РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

На правах рукописи

ХОАНГ НГЫ ХУАН

СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЧЁТНЫХ ПОРЯДКОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Зайцев В. Ф.

Санкт-Петербург – 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Работа посвящена решению обратной задачи группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка, причём ищутся подклассы уравнений, имеющих первый интеграл, который "наследует" симметрию самого уравнения. Иными словами, проводится поиск подклассов уравнений, обладающих аналогом нётеровой (или вариационной) симметрии.

Актуальность темы. Известно, что под симметрией понимается свойство объекта оставаться инвариантным под действием какого-либо преобразования. Симметрия широко распространена в природе, исследуется во всех областях естественных наук, и её изучение во многих случаях является эффективным методом исследования. В математическом моделировании симметрия, наряду с законами сохранения, играет роль фундаментального закона природы.

В области дифференциальных уравнений (ДУ) симметрийные методы возникли в XIX веке, когда Софус Ли (1842 – 1899), наиболее известные работы которого [40], [41] опубликованы в конце XIX века, предложил регулярный алгоритм группового анализа для классификации и поиска решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). К сожалению, в начале XX века широкая научная общественность не проявила должного внимания к идеям С. Ли, хотя известно несколько содержательных работ в этой области [36], [38]. Однако подлинный расцвет симметрийного подхода к ДУ произошёл полвека спустя, когда Л. В. Овсянников [24], [25] успешно применил групповой анализ к исследованию нелинейных уравнений с частными производными, что позволило найти в явном виде большое число физически значимых решений модельных уравнений в различных областях прикладной науки (механика, гидродинамика, нелинейная оптика и др.). В теории ОДУ была найдена глубокая связь между различными типами симметрий – непрерывными группами преобразований (группами Ли) и первыми интегралами (законами сохранения): смысл теоремы Нётер в теории ОДУ состоит в том, что при определённых условиях симметрия исходного уравнения "наследуется" первым интегралом, и наличие **одной** вариационной симметрии позволяет понизить порядок уравнения сразу на **две** единицы.

Однако вариационная симметрия определена лишь для уравнений чётного порядка, и попытки ввести гамильтонову структуру на ОДУ нечётных порядков не привели к положительному результату (с точки зрения интегрируемости). Поэтому с временем сложилось впечатление, что аналогичной структуры симметрии для уравнения нечётных порядков не существует. Очевидно, это не так – в качестве контрпримера можно привести простое уравнение 3-го порядка

$$y''' = 2yy', \tag{0.0.1}$$

которое автономно и имеет автономный первый интеграл

$$y'' = y^2 + C, \tag{0.0.2}$$

т. е. симметрия этого уравнения абсолютно аналогична вариационной в том смысле, что первый интеграл её "наследует", позволяя с её помощью понизить порядок исходного уравнения сразу на две единицы.

В данный момент известны 2 работы, посвящённые аналогам вариационной симметрии. В 1989 г. С. П. Царёв опубликовал статью [35], где была разработана теория вариационной симметрии для механической системы нечётных порядков. В работе получены интересные результаты и приведены строгие доказательства сформулированных теорем. Однако все содержательные выводы касаются уравнений и систем уравнений с частными производными, для обыкновенных дифференциальных уравнений существенных результатов получить не удалось.

Более интересные результаты получил П. П. Аврашков, который в своей кандидатской диссертации [6], защищённой в 2004 г. в Казани, указал нетривиальные примеры уравнений 3-го порядка, имеющие аналог вариационной симметрии. Следует отметить, что Аврашков успешно использовал прямой метод, опирающийся на определяющее уравнение (1.1.21) и определение первого интеграла (1.2.4).

Всего П. П. Аврашкову [2], [3], [5], [6] удалось найти 26 нетривиальных уравнений 3-го порядка, симметрии которых "наследуются" первым интегралом. Например, уравнение

$$y''' = \frac{\lambda x^{2\gamma-1}}{(C_1 x + \delta)^{2\gamma+1} y} \tag{0.0.3}$$

допускает оператор симметрии

$$X = (C_1 x^2 + \delta x)\partial_x + (2C_1 x + \delta + \delta\gamma) y \partial_y \tag{0.0.4}$$

и имеет первый интеграл

$$P = \left[yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\lambda}{2\gamma\delta} \frac{x^{2\gamma}}{(C_1 x + \delta)^{2\gamma}} + C_0 \right]^2, \tag{0.0.5}$$

который, в свою очередь, также допускает оператор симметрии (0.0.4). Более того, среди таких примеров существует уравнение, которое имеет первый интеграл, наследующий даже две его симметрии, что в конечном итоге позволяет полностью проинтегрировать исходное уравнение в квадратурах.

Заметим, что полномасштабные исследования уравнений нечётных порядков до определённого времени вообще не проводились – сколько-нибудь общая групповая классификация уравнений 3-го порядка была проведена М. Я. Ланкеровичем [22] и имела вспомогательное значение (темой исследования были уравнения в частных производных). Поэтому в работах Аврашкова не ставилась цель полномасштабного исследования подклассов уравнений 3-го порядка, имеющих аналоги вариационных симметрий. В настоящей работе мы будем искать широкие классы таких уравнений, удовлетворяющие некоторым априорным условиям –

как по структуре самих уравнений, так и по структуре первого интеграла (за немногими исключениями рассматриваются первые интегралы, являющиеся полиномами по второй производной).

Следует также отметить работы В. Н. Горбузова и его школы (Гродно) [7], [8], [9], [10], однако в них рассматриваются, в основном, системы ОДУ и задачи в несколько иной постановке.

Если абстрагироваться от механических аналогий, то становится очевидным, что последовательное разыскание и описание подклассов подобных уравнений весьма актуально, учитывая востребованность ОДУ 3-го порядка в качестве эталонных и промежуточных моделей. Некоторые уравнения этого типа уже приведены в известных справочниках по ОДУ В. Ф. Зайцева и А. Д. Полянина [16], [17], хотя в сколько-нибудь общем виде соответствующие обратные задачи до сих пор не решались.

Постановка и решение обратных задач восходит ещё к исследованиям самого Софуса Ли. Например, легко построить общий класс уравнений n-го порядка, допускающих конкретный точечный инфинитезимальный оператор: если его инвариантами являются функции $I_0 = I_0(x, y)$ и $I_1 = I_1(x, y, y')$, таким классом будет множество уравнений

$$F\left(I_0, I_1, \frac{dI_1}{dI_0}, \ \ldots\ , \frac{d^{n-1}I_1}{dI_0^{n-1}}\right) = 0.$$

Подобные обратные задачи (назовём их **ограниченными обратными задачами**) решаются довольно просто даже для заданной нелокальной симметрии.

Однако растущие потребности ряда прикладных наук и проблемы поиска модельных уравнений в математическом моделировании привели к появлению **общих обратных задач**. В них, как правило, конкретный вид допускаемого оператора не задаётся, известен лишь вид симметрии (например, точечная). При этом общий вид искомого уравнения также ограничивается некоторыми априорными условиями. Так для уравнений второго порядка, не содержащих первой производной

$$y'' = F(x, y)$$

задача поиска всех уравнений, допускающих хотя бы какую-нибудь точечную симметрию, была решена независимо друг от друга и двумя различными методами П. Личем [39] и В. Ф. Зайцевым [12], причём интересно, что Лич подошёл к решению этой задачи, используя квадратичный по y' первый интеграл. В данном случае оказалось, что подкласс таких уравнений, имеющих квадратичный первый интеграл, строго вложен в подкласс уравнений, имеющих точечную симметрию, и состоит из интегрируемых в квадратурах уравнений. Похожая структура подкласса наблюдается и для уравнений произвольного высшего порядка, не содержащих "предстаршей" производной [1], [4], однако связь между инфинитезимальными операторами и первыми интегралами с повышением порядка становится всё менее и менее очевидной. Тем не менее, для уравнений чётных порядков эта связь вполне объяснима (с учётом введения гамильтоновой структуры и теоремы Нётер).

Следует отметить, что для уравнений чётных свойство вариационной симметрии является вполне обычным, например, любое уравнение вида

$$y^{(2n)} = F(y)$$

имеет квадратичный по y^{2n-1} автономный первый интеграл, тогда как для уравнений нечётных порядков это свойство оказывается очень "редким", и требуются специальные исследования, чтобы найти примеры уравнений типа

$$y^{(2n-1)} = F(y), \qquad n \geqslant 2,$$

обладающих подобным свойством.

Цели работы. Целью исследования являются некоторые направления симметрийного анализа ОДУ 3-го порядка. В соответствие с этим мы будем решать следующие задачи.

1. Разработать технику, позволяющую эффективно решать обратные задачи и находить подклассы уравнений 3-го порядка, допускающие аналог вариационной симметрии.
2. Найти группы эквивалентности для различных подклассов ОДУ 3-го порядка.
3. Провести поиск уравнений класса $y''' = f(y)$, имеющих автономный первый интеграл, который обладает определённой структурой – в виде полиномов относительно старшей производной (линейный, квадратичный и кубичный).
4. Провести поиск уравнений класса $y''' = f(y, y')$, имеющих автономный первый интеграл, который обладает определённой структурой – в виде полиномов относительно старшей производной (линейный, квадратичный и кубичный).
5. Провести поиск уравнений класса $y''' = f(y, y'')$ (в случае, когда $f(y, y'')$ является полиномами относительно y''), имеющих автономный первый интеграл, который также обладает полиноминальной структурой по старшей производной.

Положения, выносимые на защиту.

1. Регулярный алгоритм поиска автономных классов уравнений 3-го порядка, имеющих автономный первый интеграл.
2. Группы эквивалентности на подклассах уравнений 3-го порядка различной структуры, позволяющие распространить результаты п. 1 на неавтономные уравнения.
3. Теоремы о подклассах уравнений класса $y''' = F(y)$, имеющих линейный, квадратичный и кубичный по второй производной автономный первый интеграл.
4. Теоремы о подклассах уравнений класса $y''' = F(y, y')$, имеющих

линейный, квадратичный и кубичный по второй производной автономный первый интеграл.

5. Теоремы о подклассах уравнений класса $y''' = F(y, y'')$, имеющих линейный и квадратичный по второй производной автономный первый интеграл.

Методика исследований. При решении поставленных задач были использованы методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, классического группового анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также аппарат теории первого интеграла.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разделённых на 8 параграфов, заключения и списка литературы.

В первой главе приводятся основные положения классического симметрийного анализа. В первом параграфе излагаются необходимые определения и теоремы, составляющие основу группового анализа С. Ли, во втором – определение и свойства первого интеграла, подробно рассматривается два алгоритма его поиска – прямой и метод операторов Эйлера высших порядков, проводится их сравнение. Так как оба эти алгоритма дают сопоставимые результаты, но алгоритм Эйлера оказывается существенно более трудоёмким, в основной части работы используется прямой метод. Третий параграф посвящён нётеровым (вариационным) симметриям.

Вторая глава посвящена формулировке основной задачи работы, обоснованию выбранного метода исследования, поиску групп эквивалентности рассматриваемых подклассов уравнений 3-го порядка и описанию подклассов, не содержащих “предстаршую” производную y'', т. е. автономных уравнений вида

$$y''' = F(y, y'), \tag{0.0.6}$$

имеющих аналог вариационной симметрии. В первом параграфе находятся группы эквивалентности на подклассах $y''' = F(x, y)$, $y''' = F(x, y, y')$ и $y''' = F(x, y, y'')$. Во втором параграфе доказываются теоремы о существовании (или отсутствии) уравнений подкласса $y''' = F(y)$, имеющих автономный первый интеграл, линейный, квадратичный или кубичный относительно y''. В третьем параграфе рассматривается такая же задача для более общего подкласса (0.0.6).

В третье главе излагается исследование подклассов, содержащих "предстаршую" производную y''. В первом параграфе исследуются уравнения вида $y''' = F(y, y', y'')G(y'')$. Во втором параграфе рассматриваются уравнения, не содержащие первую производную, с линейной или квадратичной зависимостью от y''.

Научная новизна. Все результаты исследования являются новыми. Впервые найдены классы уравнений 3-го порядка заданной структуры, имеющие первый интеграл, удовлетворяющий априорным условиям, причём доказаны теоремы о единственности этих классов при этих условиях с точностью до найденных групп эквивалентности.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Разработанные подходы и полученные результаты могут использоваться для решения ряда задач математического моделирования, а найденные конкретные классы уравнений – в качестве модельных (эталонных) для ряда физических задач и тестирования систем аналитических вычислений на ЭВМ.

Регулярность и "прозрачность" разработанных алгоритмов позволяет использовать полученные результаты и в педагогической практике, при чтении курсов обыкновенных дифференциальных уравнений и математического моделирования, спецкурсов современного группового анализа.

Апробация работы. Результаты исследований прошли апробацию на научных конференциях “Герценовские чтения” РГПУ им. А. И. Герцена (LXIV–LXVI, 2011–2013 гг.) и на научных семинарах кафедры математического анализа математического факультета РГПУ им. А. И. Герцена.

Публикации. По материалам диссертации опубликованы работы [29 – 34], две из которых [29], [31] – в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [29], [30], [31] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Глава 1. Классические симметрийные теории

В этой главе будут изложены теоретические материалы, используемые в дальнейшем для получения новых результатов. Речь идёт о трёх теориях: группового анализа, первых интегралов и вариационных симметрий. Все они по разным аспектам посвящены фундаментальному свойству обыкновенных дифференциальных уравнений – симметрии.

1.1. Групповой анализ (теория Ли).

В истории математики основателем группового метода признан Эварист Галуа (1811 – 1832), который за свою короткую жизнь успел совершить переворот в математике. Как известно, на протяжении 3-х веков (с XVI по XIX век) математики сталкивались с вопросом о возможности выразить корни алгебраического уравнения 5-ой и высших степеней через свои коэффициенты с помощью алгебраических операций и радикала. Это удалось решить в общем виде норвежскому математику Н. Х. Абелю (1802 – 1829), который доказал, что общие уравнения 5-ой и высших степеней вообще не разрешимы в радикалах. Остался ещё один вопрос: если задано конкретное алгебраическое уравнение, то сможем ли мы получить информацию о его разрешимости в радикалах? Окончательный ответ на него дал французский математик Галуа. Он определил преобразования (автоморфизмы), сохраняющие все алгебраические операции на пространстве расширения поля рациональных чисел и всех корней алгебраического уравнения. Эти преобразования являются, по сути своей, перестановками на множестве корней. Совокупность всех этих преобразований для конкретного алгебраического уравнения образует группу, и на этой основе поставленная задача была решена. Установив преобразования, меняющие только порядок элементов и сохраняющие все объекты в целом, Галуа при этом уже использует геометрическую идею – симметрию. Тем самым были заложены основы одного из востребованных направлений современной алгебры – группового анализа.

Несмотря на ныне признанную всеми заслугу молодого французского математика, его работа сначала не получила широкого распространения среди математиков: она была настолько абстрактна, что намного превосходила знания того времени. Несколько позже Софус Ли, по инициативе своего немецкого друга – Феликса Клейна (1849 – 1925), вместе с ним приехали в Францию, чтобы познакомиться с трудами Парижского математического общества. Они оба работали под руководством выдающегося математика Мари Жордана (1838 – 1922). По-видимому, именно через своего учителя Софус Ли познакомился с идеей Галуа, и в итоге он построил аналог теории Галуа для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для достижения своей цели Софус Ли тоже определил преобразования, которые сохраняют множество решений, но при этом использовал достижения многих родственных направлений, таких как линейная алгебра, дифференциальная геометрия, и тем самым создал основу для открытия других направлений – не случайно, например, теория алгебр с коммутатором в качестве умножения получила впоследствии название теории алгебр Ли. Само его преобразование в определенной мере отличается от автоморфизма у Галуа. Как известно, алгебраическое уравнение n-го степени по основной теореме алгебры имеет ровно n корней, тогда как общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка представляет собой семейство кривых на плоскости, содержащее n свободных коэффициентов, т. е. оно носит непрерывный характер – это гладкое многообразие. На конечном множестве мы можем перемещать местами элементы, а на бесконечно-непрерывном – следует сделать иначе. Софус Ли определил преобразования, при которых решения некоторого уравнения переходят в другие (может быть, и те же) решения того же уравнения – критерием этого является инвариантность самого уравнения под действием этих преобразований, ограниченным на многообразии решений.

Важно подчеркнуть, что лиевские преобразования, кроме переменных, являющихся координатами на плоскости, зависят от свободного параметра a, относительно последнего они являются бесконечно-дифференциальными функциями. Благодаря именно этой зависимости реализуются элементы дифференциальной геометрии. Применив к семейству гладких кривых операцию дифференцирования ("оператор универсальной линеаризации"), мы переходим к касательному пространству, с которым уже намного удобнее работать – нелинейное определяющее уравнение линеаризуется, и мы находим искомые преобразования путём нахождения решения линейного дифференциального уравнения в частных производных (определяющее уравнение). Так как решения линейного уравнения в частных производных образует линейное векторное пространство, мы получаем в итоге **алгебру Ли инфинитезимальных операторов**. При этом всякий нетривиальный оператор из этой алгебры позволяет построить преобразование, с помощью которого мы можем понизить порядок допускающего этот оператор уравнения на единицу. При этом оказывается, что последовательное выполнение всех операций образует **регулярный алгоритм**, наглядно демонстрирующий эффективность теории, предложенной С. Ли.

Основные положения группового анализа изложены в соответствии с современными источниками [18], [19], [20], [24], [25], [26], [43].

Определение 1.1.1 Обратимые преобразования

$$\bar{x} = \varphi(x, y, a), \qquad \bar{y} = \psi(x, y, a), \tag{1.1.1}$$

где функции φ и ψ непрерывны по всем переменным и бесконечно-дифференцируемы по переменной a, причём при нулевом значении параметра a они превращаются в тождественные преобразования, т. е.

$$\varphi(x,y,a)\Big|_{a=0} = x, \qquad \psi(x,y,a)\Big|_{a=0} = y, \tag{1.1.2}$$

называются однопараметрическими точечными преобразованиями.

Легко убедиться, что множество таких преобразований с операцией суперпозиции образует группу (здесь выполнение групповой структуры требуется только в достаточно малой окрестности единичного элемента, соответствующего значению $a = 0$; топологическая структура приведена в книге П. Олвера [26]).

Определение 1.1.2 Группа, образуемая однопараметрическими точечными преобразованиями, называется точечной однопараметрической группой Ли преобразований плоскости (сокращённо – точечной группой Ли или просто группой Ли, если из контекста вытекает, что рассматриваются только точечные преобразования).

Разложив функции φ и ψ в ряд Тейлора по параметру a с учётом (1.1.2), получаем

$$\bar{x} \approx x + \xi(x,y)a, \qquad \bar{y} \approx y + \eta(x,y)a, \tag{1.1.3}$$

где

$$\xi = \frac{\partial\varphi}{\partial a}\Big|_{a=0}, \qquad \eta = \frac{\partial\psi}{\partial a}\Big|_{a=0}. \tag{1.1.4}$$

Замечание 1.1.1 Преобразованные точки $(\bar{x},\bar{y})$ при фиксировании точки (x,y) образуют на плоскости непрерывную кривую, к которой вектор (ξ,η) является касательным в точке (x,y) – орбиту этой точки. Более того, преобразования (1.1.1) однозначно восстанавливаются из уравнений Ли

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{da} &= \xi(\varphi,\psi), \\ \frac{d\psi}{da} &= \eta(\varphi,\psi), \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

с начальным условием (1.1.2).

Поэтому вектор (ξ, η) образует касательное векторное поле группы. Однако работая с точечными группами, мы в основном используем не его, а следующий объект

Определение 1.1.3 Оператор

$$X = \xi \partial_x + \eta \partial_y \tag{1.1.6}$$

называется инфинитезимальным оператором точечной группы.

Инфинитезимальный оператор ведёт себя как скаляр при произвольной замене переменных, что является существенным преимуществом перед вектором (ξ, η).

В групповом анализе также используется другой оператор, эквивалентный оператору (1.1.6)

Определение 1.1.4 Оператор

$$X = \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.1.7}$$

где $\hat{\eta} = \eta - y'\xi$, называется каноническим оператором, соответствующим точечному оператору (1.1.6).

Заметим, что канонический оператор не тождественен "геометрическому" (1.1.6) – эквивалентность понимается в том смысле, что если некоторое уравнение допускает оператор (1.1.6), то оно допускает и оператор (1.1.7), и наоборот.

В следующей теореме мы сформулируем **принцип подобия** всех однопараметрических точечных групп на плоскости, позволяющий переходить из одной системы координат в другую – соответственно из одной группы в другую.

Теорема 1.1.1 Все однопараметрические группы на плоскости подобны в том смысле, что всякая точечная однопараметрическая группа G преобразований (1.1.1) подходящей заменой переменных

$$t = t(x, y), \qquad u = u(x, y) \tag{1.1.8}$$

приводится к любой наперёд заданной точечной однопараметрической группе G'

$$X \longrightarrow X' = X(t)\frac{\partial}{\partial t} + X(u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.1.9}$$

Определение 1.1.5 Функция $F(x, y)$ называется инвариантом группы (1.1.1), если для каждой точки (x, y) функция F постоянна вдоль траектории, описываемой преобразованными точками $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y). \tag{1.1.10}$$

Теорема 1.1.2 Функция $F(x, y)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению в частных производных

$$XF = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0. \tag{1.1.11}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет тождеству (1.1.10). Тогда тождество (1.1.11) легко следует из разложения φ, ψ и самой функции F в ряд Тейлора

$$F(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a)) \sim F(x + a\xi(x, y), y + a\eta(x, y)) \sim$$
$$\sim F(x, y) + a\left[\xi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}\right]. \tag{1.1.12}$$

Обратно, пусть $F(x, y)$ – решение уравнения (1.1.11). Так как равенство (1.1.11) выполняется в любой точке (x, y), запишем его в точке $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$\xi(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} + \eta(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = 0.$$

Воспользовавшись уравнениями Ли (1.1.5) и этим равенством, получим

$$\frac{dF(\varphi, \psi)}{da} = \frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} . \frac{d\varphi(x, y, a)}{da} + \frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} . \frac{d\psi(x, y, a)}{da} =$$
$$= \xi(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} + \eta(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = 0.$$

Следовательно, $F(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a))$ как функция от a удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{dF}{da} = 0, \qquad F\Big|_{a=0} = F(x, y).$$

Доказательство завершено ■

Замечание 1.1.2 Заметим, что в процессе доказательства теоремы 1.1.2 мы использовали приближённую формулу разложения в ряд Тейлора, однако полученный результат является точным.

Замечание 1.1.3 Уравнение (1.1.11) является **линейным дифференциальным уравнением** в частных производных переменных 1-го порядка относительно F, что наглядно иллюстрирует одно из свойств оператора X – он линеаризует уравнение (1.1.10).

Приведенные выше понятия очевидным образом обобщаются на многомерный случай, когда рассматриваются группы преобразований не на плоскости, а в n-мерном пространстве точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, что позволяет этот аппарат применять и к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для этого мы просто считаем исходные переменные x, y и производные y', $y'', \dots, y^{(n)}$ независимыми друг от друга, кроме естественных дифференциальных связей.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.1.13}$$

Поскольку все производные являются функциями от координат плоскости, преобразование x, y по формуле (1.1.1) влечёт за собой и преобразование всех производных функции y, формулы для которых вычисляются следующим образом

$$\widetilde{y'} = \frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}, \quad \widetilde{y''} = \frac{D_x(\widetilde{y'})}{D_x(\varphi)}, \quad \dots \quad \widetilde{y^{(n)}} = \frac{D_x(\widetilde{y^{(n-1)}})}{D_x(\varphi)}. \tag{1.1.14}$$

Подставив в эти формулы разложение в ряд Тейлора функций ψ и φ, умножая числитель и знаменатель на $1 - D_x(\xi)a$ и, оставляя слагаемые, содержащие групповой параметр a в степени не выше первой, находим

$$\widetilde{y'} \approx y' + \zeta_1 a, \quad \widetilde{y''} \approx y'' + \zeta_2 a, \quad \dots \quad \widetilde{y^{(n)}} \approx y^{(n)} + \zeta_n a, \tag{1.1.15}$$

где

$$\zeta_1 = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - (y')^2\xi_y,$$

$$\zeta_2 = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - (y')^3\xi_{yy} +$$

$$+ (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)y'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\zeta_n = D_x\eta_{n-1} - y^{(n)}D_x\xi, \quad (1.1.16)$$

а D_x – оператор полной производной

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \ \ldots .$$

В соответствии с этими на пространствах расширения струй

$$(x, y, y'), (x, y, y', y''), \ \ldots\ , (x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

у нас есть продолженные группы

$$\underset{1}{G}, \underset{2}{G}, \ \ldots\ , \underset{n}{G}$$

исходной группы G. Их инфинитезимальные операторы, соответственно, будут

$$\underset{1}{X} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_y,$$

$$\underset{2}{X} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_{y'} + \zeta_2\partial_{y''},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\underset{n}{X} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_{y'} + \ldots + \zeta_n\partial_{y^{(n)}}.$$

Определение 1.1.6 Говорят, что функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ инвариантна относительно группы G преобразований (1.1.1) (или допускает группу G), если F инвариантна относительно её продолжения $\underset{n}{G}$

в смысле определения 1.1.5, т. е. тождество

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{y'}, \ldots, \widetilde{y^{(n)}}) = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \qquad (1.1.17)$$

выполнено для всех точек пространства $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

Теорема 1.1.3 Функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ допускает группу G преобразований (1.1.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему уравнению в частных производных

$$\underset{n}{X} F \equiv 0. \qquad (1.1.18)$$

Выпишем в качестве примера условие инвариантности для функции $P(x, y, y', y'')$:

$$\xi P_x + \eta P_y + \Big[-(y')^2\xi_y + (\eta_y - \xi_x)y' + \eta_x\Big]P_{y'} + \\ + \Big[(-3y'\xi_y + \eta_y - 2\xi_x)y'' - (y')^3\xi_{yy} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 + \\ + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + \eta_{xx}\Big]P_{y''} = 0. \qquad (1.1.19)$$

Определение 1.1.7 Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка (1.1.13) допускает группу G преобразований (1.1.1) (или инвариантна относительно G), если при действии преобразований соответствующей продолженной группы $\underset{n}{G}$ каждая точка поверхности M, задаваемой этим уравнением, перемещается вдоль этой же поверхности, т. е. из $(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \in M$ следует $(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{y'}, \ldots, \widetilde{y^{(n)}}) \in M : F(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{y'}, \ldots, \widetilde{y^{(n)}}) = 0$. Говоря другими словами, группа $\underset{n}{G}$ оставляет множество решений уравнения (1.1.13) инвариантом.

Теорема 1.1.4 Уравнение (1.1.13) допускает группу преобразований (1.1.1) с инфинитезимальным оператором (1.1.6) тогда и только тогда, когда

$$\underset{n}{X} F\Big|_{F=0} = 0. \qquad (1.1.20)$$

Это уравнение называется определяющим для уравнения (1.1.13).

В качестве примера рассмотрим уравнение 3-го порядка

$$y''' = F(x, y, y', y'').$$

Согласно теореме 1.1.3, его определяющее уравнение принимает вид

$$\begin{gathered}3\xi_y(y'')^2+\\
+\Big[6(y')^2\xi_{yy}+(9\xi_{xy}-3\eta_{yy}-3F_{y''}\xi_y)y'+F_{y''}\eta_y-3\eta_{xy}-2F_{y''}\xi_x+3\xi_{xx}\Big]y''+\\
+(y')^4\xi_{yyy}+(3\xi_{xyy}-\eta_{yyy}-\xi_{yy}F_{y''})(y')^3+\\
+(F_{y''}\eta_{yy}-2F_{y''}\xi_{xy}-3\eta_{xyy}-F_{y'}\xi_y+3\xi_{xxy})(y')^2+\\
+\Big(\xi_{xxx}+4F\xi_y+F_{y'}\eta_y-F_{y'}\xi_x-3\eta_{xxy}+2F_{y''}\eta_{xy}-F_{y''}\xi_{xx}\Big)y'+\\
+F_{y''}\eta_{xx}+F_{y'}\eta_x+3F\xi_x+\xi F_x-F\eta_y-\eta_{xxx}+\eta F_y=0. \quad (1.1.21)\end{gathered}$$

Замечание 1.1.4 Заметим, что понятие инвариантности уравнения относительно группы определено с меньшей степенью строгости по сравнению с понятием инвариантности функции относительно группы. Соответственно, решения уравнения (1.1.20), в отличие от решений уравнений (1.1.11, 1.1.18), находятся на множестве решений исследуемого уравнения, а не на всём пространстве $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Это приводит, вследствие этого, к возможному увеличению количества допускаемых дифференциальным уравнением групп.

Замечание 1.1.5 Уравнение (1.1.20) удаётся решать **методом расщепления**, который заключается в том, что если записать (1.1.20) в виде многочлена относительно старшей производной, например уравнение (1.1.21), то из тождественного равенства нулю этого многочлена следует тождественное равенство нулю всех его коэффициентов. Таким образом, мы получаем переопределённую систему дифференциальных уравнений в частных производных для искомых функций ξ и η.

Замечание 1.1.6 При поиске точечных преобразований искомые функции ξ и η зависят только от координат плоскости x и y. Необходимым условием для применения метода расщепления является наличие в определяющем уравнении производной хотя бы первого порядка, от которой координаты оператора ξ и η не зависят. Поэтому метод расщепления эффективен только с определяющими уравнениями для уравнений 2-го и высших порядков.

1.2. Первые интегралы.

Законы сохранения – фундаментальные законы природы, проявляющиеся в различных областях науки. Вместе с тем они имеют прямое отношение к математическому понятию теории дифференциальных уравнений – первому интегралу. В самом деле, физические процессы и явления часто моделируются дифференциальными уравнениями, в которых законы сохранения появляются в результате однократного интегрирования и являются первыми интегралами. Например, хорошо известно, что полная механическая энергия консервативной системы взаимодействующих частиц зависит от скоростей и взаимного расположения её частиц, т. е. она представляет собой математическое выражение, содержащее только координаты и производную первого порядка. Тогда как исходное дифференциальное уравнение (второй закон Ньютона) является уравнением 2-го порядка в силу вхождения в него ускорений (вторая производная координат). Благодаря этому в математике поиск первого интеграла (закона сохранения) служит одним из способов понижения порядка дифференциальных уравнений. Более того, говоря о законах сохранения для конкретной системы или явления, мы имеем в виду то обстоятельство, что первый интеграл представляет собой выражение, сохраняющееся на выбранной интегральной кривой, оно не меняется при движении вдоль этой кривой. Поэтому мы вправе считать первые интегралы одной из разновидностей **симметрии**.

Определение 1.2.1 Оператор

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \dots \tag{1.2.1}$$

называется оператором полной производной.

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} = F\big(x, y, y', \, \dots \, , y^{(n-1)}\big) = 0, \tag{1.2.2}$$

являющееся гладким многообразием на n раз продолженном пространстве $\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big)$.

Определение 1.2.2 Дифференциальное выражение

$$P = P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad \frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}} \not\equiv 0, \tag{1.2.3}$$

называется первым интегралом уравнения (1.2.2), если её полная производная удовлетворяет тождеству

$$D_x P = R_k\big(y^{(n)} - F\big). \tag{1.2.4}$$

Дифференциальное выражение $R_k = R_k\big(x, y, y', \dots, y^{(k)}\big)$ называется интегрирующим множителем уравнения (1.2.2), а натуральное число k – порядком R_k.

Теорема 1.2.1 Если интегрирующий множитель R_k нетривиален (не тождественно равен нулю), то уравнение (1.2.2) эквивалентно уравнению

$$P\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) = C, \tag{1.2.5}$$

где C – произвольная константа.

Доказательство. Теорема легко доказывается, исходя из определения 1.2.2: что полная производная от константы является нулю, и если R_k – нетривиальный, то из уравнения $FR_k = 0$ следует, что $F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0$, и обратно ■

Замечание 1.2.1 (Метод первых интегралов) Из теоремы 1.2.1 следует, что если найдено m, $(m \leqslant n)$, независимых первых интегралов $P_1, P_2, \dots, P_m$, то путём исключения $(m-1)$ старших производных $y^{(n-m+1)}, y^{(n-m+2)}, \dots, y^{(n-1)}$ из системы m уравнений

$$P_i = C_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.2.6}$$

где C_i – независимые друг от друга константы, получаем дифференциальное уравнение $(n-m)$-го порядка, эквивалентное исходному (1.2.2). т. е., его порядок понижается на $(n-m)$ единиц. В случае $m = n$, уравнение (1.2.2) полностью интегрируется, приводя к (неявному) общему интегралу $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n)$. Этот метод поиска решения называется **методом первых интегралов**.

Замечание 1.2.2 При подстановке любого частного решения $y = f(x)$ уравнения (1.2.2) в его первый интеграл P, мы получаем соответствующую ему константу. Поэтому говорят, что первый интеграл является инвариантом вдоль траектории решения (1.2.2). Отсюда и следует, что первый интеграл тоже обладает свойством симметрии.

На определении 1.2.2 основан один из методов поиска первых интегралов – **прямой алгоритм** (название алгоритма объясняется тем, что он следует прямо из определения; техника применения алгоритма излагается согласно монографии [14]). Действительно, если выписать уравнение (1.2.4) в развернутом виде, то получаем

$$P_x + y'P_y + y''P_{y'} + \ldots + y^{(n)}P_{y^{(n-1)}} = -FR_k + y^{(n)}R_k. \tag{1.2.7}$$

Далее методом расщепления по старшей производной мы получаем систему

$$\begin{cases} P_{y^{(n-1)}} = R_k, \\ \\ P_x + y'P_y + \ldots + y^{(n-1)}P_{y^{(n-2)}} = -R_kF. \end{cases}$$

И, наконец, более компактное уравнение можно получить, заменив во втором уравнении интегрирующий множитель R_k из первого уравнения:

$$P_x + y'P_y + \ldots + y^{(n-1)}P_{y^{n-2}} + FP_{y^{(n-1)}} = 0. \tag{1.2.8}$$

Общее решение этого однородного линейного уравнения в частных производных относительно $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ получить, как правило, не удаётся (это уравнение эквивалентно исходному), однако есть большая вероятность методом расщепления найти его частные решения, накладывая некоторые условия на вид искомого первого интеграла, например, предположив, что $P(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ линеен относительно старшей производной

$$P = R\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}\big)y^{(n-1)} + Q\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}\big), \qquad (1.2.9)$$

или квадратичен относительно неё

$$P = R\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}\big)\big(y^{(n-1)}\big)^2 + Q\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}\big)y^{(n-1)} + \\ + S\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}\big). \quad (1.2.10)$$

К нахождению первого интеграла можно приступить принципиально иным образом, начиная с поиска интегрирующего множителя. Действительно, если найден $R = R\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$, то, следуя соотношению (1.2.4), можно выделить все частные производные 1-го порядка функции $P\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$; затем восстановить сам первый интеграл по форме

$$P = \int\limits_C \big(P_x\, dx + P_y\, dy + P_{y'}\, dy' + \ldots + P_{y^{(n-1)}}\, dy^{(n-1)}\big), \qquad (1.2.11)$$

где C – произвольная кривая на плоскости (x, y).

Покажем сначала эту идею на случай уравнения 1-го порядка

$$y' = f(x, y). \qquad (1.2.12)$$

Теорема 1.2.2 Интегрирующий множитель уравнения (1.2.12) является решением уравнения

$$R_x + (fR)_y = 0. \qquad (1.2.13)$$

При этом соответствующий первый интеграл находится с помощью криволинейного интеграла по следующей форме

$$P = \int\limits_C (-Rf\, dx + R\, dy), \qquad (1.2.14)$$

где C – произвольная кривая из какой-либо точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в точку (x, y) на плоскости (x, y). Замена точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$ приводится к добавлению к (1.2.14) константы. Если $f(x, y)$ и $R(x, y)$ невырождены, то криволинейный интеграл (1.2.14) не зависит от кривой C.

Доказательство. Пусть $R(x, y)$ – интегрирующий множитель уравнения (1.2.12). Согласно уравнению (1.2.4) имеем

$$P_x + y' P_y = R y' - R f. \tag{1.2.15}$$

Отсюда методом расщепления находим

$$P_x = -Rf, \qquad P_y = R. \tag{1.2.16}$$

Вместе с тем, из условия равенства смешаных вторых частных производных для функции $P(x, y)$:

$$P_{xy} - P_{yx} = 0,$$

следует, что $R(x, y)$ является решением уравнения (1.2.13).

Обратное утверждение тоже верно. Пусть $R(x, y)$ – решение уравнения (1.2.13). Тогда выполнимость соотношения (1.2.13) влечёт за собой достаточное условие, при которым существует функция $P(x, y)$ такая, что его частные производные 1-го порядка удовлетворяют уравнениям из (1.2.16). Наконец, функцию $P(x, y)$ можно восстановить с помощью формулы (1.2.14) ■

Существует альтернативная формулировка доказанной теоремы, которая окажется более удобной при обобщении её на случай уравнения n-го порядка, опираясь на оператор Эйлера.

Перепишем уравнение (1.2.13) в развернутом виде

$$0 = R_x + f R_y + f_y R; \tag{1.2.17}$$

затем его преобразуем таким образом

$$0 = D_x R + (f - y') R_y + f_y R. \tag{1.2.18}$$

Введём в рассмотрение дифференциальный оператор

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial y} - D\frac{\partial}{\partial y'}. \tag{1.2.19}$$

Теперь заметим, что новый оператор позволяет записать последнее уравнение в новом виде

$$0 = -E_1(\theta), \tag{1.2.20}$$

где $\theta(x, y, y') = \Big[y' - f(x, y)\Big]R(x, y)$.

Оператор E_1 является "укороченным" видом оператора Эйлера, который будет подробно изложен в следующем параграфе. А теперь покажем замечательное свойство его – "уничтожать" полную производную, т. е. если действовать им на функцию, равную полной производной другой функции, то в результате получим нуль.

Пусть $\theta = D_x\psi(x, y)$ и обозначим

$$\Psi_1 = \theta_{y'}, \tag{1.2.21}$$

$$\Psi_0 = \theta_y - D\Psi_1. \tag{1.2.22}$$

Отметьте, что $\Psi_0 = E_1(\theta)$. Имеют тогда место следующие тождества

$$(\Psi_1)_{y'} = 0, \tag{1.2.23}$$

$$\Psi_0 = 0. \tag{1.2.24}$$

Это действительно так: по определению $\Psi_1 = \psi_y$ не зависит от производной y', а второе тождество непосредственно вытекает из его выражения $\Psi_0 = (D\psi)_y - D\psi_y = 0$.

Обратно, предположим, что оба тождества (1.2.21) и (1.2.22) выполнены при какой-либо функции $\theta(x, y, y')$, где

$$\Psi_1 = \theta_{y'}, \qquad \Psi_0 = \theta_y - D_x\Psi_1,$$

тогда из первого из них следует $\theta_{y'y'} = 0$, т. е. она линейна относительно y'

$$\theta = A(x, y)y' + B(x, y). \tag{1.2.25}$$

Затем второе тождество (1.2.22) даёт

$$A_x - B_y = 0. \tag{1.2.26}$$

Последнее уравнение является достаточным условием, чтобы существовала функция $\psi(x, y)$ такая, что $A = \psi_y, B = \psi_x$. Соответственно из (1.2.25) получаем $\theta = \psi_x + y'\psi_y$, т. е. $\theta = D_x\psi$.

Заметим, что из функции θ можно выразить частные производные функции ψ следующим образом

$$\psi_y = \theta_{y'}, \qquad \psi_x = \theta - y'\theta_y,$$

или

$$\psi_y = \theta_{y'}(x, y, 0), \qquad \psi_x = \theta(x, y, 0).$$

Поэтому

$$\psi(x, y) = \int\limits_C \Big[\theta(x, y, 0)dx + \theta_{y'}(x, y, 0)dy\Big], \tag{1.2.27}$$

где C – произвольная кривая из точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в точку (x, y) в двумерной плоскости (x, y) ■

Итак, совершенно очевидно, новый алгоритм может быть изложен с помощью укороченного оператора Эйлера. В силу этого будем называть его **алгоритмом Эйлера**. При распространении на уравнение n-го порядка нарастают технические сложности, возникающие при наложении достаточного условия существования полной производной для функции многих переменных $\theta(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Требуется ввести более длинную цепочку связанных между собой рекуррентной формой функций. В избежание абстрактности первоначально будем излагать алгоритм Эйлера для уравнения 2-го порядка, затем для обобщённого случая – уравнения n-го порядка, следуя материалу монографии [37].

Рассмотрим уравнения 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1.2.28}$$

Укороченный оператор Эйлера 2-го порядка определяется следующей формой

$$E_2 = \frac{\partial}{\partial y} - D\frac{\partial}{\partial y'} + D^2\frac{\partial}{\partial y''}. \qquad (1.2.29)$$

Пусть

$$\theta(x, y, y', y'') = D\psi(x, y, y'), \qquad (1.2.30)$$

и введём следующие функции

$$\Psi_2 = \theta_{y''}, \quad \Psi_1 = \theta_{y'} - D\Psi_2, \quad \Psi_0 = \theta_y - D\Psi_1. \qquad (1.2.31)$$

Заметим, что последняя функция является, в точности, результатом действия E_2 на функцию θ, т. е. $\Psi_0 = E_2(\theta)$.

Теорема 1.2.3 Функция $\theta(x, y, y', y'')$ является полной производной (1.2.30) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям

$$(\Psi_2)_{y''} = (\Psi_1)_{y''} = 0, \qquad (1.2.32)$$

$$\Psi_0 = 0 \qquad (1.2.33)$$

на всём пространстве $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. В случае, когда $\theta(x, y, y', y'')$ удовлетворяет всем уравнениям (1.2.32, 1.2.33), функция $\psi(x, y, y')$ из (1.2.30) находится по следующей формуле

$$\psi = \int\limits_C \Big[(\theta(x, y, y', 0) - y'\Psi_1(x, y, y'))dx + \Psi_1(x, y, y')dy + \Psi_2(x, y, y')dy'\Big], \qquad (1.2.34)$$

где C – произвольная кривая из точки $\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{y'}\right)$ в точку (x, y, y').

Доказательство. Предположим, что функция $\theta(x, y, y', y'')$ удовлетворяет уравнению (1.2.30). Тогда используя тождества

$$(D\psi)_y = D\psi_y, \quad (D\psi)_{y'} = D\psi_{y'} + \psi_y, \quad (D\psi)_{y''} = \psi_{y'}, \qquad (1.2.35)$$

без труда можем проверить, что E_2 уничтожает $D\psi$, т. е. $\Psi_0 = E_2(\theta) = = 0$. Независимость от второй производной y'' двух функций Ψ_2 и Ψ_1 непосредственно вытекает из их выражений:

$$\Psi_2 = \psi_{y'}, \qquad \Psi_1 = \psi_y. \qquad (1.2.36)$$

Переходим к доказательству обратного утверждения. Пусть функция $\theta(x, y, y', y'')$ удовлетворяет уравнениям (1.2.32, 1.2.33), нужно показать, что существует другая функция $\psi(x, y, y')$, связанная с ней по формуле (1.2.30).

Положим

$$\Phi = \theta - y'\Psi_1 - y''\Psi_2. \tag{1.2.37}$$

Заметим, что если бы $\theta(x, y, y', y'')$ имела вид полной производной, как в формуле (1.2.30), то нововведённая функция Φ вместе с Ψ_1 и Ψ_2 составили бы все частные производные от ψ:

$$\Phi = \psi_x, \quad \Psi_1 = \psi_y, \quad \Psi_2 = \psi_{y'}. \tag{1.2.38}$$

Напомним, что установленное из теории неявных функций условие существования полной производной вытекает именно из свойств частных производных от ψ таких, как независимость их от второй производной y'' и соотношения совместности

$$\psi_{xy} = \psi_{yx}, \quad \psi_{yy'} = \psi_{y'y}, \quad \psi_{y'x} = \psi_{xy'}.$$

Перед тем, как доказывать условие интегрируемости, чтобы существовала функция $\psi(x, y, y')$, удовлетворяющая уравнению (1.2.30), будем выписывать его соответствующие уравнения:

$$(\Psi_2)_{y''} = (\Psi_1)_{y''} = \Phi_{y''} = 0, \tag{1.2.39}$$

$$(\Psi_2)_y = (\Psi_1)_{y'}, \tag{1.2.40}$$

$$(\Psi_2)_x = \Phi_{y'}, \quad (\Psi_1)_x = \Phi_y. \tag{1.2.41}$$

Предположим, что функция $\theta(x, y, y', y'')$ удовлетворяет уравнениям (1.2.32, 1.2.33).

Из выражения Ψ_0 из (1.2.31) находим

$$\theta_y = \Psi_0 + D\Psi_1, \tag{1.2.42}$$

затем путём дифференцирования обеих частей по y'' –

$$\theta_{yy''} = (\Psi_1)_{y'} + (\Psi_0)_{y''} + D\Big[(\Psi_1)_{y''}\Big], \tag{1.2.43}$$

поскольку $(D\Psi_1)_{y''} = D\Big[(\Psi_1)_{y''}\Big] + (\Psi_1)_{y'}$. Далее, согласно уравнениям (1.2.32, 1.2.33) имеем

$$\theta_{yy''} = (\Psi_1)_{y'}. \tag{1.2.44}$$

С другой стороны, если учитывать условие совместности для функции $\theta(x, y, y', y'') : \theta_{yy''} = \theta_{y''y}$, то из выражения для Ψ_2 из (1.2.31) получим тождество (1.2.40).

Из уравнения (1.2.37), вычислив частные производные от $\Phi(x, y, y', y'')$, затем преобразовав их с помощью форм из (1.2.31), получим

$$\begin{cases} \Phi_{y''} & = \theta_{y''} - \Psi_2 - y'(\Psi_1)_{y''} - y''(\Psi_2)_{y''} = \\ & = -y'(\Psi_1)_{y''} - y''(\Psi_2)_{y''}, \\ \Phi_{y'} & = \theta_{y'} - \Psi_1 - y'(\Psi_1)_{y'} - y''(\Psi_2)_{y'} = \\ & = (\Psi_2)_x + y'\Big[(\Psi_2)_y - (\Psi_1)_{y'}\Big], \\ \Phi_y & = \theta_y - y'(\Psi_1)_y - y''(\Psi_2)_y = \\ & = (\Psi_1)_x + \Psi_0 + y''\Big[(\Psi_1)_{y'} - (\Psi_2)_y\Big]. \end{cases}$$

Воспользовавшись исходными условиями – уравнениями из (1.2.32) и (1.2.33), а также доказанным уравнением (1.2.40), с необходимостью получим условия совместности для Φ – уравнения из (1.2.39) и (1.2.40).

Наконец, следуя фундаментальной теореме о вычислении градиентов

$$\psi = \int\limits_C \Big[\psi_x\, dx + \psi_y\, dy + \psi_{y'}\, dy'\Big], \tag{1.2.45}$$

с учётом (1.2.38) получим

$$\psi = \int\limits_C \Big[\Phi\, dx + \Psi_1\, dy + \Psi_2\, dy'\Big], \tag{1.2.46}$$

где C – произвольная кривая от точки $\big(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'}\big)$ в точку (x, y, y').

Замена Φ из (1.2.37), учитывая (1.2.39), даёт криволинейный интеграл (1.2.34). Доказательство завершено ■

Перейдём теперь к применению доказанной теоремы для нахождения интегрирующих множителей уравнения 2-го порядка.

Исходя из определения интегрирующего множителя R из уравнения (1.2.4), положим

$$\theta(x, y, y', y'') = R(x, y, y')\Big[y'' - f(x, y, y')\Big]. \tag{1.2.47}$$

Легко заметить, что θ линейна относительно второй производной y'', поэтому она автоматически выполняет два уравнения из (1.2.32). Затем результат действия оператора E_2 на θ, согласно уравнению (1.2.33), даёт

$$\begin{gathered}\Big[2R_y + R_{xy'} + y'R_{yy'} + (fR)_{y'y'}\Big]y'' - \\ - (fR)_y + (fR)_{xy'} + y'(fR)_{yy'} + R_{xx} + (y')^2 R_{yy} + 2y'R_{xy} = 0. \end{gathered} \tag{1.2.48}$$

Далее, методом расщепления получим систему 2-х уравнений для поиска интегрирующих множителей $R(x, y, y')$

$$2R_y + R_{xy'} + y'R_{yy'} + (fR)_{y'y'} = 0, \tag{1.2.49}$$

$$-(fR)_y + (fR)_{xy'} + y'(fR)_{yy'} + R_{xx} + (y')^2 R_{yy} + 2y'R_{xy} = 0. \tag{1.2.50}$$

Все частные производные от первого интеграла $P(x, y, y')$ можно выразить, построив следующие вспомогательные функции:

$$\begin{cases} \Psi_2 = P_{y'} = R, \\ \Psi_1 = P_y = -R_x - y'R_y - (fR)_{y'}, \\ \Phi = P_x = y'R_x + (y')^2 R_y + y'(fR)_{y'} - fR. \end{cases}$$

Наконец, подставив Ψ_2, Ψ_1, Φ в криволинейный интеграл (1.2.46), получим формулу вычисления первого интеграла

$$P(x,y,y') = \int\limits_C \Big[(y'R_x + (y')^2 R_y + y'(fR)_{y'} - fR)dx - \\ - (R_x + (fR)_{y'} + y'R_y)dy + R\,dy'\Big], \quad (1.2.51)$$

где C – произвольная кривая от точки $(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{y'})$ в точку (x, y, y').

Замечание 1.2.3 В процессе обоснования алгоритма Эйлера, а также при применении теоремы 1.2.3 к нахождению интегрирующих множителей $R(x, y, y')$ уравнения 2-го порядка укороченный оператор Эйлера E_2 занимает центральное место. Следует особенно подчеркнуть, что система двух уравнений (1.2.49) и (1.2.50) непосредственно получена с помощью оператора E_2. Поэтому, вполне уместно говорить о корректности названия исследуемого алгоритма.

На основе двух приведённых примеров для уравнений 1-го и 2-го порядков будем излагать алгоритм Эйлера для обобщённого случая – уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \quad (1.2.52)$$

Укороченный оператор Эйлера n-го порядка определяется следующим образом

$$E_n = \sum_{i=0}^{n} (-D)^i \frac{\partial}{\partial y^{(i)}}, \quad (1.2.53)$$

где $y^{(0)} = y$.

Пусть

$$\theta(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = D\psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \quad (1.2.54)$$

Введём цепочку рекуррентных функций

$$\Psi_n = \theta_{y^{(n)}}, \quad (1.2.55)$$

$$\Psi_{n-k} = \theta_{y^{(n-k)}} - D\Psi_{n-k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (1.2.56)$$

где
$$\Psi_0 = E_n(\theta). \tag{1.2.57}$$

Теорема 1.2.4 Функция $\theta(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ является полной производной (1.2.54) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет всем уравнениям
$$\frac{\partial \Psi_{n-k}}{\partial y^{(n)}} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.2.58}$$
$$\Psi_0 = 0 \tag{1.2.59}$$
на всём пространстве $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. В случае, когда $\theta\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big)$ удовлетворяет всем уравнениям (1.2.58, 1.2.59), функция $\psi\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$ из (1.2.54) находится по следующей формуле
$$\psi\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) = \int\limits_C \Big[\theta(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \Psi_i\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)\big(dy_{i-1} - y^{(i)}\, dx\big)\Big]\Bigg|_{y^{(n)}=0}, \tag{1.2.60}$$
где C – произвольная кривая из точки $\big(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{y'}, \ldots, \widetilde{y^{(n)}}\big)$ в точку $\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big)$.

Доказательство. Предположим, что функция $\theta\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big)$ удовлетворяет уравнению (1.2.54). Докажем, что тогда θ удовлетворяет сначала уравнению (1.2.59), затем – и всем остальным уравнениям из (1.2.58).

С помощью таких тождеств
$$(D\psi)_y = D\psi_y, \tag{1.2.61}$$
$$(D\psi)_{y^{(i)}} = D\psi_{y^{(i)}} + \psi_{y^{(i-1)}}, \tag{1.2.62}$$
где $y^{(0)} = y$, можно преобразовать результат действия оператором E_n на θ
$$E_n(D\psi) = \sum_{i=0}^{n} (-D)^i (D\psi)_{y^{(i)}}$$

следующим образом

$$E_n(D\psi) = -\sum_{i=0}^{n}(-D)^{i+1}\psi_{y^{(i)}} + \sum_{i=1}^{n}(-D^i)\psi_{y^{(i-1)}}.$$

После сокращения всех одинаковых слагаемых остаётся лишь одно:

$$E_n(D\psi) = (-1)^n D^n \psi_{y^{(n)}}.$$

Наконец, поскольку $\psi_{y^{(n)}} = 0$, получаем $\Psi_0 = E_n(D\psi) = 0$.

Что касается остальных уравнений из (1.2.58), то подставив (1.2.54) в (1.2.55) и (1.2.56), получим

$$\Psi_i = \psi_{y^{(i-1)}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2.63}$$

Так как функция $\psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ не зависит от производной n-го порядка, все частные производные от ψ от неё зависеть не должны. Поэтому все уравнения из (1.2.58) автоматически удовлетворились.

Наряду с функциями Ψ_i из (1.2.63) положим

$$\Phi = \theta - \sum_{i=1}^{n} y^{(i)}\psi_i \tag{1.2.64}$$

с целью выделить частную производную от ψ по x:

$$\Phi = \psi_x. \tag{1.2.65}$$

Приступим к доказательству обратного утверждения. Выпишем сначала условие интегрируемости, чтобы существовала функция $\psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющая уравнению (1.2.54):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y^{(n)}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2.66}$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial y^{(j)}} = \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial y^{(i-1)}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2.67}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(j)}} = \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial x}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.2.68}$$

Предположим, что функция $\theta\bigl(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\bigr)$ удовлетворяет уравнениям (1.2.58), (1.2.59). Докажем, что тогда она удовлетворяет всем условиям интегрируемости (1.2.66)–(1.2.68).

Введём новые вспомогательные функции

$$\Psi_{i,j} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_{j-1}} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = i, \ldots, n, \tag{1.2.69}$$

$$\Psi_{i,n+1} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.2.70}$$

и вслед за этим будем доказывать верность следующих рекуррентных тождеств

$$\Psi_{j,n+1} = -\Psi_{j+1,n} - D\Psi_{j+1,n+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.2.71}$$

$$\Psi_{j,m} = -\Psi_{j+1,m-1} - D\Psi_{j+1,m}, \quad j = 1, \ldots, m-1, \quad m = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2.72}$$

$$\Psi_{mm} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2.73}$$

независимо от уравнений (1.2.58), (1.2.59).

Продифференцировав уравнение (1.2.56) сначала по $y^{(m)}$ с заменой $n - k = j$, получим

$$\Psi_{jy^{(m)}} = \theta_{y^{(j)}y^{(m)}} - \Psi_{j+1,y^{(m-1)}} - D\Psi_{j+1,y^{(m)}}. \tag{1.2.74}$$

Затем повторяя дифференцирование (1.2.56) по $y^{(j)}$, но с другой заменой $n - k = m$, получим

$$\Psi_{m,y^{(j)}} = \theta_{y^{(m)}y^{(j)}} - \Psi_{m+1,y^{(j-1)}} - D\Psi_{m+1,y^{(j)}}. \tag{1.2.75}$$

Теперь, вычитая из уравнения (1.2.74) уравнение (1.2.75), находим

$$\Psi_{jy^{(m)}} - \Psi_{m,y^{(j)}} = \Psi_{m+1,y^{(j-1)}} - \Psi_{j+1,y^{(m-1)}} + D\Psi_{m+1,y^{(j)}} - D\Psi_{j+1,y^{(m)}}. \tag{1.2.76}$$

Перепишем (1.2.76) в другой форме

$$\Psi_{jy^{(m)}} - \Psi_{m+1,y^{(j-1)}} = \Psi_{m,y^{(j)}} - \Psi_{j+1,y^{(m-1)}} + D\left[\Psi_{m+1,y^{(j)}} - \Psi_{j+1,y^{(m)}}\right]. \tag{1.2.77}$$

Отсюда с обращением к (1.2.69) следуют тождества (1.2.72). Проводя аналогичную процедуру, получаем тождества из (1.2.71).

Рассмотрим функцию $\Psi_{m,k}$, где $k > m \geqslant 1$. Рассмотрим два случая; первый из них – разность $k-m$ представляет собой нечётное число, например $k - m = 3$. Тогда из (1.2.72) следует

$$\Psi_{m,m+3} = -\Psi_{m+1,m+2} - D\Psi_{m+1,m+3}. \tag{1.2.78}$$

Продолжем схему разложения для функции $\Psi_{m+1,m+3}$:

$$\Psi_{m+1,m+3} = -\Psi_{m+2,m+2} - D\Psi_{m+2,m+3}. \tag{1.2.79}$$

Подставив (1.2.79) в (1.2.78) с учётом $\Psi_{m+2,m+2} = 0$, получим

$$\Psi_{m,m+3} = -\Psi_{m+1,m+2} + D^2\Psi_{m+2,m+3}. \tag{1.2.80}$$

Значит, через 2 шага разложения в выражении для $\Psi_{m,m+3}$ остаются только функции такого вида $\Psi_{j,j+1}$, а оператор полной производной берётся в чётной степени: D^2.

В обобщённом случае, когда $k - m = 2l + 1$, повторяя приведённый путь разложения $2l$ раз, в результате получаем выражение для $\Psi_{m,m+2l+1}$ в виде линейной комбинации от $D^{2i}\Psi_{j,j+1}$, где $j = m+l+i$, $i = 0, 1, \ldots, l$.

Для второго случая, когда $k - m = 2l$, проводя совершенно аналогичный процесс, через $2l - 1$ шагов получим, что $\Psi_{m,m+2l}$ представляет собой линейную комбинацию от $D^{2i+1}\Psi_{j,j+1}$, где $j = m + l + i$, $i = 0, 1, \ldots, l - 1$.

В общей сложности любая функция $\Psi_{m,k}$ может быть явно выражена через такие функции $\Psi_{j,j+1}$, где $m < j < k$.

Далее, заменив $j = n - 2$ в форме (1.2.71), получим

$$\Psi_{n-2,n+1} = -\Psi_{n-1,n} - D\Psi_{n-1,n+1} \tag{1.2.81}$$

или

$$-\Psi_{n-1,n} = \Psi_{n-2,n+1} + D\Psi_{n-1,n+1}. \tag{1.2.82}$$

Разложение (1.2.82) по (1.2.70) даёт

$$\Psi_{n-1,n} = \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y^{(n)}} + D\frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y^{(n)}}. \tag{1.2.83}$$

Отсюда учитывая (1.2.58), с необходимостью следует $\Psi_{n-1,n} = 0$.

Аналогично для значений $j = n-4, n-6, \ldots, 1\,\text{или}\,0$ (в соответствии с значением n – чётным или нечётным) получаем

$$\Psi_{n-3,n} = \Psi_{n-5,n} = \ldots = \Psi_{1,n}(\Psi_{0,n}) = 0. \tag{1.2.84}$$

Теперь в качестве примера вычисляем значение функции $\Psi_{n-3,n}$. По формуле (1.2.71) выражаем её

$$\Psi_{n-3,n} = -\Psi_{n-2,n-1} - D\Psi_{n-2,n}. \tag{1.2.85}$$

Аналогично

$$\Psi_{n-2,n} = -\Psi_{n-1,n-1} - D\Psi_{n-1,n}. \tag{1.2.86}$$

Значит,

$$\Psi_{n-3,n} = -\Psi_{n-2,n-1} + D\Psi_{n-1,n-1} + D^2\Psi_{n-1,n}. \tag{1.2.87}$$

или

$$D\Psi_{n-1,n-1} + D^2\Psi_{n-1,n} - \Psi_{n-3,n} = \Psi_{n-2,n-1}. \tag{1.2.88}$$

Из (1.2.73, 1.2.83, 1.2.84) известно, что все слагаемые в левой части (1.2.88) равны 0. Поэтому

$$\Psi_{n-2,n-1} = 0. \tag{1.2.89}$$

Аналогично, каждая функция $\Psi_{n-l,n}$ из (1.2.84) позволяет вычислять значение одной "серединной" функции $\Psi_{n-\left[\frac{l}{2}\right]-1,n-\left[\frac{l}{2}\right]}$. Отчего можно сделать следующий вывод:

$$\Psi_{m,m+1} = 0, \qquad m = n-l, \ldots, n-1, \tag{1.2.90}$$

где $l = \dfrac{n}{2}$, если n – чётное, а $l = \dfrac{n-1}{2}$, если n – нечётное.

Собирая все полученные выше результаты, можно утверждать, что

$$\Psi_{m,k} = 0, \quad n \geqslant k > m \geqslant 1. \tag{1.2.91}$$

Отсюда следует тождества (1.2.67).

Из (1.2.64) следует

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(k)}} = \theta_{y^{(k)}} - \Psi_k - \sum_{i=1}^{n} y^{(i)} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y^{(k)}} \tag{1.2.92}$$

Учитывая (1.2.56), имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(k)}} = D\Psi_{k+1} - \sum_{i=1}^{n} y^{(i)} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y^{(k)}}. \tag{1.2.93}$$

Перепишем в развернутый вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(k)}} = \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} y^{(i)} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial y^{(i-1)}} - \sum_{i=1}^{n} y^{(i)} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y^{(k)}}. \tag{1.2.94}$$

Далее, согласно (1.2.69), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(k)}} = \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} y^{(i)} \Psi_{k+1,i}. \tag{1.2.95}$$

Подставив (1.2.91) в (1.2.95), получаем тождества (1.2.68). Из (1.2.55) и (1.2.92) непосредственно вытекает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n)}} = 0. \tag{1.2.96}$$

И вместе с (1.2.58) следует тождества (1.2.66).

Количество требующих решение уравнений в теореме 1.2.4 можно сократить вдвое, применив следующую лемму

Лемма 1.2.5 Уравнения (1.2.58), соответствующие значениям $k = 2m,\ m = 0, 1, \ldots, [n/2]$, вместе с уравнением (1.2.59) эквивалентны системе $2 + [n/2]$ следующих независимых уравнений

$$\theta_{y^{(n)} y^{(n)}} = 0, \tag{1.2.97}$$

$$\theta_{y^{(k)}y^{(k)}}\Big|_{y^{(n)}=0} = -\sum_{i=1}^{n-k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^i(i+j)\frac{(i-1)!}{(i-j)!j!}(D^{i-j}\theta_{y^{(k+i)}y^{(k-j)}})\Big|_{y^{(n)}=0},$$
$$\text{где } k = \left[\frac{n+1}{2}\right], \dots, n-1, \quad (1.2.98)$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(D^i\theta_{y^{(i)}})\Big|_{y^{(n)}=0} = 0. \qquad (1.2.99)$$

Остальные уравнения (1.2.58), соответствующие значениям $k = 2m+$ $+1$, $m = 0, 1, \dots, [(n-1)/2]$, являются линейными комбинациями перечисленных уравнений (1.2.97, 1.2.98).

Доказательство. Заменив $j = n-1$ в формуле (1.2.71), получим

$$\Psi_{n-1,n+1} = -\Psi_{n,n} - D\Psi_{n,n+1}. \qquad (1.2.100)$$

Учитывая уравнения (1.2.70, 1.2.73), имеем

$$\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial y^{(n)}} = -D\frac{\partial\Psi_n}{\partial y^{(n)}}. \qquad (1.2.101)$$

Далее, в качестве примеров перечислим ещё 4 случая $j = n-2, n-3, n-$ $-4, n-5$:

$$\frac{\partial\Psi_{n-2}}{\partial y^{(n)}} = D^2\frac{\partial\Psi_n}{\partial y^{(n)}} - \Psi_{n-1,n}, \qquad (1.2.102)$$

$$\frac{\partial\Psi_{n-3}}{\partial y^{(n)}} = -D^3\frac{\partial\Psi_n}{\partial y^{(n)}} + 2D\Psi_{n-1,n}, \qquad (1.2.103)$$

$$\frac{\partial\Psi_{n-4}}{\partial y^{(n)}} = D^4\frac{\partial\Psi_n}{\partial y^{(n)}} - 3D^2\Psi_{n-1,n} + \Psi_{n-2,n-1}, \qquad (1.2.104)$$

$$\frac{\partial\Psi_{n-5}}{\partial y^{(n)}} = -D^5\frac{\partial\Psi_n}{\partial y^{(n)}} + 4D^3\Psi_{n-1,n} - 3D\Psi_{n-2,n-1}. \qquad (1.2.105)$$

Заметим, что для всех случаев, когда $j = n-2l, l = 1, \dots [n/2]$, легко можно выделить слагаемые вида $\Psi_{j,j+1}$. Например, из (1.2.102) находим

$$\Psi_{n-1,n} = D^2\frac{\partial\Psi_n}{\partial y^{(n)}} - \frac{\partial\Psi_{n-2}}{\partial y^{(n)}}; \qquad (1.2.106)$$

а из (1.2.104) –

$$\Psi_{n-2,n-1} = -D^4\frac{\partial \Psi_n}{\partial y^{(n)}} + 3D^2\Psi_{n-1,n} + \frac{\partial \Psi_{n-4}}{\partial y^{(n)}}, \tag{1.2.107}$$

или

$$\Psi_{n-2,n-1} = 2D^4\frac{\partial \Psi_n}{\partial y^{(n)}} - 3D^2\frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y^{(n)}} + \frac{\partial \Psi_{n-4}}{\partial y^{(n)}}. \tag{1.2.108}$$

Откуда, если подставить (1.2.106, 1.2.108) в (1.2.103, 1.2.105), то получим новые выражения $\partial\Psi_{n-3}/\partial y^{(n)}$ и $\partial\Psi_{n-5}/\partial y^{(n)}$ через $\Psi_n, \Psi_{n-2}, \Psi_{n-4}$:

$$\frac{\partial \Psi_{n-3}}{\partial y^{(n)}} = D^3\frac{\partial \Psi_n}{\partial y^{(n)}} - 2D\frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y^{(n)}}, \tag{1.2.109}$$

$$\frac{\partial \Psi_{n-5}}{\partial y^{(n)}} = -3D^5\frac{\partial \Psi_n}{\partial y^{(n)}} + 5D^3\frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y^{(n)}} - 3D\frac{\partial \Psi_{n-4}}{\partial y^{(n)}}. \tag{1.2.110}$$

Продолжив этот процесс до конца, можно заключить, что любая $\partial\psi_{n-2l-1}/\partial y^{(n)}$ может быть выражена через дифференциально-линейную комбинацию от $\partial\Psi_{n-2i}/\partial y^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, l$ – это то, что требовалось для доказательства второй части леммы.

Далее, из разложения по формуле (1.2.71) – в качестве примеров берём уравнения (1.2.102) и (1.2.104), следует, что все уравнения

$$\frac{\partial \Psi_{n-2l}}{\partial y^{(n)}} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots \left[\frac{n}{2}\right], \tag{1.2.111}$$

эквивалентны системе следующих уравнений

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial y^{(n)}} = 0, \tag{1.2.112}$$

$$\Psi_{j,j+1} = 0, \quad j = \left[\frac{n+1}{2}\right], \ldots, n-1. \tag{1.2.113}$$

Более того, из (1.2.112) следует независимость Ψ_n от $y^{(n)}$. Значит, $\theta(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ линейна относительно $y^{(n)}$. Вместе с тем уравнение (1.2.56) позволяет сделать вывод, что любая функция Ψ_{n-k} равна сумме $\Psi_{n-k}|_{y^{(n)}=0}$ и одного полинома (здесь нами внесена поправка в доказательство, приведённое в книге [24]) $(k-1)$-ой степени от $y^{(n)}$, коэффициенты которого являются дифференциально-линейными комбинациями от Ψ_{n-i}, $i=0,1,\ldots,k-1$, $k=1,2,\ldots,n$. Поэтому уравнения (1.2.111) можно сильно упростить, рассмотрев только такую систему уравнений

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial y^{(n)}}=0, \qquad \Psi_0\Big|_{y^{(n)}=0}=0, \qquad \Psi_{j,j+1}\Big|_{y^{(n)}=0}=0,$$
$$j=\left[\frac{n+1}{2}\right], \ldots, n-1, \quad (1.2.114)$$

которые, следуя уравнениям (1.2.69), (1.2.70) и (1.2.55), (1.2.56), дают уравнения (1.2.97) – (1.2.99). В заключение, легко заметить, что линейная независимость всех функций $\theta_{y^{(k)}y^{(k)}}, k=[(n+1)/2],\ldots,n$ приводится к линейной независимости уравнений (1.2.97) – (1.2.99). Доказательство завершено ■

Перейдём к применению доказанной леммы в целях вывода уравнения алгоритма Эйлера.

Из уравнения (1.2.4) положим

$$\theta(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=R(x,y,y',\ldots,y^{(l)})\Big[y^{(n)}-f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})\Big], \quad (1.2.115)$$

где $0\leqslant l\leqslant n-1$.

Дифференцируя θ по $y^{(n-k)}, k=0,1,\ldots,n$, находим

$$\theta_{y^{(n)}}=R, \quad (1.2.116)$$

$$\theta_{y^{(n-k)}}\Big|_{y^{(n)}=0}=-(fR)_{y^{(n-k)}}, \quad k=1,2,\ldots,n. \quad (1.2.117)$$

Следуя (1.2.55, 1.2.56), имеем

$$\Psi_n=R, \quad (1.2.118)$$

$$\Psi_{n-k}\Big|_{y^{(n)}=0}=\sum_{j=0}^{k-1}-(-D_{n-1})^j(fR)_{y^{(n-k+j)}}+(-D_{n-1})^kR,$$
$$k=1,2,\ldots,n, \quad (1.2.119)$$

где D_{n-1} – укороченный оператор полной производной D из (1.2.1):

$$D_k=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{i=1}^{k}y^{(i)}\frac{\partial}{\partial y^{(i-1)}}, k\geqslant 1. \quad (1.2.120)$$

Наконец, из (1.2.64) и (1.2.120) следует

$$\Phi\Big|_{y^{(n)}=0} = -fR + \sum_{i=1}^{n-i} y^{(i)} \left(\sum_{j=0}^{n-i-1} (-D_{n-1})^j (fR)_{y^{(i+j)}} - (-D_{n-1})^{n-i} R \right). \tag{1.2.121}$$

Теперь можно применить теорему 1.2.4 и лемму 1.2.5, чтобы получить систему $1+[n/2]$ уравнений для определения интегрирующих множителей. Из уравнений (1.2.116), (1.2.117) и (1.2.118), (1.2.119) следует систему уравнений для алгоритма Эйлера

$$\begin{gathered}(fR)_{y^{(n-m)}y^{(n-m)}}+\\ +\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(i+j)(i-1)!}{(i-j)!j!}(-1)^i(D_{n-1})^{i-j}(fR)_{y^{(n-m+i)}y^{(n-m-j)}}+\\ +(-1)^{m+1}\sum_{i=0}^{m}\frac{(i+m)(m-1)!}{(m-i)!i!}(D_{n-1})^{m-i}R_{y^{(n-m-i)}}=0,\\ m=1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right],\end{gathered} \tag{1.2.122}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(D_{n-1})^i(fR)_{y^{(i)}}+(-1)^{n-1}(D_{n-1})^nR=0. \tag{1.2.123}$$

Формула для соответствующего первого интеграла, следуя (1.2.118), (1.2.119), (1.2.121) и (1.2.60), имеет вид

$$\begin{gathered}P=\int\limits_C\Bigg[R(dy^{(n-1)}-fdx)+\\ +\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-i-1}-(-D_{n-1})^j(fR)_{y^{(i+j)}}+(-D_{n-1})^{n-i}R\right)(dy^{(i-1)}-y^{(i)}\,dx)\Bigg],\end{gathered} \tag{1.2.124}$$

где C – произвольная кривая из точки $\left(\tilde{x},\tilde{y},\widetilde{y'},\ldots,\widetilde{y^{(n)}}\right)$ в точку $\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)$.

1.3. Вариационная (нётерова) симметрия.

Известно из курса вариационного исчисления, что поиск экстремалей вариационной задачи сводится к решению уравнения Эйлера–Ланrранжа, которое определяется с помощью соответствующего лангранжиана. Здесь интерес представляет случай, когда среди всех групп симметрий, допускаемых уравнением Эйлера–Лагранжа, имеются те, которые также допускает сам лагранжиан. Впервые появившись в опубликованной немецком математиком Эмми Нётер в 1918 году работе, такие группы симметрий принято называются **вариационными** или **нётеровами**, они играют большую роль в физике и математике, поскольку они тесно связаны с законами сохранения, и на их основе можно создать алгоритмический метод интегрирования дифференциальных уравнений. О разновидностях вариационных симметрий см. монографию [43].

Определение 1.3.1 Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial_{y^{(n)}}} \not\equiv 0, \tag{1.3.1}$$

имеет вариационную формулировку (этот не слишком удачный термин вводится и используется в работе [37]), если его решения $y = \Theta(x)$ на области $x \in [a, b]$ совпадают с экстремалями действия функционала

$$S[y(x)] = \int\limits_a^b L(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx. \tag{1.3.2}$$

Определение 1.3.2 Оператор

$$E_n = \sum_{i=0}^{n} (-D)^i \partial_{y^{(i)}} = \partial_y - D\partial_{y'} + D^2\partial_{y''} - \ldots + (-D)^n \partial_{y^{(n)}}, \tag{1.3.3}$$

где

$$D = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \ldots + y^{(n)}\partial_{y^{(n-1)}} + \ldots$$

называется оператором Эйлера n-го порядка.

Теорема 1.3.1 Дифференциальное уравнение $2n$-го порядка имеет вариационную формулировку тогда и только тогда, когда оно совпадает с уравнением Эйлера–Лагранжа какого-либо лагранжиана $L(x, y, y', \ldots, y^{(m)})$, т. е.

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = E_m[L(x, y, y', \ldots, y^{(m)})]. \tag{1.3.4}$$

Замечание 1.3.1 Уравнение Эйлера-Лагранжа для лагранжиана n-го порядка $L(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, удовлетворяющего условию невырожденности $\dfrac{\partial^2 L}{\partial (y^{(n)})^2} \neq 0$, имеет порядок $2n$. Поэтому вариационной формулировкой обладает только уравнение чётного порядка.

Следует отметить, что решение вариационной задачи обладает структурой многообразия (является семейством кривых на плоскости) – ведь её экстремали являются решением соответствующего уравнения Эйлера-Лагранжа. На этой основе мы имеем возможность применять к ней теорию группового анализа.

Определение 1.3.4 Функционал $S[y(x)]$ допускает однопараметрическую группу (1.1.1), если его лагранжиан инвариантен относительно преобразований (1.1.1), т. е.

$$L\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right) \frac{d\bar{x}}{dx} = L(x, y, y'). \tag{1.3.5}$$

При этом допускаемая группа называется вариационной.

Теорема 1.3.2 Если G – группа вариационных симметрий функционала (1.3.2), то она также является группой симметрий уравнения Эйлера–Лагранжа $E_n(L) = 0$. В данном случае будем говорить, что уравнение допускает вариационную (нётеровую) симметрию.

Теорема 1.3.3 Каждая допускаемая нётерова группа позволяет понизить порядок уравнения Эйлера–Лагранжа на две единицы.

Доказательство. Рассмотрим уравнение Эйлера–Лагранжа $2n$-го порядка

$$E_n L(x, y, y' \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.3.6}$$

Пусть функционал (1.3.2) допускает группу

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y. \tag{1.3.7}$$

Согласно принципу подобия (теореме 1.1.1), мы можем подобрать замену

$$t = t(x, y), \qquad u = (x, y) \tag{1.3.8}$$

так, чтобы в новой системе координат (t, u) оператор (1.3.7) имел следующий вид

$$\hat{X} = \partial_u. \tag{1.3.9}$$

Соответствующий лагранжиан в новых координат (t, u) должен допускать оператор (1.3.9), т. е.

$$\underset{n}{\hat{X}}\,\hat{L} = \partial_u \hat{L} \equiv 0. \tag{1.3.10}$$

Отчего следует независимость от u лагранжиана:

$$\hat{L} = (t, u', \ldots, u^{(n)}). \tag{1.3.11}$$

Выпишем теперь уравнение Эйлера–Лагранжа для (1.3.11)

$$E_n(\hat{L}) = -D_x \frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} + D_x^2 \frac{\partial \hat{L}}{\partial u''} + \ldots + (-D_x)^n \frac{\partial \hat{L}}{\partial u^{(n)}} = 0. \tag{1.3.12}$$

Преобразовав уравнение (1.3.12) следующим образом

$$-D_x \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} - D_x \frac{\partial \hat{L}}{\partial u''} + \ldots + (-D_x)^{(n-1)} \frac{\partial \hat{L}}{\partial u^{(n)}} \right] = 0, \tag{1.3.13}$$

сразу можем выделить один его первый интеграл

$$P = \frac{\partial \hat{L}}{\partial u'} - D_x \frac{\partial \hat{L}}{\partial u''} + \ldots + (-D_x)^{(n-1)} \frac{\partial \hat{L}}{\partial u^{(n)}}. \tag{1.3.14}$$

Получилось эквивалентное исходному (1.3.6) уравнение

$$P = C, \tag{1.3.15}$$

где C – произвольная константа.

Заметим далее, что если положить $v = u'$, то можно записать уравнение (1.3.15) в виде уравнения Эйлера–Лагранжа для $\hat{L}(t, v, v', \ldots, v^{(n-1)})$ таким образом

$$E_{n-1} \hat{L} = C. \tag{1.3.16}$$

Полученное уравнение (1.3.16) эквивалентно исходному, но с порядком уже меньше на 2 единицы, что и требовалось доказать ■

Алгоритм понижения порядка уравнения Эйлера–Лагранжа с помощью нётерова оператора, изложенный выше в доказательстве, совсем очевиден. Однако его применение к дифференциальным уравнениям вызывает определённые сложности: сначала необходимо найти соответствующий лагранжиан $L\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big)$, но алгоритма нахождения его не существует. Поэтому приступим к изложению центральной в данном параграфе теоремы, на основе которой можем построить принципиально иной алгоритм, позволяющий понизить порядок уравнения на 2 единицы, не затрагивая лагранжиан.

Теорема Э. Нётер (Emmy Nöther). Симметрия уравнения чётного порядка является нётеровой, если координата её инфинитезимального оператора (в каноническом виде) с точностью до постоянного множителя совпадает с интегрирующим множителем какого-либо первого интеграла рассматриваемого уравнения. Более того, данный оператор переводит этот первый интеграл в тождественный нуль.

Теорема не только позволяет найти вариационную симметрию, но и указывает нам, как понизить порядок уравнения на 2 единицы.

Пусть уравнение

$$y^{2n} = F\big(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}\big) \tag{1.3.17}$$

допускает оператор

$$X = \eta(x, y, y')\partial_y$$

и имеет первый интеграл

$$P = P(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}).$$

Предположим, что

$$\eta(x, y, y') = \frac{\partial P}{\partial y^{(2n-1)}},$$

т. е. симметрия является нётеровой. Тогда уравнение $(2n-1)$-го порядка

$$P = C, \tag{1.3.18}$$

где C – произвольная константа, также допускает данный оператор. Отсюда следует, что порядок уравнения (1.3.18) может быть понижен на 1 единицу согласно основным положениям теории группового анализа, изложенной в параграфе 1. 1. В итоге получилось уравнение, эквивалентное исходному и имеющее порядок на 2 единицы меньше.

Глава 2. Аналог нётеровой симметрии класса уравнений 3-го порядка, не содержащих “предстаршей” производной y''

Как указано в предыдущей главе, вариационной симметрией обладают только обыкновенные дифференциальные уравнения чётных порядков. Благодаря этому свойству для таких уравнений существенно упрощается процедура их интегрирования. Пока не существует подобной теории для уравнений нечётных порядков, однако интерес к таким объектам вполне естественен. В любом случае первый вопрос, который возникает – как найти уравнения нечётных порядков, обладающие подобной конструкцией. Итак, под **аналогом вариационной (нётеровой) симметрии** понимается свойство первых интегралов ОДУ нечётных порядков допускать (“наследовать”) те же симметрии, что и исходное уравнение. Оставляя пока возможные физические аспекты этого свойства, отметим очевидное преимущество в процедуре интегрирования – оно позволяет понизить порядок исходного уравнения сразу на две единицы.

Основная идея нашей работы заключается в том, что стартуя с заранее заданного оператора, мы найдём класс уравнений 3-го порядка, допускающих аналог вариационной симметрии для этого оператора.

Непосредственное применение прямого метода наталкивается на существенные технические трудности: требуется, выписывая условия совместности, совместно решать три системы уравнений: условия инвариантности исходного уравнения относительно произвольной симметрии (1.1.21), существования у него первого интеграла (1.2.4) (при $n = 3$) и условия инвариантности этого первого интеграла относительно той же симметрии (1.1.19). Из-за сложности эта техника заранее обречена на неудачу.

Можно уменьшить число требующих решение уравнений сразу на два, если мы изначально предположим, что исходный оператор является параллельным переносом по независимой переменной x: $X = \partial_x$, а искомое уравнение и его первый интеграл – автономными. Таким образом нам теперь остаётся решать только одно уравнение – условие существования у уравнения первого интеграла, поскольку автономность искомого уравнения и его первого интеграла уже гарантирует, что оба они допускают оператор $X = \partial_x$.

Приведённый выше метод не ограничивается исследованием только "наследования" параллельного переноса по x. Хорошо известно, что в теории группового анализа для точечных симметрий справедлив принцип подобия. Воспользовавшись им, мы легко перейдём к любой другой группе точечных симметрий – и, очевидно, тогда мы находим аналог нётеровой симметрии для другой группы симметрий. Следует сделать одно замечание, что так как нашей целью является не поиск примеров, а определение широкого класса уравнений, обладающих подобным свойством, при переходе к другой группе симметрий необходимо выполнить условие инвариантности подкласса исследуемых уравнений для того, чтобы обеспечить замкнутость полученных результатов.

Итак, рассмотрим класс автономных уравнений 3-го порядка

$$y''' = F(y, y', y''), \tag{2.0.1}$$

имеющих автономные первые интегралы

$$P = P(y, y', y''). \tag{2.0.2}$$

Очевидно, что уравнение (2.0.1) и первый интеграл (2.0.2) допускают оператор $X = \partial_x$. А точечное обратимое преобразование эквивалентности, переводящее с одной группы к другой, принимает вид

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u), \quad f_u g_t - f_t g_u \neq 0. \tag{2.0.3}$$

Выпишем теперь условие, при выполнении которого уравнение (2.0.1) будет иметь первый интеграл (2.0.2). По определению первого интеграла

$$D_x(P) = R(y, y', y'')\Big[y''' - F(y, y', y'')\Big], \tag{2.0.4}$$

где $R(y, y', y'')$ – интегрирующий множитель. Из определения следует, что $R = P_{y''}$, и для поиска класса функций F остаётся одно уравнение

$$y'\frac{\partial P}{\partial y} + y''\frac{\partial P}{\partial y'} + F\frac{\partial P}{\partial y''} = 0. \tag{2.0.5}$$

Отсюда получаем

$$F = -\frac{y'P_x + y''P_{y'}}{P_{y''}}. \tag{2.0.6}$$

Этот результат оказывается слишком общим – по любой функции $P(y, y', y'')$ можно построить уравнение (2.0.1). К тому же он следует прямо из определения (2.0.4), тем самым являясь тривиальным. С целью получения более практического результата будем теперь и в дальнейшем исследовать более узкие классы уравнений с заранее заданным конкретным видом их первых интегралов.

2.1. Группа преобразований эквивалентности

Определение 2.1.1 Пусть дан класс обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.1.1}$$

Преобразованием эквивалентности называется преобразование, сохраняющее инвариантность класса (2.1.1).

В рамках данной работы в основном будем иметь дело лишь с точечными преобразованиями эквивалентности, т. е. преобразованиями вида

$$x = f(t, u), \qquad y = g(t, u), \tag{2.1.2}$$

с невырожденным якобианом:

$$D = \begin{vmatrix} f_t & g_t \\ f_u & g_u \end{vmatrix} = f_t g_u - f_u g_t \not\equiv 0. \tag{2.1.3}$$

Считая t в (2.1.2) независимой переменной, выпишем формулы преобразования производных:

$$y' = \frac{g_t + g_u u'}{f_t + f_u u'}. \tag{2.1.4}$$

$$\begin{aligned} y'' = \Big[&(f_t g_u - f_u g_t)u'' + (f_u g_{uu} - f_{uu} g_u)(u')^3 + \\ &+ (2f_u g_{tu} - 2f_{tu} g_u + f_t g_{uu} - f_{uu} g_t)(u')^2 + \\ &+ (f_u g_{tt} + 2f_t g_{tu} - 2f_{tu} g_t - f_{tt} g_u)u' + f_t g_{tt} - f_{tt} g_t\Big](f_t + f_u u')^{-3}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{aligned} y''' = -\Bigg\{&\Big[(f_u^2 g_t - f_t f_u g_u)u' - f_t^2 g_u + f_t f_u g_t\Big]u''' + 3f_u(f_t g_u - f_u g_t)(u'')^2 + \\ &+ 3\Big[(-f_u f_{uu} g_t - f_u f_{tu} g_u + 2f_t f_{uu} g_u + f_u^2 g_{tu} - f_t f_u g_{uu})(u')^2 + \\ &+ (-f_{tt} f_u g_u + 3f_t f_{tu} g_u + f_u^2 g_{tt} - 3f_u f_{tu} g_t - f_t^2 g_{uu} + f_t f_{uu} g_t)u' + \\ &+ f_t f_{tt} g_u + f_t f_{tu} g_t - f_t^2 g_{tu} - 2f_u f_{tt} g_t + f_t f_u g_{tt}\Big]u'' + \\ &(-3f_{uu}^2 g_u + 3f_u f_{uu} g_{uu} + f_u f_{uuu} g_u - f_u^2 g_{uuu})(u')^5 + \\ &(-3f_{uu}^2 g_t + 3f_t f_{uu} g_{uu} + 6f_u f_{uu} g_{tu} + 3f_u f_{tuu} g_u - 12f_{tu} f_{uu} g_u + \\ &+ f_u f_{uuu} g_t + f_t f_{uuu} g_u - 3f_u^2 g_{tuu} - 2f_t f_u g_{uuu} + 6f_u f_{tu} g_{uu})(u')^4 + \\ &+ (3f_u f_{ttu} g_u + 12f_u f_{tu} g_{tu} - 12f_{tu}^2 g_u + 3f_u f_{tuu} g_t - 3f_u^2 g_{ttu} + 3f_u f_{uu} g_{tt} - \\ &- f_t^2 g_{uuu} - 6f_t f_u g_{tuu} + 6f_t f_{tu} g_{uu} + 3f_t f_{tuu} g_u + 3f_u f_{tt} g_{uu} - 6f_{tt} f_{uu} g_u - \\ &- 12f_{tu} f_{uu} g_t + f_t f_{uuu} g_t + 6f_t f_{uu} g_{tu})(u')^3 + \end{aligned}$$

$$+(-12f_{tu}^2g_t-3f_t^2g_{tuu}-f_u^2g_{ttt}+12f_tf_{tu}g_{tu}+3f_tf_{tt}g_{uu}+3f_tf_{ttu}g_u-$$
$$-12f_{tt}f_{tu}g_u+6f_uf_{tt}g_{tu}-6f_tf_ug_{ttu}+f_uf_{ttt}g_u-6f_{tt}f_{uu}g_t+6f_uf_{tu}g_{tt}+$$
$$+3f_tf_{uu}g_{tt}+3f_uf_{ttu}g_t+3f_tf_{tuu}g_t)(u')^2+(6f_tf_{tt}g_{tu}+6f_tf_{tu}g_{tt}-12f_{tt}f_{tu}g_t-$$
$$-3f_t^2g_{ttu}-2f_tf_ug_{ttt}+3f_uf_{tt}g_{tt}+f_uf_{ttt}g_t+3f_tf_{ttu}g_t+f_tf_{ttt}g_u-3f_{tt}^2g_u)u'+$$
$$\left.+3f_tf_{tt}g_{tt}-3f_{tt}^2g_t-f_t^2g_{ttt}+f_tf_{ttt}g_t\right\}(f_t+f_uu')^{-5}. \quad (2.1.6)$$

Во общем случае, производная n-го порядка вычисляется по форме

$$y^{(n)}=\frac{D_ty^{(n-1)}}{D_tx}, \quad (2.1.7)$$

где D_t – полная производная по t:

$$D_t=\partial_t+u'\partial_u+u''\partial_{u'}+\ldots+u^{(n)}\partial_{u^{(n-1)}}. \quad (2.1.8)$$

Теорема 2.1.1 Множество преобразований эквивалентности (2.1.2) с операцией композиции образует группу.

Доказательство. Докажем, что множество преобразований (2.1.2) удовлетворяет определению группы.

1. Замкнутость относительно операции композиции: пусть исходные переменные преобразованы по форме (2.1.2). Если переменные t, u, в свою очередь, преобразуются

$$t=\varphi(\bar{t},\bar{u}), \qquad u=\omega(\bar{t},\bar{u}), \quad (2.1.9)$$

то в результате исходные переменные x, y преобразуются по соответствующему правилу композиции

$$x=f(\varphi(\bar{t},\bar{u}),\omega(\bar{t},\bar{u})), \qquad y=g(\varphi(\bar{t},\bar{u}),\omega(\bar{t},\bar{u})). \quad (2.1.10)$$

Поскольку оба преобразования (2.1.2) и (2.1.9) являются преобразованиями эквивалентности, их композиция (2.1.10) остаётся таким же видом.

2. Существует единичный элемент – тождественное преобразование

$$x = f(t, u) = t, \qquad y = g(t, u) = u.$$

3. Существует обратный элемент: во всяких невырожденных точках (с ненулевым якобианом), согласно теореме об обратной функции многих переменных, существует обратная функция, т. е. такое преобразование

$$t = \varphi(x, y), \qquad u = \omega(x, y),$$

при котором

$$t = \varphi[f(t, u), g(t, u)], \qquad u = \omega[f(t, u), g(t, u)].$$

Определение 2.1.1 Группой эквивалентности на классе обыкновенных дифференциальных уравнений называется множество преобразований эквивалентности (2.1.1) с операцией композиции, замкнутых на этом классе.

Приступим к нахождению преобразований эквивалентностей 3 классов уравнений:

1. Класс не содержит промежуточных производных

$$y''' = f(x, y). \tag{2.1.11}$$

2. Класс, содержащий первую производную, но не содержащий вторую

$$y''' = f(x, y, y'). \tag{2.1.12}$$

3. Класс, содержащий вторую производную, но не содержащий первую

$$y''' = f(x, y, y''). \tag{2.1.13}$$

Для класса (2.1.12) отсутствие второй производной u'' в выражении для y''' является необходимым и достаточным условием, чтобы (2.1.2) явилось преобразованием эквивалентности. Из (2.1.6) следует система двух уравнений

$$f_u(f_t g_u - f_u g_t) = 0 \tag{2.1.14}$$

и

$$(-f_u f_{uu} g_t - f_u f_{tu} g_u + 2 f_t f_{uu} g_u + f_u^2 g_{tu} - f_t f_u g_{uu})(u')^2 +$$
$$+ (-f_{tt} f_u g_u + 3 f_t f_{tu} g_u + f_u^2 g_{tt} - 3 f_u f_{tu} g_t - f_t^2 g_{uu} + f_t f_{uu} g_t) u' +$$
$$+ f_t f_{tt} g_u + f_t f_{tu} g_t - f_t^2 g_{tu} - 2 f_u f_{tt} g_t + f_t f_u g_{tt} = 0. \quad (2.1.15)$$

Поскольку f и g удовлетворяют условию невырожденности якобиана (2.1.3), из (2.1.14) следует

$$f_u = 0. \quad (2.1.16)$$

Подставив (2.1.16) в (2.1.15), получим

$$f_t g_{uu} u' + f_t g_{tu} - f_{tt} g_u = 0. \quad (2.1.17)$$

Расщепляя это выражение по u', приходим к уравнениям

$$\begin{cases} f_t g_{uu} = 0, \\ f_t g_{tu} - f_{tt} g_u = 0. \end{cases} \quad (2.1.18)$$

В силу нетривиальности функции f следует зависимость её от t, т. е. $f_t \not\equiv 0$. Поэтому, из первого уравнения находим $g_{uu} = 0$. Отсюда следует

$$g = \alpha(t) u + h(t). \quad (2.1.19)$$

Подстановка (2.1.19) в второе уравнение (2.1.18) приводит к уравнению

$$f' \alpha' - f'' \alpha = 0. \quad (2.1.20)$$

Оно легко приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{f''}{f'} = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad (2.1.21)$$

его решение

$$\alpha(t) = C f', \quad (2.1.22)$$

где C – произвольная константа.

Таким образом, необходимое и достаточное условие для преобразования эквивалентности для класса (2.1.12) определяется следующей системой 3-х уравнений

$$\begin{cases} f_u = 0, \\ g_{uu} = 0, \\ f_t g_{tu} - f_{tt} g_u = 0, \end{cases} \tag{2.1.23}$$

откуда следует

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = Cf'(t)u + h(t), \end{cases} \tag{2.1.24}$$

где $f(t)$ и $h(t)$ – произвольные функции t, C – произвольная константа ($C \neq 0$). Преобразование (2.1.24) задаёт максимальную точечную группу эквивалентности, сохраняющую вид уравнения (7) – без "предстаршей" производной – и (в силу принципа подобия) точечные симметрии этого класса. Если известен подкласс автономных уравнений (2.1.12), имеющих автономный же первый интеграл, то преобразование (2.1.24) даёт нам весь подкласс неавтономных уравнений вида (2.1.12), обладающих свойством "наследования симметрии" первым интегралом.

Для класса (2.1.11) условие для преобразования эквивалентности более жёсткое. Необходимо, чтобы выражение для y''' не содержало все промежуточные производные u' и u''. Система (2.1.18) приводит к отсутствию u'' в y''', а после подстановки её в (2.1.6) остаётся лишь одно слагаемое, содержащее u'. Приравняв его к нулю, получим

$$3f_t^2 g_{ttu} - f_t f_{ttt} g_u - 6 f_t f_{tt} g_{tu} + 3 f_{tt}^2 g_u = 0. \tag{2.1.25}$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием для преобразования эквивалентности класса (2.1.11) является следующая система

4-х уравнений

$$\begin{cases} f_u = 0, \\ g_{uu} = 0, \\ f_t g_{tu} - f_{tt} g_u = 0, \\ 3f_t^2 g_{ttu} - f_t f_{ttt} g_u - 6 f_t f_{tt} g_{tu} + 3 f_{tt}^2 g_u = 0. \end{cases} \tag{2.1.26}$$

С учётом (2.1.24), последнее уравнение имеет вид

$$2f'''(f')^2 - 3f'(f'')^2 = 0. \tag{2.1.27}$$

Учитывая очевидный факт $f' \neq 0$, получим

$$2f'''f' = 3(f'')^2, \tag{2.1.28}$$

что позволяет записать это уравнение в виде равенства полных производных

$$2\frac{f'''}{f''} = 3\frac{f''}{f'}, \tag{2.1.29}$$

позволяет найти

$$f'' = C(f')^{3/2}.$$

Дальнейшие вычисления приводят к результату

$$f = \frac{C_1}{t + C_2} + C_3. \tag{2.1.30}$$

Таким образом, группа эквивалентности класса (2.1.11) состоит из преобразований вида

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{t + C_2} + C_3, \\ y = \dfrac{C_4 u}{(t + C_2)^2} + h(t), \end{cases} \tag{2.1.31}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные константы.

Наконец, для преобразования эквивалентности, соответствующего классу (2.1.13), требуется отсутствие первой производной u' в обоих выражениях для y'' и y'''. Заметим, что полная производная от x должна не содержать u', т. е. функция f не зависит от u – пусть $x = \gamma(t)$. Отсюда получаем выражение для второй производной

$$y'' = \Big[g_u\gamma' u'' + g_{uu}\gamma'(u')^2 + (2\gamma' g_{tu} - \gamma'' g_u)u' + \gamma' g_{tt} - \gamma'' g_t\Big](\gamma')^{-3}. \quad (2.1.32)$$

Приравнивая коэффициенты при u' к 0, приходим к системе

$$\begin{cases} g_{uu} = 0, \\ \\ 2\gamma' g_{tu} - \gamma'' g_u = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим линейный вид функции $g(t,u)$

$$g(t,u) = \alpha(t)u + \beta(t). \quad (2.1.33)$$

Подстановкой (2.1.33) в второе уравнение системы получаем

$$2\gamma'\alpha' - \gamma''\alpha = 0. \quad (2.1.34)$$

Это уравнение можно представить в виде равенства полных производных:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\gamma''}{\gamma'} \quad (2.1.35)$$

и найти α

$$\alpha(t) = C_1\sqrt{\gamma'}, \quad (2.1.36)$$

где C_1 – произвольная константа.

Подставив (2.1.33) и (2.1.36) в (2.1.6), затем приравняв коэффициент при u' к 0, получаем

$$\frac{1}{4}C_1\sqrt{\gamma'}\Big[2\gamma'\gamma''' - 3(\gamma'')^2\Big] = 0. \quad (2.1.37)$$

Поскольку $\alpha(t) \not\equiv 0$, имеем

$$2\gamma'\gamma''' - 3(\gamma'')^2 = 0. \quad (2.1.38)$$

Это уравнение можно представить в виде равенства полных производных:

$$2\frac{\gamma'''}{\gamma''} = 3\frac{\gamma''}{\gamma'} \tag{2.1.39}$$

и понизить его порядок

$$(\gamma'')^2 = C_2(\gamma')^3, \tag{2.1.40}$$

где C_2 – произвольная константа.

Получилось преобразование эквивалентностей для класса (2.1.13)

$$\gamma(t) = \frac{C_1}{t + C_2} + C_3. \tag{2.1.41}$$

Функция $\beta(t)$ в преобразовании (2.1.33) остаётся произвольной. Таким образом, группа эквивалентности для класса (2.1.13) состоит из преобразований вида

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{t + C_2} + C_3, \\ y = \dfrac{C_4 u}{t + C_2} + \beta(t). \end{cases} \tag{2.1.42}$$

Замечание 2.1.1 Группа эквивалентности класса ОДУ в определении 2.1.1 является непрерывной группой.

Замечание 2.1.2 К группе эквивалентности, в узком смысле, относится и группа однопараметрических точечных преобразований, изложенная в первом параграфе 1.1. Здесь особенность состоит в том, что она оставляет инвариантом не целый класс уравнений, а конкретное уравнение.

Замечание 2.1.3 Группа эквивалентности широко применяется для поиска подходящей замены переменных с целью преобразования данного класса к каноническому виду. Существует алгоритм её поиска, основанный на инфинитезимальном операторе эквивалентности.

Хороший пример приведен в работе [15], где подробно указанно, как с помощью дифференциального оператора

$$X_{eq} = \underset{1}{X} + \varphi_2\partial_{f_2} + \varphi_1\partial_{f_1} + \varphi_0\partial_{f_0}, \tag{2.1.43}$$

где $X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – функции от x, найти непрерывную группу, позволяющую привести уравнение Риккати

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \tag{2.1.44}$$

где f_1, f_2, f_3 – произвольные функции от x, к канонической форме

$$\dot{u} = u^2 + F(t). \tag{2.1.45}$$

Замечание 2.1.4 Замена системы координат в соответствии с принципом подобия даёт возможность распространить понятие аналога вариационной симметрии для уравнения нечётного порядка на другую точечную группу симметрий, исходя из группы параллельных переносов. Однако следует обратить внимание на то, что преобразование, полученное при переходе от одного оператора к другому, не является преобразованием эквивалентности. Поэтому требуется наложение дополнительного условия сохранения подклассов для обеспечения замкнутости полученных результатов.

Преобразование, переводящее группу параллельных переносов

$$X = \partial_x$$

в произвольную группу точечных симметрий

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y,$$

можно найти из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \partial_x t = \xi(t,u), \\ \\ \partial_x u = \eta(t,u). \end{cases} \tag{2.1.46}$$

Предположим, что найдено её решение

$$\begin{cases} t = t(x,y), \\ \\ u = u(x,y). \end{cases} \tag{2.1.47}$$

Теперь необходимо решить обратную задачу: выразить x, y через t, u. Пусть из системы (2.1.47) следует

$$\begin{cases} x = f(t,u), \\ y = g(t,u). \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим преобразование, переводящее группу параллельных переносов в группу вращений

$$X = y\partial_x - x\partial_y.$$

Из (2.1.46) следует

$$\begin{cases} t_x = u, \\ u_x = -t. \end{cases} \tag{2.1.48}$$

Продифференцировав последнее уравнение, и подставив в него первое, получим

$$u_{xx} = -u.$$

Частное его решение можно взять

$$u = y\cos x. \tag{2.1.49}$$

В соответствие с первым уравнением системы (2.1.48) имеем

$$t = y\sin x. \tag{2.1.50}$$

Решая систему из двух уравнений (2.1.49, 2.1.50) относительно x, y, находим

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{t}{u}\right), \\ y = \dfrac{u}{\cos[\operatorname{arctg}(t/u)]} = u\sqrt{1+\dfrac{t^2}{u^2}}. \end{cases} \tag{2.1.51}$$

Замечание 2.1.5 Преобразование (2.1.51) не удовлетворяет ни одной из систем (2.1.19), (2.1.26) и (2.1.36), поскольку функция $x = f(t,u)$

зависит от двух переменных, а не от одной. Поэтому оно не является преобразованием эквивалентности.

Рассмотрим другой пример: преобразование переводит группу переносов вдоль прямой $kx + ly = 0$

$$X = l\partial_x - k\partial_y \tag{2.1.52}$$

в группу параллельных переносов $X = \partial_x$.

Согласно системе (2.1.35) имеем

$$\begin{cases} t_x = l, \\ \\ u_x = -k. \end{cases}$$

Легко находим её частное решение

$$t(x,y) = lx, \qquad u(x,y) = -kx + \frac{1}{l}y.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{l}, \\ \\ y = kt + lu. \end{cases} \tag{2.1.53}$$

В отличие от преобразования (2.1.51), преобразование (2.1.53) удовлетворяет всем системам (2.1.19), (2.1.26) и (2.1.36), поэтому оно является преобразованием эквивалентности для трёх классов (2.1.11) – (2.1.13).

Замечание 2.1.6 В последующем изложении все формулировки теорем приводятся **с точностью до группы эквивалентности** рассматриваемых подклассов уравнений.

2.2. Аналог нётеровой симметрии уравнения вида $y''' = F(y)$.

Рассмотрим простейший вид автономного уравнения третьего порядка

$$y''' = F(y). \tag{2.2.1}$$

Мы сначала будем искать автономный первый интеграл, линейный по старшей производной y''

$$P = R(y, y')y'' + Q(y, y'). \qquad (2.2.2)$$

Теорема 2.2.1 Не существует нетривиального уравнения (2.2.1) (т. е. с $F(y) \neq 0$), имеющего автономный первый интеграл вида (2.2.2).

Доказательство. В соответствие с уравнением (2.0.4) имеем для рассматриваемого случая (2.2.1) определяющее уравнение имеет вид

$$Ry''' + R_{y'}(y'')^2 + (R_y y' + Q_{y'})y'' + Q_y y' = Ry''' - RF. \qquad (2.2.3)$$

Расщепляя это выражение по старшей производной, получаем

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = 0, \\ Q_y y' = -FR. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что интегрирующий множитель зависит только от $y : R = R(y)$. Из второго уравнения получаем

$$Q = -\frac{1}{2}R'(y')^2 + S(y),$$

где $S(y)$ – произвольная функция y. Наконец, из последнего уравнения следует выражение

$$-\frac{1}{2}R''(y')^3 + S'y' + FR = 0, \qquad (2.2.4)$$

откуда (после расщепления по y') с необходимостью следует $F \equiv 0$.

Замечание 2.2.1 В качестве контрпримера можно привести нетривиальное уравнение

$$y''' = y^{-1},$$

имеющее линейный первый интеграл

$$P = yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - x,$$

но он, очевидно, не является автономным.

Будем теперь для уравнения (2.2.1) искать автономный первый интеграл, квадратичный по старшей производной y''

$$P = R(y, y')(y'')^2 + Q(y, y')y'' + S(y, y'). \tag{2.2.5}$$

Теорема 2.2.2 Уравнение

$$y''' = (ay^2 + by + c)^{-5/4}, \tag{2.2.6}$$

где a, b, c – произвольные константы, является единственным уравнением класса (2.2.1), имеющим квадратичный по старшей производной автономный первый интеграл.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, получаем уравнение

$$\begin{multline}(2Ry'' + Q)y''' + R_{y'}(y'')^3 + (R_y y' + Q_{y'})(y'')^2 + (Q_y y' + S_{y'})y'' + S_y y' = \\ = (2Ry'' + Q)y''' - 2RFy'' - QF, \tag{2.2.7}\end{multline}$$

которое с помощью расщепления распадается до следующей системы

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = 0, \\ Q_y y' + S_{y'} = -2RF, \\ S_y y' = -QF. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Из первого уравнения следует R зависит только от y, т. е. $R = R(y)$, а из второго –

$$Q(y, y') = -\frac{1}{2}R_y(y')^2 + \varphi(y), \tag{2.2.9}$$

где φ – произвольная функция от y. Затем третье уравнение даёт

$$S_{y'} = \frac{1}{2}R_{yy}(y')^3 - \varphi_y y' - 2RF. \tag{2.2.10}$$

Дифференцируя обе части по y, получаем

$$S_{y'y} = \frac{1}{2}R_{yyy}(y')^3 - \varphi_{yy}y' - 2R_yF - 2RF_y. \tag{2.2.11}$$

С другой стороны из последнего уравнения вытекает,

$$S_y = -\frac{QF}{y'} = \frac{1}{2}R_yFy' - \frac{\varphi F}{y'}, \tag{2.2.12}$$

а после дифференцирования по y' –

$$S_{yy'} = \frac{1}{2}R_yF + \frac{\varphi F}{(y')^2}. \tag{2.2.13}$$

Из двух уравнений (2.2.11) и (2.2.13), воспользовавшись условием совместности для функции $S(y, y')$, а именно $S_{y'y} = S_{yy'}$, получаем

$$\frac{1}{2}R_{yyy}(y')^3 - \varphi_{yy}y' - \frac{5}{2}R_yF - 2RF_y - \frac{\varphi F}{(y')^2} = 0. \tag{2.2.14}$$

Отсюда путём расщепления по y' следует

$$\begin{cases} R_{yyy} = 0, \\ \varphi_{yy} = 0, \\ \dfrac{5}{2}R_yF + 2RF_y = 0, \\ \varphi F = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение полностью определяет вид функции $R(y, y')$:

$$R(y, y) = ay^2 + by + c, \tag{2.2.15}$$

где a, b, c – произвольные константы, а последнее уравнение даёт

$$\varphi(y) \equiv 0. \tag{2.2.16}$$

Переписав третье уравнение в вид с разделяющими переменными

$$\frac{F_y}{F} = -\frac{5}{4}\frac{R_y}{R}, \tag{2.2.17}$$

без труда находим его решение

$$F(y) = R^{-5/4}, \tag{2.2.18}$$

имея со ссылкой на формулу (2.2.15) точнее выражение

$$F(y) = (ay^2 + by + c)^{-5/4}. \tag{2.2.19}$$

Таким образом, вид уравнений (2.2.1) найден, а для определения его первого интеграла неизвестными остаются лишь функции $Q(y, y')$ и $S(y, y')$.

Вернувшись к уравнениям (2.2.9, 2.2.10) с найденными функциями $R(y, y')$ и $\varphi(y)$ из (2.2.15, 2.2.16), получим

$$Q(y, y') = -\frac{1}{2}(2ay + b)(y')^2 \tag{2.2.20}$$

и

$$S_{y'} = a(y')^3 - \frac{2}{(ay^2 + by + c)^{1/4}}. \tag{2.2.21}$$

С помощью интегрирования (2.2.21) по y' следует

$$S(y, y') = \frac{1}{4}a(y')^4 - \frac{2y'}{(ay^2 + by + c)^{1/4}} + \omega(y), \tag{2.2.22}$$

где ω – произвольная функция от y. При сопоставлении с уравнением (2.2.12) с легкостью находится $\omega(y) \equiv 0$, т.е.

$$S(y, y') = \frac{1}{4}a(y')^4 - \frac{2y'}{(ay^2 + by + c)^{1/4}}. \tag{2.2.23}$$

Наконец подстановка формул (2.2.15), (2.2.20) и (2.2.23) в (2.2.11) окончательно даёт искомый первый интеграл

$$P = (ay^2 + by + c)(y'')^2 - \frac{1}{2}(2ay + b)(y')^2 y'' + \frac{1}{4}a(y')^4 - \frac{2y'}{(ay^2 + by + c)^{1/4}}, \tag{2.2.24}$$

или в другом виде

$$P = R(y'')^2 - \frac{1}{2}R'(y')^2 y'' + \frac{1}{8}R''(y')^4 - 2R^{-1/4}y'. \tag{2.2.25}$$

Доказательство завершено ■

Наконец, рассмотрим автономные первые интегралы, кубичные по старшей производной.

Теорема 2.2.3 Уравнение

$$y''' = (ay + b)^{-5/2} \tag{2.2.26}$$

является единственным уравнением класса (2.2.1), имеющим кубичный по старшей производной первый интеграл.

Доказательство. Предположим вид кубичного первого интеграла следующим

$$P = R(y, y')(y'')^3 + Q(y, y')(y'')^2 + S(y, y')y'' + T(y, y'). \tag{2.2.27}$$

В соответствие с уравнением (2.0.4) имеем следующее определяющее уравнение

$$\begin{aligned} &\left[3R(y'')^2 + 2Qy'' + S\right] y''' + R_{y'}(y'')^4 + (R_y y' + Q_{y'})(y'')^3 + \\ &\quad + (Q_y y' + S_{y'})(y'')^2 + (S_y y' + T_{y'})y'' + T_y y' = \\ &= \left[3R(y'')^2 + 2Qy'' + S\right] y''' - 3RF(y'')^2 - 2QFy'' - SF. \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Отсюда проводя расщепление по старшей производной y''', получаем

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ Q_{y'} + y'R_y = 0, \\ S_{y'} + y'Q_y + 3RF = 0, \\ T_{y'} + y'S_y + 2QF = 0, \\ y'T_y + SF = 0. \end{cases} \tag{2.2.29}$$

Из первого уравнения следует, что R зависит только от y, т. е. $R = R(y)$, а из второго –

$$Q(y, y') = -\frac{1}{2}R_y(y')^2 + \varphi(y), \tag{2.2.30}$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция от y. Вместе с тем третье уравнение даёт

$$S_{y'} = \frac{1}{2}R_{yy}(y')^3 - \varphi_y y' - 3RF. \tag{2.2.31}$$

Отсюда путём интегрирования по y' следует

$$S(y,y') = \frac{1}{8}R_{yy}(y')^4 - \frac{1}{2}\varphi_y(y')^2 - 3RFy' + \chi(y). \tag{2.2.32}$$

Подставив Q, S из (2.2.30) и (2.2.32) в предпоследнее уравнение, получаем

$$T_{y'} = -\frac{1}{8}R_{yyy}(y')^5 + \frac{1}{2}\varphi_{yy}(y')^3 + (4R_yF + 3RF_y)(y')^2 - \chi_y y' - 2\varphi F, \tag{2.2.33}$$

а с помощью интегрирования по y' –

$$\begin{aligned} T(y,y') = -\frac{1}{48}R_{yyy}(y')^6 + \frac{1}{8}\varphi_{yy}(y')^4 + \frac{1}{3}(4R_yF + 3RF_y)(y')^3 - \\ - \frac{1}{2}\chi_y(y')^2 - 2\varphi F y' + \omega(y), \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

где $\omega(y)$ – произвольная функция от y. Откуда подстановка в последнее уравнение даёт

$$\begin{aligned} \frac{1}{48}R_{yyyy}(y')^7 - \frac{1}{8}\varphi_{yyy}(y')^5 - \left(\frac{35}{24}R_{yy}F + \frac{7}{3}R_yF_y + RF_{yy}\right)(y')^4 + \\ + \frac{1}{2}\chi_{yy}(y')^3 + \left(\frac{5}{2}\varphi_yF + 2\varphi F_y\right)(y')^2 + (3RF^2 - \omega_y)y' - \chi F = 0. \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Расщепив уравнение (2.2.35) по y', получаем систему

$$\begin{cases} R_{yyyy} = 0, \\ \varphi_{yyy} = 0, \\ \dfrac{35}{24} R_{yy} F + \dfrac{7}{3} R_y F_y + R F_{yy} = 0, \\ \chi_{yy} = 0, \\ \dfrac{5}{2} \varphi_y F + 2\varphi F_y = 0, \\ 3RF^2 - \omega_y = 0, \\ \chi F = 0. \end{cases} \tag{2.2.36}$$

Из первого уравнения следует

$$R(y) = a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0, \tag{2.2.37}$$

где a_3, a_2, a_1, a_0 – произвольные константы, а из второго уравнения находим

$$\varphi = b_2 y^2 + b_1 y + b_0, \tag{2.2.38}$$

где b_2, b_1, b_0 – произвольные константы. Последнее уравнение чётко определяет функцию $\chi(y)$, а именно

$$\chi(y) \equiv 0. \tag{2.2.39}$$

Переписав пятое уравнение в вид с разделяющими переменными

$$\frac{F_y}{F} = -\frac{5}{4} \frac{\varphi_y}{\varphi}, \tag{2.2.40}$$

слегко находим его решение

$$F(y) = \varphi(y)^{-5/4}, \tag{2.2.41}$$

которое со ссылкой на формулу (2.2.38) имеет более чёткий вид

$$F(y) = (b_2 y^2 + b_1 y + b_0)^{-5/4}. \tag{2.2.42}$$

Наконец приступим к третьему уравнению, которое после подстановки в него формул из (2.2.38) и (2.2.42) приобретает следующий вид

$$\Big[(24b_2b_0 - 27b_1^2)a_3 + 28b_2b_1a_2 - 28b_2^2a_1\Big]y^3+$$
$$+\Big[-84b_1b_0a_3 + (80b_2b_0 + b_1^2)a_2 - 84b_2^2a_0\Big]y^2+$$
$$+\Big[-84b_0^2a_3 + (80b_2b_0 + b_1^2)a_1 - 84b_2b_1a_0\Big]y-$$
$$-28b_0^2a_2 + 28b_1b_0a_1 + (24b_2b_0 - 27b_1^2)a_0 = 0. \quad (2.2.43)$$

Теперь полезно отметим, что система уравнений, полученных в результате расщепления уравнения (2.2.43) по зависимой переменной y, можно быть записана в матричном виде следующим образом

$$\begin{pmatrix} 24b_2b_0 - 27b_1^2 & 28b_2b_1 & -28b_2^2 & 0 \\ -84b_1b_0 & b_1^2 + 80b_2b_0 & 0 & -84b_2^2 \\ -84b_0^2 & 0 & 80b_2b_0 + b_1^2 & -84b_2b_1 \\ 0 & -28b_0^2 & 28b_1b_0 & 24b_2b_0 - 27b_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2.44)$$

Определитель этой однородной системы линейных уравнений равен

$$||D|| = 729(b_1^2 - 4b_2b_0)^4. \quad (2.2.45)$$

Отсюда следует условие существования ненулевого решения системы (2.2.44)

$$b_1^2 = 4b_2b_0,$$

которое превращает $\varphi(y)$ в полный квадрат, т. е.

$$\varphi(y) = (ay + b)^2. \quad (2.2.46)$$

При этом решение системы (2.2.44) является

$$a_2 = \frac{2aba_1 - 3a^2a_0}{b^2}, \qquad a_3 = \frac{a^2(ba_1 - 2aa_0)}{b^3}. \quad (2.2.47)$$

Полученные результаты позволяют определить все неизвестные функции. Из (2.2.41) следует

$$F(y) = (ay+b)^{-5/2}, \tag{2.2.48}$$

а из (2.2.37) –

$$R(y,y') = \frac{a^2(a_1b-2aa_0)}{b^3}y^3 + \frac{a(2a_1b-3aa_0)y^2}{b^2} + a_1y + a_0. \tag{2.2.49}$$

С помощью найденных функций F и R можно проинтегрировать шестое уравнение системы (2.2.36) по y, и в результате чего получаем

$$\omega(y) = \frac{3}{2}\frac{(4a_0a^2-2a_1ab)y + a_0ab - a_1b^2}{a^2b^3(ay+b)^2}. \tag{2.2.50}$$

Вернувшись к формулам (2.2.30), (2.2.32) и (2.2.34) с функциями F и R, а также с возникнувшими в процессе взятия интегрирования функциями $\varphi, \chi,$ и ω из (2.2.46), (2.2.39) и (2.2.50) находим

$$Q(y,y') = -\frac{1}{2}\left[\frac{3a^2(a_1b-2a_0a)}{b^3}y^2 + \frac{2a(2a_1b-3a_0a)}{b^2}y + a_1\right](y')^2 + \\ + (ay+b)^2, \tag{2.2.51}$$

$$S(y,y') = \frac{1}{8}\left[\frac{6a^2(a_1b-2a_0a)y}{b^3} + \frac{2a(2a_1b-3a_0a)}{b^2}\right](y')^4 - \\ - a(ay+b)(y')^2 + \frac{3(2a_0a-a_1b)y-3a_0b}{b^3\sqrt{ay+b}}y' \tag{2.2.52}$$

и

$$T = -\frac{a^2(a_1b-2aa_0)}{8b^3}(y')^6 + \frac{1}{4}a^2(y')^4 + \\ + \frac{1}{6}\Big[9a^3(a_1b-2aa_0)y^3 + (26a_1b-51aa_0)a^2by^2 + (25a_1b-48aa_0)ab^2y + \\ + 8a_1b^4 - 15aa_0b^3\Big](y')^3b^{-3}(ay+b)^{-7/2} - \frac{2y'}{(ay+b)^{1/2}} - \\ - \frac{3}{2}\frac{(2aa_1b-4a^2a_0)y - aa_0b + a_1b^2}{a^2b^3(ay+b)^2}. \tag{2.2.53}$$

Таким образом вид уравнения (2.2.1) совсем ясен, а первый интеграл, следуя формуле (2.2.28), может быть представлен в виде линейной комбинации двух кубичных и одного квадратичного по старшей производной выражений

$$P = a_1 P_1 + a_0 P_0 + Q, \tag{2.2.54}$$

где

$$\begin{aligned} P_1 = &\frac{(ay+b)^2 y}{b^2}(y'')^3 - \frac{(3ay+b)(ay+b)}{2b^2}(y')^2(y'')^2 + \\ &+ \left[\frac{(3ay+2b)a}{4b^2}(y')^3 - \frac{3y}{(ay+b)^{1/2}b^2}\right] y'y'' - \frac{a^2}{8b^2}(y')^6 + \\ &+ \frac{9a^3y^3 + 26a^2by^2 + 25ab^2y + 8b^3}{6(ay+b)^{7/2}b^2}(y')^3 - \frac{3}{2}\frac{2aby+b^2}{a^2b^3(ay+b)^2}, \end{aligned} \tag{2.2.55}$$

$$\begin{aligned} P_0 = &-\frac{(2ay-b)(ay+b)^2}{b^3}(y'')^3 + \frac{3a^2y(ay+b)}{b^3}(y')^2(y'')^2 - \\ &- \frac{3}{b^3}\left[\frac{a^2(2ay+b)}{4}(y')^3 - \frac{2ay-b}{(ay+b)^{1/2}}\right] y'y'' + \frac{a^3}{4b^3}(y')^6 - \\ &- \frac{a(6a^3y^3 + 17a^2by^2 + 16ab^2y + 5b^3)}{2b^3(ay+b)^{7/2}}(y')^3 + \frac{3}{2}\frac{4ay+b}{ab^3(ay+b)^2}, \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

и

$$Q = (ay+b)^2(y'')^2 - a(ay+b)(y')^2y'' + \frac{1}{4}a^2(y')^4 - 2(ay+b)^{-1/2}y'. \tag{2.2.57}$$

Доказательство завершено ■

Замечание 2.2.2 Прямым вычислением по определению можно показать, что все выражения (2.2.55) – (2.2.57) являются первыми интегралами уравнения (2.2.26).

Замечание 2.2.3 Легко проверить, что якобиан трёх первых интегралов P_1, P_0 и Q по переменным y_2, y_1, y принимает значение 0, что влечёт за собой линейную зависимость этих составляющих первых интегралов. Поэтому независимых первых интегралов будет только два. Исключение из них второй производной приводит к автономному уравнению первого порядка, откуда следует, что исходное уравнение (2.2.26) может быть проинтегрировано одной квадратурой.

Замечание 2.2.4 При распространении полученных результатов для класса уравнений $y''' = F(y)$ на другую симметрию с помощью преобразования (2.1.2) следует учитывать условие сохранения подкласса, при этом необходимым условием для рассмотренного случая является условие на вид произвольного элемента группы эквивалентности (2.1.38).

2.3. Аналог нётеровой симметрии уравнения вида $y''' = F(y, y')$.

Наряду с автономным классом уравнений $y''' = F(y)$ аналогичным образом можно получить и результаты для класса уравнений, где присутствует первая производная y'

$$y''' = F(y, y'), \tag{2.3.1}$$

так как определяющая система уравнений для обоих классов одинакова.

Первоначально будем искать первый интеграл, линейный относительно старшей производной

$$P = R(y, y')y'' + Q(y, y'). \tag{2.3.2}$$

Теорема 2.3.1 Уравнение

$$y''' = \frac{R''(y')^3 - 2S'y'}{2R}, \tag{2.3.3}$$

где R и S – произвольные функции переменной y, является единственным уравнением класса уравнений (2.3.1), имеющего автономный линейный по y'' первый интеграл.

Доказательство. Определяющее уравнение в данном случае имеет вид

$$Ry''' + R_{y'}(y'')^2 + (R_y y' + Q_{y'})y'' + Q_y y' = Ry''' - RF. \tag{2.3.4}$$

Расщепляя по старшим производным y''' и y'', получаем

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = 0, \\ Q_y y' = -RF. \end{cases}$$

Независимость от y' функции $R(y)$ непосредственно вытекает из первого уравнения, а из второго уравнения можно найти вид функции $Q(y, y')$

$$Q(y, y') = -\frac{1}{2} R_y (y')^2 + S(y), \tag{2.3.5}$$

где $S(y)$ – произвольная функция от y.

Подставив (2.3.5) в последнее уравнение, находим

$$F(y, y') = \frac{R''(y')^3 - 2S'y'}{2R}. \tag{2.3.6}$$

Соответствующий первый интеграл тогда будет

$$P = R(y)y'' - \frac{1}{2} R'(y')^2 + S(y). \tag{2.3.7}$$

Доказательство завершено ■

Рассмотрим второй случай, когда ищется первый интеграл, квадратичный относительно старшей производной

$$P = R(y, y')(y'')^2 + Q(y, y')y'' + S(y, y'). \tag{2.3.8}$$

Теорема 2.3.2 Подкласс уравнений

$$y''' = R^{-3/2} y' \Phi(u) + \frac{2RR'' - (R')^2}{8R^2} (y')^3 - \frac{2RT' - R'T}{4R^2} y', \tag{2.3.9}$$

где $u = R^{-1/2}(y')^2 + \int TR^{-3/2}\, dy$, R и T – произвольные функции переменной y, Φ – произвольная функция переменной u, является единственным подклассом уравнений класса (2.3.1), имеющего квадратичный по y'' первый интеграл.

Доказательство. Согласно с уравнением (2.0.4) имеем для класса (2.3.1) с первым интегралом (2.3.8) определяющее уравнение

$$(2Ry'' + Q)y''' + R_{y'}(y'')^3 + (R_y y' + Q_{y'})(y'')^2 + (Q_y y' + S_{y'})y'' + S_y y' = \\ = (2Ry'' + Q)y''' - 2RFy'' - QF. \quad (2.3.10)$$

Расщепляя по старшим производным, получаем

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = 0, \\ Q_y y' + S_{y'} = -2RF, \\ S_y y' = -QF. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует $R = R(y)$, а из второго –

$$Q(y, y') = -\frac{1}{2}R_y(y')^2 + T(y). \quad (2.3.11)$$

Из предпоследнего уравнения следует

$$S_{y'} = -Q_y y' - 2RF; \quad (2.3.12)$$

затем продифференцировав её по y, получаем

$$S_{y'y} = -Q_{yy}y' - 2R_y F - 2RF_y. \quad (2.3.13)$$

С другой стороны, дифференцирование последнего уравнения даёт

$$S_{yy'} = \frac{-(Q_{y'}F + QF_{y'})y' + QF}{(y')^2}. \quad (2.3.14)$$

Воспользовавшись условием совместности для функции $S(y, y')$, из двух уравнений (2.3.13) и (2.3.14) следует

$$-Q_{yy}y' - 2R_y F - 2RF_y = \frac{-(Q_{y'}F + QF_{y'})y' + QF}{(y')^2}. \quad (2.3.15)$$

Перепишем это уравнение в виде линейного неоднородного уравнения относительно $F(y,y')$, учитывая выражение $Q(y,y')$ из (2.3.11):

$$\left(\frac{T}{y'}-\frac{1}{2}y'R_y\right)F_{y'}-2RF_y=\left(\frac{5}{2}R_y+\frac{T}{(y')^2}\right)F-\frac{1}{2}R_{yyy}(y')^3+y'T_{yy}. \tag{2.3.16}$$

Первоначально будем решать однородное линейное уравнение

$$\left(\frac{T}{y'}-\frac{1}{2}y'R_y\right)F_{y'}-2RF_y=0. \tag{2.3.17}$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{dy'}{\frac{T}{y'}-\frac{1}{2}y'R_y}=\frac{dy}{-2R}. \tag{2.3.18}$$

Преобразуя его к уравнению Бернулли

$$\frac{dy'}{dy}-\frac{1}{4}\frac{R_y}{R}y'=-\frac{1}{2}\frac{T}{R}(y')^{-1}, \tag{2.3.19}$$

легко находим его общее решение

$$y'=R^{1/4}\left(-\int TR^{-3/2}\,dy+C\right)^{1/2}. \tag{2.3.20}$$

Отсюда следует общее решение уравнения (2.3.17)

$$u(y,y')=(y')^2R^{-1/2}+\int TR^{-3/2}\,dy. \tag{2.3.21}$$

Теперь переходя в (2.3.16) к переменным x и u, получаем

$$\begin{aligned}-2RF_y=&\left[\frac{5}{2}R_y-TR^{-1/2}\left(\int TR^{-3/2}\,dy+u\right)^{-1}\right]F+\\&-\frac{1}{2}R'''R^{3/4}\left(-\int TR^{-3/2}dy+u\right)^{3/2}+\\&+T''R^{1/4}\left(-\int TR^{-3/2}\,dy+u\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Будем решать сначала линейное однородное укороченное уравнение

$$-2RF_y=\left[\frac{5}{2}R_y+-TR^{-1/2}\left(\int TR^{-3/2}\,dy+u\right)^{-1}\right]F \tag{2.3.23}$$

Записав его в виде уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{F_y}{F} = -\frac{5}{4}\frac{R_y}{R} - 2TR^{-3/2}\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right)^{-1}, \tag{2.3.24}$$

затем переписав (2.3.24) в форме

$$\frac{dF}{F} = -\frac{5}{4}\frac{dR}{R} + \frac{1}{2}\frac{d\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right)}{u - \int TR^{-3/2}\,dy}, \tag{2.3.25}$$

легко находим его решение

$$\ln F = -\frac{5}{4}\ln R + \frac{1}{2}\ln\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right) + \ln C, \tag{2.3.26}$$

где C – произвольная константа, или

$$F = CR^{-5/4}\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right)^{1/2}. \tag{2.3.27}$$

Дальше будем решать методом вариации произвольной переменной: положив в (2.3.27) $C = C(y)$, затем поставив полученную F в (2.3.22), получим

$$\begin{aligned} &-2RC'R^{-5/4}\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right)^{1/2} = \\ &= -\frac{1}{2}R'''R^{3/4}\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right)^{3/2} + T''R^{1/4}\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

После приведения подобных членов остаётся одно уравнение для определения функции $C = C(y)$

$$C' = \frac{1}{4}R'''R\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right) - \frac{1}{2}T''R^{1/2}. \tag{2.3.29}$$

Решение уравнения будет

$$C = \frac{1}{4}\int R'''R\left(u - \int TR^{-3/2}\,dy\right)\,dy - \frac{1}{2}\int T''R^{1/2}\,dy. \tag{2.3.30}$$

Теперь будем постепенно преобразовывать полученную функцию C. Сначала перепишем её в виде

$$C = \frac{1}{4}\int R\left(u - \int TR^{-3/2}dy\right)\, dR'' - \frac{1}{2}\int R^{1/2}\, dT'. \qquad (2.3.31)$$

Затем, вычислив интеграл, получим

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{4}\Bigg[& RR''\left(u - \int TR^{-3/2}\, dy\right) - \\ & - \int R'R''\left(u - \int TR^{-3/2}\, dy\right)\, dy + \int RR''TR^{-3/2}\, dy\Bigg] + \\ & - \frac{1}{2}\left(R^{1/2}T' - \frac{1}{2}\int T'R^{-1/2}R'\, dy\right) \end{aligned} \qquad (2.3.32)$$

Далее снова переписываем его в соответствующий вид

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{4}RR''\left(u - \int TR^{-3/2}\, dy\right) - \\ & - \frac{1}{8}\int\left(u - \int TR^{-3/2}\, dy\right) d(R')^2 + \frac{1}{4}\int R^{-1/2}T\, dR' - \\ & - \frac{1}{2}R^{1/2}T' + \frac{1}{4}\int R^{-1/2}R'\, dT, \end{aligned} \qquad (2.3.33)$$

и, вычисляя интегралы методом замены переменной

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{4}RR''\left(u - \int TR^{-3/2}\, dy\right) - \\ & - \frac{1}{8}\left(u - \int TR^{-3/2}dy\right)(R')^2 - \frac{1}{8}\int TR^{-3/2}(R')^2\, dy + \\ & + \frac{1}{4}R^{-1/2}R'T - \frac{1}{4}\int R^{-1/2}R'T'\, dy + \frac{1}{8}\int R^{-3/2}(R')^2T\, dy - \\ & - \frac{1}{2}R^{1/2}T' + \frac{1}{4}\int R^{-1/2}R'T'\, dy \end{aligned} \qquad (2.3.34)$$

после сокращения подобных членов находим

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{8}\Big[2RR'' - (R')^2\Big]\left(u - \int TR^{-3/2}\, dy\right) + \\ & + \frac{1}{4}R^{-1/2}(R'T - 2RT'). \end{aligned} \qquad (2.3.35)$$

Наконец, возвращаясь к переменной y' непосредственно по (2.3.27) получаем частное решение

$$F = \left\{\frac{1}{8}\Big[2RR'' - (R')^2\Big]R^{-1/2}(y')^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}R^{-1/2}(R'T - 2RT')\right\}R^{-3/2}y' \quad (2.3.36)$$

или

$$F = \frac{2RR'' - (R')^2}{8R^2}(y')^3 + \frac{R'T - 2RT'}{4R^2}y'. \quad (2.3.37)$$

Итак, общий вид правой части уравнения (2.3.1) для рассматриваемого случая принимает следующий вид

$$F = R^{-3/2}y'\Phi(u) + \frac{2RR'' - (R')^2}{8R^2}(y')^3 + \frac{R'T - 2RT'}{4R^2}y', \quad (2.3.38)$$

где $u = R^{-1/2}(y')^2 + \displaystyle\int TR^{-3/2}\,dy$, R и T – произвольные функции переменной y, Φ – произвольная функция переменной u.

Из (2.3.12) следует

$$S_{y'} = \frac{1}{4}\frac{(R')^2}{R}(y')^3 - \frac{4R^{1/2}\Phi(u) + R'T}{2R}y'. \quad (2.3.39)$$

Интегрируя по y', получим

$$S(y, y') = \frac{1}{16}\frac{(R')^2}{R}(y')^4 - \int \Phi(u)\,du - \frac{R'T}{4R}(y')^2 + \varphi(y). \quad (2.3.40)$$

Сопоставляя это выражение с уравнением (2.3.14), можем найти

$$\varphi(y) = \frac{1}{4}\frac{T^2}{R}.$$

Наконец, найденные функции R, Q и S из (2.3.11) и (2.3.40) позволяют чётко определить вид искомого интеграла, а именно

$$P = R(y'')^2 + \left[-\frac{1}{2}R'(y')^2 + T(y)\right]y'' +$$
$$+ \frac{1}{16}\frac{(R')^2}{R}(y')^4 - \int \Phi(u)\,du - \frac{R'T}{4R}(y')^2 + \frac{1}{4}\frac{T^2}{R}. \quad (2.3.41)$$

Доказательство завершено ■

Рассмотрим последний случай: первый интеграл, кубичный по y''

$$P = R(y,y')(y'')^3 + Q(y,y')(y'')^2 + S(y,y')y'' + T(y,y'). \qquad (2.3.42)$$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы получаем определяющее уравнение

$$\begin{aligned}\Big[3R(y'')^2 + 2Qy'' + S\Big]y''' + R_{y'}(y'')^4 + (R_y y' + Q_{y'})(y'')^3 + \\ + (Q_y y' + S_{y'})(y'')^2 + (S_y y' + T_{y'})y'' + T_y y' = \\ = \Big[3R(y'')^2 + 2Qy'' + S\Big]y''' - 3RF(y'')^2 - 2QFy'' - SF. \qquad (2.3.43)\end{aligned}$$

Расщепив по старшим производным, получим

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = 0, \\ Q_y y' + S_{y'} = -3RF, \\ S_y y' + T_{y'} = -2QF, \\ T_y y' = -SF. \end{cases} \qquad (2.3.44)$$

Независимость от y' функции $R = R(y)$ непосредственно вытекает из первого уравнения, отсюда можно проинтегрировать второе уравнение по y' и получить вид функции $Q(y,y')$

$$Q(y,y') = -\frac{1}{2}R_y(y')^2 + \varphi(y). \qquad (2.3.45)$$

Подставив (2.3.45) в третье уравнение, получим

$$S_{y'} = \frac{1}{2}R_{yy}(y')^3 - \varphi_y y' - 3RF. \qquad (2.3.46)$$

Следует обратить внимание, что интегрирование уравнения (2.3.46) невозможно, если функция $F(y,y')$ задана в общем виде. Однако это затруднение легко устраняется, если положить

$$F(y, y') = \frac{\partial G}{\partial y'}, \tag{2.3.47}$$

где $G = G(y, y')$ – новая (пока неизвестная) функция. Тогда легко находим

$$S(y, y') = \frac{1}{8}R_{yy}(y')^4 - \frac{1}{2}\varphi_y(y')^2 - 3RG + \omega(y). \tag{2.3.48}$$

Из двух последних уравнений системы (2.3.44) следует

$$\begin{cases} T_{y'} = -S_y y' - 2QG_{y'}, \\ T_y = -\dfrac{SG_{y'}}{y'}. \end{cases}$$

Воспользовавшись условием совместности для этой системы (по функции $T(y, y')$), получаем дифференциальное уравнение в частных производных для определения функции $G(y, y')$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{y'}SG_{y'}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}(QG_{y'}) - y'S_{yy} = 0. \tag{2.3.49}$$

В отличие от предыдущих случаев, где все результаты были получены в замкнутой форме, рассматриваемый случай приводит к уравнению (2.3.49), которое пока не решено в общем виде.

Замечание 2.3.1 При распространении полученных результатов для класса уравнений $y''' = F(y, y')$ на другую симметрию с помощью преобразования (2.1.2) следует учитывать условие сохранения подкласса, при этом необходимым условием для рассмотренного случая является условие на вид произвольного элемента группы эквивалентности (2.1.24).

Глава 3. Симметрия расширенного класса уравнений 3-го порядка

Наша работа в этой главе связана с попыткой получить аналог вариационной симметрии для более широкого класса уравнений 3-го порядка, в котором присутствует вторая производная. При этом необходимо отметить, что вхождение y'' в правую часть уравнения влечёт за собой техническую сложность, из-за которой не можем рассматривать общий класс $F(x, y, y', y'')$, а только некоторые его специфические виды. Вместе с тем, алгоритм решения обратной задачи становится существенно иным.

Как в предыдущей главе, группа эквивалентности здесь также будет играть роль, способствующую облегчению решения обратной задачи группового анализа: сначала будем искать автономные первые интегралы для автономных уравнений, затем с помощью группы эквивалентности распространять этот результат на весь класс.

3.1. Некоторые уравнения с правой частью, содержащей все промежуточные производные.

Рассмотрим сначала специфический вид автономных уравнений

$$y''' = F(y, y', y'')G(y''), \tag{3.1.1}$$

где $G(y'')$ – произвольная функция, а F подлежит определению. Потребуем, чтобы уравнение (3.1.1) имело автономный первый интеграл. Очевидно, после деления на G уравнение (3.1.1) принимает форму

$$\frac{y'''}{G(y'')} = F(y, y', y''), \tag{3.1.2}$$

и левая часть выражения (3.1.2) становится полной производной. Для выполнения поставленных условий необходимо и достаточно, чтобы и правая часть (3.1.2) являлась бы точной производной

$$F(y, y', y'') = D_x H(y, y') = \frac{\partial H}{\partial y'} y'' + \frac{\partial H}{\partial y} y'.$$

Отсюда следует, что возможно два случая:

1а. Функция F линейна по второй производной, тогда первый интеграл уравнения (3.1.1) имеет вид

$$P = \int \frac{dy''}{G(y'')} - H(y, y').$$

1б. Функция F не зависит от второй производной, тогда первый интеграл уравнения (3.1.1) имеет вид

$$P = \int \frac{dy''}{G(y'')} - H(y).$$

В этом случае функция F линейна по первой производной: $F = H(y)y'$, где H – произвольна.

1в. Отметим важный случай степенной зависимости функции G от “предстаршей” производной, когда $G = (y'')^n$. Тогда

$$P = \begin{cases} (y'')^{1-n} - (1-n)H(y, y'), & \text{если} \quad n \neq 1, \\ \ln y'' - H(y, y'), & \text{если} \quad n = 1. \end{cases}$$

Уравнения подобного типа встречаются в теории пограничного слоя [16]. Представляется интересным изучение физических приложений полученных результатов, аналогичных вариационным (нётеровым) симметриям уравнений чётных порядков.

3.2. Уравнения с правой частью, не содержащей первой производной.

Наряду с классом (3.1.1) будем рассматривать ещё один вид уравнений, содержащих предстаршую производную y''

$$y''' = F(y, y''). \tag{3.2.1}$$

Как выделено в п. 2. 1, класс (3.2.1) допускает точечную группу эквивалентности (2.1.31). Будем работать лишь с полиноминальным видом (3.2.1).

Сначала будем искать автономные первые интегралы для уравнения с правой частью, линейной по второй производной

$$y''' = F(y)y'' + G(y). \tag{3.2.2}$$

Теорема 3.2.1 Уравнение

$$y''' = \frac{cy''}{ay + b} \tag{3.2.3}$$

является единственным уравнением вида (3.2.2), имеющим линейный первый интеграл.

Доказательство. Пусть линейный первый интеграл имеет следующий вид

$$P = R(y, y')y'' + Q(y, y'). \tag{3.2.4}$$

Следуя уравнению (1.2.7), имеем

$$Ry''' + R_{y'}(y'')^2 + (R_y y' + Q_{y'})y'' + Q_y y' = Ry''' - RFy'' - RG. \tag{3.2.5}$$

Расщепив по старшей производной, получаем систему

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = -RF, \\ Q_y y' = -RG. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Из первого уравнения следует $R = R(y)$, а из второго –

$$Q_{y'} = -R_y y' - RF. \tag{3.2.7}$$

Проинтегрировав по y' обе части уравнения (3.2.7), получаем

$$Q = -\frac{1}{2}R_y(y')^2 - RFy' + \omega(y), \tag{3.2.8}$$

где $\omega(y)$ – произвольная функция от y.

Подстановка (3.2.8) в последнее уравнение системы (3.2.6) приводит к уравнению

$$-\frac{1}{2}R_{yy}(y')^2 - (R_yF + RF_y)y' + \omega_y = -\frac{RG}{y'}, \tag{3.2.9}$$

которое с помощью расщепления по y' распадаётся до следующей системы

$$\begin{cases} R_{yy} = 0, \\ R_yF + RF_y = 0, \\ \omega_y = 0, \\ RG = 0. \end{cases}$$

Откуда следует

$$R(y) = ay + b, \quad F(y) = \frac{c}{ay + b}, \quad \omega(y) \equiv 0, \quad G(y) \equiv 0, \tag{3.2.10}$$

где a, b, c – произвольные константы.

Вернувшись к уравнению (3.2.8) с формулами (3.2.10), получим

$$Q(y, y') = -\frac{1}{2}a(y')^2 - cy', \tag{3.2.11}$$

что вместе с полученной R из (3.2.10) даёт окончательный вид первого интеграла

$$P = (ay + b)y'' - \frac{1}{2}a(y')^2 - cy'. \tag{3.2.12}$$

Доказательство завершено ■

Теорема 3.2.2 Уравнение

$$y''' = \frac{ay''}{by + c} + \frac{d}{(by + c)^{5/2}} \tag{3.2.13}$$

является единственным уравнением вида (3.2.2), имеющим квадратичный по второй производной первый интеграл.

Доказательство. Предположим вид квадратичного первого интеграла следующим

$$P = R(y, y')(y'')^2 + Q(y, y')y'' + S(y, y'). \qquad (3.2.14)$$

Аналогично предыдущему доказательству получаем уравнение,

$$\begin{aligned}(2Ry'' + Q)y''' + R_{y'}(y'')^3 + (R_y y' + Q_{y'})(y'')^2 + (Q_y y' + S_{y'})y'' + S_y y' = \\ = (2Ry'' + Q)y''' - 2RF(y'')^2 - (QF + 2RG)y'' - QG, \quad (3.2.15)\end{aligned}$$

которое с помощью расщепления по старшей производной распадаётся до следующей системы

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = -2RF, \\ Q_y y' + S_{y'} = -QF - 2RG, \\ S_y y' = -QG. \end{cases} \qquad (3.2.16)$$

Из первого уравнения следует $R = R(y)$, а из второго уравнения –

$$Q = -\frac{1}{2}R_y(y')^2 - 2RFy' + \varphi(y), \qquad (3.2.17)$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция от y.

Подставив (3.2.17) в предпоследнее уравнение системы (3.2.16), получаем

$$S_{y'} = \frac{1}{2}R_{yy}(y')^3 + \left(\frac{5}{2}R_y F + 2RF_y\right)(y')^2 + (2F^2R - \varphi_y)y' - 2RG - F\varphi, \qquad (3.2.18)$$

откуда путём интегрирования по y' обеих частей следует

$$\begin{aligned}S(y, y') = \frac{1}{8}R_{yy}(y')^4 + \left(\frac{5}{6}R_y F + \frac{2}{3}RF_y\right)(y')^3 + \\ + \left(RF^2 - \frac{1}{2}\varphi_y\right)(y')^2 - (2RG + \varphi F)y' + \omega(y), \quad (3.2.19)\end{aligned}$$

где $\omega(y)$ – произвольная функция от y.

Подставив (3.2.17) и (3.2.19) в последнее уравнение системы (3.2.16), получим следующее уравнение

$$\frac{1}{8}R_{yyy}(y')^5 + \left(\frac{5}{6}R_{yy}F + \frac{3}{2}R_yF_y + \frac{2}{3}RF_{yy}\right)(y')^4 + \\ + \left(R_yF^2 + 2RFF_y - \frac{1}{2}\varphi_{yy}\right)(y')^3 - \\ - \left(\frac{5}{2}R_yG + 2RG_y + \varphi_yF + \varphi F_y\right)(y')^2 + (\omega_y - 2RFG)y' + \varphi G = 0, \tag{3.2.20}$$

которое с помощью расщепления по y' распадаётся до системы

$$\begin{cases} R_{yyy} = 0, \\ \dfrac{5}{6}R_{yy}F + \dfrac{3}{2}R_yF_y + \dfrac{2}{3}RF_{yy} = 0, \\ R_yF^2 + 2RFF_y - \dfrac{1}{2}\varphi_{yy} = 0, \\ \dfrac{5}{2}R_yG + 2RG_y + \varphi_yF + \varphi F_y = 0, \\ \omega_y - 2RFG = 0, \\ \varphi G = 0. \end{cases} \tag{3.2.21}$$

Из первого и последнего уравнений следует

$$R = \alpha y^2 + \beta y + \gamma, \qquad \varphi(y) \equiv 0, \tag{3.2.22}$$

где α, β, γ – произвольные константы.

Из третьего уравнения вытекает эквивалентное уравнение

$$FR_y + 2F_yR = 0, \tag{3.2.23}$$

решение которого является

$$F = \frac{a}{\sqrt{R}} = \frac{a}{\sqrt{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}}, \tag{3.2.24}$$

где a – произвольная константа.

Подставив (3.2.22) и (3.2.24) в второе уравнение, находим

$$\frac{a(4\alpha\gamma-\beta^2)}{(\alpha y^2+\beta y+\gamma)^{3/2}}=0, \tag{3.2.25}$$

откуда получаем для коэффициентов $R(y)$ ограничение

$$\beta^2=4\alpha\gamma, \tag{3.2.26}$$

которое превращает $R(y)$ в полный квадрат, т. е.

$$R(y)=(by+c)^2, \tag{3.2.27}$$

где b, c – произвольные константы. Уточнение $R(y)$ согласно (3.2.24) влечёт за собой окончательный вид $F(y)$

$$F(y)=\frac{a}{by+c}. \tag{3.2.28}$$

Оставшееся неизвестное слагаемое для определения вида уравнения (3.2.1) находится из четвёртого уравнения системы (3.2.21)

$$G(y)=\frac{d}{(by+c)^{5/2}}, \tag{3.2.29}$$

где d – произвольная константа.

Вслед за формами (3.2.27–3.2.29) из предпоследнего уравнения системы (3.2.21) находим

$$\omega(y)=-\frac{4ad}{b\sqrt{by+c}}. \tag{3.2.30}$$

Наконец, возвращаясь с полученными результатами из (3.2.22) и (3.2.27 – 3.2.30) к уравнениям (3.2.17) и (3.2.19), получим

$$Q(y,y')=-(by+c)(by'+2a)y' \tag{3.2.31}$$

и

$$S(y,y')=\left(\frac{1}{2}by'+a\right)^2(y')^2-\frac{2bdy'+4ad}{b\sqrt{by+c}}, \tag{3.2.32}$$

что и даёт окончательный вид первого интеграла

$$P = \left[(by+c)y'' - \frac{1}{2}b(y')^2 - ay'\right]^2 - \frac{2bdy' + 4ad}{b\sqrt{by+c}}. \tag{3.2.33}$$

Доказательство завершено ■

Исследование может быть продолжено поиском уравнений, имеющих кубичный первый интеграл, т. е.

$$P = R(y,y')(y'')^3 + Q(y,y')(y'')^2 + S(y,y')y'' + T(y,y'). \tag{3.2.34}$$

Проводя аналогичную процедуру, получим систему

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = -3RG, \\ Q_y y' + S_{y'} = -2QG - 3RH, \\ S_y y' + T_{y'} = -SG - 2QH, \\ T_y y' = -SH. \end{cases} \tag{3.2.35}$$

Из второго уравнения следует

$$Q(y,y') = -\frac{1}{2}R_y(y')^2 - 3RGy' + \alpha(y), \tag{3.2.36}$$

а из третьего –

$$S = \frac{1}{8}R_{yy}(y')^4 + \left(\frac{4}{3}R_yG + RG_y\right)(y')^3 + \left(3RG^2 - \frac{1}{2}\alpha_y\right)(y')^2 - \\ - (3RH + 2\alpha G)y' + \beta(y). \tag{3.2.37}$$

Далее, проинтегрировав по y' четвёртое уравнение, находим

$$
\begin{aligned}
T = -\frac{1}{48}R_{yyy}(y')^6 - \left(\frac{7}{24}R_{yy}G + \frac{7}{15}R_yG_y + \frac{1}{5}RG_{yy}\right)(y')^5 - \\
- \left[\frac{3}{4}R_yG^2 + \frac{3}{2}RGG_y - \frac{1}{8}\alpha_{yy} + G\left(\frac{1}{3}R_yG + \frac{1}{4}RG_y\right)\right](y')^4 + \\
+ \left[\frac{4}{3}R_yH + RH_y + \frac{2}{3}\alpha_yG + \frac{2}{3}\alpha G_y - G\left(RG^2 - \frac{1}{6}\alpha_y\right)\right](y')^3 + \\
+ \left[3HRG - \frac{1}{2}\beta_y + G\left(32RH + \alpha G\right)\right](y')^2 - \\
- (G\beta + 2H\alpha)y' + \gamma(y). \quad (3.2.38)
\end{aligned}
$$

Наконец, подставив (3.2.37) и (3.2.38) в последнее уравнение, затем расщепив по y', получим

$$
\begin{cases}
R_{yyyy} = 0, \\
\dfrac{7}{24}R_{yyy}G + \dfrac{91}{120}R_{yy}G_y + \dfrac{2}{3}R_yG_{yy} + \dfrac{1}{5}RG_{yyy} = 0, \\
\dfrac{13}{12}R_{yy}G^2 + \left(\dfrac{47}{12}R_yG_y + \dfrac{7}{4}RG_{yy}\right)G + \dfrac{7}{4}RG_y^2 - \dfrac{1}{8}\alpha_{yyy} = 0, \\
-3G_yRG^2 + RH_{yy} + \dfrac{5}{6}\alpha_{yy}G - R_yG^3 + \dfrac{2}{3}\alpha G_{yy} + \\
\qquad\qquad + \dfrac{3}{2}\alpha_yG_y + \dfrac{35}{24}R_{yy}H + \dfrac{7}{3}R_yH_y = 0, \\
\alpha_yG^2 + \left(2\alpha G_y + \dfrac{35}{6}R_yH + \dfrac{9}{2}RH_y\right)G - \dfrac{1}{2}\beta_{yy} + \dfrac{11}{2}HRG_y = 0, \\
3HRG^2 - \dfrac{5}{2}H\alpha_y - 2H_y\alpha - G\beta_y - G_y\beta = 0, \\
3RH^2 - \gamma_y + 2GH\alpha = 0, \\
\beta H = 0.
\end{cases}
$$

Из первого уравнения следует

$$R(y) = ay^3 + by^2 + cy + d, \tag{3.2.39}$$

а из последнего –

$$\beta(y) \equiv 0. \tag{3.2.40}$$

Пятое уравнение теперь становится таким

$$2H_y\alpha = \left(3RG^2 - \frac{5}{2}\alpha_y\right) H. \tag{3.2.41}$$

Выполнив тождественные преобразования

$$\frac{H_y}{H} = \frac{6RG^2 - 5\alpha_y}{4\alpha}, \tag{3.2.42}$$

легко находим решение

$$H(y) = k \exp\left(\int \frac{6RG^2 - 5\alpha_y}{4\alpha}\, dy\right), \tag{3.2.43}$$

где k – произвольная константа.

Оставшиеся 4 уравнения составляют переопределённую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции $G(y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{24}R_{yyy}G + \dfrac{91}{120}R_{yy}G_y + \dfrac{2}{3}R_yG_{yy} + \dfrac{1}{5}RG_{yyy} = 0, \\ \dfrac{13}{12}R_{yy}G^2 + \left(\dfrac{47}{12}R_yG_y + \dfrac{7}{4}RG_{yy}\right)G + \dfrac{7}{4}RG_y^2 - \dfrac{1}{8}\alpha_{yyy} = 0, \\ -3G_yRG^2 + RH_{yy} + \dfrac{5}{6}\alpha_{yy}G - R_yG^3 + \dfrac{2}{3}\alpha G_{yy} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{3}{2}\alpha_yG_y + \dfrac{35}{24}R_{yy}H + \dfrac{7}{3}R_yH_y = 0, \\ \alpha_yG^2 + \left(2\alpha G_y + \dfrac{35}{6}R_yH + \dfrac{9}{2}RH_y\right)G + \dfrac{11}{2}HRG_y = 0. \end{cases} \tag{3.2.44}$$

Однако система (3.2.44) совместна и имеет решение, так как, согласно теореме 3.2.1, класс уравнений (3.2.2) имеет линейный первый интеграл. Из этого следует, этот класс уравнений также имеет тривиальный кубичный первый интеграл, полученный в результате возведения в третью степень линейного интеграла (3.2.12), т. е.

$$P = \left[(ay+b)y'' - \frac{a}{2}(y')^2 - cy'\right]^3.$$

Этот интеграл является, по построению, одним из решений системы (3.2.44).

Рассмотрим ещё один вид уравнений (3.2.1), когда правая часть является квадратичным полиномом относительно второй производной, а именно

$$y''' = F(y)(y'')^2 + G(y)y'' + H(y). \tag{3.2.45}$$

Будем действовать также по выбранному пути: поищем первые интегралы в виде многочленов относительно старшей производной.

Теорема 3.2.3 Уравнение

$$y''' = a(y'')^2 + \frac{d}{by+c}y'', \tag{3.2.46}$$

где a, b, c, d – произвольные константы, является единственным уравнением вида (3.2.45), имеющим линейный по старшей производной автономный первый интеграл.

Доказательство. Пусть линейный автономный первый интеграл имеет следующий вид

$$P(y, y', y'') = R(y, y')y'' + Q(y, y'). \tag{3.2.47}$$

В соответствие с уравнением (1.2.8) имеем определяющее уравнение

$$\begin{aligned} Ry''' + R_{y'}(y'')^2 + (R_y y' + Q_{y'})y'' + Q_y y' = \\ = Ry''' - RF(y'')^2 - RGy'' - RH. \end{aligned} \tag{3.2.48}$$

Проводя аналогичную процедуру в двух предыдущих доказательствах, получаем систему

$$\begin{cases} R_{y'} = -RF, \\ R_y y' + Q_{y'} = -RG, \\ Q_y y' = -RH. \end{cases} \tag{3.2.49}$$

Решив первое уравнение, получим

$$R(y, y') = \varphi(y)\exp(-Fy'). \tag{3.2.50}$$

Вместе с тем второе уравнение даёт

$$Q_{y'} = \Big[(\varphi F_y (y')^2 - \varphi_y y' - \varphi G\Big] \exp(-Fy'). \tag{3.2.51}$$

Отсюда, проинтегрировав обе части уравнения, получим

$$Q(y, y') = \frac{-\varphi F^2 F_y (y')^2 + (\varphi_y F^2 - 2\varphi F F_y) y' + \varphi F^2 G + \varphi_y F - 2\varphi F_y}{F^3 \exp(Fy')}. \tag{3.2.52}$$

Подставив (3.2.52) и (3.2.50) в последнее уравнение системы (3.2.49), затем умножив обе части на $F^4 \exp(Fy')$, получим уравнение

$$\begin{gathered}\varphi F^3 F_y^2 (y')^4 - \Big[(2\varphi_y F_y + \varphi F_{yy})F - 3\varphi F_y^2\Big] F^2 (y')^3 + \\ + \Big[(\varphi_{yy} - \varphi F_y G)F^2 - (4\varphi_y F_y + 2\varphi F_{yy})F + 6\varphi F_y^2\Big] F (y')^2 + \\ + \Big[(\varphi_y G + \varphi G_y)F^3 + (\varphi_{yy} - \varphi F_y G)F^2 - (4\varphi_y F_y + 2\varphi F_{yy})F + 6\varphi F_y^2\Big] y' + \\ + \varphi F^4 H = 0,\end{gathered} \tag{3.2.53}$$

которое с помощью расщепления по y' распадается до следующей системы

$$\begin{cases} \varphi F^3 F_y^2 = 0, \\ (2\varphi_y F_y + \varphi F_{yy})F - 3\varphi F_y^2 = 0, \\ (\varphi_{yy} - \varphi F_y G)F^2 - (4\varphi_y F_y + 2\varphi F_{yy})F + 6\varphi F_y^2 = 0, \\ (\varphi_y G + \varphi G_y)F^3 + (\varphi_{yy} - \varphi F_y G)F^2 - \\ \qquad -(4\varphi_y F_y + 2\varphi F_{yy})F + 6\varphi F_y^2 = 0, \\ \varphi F^4 H = 0. \end{cases}$$

Отметим, что в силу невырожденности исследуемого вида уравнений (3.2.45) и первого интеграла (3.2.50) с необходимостью имеет место $F(y) \not\equiv 0$ и $\varphi(y) \not\equiv 0$, поэтому из первого и последнего уравнений следуют

$$F(y) = a, \qquad H(y) \equiv 0, \tag{3.2.54}$$

где a – произвольная константа. Отсюда третье уравнение остаётся простым линейным уравнением следующего вида

$$\varphi_{yy} = 0, \tag{3.2.55}$$

решение которого без труда находится:

$$\varphi(y) = by + c, \tag{3.2.56}$$

где b, c – произвольные константы.

Подставив (3.2.54) и (3.2.56) в предпоследнее уравнение системы, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$bG + (by + c)G_y = 0. \tag{3.2.57}$$

Записав его в виде уравнения с разделяющими переменными

$$\frac{G_y}{G} = -\frac{b}{by + c}, \tag{3.2.58}$$

легко получаем его решение:

$$G(y) = \frac{d}{by + c}, \tag{3.2.59}$$

где d – произвольная константа.

Итак, три найденные функции из (3.2.54) и (3.2.59), следуя формуле (3.2.45), дают искомый вид уравнений, представленный в формулировке теоремы – (3.2.3). Теперь остаётся лишь определить вид первого интеграла.

Вернувшись к уравнениям (3.2.50) и (3.2.52) с результатами из (3.2.54), (3.2.56) и (3.2.59), получаем

$$R(y, y') = (by + c)\exp(-ay'), \tag{3.2.60}$$

и

$$Q(y, y') = (aby' + ad + b)a^{-2}\exp(-ay'), \tag{3.2.61}$$

что и даёт окончательный вид первого интеграла

$$P = \left[(by + c)y'' + \frac{aby' + ad + b}{a^2}\right] \exp(-ay'). \tag{3.2.62}$$

Доказательство завершено ■

Теорема 3.2.4 Уравнение

$$y''' = a(y'')^2 - \frac{by''}{a(by + c)} + \frac{d}{(by + c)^4}, \tag{3.2.63}$$

где a, b, c, d – произвольные константы, является единственным уравнением вида (3.2.45), имеющим квадратичный по старшей производной автономный первый интеграл.

Доказательство. Предположим вид квадратичного первого интеграла следующим

$$P = R(y, y')(y'')^2 + Q(y, y')y'' + S(y, y'). \tag{3.2.64}$$

Определяющее уравнение при этом имеет вид

$$\begin{gathered}(2Ry'' + Q)y''' + R_{y'}(y'')^3 + (R_y y' + Q_{y'})(y'')^2 + (Q_y y' + S_{y'})y'' + S_y y' = \\ = (2Ry'' + Q)y''' - 2RF(y'')^3 - (QF + 2RG)(y'')^2 - (QG + 2RH)y'' - QH.\end{gathered} \tag{3.2.65}$$

Тогда с помощью стандартной процедуры получаем систему

$$\begin{cases} R_{y'} = -2RF, \\ R_y y' + Q_{y'} = -QF - 2RG, \\ Q_y y' + S_{y'} = -QG - 2RH, \\ S_y y' = -QH. \end{cases} \tag{3.2.66}$$

Решив первое уравнение, получим

$$R(y, y') = \varphi(y) \exp(-2Fy'), \tag{3.2.67}$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция от y. Отсюда из второго уравнения следует линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно $Q(y, y')$

$$Q_{y'} + QF = \Big[2\varphi F_y (y')^2 - \varphi_y y' - 2\varphi G\Big] \exp(-2Fy'), \qquad (3.2.68)$$

решением которого является

$$\begin{aligned} Q(y, y') = \Big[&-2\varphi F^2 F_y (y')^2 + (\varphi_y F^2 - 4\varphi F F_y) y' + \\ &+ 2\varphi F^2 G + \varphi_y F - 4\varphi F_y + \chi(y) F^3 \exp(Fy')\Big] F^{-3} \exp(-2Fy'), \end{aligned} \qquad (3.2.69)$$

где $\chi(y)$ – произвольная функция от y.

Подставив (3.2.69) в предпоследнее уравнение системы (3.2.66), получим

$$\begin{aligned} S_{y'} = \Big\{ &-4\varphi F^3 F_y^2 (y')^4 + \Big[(2\varphi F_{yy} + 4\varphi_y F_y) F - 10\varphi F_y^2\Big] F^2 (y')^3 + \\ &\Big[\chi F^4 F_y \exp(Fy') + (6\varphi F_y G - \varphi_{yy}) F^3 + (4\varphi F_{yy} + 7\varphi_y F_y) F^2 - \\ &- 16\varphi F F_y^2\Big] (y')^2 + \Big[-\chi_y F^4 \exp(Fy') - (2\varphi G_y + 3\varphi_y G) F^3 + \\ &+ (6\varphi F_y G - \varphi_{yy}) F^2 + (6\varphi_y F_y + 4\varphi F_{yy}) F - 12\varphi F_y^2\Big] y' - \\ &- \Big[\chi G \exp(Fy') + 2\varphi H\Big] F^4 - 2\varphi F^3 G^2 - \\ &- \varphi_y F^2 G + 4\varphi F F_y G \Big\} F^{-4} \exp(-2Fy'). \end{aligned} \qquad (3.2.70)$$

Отсюда путём интегрирования по y' следует

$$S(y,y') = \frac{1}{4}\Bigg\{8\varphi F^4 F_y^2 (y')^4 - 4F^3\Big[(\varphi F_{yy} + 2\varphi_y F_y)F - 9\varphi F_y^2\Big](y')^3 -$$

$$- 2F^2\Big[2\chi F^3 F_y \exp(Fy') + (6\varphi F_y G - \varphi_{yy})F^2 + (7\varphi F_{yy} + 13\varphi_y F_y)F -$$

$$- 43\varphi F_y^2\Big](y')^2 + \Big[4\chi_y F^5 \exp(Fy') + \Big(4\varphi G_y + 6\varphi_y G - 8\chi F_y \exp(Fy')\Big)F^4 -$$

$$- 4(6\varphi F_y G - \varphi_{yy})F^3 - (38\varphi_y F_y + 22\varphi F_{yy})F^2 + 110\varphi F F_y^2\Big]y' +$$

$$+ 4(\varphi H + \chi G \exp(Fy'))F^5 + 4(\chi_y \exp(Fy') + \varphi G^2)F^4 +$$

$$+ (5\varphi_y G - 8\chi F_y \exp(Fy') + 2\varphi G_y)F^3 - 2(10\varphi F_y G - \varphi_{yy})F^2 -$$

$$- (11\varphi F_{yy} + 19\varphi_y F_y)F + 55\varphi F_y^2\Bigg\}F^{-6}\exp(-2Fy') + \omega(y). \quad (3.2.71)$$

Подставив (3.2.71) в последнее уравнение системы (3.2.66), получим уравнение

$$
\begin{gathered}
16\varphi F^5 F_y^3 (y')^6 + \Big[-24(\varphi_y F_y^2 + \varphi F_y F_{yy}) F^5 + 88\varphi F^4 F_y^3\Big] (y')^5 + \\
+ \Big[-4\chi F^6 F_y^2 \exp(Fy') + (12\varphi_y F_{yy} + 12\varphi_{yy} F_y + 4\varphi F_{yyy} - 24\varphi F_y^2 G) F^5 - \\
- (108\varphi F_y F_{yy} + 104\varphi_y F_y^2) F^4 + 280\varphi F^3 F_y^3\Big] (y')^4 + \\
+ \Big[(8\chi_y F^6 F_y + 4\chi F^6 F_{yy} - 12\chi F^5 F_y^2) \exp(Fy') + \\
+ (-2\varphi_{yyy} + 12\varphi F_{yy} G + 24\varphi_y F_y G + 20\varphi F_y G_y) F^5 + \\
+ (40\varphi_y F_{yy} + 38\varphi_{yy} F_y + 14\varphi F_{yyy} - 72\varphi F_y^2 G) F^4 - \\
- (240\varphi_y F_y^2 + 258\varphi F_y F_{yy}) F^3 + 564\varphi F^2 F_y^3\Big] (y')^3 + \\
+ \Big[\Big(4(\chi F_y G - \chi_{yy}) F^6 + 8(2\chi_y F_y + \chi F_{yy}) F^5 - 24\chi F^4 F_y^2\Big) \exp(Fy') + \\
+ 16\varphi F^6 F_y H + (8\varphi F_y G^2 - 6\varphi_{yy} G - 4\varphi G_{yy} - 10\varphi_y G_y) F^5 + \\
+ (36\varphi F_y G_y - 4\varphi_{yyy} + 24\varphi F_{yy} G + 46\varphi_y F_y G) F^4 + \\
+ (54\varphi_{yy} F_y + 22\varphi F_{yyy} + 60\varphi_y F_{yy} - 112\varphi F_y^2 G) F^3 - \\
- (300\varphi_y F_y^2 + 330\varphi F_y F_{yy}) F^2 + 660\varphi F F_y^3\Big] (y')^2 \\
+ \Big[(-4(\chi G_y + \chi_y G) F^6 + 4(\chi F_y G - \chi_{yy}) F^5 + 8(2\chi_y F_y + \chi F_{yy}) F^4 - \\
- 24\chi F^3 F_y^2) \exp(Fy') - 4\omega_y F^7 \exp(2Fy') - 4(2\varphi_y H + \varphi H_y) F^6 - \\
- 4(2\varphi G G_y - 5\varphi F_y H + \varphi_y G^2) F^5 - (5\varphi_{yy} G - 8\varphi F_y G^2 + 7\varphi_y G_y + 2\varphi G_{yy}) F^4 + \\
+ (35\varphi_y F_y G + 26\varphi F_y G_y + 20\varphi F_{yy} G_y - 2\varphi_{yyy}) F^3 + \\
+ (30\varphi_y F_{yy} - 80\varphi F_y^2 G + 11\varphi F_{yyy} + 27\varphi_{yy} F_y) F^2 - \\
- (150\varphi_y F_y^2 + 165\varphi F_y F_{yy}) F + 330\varphi F_y^3\Big] y' - \\
- 4\chi F^7 H \exp(Fy') - 8\varphi F^6 G H - 4\varphi_y F^5 H + 16\varphi F^4 F_y H = 0. \qquad (3.2.72)
\end{gathered}
$$

Если проводить расщепление по y' уравнения (3.2.63), то коэффициент при слагаемом шестой степени y' приводится к уравнению

$$\varphi F^5 F_y^3 = 0. \qquad (3.2.73)$$

В силу невырожденности исследуемого первого интеграла (3.2.64) с необходимостью имеет место $R(y, y') \not\equiv 0$, а, исходя из формулы (3.2.67), получаем $\varphi(y) \not\equiv 0$. Поэтому решением уравнения (3.2.73) является

$$F(y) = a, \tag{3.2.74}$$

где a – произвольная константа.

После подстановки (3.2.74) в (3.2.72), уравнение сильно упрощается, становясь следующим

$$\begin{aligned} &2\varphi_{yyy}a^5(y')^3 + \Big[4\chi_{yy}a^6\exp(ay') + (4G_{yy}\varphi + 6G\varphi_{yy} + 10G_y\varphi_y)a^5 + \\ &+ 4\varphi_{yyy}a^4\Big](y')^2 + \Big\{4\omega_y a^7\exp(2ay') + 4a^5\Big[(\chi G_y + \chi_y G)a + \chi_{yy}\Big]\exp(ay') + \\ &+ 4(\varphi H_y + 2\varphi_y H)a^6 + 4(2\varphi G G_y + \varphi_y G^2)a^5 + (7\varphi_y G_y + 5\varphi_{yy}G + 2\varphi G_{yy})a^4 + \\ &+ 2\varphi_{yyy}a^3\Big\}y' + 4\chi a^7 H\exp(ay') + 4\varphi_y H a^5 + 8\varphi G H a^6 = 0. \end{aligned} \tag{3.2.75}$$

Продолжая процесс расщепления по y' в уравнении (3.2.75), соответственно будут получены уравнения для коэффициентов при $(y')^3$ и $(y')^0$

$$\varphi_{yyy} = 0, \tag{3.2.76}$$

и

$$4\chi a^7 H\exp(ay') + 4\varphi_y H a^5 + 8\varphi G H a^6 = 0. \tag{3.2.77}$$

Откуда находим

$$\varphi(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma, \tag{3.2.78}$$

$$G(y) = -\frac{1}{2a}\frac{\varphi_y}{\varphi}, \tag{3.2.79}$$

$$\chi(y) \equiv 0. \tag{3.2.80}$$

Вместе с тем уравнение для коэффициентов при $(y')^2$ становится

$$\frac{(4\alpha\gamma - \beta^2)(2\alpha y + \beta)}{a(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)^2} = 0, \tag{3.2.81}$$

что следует ограничение для коэффициентов $\varphi(y)$

$$\beta^2 = 4\alpha\gamma, \tag{3.2.82}$$

которое превращает её в полный квадрат, т. е.

$$\varphi(y) = (by + c)^2, \tag{3.2.83}$$

где b, c – произвольные константы. Подстановкой φ в (3.2.79) следует

$$G(y) = -\frac{b}{a(by + c)}. \tag{3.2.84}$$

Оставшиеся две функции $\omega(y)$ и $H(y)$ теперь можно найти из уравнения для коэффициентов при y', которое, после подстановки известных функций $\varphi(y), \chi(y)$ и $G(y)$ из (3.2.83, 3.2.80) и (3.2.84) в уравнение (3.2.75), приобретает следующий вид

$$(by + c)^2 H_y + 4b(by + c)H + \omega_y a \exp(2ay') = 0. \tag{3.2.85}$$

Отсюда следует два дифференциальных уравнения

$$\omega_y = 0, \qquad \frac{H_y}{H} = -\frac{4b}{by + c}, \tag{3.2.86}$$

решения которых соответственно будут

$$\omega(y) \equiv 0, \tag{3.2.87}$$

$$H(y) = \frac{d}{(by + c)^4}, \tag{3.2.88}$$

где d – произвольная константа.

Итак, три найденные функции $F(y), G(y)$ и $H(y)$ из (3.2.74, 3.2.84) и (3.2.88), следуя формуле (3.2.45), дают искомый вид уравнений, представленный в формулировке теоремы – (3.2.63). Теперь остаётся лишь определить вид первого интеграла.

Вернувшись к трём формулам (3.2.67, 3.2.69) и (3.2.71) с известными функциями $F(y)$, $G(y)$ и $H(y)$, а также с возникнувшими в процессе интегрирования функциями $\varphi(y)$, $\chi(y)$ и $\omega(y)$ из (3.2.80, 3.2.83) и (3.2.87), получим

$$R(y, y') = (by + c)^2 \exp(-2ay'), \tag{3.2.89}$$

$$Q(y, y') = \frac{2b}{a}(by + c)y' \exp(-2ay') \tag{3.2.90}$$

и

$$S(y,y') = \left[\frac{b^2}{a^2}(y')^2 + \frac{d}{a(by+c)^2}\right]\exp(-2ay'), \tag{3.2.91}$$

что и даёт окончательный вид первого интеграла

$$P = \left\{\left[(by+c)y'' + \frac{b}{a}y'\right]^2 + \frac{d}{a(by+c)^2}\right\}\exp(-2ay'). \tag{3.2.92}$$

Доказательство завершено ■

Замечание 3.2.1 При распространении полученных результатов для класса уравнений $y''' = F(y, y'')$ на другую симметрию с помощью преобразования (2.1.2) следует учитывать условие сохранения подкласса, при этом необходимым условием для рассмотренного случая является условие на вид произвольного элемента группы эквивалентности (2.1.42).

Замечание 3.2.2 Легко видеть, что алгоритм решения обратной задачи для классов уравнений, содержащих "предстаршую" производную, существенно отличается от метода, использованного в предыдущей главе: если в уравнении имеются только младшие производные, мы в конечном итоге приходим к системе двух уравнений, в которых вспомогательная функция (один из коэффициентов первого интеграла) входит в виде частных производных по разным переменным. Тогда условие совместности приводит к получению уравнения в частных производных для искомой функции – правой части уравнения. В рассматриваемом в настоящей работе случае младшие (в данном случае – первая y') производные отсутствуют, и окончательное уравнение, к которому приводится определяющая система, необходимо расщеплять по y', в результате чего возникает новая система.

Заключение

В диссертационной работе решены все поставленные задачи.

1. Найдены непрерывные точечные группы эквивалентности для всех исследуемых подклассов уравнений 3-го порядка. При этом для подкласса
$$y''' = F(x, y, y')$$
преобразования группы содержат 2 произвольные функции переменной x и одну произвольную константу, а для подклассов
$$y''' = F(x, y) \qquad \text{и} \qquad y''' = F(x, y, y'')$$
– одну произвольную функцию переменной x и 4 произвольные константы.
2. Доказаны теоремы о существовании линейных, квадратичных и кубичных по второй производной автономных первых интегралов для подкласса уравнений
$$y''' = F(y).$$
При этом уравнений, имеющих линейный первый интеграл, не существует вовсе; уравнение, имеющее квадратичный первый интеграл – единственное:
$$y''' = (ay^2 + by + c)^{-5/4};$$
кубичный первый интеграл также имеет единственное уравнение
$$y''' = (ay + b)^{-5/2},$$
это уравнение имеет два независимых первых интеграла – квадратичный и кубичный, поэтому интегрируется посредством одной квадратуры.
3. Доказаны теоремы о существовании линейных, квадратичных и кубичных по второй производной автономных первых интегралов для

подкласса уравнений

$$y''' = F(y, y').$$

Найден явный вид уравнений, имеющих линейный и квадратичный интеграл:

$$y''' = \frac{R''(y')^3 - 2T'y'}{2R}$$

и

$$y''' = R^{-3/2}y'\Phi(u) + \frac{2RR'' - (R')^2}{8R^2}(y')^3 + \frac{R'T - 2RT'}{4R^2}y',$$

соответственно, где $u = R^{-1/2}(y')^2 + \int TR^{-3/2}\,dy$, R и T – произвольные функции переменной y, Φ – произвольная функция переменной u. Доказано, что правая часть $F(y, y')$ уравнений, имеющих кубичный первый интеграл, удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных второго порядка.

4. Доказаны теоремы о существовании линейных и квадратичных по второй производной автономных первых интегралов для подклассов уравнений

$$y''' = F(y, y'')$$

в случае линейной и квадратичной по y'' функции F. Если F линейна, то линейный первый интеграл есть у единственного уравнения

$$y''' = \frac{cy''}{ay + b},$$

квадратичный – у единственного уравнения

$$y''' = \frac{ay''}{by + c} + \frac{d}{(by + c)^{5/2}}.$$

Если F квадратична, то единственным уравнением, имеющим линейный первый интеграл, будет

$$y''' = a(y'')^2 + \frac{d}{by + c}y''.$$

Квадратичный первый интеграл имеет единственное уравнение

$$y''' = a(y'')^2 - \frac{by''}{a(by + c)} + \frac{d}{(by + c)^4}.$$

Следует заметить, что, за исключением классов, содержащих первую производную y', в остальных классах уравнения, имеющие аналог нётеровой симметрии – единственные в своём роде. Действительно, классы пп. 2 и 4 имеют строго фиксированную нелинейность, а весь произвол содержится в преобразованиях сдвига и растяжения. Если их исключить, что группы эквивалентности становятся **дискретными** и имеют структуру циклической группы $\mathfrak{C}_2$. Это подтверждает интуитивное представление о том, что уравнения нечётных порядков, обладающие подобным свойством, встречаются весьма редко.

Полученные результаты представляют интерес не только в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но и в математическом моделировании для описания разнообразных процессов в различных естественнонаучных областях. Найденные уравнения, обладающие аналогом вариационной симметрии, являются весьма перспективными модельными уравнениями – как с точки зрения адекватности модели (соответствия всем фундаментальным законам – законам сохранения и симметрийным требованиям, которые сами по себе являются фундаментальными законами), так и с точки зрения процедуры точного интегрирования.

Эти же уравнения могут служить и хорошими эталонными уравнениями для тестирования систем аналитических вычислений на ЭВМ и численных методов, тем более, что применяемый в настоящей работе регулярный алгоритм легко реализуется в большинстве современных программ (например, в MAPLE).

Список литературы

[1] Абрамова М. Н. Решение обратной задачи группового анализа для одного класса уравнений 4-го порядка / М. Н. Абрамова, В. Ф. Зайцев // Сборник научных трудов.-Орел: ОГТУ.-1996.-Т.8.-С.34–37.

[2] Аврашков П. П. Об одном алгоритме третьего поколения поиска первых интегралов одного класса дифференциальных уравнений / П. П. Аврашков // Сборник научных трудов.-Орел: ОрелГТУ.-1996.-Т.8.-С.50–53.

[3] Аврашков П. П. Структура ОДУ 3-го порядка, обладающих линейным по y'' первым интегралом / П. П. Аврашков // Известия ОрелГТУ. Математика. Механика. Информатика.-Орел.-2000.-№3.-С.5–7.

[4] Аврашков П. П. Лиевские симметрии и первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений / П. П. Аврашков, В. Ф. Зайцев // Сборник научных трудов.-Орел: ОГТУ.-1996.-Т.8.-С.44–49.

[5] Аврашков П. П. О дифференциальных уравнениях 3-го поряд-ка, обладающих лиевскими симметриями и первыми интегралами [электронный ресурс] / П. П. Аврашков, В. Ф. Зайцев // Дифференциальные уравнения и процессы управления.-2003.-№4.-С.1–25.-Режим доступа:
http://www.neva.ru/journal.

[6] Аврашков П. П. Алгоритмы симметрийного анализа обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка / П. П. Аврашков // Диссертация на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук.-Казань.-2004.

[7] Горбузов В. Н. Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах.-Гродно: Гродненский гос. университет им. Янки Купалы.-2005.-273с.

[8] Горбузов В. Н. Построение автономного интегрального базиса системы Якоби–Фурье / В. Н. Горбузов, С. Н. Даранчук // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения».-СПб.-2004.-С.18–24.

[9] Горбузов В. Н., Немец В. С. Алгебраические дифференциальные уравнения с максимальным числом рациональных решений заданной структуры / В. Н. Горбузов, В. С. Немец // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения».-СПб.-2010.-С.21–25.

[10] Денисковец А. А. Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнений высшего порядка / А. А. Денисковец // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения».-СПб.-2005.-С.31–38.

[11] Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров.-М.: Физматлит.-2005.-384с.

[12] Зайцев В. Ф. Построение точной модели, обладающей некоторой точечной симметрией / В. Ф. Зайцев // Математическое моделирование.-1995.-Т.7.-№5.-С.12–14.

[13] Зайцев В. Ф. Математические модели в точных и гуманитарных науках / В. Ф. Зайцев.-СПб.: Книжный дом.-2006.-112с.

[14] Зайцев В. Ф. Дифференциальные уравнения. Структурная теория / В. Ф. Зайцев, Л. В. Линчук.-СПб.: Книжный дом.-2008.-Ч.1.-128с.

[15] Зайцев В. Ф. Дифференциальные уравнения. Структурная теория / В. Ф. Зайцев, Л. В. Линчук.-СПб.: Книжный дом.-2008.-Ч.2.-100с.

[16] Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин.-М.: Наука.-1993.-464с.

[17] Зайцев В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин.-М.: Физматлит.-2001.

[18] Ибрагимов Н. Х. Азбука группового анализа / Н. Х. Ибрагимов // Математика, кибернетика.-М.: Знание.-1989.-№8.-48с.

[19] Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа / Н. Х. Ибрагимов // Математика, кибернетика.-М.: Знание.-1991.-№7.-48с.

[20] Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) / Н. Х. Ибрагимов // УМН.-1992.-Т.47.-вып.4 (286).

[21] Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Х. Н. Ибрагимов.-Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского.-2007.-422с.

[22] Ланкерович М. Я. Об одном классе дифференциально-инвариантных решений / М. Я. Ланкерович // Автореферат диссертации на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук.-Л.: ЛГУ.-1984.-19с.

[23] Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев.-М.: Высшая школа.-1967.-564с.

[24] Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников.-Новосибирск: СО РАН.-1966.-240с.

[25] Овсянников Л. В. Группы преобразований дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников.-М.: Наука.-1978.-400с.

[26] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер.-М.: Мир.-1989.

[27] Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А. М. Переломов.-М.: Наука.-1990.-240с.

[28] Полянин А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики (“Учебная физико-математическая литература”) / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов.-М.: Физматлит.-2005.-448с.

[29] Хоанг Нгы Хуан. Аналоги вариационных симметрий ОДУ третьего порядка / В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан // Известия российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена.-СПб.-2013.-№154.-С.33–41.

[30] Хоанг Нгы Хуан. Аналоги вариационных симметрий уравнений вида $y''' = F(y, y'')$ / В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения».-СПб.-2013.-С.65–69.

[31] Хоанг Нгы Хуан. Аналоги вариационных симметрий уравнений вида $y''' = F(y, y', y'')$ / В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан // Известия российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена.-СПб.-2014.-№163.-С.7–16.

[32] Хоанг Нгы Хуан. Аналог вариационной симметрии ОДУ нечётных порядков [электронный ресурс]/ Хоанг Нгы Хуан // Дифференциальные уравнения и процессы управления.-2013.-№3.-С.117–135.-Режим доступа:
http://www.math.spbu.ru/diffjournal

[33] Хоанг Нгы Хуан. О группах эквивалентности на подклассах уравнений третьего порядка/ Хоанг Нгы Хуан // Препринт НИИ математики ВГУ.-2013.-№45.-9с.

[34] Хоанг Нгы Хуан. Об алгоритмах поиска первых интегралов дифференциальных уравнений/ Хоанг Нгы Хуан // Препринт НИИ мате-

матики ВГУ.-2013.-№46.-11с.

[35] Царев С. П. Гамильтоновость стационарных и обращенных уравнений механики сплошных сред и математической физики / С. П. Царев // Математические заметки.-1989.-Т.46.-№1.-С.105–111.

[36] Bianchi L. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni / L. Bianchi.-Pisa: Spoerri.-1918.

[37] Bluman G. W. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations / G. W. Bluman, S. C. Anco // Applied Mathematical Sciences.-Springer.-2002.-Vol.154.-419p.

[38] Dickson L. E. Differential equations from the group standpoint / L. E. Dickson.-1924.-pp.287–378.

[39] Leach P. G. L. Symmetries of Hamiltonian one-dimensional systems / P. G. L Leach, S. Bouquet, A. Dewisme // Int. J. Non-Linear Mechanics.-1993.-Vol.28.-№6.-P.705–712.

[40] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen / S. Lie, F. Engel.-Leipsig: B. G. Teubner.-Bd.1.-1888; Bd.2.-1890; Bd.3.-1893.

[41] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen / S. Lie // Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers.-Leipzig: B. G. Teubner.-1893.-805p.

[42] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev.-Chapman & Hall.-2003.-ed.2.-814p.

[43] Stephani H. Differential equations. Their solutions using symmetries / H. Stephani.-Cambridge University Press.-1989.-269p.