(\psi_0 D^j_{\alpha,t} u\right)|_{t=0}\right|^2 - \operatorname{Re}\partial_t^2\left(\psi_0 D^j_{\alpha,t} u(t)\right)\cdot\overline{\psi_0 D^j_{\alpha,t} u(t)}|_{t=0} = 0,$$

при $j > 0$. Следовательно оценка (3.2.45) принимает вид

$$\begin{gathered}\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t} u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{34}\left(\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t} A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right. \\ \left.\left\|I_0^{j,0}(u)\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right).\end{gathered} \tag{3.2.46}$$

Так же как и выше (см. (3.2.19) – (3.2.24)) получим оценку

$$\left\|I_0^{j,0}(u)\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\left\|D^j_{\alpha,t} u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + c_{35}(\varepsilon)\left\|u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}. \tag{3.2.47}$$

справедливую для любого $\varepsilon > 0$ с постоянной $c_{35}(\varepsilon) > 0$, не зависящей от u, ξ.

Применяя неравенство (3.2.47) в правой части неравенства (3.2.46), получим неравенство

$$\begin{gathered}\left\|\psi_0 D^j_{\alpha,t} u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le \varepsilon\left\|D^j_{\alpha,t} u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \\ +c_{36}(\varepsilon)\left(\left\|D^j_{\alpha,t} A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left\|u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right).\end{gathered} \tag{3.2.48}$$

Из уравнения

$$A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)\left(\psi_1 D_{\alpha,t}^j u\right) = \psi_1 D_{\alpha,t}^j A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u + I_1^{j,0},$$

и определения нормы в пространстве $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\left(0;d\right)$ получим неравенство

$$\left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^j u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 \le c_{37}\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}\left(\psi_1 D_{\alpha,t}^j u\right)\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^j u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right) \le c_{38}\left(\sum_{|\tau'|+j'\le 2m+j-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{|\tau'|}\left\|D_{\alpha,t}^{j'}u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + \right.$$

$$\left. + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^j u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2\right).$$

Здесь постоянные $c_{37}>0, c_{38}>0$ не зависят от u,ξ.

Применим в правой части этого неравенства (1.1.10), (1.1.9), получим неравенство

$$\left\|\psi_1 D_{\alpha,t}^j u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + c_{39}\left(\varepsilon\right)\left(1+|\xi|^2\right)^j\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}. \tag{3.2.49}$$

Здесь $\varepsilon>0$ любое число, постоянная $c_{39}>0$ не зависят от u,ξ.

$$\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 \le \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 + c_{40}\left(\varepsilon\right)\left(\left\|D_{\alpha,t}^j A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^j\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2\right).$$

Здесь $\varepsilon>0$ любое число, константа $c_{40}>0$ не зависят от u,ξ.

Выбрав число $\varepsilon>0$ достаточно малым, выводим неравенство

$$\begin{aligned}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 &\le c_{41}\left(\varepsilon\right)\left(\left\|D_{\alpha,t}^j A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + \right.\\ &\left. + \|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^j\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2\right) \le \\ &\le c_{42}\left(\left\|D_{\alpha,t}^j A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^j\|u\|_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2\right).\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

При всех целых $j\in\left(0;2m\right)$ с константой $c_{42}>0$, не зависящей от u,ξ.

Заметим теперь, что

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{43} \sum_{j=0}^{s-2mp} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-j-2mp} \left\|D^j_{\alpha,t} u\right\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|},$$

с константой $c_{43} > 0$, не зависящей от ξ, u.

Применяя оценку (3.2.50) в правой части данного неравенства, выводим оценку

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{44} \sum_{j=0}^{s-2mp} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-j-2mp} \left\{\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$

$$\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^j \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right\} \le c_{45}\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right. \tag{3.2.51}$$

$$\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{s-2mp} \|u\|^2_{2m(p+1),\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right).$$

Здесь постоянная $c_{45} > 0$, не зависит от ξ, u.

Применив в правой части (3.2.51) оценку (3.2.14), получаем оценку

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_{46}\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2_{2mp,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$

$$\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\left(\left|\partial_t u(0)\right|^2 - \mathrm{Re}\,\partial_t^2 u(0)\overline{u(0)}\right)\right). \tag{3.2.52}$$

3.3 Доказательство теоремы 3.1.1.

Доказательство теоремы 3.1.1. Так как $c_1 > 0$ в оценке (3.2.11) постоянная, не зависящая от ξ, u, то для любой функции $u(\xi, t)$, принадлежащей при всех $\xi \in R^n$ по переменной t пространству $\widetilde{H}_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}(0;d)$, справедлива оценка (3.2.11), то есть, справедлива оценка

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_1\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$

$$\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\left(\left|\partial_t u(\xi,0)\right|^2 - \mathrm{Re}\,\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right)\right), \tag{3.2.53}$$

с константой $c_1 > 0$, не зависящей от ξ, u.

Воспользуемся условием 6. Получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\left|\partial_t u(\xi,0)\right|^2=\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}}{\left|\sum\limits_{|\tau|\le m_2^*} b_{\tau,2}\xi^\tau\right|}\left|\sum_{|\tau|\le m_2^*} b_{\tau,2}\xi^\tau\partial_t u(\xi,0)\right|^2\le \tag{3.2.54}$$

$$\le c_2\left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-m-m_2^*}\left|g_2(\xi)\right|^2.$$

Заметим, что при любом $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right|\le\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|+ \tag{3.2.55}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2.$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, получим оценку

$$\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|\le\varepsilon_1\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2,$$

или

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|\le\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{m}{3}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2.$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon_1=\varepsilon_2\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{m}{3}}$, получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|\le\varepsilon_2\left(1+|\xi|^2\right)^{s}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2,$$

справедливую при любом $\varepsilon_2>0$.

Применим это неравенство в правой части оценки (3.2.55), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right|\le\varepsilon\left(\varepsilon_2\left(1+|\xi|^2\right)^{s}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2.$$

Это неравенство справедливо при любых $\varepsilon>0,\varepsilon_2>0$.

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon}$, получим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le \varepsilon^{\frac{3}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{s}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \\ +\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2. \tag{3.2.56}$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon>0$.

Заметим, что в силу условия 6 справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{4m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2=\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{5m}{3}}}{\left|\sum\limits_{|\tau|\le m_1^*} b_{\tau 1}\xi^\tau\right|^2}\left|\sum_{|\tau|\le m_1^*} b_{\tau 1}\xi^\tau u(\xi,0)\right|^2 \le$$

$$\le c_3\left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-\frac{m}{3}-m_1^*}\left|g_1(\xi)\right|^2.$$

Используя в правой части неравенства (3.2.56) это неравенство, выводим неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s+m}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le \varepsilon_3\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{s}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right. \\ \left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{s+\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2\right)+c_4(\varepsilon_3)\left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-\frac{m}{3}-m_1^*}\left|g_1(\xi)\right|^2, \tag{3.2.57}$$

справедливое для любого $\varepsilon>0$ с постоянной $c_4(\varepsilon_3)>0$, не зависящей от ξ.

Применим неравенства (3.2.54), (3.2.57) в правой части неравенства (3.2.53), получим оценку

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_4(\varepsilon_4)\left(\left\|A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right. \\ \left. +\left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-m_2^*-m}\left|g_2(\xi)\right|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-\frac{m}{3}-m_1^*}\left|g_1(\xi)\right|^2\right)+ \\ +\varepsilon_4\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|},$$

справедливую при любом $\varepsilon>0$ с постоянной $c_4(\varepsilon_4)>0$, не зависящей от ξ,u.

Выбирая в данном неравенстве достаточно малое $\varepsilon_4 > 0$, выводим неравенство

$$\|u\|^2_{s+2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_5\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{s+2m-m_j^*-\frac{2m}{3}(j-1)-\frac{m}{3}}\left|g_j\left(\xi\right)\right|^2\right),$$

с константой не зависящей от ξ.

Это неравенство справедливо при любом $s \ge 0$ - целом. Выбирая в этом неравенстве $s_1 = s - 2m$, получим при

$s_1 \ge \max\left\{2m, \max\limits_{j=1,2}\left(m_j^* + \frac{2m}{3}(j-1)\right) + \frac{m}{3}\right\}$ (s_1 - целое) неравенство

$$\|u\|^2_{s_1,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_5\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right)u\right\|^2_{s_1-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_j^*-\frac{2m}{3}(j-1)-\frac{m}{3}}\left|g_j\left(\xi\right)\right|^2\right).$$

Таким образом, теорема 3.1.1 доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $v(x,t)$ – решение задачи (4) – (6). Предположим, что $v(x,t) \in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$. Рассмотрим функцию $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]$. Тогда $u(\xi,t)$ при почти всех $\xi \in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Кроме того, функция $u(\xi,t)$ является решением задачи (3.1.1) – (3.1.3). В силу теоремы 3.1.1 для функции $u(\xi,t)$ справедлива оценка (3.1.4) с постоянной $c > 0$, не зависящей от $\xi \in R^{n-1}$. Интегрируя оценку (3.1.4) по $\xi \in R^{n-1}$, получим оценку

$$\int\limits_{R^{n-1}} \|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} d\xi \le c\left(\int\limits_{R^{n-1}} \|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} d\xi + \right. \tag{3.2.58}$$
$$\left. +\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{R^{n-1}} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_j^*-\frac{m}{3}-\frac{2m}{3}(j-1)} \left|g_j(\xi)\right|^2 d\xi \right).$$

Здесь $f(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[F(x,t)\right], g_j(\xi)=F_{x\to\xi}\left[G_j(x)\right], j=1,2$.

Из (3.2.58) с помощью равенства (1.1.5) и равенства Парсеваля получим справедливость оценки (7).

Доказательство теоремы 6. Пусть $v(x,t)$ – решение задачи (4) – (6). Из неравенства (7) следует, что справедлива оценка (8) при $k=0$. Докажем оценку (8) при $k>0$ – целом. Для этого заметим, что производные $D_\xi^\beta u(\xi,t)$, где $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right], v(x,t)\in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(R_d^n\right)$, при $|\beta|\le k$ и почти всех $\xi\in R^{n-1}$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Кроме того функции $D_\xi^\beta u(\xi,t)$ являются решением следующей задачи

$$A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)D_\xi^\beta u(\xi,t)=D_\xi^\beta f(\xi,t)+M_\beta\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, \tag{3.2.59}$$

$$B_j\left(\xi,\partial_t\right)D_\xi^\beta u(\xi,t)|_{t=0}=D_\xi^\beta g_j(\xi)+M'_{\beta,j}\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, \tag{3.2.60}$$

$$D_\xi^\beta u(\xi,t)|_{t=d}=\partial_t D_\xi^\beta u(\xi,t)|_{t=d}=...=\partial_t^{m-1} D_\xi^\beta u(\xi,t)|_{t=d}=0. \tag{3.2.61}$$

Здесь

$$M_\beta\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u=\sum_{|\tau|+j\le 2m}\ \sum_{\substack{|\gamma|\le|\beta|,|\gamma|\le|\tau|\\ |\gamma|>0}} a_{\tau,j} c_{\tau\gamma\beta}^{\beta} \xi^{\tau-\gamma} D_\xi^{\beta-\gamma} D_{\alpha,t}^{j}, \tag{3.2.62}$$

$$M'_{\beta,j}\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u=\sum_{|\tau|\le m_j^*}\ \sum_{\substack{|\gamma|\le|\beta|,|\gamma|\le|\tau|\\ |\gamma|>0}} b_{\tau,j} \xi^{\tau-\gamma} D_\xi^{\beta-\gamma} \partial_t^{j-1}, \tag{3.2.63}$$

причем постоянные $c_{\tau\gamma\beta}^{\beta}$ зависят лишь от τ,γ,β и n.

Из (3.2.62), (3.2.63) с помощью оценок (1.1.10) и (1.2.4) получим оценку

$$\left\|M_{\beta}u\right\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\sum_{j=1}^{2}\left(1+|\xi|^{2}\right)^{\frac{1}{2}\left(s-m_j^{*}-\frac{2m}{3}(j-1)-\frac{m}{3}\right)}\left|M'_{\beta,j}u\,|_{t=0}\right|\leq$$

$$\leq c\sum_{|\beta'|\leq|\beta|-1}\left\|D_{\xi}^{\beta'}u\right\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}. \qquad (3.2.64)$$

Отсюда и из (3.1.4) получим оценку

$$\sum_{|\beta|\leq k}\int_{R^{n-1}}\left\|M_{\beta}u\right\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}d\xi\leq c\left(\sum_{|\beta|\leq k}\int_{R^{n-1}}\left\|D_{\xi}^{\beta}f\right\|^{2}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\sum_{|\beta|\leq k}\int_{R^{n-1}}\left(1+|\xi|^{2}\right)^{s-m_j^{*}-\frac{2m}{3}(j-1)-\frac{m}{3}}\left|D_{\xi}^{\beta}g_{j}(\xi)\right|^{2}+\sum_{|\beta|\leq k-1}\int_{R^{n-1}}\left\|D_{\xi}^{\beta'}u\right\|^{2}_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\right). \qquad (3.2.65)$$

Последовательно применяя по k неравенства (3.1.58) и (3.2.58) получим оценку (8) при $k>0$ – целых.

ГЛАВА 4

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (4) – (6)

В этой главе доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи (4) – (6). Доказательство этой теоремы существенно опирается на априорную оценку, полученную в главе 3. Так же как и в главе 3 наряду с задачей (4) – (6) рассмотрим задачу, полученную из нее применением к обеим частям уравнения (4) и условий (5), (6) преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$.

$$A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\left(\xi,t\right)=L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u\left(\xi,t\right)-b\partial_t^3u\left(\xi,t\right)=f\left(\xi,t\right),$$

(4.1)

$$\sum_{|\tau|\le m_j^*}b_{\tau,j}\xi^\tau\partial_t^{j-1}u\left(\xi,t\right)|_{t=0}=g_j\left(\xi\right),\ j=1,2 \qquad (4.2)$$

$$u\left(\xi,t\right)|_{t=d}=\partial_tu\left(\xi,t\right)|_{t=d}=\ldots=\partial_t^{m-1}u\left(\xi,t\right)|_{t=d}=0. \qquad (4.3)$$

Здесь $u\left(\xi,t\right)=F_{x\to\xi}\left[v\left(x,t\right)\right],g_i\left(\xi\right)=F_{x\to\xi}\left[G_i\left(x\right)\right],\ j=1,2,\ f\left(\xi,t\right)=F_{x\to\xi}\left[F\left(x\right)\right].$

Аналогично главе 3 рассмотрим пространства $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$.($s\ge0$ - целое число) функций $u\left(t\right)$. Введем норму в этом пространстве, зависящую от параметра $\xi\in R^n$ по формуле

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}=\left\{\sum_{|\tau|+\frac{2m}{3}j\le s}\left\|F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\tau-\frac{1}{2}}F_\alpha\left[\partial_t^ju\right]\right]\right\|^2_{L_2\left(0;d\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.4)$$

Утверждение теоремы 4 вытекает из следующей теоремы:

Теорема 4.1. Пусть $s\ge\max\left\{2m,\max_{j=1,2}\left(m_j^*+\frac{2m}{3}\left(j-1\right)+\frac{m}{3}\right)\right\}$ - целое число, $m\ge3$ - целое число. Пусть $f\left(\xi,t\right)\in\widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$ и выполнены условия 4 –

6. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$ существует единственное решение задачи (4.1) - (4.3), принадлежащее пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(0;d\right)$.

Для доказательства теоремы 4 вначале сведём задачу (4.1) - (4.3) к нелокальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

Рассмотрим функцию $\gamma(t)=\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{2m}{2m-3}}$, тогда

$$D_{\alpha,t}^{k}u=\left(\frac{1}{i}\right)^{k}\sum_{j=0}^{k}\psi_{kj}\left(t\right)\gamma^{\frac{3(2m-j)}{2m}}\left(t\right)\gamma^{j-3}\left(t\right)\partial_{t}^{j}u\,, \tag{4.5}$$

где функции $\psi_{kj}\left(t\right),\ \left(0\le j\le k\right)$ находятся по рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases}\psi_{k+1,k+1}\left(t\right)=\psi_{k,k}\left(t\right),\ \ \psi_{0,0}\left(t\right)=1,\\ \psi_{j+1,0}\left(t\right)=\alpha\left(t\right)\partial_{t}\psi_{j,0}\left(t\right)+\dfrac{1}{2}\alpha'\left(t\right)\psi_{j,0}\left(t\right),\\ \psi_{j+1,\chi}\left(t\right)=\alpha\left(t\right)\partial_{t}\psi_{j,\chi}\left(t\right)+\psi_{j,\chi-1}\left(t\right)+\left(\chi+\dfrac{1}{2}\right)\alpha'\left(t\right)\psi_{j,\chi}\left(t\right),\ \left(1\le\chi\le j-1\right),\\ \psi_{j+1,j}\left(t\right)=\psi_{j,j-1}\left(t\right)+\left(j+\dfrac{1}{2}\right)\alpha'\left(t\right).\end{cases} \tag{4.6}$$

Используя формулу (4.5) запишем уравнение (4.1) в виде

$$\sum_{k=4}^{2m}b_{2m-k}\left(\xi,t\right)\gamma^{k-3}\partial_{t}^{k}u+\sum_{k=0}^{3}b_{2m-k}\left(\xi,t\right)\partial_{t}^{k}u=f\left(\xi,t\right), \tag{4.7}$$

где $b_{0}\left(\xi,t\right)\equiv 1$, а функции $b_{2m-k}\left(\xi,t\right),\ k=0,1,...,2m-1$ определяются по формулам

$$b_{2m-k}\left(\xi,t\right)=\sum_{j=k}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}\left(-1\right)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,k}\left(t\right)\gamma^{\frac{(2m-k)3}{2m}}\left(t\right), \tag{4.8}$$

где $4\le k\le 2m-1$,

$$b_{2m-3}\left(\xi,t\right)=\sum_{j=3}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}\left(-1\right)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,3}\left(t\right)\gamma^{\frac{3(2m-3)}{2m}}\left(t\right)-\frac{\left(-1\right)^{m}b}{a_{02m}}, \tag{4.9}$$

$$b_{2m-k}\left(\xi,t\right)=\sum_{j=k}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}\left(-1\right)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,k}\left(t\right)\gamma^{\frac{j(2m-3)}{2m}}\left(t\right), \tag{4.10}$$

где $k=1,2$;

$$b_{2m}(\xi,t)=\sum_{j=0}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}(-1)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,0}(t). \tag{4.11}$$

Обозначим

$$\begin{cases} w_{2m-k}(\xi,t)=\partial_t^k u(\xi,t),\ k=0,1,2,3 \\ w_{2m-k}(\xi,t)=\gamma^{k-3}(t)\partial_t^k u(\xi,t),\ k=4,...,2m. \end{cases} \tag{4.12}$$

Тогда справедливы следующие равенства

$$\gamma(t)\partial_t w_{2m-k}(\xi,t)-w_{2m-(k+1)}(\xi,t)-(k-3)\gamma'(t)w_{2m-k}(\xi,t)=0, \tag{4.13}$$

где $k=4,...,2m-2$;

$$\begin{cases} \gamma(t)\partial_t w_1(\xi,t)=(2m-4)\gamma'(t)w_1(\xi,t)+\partial_t^{2m}u(\xi,t), \\ \gamma(t)\partial_t w_{2m-3}(\xi,t)-w_{2m-4}(\xi,t)=0, \\ \partial_t w_{2m-k}(\xi,t)-w_{2m-k-1}(\xi,t)=0,\ k=0,1,2. \end{cases} \tag{4.14}$$

Используя эти формулы можно записать уравнение (4.7) в виде

$$\begin{cases} \gamma(t)\frac{d\bar{u}_1}{dt}+B_{11}(\xi,t)\bar{u}_1+B_{12}(\xi,t)\bar{u}_2=\bar{f}(\xi,t), \\ \frac{d\bar{u}_2}{dt}+B_{22}\bar{u}_2+B_{12}\bar{u}_1=0, \end{cases} \tag{4.15}$$

где $\bar{u}_1=\left(w_1(\xi,t),w_2(\xi,t),...,w_{2m-3}(\xi,t)\right)^T$; $\bar{u}_2=\left(w_{2m-2},w_{2m-1},...,w_{2m}\right)^T$, знак T означает транспонирование. $\bar{f}(\xi,t)=f(\xi,t)\bar{e}_1$, $\bar{e}_1=\left\{\delta_{1j}\right\}_{j=1}^{2m-3}$, δ_{ij} - символ Кронекера ($\begin{cases} \delta_{ii}=1 \\ \delta_{ij}=0, i\neq j \end{cases}$).

$B_{11}(\xi,t)=\left\{c_{ij}\right\}_{i,j=1}^{2m-3}$ - матрица размерности $(2m-3)\times(2m-3)$ вида

$$B_{11}(\xi,t)=\begin{pmatrix} b_1(\xi,t)-(2m-4)\gamma'(t) & b_2(\xi,t) & b_3(\xi,t) & ... & b_{2m-3}(\xi,t) \\ -1 & -(2m-4)\gamma'(t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & -(2m-5)\gamma'(t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

$B_{12}(\xi,t)$ - матрица размера $(2m-3)\times 3$ вида

$$B_{12}(\xi,t)=\begin{pmatrix} b_{2m-2}(\xi,t) & b_{2m-1}(\xi,t) & b_{2m}(\xi,t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$B_{21}(\xi,t)$ - матрица размера $3\times(2m-3)$ вида

$$B_{21}(\xi,t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4.18)

$B_{22}(\xi,t)$ - матрица размера 3×3 вида

$$B_{22}(\xi,t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4.19)

Рассмотрим наряду с системой (4.15) систему уравнений следующего вида.

$$\begin{cases} \gamma(t)\dfrac{d\overline{u}_1}{dt}+\left(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I\right)\overline{u}_1+B_{12}^0(\xi,0)\overline{u}_2=\overline{f}(\xi,t), \\ \dfrac{d\overline{u}_2}{dt}+B_{22}\overline{u}_2+B_{21}\overline{u}_1=0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Отличие матрицы $B_{12}^0(\xi,0)$ от матрицы $B_{12}(\xi,0)$ заключается в том, что элемент $b_{2m}(\xi,0)$ заменяется на элемент $b_{2m}^0(\xi,0)$, где $b_{2m}^0(\xi,0)$ - главная часть многочлена $b_{2m}(\xi,0)$.

Из [14] известно, что нахождение «гладких» вплоть до $t=0$ решений системы (4.20) зависит от расположения спектра матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Исходя из условий, накладываемых на функцию $\alpha(t)$ и используя определение функции $\gamma(t)$, получаем, что $\gamma(0)=\gamma'(0)=0$. Учитывая это и (4.8) - (4.11) получаем

$$b_{2m-k}(\xi,0)=0,\ k=1,2,...,2m-1,\ k\neq 3;\ b_{2m-3}(\xi,0)=\frac{(-1)^m b}{a_{02m}}.$$

Теперь займемся нахождением собственных чисел матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Из ее вида получаем, что $\det\left(B_{11}(\xi,0)-\lambda I\right)=(-\lambda)^{2m-3}+b_{2m-3}(\xi,0)=0.$ Отсюда $\lambda^{2m-3}=(-1)^m\dfrac{b}{a_{02m}}$. Условие 1 дает, что $\operatorname{Im}\dfrac{b}{a_{02m}}=0, \operatorname{Re}\dfrac{b}{a_{02m}}>0$. Следовательно у матрицы $B_{11}(\xi,t)$ собственные числа различны и среди них не имеется собственных чисел, которые лежат на мнимой оси. Заметим, что в левой полуплоскости лежат $(m-2)$ собственных числа и в правой полуплоскости лежат $(m-1)$ собственных чисел. То есть инвариантное пространство $E_-(E_+)$ оператора $B_{11}(\xi,0)$, который соответствует собственным числам λ_k, что лежат в левой (правой) полуплоскости имеет размерность равную $m-2$ $(m-1)$. Через $P_-(P_+)$ обозначим проекторы на $E_-(E_+)$. Также обозначим через P_k $(k=1,2,...,2m)$ операторы, которые действуют по формулам

$$
\begin{aligned}
&P_k\bar{u}_1=w_k,\ k=1,2,..,2m-3;\\
&P_k\bar{u}_2=w_k,\ k=2m-2,\ 2m-1,2m.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Проектируя первое уравнение системы (2.20) на E_- и E_+, получим

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt}+\left(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I\right)\overline{u_1^-}=\left(f(\xi,t)-b_{2m}^0(\xi,0)u\right)P_-\bar{e}_1, \tag{4.22}$$

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^+}}{dt}+\left(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I\right)\overline{u_1^+}=\left(f(\xi,t)-b_{2m}^0(\xi,0)u\right)P_+\bar{e}_1, \tag{4.23}$$

где $u(\xi,t)=w_{2m}(\xi,t),\ \overline{u_1^-}=P_-\bar{u}_1,\ \overline{u_1^+}=P_1\bar{u}_1.$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt}+\left(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I\right)\overline{u_1^-}=0. \tag{4.24}$$

Пространство решений уравнения (4.24), рассматриваемое как уравнение в $E_-\subset C^{2m-3}$, имеет размерность $(m-2)$ (это следует из работы [14]).

Краевые условия (2.3) можно переписать в виде

$$P_{2m}\bar{u}_2\,|_{t=d}=P_{2m-1}\bar{u}_2\,|_{t=d}=P_{2m-2}\bar{u}_2\,|_{t=d}=0, \tag{4.25}$$

$$P_{2m-3}\bar{u}_1|_{t=d} = P_{2m-4}\bar{u}_1|_{t=d} = ... = P_{m+1}\bar{u}_1|_{t=d} = 0. \tag{4.26}$$

Далее рассмотрим краевое условие (4.2). С использованием обозначения (4.12) и равенства (4.25) перепишем условие (4.2) в виде

$$\begin{gathered}\sum_{|\tau|\le m_1^*} b_{\tau,1}\xi^{\tau}(-1)\int_0^t\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2\Big|_{t=d} = g_1(\xi),\\ \sum_{|\tau|\le m_2^*} b_{\tau,2}\xi^{\tau}(-1)\int_0^t\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1\Big|_{t=d} = g_2(\xi),\end{gathered} \tag{4.27}$$

Исходя из этого заключаем, что условия (4.2) - (4.3) при $t = d$ можно переписать в виде (4.26), (4.27).

То есть, для системы (4.15) получим задачу Коши (4.26), (4.27). Тем самым задача (4.1) - (4.3) сведена к задаче (4.26), (4.27).

Перед тем как доказывать существование и единственность решения данной задачи, докажем существование и единственность решения задачи (4.20), (4.26), (4.27). Обращая операторы в левой части (4.22) и (4.23), получаем

$$\begin{cases}\overline{u_1^-}(\xi,t) = U_1^-(t,d)q^- - \int_t^d U_1^-(t,s)P_-\bar{e}_1\left(f(s) - b_{2m}^0(\xi,0)u(s)\right)\dfrac{ds}{\gamma(s)},\\ \overline{u_1^+}(\xi,t) = \int_0^t U_1^+(t,s)P_+\bar{e}_1\left(f(s) - b_{2m}^0(\xi,0)u(s)\right)\dfrac{ds}{\gamma(s)},\end{cases} \tag{4.28}$$

где $U_1^{\pm}(t,s) = \dfrac{\gamma(s)}{\gamma(t)}\exp\left(P_{\pm}B_{11}(\xi,0)\int_t^s \dfrac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)$, q^- - произвольный вектор из E_-.

Так как $\bar{u}_1(\xi,t) = \overline{u_1^-}(\xi,t) + \overline{u_1^+}(\xi,t)$, то из (4.28) получим равенство

$$\bar{u}_1(\xi,t) = U_1^-(t,d)q^- - \int_0^d \Phi(t,\tau)f(\tau)\,d\tau + b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d \Phi(t,\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{4.29}$$

где

$$\Phi(t,\tau) = \begin{cases} -U_1^+(t,\tau)P_+\bar{e}_1\dfrac{1}{\gamma(\tau)} & npu \quad 0 < \tau < t\\ U_1^-(t,\tau)P_-\bar{e}_1\dfrac{1}{\gamma(\tau)} \quad npu & t < \tau < d.\end{cases} \tag{4.30}$$

Учитывая, что $u(\xi,t)|_{t=d} = \partial_t u(\xi,t)|_{t=d} = \partial_t^2 u(\xi,t)|_{t=d} = 0$, получим

$$u(\xi,t)=(-1)\int_t^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d \partial_t^3 u(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 = \\ =-\int_t^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1\, d\tau_2. \tag{4.31}$$

Применяя (4.31) в (4.29), получим

$$\bar{u}_1(\xi,t)=U_1^-(t,d)q^- - \int_0^d \Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau - b_{2m}^0(\xi,0)\cdot \\ \cdot\int_0^d \Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \tag{4.32}$$

При этом функция $\bar{u}_1(\xi,t)$ должна удовлетворять условиям (4.26), (4.27). Из (4.32) получим равенства

$$P_\nu \bar{u}_1 = w_\nu = P_\nu U_1^-(t,d)q^- - \int_0^d P_\nu \Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau - \\ -b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d P_\nu\Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \tag{4.33}$$

Подставляя в (4.33) $t=d$, получим

$$w_\nu\big|_{t=d} = P_\nu U_1^-(d,d)q^- - \int_0^d P_\nu\Phi(d,\tau)f(\tau)d\tau - \\ -b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d P_\nu\Phi(d,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau.$$

Заметим, что $U_1(d,d)=1$ и $w_\nu\big|_{t=d}=0$ при $m+1\le\nu\le 2m-3$. Отсюда, при $m+1\le\nu\le 2m-3$, получим равенства

$$P_\nu q^- = d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3}, \quad \nu=m+1,m+2,...,2m-3, \tag{4.34}$$

где

$$d_\nu = \int_0^d P_\nu\Phi(d,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{4.35}$$

$$M_\nu w_{2m-3} = \int_0^d\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d P_\nu\Phi(d,\tau)w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \tag{4.36}$$

Рассмотрим теперь условия (4.27). Эти условия можно записать в виде

$$\theta_1(\xi)\int_0^t\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2\big|_{t=d} = g_1(\xi) \\ \theta_2(\xi)\int_0^t\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1\Big|_{t=d} = g_2(\xi), \text{ где} \tag{4.37}$$

$$\theta_1(\xi) = -\sum_{|\tau|\le m_1^*} b_{\tau,1}\xi^\tau, \theta_2(\xi)=\sum_{|\tau|\le m_2^*} b_{\tau,2}\xi^\tau \tag{4.37′}$$

Подставим функцию w_{2m-3}, определённую равенством (4.33) при $\nu = 2m-3$, в равенство (4.37), получим равенства

$$\theta_1(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d P_{2m-3}U_1^-(\tau_0,d)q^-d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 -$$
$$-\theta_1(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)f(\tau)d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 - b_{2m}^0(\xi,0)\cdot$$
$$\cdot\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,s_0)ds_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 =$$
$$= g_1(\xi)$$
$$\theta_2(\xi)\int_0^d\int_{\tau_3}^d P_{2m-3}U_1^-(\tau_0,d)q^-d\tau_0 d\tau_3 -$$
$$-\theta_2(\xi)\int_0^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)f(\tau)d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 - b_{2m}^0(\xi,0)\cdot$$
$$\cdot\int_0^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,s_0)ds_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 = g_2(\xi)$$

Из этих равенств получим равенства

$$\theta_1(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d P_{2m-3}U_1^-(\tau_0,d)q^-d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 = d_m + b_{2m}^0(\xi,0)M_m w_{2m-3}, \tag{4.38}$$

где

$$d_m = g_1(\xi) + \theta_1(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)f(\tau)d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 \tag{4.39}$$

$$\begin{gathered} M_m w_{2m-3} = \int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)\cdot\right.\\ \left.\cdot\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,s_0)ds_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 \end{gathered} \tag{4.40}$$

$$\theta_2(\xi)\int_0^d\int_{\tau_3}^d P_{2m-3}U_1^-(\tau_0,d)q^-d\tau_0 d\tau_3 = d_{m-1} + b_{2m}^0(\xi,0)M_{m-1}w_{2m-3}, \tag{4.38$'$}$$

где

$$d_{m-1} = g_2(\xi) + \theta_2(\xi)\int_0^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)f(\tau)d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 \tag{4.39$'$}$$

$$\begin{gathered} M_{m-1}w_{2m-3} = \int_0^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)\cdot\right.\\ \left.\cdot\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,s_0)ds_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau\right]d\tau_0 d\tau_3 \end{gathered} \tag{4.40$'$}$$

Подставив в уравнение (2.34) $\nu = m+1, m+2, ..., 2m-3$, и, принимая во внимание, уравнение (2.38) получим $(m-2)$ уравнений для вычисления вектора q^-. Покажем, что эта система будет иметь единственное решение, если $d>0$ достаточно малое число.

Пусть $\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_{m-2}$ - собственные векторы матрицы $B_{11}(\xi,0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой полуплоскости. Векторы $\bar{r}_1,...,\bar{r}_{m-2}$ образуют базис в E_- и $q^- \in E_-$, следовательно, существуют числа $\mu_p,\ p=1,2,..,m-2$ такие, что

$$q^- = \mu_1\bar{r}_1 + \mu_2\bar{r}_2 + ... + \mu_{m-2}\bar{r}_{m-2} + \mu_{m-1}\bar{r}_{m-1}. \tag{4.41}$$

Из условия $B_{11}(\xi,0)\bar{r}_p = \lambda_p\bar{r}_p$ и вида матрицы $B_{11}(\xi,0)$ получаем

$$r_{p,k} = (-\lambda_p)^{2m-3-k} r_{p,2m-3},\ p=1,2,...,2m-3. \tag{4.42}$$

Здесь $r_{p,k} - k$ - ая координата вектора $\bar{r}_p$.

Из (4.42) следует, что так как $\bar{r}_p \neq \bar{0}$, то $r_{p,2m-3} \neq 0$. Из (4.41) и (4.42) получим равенство

$$P_\nu q^- = \sum_{p=1}^{m-1}\mu_p P_\nu \bar{r}_p = \sum_{p=1}^{m-1}\mu_p r_{p\nu} = d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3},\ \nu = m+1, m+2, ..., 2m-3.$$

Используя в этих равенствах равенство (4.42), получим

$$\sum_{p=1}^{m-1}\mu_p r_{p,2m-3}(\lambda_p)^{2m-3-\nu} = (-1)^{2m-3-\nu}\left(d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3}\right),$$
$$\nu = m+1, m+2, ..., 2m-3. \tag{4.43}$$

Рассмотрим теперь условия (4.38) и (4.38′). Так как $\bar{r}_p$- собственный вектор матрицы $B_{11}(\xi,0)$, отвечающий собственному значению λ_p, то

$$U_1^-(\tau,d)\bar{r}_p = \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau)}\exp\left(\lambda_p\int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\bar{r}_p.$$

Отсюда и из (4.38) получим

$$\sum_{p=1}^{m-1}\mu_p\theta_1(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau_0)}\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_0}^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)r_{p,2m-3}d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 =$$
$$= d_m + b_{2m}^0(\xi,0)M_m w_{2m-3}, \tag{4.44}$$

Аналогично, из (4.38′) получим равенство

$$\sum_{p=1}^{m-1}\mu_p\theta_2(\xi)\int_0^d\int_{\tau_3}^d\frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau_0)}\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_0}^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)r_{p,2m-3}d\tau_0d\tau_3=$$
$$=d_{m-1}+b_{2m}^0(\xi,0)M_{m-1}w_{2m-3}.$$

(4.44′)

Заметим, что

$$\int_{\tau_3}^d\frac{1}{\gamma(\tau_0)}\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_0}^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)d\tau_0=-\frac{1}{\lambda_p}\left(1-\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right).\qquad(4.45)$$

Используя (4.45), получим из (4.44) равенство

$$\sum_{p=1}^{m-1}\mu_p\theta_1(\xi)\gamma(d)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\frac{1}{\lambda_p}\left(1-\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma(p)}\right)\right)r_{p,2m-3}d\tau_3d\tau_4=$$
$$=d_m+b_{2m}^0(\xi,0)M_mw_{2m-3}.$$

или

$$\theta_1(\xi)\sum_{p=1}^{m-1}\mu_p\gamma(d)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\frac{1}{\lambda_p}r_{p,2m-3}d\tau_3d\tau_4-\theta_1(\xi)\sum_{p=1}^{m-1}\mu_p\gamma(d)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)r_{p,2m-3}d\tau_3d\tau_4\frac{1}{\lambda_p}=$$
$$=d_m+b_{2m}^0(\xi,0)M_mw_{2m-3}.$$

Отсюда получим равенство

$$\sum_{p=1}^{m-1}\theta_1(\xi)\gamma(d)\mu_p\frac{d^2}{2}\frac{1}{\lambda_p^j}r_{p,2m-3}-\sum_{p=1}^{m-1}\theta_1(\xi)\gamma(d)\mu_p\frac{1}{\lambda_p}\int_0^d\int_{\tau_4}^d\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\cdot$$
$$\cdot r_{p,2m-3}d\tau_3d\tau_4=d_m+b_{2m}^0(\xi,0)M_mw_{2m-3},$$

Запишем это равенство в виде

$$\theta_1(\xi)\gamma(d)\frac{d^2}{2}\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p}\mu_pr_{p,2m-3}-\theta_1(\xi)\gamma(d)\sum_{p=1}^{m-1}J_{p,1}\frac{1}{\lambda_p}\mu_pr_{p,2m-3}=$$
$$=d_m+b_{2m}^0(\xi,0)M_mw_{2m-3},$$

(4.46)

где $J_{p,1}=\int_0^d\int_{\tau}^d\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)d\tau_3d\tau.$ (4.47)

Аналогично, используя (4.45) в (4.44′), получим равенство

$$\sum_{p=1}^{m-1}\mu_p\theta_2\left(\xi\right)\gamma\left(d\right)\int_0^d\frac{1}{\lambda_p}\left(1-\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma\left(p\right)}\right)\right)r_{p,2m-3}d\tau_3=$$
$$=d_{m-1}+b_{2m}^0\left(\xi,0\right)M_{m-1}w_{2m-3}.$$

или

$$\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p}\mu_p\theta_2\left(\xi\right)\gamma\left(d\right)r_{p,2m-3}\int_0^d d\tau_3-\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p}\mu_p\theta_2\left(\xi\right)\gamma\left(d\right)r_{p,2m-3}\cdot$$
$$\cdot\int_0^d\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma\left(p\right)}\right)d\tau_3=d_{m-1}+b_{2m}^0\left(\xi,0\right)M_{m-1}w_{2m-3}$$

Это равенство можно записать виде

$$\theta_2\left(\xi\right)\gamma\left(d\right)d\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p}\mu_p r_{p,2m-3}-\theta_2\left(\xi\right)\gamma\left(d\right)\sum_{p=1}^{m-1}J_{p,2}\frac{1}{\lambda_p}\mu_p r_{p,2m-3}=$$
$$=d_{m-1}+b_{2m}^0\left(\xi,0\right)M_{m-1}w_{2m-3}, \tag{4.46′}$$

Здесь

$$J_{p,2}=\int_0^d\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma\left(\rho\right)}\right)d\tau_3 d\tau. \tag{4.47′}$$

Рассмотрим интеграл, заданный формулой (4.47). Используя формулу Тейлора, получим равенство

$\gamma\left(\tau_3\right)=\gamma\left(d\right)+\gamma'\left(\varepsilon\left(\tau_3\right)\right)\left(\tau_3-d\right)$, где $\varepsilon\left(\tau_3\right)\in\left(\tau_3,d\right)$

Подставляя это равенство в (4.47), получим

$$J_{p,1}=\int_0^d\int_\tau^d\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma\left(\rho\right)}\right)d\tau_3 d\tau=\int_0^d\int_\tau^d\frac{\gamma\left(\tau_3\right)}{\gamma\left(\tau_3\right)}\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma\left(\rho\right)}\right)d\tau_3 d\tau=$$
$$=\int_0^d\int_\tau^d\frac{\gamma\left(d\right)}{\gamma\left(\tau_3\right)}\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma\left(\rho\right)}\right)d\tau_3 d\tau+J_{p,1}^1,$$

где

$$J_{p,1}^1=\int_0^d\int_\tau^d\frac{\gamma'\left(\varepsilon\left(\tau_3\right)\right)\left(d-\tau_3\right)}{\gamma\left(\tau_3\right)}\exp\left(\lambda_p\int_{\tau_3}^d\frac{d\rho}{\gamma\left(\rho\right)}\right)d\tau_3 d\tau \tag{4.47″}$$

Отсюда получим равенство

$$J_{p,1}=-\gamma(d)\int_0^d \frac{1}{\lambda_p}\left(1-\exp\left(\lambda_p\int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right)d\tau+J_{p,1}^1=$$

$$=\frac{-\gamma(d)}{\lambda_p}d+\frac{\gamma(d)}{\lambda_p}\int_0^d \exp\left(\lambda_p\int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)d\tau+J_{p,1}^1$$

Используя это равенство в (4.46), получим равенство

$$\theta_1(\xi)\gamma^2(d)d\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p^2}\mu_p r_{p,2m-3}-\theta_1(\xi)\gamma^2(d)\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^d \exp\left(\lambda_p\int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)d\tau\cdot\mu_p r_{p,2m-3}-\theta_1(\xi)\gamma\ (d)\sum_{p=1}^{m-1}J_{p,1}^1\frac{1}{\lambda_p}\mu_p r_{p,2m-3}+$$

$$+\theta_1(\xi)\gamma(d)\frac{d^2}{2}\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p}\mu_p r_{p,2m-3}=d_m+b_{2m}^0(\xi,0)M_m w_{2m-3},$$

Используя обозначение (4.47′) последнее равенство можно записать в виде

$$\theta_1(\xi)\gamma^2(d)d\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p^2}\mu_p r_{p,2m-3}+\theta_1(\xi)\gamma(d)\frac{d^2}{2}\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p}\mu_p r_{p,2m-3}-$$

$$-\theta_1(\xi)\gamma^2(d)\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{\lambda_p^2}J_{p,2}\mu_p r_{p,2m-3}-\theta_1(\xi)\gamma(d)\sum_{p=1}^{m-1}J_{p,1}^1\frac{1}{\lambda_p}\mu_p r_{p,2m-3}= \qquad (4.48)$$

$$=d_m+b_{2m}^0(\xi,0)M_m w_{2m-3}.$$

Из (4.43), (4.46′) и (4.46″) получим систему $(m-1)$ уравнений для нахождения чисел $\mu_p r_{p,2m-3}$, $p=1,2,...\mathrm{m}-1$.

Столбец с номером p определителя этой системы Δ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\theta_1(\xi)\gamma\ (d)\dfrac{d^2}{2}-\theta_1(\xi)\gamma(d)J_{p,1}^1}{\lambda_p}+\dfrac{\theta_1(\xi)\gamma^2(d)d-\theta_1(\xi)\gamma^2(d)J_{p,2}}{\lambda_p^2} \\ \dfrac{\theta_2(\xi)\gamma(d)d-\theta_2(\xi)\gamma(d)J_{p,2}}{\lambda_p} \\ 1 \\ \lambda_p \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{pmatrix}$$

Обозначим для простоты

$$\Delta = \left. \begin{vmatrix} \dfrac{\theta_1(\xi)\gamma(d)\dfrac{d^2}{2} - \theta_1(\xi)\gamma(d) J_{p,1}^1}{\lambda_p} + \dfrac{\theta_1(\xi)\gamma^2(d) d - \theta_1(\xi)\gamma^2(d) J_{p,2}}{\lambda_p^2} \\ \dfrac{\theta_2(\xi)\gamma(d) d - \theta_2(\xi)\gamma(d) J_{p,2}}{\lambda_p} \\ 1 \\ \lambda_p \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{vmatrix} \right|_{p=1,..,m-1}$$

Покажем, что $\Delta \neq 0$ при достаточно малых d.

$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, где

$$\Delta_1 = \left. \begin{vmatrix} \dfrac{\theta_1(\xi)\gamma(d)\dfrac{d^2}{2} - \theta_1(\xi)\gamma(d) J_{p,1}^1}{\lambda_p} \\ \dfrac{\theta_2(\xi)\gamma(d) d - \theta_2(\xi)\gamma(d) J_{p,2}}{\lambda_p} \\ 1 \\ \lambda_p \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{vmatrix} \right|_{p=1,...,m-1}$$

$$\Delta_2 = \left. \begin{vmatrix} \dfrac{\theta_1(\xi)\gamma^2(d) d - \theta_1(\xi)\gamma^2(d) J_{p,2}}{\lambda_p^2} \\ \dfrac{\theta_2(\xi)\gamma\ (d) d - \theta_2(\xi)\gamma\ (d) J_{p,2}}{\lambda_p} \\ 1 \\ \lambda_p \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{vmatrix} \right|_{p=1,..,m-1}$$

$\Delta_2 = \Delta_{2,1} - \Delta_{2,2}$, где

$$\Delta_{2,1}=\left|\begin{matrix}\frac{1}{\lambda_p^2}\theta_1(\xi)\gamma^2(d)d\\ \frac{\theta_2(\xi)\gamma(d)d-\theta_2(\xi)\gamma(d)J_{p,2}}{\lambda_p}\\ 1\\ \lambda_p\\ \vdots\\ \lambda_p^{m-4}\end{matrix}\right|_{p=1,..,m-1}$$

$$\Delta_{2,2}=\left|\begin{matrix}\frac{\theta_1(\xi)\gamma^2(d)J_{p,2}}{\lambda_p^2}\\ \frac{\theta_2(\xi)\gamma(d)d-\theta_2(\xi)\gamma(d)J_{p,2}}{\lambda_p}\\ 1\\ \lambda_p\\ \vdots\\ \lambda_p^{m-4}\end{matrix}\right|_{p=1,...,m-1}$$

$\Delta_{2,1}=\Delta_{2,1,1}-\Delta_{2,1,2}$, где

$$\Delta_{2,1,1}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)d^2\left|\begin{matrix}\frac{1}{\lambda_p^2}\\ \frac{1}{\lambda_p}\\ 1\\ \lambda_p\\ \vdots\\ \lambda_p^{m-4}\end{matrix}\right|_{p=1,...,m-1}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)d^2\widetilde{\Delta}_{2,1,1}$$

$$\Delta_{2,1,2}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)d\left|\begin{matrix}\frac{1}{\lambda_p^2}\\ \frac{J_{p,2}}{\lambda_p}\\ 1\\ \lambda_p\\ \vdots\\ \lambda_p^{m-4}\end{matrix}\right|_{p=1,\dots,m-1}$$

Заметим, что $\Delta_{2,1,1}$ - определитель Вронского, то есть $\Delta_{2,1,1}\neq 0$.

Так как $\operatorname{Re}\lambda_p<0\quad p=1,2,\dots m-1$, то из $(4.47')$ следует, что $J_{p,2}=o\left(d^N\right)$ при $d\to+\infty$ для любого $N>0$.

Отсюда $\Delta_{2,1,2}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)d\cdot o\left(d^{N_1}\right)$ для любого $N_1>0$.

То есть $\Delta_{2,1}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\left(\gamma^3(d)d^2\widetilde{\Delta}_{2,1,1}-\gamma^3(d)d\cdot o\left(d^{N_1}\right)\right)$

Рассмотрим теперь определитель $\Delta_{2,2}$

$\Delta_{2,2}=\Delta_{2,2,1}-\Delta_{2,2,2}$, где

$$\Delta_{2,2,1}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)d\left|\begin{matrix}\frac{J_{p,2}}{\lambda_p^2}\\ \frac{1}{\lambda_p}\\ 1\\ \lambda_p\\ \vdots\\ \lambda_p^{m-4}\end{matrix}\right|_{p=1,\dots,m-1}$$

$$\Delta_{2,2,2}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)\left|\begin{matrix}\frac{J_{p,2}}{\lambda_p^2}\\ \frac{J_{p,2}}{\lambda_p}\\ 1\\ \lambda_p\\ \vdots\\ \lambda_p^{m-4}\end{matrix}\right|_{p=1,\dots,m-1}$$

Так как $J_{p,2} = o\left(d^N\right)$ для любого $N > 0$, то $\Delta_{2,2} = \theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)o\left(d^{N_1}\right)$ для любого $N_1 > 0$.

Таким образом

$\Delta_2 = \Delta_{2,1} - \Delta_{2,2} = \theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)d^2\widetilde{\Delta}_{2,1,1} - \theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)o\left(d^{N_1}\right)$ для любого $N_1 > 0$.

Рассмотрим теперь определитель Δ_1.

$\Delta_1 = \Delta_{1,1} - \Delta_{1,2}$, где

$$\Delta_{1,1} = \theta_1(\xi)\gamma(d)\frac{d^2}{2}\left|\begin{matrix} \dfrac{1}{\lambda_p} \\ \dfrac{\theta_2(\xi)\gamma(d)d - \theta_2(\xi)\gamma(d)J_{p,2}}{\lambda_p} \\ \dfrac{1}{\lambda_p} \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{matrix}\right|_{p=1,..,m-1}$$

$$\Delta_{1,2} = \theta_1(\xi)\gamma(d)\left|\begin{matrix} \dfrac{J_{1,1}^1}{\lambda_p} \\ \dfrac{\theta_2(\xi)\gamma(d)d - \theta_2(\xi)\gamma(d)J_{p,2}}{\lambda_p} \\ \dfrac{1}{\lambda_p} \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{matrix}\right|_{p=1,..,m-1}$$

Рассмотрим вначале $\Delta_{1,1}$

$\Delta_{1,1} = \Delta_{1,1,1} - \Delta_{1,1,2}$, где

$$\Delta_{1,1,1} = \theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)\frac{d^3}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_p} \\ \dfrac{1}{\lambda_p} \\ 1 \\ \lambda_p \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{vmatrix}_{p=1,\dots,m-1} = 0$$

$$\Delta_{1,1,2} = \theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)\frac{d^2}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_p} \\ \dfrac{J_{p,2}}{\lambda_p} \\ 1 \\ \lambda_p \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{vmatrix}_{p=1,\dots,m-1}$$

То есть $\Delta_{1,1} = \theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)\dfrac{d^2}{2}o\left(d^{N_1}\right)$ для любого $N_1 > 0$.

$\Delta_{1,2} = \Delta_{1,2,1} - \Delta_{1,2,2}$, где

$$\Delta_{1,2,1} = \theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)d\begin{vmatrix} \dfrac{J_{p,1}^1}{\lambda_p} \\ \dfrac{1}{\lambda_p} \\ 1 \\ \lambda_p \\ \vdots \\ \lambda_p^{m-4} \end{vmatrix}_{p=1,\dots,m-1}$$

$$\Delta_{1,2,2}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)\begin{vmatrix}\dfrac{J_{p,1}^1}{\lambda_p} & \dfrac{J_{p,2}}{\lambda_p} & 1 & \lambda_p & \cdots & \lambda_p^{m-4}\end{vmatrix}_{p=1,\dots,m-1}$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda_p<0 \quad p=1,2,\dots m-1$, то из $(4.47')$ и $(4.47'')$ следует, что $J_{p,2}=o\left(d^N\right), J_{p,1}^1=o\left(d^N\right)$ для любого $N>0$.

Отсюда $\Delta_{1,2,1}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)d\cdot o\left(d^{N_1}\right)$ при любых $N_1>0$.

Отсюда $\Delta_{1,2}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)d\cdot o\left(d^{N_1}\right)-\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)o\left(d^{N_1}\right)$

Таким образом

$$\Delta_1=\Delta_{1,1}-\Delta_{1,2}=\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)\left[\frac{d^2}{2}o\left(d^{N_1}\right)-d\cdot o\left(d^{N_1}\right)+o\left(d^{N_1}\right)\right]$$

Отсюда

$$\Delta=\Delta_1-\Delta_2=-\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\Big[\gamma^3(d)d^2\widetilde{\Delta}_{2,1,1}-\gamma^3(d)o\left(d^{N_1}\right)-\gamma^2(d)\Big(\frac{d^2}{2}o\left(d^{N_1}\right)-d\cdot o\left(d^{N_1}\right)+$$

$$+o\left(d^{N_1}\right)\Big)\Big]=-\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^2(d)\left[\gamma(d)d^2\widetilde{\Delta}_{2,1,1}-\gamma(d)o\left(d^{N_1}\right)-\frac{d^2}{2}o\left(d^{N_1}\right)+d\cdot o\left(d^{N_1}\right)-o\left(d^{N_1}\right)\right]$$

при любом $N_1>0$.

Таким образом, при достаточно малых $d>0$

$\Delta\approx-\theta_1(\xi)\theta_2(\xi)\gamma^3(d)d^2\widetilde{\Delta}_{2,1,1}$, где $\widetilde{\Delta}_{2,1,1}\neq0$. То есть при достаточно малом $d>0$ получим, что $\Delta\neq0$.

Таким образом, при любых правых частях система (4.43), (4.46) имеет единственное решение при достаточно малом $d>0$. Решение данной системы может быть записано в виде

$$\mu_p=\sum_{\nu=m}^{2m-3}\beta_{p,\nu}\left(d_\nu+b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3}\right)\frac{1}{r_{p,2m-3}},\quad p=1,2,\dots,m-1, \tag{4.49}$$

где $\beta_{p,\nu}$ - некоторые коэффициенты.

Используя (4.49) и (4.41) в (4.33) при $\nu = 2m-3$, получим уравнение

$$w_{2m-3}(\xi,t) = \widetilde{F}(\xi,t) + b_{2m}^{0}(\xi,0)\widetilde{M}w_{2m-3}(\xi,t), \tag{4.50}$$

где

$$\widetilde{F}(\xi,t) = \sum_{\nu=m}^{2m-3}\sum_{p=1}^{m-2}\beta_{p,\nu}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) - \int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{4.51}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{M}w_{2m-3} = \sum_{\nu=m}^{2m-3}\sum_{p=1}^{m-2}\beta_{p,\nu}M_\nu w_{2m-3}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) - \\ -\int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau.\end{gathered} \tag{4.52}$$

Вначале докажем, что уравнение (4.50) разрешимо с дополнительными условиями:

$$\begin{cases}\max\limits_{1\le j\le m-1}\operatorname{Re}\lambda_j + \max\limits_{0\le t\le d}|\gamma'(t)| \le \delta_- < 0\\ \min\limits_{m-1\le j\le 2m-3}\operatorname{Re}\lambda_j - \max\limits_{0\le t\le d}|\gamma'(t)| \ge \delta_+ > 0.\end{cases} \tag{4.53}$$

Для доказательства существования решения уравнения (4.50) выпишем ряд оценок

$$\left\|\int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_{2(0,d)}} \le (m-1)\left(\frac{1}{\delta_-}+\frac{1}{\delta_+}\right)\|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{4.54}$$

$$\sum_{p=1}^{m-2}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right\|_{L_2(0;d)} \le (m-1)\left(\frac{1}{\delta_-}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.55}$$

$$\sum_{j=m-1}^{2m-3}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp\left(-\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right\|_{L_2(0;d)} \le (m-1)\left(\frac{1}{\delta_+}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.56}$$

$$\sup_{0<t_1<d}\left\|\int_0^t P_\nu\Phi(t_1,t)d\tau\right\|_{L_2(0;d)} \le 3(m-1)\left(\frac{1}{\delta_+}+\frac{1}{\delta_-}\right)\sqrt{d}\ . \tag{4.57}$$

Эти оценки можно непосредственно вывести из (4.30) и (4.53). Оценки (4.54) - (4.57) позволяют сделать вывод, что функция $\widetilde{F}(x,t)$, определяемая в (4.51), принадлежит пространству $L_2(0;d)$. Оператор $\widetilde{M}$, определяемый в соотношении (4.52) - ограниченный оператор в $L_2(0;d)$. Выбирая далее $\delta > 0$ настолько малым, чтобы при всех $|\xi| \le \delta$ было выполнено условие

$\left|b_{2m}^{0}(\xi,0)\right|\left\|\widetilde{M}\right\|_{L_2\to L_2}\le\frac{1}{2}$. Следовательно, существует единственное решение уравнения (4.50) в $L_2(0;d)$ и

$$w_{2m-3}=\left(I-b_{2m}^{0}(\xi,0)\widetilde{M}\right)^{-1}\widetilde{F}. \tag{4.58}$$

Причём справедлива оценка

$$\left\|w_{2m-3}\right\|_{L_2(0;d)}\le 2\left\|\widetilde{F}\right\|_{L_2(0;d)}. \tag{4.59}$$

Решение системы (4.20) получим подставляя решение (4.58) в (4.33). Решение будет удовлетворять условиям (4.25), (4.26), (4.27), а, это означает, что выполняются условия (4.2), (4.3).

Равенство (4.33) и неравенство (4.59) позволяют сделать вывод, что координаты векторных функций $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ принадлежат пространству $L_2(0;d)$ по переменной t при любых $\xi\in R^{n-1}$, $|\xi|\le\delta$.

То есть векторные функции $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ будут являться решением системы (2.20), а также удовлетворять условиям (4.25), (4.26), (4.27).

Из (4.12) – (4.14) следует, что $u(\xi,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$i^{-2m}\alpha^{2m}(t)\partial_t^{2m}u-\frac{b}{a_{02m}}\partial_t^{3}u+\sum_{|\tau|=2m}\frac{a_{\tau,0}}{a_{02m}}\xi^{\tau}u=f. \tag{4.60}$$

В силу того, что

$$i^{-2m}\alpha^{2m}(t)\partial_t^{2m}u=D_{\alpha,t}^{2m}u+R_{2m}u, \tag{4.61}$$

тут $R_{2m}u=\sum_{j=0}^{2m-1}z_{2m,j}(t)D_{\alpha,t}^{j}u$, а $z_{2m,j}(t)$ - непрерывные и ограниченные функции на отрезке $[0;d]$.

Тогда, из (4.60) и (4.61) заключаем, что функция $u(\xi,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$a_{02m}D_{\alpha,t}^{2m}u-b\partial_t^{3}u+\sum_{|\tau|=2m}a_{\tau,0}\xi^{\tau}u+R_{2m}u=f(\xi,t). \tag{4.62}$$

Можно показать, что это уравнение имеет решение $u(\xi,t)$ принадлежащее пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ по переменной t

Введем обозначение $\widetilde{A}=a_{02m}D_{\alpha,t}^{2m}+\sum\limits_{|\tau|=2m}a_{\tau,0}\xi^{\tau}+b\partial_t^3+a_{02m}R_{2m}$.

Рассмотрим оператор $A^{\mu}=\mu A+(1-\mu)\widetilde{A}$, где $A=L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})+b\partial_t^3$. Можно показать справедливость априорной оценки, аналогичной оценке из теоремы 3 для оператора A^{μ} при $|\xi|\le\delta$ с не зависящей от $\mu\in[0,1]$ константой. Исходя из предыдущих выкладок, можем сделать вывод, что уравнение (4.62) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (4.2), (4.3). Пользуясь этим, при помощи метода продолжения по параметру μ и используя априорную оценку, получаем, что уравнение $Au=f$ будет иметь единственное решение, которое удовлетворяет условию (4.2) и (4.3) при $|\xi|\le\delta$.

Рассмотрим оператор $A\left(\lambda\dot{\xi},D_{\alpha,t},\partial_t\right)$, где $|\dot{\xi}|=\delta$. Используем априорную оценку из теоремы 3, а также при помощи метода продолжения по параметру $\lambda>0$. Из ранее установленной разрешимости задачи (4.2) - (4.3) для уравнения $A\left(\lambda\dot{\xi},D_{\alpha,t},\partial_t\right)u=f$ при $\lambda=1$, получаем, что данная задача имеет единственное решение для любых $\lambda>0$. Теперь положим $\lambda=\frac{|\xi|}{\delta}$, в результате получим, что задача (4.2) - (4.3) для уравнения $A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u=f$ будет иметь единственное решение для любых $\xi\in R^{n-1}$. Тогда нами установлена существование и единственность решения задачи (4.1) - (4.3) при дополнительных условиях (4.53). В случае невыполнения хотя бы одного этого условия, будем рассматривать оператор $\widehat{A}=L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})+\hat{b}\partial_t^3$. Здесь $\operatorname{Re}\bar{\hat{b}}a_{02m}>0$, $\operatorname{Im}\bar{\hat{b}}a_{02m}=0$. Следовательно, оператор $\widehat{A}$ будет удовлетворять тем же условиям, что и оператор A. Выбираем $\mathrm{Re}\hat{b} > 0$ настолько большим, чтобы условия (4.53) были выполнены. Выше было сказано, что задача (4.2) - (4.3) для уравнения $\widehat{A}u = f$ имеет единственное решение в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Заметим, что можно показать справедливость априорной оценки, аналогичной оценке теоремы 3, которая будет выполняться и для оператора $\widehat{A}^{\mu} = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) + (b\mu + (1-\mu)\hat{b})\partial_t^3$, при этом постоянная в этой оценке не зависит от $\mu \in [0;1]$. Это дает возможность опять применять метод продолжения по параметру $\mu \in [0;1]$ и получить существование и единственность решения этой задачи при $\mu = 1$ из существования и единственности задачи (4.2) - (4.3) для уравнения $\widehat{A}^{\mu}u = f$ при $\mu = 0$. Исходя из того, что $\hat{A}^1 = A$, получим, что существование и единственность решения задачи (4.2) - (4.3) доказана в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, откуда и следует существование и единственность решения задачи (4) - (6) в $H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$. При доказательстве существования и единственности решения задачи (4) - (6) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ при $s > 2m$, необходимо использовать известный метод повышения гладкости (см [35]).

При достаточно малых $d > 0$ разрешимость показана. При $t \geq d$ уравнение не будет являться вырождающимся, а, это означает, что решение задачи (4) - (6) существует при $t \in [d;d_1]$ (см. [35]). Тогда при помощи «склеивания» (см. [35]), получим существование и единственность решения задачи (4) - (6) при $t \in [0;d_1]$ для любого $d_1 > 0$. Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4. Утверждение теоремы 4 при $k = 0$ следует из теоремы 4.1. Докажем теорему 4 при $k > 0$ - целом. Повторяя доказательство априорной оценки решения задачи (4) – (6) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}\left(\overline{R_d^n}\right)$ при $s>2m$ получим оценку

$$\sum_{|\beta|\le k}\left\|D_\xi^\beta u(\xi,t)\right\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\sum_{|\beta|\le k}\left\|D_\xi^\beta A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}+\right.$$
$$\left.\sum_{|\beta|\le k}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s-m^*-\frac{m}{3}\right)}\left|D_\xi^\beta g(\xi)\right|+\sum_{|\beta|\le k-1}\left\|D_\xi^\beta u(\xi,t)\right\|_{L_2(0;d)}\right) \qquad (4.63)$$

Последовательное применение неравенств (4.63) и априорной оценки (3.1.4) позволяет установить существование и единственность решения (4) – (6) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}\left(R_d^n\right)$ при $k>0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О.А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О.А. Олейник // Докл. Академии наук. 1952. -Т. 87, № 6. -С. 885-887.

2. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. Академии наук. - 1951. -Т. 77, №2.-С. 181-183.

3. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. М.: Наука, 1966. - 292 с.

4. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик // Математический сб. — 1954. Т. 35 (77), вып. 33. - С. 513-568.

5. Михлин С.Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С.Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. 1954. - № 8. - С. 19-48.

6. Олейник О.А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А.Олейник, Е.В. Радкевич // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. М., 1971. - Вып. Математический анализ. - С. 5-93.

7. Кондратьев В.А. Об асимптотических свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях / В.А. Кондратьев // Труды конференции им. И.Г. Петровского. М., 2006. - Вып. 25. -С. 98-111.

8. . Кондратьев В.А. Об асимптотических свойствах решений нелинейного уравнения теплопроводности / В.А. Кондратьев // Дифференциальные уравнения. 1998. - Т. 34, № 2. - С. 246-255.

9. Кондратьев В.А. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка / В.А. Кондратьев, Е.М. Ландис // Математический сб. 1988. - Т. 135 (177), № 3. - С. 346-360.

10. Егоров Ю.В. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях / Ю.В.

Егоров, В.А. Кондратьев, О.А. Олейник // Математический сб. 1998. - Т. 189, № 3. - С. 45-68.

11. Олейник О.А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник // Математический сб. 1966. - Т. 69 (111), вып. 1.-С. 111-140.

12. Кон Д. Некоэрцитивные краевые задачи / Д. Кон, Л. Ниренберг // Пседодифференциальные операторы : сб. науч. тр. М., 1967. - С. 88-165.

13. Глушко В.П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В.П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. 1968. - Т. 2, вып. 3. - С. 87-88.

14. Глушко В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач длявырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В.П. Глушко // Труды Московского математического общества. 1970. - Т. 23. - С. 113-178.

15. Рукавишников В.А. О коэрцитивности R_ν обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных / В.А. Рукавишников, А.Г. Ереклинцев // Дифференциальные уравнения. - 2005. - Т. 41, №12.-С. 1680-1689.

16. Антонцев С.Н. О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением / С.Н. Антонцев, С.И. Шмарев // Сибирский математический журн. 2005. - Т. 46, № 5. - С. 963-984.Рукавишников В.А.

17. Рукавишников В.А. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с несогласованным вырождением исходных данных / В.А. Рукавишников // Дифференциальные уравнения. 1996. - Т. 32, № 3. - С. 402408.

18. Баев А.Д. Корректная разрешимость общих краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка /А.Д.

Баев, В.П. Глушко; Воронеж, гос. ун-т. Воронеж, 1979. - 61 с. - Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 536 -79 Деп.

19. Исхоков С.А. О Гладкости решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением / С.А. Исхоков // Докл. Академии наук. 2001. - Т. 378, № 3.-С. 306-309.
20. Левендорский С.З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С.З. Левендорский // Математический сб. 1980. - Т. 111 (153), вып. 4.-С. 483-501.
21. Леопольд Х.Г. Априорные оценки для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с невырождающейся второй производной / Х.Г. Леопольд. Новосибирск, 1981. - 33 с. - Деп. в ВИНИТИ 29.08.81, № 4269 -81.
22. Бочаров О.Б. Численное исследование гидрофизических процессов при сохранении различных неизотермических моделей фильтрации двухфазной жидкости / О.Б. Бочаров, И.Г. Телегин // Теплофизика и аэромеханика. - 2005. -
Т. ,12, № 4.- С. 457-467.
23. Баев А.Д. Вырождающиеся, эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д: Баев;// Докл. Академии наук.-1982: Т.265, №5; - С. 1044-1046.
24. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве; для; вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Докл. Академии наук. 2008. - Т.422, №6. - С. 727-728:
25. Лионс Ж. Неоднородные граничные задачи и. их приложения / Ж. Лионс, Э. Мадженес. -М.: Мир, 1971. 371с.
26. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров.14 е изд. -М : Наука, 1981. - 512 с.

27. Глушко В.П. Об одном критерии существования свертки- обобщенных функций/ В.П. Глушко; Воронеж, гос. ун-т. Воронеж', 1982. - 12 с. - Деп. в ВИНИТИ 22.11.82, № 5721 -82.
28. Крукиер Л. А. Распространение примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле / Л. А. Крукиер, Т. С. Мартынова // Математическое моделирование. 2004. - Т. 16, № 1. - С. 3-11.
29. Задворнов О. А. Постановка и исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием / О. А. Задворнов // Изв. вузов. Математика.2003.-№1(488).-С.45-52.
30. Урев М. В. Сходимость метода конечных элементов для осесимметричной задачи магнитостатики / М. В. Урев // Сибирский журн. вычислительной математики.2006.-Т.9,№1.-С.81-108.
31. Монахов В. Н. Сопряжение основных математических моделей фильтрации двухфазных жидкостей / В. Н. Монахов // Математическое моделирование.2002.Т.14,№10.-С.109-115.
31. Шишкин Г. И. Метод повышения точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции диффузии / Г. И.Шишкин // Сибирский журн. вычислительной математики. 2006. - Т. 9, № 1. -С. 81-108.
32. Габасов Р. Ф. Особые оптимальные управления / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кирилова.М.:Наука,1973.-256с.
32. Особые множества и динамические свойства билинейных систем управления / В.Н.Жермоленко // Фундаментальная и прикладная математика.-2005.-Т. 11,№8.-С.105-117.
33. Шкляева Е. В. Оптимальное упраление фильтрацией жидкости / Е. В. Шкляева // Международная конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям: тез. докл. конф., Новосибирск, 29-31 окт. 2002 г.-Новосибирск, 2002.-С. 63.

34. Агмон С., Дуглас А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы / С. Агмон С., А. Дуглас, Л. Ниренберг // Москва, Иностранная литература, 1963. -205 с.
35. Лионс Ж. Неоднородные граничные задачи и их приложения/Ж. Лионс, Э. Мадженес// Москва, Мир, 1971. -371 с.
36. Бунеев С.С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. междунар. конф., Воронеж, 26-28 сент. 2011 г. — Воронеж, 2011 .— С. 54-55 .
37. Бунеев С.С. О существовании решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011) : материалы IV междунар. науч. конф., Воронеж, 12-17 сент. 2011 г. — Воронеж, 2011 .— С. 16-17 .
38. Бунеев С.С. Априорные оценки решений одной краевой задачи в полосе для эллиптического уравнения высокого порядка /С.С. Бунеев // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Понтрягинские чтения XXIII». Воронеж, 2012 .— С. 4 – 6.
39. Бунеев С.С. Априорные оценки решений краевых задач в полосе для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Известия высших учебных заведений. Математика .— Казань, 2012 .— № 7. - С. 50-53 .— ISSN 0021-3446 .
40. Бунеев С.С. A Priori Estimates for Solutions of Boundary-Value Problems in a Band for a Class of Higher-Order Degenerate Elliptic Equations / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika) .— 2012 .— Vol. 56, N. 7. - P. 44-46 .— ISSN 1066-369X.
41. Бунеев С.С. Анализ корректности одного класса математических моделей вырождающихся процессов / А.Д. Баев, С.С. Бунеев, О.А. Савина, Е.И. Трофимова, В.Е. Щербатых // Вестник Воронежского государственного

университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии .— Воронеж, 2012 .— № 2. - С.18-23 .— ISSN 1995-5499 .— ISSN 0234-5439
42. Бунеев С.С. Теорема о существовании и единственности решения одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Известия Саратовского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика .— Саратов, 2012 .— Т. 12, вып. 3. - С.8-17 .— ISSN 1814-733X .— ISSN 1816-9791
43. Бунеев С.С. О корректности одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптичнского уравнения высокого порядка / С.С. Бунеев // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. [ПМТУММ-2012] : материалы V Междунар. конф., Воронеж, 11-16 сент.2012 г. — Воронеж, 2012 .— С. 55-57
44. Бунеев С.С. Оценки решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптичнского уравнения высокого порядка / С.С. Бунеев // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. [ПМТУММ-2012] : материалы V Междунар. конф., Воронеж, 11-16 сент.2012 г. — Воронеж, 2012 .— С. 58-60
45. Бунеев С.С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика .— Воронеж, 2012 .— № 1. - С. 81-92 .— ISSN 0234-5439 .— ISSN 1609-0705 .
46. Бунеев С.С. Об одной краевой задаче в полосе для эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе области в уравнение третьего порядка/ С.С. Бунеев // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012 : материалы международной конференции .— Воронеж, 2012 .— С. 37-39.
47. Бунеев С.С. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Доклады Академии Наук .— Москва, 2013 .— Т. 448, № 1. - С. 7-8 .— ISSN 0869-5652

48. Бунеев С.С. On a Class of Boundary Value Problems in a Strip for Degenerate Higher-Order Elliptic Equations / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Doklady Mathematics .— Москва, 2013 .— Vol. 87, No. 1. - P. 1-2 .— ISSN 1064-5624
49. Бунеев С.С. Об оценках решений одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / С.С. Бунеев // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронежской зимней математической школы .— Воронеж, 2013 .— С. 36-38
50. Бунеев С.С. существовании решений одной краевой задачи в полосе / С.С. Бунеев // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронежской зимней математической школы .— Воронеж, 2013 .— С. 33-35.
51. Бунеев С.С. Априорные оценки решений одного вырождающегося уравнения/ С.С. Бунеев // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Понтрягинские чтения – XXIV». - Воронеж, 2013.— С. 39-42.
52. Бунеев С.С. Существование решения одной краевой задачи в полосе для вырождающегося уравнения/ С.С. Бунеев // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Понтрягинские чтения – XXIV». - Воронеж, 2013.— С. 42-44.
53. Бунеев С.С. Об одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения / С.С. Бунеев // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2014 : материалы международной конференции .— Воронеж, 2014 .— С. 71-73.
54. Бунеев С. С. О коэрцитивной разрешимости одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения / С.С. Бунеев // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Понтрягинские чтения – XXV». - Воронеж, 2014.— С. 23-25.
55. Бунеев С. С. О краевых задачах в полосе для вырождающихся уравнений/ А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа».— Воронеж, 2015 .— С. 168-170.