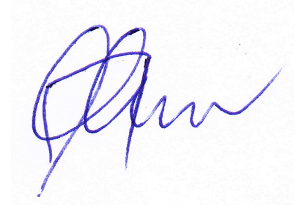


На правах рукописи



Попова Александра Евгеньевна

Диаграммы Юнга в теории макросистем

Специальность 05.13.01 — Системный анализ,
управление и обработка информации (радиотехника, автоматика, связь)

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Дорофеев Дмитрий Львович

Официальные оппоненты: **Агранович Юрий Яковлевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет, кафедра автоматизированных и вычислительных систем, профессор

Буховец Алексей Георгиевич,
доктор технических наук, доцент,
Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, кафедра прикладной математики и математических методов в экономике, профессор

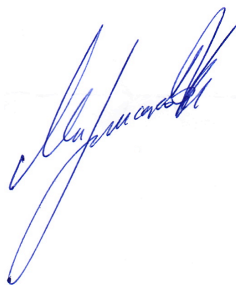
Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва

Защита состоится 25 февраля 2016 г. в 17⁰⁰ на заседании диссертационного совета Д 212.038.10 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, физический факультет, ауд. 428.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета по адресу 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, и на сайте ВУЗа <http://www.vsu.ru>, с авторефератом — также на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ: <http://vak.ed.gov.ru>.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



МАРШАКОВ
Владимир Кириллович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Успехи, достигнутые в статистической физике, показали принципиальную возможность прогнозирования состояний больших систем с недетерминированным поведением элементов, и интерес к стохастическим макроскопическим системам сохраняется уже на протяжении нескольких десятилетий.

Рост общего объёма информации, увеличение пропускной способности каналов связи, разрастание и усложнение телекоммуникационных и транспортных сетей, нарастание интенсивности транспортных и информационных потоков и другие проявления экономического прогресса требуют разработки новых и усовершенствования уже известных методов анализа сложных систем с целью прогнозирования и управления. Активное применение в системном анализе находят методы из других дисциплин. Так как статистическая физика имеет дело с большими совокупностями однотипных частиц со стохастическим поведением, её методы не могли не привлечь внимания исследователей информационных, экономических, социальных и других систем. Многообразие механизмов распределения элементов систем по состояниям потребовало существенного изменения и расширения моделей статистической физики для решения задач системного анализа. Так, понятие энтропии, первоначально разработанное в термодинамике, позже легло в основу теории информации и в настоящее время активно применяется для характеристики числа способов реализации состояний информационных, транспортных, экономических систем.

Колоссальная сложность всех этих видов систем требует учёта как можно большего числа внешних и внутренних факторов, влияющих на состояние системы, анализа всех возможных вариантов поведения совокупности её элементов и нахождения такого из них, который будет реализован с наибольшей вероятностью. Для правильного подсчёта всевозможных распределений элементов системы по состояниям необходимо использование методов комбинаторики.

Подобно тому как графы естественным образом возникают в теории информации (кодовые деревья, модель каналов передачи информации), в теории случайных процессов для описания эволюции состояний технических устройств, а также при моделировании информационных сетей, диаграммы Юнга являются наглядным и изящным способом представления систем с упорядоченным заполнением состояний. Обилие результатов, полученных при исследовании

разбиений и изображающих их диаграмм Юнга в комбинаторике, даёт возможность изучения широкого класса процессов и систем, моделируемых диаграммами Юнга. Диаграммы Юнга служат для описания статистики квантовых систем тождественных частиц, построения моделей распределения частиц по энергетическим уровням. Математический аппарат теории разбиений применяется для исследования роста и плавления кристаллов. Кроме того, широко применяемые в современном системном анализе ранговые распределения (такие, как закон Ципфа) представляют собой не что иное как разбиения, изображаемые диаграммами Юнга. Таким образом, построение математических моделей стохастических макроскопических систем на основе различных комбинаторных объектов является актуальной проблемой современного системного анализа.

Цель работы. Целью работы является исследование статистических свойств системы, состоящей из неразличимых элементов, которые распределяются по различимым состояниям, причём механизм заполнения состояний является упорядоченным (IDA – система, от *англ.* indistinguishable — неразличимый, distinguishable — различимый, arranged — упорядоченный), микросостояния системы равновероятны, а макросостояния определяются как окрестности микросостояний, а также определение равновесных состояний системы в одномерном (IDA₁) и двумерном (IDA₂) случаях.

В рамках поставленной цели решены следующие задачи:

1. Задание микросостояния IDA – системы из n элементов диаграммой Юнга с n клетками. Введение в пространстве микросостояний метрики, позволяющей построить выражения для вероятностей макросостояний системы.
2. Нахождение явных выражений для ёмкости окрестности микросостояния λ одномерной и двумерной IDA – систем в частном случае, когда макросостояния являются единичными окрестностями микросостояний.
3. Нахождение вида диаграммы Юнга, соответствующей равновесному состоянию одномерной IDA – системы, и ёмкости её единичной окрестности для любого числа клеток n .
4. Анализ свойств максимальных диаграмм, к которым относятся равновесные диаграммы, в случае двумерной IDA – системы. Получение явных

выражений для ёмкости окрестности равновесной диаграммы для $n = n_s + T_{s+1} - T_{s-i+1}$, где $n_s = s(s+1)(s+2)/6$ (пирамидальное число), $T_s = s(s+1)/2$ (треугольное число), и двусторонней оценки ёмкости окрестности равновесной диаграммы в общем случае.

Методы исследования. Для достижения цели работы применяются методы комбинаторики, теории вероятностей и статистической физики в рамках макро-системного подхода.

Тематика работы соответствует п. 2 «Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации» и п. 4 «Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации» паспорта специальности 05.13.01 — «Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям)».

Научная новизна

1. Разработана модель макросистемы с неразличимыми элементами и различимыми состояниями. Отличительными чертами модели являются определение макросостояний как окрестностей микросостояний и упорядоченность заполнения состояний элементов, что позволяет применить макросистемный подход к анализу ранговых распределений.
2. Введена новая метрика в пространстве диаграмм Юнга, моделирующих микросостояния IDA – системы. Метрика учитывает изменение заселённости состояний из-за перестановок элементов и позволяет каждому макросостоянию системы сопоставить вероятность, пропорциональную окрестности соответствующей диаграммы Юнга.
3. Разработан метод определения ёмкости окрестности заданного микросостояния, основанный на анализе формы соответствующей диаграммы Юнга и позволяющий найти ёмкость окрестности без непосредственного построения самой окрестности.
4. Проведено исследование макросостояний системы, имеющих наибольшую вероятность (равновесных), отличающееся использованием строгих аналитических методов, что даёт возможность указать равновесные состояния (в двумерном случае — подмножество состояний, к которому

принадлежат равновесные состояния) для системы с произвольным на-
перёд заданным числом элементов.

Достоверность результатов работы. Достоверность и обоснованность ре-
зультатов работы обеспечивается корректным применением общих положений
макросистемного подхода и известных методов теории вероятностей, статисти-
ческой физики и комбинаторики, в частности, математического аппарата диа-
грамм Юнга. Полученные результаты подтверждены посредством моделирова-
ния на ЭВМ и сопоставлялись с результатами других работ по данной тематике.

Практическая и научная значимость результатов работы. Результаты
работы могут быть использованы при анализе систем, характеризуемых ран-
говыми распределениями, в том числе для нахождения стационарных распре-
делений потоков информации в телекоммуникационных сетях, а также для ис-
следования процессов возникновения и разрушения распределений информа-
ционных потоков. Выявленные в ходе работы оболочечные свойства моделей
 IDA_1 – и IDA_2 – систем могут оказаться полезными для понимания механизма
роста кристаллов и атомных кластеров. Также результаты работы могут быть
использованы для моделирования процессов в таких макроскопических систе-
мах, в которых важны связи между ближайшими соседями, например, город-
ская застройка или рост колонии микроорганизмов.

Положения и результаты, выносимые на защиту

1. Для одномерных и двумерных IDA – систем получены выражения для ём-
кости единичной окрестности заданного микросостояния.
2. Для одномерных IDA – систем установлены равновесные состояния для
любого числа элементов.
3. Для двумерных IDA – систем выделено множество, к которому принад-
лежат равновесные диаграммы, и границы, в которых заключена ёмкость
окрестности равновесной диаграммы для заданного числа элементов.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и
обсуждались на следующих конференциях и семинарах: XIV Международная
конференция «Информатика: проблемы, методология, технологии» Воронеж,
Воронежский государственный университет, 6–8 февраля 2014 г.; Междуна-
родная открытая конференция «Современные проблемы анализа динамических

систем. Приложения в технике и технологиях», Воронеж, Воронежская государственная лесотехническая академия, 18–19 июня 2014 г.; XXX Международная научно-практическая конференция «Наука и современность — 2014», Новосибирск, ЦРНС, 18 июня 2014 г.; XXVI Международная заочная научно-практическая конференция «Научная дискуссия: инновации в современном мире», Москва, Международный центр науки и образования, 17 июня 2014 г.; Международная научно-практическая конференция «Научный поиск», Таганрог, Научно-образовательный центр «Взгляд», 15 июня 2014 г.; III Международная научная конференция «Современное общество: проблемы, идеи, инновации», Ставрополь, Центр научного знания «Логос», 16 июня 2014 г.; научные семинары кафедры математической физики физического факультета и кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета.

Публикации. Полученные в диссертации результаты опубликованы автором в 9 работах, среди которых: 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, 5 статей в материалах конференций и 1 авторское свидетельство на программу для ЭВМ.

Личный вклад автора. Автором самостоятельно проводились аналитические и численные расчёты, результаты которых представлены в диссертации. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был существенным. Результаты, составляющие содержание положений, выносимых на защиту, получены автором лично.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации 118 страниц, из них 101 страница основного текста. Диссертация содержит 38 рисунков. Список литературы включает 110 наименований и занимает 13 страниц.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, сформулированы цель работы и решённые в ходе работы задачи, перечислены методы исследования, показаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** дан краткий обзор основных результатов теории макросистем, а также некоторые основные результаты из теории разбиений.

Раздел 1.1 посвящён общим вопросам теории систем. Предметом исследования настоящей работы являются системы, состоящие из большого числа однотипных элементов с недетерминированным поведением, — *стохастические макроскопические системы*.

В **разделе 1.2** изложены общие принципы энтропийного подхода к исследованию макросистем. В работе А. Дж. Вильсона «Энтропийные методы исследования сложных систем» принцип максимизации энтропии был применён к задачам городского и регионального моделирования. Элементы системы и их состояния считались различимыми — случай, аналогичный классической статистике Больцмана в статистической физике. Однако необходимость считать элементы системы *неразличимыми* возникает не только в статистической физике (квантовые статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака), но и в других дисциплинах при моделировании технических, информационных, транспортных и других систем. В монографии Ю. С. Попкова «Теория макросистем (равновесные модели)» были рассмотрены модели макросистем с неразличимыми элементами.

Естественным продолжением данного подхода является учёт всех вариантов различимости элементов макросистемы и их состояний. В **разделе 1.3** рассказывается о четырёх типах моделей макросистем, предложенных в работах Д. Л. Дорофеева, Б. А. Зона и Ю. С. Попкова: DD (элементы и состояния различимы), DI (элементы различимы, состояния неразличимы), ID (элементы неразличимы, состояния различимы), II (и элементы, и состояния неразличимы). D означает различимость (*англ. distinguishable*), I — неразличимость (*англ. indistinguishable*).

Одним из типов макросистем является II – макросистема с неразличимыми элементами и состояниями. Микросостояние такой системы задаётся набором *разбиений* чисел заполнения подмножеств близких состояний элементов. **Раздел 1.4** даёт краткие сведения о разбиениях и диаграммах Юнга, задачах и методах их исследования.

Разбиением называется произвольная (конечная или бесконечная) последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$ целых неотрицательных чисел, расположенных в порядке (нестромого) убывания, содержащая лишь конечное число

ненулевых

членов.

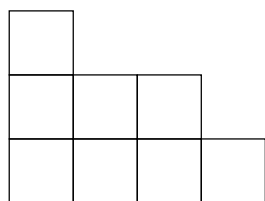


Рис. 1: Диаграмма Юнга для разбиения $\lambda = (4, 3, 1)$.

Одним из способов графического изображения разбиений являются *диаграммы Юнга* (см. рис. 1).

Плоское разбиение есть двумерная таблица чисел, упорядоченных по невозрастанию в столбцах и строках, сумма которых равна n . Плоские разбиения изображаются графически с помощью трёхмерных диаграмм Юнга (см. рис. 4).

Ещё одним фактором, оказывающим влияние на формирование статистических свойств системы, является возникающая во многих системах упорядоченность заполнения состояний.

Глава 2 посвящена рассмотрению модели макросистемы, в которой элементы на микроуровне считаются *неразличимыми*, а их состояния *различимы* и заполняются по упорядоченному механизму, — IDA₁ – системы.

Упорядочение данных с целью исследования системы применяется в методе *ранговых распределений*, о котором кратко рассказано в **разделе 2.1**. В ранговых распределениях численности классов располагаются по убыванию, так что ранговое распределение n элементов представляет собой не что иное как разбиение числа n , а его гистограмма есть диаграмма Юнга.

В **разделе 2.2** рассмотрена предложенная в одной из наших предыдущих работ модель системы с различимыми элементами, в которой состояния заполняются таким образом, что их заселённости следуют в невозрастающем порядке, — DDA – система. *Макросостояние* системы задаётся диаграммой Юнга λ , а число соответствующих ему *микросостояний* равно размерности этой диаграммы $\dim \lambda$. В работе приведено выражение для вероятности макросостояния DDA – системы; для числа элементов $n = 1, \dots, 50$ рассмотрены *равновесные* состояния системы — состояния, имеющие наибольшую вероятность.

В **разделе 2.3** описаны вероятностные характеристики одномерных IDA – систем (IDA₁ – систем). Микросостояния одномерной IDA – системы эквивалентны микросостояниям одномерной системы с неразличимыми элементами и состояниями.

Зафиксируем количество элементов в системе n . Вероятности всех микросостояний считаем одинаковыми и равными $1/p(n)$, где $p(n)$ — количество микросостояний, т. е. разбиений числа n .

В пространстве микросостояний IDA_1 – системы зададим следующую метрику. Будем определять *расстояние* $\rho(\lambda, \lambda')$ между двумя микросостояниями λ и λ' по формуле:

$$\rho(\lambda, \lambda') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g |\lambda_i - \lambda'_i|. \quad (1)$$

В случае, если диаграммы λ и λ' имеют одинаковое количество клеток, расстояние между ними равно наименьшему числу клеток, которые нужно переставить, чтобы получить из диаграммы λ диаграмму λ' , или наоборот. Назовём *окрестностью радиуса k микросостояния λ* множество микросостояний $Q_k(\lambda)$, лежащих от λ на расстоянии, меньшем либо равном k .

Макросостоянием с центром λ и радиусом k будем называть окрестность радиуса k микросостояния λ . В настоящей работе рассмотрена статистика макросостояний с радиусом, равным единице. Единичную окрестность микросостояния $Q_1(\lambda)$ далее будем обозначать $Q(\lambda)$. Единичная окрестность диаграммы λ , таким образом, состоит из самой диаграммы λ и всех диаграмм, которые получаются из λ перестановкой одной клетки. Ёмкость окрестности, т. е. количество диаграмм в окрестности, будем обозначать $N(Q(\lambda))$.

Таким образом, каждой диаграмме Юнга λ с n клетками соответствует макросостояние IDA_1 – системы, вероятность которого $P_{IDA_1}(\lambda)$ определяется по формуле:

$$\mathbb{P}_{IDA_1}(\lambda) = \frac{N(Q(\lambda))}{p(n)}. \quad (2)$$

В **разделе 2.4** предложена модель сети Интернет на основе ранговых распределений. Представим сеть Интернет в виде *графа корреспонденций*, как это было предложено Ю. С. Попковым в одной из публикаций, посвящённых исследованию Интернета как стохастической динамической сети. В графе корреспонденций имеется два типа узлов: потребители информации P_i , под которыми мы будем понимать серверы компаний, обеспечивающих доступ в Интернет, и носители информации Q_j — те серверы, к которым обращаются за информацией потребители.

За микросостояние системы примем ранговое распределение потоков информации (i, j) по интенсивности T_{ij} , то есть упорядочим все состояния по невозрастанию заселённости. Так как на микроуровне нас интересуют только числа заполнения состояний (интенсивности информационных потоков), эле-

менты системы, естественно, являются неразличимыми, а состояния — различимыми.

Поскольку пользователи время от времени переключаются между различными информационными ресурсами, ранговые распределения, вообще говоря, будут быстро меняться. Поэтому за макросостояние системы естественно принять не одно распределение, а совокупность распределений, получающихся из исходного перестановкой не более чем k элементов. Тем самым мы приходим к определению макросостояния как окрестности микросостояния в таком смысле, в каком она понимается для IDA_1 – систем. При отсутствии априорной информации о вероятностях реализации микросостояний будем считать микросостояния равновероятными. Это означает, что вероятность макросостояния системы с центром, изображаемым разбиением λ , пропорциональна ёмкости окрестности λ , то есть получаем макросистему типа IDA_1 . Наиболее вероятным в такой модели будет макросостояние, имеющее своим центром диаграмму с наибольшей ёмкостью окрестности.

В разделе 2.5 получено выражение для ёмкости единичной окрестности диаграммы λ :

$$N(Q(\lambda)) = q(q + 1) - \sum_{i=1}^q p_i + 1. \quad (3)$$

Здесь q — число выступов в диаграмме, $q + 1$ — число гнёзд (диаграмма, изображённая на рис. 1, имеет 3 выступа и 4 гнезда); p_i — *вычет*, величина, характеризующая выступ и равная числу гнёзд, которые прилежат к его вершинной клетке. Пользуясь выражением (3), можно вычислить ёмкости единичных окрестностей всех разбиений для любого заданного числа.

Раздел 2.6 посвящён исследованию диаграмм с наибольшей ёмкостью окрестности — *равновесных*. Установлены закономерности, позволяющие получить все равновесные диаграммы для заданного числа клеток. Изменение количества равновесных диаграмм с ростом n показано на графике 2.

Для ёмкости единичной окрестности равновесной диаграммы с n клетками получено следующее выражение:

$$N_{max}(n) = s(s - 1) + 1 + \Delta N, \quad (4)$$

$$s = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n + 1} - 1}{2} \right\rfloor, \quad \Delta N = \lfloor \sqrt{4\Delta n + 1} - 1 \rfloor, \quad \Delta n = n - T_s. \quad (5)$$

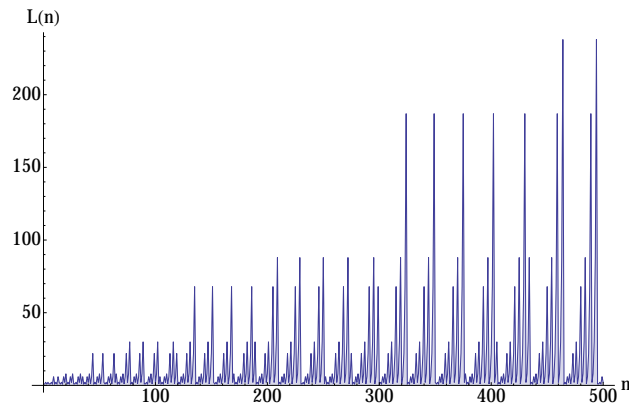


Рис. 2: Количества равновесных диаграмм L для числа клеток $n = 1 \dots 500$

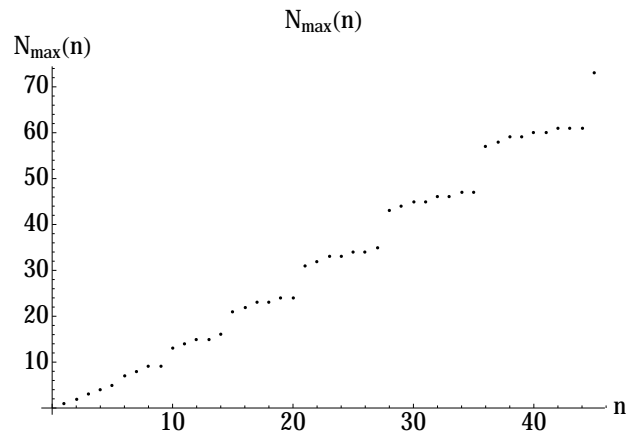


Рис. 3: Изменение ёмкости окрестности равновесного разбиения с ростом n .

Числа $T_s = 1 + 2 + \dots + s = s(s + 1)/2$ известны как *треугольные*. В формуле 4 s — номер ближайшего снизу к n треугольного числа, ΔN — число длинных выступов в диаграмме. График изменения ёмкости окрестности равновесного состояния с увеличением числа клеток представлен рисунке 3. Хорошо заметны скачки ёмкости окрестности каждый раз, когда n принимает значения T_s . Эта черта роднит рассмотренную модель с такими оболочечными моделями, как модель электронных оболочек атома, оболочечная модель атомного ядра и процесс роста атомных кластеров.

В разделе 2.7 приведены доказательства основных теорем главы 2.

Глава 3 посвящена рассмотрению статистики IDA в двух измерениях. В разделе 3.1 даётся общее описание модели IDA₂–системы, которая является расширением IDA₁–систем на случай двух измерений. Микросостоянию системы соответствует плоское разбиение числа элементов n .

При фиксированном числе элементов расстояние между микросостояниями λ и λ' определяется аналогично случаю IDA₁ как наименьшее количество

клеток, которые нужно переставить в λ , чтобы получить λ' , и наоборот. Определив понятия окрестности и единичной окрестности диаграммы λ аналогично случаю двумерных диаграмм Юнга, мы можем сопоставить каждому плоскому разбиению λ следующую вероятность: $\mathbb{P}_{IDA_2}(\lambda) = \frac{N(Q(\lambda))}{\pi(n)}$, где $N(Q(\lambda))$ — ёмкость единичной окрестности λ , $\pi(n)$ — число плоских разбиений n . Единичную окрестность трёхмерной диаграммы Юнга λ составляют диаграммы, которые получаются из λ перестановкой одной клетки. В этом же разделе даются формальные определения выступа и гнезда трёхмерной диаграммы Юнга. На рисунке 4 изображена диаграмма с двенадцатью выступами и семнадцатью гнёздами. Доказано, что для числа выступов m и гнёзд k в любой трёхмерной диаграмме Юнга справедливо следующее соотношение: $k \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3$.

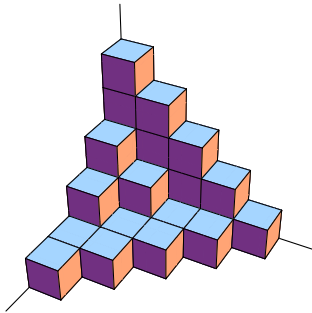


Рис. 4: Пример трёхмерной диаграммы Юнга. Равновесная диаграмма с числом клеток $n_{4,2}$.

В разделе 3.2 даётся выражение для ёмкости единичной окрестности трёхмерной диаграммы Юнга. Оно имеет вид, аналогичный (3):

$$N(Q(\lambda)) = mk - \sum_{i=1}^m p_i + 1. \quad (6)$$

Здесь m — число выступов, k — число гнёзд, p_i — вычет выступа, определяемый как число гнёзд, прилежащих к его вершинной клетке. Выражение (6) позволяет вычислить ёмкость единичной окрестности заданного плоского разбиения, не прибегая к построению самой окрестности.

В разделе 3.3 анализируются свойства равновесных диаграмм, определяется понятие максимальной диаграммы, даётся выражение для ёмкости окрестности равновесной диаграммы для $n = n_{si} = n_s + T_{s+1} - T_{s-i+1}$, где $n_s = T_1 + T_2 + \dots + T_s = s(s+1)(s+2)/6$ — пирамидальное число. *Максимальной* будем называть диаграмму, имеющую наибольшее число выступов и наибольшее число гнёзд при данном числе клеток. В работе доказывается, что равновесная диаграмма максимальна. При $n = n_{si}$ равновесные (и максимальные) диаграммы имеют вид, показанный на рис. 4. Пользуясь (6), можно получить следующие выражения для ёмкостей окрестностей равновес-

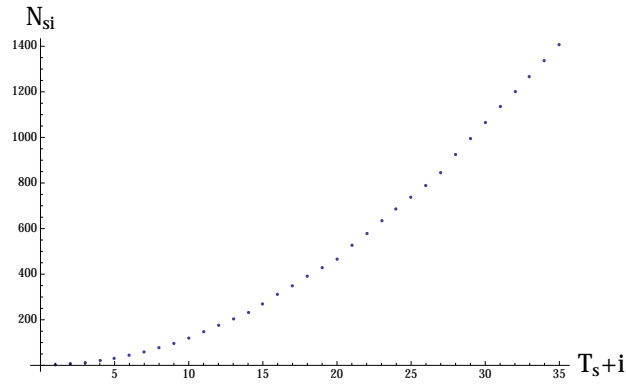


Рис. 5: Ёмкости окрестностей равновесных диаграмм $\lambda_{00}^{(si)}$ от $\lambda^{(1)}$ до $\lambda_{00}^{(7,7)}$.

ных диаграмм N_{si} при $n = n_{si}$:

$$N_{si} = (T_s + i)(T_{s+1} + i) - 3(T_{s-i} + T_{i-1}) - 2i(s - i + 2) + 1 \quad (i \leq 3);$$

$$N_{si} = (T_s + i)(T_{s+1} + i) - 3(T_{s-i} + T_{s+1} - T_{s-i+4} + 3) - 6(s - i + 2) + 1 \quad (i > 3).$$

График ёмкостей окрестностей равновесных диаграмм $\lambda_{00}^{(si)}$ с числом клеток n_{si} от $\lambda^{(1)}$ до $\lambda_{00}^{(7,7)}$ представлен на рис. 5.

Хотя в рамках данной работы не был найден способ указания всех равновесных диаграмм для любого заданного числа клеток n , доказано, что при $n = n_{si} + j$, $n_{si} < n < n_{s,i+1}$, справедлива следующая двусторонняя оценка ёмкости окрестности равновесной диаграммы $N(Q(\lambda_{j0}^{(si)}))$:

$$N_{si} < N(Q(\lambda_{j0}^{(si)})) < N_{s,i+1}. \quad (7)$$

Раздел 3.4 содержит доказательства основных теорем главы 3.

В **Заключении** подведены итоги работы, сделаны общие выводы и сформулированы основные результаты.

Основные результаты работы

1. Предложены модели макроскопических систем с неразличимыми элементами, упорядоченным образом распределяемыми по различным состояниям (IDA – системы). Микросостояние IDA – системы однозначно задаётся диаграммой Юнга, а макросостояния представляют собой окрестности микросостояний. Построены модели макроскопических систем для единичных окрестностей.
2. Предложена модель сети Интернет на основе ранговых распределений.

Показано, что её вероятностные свойства описываются моделью одномерной IDA – системы, а динамика может описываться моделью двумерной IDA – системы.

3. Получены явные выражения для ёмкостей единичных окрестностей микросостояний одномерных и двумерных IDA – систем.
4. Для одномерной IDA – системы разработан алгоритм, позволяющий построить все равновесные диаграммы с заданным числом клеток. Получено явное выражение для ёмкости окрестности равновесной диаграммы с произвольным числом клеток. В одномерной IDA – системе выделены оболочки, при заполнении которых наблюдается скачок ёмкости окрестности равновесной диаграммы.
5. Для двумерных IDA – систем найдено множество максимальных диаграмм, к которому принадлежат все равновесные диаграммы. Установлены общие свойства равновесных диаграмм. Получены выражения для ёмкостей окрестностей равновесных диаграмм в случае, когда число клеток принимает значения $n = n_{si} = n_s + T_{s+1} - T_{s-i+1}$. Для остальных значений n найдены границы, в которых заключена ёмкость окрестности равновесной диаграммы.

Основные публикации по теме диссертации

- [1] Дорофеев, Д. Л. Парамакросистемы с упорядоченным заполнением состояний. Часть I / Д. Л. Дорофеев, А. Е. Попова // Труды ИСА РАН. — 2013. — Т. 63, № 4. — С. 16–24.
- [2] Дорофеев, Д. Л. Парамакросистемы с упорядоченным заполнением состояний. Часть II: трёхмерные системы / Д. Л. Дорофеев, С. В. Елфимов, А. Е. Попова // Труды ИСА РАН. — 2014. — Т. 64, № 1. — С. 3–8.
- [3] Dorofeev, D. L. Paramacrosystems with arrangement. / D. L. Dorofeev, A. E. Popova, S. V. Elfimov // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering. — 2013. — Vol. 13. — P. 501–516.

- [4] Дорофеев, Д. Л. IDA-макросистемы. Вероятности состояний, равновесные состояния / Д. Л. Дорофеев, А. Е. Попова // Актуальные направления научных исследований XXI века. Теория и практика. — Т. 2. — Воронеж: Воронежская государственная лесотехническая академия, 2014. — С. 192 – 195.
- [5] Попова, А. Е. Новые вероятностные меры на двумерных и трёхмерных диаграммах Юнга / А. Е. Попова // Наука и современность —2014: сборник материалов XXX Международной научно-практической конференции / Под ред. Чернова С. С. — Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2014. — С. 171 – 176.
- [6] Попова, А. Е. Диаграммы Юнга: новая вероятностная мера. Свойства равновесных диаграмм / А. Е. Попова // Научная дискуссия: инновации в современном мире: сборник статей по материалам XXVI международной заочной научно-практической конференции. — Т. 26. — Москва: Изд. «Международный центр науки и образования», 2014. — С. 5 – 9.
- [7] Попова, А. Е. Макросистемы с упорядочением / А. Е. Попова // Научный поиск: Материалы I Международной научно-практической конференции (15 июня 2014 г.) / Под ред. Мамченко Ю. В. — Москва: Изд. «Перо», 2014. — С. 7 – 10.
- [8] Попова, А. Е. Диаграммы Юнга: метрика, равновесные и максимальные диаграммы / А. Е. Попова // Современное общество: проблемы, идеи, инновации: материалы III Международной научной конференции. Часть 1. — Ставрополь: Центр научного знания «Логос», 2014. — С. 104 – 108.
- [9] Свид. 2013612658 Рос. Федерация. Программа для расчёта единичной окрестности двумерной диаграммы Юнга (PartitionNeighbourhood) / Д. Л. Дорофеев, А. Е. Попова; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет». — Заявл. 22.01.2013, заявка № 2013610566; зарегистрировано 11.03.2013, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

Работы [1–3] опубликованы в периодических изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций.