ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ПАРШИН МАКСИМ ИГОРЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Орлов В.П.

Воронеж 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ω	— ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с локально–липшицевой границей $\partial\Omega$.
$L_p(\Omega)$	— множество всех измеримых функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} |v(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^l(\Omega)$	— пространство Соболева, состоящее из функций, принадлежащих $L_p(\Omega)$ вместе со всеми своими обобщенными производными порядка не выше чем l.
$L_p(0, T; X)$	— множество всех измеримых функций $v : [0, T] \to X$, принимающих значение в банаховом пространстве X, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|v(x)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} \|v(x)\|_X, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^{k,m}(0, T; X)$	— пространство Соболева, состоящее из функций $v : [0, T] \to X$, которые принадлежат $L_p(0, T; X)$ вместе со всеми своими обобщенными производными порядка m по x включительно и порядка k по t включительно при $(t, x) \in X$.
$W_2^{m,k}(Q_T)$	$= W_2^k(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^m(\Omega))$.
$H_p^\beta(\Omega)$	— пространства Бесселевых потенциалов.
$\mathfrak{D}(\Omega)^n$	— пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω.
$\mathcal{V}$	$= \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)^n$.
H	— замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$.

V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ с нормой

$$\|v\|_V = \Big(\int_\Omega \nabla v : \nabla v\, dx\Big)^{1/2}.$$

X — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$ с нормой

$$\|v\|_X = \Big(\int_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\Delta v\, dx\Big)^{1/2}.$$

$A : B$ $= \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$, где $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$. Символ обозначает покомпонентное умножение матриц.

E' — пространство сопряженное к пространству E.

$\langle f, v\rangle$ — значение функционала $f \in E'$ на элементе $v \in E$.

Div A $= (\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{1j}(t,x)}{\partial x_j}, \ldots, \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{nj}(t,x)}{\partial x_j})$ — дивергенция тензора A.

σ $= (\sigma_{ij})$ – девиатор тензора напряжений.

$\mathcal{E}(v)$ $= (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ — тензор скоростей деформации.

(u, w) $= \int_\Omega u(x)w(x)dx$ для скалярных, векторнозначных или матричнозначных функций.

$C_w(0, T; E)$ — пространство слабо непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве E.

$\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $W_p^m(\Omega)$ $(m > 0)$.

$\mathcal{P}$ – оператор ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на H.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение движения жидкости является источником большого числа задач в математике. Решение этих задач явилось побудительным мотивом для создания как новых, так и совершенствования классических математических методов.

В течение последних полутора столетий в основном изучались различные начально-краевые и краевые задачи для классических систем уравнений гидродинамики — системы уравнений Эйлера для идеальной жидкости и системы уравнений Навье—Стокса для ньютоновской жидкости. Последние исследовались многими авторами (см., например, О.А. Ладыженская [33], Р. Темам [20], Ж. Лере [49], Ж. Л. Лионс [39]).

В последние годы было замечено, что многие реальные среды, такие как различные полимерные растворы, суспензии, кровь, битумы, земная кора, бетон и другие по многим признакам близки к жидкостям, однако не описываются моделями ньютоновской гидродинамикой. Такие модели получили название "неньютоновские". Подобные модели были предложены Дж. Максвеллом [3], Кельвином [4], Фойгтом [5], а развиты в значителной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройда [6]. Вообще многочисленные примеры моделей неньютоновских жидкостей приведены в [1] и [2].

Система уравнений, описывающая движение вязкой несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ= const в ограниченной области на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, в форме Коши имеет вид (см., например, [38]):

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \text{grad } p = \text{Div } \sigma + \rho f, \ (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \tag{0.1}$$

$$\text{div } v = 0, \ (t, x) \in [0, T] \times \Omega. \tag{0.2}$$

Здесь $v = (v_1, ..., v_n)$ – скорость, p – давление жидкости, f – плотность внешних сил, $\sigma = \sigma(t, x)$ - девиатор тензора напряжений. Отметим, что вышеперечисленные параметры зависят от точки пространства x и момента времени t.

Далее дивергенция $\operatorname{div} v = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, а дивергенция Div σ тензора σ определяется как вектор с координатами $(\mathrm{Div}\ \sigma)_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$.

Система (0.1)–(0.2) описывает течение всех видов несжимаемой жидкости с постоянной плотностью, но при этом содержит девиатор тензора напряжений, который явно не выражен через неизвестные v и p. Для того, чтобы выразить девиатор тензора напряжений через неизвестные системы, эту систему дополняют реологическим соотношением, связывающим девиатор тензора напряжений и тензор скоростей деформации $\mathcal{E}(u) = (\mathcal{E}_{ij}(u))$, $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$.

Таким образом тип рассматриваемой жидкости определяется соотношением между σ и $\mathcal{E}$.

Примером реологического соотношения является

$$\sigma = -pI + 2\mu\mathcal{E}. \tag{0.3}$$

Здесь $p(t,x)$ — скалярная функция давления, коэффициент μ – вязкость. При $\mu > 0$ соотношение (0.3) определяет ньютоновскую жидкость, и, подставляя (0.3) в (0.1), можно получить уравнение Навье-Стокса. При $\mu = 0$ соотношение (0.3) задает идеальную жидкость, и, подставляя (0.3) в (0.1), можно получить уравнение Эйлера.

Таким образом реологическое соотношение связывает тензор напряжений с динамическими характеристиками сплошной среды.

Нас будет интересовать несжимаемая жидкость, обладающая вязкими и упругими свойствами. Простейшей моделью динамики вязкой несжимаемой жидкости является система (0.1)–(0.2).

Обобщением этой модели является модель с реологическим соотношением

$$(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t})\sigma = 2\mu(1 + \kappa\mu^{-1}\frac{\partial}{\partial t})\mathcal{E}, \tag{0.4}$$

связанная с именем Олдройда и имеющая вид (см. [6], [7])

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mu_0 \triangle v - \\ -\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T, \mu_1, \mu_2 > 0;\end{gathered} \tag{0.5}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0; \tag{0.6}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{0.7}$$

Скорости течения в этой жидкости после мгновенного снятия напряжений затухают, как $\exp(-\kappa^{-1}t)$, а напряжения после мгновенного прекращения движения затухают, как $\exp(-\lambda^{-1}t)$.

Нелокальная сильная разрешимость для модели Олдройда ($v \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p \in W_2^{0,1}(Q_T)$) установлена в [9]. Для более общей модели с нелинейной вязкостью аналогичный результат установлен в [11].

Во многих реальных течениях жидкости необходимо учитывать как механические, так и явления, связанные с процессом теплопередачи. Это, в частности, отражается в зависимости коэффициентов реологического соотношения от температуры. Изменение температуры приводит к необходимости применять термодинамические соображения, например учитывать баланс энергии.

В данной диссертации нас будут интересовать сплошные среды, динамика которых зависит от явления теплопередачи. Таким образом главным является вопрос изучения не отдельного уравнения Навье-Стокса, а связанной системы, так называемой термовязкоупругости, где вторым уравнением выступает уравнение следствия баланса энергии. Рассмотрение данной системы с переменными коэффициентами вязкости и теплопроводности соответственно приводят к значительным трудностям. Важным является установление разрешимости данных систем.

Исследованию моделей термовязкоупругих сред посвящена обширная литература (см. напр. [14], [15], [16], [17], [18] и имеющуюся там библиографию).

Следствие уравнения баланса энергии имеет вид (см. [8], с.12))

$$\partial\theta/\partial t + v_i\partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \tag{0.8}$$

$$\mu_2\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T;$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.9}$$

Соответствующая модель термовязкоупругой среды типа Олдройда имеет вид (0.10)-(0.14) и получается путем добавления к (0.5)-(0.7) следствия уравнения баланса энергии (0.8)-(0.9)

$$\partial v/\partial t + v_i\partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0\triangle v -$$

$$-\mu_2 \textstyle\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{0.10}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{0.11}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{0.12}$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i\partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) +$$

$$\mu_2 \textstyle\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T; \tag{0.13}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.14}$$

Следующим обобщением системы (0.1)–(0.2) является модель динамики вязкой несжимаемой жидкости с памятью. Эта система возникает при использовании реологического соотношения

$$(1 + \lambda\frac{d}{dt})\sigma = 2\mu(1 + \kappa\mu^{-1}\frac{d}{dt})\mathcal{E}, \tag{0.15}$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ – субстанциональная производная.

Уравнение (0.15) допускает решение вдоль траектории поля скоростей v. При этом траектории определяются как решение задачи Коши

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad \tau,t\in[0,T],\quad x\in\Omega.$$

Решая уравнение (0.15) относительно σ вдоль траекторий и подставляя σ в уравнение движения (0.1)–(0.2) получаем систему

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mu_0\triangle v-\\ -\mu_2\textstyle\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))]ds+\nabla p=f,\quad \mathrm{div}\,v=0 \text{ на } Q_T,\mu_1,\mu_2>0;\end{gathered}\tag{0.16}$$

$$\mathrm{div}\,v=0;\tag{0.17}$$

$$v|_{t=0}=v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega}=0\ \ ;\tag{0.18}$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad \tau,t\in[0,T],\quad x\in\Omega.\tag{0.19}$$

Система (0.16)-(0.19) описывает динамику вязкоупругой сплошной среды, которая помнит напряжения вдоль траектории движения частицы среды (функция $z(\tau;t,x)$).

При изучении слабых решений уравнений динамики жидкости предполагается, что $v\in L_2(0,T;V)$.

Для нелокальной разрешимости приходится заменять уравнение (0.19) на регуляризованное уравнение

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau \hat{v}(s,z(s;t,x))\,ds,\quad \tau,t\in[0,T],\quad x\in\Omega,\tag{0.20}$$

где $\hat{v}$ - некоторая регуляризация поля скоростей v. Введение оператора $\hat{v}$, регуляризующего поле скоростей, объясняется тем фактом, что поле скоростей v, определяемое как слабое или сильное обобщенное решение задачи в классах функций, суммируемых с квадратом вместе с производными, не позволяет восстановить траектории z движения частиц, или же траектории не обладают свойствами регулярности, необходимыми для корректности модели (см.[30]).

Вязкоупругая среда с памятью в многомерном случае изучалось в [28], [29], где была установлена локальная и нелокальная при малых данных теорема существования и единственности сильных решений в $L_q(Q)$ при $q > n$.

Зависимость коэффициента вязкости μ от температуры θ как и для системы (0.5)-(0.7) приводит к появлению следующей системы

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v - \tag{0.21}$$

$$-\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\, ds + \nabla p = f,\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T;$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{0.22}$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi \triangle \theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \tag{0.23}$$

$$\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\, ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T;$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.24}$$

Таким образом, система (0.21)-(0.24), (0.20) описывает динамику термовязкоупругой среды с памятью Олдройдовского типа.

Термовязкоупругая среда с памятью в одномерном случае изучалось в [26], [27], где была установлена локальная теорема существования и единственности и нелокальная при малых данных.

В работе [31] для регуляризованной модели была установлена нелокальная ($n = 2$) и локальная ($n = 3$) теорема существования и единственности сильных решений с помощью аппроксимационно-топологического метода. В [32] другим методом тот же результат был установлен для более общей модели с нелинейной вязкостью μ_1.

В работах [15], [35] рассматривается модель вязкой жидкости, в которой учитываются явления теплопроводности, а коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры. Эта система называется системой Навье-Стокса-Фурье и имеет вид

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mathrm{Div}[\mu(\theta)\mathcal{E}(v)]+\nabla p=f,\\ \operatorname{div} v=0 \text{ на } Q_T=[0,T]\times\Omega;\end{gathered} \tag{0.25}$$

$$\begin{gathered}\partial\theta/\partial t+v_i\partial\theta/\partial x_i-\mathrm{Div}[k(\theta)\nabla\theta]=\\ =\mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2+g \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{0.26}$$

$$v|_{t=0}=v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{0.27}$$

$$\theta|_{t=0}=\theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.28}$$

Система (0.25)-(0.28) характерна наличием переменных коэффициентов вязкости μ и теплопроводности k.

В [15] установлена нелокальная сильная разрешимость системы Навье-Стокса-Фурье при некоторых условиях малости на коэффициенты уравнений.

Нашей целью является обобщение результатов [15], [35] на случай вязкоупругой жидкости. Именно, далее мы рассмотрим систему

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mathrm{Div}[\mu(\theta)\mathcal{E}(v)]+\nabla p=\\ =f+\mu_0\mathrm{Div}\int_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds, \operatorname{div} v=0 \text{ на } Q_T=[0,T]\times\Omega;\end{gathered} \tag{0.29}$$

$$\begin{gathered}\partial\theta/\partial t+v_i\partial\theta/\partial x_i-\mathrm{Div}[k(\theta)\nabla\theta]=\mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2+\\ +\mu_0\mathcal{E}(v):\int_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds+g \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{0.30}$$

$$v|_{t=0}=v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{0.31}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.32}$$

В этой системе реологическое соотношение, соответствующее вязкой жидкости, заменено на реологическое соотношение Олдройдовского типа, которое соответствует вязкоупругой жидкости. Такую систему мы будем называть системой Навье-Стокса-Фурье-Олдройда.

Перейдем к изложению результатов, полученных в диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав и списка литературы, включающего 70 источников. Общий объем диссертации 103 страницы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, определяется цель работы, обсуждается историография вопроса, излагается краткое содержание диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней приводятся необходимые сведения из теории задач гидродинамики, использующиеся в дальнейших наших рассмотрениях.

Во второй главе, состоящей из 5 пунктов, исследуется разрешимость в слабом смысле начально-граничной задачи в модели динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда.

В п. 2.1 производится постановка задачи и формулируется основной результат главы.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$.

В $Q_T = [0,T] \times \Omega$ рассматривается следующая начально-граничная задача

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v - \\ -\mu_2 \textstyle\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{0.33}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{0.34}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{0.35}$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i\partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\,\theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) +$$

$$+\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T; \tag{0.36}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.37}$$

Введем следующие функциональные пространства

$$U(0,T) \equiv L_2(0,T;V) \cap W_1^1(0,T;V^{'}) \cap C_w(0,T;H),$$

$$\Upsilon \equiv L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \cap W_1^1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)) \cap C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)),$$

$$1 < p < +\infty.$$

Определение 0.1. *Слабым решением задачи (0.33)-(0.37) называется пара* (v,θ), *где*

$$v \in U(0,T), \tag{0.38}$$

$$\theta \in \Upsilon, \tag{0.39}$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\tfrac{d}{dt}(v,\varphi) - (v_i v, \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \mu_1(\theta)(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) +$$

$$+\mu_2(\textstyle\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f, \varphi\rangle \tag{0.40}$$

при всех $\varphi \in V$ *в смысле распределений на [0,T] при п.в.* t,

$$\tfrac{d}{dt}(\theta,\phi) - (v_i\theta, \tfrac{\partial\phi}{\partial x_i}) + \chi(\tfrac{\partial\theta}{\partial x_i}, \tfrac{\partial\phi}{\partial x_i}) =$$

$$\langle g,\phi\rangle + (\tilde{\mu}_1(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi) + \mu_2(\textstyle\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x) : \mathcal{E}(v)(t,x))\,ds, \phi), \tag{0.41}$$

где $\tilde{\mu}_1(\theta) = \mu_0 + \mu_1(\theta)$, *в смысле распределений на* $[0,T]$ *для любых* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *при п.в.* t, *и условиям (0.35) и (0.37).*

Знак $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в (0.40) и (0.41) означает двойственность между V' и V и между $W_p^{-1}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ соответственно.

Теорема 0.1. *Пусть функция $\mu_1(s) \in C^2(-\infty,+\infty)$, монотонно возрастает и*

$$0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**},\ s \in (-\infty,+\infty), \tag{0.42}$$

$f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega))$. *Тогда при $1 < p < 4/3$ существует по крайней мере одно слабое решение задачи (0.33)-(0.37).*

Отметим, что при исследовании слабой разрешимости задачи в правой части появляются слагаемые из $L_1(Q_T)$, что вызывает существенные трудности (см. напр. [13] и имеющуюся там библиографию).

В п. 2.2 рассматриваются вспомогательные задачи, доказывается их разрешимость для модели динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда. Эти задачи рассматриваются в операторной трактовке. П. 2.3 посвящен построению аппроксимирующих задач для модели динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда (0.33)-(0.37). Подходящие априорные оценки

$$\|v\|_{U(0,T)} =: \|\partial v/\partial t\|_{L_2(0,T;V'(\Omega))} + \|v\|_{0,1} + \sup_{0\le t\le T} |v(t,x)|_0 \le \tag{0.43}$$

$$M_1(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0).$$

$$\|\theta\|_\Upsilon =: \|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} + \|\theta\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))} +$$

$$+\sup\nolimits_{0\le t\le T} \|\theta(t,x)\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)} \le M_2(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \tag{0.44}$$

$$\|\hat g\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|v\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)})$$

дают сходимость последовательных приближений на достаточно малом временном промежутке в п. 2.4. П. 2.5 завершает доказательство основной теоремы 2.1.

Третья глава посвящена исследованию динамики термовязкоупругой среды с памятью, которая учитывает предыдущее состояние среды, вдоль траектории поля скоростей. В этом смысле мы говорим, что система уравнений термовязкоупругости обладает свойством памяти. Доказывается слабая нелокальная разрешимость. Для этого приходится дополнительно исследовать задачу Коши для системы ОДУ, порожденную полем скоростей v.

В п. 3.1 производится постановка задачи и формулируется основной результат главы 3 в виде теоремы. Получен результат.

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v - \\ -\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\,ds + \nabla p = f,\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{0.45}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{0.46}$$

$$\begin{gathered}\partial \theta/\partial t + v_i \partial \theta/\partial x_i - \chi \triangle \theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \\ \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\,ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{0.47}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.48}$$

Траектории движения частиц жидкости x определяются как решение задачи Коши в интегральной форме

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))\,ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega. \tag{0.49}$$

Однако, для случая, когда v соответствует слабому решению системы уравнений вязкоупругости, то есть $v \in L_2(0,T;V)$, неясна разрешимость этой задачи.

Поэтому из-за отсутствия достаточной гладкости поле скоростей v необходимо заменить на более гладкое, то есть произвети сглаживание (регуляризацию) поля v с помощью гладкого поля $\hat{v}$.

Для этого, как уже было отмечено выше, необходимо заменить уравнение (0.49) на регуляризованое уравнение

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \hat{v}(s, z(s; t, x))\, ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \tag{0.50}$$

где $\hat{v}$ - некоторая регуляризация поля скоростей v (см. страницу 47).

При выводе системы (0.45)-(0.48), (0.50) предполагалось, что тензор напряжений среды является линейной комбинацией тензора скоростей деформации и памяти $\mu_2 \int_0^t \mathcal{E}(s, z(s; t, x))\, ds$, а внутренняя энергия линейно зависит от температуры.

Система (0.45)-(0.48), (0.50) описывает динамику вязкоупругой сплошной среды, которая помнит напряжения вдоль траектории движения частицы среды (функция $z(\tau; t, x)$).

Для этой системы получена слабая разрешимость для нелокального случая в двумерном пространстве.

Введем следующие функциональные пространства

$$U'(0, T) \equiv L_2(0, T; V) \cap W_2^1(0, T; V^{'}) \cap C_w(0, T; H),$$

$$\Upsilon' \equiv L_1(0, T; W_p^1(\Omega)) \cap W_1^1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)) \cap C_w(0, T; W_p^{1-2/p}(\Omega)),$$

$$1 < p < +\infty.$$

Определение 0.2. *Слабым решением задачи (0.45)-(0.48) называется пара (v, θ), где*

$$v \in U'(0, T), \tag{0.51}$$

$$\begin{gathered} \theta \in \Upsilon', \\ 1 < p < +\infty, \end{gathered} \tag{0.52}$$

удовлетворяющая соотношениям

$$d(v,\varphi)/dt-(v_iv,\partial\varphi/\partial x_i)+\mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))+(\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))+$$
$$+\mu_2(\textstyle\int_0^t\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi))=\langle f,\varphi\rangle \tag{0.53}$$

при всех $\varphi\in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t,

$$d(\theta,\phi)/dt-(v_i\theta,\partial\phi/\partial x_i)+\chi(\partial\theta/\partial x_i,\partial\phi/\partial x_i)=$$

$$\langle g,\phi\rangle+(\tilde\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\phi)+ \tag{0.54}$$

$$\mu_2(\textstyle\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)):\mathcal{E}(v)(t,x))\,ds,\phi),$$

где $\tilde\mu_1(\theta)=\mu_0+\mu_1(\theta)$, в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t, и условиям (0.46) и (0.48).

Теорема 0.2. *Пусть функция $\mu_1(s)\in C^2(-\infty,+\infty)$, монотонно возрастает и*

$$0<m_1^*<\mu_1(s)<m_1^{**},\ s\in(-\infty,+\infty), \tag{0.55}$$

$f\in L_2(0,T;V')$, $v^0\in H$, $g\in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0\in W_p^{1-2/p}(\Omega))$. Тогда при $1<p<4/3$ существует по крайней мере одно решение задачи (0.45)-(0.48).

В п. 3.2 рассматриваются вспомогательные задачи, доказывается их разрешимость для модели динамики термовязкоупругой среды с памятью. П. 3.3 посвящен построению аппроксимирующих задач для модели динамики термовязкоупругой среды с памятью. В п. 3.4 с помощью перехода к пределу доказывается сходимость последовательных приближений . П. 3.5 завершает доказательство основной теоремы 3.1.

Доказательство существенным образом опирается на результаты [12] о слабой разрешимости уравнения баланса энергии.

Четвертая глава посвящена доказательству существования сильных решений начально-граничных задач динамики термовязкоупругой среды типа

Навье-Стокса-Фурье-Олдройда. Во второй главе было установлено существование слабого решения системы типа Олдройда. Препятствием являлась недостаточная гладкость θ.

Четвертая глава включает в себя 6 пунктов. Сначала устанавливается локальная разрешимость.

В п. 4.1 производится постановка задачи и формулируется основной результат.

Рассмотрим следующую начально-граничную задачу

$$\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mathrm{Div}[\mu(\theta)\mathcal{E}(v)]+\nabla p=$$
$$=f+\mu_0\mathrm{Div}\int_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds, \mathrm{div}\, v=0 \text{ на } Q_T=[0,T]\times\Omega; \tag{0.56}$$

$$\partial\theta/\partial t+v_i\partial\theta/\partial x_i-\mathrm{Div}[k(\theta)\nabla\theta]=\mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2+$$
$$+\mu_0\mathcal{E}(v):\int_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds+g \text{ на } Q_T; \tag{0.57}$$

$$v|_{t=0}=v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{0.58}$$

$$\theta|_{t=0}=\theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{0.59}$$

В случае, когда $\mu_0=0$ эта система называется системой Навье-Стокса-Фурье. При $\mu_0\neq 0$ эта система является системой Олдройдовского типа.

Введем следующие функциональные пространства

$$W_1=W_2^1(0,T;H)\cap L_2(0,T;W_{2,0}^2(\Omega)^{(2)}\cap H),$$

$$W_2=W_2^1(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;W_{2,0}^2(\Omega)).$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $\mu,k\in C(-\infty,\infty)$, причем

$$0<\mu_0\leq\mu(s)\leq\mu_1, |\mu^{'}(s)|\leq\mu_2, s\in(-\infty,\infty); \tag{0.60}$$

$$0 < k_0 \le k(s) \le k_1, |k^{'}(s)| \le k_2, s \in (-\infty, \infty). \tag{0.61}$$

2) $v^0 \in W^2_{2,0}(\Omega)^{(2)} \cap V$, $\theta^0 \in W^2_{2,0}(\Omega)$,

$$\nabla v^0 \cdot n = 0, \nabla \theta^0 \cdot n = 0 \text{ на } Q_T, \tag{0.62}$$

где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Определение 0.3. *Сильным решением задачи (0.56)-(0.59) называется пара* (v, θ), *где*

$$v \in W_1; \tag{0.63}$$

$$\theta \in W_2; \tag{0.64}$$

такая, что выполняются уравнения

$$\partial v/\partial t + \mathcal{P} v_i \partial v/\partial x_i - \mathcal{P} Div(\mu_0 \mathcal{E}) =$$
$$\mathcal{P} f + \mu_2 \mathcal{P} Div(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds \tag{0.65}$$

и (0.57) *при п.в.* t *и условия* (0.58), (0.59).

Теорема 0.3. *Пусть функция* $f \in W^1_2(0, T : H)$, $v^0 \in W^2_{2,0}(\Omega)^{(2)} \cap H$, $g \in W^1_2(0, T : L_2(\Omega))$, $\theta^0 \in W^2_{2,0}(\Omega)$. *Пусть выполняются условия* (0.60)-(0.62), μ_2 *и* k_2 *из (0.60) и (0.61) достаточно малы. Тогда задача (0.56) - (0.59) имеет единственное решение при достаточно малом* $T > 0$.

В п. 4.2 рассматриваются вспомогательные задачи, доказывается их разрешимость. Эти задачи рассматриваются в операторной трактовке. П. 4.3 посвящен последовательному решению вспомогательных задач. Ключевым моментом доказательства является наличие априорных оценок (0.66) - (0.69), которые дают сходимость последовательных приближений на достаточно малом временном промежутке.

$$\|v\|_{2,0} + \sup_{0 \le t \le T} |v(t,x)|_1 \le M_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{0.66}$$

$$\|v_x\|_{L_4(Q_T)} \leq M_2(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{0.67}$$

$$\|v^{'}\|_{L_4(Q_T)} \leq M_3(\|w\|_{1,0} + |v^0|_2). \tag{0.68}$$

$$\|\theta\|_{2,1} + \|\theta'\|_{L_4(Q_T)} + \|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \leq M_6, \tag{0.69}$$

где $M_i = \Phi_i(\|\theta\|_{W_4^{1,1}}(Q_T))$, а $\Phi_i(s)$ – некоторые монотонные функции от s, i =1, 2, 3, а $M_4 = \Phi_4(\|f\|_{0,1}, \|g\|_{0,1}, |v^0|_2, |\theta^0|_2, \|\xi\|_{W_4^{1,1}(Q_T)})$, а $\Phi_4(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ - монотонная непрерывная функция своих аргументов.

Доказательство существенным образом опирается на результаты L. Consiglieri [15] о разрешимости соответствующей системы Навье-Стокса-Фурье.

Далее устанавливается нелокальная разрешимость.

В п. 4.4 производится постановка задачи и формулируется основной результат.

Рассматривается начально-граничная задача (0.56)-(0.59).

Потребуем выполнения условий 1)-2) и следующего условия

a) $f \in W_2^1(0, T : H)$, $g \in W_2^1(0, T : L_2(\Omega))$.

При доказательстве сильной разрешимости мы следуем схеме, разработанной [35], которая основывается на вариационной постановке данной задачи и свойств решения вариационной задачи. Поэтому дадим вариационную формулировку системы (0.56)-(0.59)

$$\int_0^T (\partial_t v, \varphi)\, dt + \int_0^T (\mu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v))\, dt + \int_0^T ((v \cdot \nabla v)v, \varphi)\, dt =$$

$$\int_0^T (f, v)\, dt + \mu_0 \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v)\, ds, \mathcal{E}(\varphi))\, dt \tag{0.70}$$

$$\forall \varphi \in L_2(0, T; V), v|_{t=0} = v^0 \quad \text{в } \Omega;$$

$$\int_0^T(\partial_t\theta,\psi)\,dt+\int_0^T(k(\theta)\nabla\theta,\nabla\psi)\,dt+\int_0^T(v_i\partial\theta/\partial x_i,\psi)\,dt=$$

$$\int_0^T(\mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2,\psi)\,dt+\mu_0\int_0^T(\int_0^t\mathcal{E}(v)\,ds:\mathcal{E}(v),\psi)\,dt \tag{0.71}$$

$$\forall\psi\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)),\theta|_{t=0}=\theta^0\ \text{ в } \Omega.$$

Определение 0.4. *Сильным решением задачи* (0.56)-(0.59) *называется пара* (v,θ), *где*

$$v\in W_1; \tag{0.72}$$

$$\theta\in W_2; \tag{0.73}$$

такая, что выполняются соотношения (0.70) и (0.71).

Теорема 0.4. *Пусть выполнены условия 1) ,2) и a) . Пусть μ_2 и k_2 из (0.60) и (0.61) достаточно малы. Тогда существует единственное сильное решение задачи* (0.56)-(0.59).

В пункте 4.5 рассматривается начально-граничная задача для системы вязкоупругости типа Олдройда с переменной вязкостью и начально-граничной задачи для уравнения сохранения энергии с переменным коэффициентом теплопроводности и интегральной частью. Разрешимость этих задач устанавливается путем сведения к операторным уравнениям, для разрешимости которых применяется принцип сжимающих отображений.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [57]–[70], из них [59]–[63] соответствуют перечню ВАК для кандидатских диссертаций. Из совместных работ [59]–[63] в диссертацию вошли только принадлежащие Паршину М.И. результаты.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В. П. Орлову за помощь, поддержку и многочисленные беседы и обсуждения, способствующие написанию данной работы.

ГЛАВА 1

НЕОБХОДИМЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Функциональные пространства

Пусть Ω – произвольное открытое множество в R^n. Через $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, будем обозначать пространство определенных на Ω вещественных функций, абсолютно интегрируемых с p-й степенью по лебеговой мере $dx = dx_1...dx_n$. Это пространство является банаховым пространством.

При $p = 2$ мы получаем гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Через W_p^l обозначим пространство Соболева. Это пространство является банаховым пространством.

Норма W_p^l определяется как

$$\|v\|_{W_p^l(\Omega)} = (\sum_{j\leq l} \|D^j v\|_{L_p(\Omega)}^p)^{1/p}.$$

При $p = 2$ пространство $W_2^l = H^l(\Omega)$ представляет собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$((u, v))_{H^l(\Omega)} = \sum_{j\leq l}(D^j u, D^j v).$$

Через H_p^s будем обозначать пространство бесселевых потенциалов, определяемое при всех вещественных s и $1 < p < \infty$ как пространство всех обобщенных функций из S', для которых $F^{-1}((1 + |\xi|)^2)^{s/2}F(v)) \in L_p$, где F - преобразование Фурье, с конечной нормой

$$\|v\|_{H_p^s(\Omega)} = (\|F^{-1}((1 + |\xi|)^2)^{s/2}F(v))\|_{L_p(\Omega)}).$$

Индекс s в общем случае связан с гладкостью элементов, а p указывает на связь H_p^s с пространством L_p.

Скалярные, векторнозначные или матричнозначные функции (из контекста это всегда ясно) далее будем рассматривать в пространствах Соболева $L_p(\Omega),\ W_p^l(\Omega),\ L_p(Q_T), W_p^{k,m}(Q_T)$. Нормы в $L_2(\Omega)$, $W_2^l(\Omega)$, $L_2(Q_T)$, $W_2^{k,m}(Q_T)$ будем обозначать как $|\cdot|_0,\ |\cdot|_l,\ \|\cdot\|_0,\ \|\cdot\|_{k,m}$ соответственно. $L_p(\Omega, R^n)$ и т.п. будет означать, что рассматриваются функциональные пространства со значениями в R^n.

Через B мы будем обозначать действующий в H оператор $Bu = \mathcal{P} : D(B) \to H$ с областью определения $D(B) = W_{p,0}^2(\Omega) \cap H$. Оператор B является (см.[33], с. 54) положительно определенным самосопряженным оператором.

Возникающие в неравенствах и цепочках неравенств константы, не зависящие от существенных параметров, будем обозначать одной буквой M. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Через будем обозначать $W_{p,0}^m(\Omega) = W_p^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, $m > 1/p$. Далее, $W_p^{-m}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}_{p'}^m(\Omega))',\ m > 0,\ p' = p/(p-1)$, $1 < p < +\infty$.

1.2 Вспомогательные утверждения

Лемма 1.1. *Пусть X и Y — два банаховых пространства, таких что*

$$X \subset Y,$$

причем вложение непрерывно. Если функция ϕ принадлежит $L^\infty(0, T; X)$ и слабо непрерывна как функция со значениями в Y, то ϕ слабо непрерывна как функция со значениями в X.

Доказательство леммы приведено в [20], с. 211.

Теорема 1.1. *Пусть X – банахово пространство с сопряженным X' и функции u, g принадлежат пространству $L_1(a, b; X)$. Тогда следующие три условия эквивалентны: 1. Функция $u(t)$ почти всюду равна первообразной от*

$g(t)$ и

$$u(t) = \xi + \int_a^t g(s)ds, \xi \in X, ..t \in [a,b]; \tag{1.1}$$

2. Для каждой пробной функции $\eta \in D(a,b)$

$$\int_a^b u(t)\eta'(t)dt = -\int_a^b g(t)\eta(t)dt; \tag{1.2}$$

3. Для каждого $\phi \in X'$

$$\frac{d}{dt}\langle \phi, u(t)\rangle = \langle \phi, g(t)\rangle \tag{1.3}$$

в смысле распределений на (a,b).

Доказательство теоремы приведено в [23], с.55.

Лемма 1.2. *Пусть V , H и V' — тройка гильбертовых пространств, каждое из которых вложено в последующее, то есть $V \subset H \equiv H' \subset V'$. Если $u \in L^2(0,T;V)$, а $u' \in L^2(0,T;V')$, то u п.в. равна некоторой непрерывной функции из $0,T$ в H и имеет место следующее равенство, которое выполняется в смысле скалярных произведений на $(0,T)$:*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle. \tag{1.4}$$

Доказательство леммы приведено в [20], с. 209.

Утверждение 1.1. *Пусть $X \subset B \subset Y$ - банаховы пространства, вложение $X \to B$ компактно, $B \to Y$ - непрерывно. Если f_n ограничена в $L_q(0,T;B)$ и в $L^1(0,T;X)$, а $\partial f^n/\partial t$ ограничена в $L^1(0,T;Y)$, то f_n относительно компактно в $L_p(0,T;B)$ при $\forall p \leq q$, $1 \leq q \leq +\infty$.*

Утверждение см. в [24].

Пусть X_0, X, X_1 – гильбертовы пространства, такие что

$$X_0 \subset X \subset X_1, \tag{1.5}$$

а вложение

$$X_0 \subset X \tag{1.6}$$

компактно. Для всякой функции v из R в X_1 обозначим через v' ее преобразование Фурье:

$$v'(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi t\tau} v(t)dt. \tag{1.7}$$

Для произвольного $0 < \gamma \leq 1$ определим пространство

$$\mathcal{H}^{\gamma}(R; X_0, X_1) = \{v \in L^2(R, X_0), D_i^{\gamma} v \in L^2(R; X_1)\}.$$

Это гильбертово пространство с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{H}^{\gamma}(R;X_0,X_1)} = \{\|v\|^2_{L^2(R;X_0)} + \||\tau|^{\gamma} v'\|^2_{L^2(R;X_1)}\}^{1/2}.$$

Произвольному множеству $K \subset R$ поставим в соответствие подпространство $\mathcal{H}_K^{\gamma}$ в $\mathcal{H}^{\gamma}$, состоящее из тех функций $u \in \mathcal{H}^{\gamma}$, носитель которых содержится в K:

$$\mathcal{H}_K^{\gamma}(R; X_0, X_1) = \{u \in \mathcal{H}^{\gamma}(R; X_0, X_1) \ supp\, u \subset K\}.$$

Сформулируем теорему о компактности.

Теорема 1.2. *Пусть X_0, X, X_1 — гильбертовы пространства, удовлетворяющие условиям 1.5 и 1.6. Тогда для любого ограниченного множества K и любого $\gamma > 0$ вложение $\mathcal{H}_K^{\gamma}(R; X_0, X_1)$ в $L^2(R, X)$ компактно.*

Доказательство теоремы приведено в [20], с. 220.

Теорема 1.3. *Пусть Ω — произвольная ограниченная открытая область в R^n, удовлетворяющая условию*

Существует непрерывный линейный оператор продолжения

$$\Pi \in \mathcal{L}(W_p^m(\Omega), W_p^m(R^n)).$$

Тогда вложение

$$W_p^1(\Omega) \subset L^{q_1}(\Omega) \tag{1.8}$$

компактно для любого q_1, $1 \leq q_1 < \infty$, если $p \geq n$, и для каждого q_1, $1 \leq q_1 < q$ (где q задается условием $1/p - 1/n = 1/q$), если $1 \leq p < n$.

При тех же значениях p и q_1 вложение

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1 \subset L^{q_1}(\Omega) \tag{1.9}$$

компактно для любой открытой ограниченной области Ω.

См. в [20], с. 131.

Лемма 1.3. *Если $n = 2$, то для произвольной открытой области Ω*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4}\|v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{grad} v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{1.10}$$

Доказательство леммы приведено в[20], с. 233.

Теорема 1.4. *Пусть X — гильбертово пространство. Если последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X слабо сходится к $x' \in X$, то она сильно сходится к $x' \in X$ тогда и только тогда, когда $\|x^n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$.*

Доказательство теоремы приведено в [25], с. 179.

Теорема 1.5. *Пусть Ω — открытое множество в R^n, $\mathcal{V} = \{u \in D(\Omega), div\ v = 0\}$ и $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$,где $f = \{f_1, ..., f_n\}$, $i = 1, ..., n$ и $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ – некоторое распределение на Ω. Для того, чтобы*

$$f = \operatorname{grad} p \tag{1.11}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle f, v\rangle = 0 \forall v \in \mathcal{V}. \tag{1.12}$$

Доказательство теоремы приведено в [25], с. 179.

Неравенство 1.1.

$$\int_\Omega (\partial v_i/\partial x^j + \partial v_j/\partial x^i)^2 dx + \int_\Omega \sum_{k=1}^n v_k^2 \geq c\| \int_\Omega \{\sum_{i,j=1}^n (\partial v_i/\partial x^j)^2 + \sum_{k=1}^n v_k^2\} dx\|^2.$$

Теорема 1.6. *Пусть F — некоторое семейство непрерывных функций из C, заданных на отрезке [a,b]. F является предкомпактным в полном метрическом пространстве C тогда и только тогда, когда*

1. F - равномерно ограничено;

2. F - равностепенно непрерывно.

ГЛАВА 2

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ ТИПА ОЛДРОЙДА

2.1 Существование слабых решений

Здесь и далее $\Omega \subset R^2$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В $Q_T = [0,T] \times \Omega$ рассматривается начально-граничная задача

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v -$$
$$-\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{2.2}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{2.3}$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi \triangle \theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) +$$
$$\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T; \tag{2.4}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{2.5}$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$ – скорость, θ – температура, p – давление среды, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**}$.

Введем следующие функциональные пространства

$$U(0,T) \equiv L_2(0,T;V) \cap W_1^1(0,T;V') \cap C_w(0,T;H),$$

$$\Upsilon \equiv L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \cap W_1^1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)) \cap C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)),$$

$$1 < p < +\infty.$$

Определение 2.1. *Слабым решением задачи (2.1)-(2.5) называется пара (v, θ), где*

$$v \in U(0,T), \tag{2.6}$$

$$\theta \in \Upsilon, \tag{2.7}$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(v,\varphi) - (v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \mu_1(\theta)(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \\ + \mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f, \varphi \rangle\end{gathered} \tag{2.8}$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t,

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(\theta,\phi) - (v_i\theta, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) + \chi(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) = \\ \langle g, \phi \rangle + (\tilde{\mu}_1(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi) + \mu_2(\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x) : \mathcal{E}(v)(t,x))\, ds, \phi),\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\tilde{\mu}_1(\theta) = \mu_0 + \mu_1(\theta)$ в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t, и условиям (2.3) и (2.5).

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть функция $\mu_1(s) \in C^2(-\infty,+\infty)$, монотонно возрастает и*

$$0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**},\ s \in (-\infty,+\infty), \tag{2.10}$$

$f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega))$. Тогда при $1 < p < 4/3$ существует по крайней мере одно слабое решение задачи (2.1)-(2.5).

Доказательство теоремы 2.1 разбито на ряд этапов и проводится в разделах 2.2-2.5. В разделе 2.2 рассматривается начально-граничной задачи для системы вязкоупругости типа Олдройда с переменной вязкостью и начально-граничная задача для уравнения сохранения энергии с переменным коэффициентом теплопроводности и правой частью, которая является лишь суммируемой. Далее в разделе 2.3 выполняется сведение этих задач к операторным уравнениям, для разрешимости которых применяется принцип сжимающих отображений. Разрешимость исходной системы устанавливается в разделе 2.4 с помощью итерационного процесса, заключающимся в последовательном решении вспомогательных задач. Подходящие априорные оценки дают сходимость последовательных приближений на достаточно малом временном промежутке в разделе 2.5.

2.2 Вспомогательные задачи

Рассмотрим сначала задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\,[m(t,x)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = f; \tag{2.11}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0; \tag{2.12}$$

$$v|_{t=0} = v^0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.13}$$

Определим слабое решение задачи (2.11)-(2.13) как $v \in U(0,T)$, удовлетворяющую (2.8) при замене $\tilde{\mu}_1(\theta)$ на $m(t,x)$ и $\mu_0 = \mu_2 = 0$.

Лемма 2.1. *Пусть $f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, функция $m(t,x)$ измерима и ограничена на Q_T,*

$$0 < K_1 \le m(t,x) \le K_1^*. \tag{2.14}$$

Тогда задача (2.11)-(2.13) имеет единственное слабое решение и справедлива оценка

$$\|v\|_{U(0,T)} \equiv \|\partial v/\partial t\|_{L_2(0,T;V'(\Omega))} + \|v\|_{0,1} + \sup_{0\le t\le T} |v(t,x)|_0 \le \tag{2.15}$$

$$M_1(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0).$$

Здесь M_1 *зависит от* $\|m\|_{L^\infty(Q_T)}$.

Доказательство леммы (2.1) см. [22].

Далее рассмотрим задачу

$$\frac{\partial\theta}{dt} + (v_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}) - \chi\triangle\theta = m(\hat{\theta})\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \hat{g} + g, \tag{2.16}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.17}$$

где $m(\theta) = \mu_0 + \tilde{m}u_1(\theta)$.

Определим слабое решение задачи (2.16)-(2.17) как $\theta \in \Upsilon$, удовлетворяющую (2.9) при при замене $\tilde{\mu}_1(\theta)$ на $m(\hat{\theta})$ и $\mu_2 = 0$.

Лемма 2.2. *Пусть* $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\hat{g} \in L_1(0,T; L_1(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$, $\hat{\theta} \in \Upsilon$, $v \in U(0,T)$. *Тогда задача (2.16)-(2.17) имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_\Upsilon \equiv \|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} + \|\theta\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))} +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\|\theta(t,x)\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)} \le M_2(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \tag{2.18}$$

$$\|\hat{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|v\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}).$$

Утверждение леммы (2.2) при $m = \mathrm{const}$ и $\hat{g} = 0$ следует из [12]. Доказательство леммы (2.2) проходит также и для случая, когда $m = \mu_0 + \mu_1(\hat{\theta})$, $\hat{\theta} \in \Upsilon$ и $\hat{g} \in L_1(0,T; L_1(\Omega))$. В этом случае $m \in L^\infty(Q_T)$, причем $\|m\|_{L^\infty(Q_T)} \le \mu_0 + \sup_{s\ge 0}\mu_1(s) < +\infty$, и все априорные оценки, которые были использованы при доказательстве для случая $m = \mathrm{const}$, сохраняются, а $\hat{g} \in L_1(0,T; L_1(\Omega))$, так же, как слагаемое $\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) \in L_1(0,T; L_1(\Omega))$ из правой части (2.18).

Константа M_2 не зависит от $\hat{\theta}$.

Включение $\theta \in C_w(0,T; W_p^{1-2/p}(\Omega))$ устанавливается с помощью леммы 1.1 и оценки (2.18).

2.3 Построение аппроксимирующих задач

Опеределим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0, 1, 2, \ldots$ следующим образом. Обозначим через v^0 и θ^0 начальные значения для v и θ из (2.3) и (2.5) соответственно. Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда v^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\partial v^{n+1}/\partial t + v_i^{n+1}\partial v^{n+1}/\partial x_i - \mu_0 \triangle v^{n+1} - \mathrm{Div}[\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})] -$$
$$- \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)]ds + \nabla p^{n+1} = f; \tag{2.19}$$

$$\mathrm{div}\, v^{n+1} = 0 \text{ на } Q_T; \tag{2.20}$$

$$v^{n+1}|_{t=0} = v^0, v^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.21}$$

а θ^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\partial \theta^{n+1}/\partial t + v_i^{n+1}\partial \theta^{n+1}/\partial x_i - \chi \triangle \theta^{n+1} = (\mu_0 + \mu_1(\theta^n))\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) +$$
$$+ \mu_2 \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1}(s,x)ds : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g; \tag{2.22}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta^0; \theta^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.23}$$

Слабым решением задачи (2.19)-(2.21) называется функция $v^{n+1} \in U(0,T)$, которая удовлетворяет соотношениям (2.20), (2.21) и

$$\frac{d}{dt}(v^{n+1}, \varphi) - (v_i^{n+1} v^{n+1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) + (\mu_0 \mathcal{E}(v^{n+1}) + (\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}), \mathcal{E}(\varphi)) +$$
$$+ \mu_2 (\int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\, ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f, \varphi \rangle \tag{2.24}$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t.

Слабым решением задачи (2.22)-(2.23) называется функция $\theta^{n+1} \in \Upsilon$, которая удовлетворяет соотношениям (2.23) и

$$d(\theta^{n+1},\phi)/dt-(v_i^{n+1}\theta^{n+1},\partial\phi/\partial x_i)+\chi(\partial\theta^{n+1}/\partial x_i,\partial\phi/\partial x_i)=$$

$$\langle g,\phi\rangle+(\tilde{\mu}_1(\theta^n):\mathcal{E}(v^{n+1}),\phi)+ \tag{2.25}$$

$$\mu_2(\textstyle\int_0^t\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds:\mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)),\mathcal{E}(\phi))$$

в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t.

Теорема 2.2. *При выполнении условий теоремы 2.1 последовательные приближения определены, и справедливы равномерные по n оценки*

$$\|v^n\|_{U(0,T)}\le M_3,\|\theta^n\|_\Upsilon\le M_4,n=0,1,2,... \tag{2.26}$$

Здесь $\|v\|_{U(0,T)}\equiv\|\partial v/\partial t\|_{0,-1}+\|v\|_{0,1}$ $\|\theta\|_\Upsilon\equiv\|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}+\|\theta\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))}$.

Доказательство теоремы 2.2. Сначала установим разрешимость задачи

$$\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mu_0\triangle v-\mathrm{Div}\,[m(t,x)\mathcal{E}(v)]- \tag{2.27}$$

$$-\mu_2\textstyle\int_0^t\mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds+\nabla p=f;$$

$$\mathrm{div}\,v=0 \text{ на } Q_T; \tag{2.28}$$

$$v|_{t=0}=v^0,v|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.29}$$

где $m(t,x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Сначала докажем априорную оценку решений задачи (2.27)-(2.29).

Лемма 2.3. *Пусть v – слабое решением задачи (2.27)-(2.29). Тогда справедливо неравенство*

$$\|\partial v/\partial t\|_{0,-1}+\sup_t|v(t,.)|_0+\|v\|_{0,1}\le M_4(\|f\|_{0,-1}+|v^0|_0), \tag{2.30}$$

где M_4 зависит от $\|m\|_{L^\infty(Q_T)}$.

Доказательство леммы 2.3. Сначала покажем, что v удовлетворяет тождеству

$$\frac{1}{2}|v(\tau,.)|_0^2+\mu_0\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,\tau;L_2(\Omega))}+\|m^{1/2}(t,x)\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,\tau;L_2(\Omega))}+$$
$$\frac{1}{2}\mu_2|\int_0^\tau\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds|_0^2=\frac{1}{2}|v^0|_0^2+\int_0^\tau\langle f,v\rangle\,ds,\ 0\le\tau\le T. \tag{2.31}$$

При замене $\mu_1(\theta)$ на $m(t,x)$, слабое решение задачи (2.27)-(2.29) удовлетворяет (2.8) . Из теоремы 1.1 и определения слабого решения следует, что $\frac{d}{dt}(v,\varphi)=\langle\frac{d}{dt}v,\varphi\rangle$. Кроме того из леммы 1.2 следует, что $\frac{d}{dt}\langle v,\varphi\rangle=\frac{1}{2}|v|_0^2$. Подставим $v(t,x)$ в подправленное (2.8) вместо φ, воспользовавшись этими соотношениями,. Рассмотрим третье слагаемое J, которое было получено при такой подстановке: $J=\int_0^\tau(\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds,\mathcal{E}(v)(t,x))\,dt$. Интегрируя по частям по t имеем:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\tau\frac{d}{dt}(\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds,\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds)\,dt=$$
$$\frac{1}{2}|\int_0^\tau\mathcal{E}(v)(t,x)dt|_0^2. \tag{2.32}$$

Остальные слагаемые, полученные при такой подстановке, преобразуются стандартным образом. Например,

$$\mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(v))=\mu_0\int_0^\tau\mathcal{E}(v)\mathcal{E}(v)ds=$$

$$=\mu_0\int_0^\tau\mathcal{E}^2(v)ds=\mu_0(\int_0^\tau\mathcal{E}^2(v)ds)^{\frac{2}{2}}=\mu_0\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,\tau;L_2(\Omega))}$$

.

С учетом этого из (2.32) вытекает соотношение (2.31). Используя (2.31) и проводя стандартные выкладки с учетом (2.10)

$$\|\partial v/\partial t\|_{0,-1}+\sup_t|v(t,.)|_0+\|v\|_{0,1}\le(\|f\|_{0,-1}+\frac{1}{2}|v^0|_0^2)\le$$

$$\leq M_4(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0)$$

.

Таким образом, отсюда получаем (2.30).

Лемма 2.3 доказана.

Теперь установим разрешимость задачи (2.27)-(2.29).

Лемма 2.4. *При выполнении условий теоремы 2.1 задача (2.27)-(2.29) имеет слабое решение, и справедлива оценка*

$$\|v\|_{U(0,T)} \leq M_4(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0). \tag{2.33}$$

Доказательство леммы 2.4. При $\mu_2 = 0$, измеримой и ограниченной $m(t,x)$, которая удовлетворяет $0 < k_1 \leq m(t,x) \leq k_2$, разрешимость задачи (2.27)-(2.29) и оценка (2.30) установлены в лемме 2.1.Через обозначим $R(f, v^0, m)$ оператор, ставящий в соответствие (f, v^0, m) слабое решение v задачи (2.27),(2.29) при $\mu_2 = 0$, так что $v = R(f, v^0, m)$.

Перепишем (2.27) в виде

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mu_0 \triangle v - \mathrm{Div}\,[m(t,x)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = w, \tag{2.34}$$

$$w = f + \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds. \tag{2.35}$$

$v = R(f, v^0, m)$. Перепишем (2.35) в виде, используя оператор R,

$$w = K(w),\ K(w) \equiv f + \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(R(w, v^0, m))(s,x)]\,ds. \tag{2.36}$$

Установим разрешимость уравнения (2.36). Для этого воспользуемся принципом сжимающих отображений.

Сначала покажем, что при достаточно малом T оператор K преобразует шар $S(R) = \{w : \|w\|_{0,-1} \leq R\}$ достаточно большого радиуса R в себя. В самом деле, если предположить, что $v = R(w, v^0, m)$, имеем

$$\|K(w)\|_{0,-1} \leq \|f\|_{0,-1} + M\| \int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds\|_{0,-1} \leq \|f\|_{0,-1} + \tag{2.37}$$

$$M\|\int_0^t |v(s,x)|_1\,ds\|_{L_2(0,T)} \le \|f\|_{0,-1} + MT\|v\|_{0,1}.$$

Из (2.15) вытекает, что

$$\|v\|_{0,1} = \|(R(w,v^0,m))\|_{0,1} \le M_1(\|w\|_{0,-1} + |v^0|_0).$$

Следовательно, для $w \in S(R)$

$$\|K(w)\|_{0,-1} \le \|f\|_{0,-1} + M_6T(\|w\|_{0,-1} + |v^0|_0) \le$$
$$\|f\|_{0,-1} + M_6T(R + |v^0|_0). \tag{2.38}$$

Здесь M_6 не зависит от m.

Из (2.38) вытекает, что найдется такое достаточно малое T_1, что при $T \le T_1$ оператор K преобразует шар $S(R) = \{w : \|w\|_{0,-1} \le R\}$ достаточно большого радиуса R в себя.

Теперь покажем, что найдется такое достаточно малое T_2, что при $T \le T_2$ оператор K на шаре $S(R)$ является сжимающим. Пусть $w_1, w_2 \in S(R)$. Тогда из (2.38) следует, что

$$\|K(w_1) - K(w_2)\|_{0,-1} \le M_6T\|w_1 - w_2\|_{0,-1}.$$

Отсюда следует, что найдется такое достаточно малое T_2, что при $T \le T_2$ справедливо неравенство

$$\|K(w_1) - K(w_2)\|_{0,-1} \le q\|w_1 - w_2\|_{0,-1}, \tag{2.39}$$

где $0 < q < 1$.

Таким образом, найдется такое $T_0 \le \min(T_1, T_2)$, что при $T = T_0$ для оператора K выполняются условия принципа сжимающих отображений. Следовательно, при $T = T_0$ уравнение (2.36) однозначно разрешимо. Отсюда и из (2.15) с учетом леммы 2.1 вытекает разрешимость задачи (2.27)-(2.29).

из (2.15) и (2.38) следует Оценка (2.33).

Таким образом, при $T = T_0$, где T_0 мало, Лемма 2.4 доказана.

Для случая, когда T произвольное, необходимо рассмотреть последовательность задач

$$\partial v^k/\partial t + v_i^k \partial v^k/\partial x_i - \mu_0 \triangle v^k - \operatorname{Div} v^k[m(t,x)\,\mathcal{E}(v^k)] -$$
$$+\mu_2 \textstyle\int_0^t \operatorname{Div} v^k[\mathcal{E}(v^k)(s,x)]\,ds + \nabla p^k = f;\ \operatorname{div} v^k = 0 \text{ на } Q_T; \qquad (2.40)$$

$$v^k(T_k,x) = w^k(x),\ x \in \Omega;\ v^k(t,x) = 0,\ T_k \leq t \leq T_{k+1},\ x \in \partial\Omega, \qquad (2.41)$$

где $T_k = kT_0,\ k = 1,2,\ldots,[T/T_0]$, $w^k(x) = v^{k-1}(T_k,x)$, $v^0(t,x) = v^0(x)$. Без ограничения общности будем считать T/T_0 целым.

Решения задач (2.40)-(2.41) ищутся в классах $U(T_k,T_{k+1})$, определяемых аналогично $U(0,T)$, с заменой $(0,T)$ на (T_k,T_{k+1}). Легко видеть, что оценка (2.30) решения задачи (2.27)-(2.29) на $[0,T]$ справедлива и для решений задач (2.40)-(2.41) при замене $[0,T]$ на $[T_k,T_{k+1}]$ и v^0 на w^k.

Из этой оценки, в частности, следует равномерная ограниченность $|w^k(t,x)|_0$. Отсюда вытекает, что задачи (2.40)-(2.41) однозначно разрешимы на соответствующих отрезках $[T_k,T_{k+1}]$.

При $t \in [0,T]$ определим $v(t,x)$ как функцию, равную $v^k(t,x)$ на $[T_k,T_{k+1}]$. Очевидно $v(t,x)$ является решением задачи (2.27)-(2.29) на $[0,T]$ и удовлетворяет оценке (2.30).

Лемма 2.4 доказана.

Теперь установим разрешимость задачи (2.19)-(2.21).

Лемма 2.5. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, $\theta^{n+1} \in \Upsilon$. *Тогда задача (2.19)-(2.21) имеет слабое решение, и справедлива оценка*

$$\|v^{n+1}\|_{U(0,T)} \leq M_7(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0). \qquad (2.42)$$

Доказательство леммы 2.5. Пусть $m(t,x) = \mu_0 + \mu_1(\theta^n(t,x))$. Тогда $m(t,x)$ удовлетворяет условиям 2.1 с некоторыми K_1 и K_1^*. Утверждение леммы 2.5 вытекает из утвеждения леммы 2.4.

Теперь рассмотрим задачу (2.22)-(2.23) при фиксированном $v^{n+1} \in V$.

Лемма 2.6. *Пусть $v^{n+1} \in U(0,T)$, $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^n \in \Upsilon$. Тогда задача (2.22)-(2.23) имеет слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta^{n+1}\|_\Upsilon \le M_8(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{2.43}$$

Доказательство леммы 2.6. Из леммы 2.2 следует, что для доказательства леммы 2.6 достаточно доказать следующее.

Из включения $v^{n+1} \in U(0,T)$ вытекает, что $\hat{g}$, определяемое вторым слагаемым в правой части (2.22), принадлежит $L_1(0,T; L_1(\Omega))$. Действительно,с помощью интегрального неравенства Минковского и неравенства Коши получаем, что

$$\| \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds : \mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)\|_{L_1(\Omega)} \le$$

$$M \int_0^t \|\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\|_{L_2(\Omega)}\,ds \|\mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$M \int_0^t |v^{n+1}(s,x)|_1\,ds |v^{n+1}(t,x)|_1 \le M T^{1/2} \|v^{n+1}\|_{0,1} |v_x^{n+1}(t,x)|_0.$$

Если проинтегрировать последнее неравенство по t, получим, что

$$\|\hat{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} = \|\mu_2 \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds : \mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \le M\|v^{n+1}\|_{0,1}^2.$$

Отсюда и из условия на g с помощью леммы 2.6 получаем слабую разрешимость задачи (2.22)-(2.23) и оценку (2.43). Лемма 2.6 доказана.

Из лемм 2.5 и 2.6 следует, что последовательные приближения (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$ определены. Так как функция $\mu_1(s)$ ограничена, то отссюда вытекает равномерная ограниченность $\mu_1(\theta^{n+1})$, а в силу оценок (2.33) и (2.43) вытекает справедливость (2.26). Оценки (2.26) установлены, а теорема 2.2 доказана.

2.4 Сходимость решений аппроксимирующих задач

Рассмотрим теперь (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$ и определим через v^n - решение задачи (2.19)-(2.21), а θ^n - решение задачи (2.22)-(2.23). Исследуем вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n). Сначала рассмотрим θ^n.

Лемма 2.7. *Последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T : L_p(\Omega))$.*

Доказательство леммы 2.7. Воспользуемся утверждением 1.1.

Возьмем в качестве $X = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$, $B = L_p(\Omega)$, $Y = W_p^{-1}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$. Тогда условия на X, B, Y выполняются. Из оценки (2.43) вытекает, что θ^n ограничена в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, а $\partial\theta^n/\partial t$ ограничена в $L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$. Поэтому последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$.

Лемма 2.7 доказана.

Без ограничения общности будем считать, что θ^n сходится к θ в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$. Также без ограничения общности можно считать, что θ^n сходится к θ п.в. в $L_p(Q_T)$.

Теперь рассмотрим v^n. Из оценки (2.26) следует, что последовательность v^n ограничена в $L_2(0, T; V)$, и следовательно слабо компактна в $L_2(0, T; V)$, а последовательность $\partial v^n/\partial t$ ограничена в $L_2(0, T; V')$ и слабо компактна в $L_2(0, T; V')$.

Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0, T; V')$.

Однако последовательность v^n обладает лучшими свойствами.

Теорема 2.3. *Последовательность v^n сильно сходится в $L_2(0, T; V)$ к v , а $v^n(T, x)$ сильно сходится в H к $v(T, x)$.*

Установим справедливость следующих лемм.

Лемма 2.8. *Имеют место сходимости:*

$$\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^n) \to \mu_1(\theta)\mathcal{E}(v) \text{ слабо в } L_2(Q_T), \tag{2.44}$$

$$\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds \to \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds \text{ \textit{слабо в} } L_2(Q_T). \tag{2.45}$$

Доказательство леммы 2.8.

Поскольку θ^n сходится в $L_p(Q_T)$, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.в. Будем считать, что $\theta^n \to \theta$ п.в. на Q_T. Тогда и $\mu_1(\theta^n)$ сходится п.в. к $\mu_1(\theta)$ на Q_T. Из слабой сходимости v^n к v в $L_2(0,T;V)$ легко следует слабая сходимость $\mathcal{E}(v^n)$ к $\mathcal{E}(v)$ в $L_2(Q_T)$, а затем и слабая сходимость (2.44) в $L_2(Q_T)$. Справедливость (2.44) установлена.

Рассмотрим выражение

$$I_n = \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds, \varphi(t,x))\,dt =$$

$$\int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \varphi(t,x))\,ds\,dt, \tag{2.46}$$

где $\varphi(t,x)$ - гладкая финитная функция на Q_T. Изменив порядок интегрирования в (2.46), получаем

$$I_n = \int_0^T \int_s^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x)\varphi(t,x))\,dt\,ds = \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \int_s^T \varphi(t,x))\,dt\,ds =$$

$$\int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \psi(s,x))\,ds.$$

Здесь $\psi(s,x) = \int_s^T \varphi(t,x)\,dt$ - гладкая на Q_T функция. Из слабой сходимости $\mathcal{E}(v^n)$ в $L_2(Q_T)$ вытекает, что

$$I_n \to I = \int_0^T (\mathcal{E}(v)(s,x), \psi(s,x))\,ds =$$

$$= \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds, \varphi(t,x))\,dt,$$

Справедливость (2.45) установлена. Лемма 2.8 доказана.

Лемма 2.9. *Пусть v^n, $n = 1, 2, \ldots$ – слабое решение задачи (2.19)-(2.21). Тогда v^n удовлетворяет тождествам*

$$\tfrac{1}{2}|v^n(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \|\mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 +$$

$$\tfrac{1}{2}\mu_2|\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds|_0^2 = \tfrac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v^n\rangle\,ds. \tag{2.47}$$

Доказательство леммы 2.9. Используя те же выкладки, как и при выводе (2.31), получаем справедливость следующего соотношения

$$\tfrac{1}{2}|v^n(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \|\mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + J = \tag{2.48}$$

$$= \tfrac{1}{2}|v^0|_0^2 + \textstyle\int_0^T \langle f, v^n\rangle\, ds,$$

где

$$J = \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds, \mathcal{E}(v^n)(t,x)))\,dt.$$

Проинтегрировав по t по частям получаем:

$$J = \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^T \frac{d}{dt}(\int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds, \int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds)\,dt = \tag{2.49}$$

$$= \tfrac{1}{2}|\textstyle\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(t,x)dt|_0^2.$$

С учетом преобразованных первых трех слагаемых из (2.48) и (2.49) вытекает соотношение (2.31). Лемма 2.9 доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Введем в $\aleph = H \times L_2(0,T : L_2(\Omega)) \times L_2(0,T : V)) \times H$ норму $\|x\|_\aleph = (|x_1|_0^2 + \|x_2\|_0^2 + \|x_3\|_0^2 + |x_4|_0^2)^{1/2}$. Здесь $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ - произвольный элемент из $\aleph$. Рассмотрим следующую последовательность

$$x^n = (\frac{1}{2}v^n(T,x), \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v^n), \mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n), \frac{1}{2}\mu_2\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(t,x)dt).$$

Слабая сходимость x^n к предельному элементу вытекает из слабой сходимости

x_i^n.

$$x = (\frac{1}{2}v(T,x), \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v), \mu_1^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v), \frac{1}{2}\mu_2\int_0^T \mathcal{E}(v)(t,x)\,dt).$$

Однако, из (2.47) следует, что в силу слабой сходимости v^n к v следует, что

$$\|x^n\|_\aleph^2 \to \frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v\rangle\,ds. \tag{2.50}$$

Покажем, что для v справедливо тождество, так же как и для v^n

$$\frac{1}{2}|v(T,.)|_0^2+\mu_0\|\mathcal{E}(v)\|_0^2+\mu_0^{1/2}\|\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)\|_0^2+\frac{1}{2}\mu_2\|\int_0^T\mathcal{E}(v)(t,x)dt\|_0^2= \tag{2.51}$$

$$=\frac{1}{2}|v^0|_0^2+\int_0^T\langle f,v\rangle\,ds.$$

Сначала установим , что v удовлетворяет соотношению (2.8). Из (2.19) следует, что

$$(v^n(T,x),\varphi)-\int_0^T(v_i^nv^n,\partial\varphi/\partial x_i)\,dt+\mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+$$

$$+\int_0^T(\mu_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+\mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x),\mathcal{E}(\varphi))\,ds\,dt= \tag{2.52}$$

$$=\int_0^T\langle f,\varphi\rangle\,dt+(v^0,\varphi),\varphi\in V.$$

Из оценок (2.52) и теоремы 1.2,с точностью до подпоследовательности следует сильная сходимость v^n к v в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Кроме того, в силу непрерывности вложения $L_4(\Omega)\subset W_2^1(\Omega)$ (теорема 1.3) и леммы 1.3 следует

$$\|v_i^nv^n\|_0^2=\int_0^T|v_i^nv^n|dt\le M\int_0^T\|v^n\|_{L_4(\Omega)}dt \tag{2.53}$$

$$\le M\int_0^T\|v^n\|_1^2\|v^n\|_0^2dt\le M\int_0^T\|v^n\|_1^2dt\le M.$$

Отсюда вытекает слабая сходимость $v_i^nv^n$ к v_iv в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Остальные сомножители в скалярных произведениях в (2.52) слабо сходятся к своим пределам. Следовательно

$$(v(T,x),\varphi)-\int_0^T(v_iv,\partial\varphi/\partial x_i)\,dt+\mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+$$

$$+\int_0^T(\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+\mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x),\mathcal{E}(\varphi))\,d\,sdt= \tag{2.54}$$

$$=\int_0^T\langle f,\varphi\rangle\,dt+(v^0,\varphi),\varphi\in V.$$

При замене T на t равенство (2.54) остается справедливым. Заменяя T в (2.54) на t и учитывая, что в силу $v \in L_2(0,T;V)$ под знаком интеграла находятся суммируемые функции, продифференцируем (2.54) по t при п.в. t. Получаем соотношение (2.8). Используя те же выкладки, как при выводе (2.31), получаем, что справедливо равенство (2.51).

Из (2.50) и (2.51) следует, что $\|x^n\|_{\aleph} \to \|x\|_{\aleph}$.

Отсюда и из слабой сходимости x^n в $\aleph$ следует сильная сходимость x^n к x в $\aleph$ (см. теорему 1.4). Сильная сходимость x_i^n в соответствующих пространствах вытекает из сильной сходимости x^n в $\aleph$. В частности, сильная сходимость $\mathcal{E}(v^n) \to \mathcal{E}(v)$ в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. В силу неравенства 1.1 следует сильная сходимость $v^n \to v$ в $L_2(0,T;V)$. Кроме того, $v^n(T,x)$ сходится к $v(T,x)$ в H сильно.

Теорема 2.3 доказана.

2.5 Доказательство теоремы 2.1

Теперь покажем, что полученное (v,θ), $(v \in U(0,T), \theta \in \Upsilon)$, является слабым решением задачи (2.1)-(2.5). Как было установлено выше, v удовлетворяет соотношению (2.8). Перепишем (2.8) в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v,\varphi\rangle = \langle z,\varphi\rangle, \tag{2.55}$$

где

$$z = \partial(v_i v)/\partial x_i - \mu_0 \triangle v - \mathrm{Div}[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v) - \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds + f. \tag{2.56}$$

Здесь $\langle z,\varphi\rangle$ означает двойственность между V' и V.

Из оценок (2.30) и (2.56) следует, что $z \in L_2(0,T;V')$,

$$\|z\|_{L_2(0,T;V')} \le M(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0).$$

Отсюда в силу теоремы 1.1, следует, что $\partial v/\partial t \in L_2(0,T;V')$ и

$$\|v\|_{U(0,T)} \le M(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0),$$

а в силу леммы 1.1, следует, что $v \in C_w(0,T;H)$. Таким образом, $v \in U(0,T)$. Кроме того, $v|_{t=0} = v^n|_{t=0} = v^0$. Следовательно, v удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (2.1)-(2.5) для v.

Теперь установим, что $\theta \in \Upsilon$ и удовлетворяет соотношению (2.9).

Из (2.22) следует, что

$$d(\theta^n,\phi)/dt - (v_i^n\theta^n, \tfrac{\partial\phi}{\partial x_i}) + \chi(\tfrac{\partial\theta^n}{\partial x_i}, \tfrac{\partial\phi}{\partial x_i}) =$$

$$\langle g,\phi\rangle + (\tilde{\mu}_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n),\phi) + \tag{2.57}$$

$$\mu_2(\textstyle\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x) : \mathcal{E}(v^n)(t,x)ds, \phi),$$

в смысле распределений на $(0,T)$ для любых $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Умножим (2.57) на функцию $\psi(t)$, которая является бесконечно дифференцируемой и удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T) = 0$. Далее проинтегрируем на [0,T], а затем по частям:

$$-\textstyle\int_0^T(\theta,\phi)\psi'(t)\,dt - \int_0^T(v_i^n\theta^n, \partial\phi/\partial x_i)\psi(t)\,dt +$$

$$\chi\textstyle\int_0^T(\partial\theta^n/\partial x_i, \partial\phi/\partial x_i)\,\psi(t)\,dt = \int_0^T\langle g,\phi\rangle\psi(t)\,dt +$$

$$\mu_0\textstyle\int_0^T(\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,dt + + \int_0^T(\mu_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n),\phi)\psi(t)\,dt + \tag{2.58}$$

$$+\mu_2\textstyle\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds : \mathcal{E}(v^n),\phi)\,\psi(t)\,dt, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

В силу сильной сходимости v^n в $L_2(0,T;V)$ и θ^n в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$ является возможным предельный переход во всех слагаемых, за исключением третьего в левой части (2.58).

Из оценки (2.18) следует ограниченность θ^n в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, а следовательно, слабая компактность в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Без ограничения общности считаем, что θ^n слабо сходится к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Тогда в третьем слагаемом также допустим предельный переход.

Делая в (2.58) предельный переход, получаем равенство

$$(-\int_0^T (\theta,\phi)\psi'(t)\,dt) + \int_0^T (v_i\theta, \partial\phi/\partial x_i)\psi(t)\,dt +$$

$$\chi\int_0^T (\partial\theta/\partial x_i, \partial\phi/\partial x_i)\psi(t)\,dt = \int_0^T \langle g,\phi\rangle\psi(t)\,dt +$$

$$\mu_0\int_0^T (\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,dt + \int_0^T (\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,dt + \tag{2.59}$$

$$+\mu_2\int_0^T\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds:\mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,dt.$$

В силу произвольности ψ из (2.59) вытекает справедливость соотношения (2.9).

Перепишем (2.8) в виде

$$-\int_0^T \langle\theta,\phi\rangle\psi'(t)\,dt = \int_0^T \langle u,\phi\rangle\psi(t)\,dt, \tag{2.60}$$

где

$$u = -v_i\partial\theta/\partial x_i + \chi\triangle\theta + g + \mu_0\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v) + \mu_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v) + \tag{2.61}$$

$$+\mu_2\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)ds:\mathcal{E}(v).$$

Здесь $\langle u,\phi\rangle$ означает двойственность между $W_p^{-1}(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$. Из оценок (2.42) и (2.43) вытекает, что $u\in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ и $\|u\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}\le M$. Отсюда в силу теоремы 1.1 следует, что $\partial\theta/\partial t\in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ и $\|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}\le M\|u\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}$, а в силу леммы 1.1 следует, что $\theta\in C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega))$. Таким образом, $\theta\in\Upsilon$. Кроме того, $\theta|_{t=0}=\theta^n|_{t=0}=\theta^0$. Следовательно, θ удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (2.1)-(2.5) для θ.

Таким образом (v,θ) является слабым решением задачи (2.1)-(2.5).

Теорема 2.1 доказана.

ГЛАВА 3
СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ПАМЯТЬЮ

3.1 Существование слабых решений регуляризованной задачи

Рассматривается начально-граничная задача

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v -$$

$$-\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\,ds + \nabla p = f,\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{3.1}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{3.2}$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi \triangle\, \theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) +$$

$$\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\,ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T; \tag{3.3}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{3.4}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau \hat{v}(s, z(s;t,x))\,ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$ – скорость, θ – температура, p – давление среды, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $0 < m_1^* < \mu_1(s) < m_1^{**}$.

Здесь $\hat{v} = S_\delta v = (I + \delta B)^{-1} v$, $\delta > 0$. При $\delta \to 0$ операторы $S_\delta = (I + \delta B)^{-1} v$ сильно сходятся к I в H. Ниже всюду $v_x(x) = \{\partial v_k(x)/\partial x_i\}_{k,i=1,2}$ означает матрицу Якоби вектор-функции $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$, $v_{xx}(x) = \{\partial^2 v_k(x)/\partial x_i \partial x_j\}_{k,i,j=1,2}$ - тензор, состоящий из вторых производных.

Введем следующие функциональные пространства

$$U'(0,T) \equiv L_2(0,T;V) \cap W_2^1(0,T;V^{'}) \cap C_w(0,T;H),$$

$$\Upsilon' \equiv L_1(0,T;W_p^1(\Omega)) \cap W_1^1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)) \cap C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)),$$

$$1 < p < +\infty.$$

Определение 3.1. *Пара (v,θ) называется слабым решением задачи (3.1)-(3.4) , где*

$$v \in U(0,T), \tag{3.6}$$

$$\theta \in \Upsilon, \tag{3.7}$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{gathered} d(v,\varphi)/dt - (v_i v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + (\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + \\ +\mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f,\varphi\rangle \end{gathered} \tag{3.8}$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t,

$$\begin{gathered} d(\theta,\phi)/dt - (v_i\theta, \partial\phi/\partial x_i) + \chi(\partial\theta/\partial x_i, \partial\phi/\partial x_i) = \\ = \langle g,\phi\rangle + (\tilde{\mu}_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\phi) + \\ +\mu_2(\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)) : \mathcal{E}(v)(t,x))\,ds, \phi), \end{gathered} \tag{3.9}$$

где $\tilde{\mu}_1(\theta) = \mu_0 + \mu_1(\theta)$, в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t, и условиям (3.2) и (3.4).

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 3.1. *Пусть функция* $\mu_1(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$*, монотонно возрастает и*

$$0 < m_1^* < \mu_1(s) < m_1^{**},\ s \in (-\infty, +\infty), \tag{3.10}$$

$f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega))$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *существует по крайней мере одно решение задачи (3.1)-(3.4).*

Доказательство теоремы 3.1 разбито на ряд этапов и проводится в разделах 3.2-3.5. В разделе 3.2 рассматривается задача (3.1)-(3.2), (3.5) при фиксированной θ и доказывается ее разрешимость. Далее доказывается разрешимость задачи (3.3)-(3.4) при фиксированной v. Решая последовательно задачи (3.1)-(3.2), (3.5) и (3.3)-(3.4) в разделе 3.3, устраивается последовательность (θ^n, v^n) из их решений θ^n и v^n. Затем показывается, что в пределе эта последовательность дает решение (3.1)-(3.4), (0.50).

3.2 Вспомогательные задачи

Рассмотрим сначала задачу

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[m(t,x)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = f;\ \mathrm{div}\, v = 0; \tag{3.11}$$

$$v|_{t=0} = v^0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.12}$$

Слабое решение задачи (3.11)-(3.12) определим как $v \in U(0,T)$, которая удовлетворяет (3.8) при замене $\tilde{\mu}_1(\theta)$ на $m((t,x)$ и $\mu_0 = \mu_2 = 0$.

Лемма 3.1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V'), v^0 \in H$*, функция* $m(t,x)$*ограничена и измерима на* Q_T*,* $0 < K_1 \le m(t,x) \le K_1^*$*. Тогда задача (3.11)-(3.12) имеет единственное слабое решение и справедлива оценка*

$$\|v\|_{U(0,T)} \le M_1(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0). \tag{3.13}$$

Пусть при $f_i \in L_2(0,T;V')$ v^i *являются решениями задач (3.11)-(3.12). Тогда*

$$\|v^1 - v^2\|_{U(0,T)} \le M_1' \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;V')}. \tag{3.14}$$

Здесь M_1 и M_1' зависят от $\|m\|_{L^\infty(Q_T)}$, а

$$\|v\|_{U(0,T)} \equiv \|\partial v/\partial t\|_{L_2(0,T;V'(\Omega))} + \|v\|_{0,1} + \sup_{0\leq T} |v(t,x)|_0.$$

Доказательство первого утверждения леммы (3.1) приводится в [22]. Доказательство второго утверждения леммы проводится стандартным образом по схеме доказательства единственности для системы Навье-Стокса (см., например [20], с. 234-236).

Далее рассмотрим задачу

$$\partial\theta/dt + v_i\partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\theta = m(\tilde{\theta})\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \tilde{g} + g, \tag{3.15}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.16}$$

где $m(\theta) = \mu_0 + \tilde{m}u_1(\theta)$.

Слабое решение задачи (3.15)-(3.16) определим $\theta \in \Upsilon$, которая удовлетворяет условиям (3.16) и

$$\begin{gathered} d(\theta,\phi)/dt - (v_i\theta, \partial\phi/\partial x_i) + \chi(\partial\theta/\partial x_i, \partial\phi/\partial x_i) = \\ = \langle g, \phi\rangle + (\tilde{g}, \phi) + m(\tilde{\theta})\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi), \end{gathered} \tag{3.17}$$

в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t.

Лемма 3.2. *Пусть $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\tilde{g} \in L_1(0,T; L_1(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$, $\hat{\theta} \in \Upsilon$, $v \in U(0,T)$. Тогда задача (3.15)-(3.16) имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \|\theta\|_\Upsilon \equiv \|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} + \|\theta\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))} + \\ \sup\nolimits_{0\leq t\leq T} \|\theta(t,x)\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)} \leq M_2(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \\ \|\hat{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|v\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Утверждение леммы (3.2) вытекает из [12] при $m = \mathrm{const}$.

Доказательство леммы (3.2) проходит также для случая, когда $m = \mu_0 + \mu_1(\tilde{\theta})$, $\tilde{\theta} \in \Upsilon$. Тогда в этом случае $m \in L^\infty(Q_T)$, причем $\|m\|_{L^\infty(Q_T)} \le \mu_0 + \sup_{s\ge 0}\mu_1(s) < +\infty$, и все априорные оценки, которые были использованы при доказательстве в случае $m = \mathrm{const}$, сохраняются.

Константа M_2 не зависит от $\tilde{\theta}$. Включение $\theta \in C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega))$ устанавливается с помощью леммы 1.1 и оценки (3.18).

Воспользуемся следующими фактами о свойствах решений задачи Коши (0.49) (см. [29]).

Лемма 3.3. *Пусть $v \in v \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\Omega}))$. Тогда задача (0.49) имеет единственное решение $z(\tau;t,x)$, такое, что $z(\tau;t,x), z_x(\tau;t,x) \in C([0,T] \times [0,T] \times \overline{\Omega})$, и справедливы неравенства*

$$\|z_x(\tau;t,x)\| \le M \exp(|\int_t^\tau \|v_x(s,x)\|_{C(\overline{\Omega})}\,ds|),\ 0 \le \tau, t \le T,\ x \in \overline{\Omega}, \tag{3.19}$$

$$\|z(\tau;t,x)\| \le \|x\| + |\int_t^\tau \|v(s,x)\|\,ds|)\ 0 \le \tau, t \le T,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{3.20}$$

Лемма 3.4. *Пусть $v^k \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\Omega}))$, $k = 1,2$, $z^k(\tau;t,x)$ - решения соответствующих задач Коши (0.49). Тогда при $1 \le q_1 \le q$ справедливы неравенства*

$$\|z^1(\tau;t,x) - z^2(\tau;t,x)\|_{L_{q_1}(\Omega)} \le M|\int_t^\tau \|v_x^1(s,x) - v_x^2(s,x)\|_{L_{q_1}(\Omega)}\,ds| \times \tag{3.21}$$

$$\exp(M|\int_t^\tau \|v^-(s,x)\|_{C^1(\overline{\Omega})}\,ds|),\ |v^-(s,x)\|_{C^1(\overline{\Omega})}| = \min_{k=1,2} |v^k(s,x)\|_{C^1(\overline{\Omega})}|.$$

Лемма 3.5. *Пусть $v \in L_1(0,T;W_q^2(\Omega))$ при $q > 2$. Тогда для решения $z(\tau;t,x)$ задачи (0.49) справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\|z_{xx}(\tau;t,x)\|_{L_q(\Omega)} \le M|\textstyle\int_t^\tau \|v_x(s,x)\|_{W_q^2(\Omega)}\,ds \times \\ \times \exp(M|\textstyle\int_t^\tau \|v(s,x)\|_{W_q^2(\Omega)}\,ds|).\end{gathered} \tag{3.22}$$

Из определения и единственности решения задачи Коши вытекают следующие соотношения

$$z(\tau;t,x) = z(\tau;s,z(s;t,x)), \tag{3.23}$$

$$z(t;t,x) = x. \tag{3.24}$$

Исследуем вопрос о разрешимости задачи Коши (3.5).

Лемма 3.6. *Пусть $v \in V$. Тогда $\hat{v} = (I+\delta B)^{-1}v$, принадлежит $C^2(\overline{\Omega})$, и справедливы неравенства*

$$\|\hat{v}\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M|v|_0, \quad \|\hat{v}\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M|v|_1. \tag{3.25}$$

Так как оператор $S_\delta{:}W^k(\Omega)\cap H \to W^{k+2}(\Omega)\cap H$ ($S_\delta v \equiv \hat{v} = (I+\delta B)^{-1}v$) - ограничен (см. [19], с. 170), то из $v \in V$ вытекает, что $\hat{v} \in W_2^3(\Omega)$. А так как вложение $W_2^2(\Omega) \in C^1(\overline{\Omega})$ является непрерывным, то отсюда вытекают неравенства (3.25).

Следствие из леммы 3.6. Из неравенств (3.25) следует, что $\hat{v} \in L_2(0,T;C^2(\overline{\Omega}))$ при $v \in V$, и справедливо неравенство

$$\|\hat{v}\|_{L_2(0,T;C^2(\overline{\Omega}))} \leq M\|v\|_{0,1}. \tag{3.26}$$

Из леммы 3.7 и (3.26) следует

Лемма 3.7. *Пусть $v \in L_2(0,T;V)$.Тогда существует единственное решение $z(\tau;t,x)$ задач Коши (0.50), такое, что $z(\tau;t,x), z_x(\tau;t,x) \in C([0,T]\times[0,T]\times\Omega)$, и справедливы неравенства (3.19) и (3.20) и*

$$\|z_{xx}(\tau;t,x)\|_{L_q(\Omega)} \leq M|\int_t^\tau |v_x(s,x)|_1\,ds|\exp(M|\int_t^\tau |v(s,x)|_1\,ds|). \tag{3.27}$$

Пусть $v^k \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})\cap C^0(\overline{\Omega}))$, $k=1,2$, $z^k(\tau;t,x)$ - решения соответствующих задач Коши (0.49).

Тогда справедливо неравенство (3.21).

3.3 Последовательные приближения

Определим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0, 1, 2, \dots$ следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 - начальные значения для v и θ из (3.2) и (3.4) соответственно. Пусть известны (v^n, θ^n). Тогда v^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\partial v^{n+1}/\partial t + v_i^{n+1}\partial v^{n+1}/\partial x_i - \mu_0\triangle v^{n+1} - \mathrm{Div}[\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})] -$$
$$-\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v^{n+1})(s, z^n(s;t,x))]ds + \nabla p^{n+1} = f,\ \mathrm{div}\, v^{n+1} = 0 \text{ на } Q_T; \tag{3.28}$$

$$z^n(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau \hat{v}^n(s, z^n(s;t,x))\, ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{3.29}$$

$$v^{n+1}|_{t=0} = v^0, v^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.30}$$

а θ^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\partial\theta^{n+1}/\partial t + v_i^{n+1}\partial\theta^{n+1}/\partial x_i + \chi\triangle\, \theta^{n+1} = (\mu_0 + \mu_1(\theta^n))\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) +$$
$$+\mu_2 \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1}(s, z^n(s;t,x))ds : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g, \tag{3.31}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta^0; \theta^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.32}$$

Слабым решением задачи (3.28)-(3.30) называется соленоидальная функция $v^{n+1} \in U(0,T)$, которая удовлетворяет соотношениям (3.30) и

$$d(v^{n+1}, \varphi)/dt - (v_i^{n+1}v^{n+1}, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v^{n+1}) +$$
$$(\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}), \mathcal{E}(\varphi)) + \mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s, z^n(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f, \varphi\rangle \tag{3.33}$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t.

Слабым решением задачи (3.31)-(3.32) называется функция $\theta^{n+1} \in \Upsilon$, которая удовлетворяет соотношениям (3.32) и

$$d(\theta^{n+1},\phi)/dt-\sum_{i=1}^{2}(v_i^{n+1}\theta^{n+1},\partial\phi/\partial x_i)+$$

$$\chi\sum_{i=1}^{n}(\partial\theta^{n+1}/\partial x_i,\partial\phi/\partial x_i)=\langle g,\phi\rangle+(\tilde\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}):\mathcal{E}(v^{n+1}),\phi)+ \tag{3.34}$$

$$+\mu_2(\int_0^t\mathcal{E}(v^{n+1})(s,z^n(s;t,x))\,ds:\mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)),\mathcal{E}(\varphi))$$

в смысле распределений на $(0,T)$ при п.в. t для любых $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Теорема 3.2. *В условиях теоремы 3.1 последовательные приближения определены, а также справедливы равномерные по n оценки*

$$\|v^n\|_{U(0,T)}\le M_3,\|\theta^n\|_\Upsilon\le M_4,n=0,1,2,... \tag{3.35}$$

Доказательство теоремы 3.2. Вначале установим разрешимость задачи

$$\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mu_0\triangle v-\mathrm{Div}\,[m(t,x)\mathcal{E}(v)]-$$

$$+\mu_2\int_0^t\mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))]\,ds+\nabla p=f,\ \mathrm{div}\,v=0 \text{ на } Q_T; \tag{3.36}$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau\hat v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad \tau,t\in[0,T],\quad x\in\Omega, \tag{3.37}$$

$$v|_{t=0}=v^0,v|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.38}$$

где $m(t,x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.1.

Лемма 3.8. *Для слабого решения задачи (3.36)-(3.38) справедливо тождество*

$$\tfrac12|v(\tau,.)|_0^2+\mu_0\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,\tau;L_2(\Omega))}+\|m^{1/2}(t,x)\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,\tau;L_2(\Omega))}+$$

$$\tfrac12\mu_2|\int_0^\tau\mathcal{E}(v)(s,z(s;0,x))\,ds|_0^2=\tfrac12|v^0|_0^2+\int_0^\tau\langle f,v\rangle\,ds, \tag{3.39}$$

$$0\le\tau\le T.$$

Доказательство леммы 3.8. В силу леммы 3.3 из (3.26) вытекает, что задача (3.37) однозначно разрешима, и интегральное слагаемое в (3.36) имеет смысл. Умножим (3.36) на v в H. Рассмотрим слагаемое $-J$, которое было получено при умножении третьего слагаемого в (3.28) на v. Воспользовавшись симметричностью $\mathcal{E}(v)$, с помощью интегрирования по частям имеем:

$$J = \int_0^\tau (\int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))\, ds, \mathcal{E}(v)(t, x))\, dt.$$

Используя соотношения (3.23) и (3.24), получаем

$$J = \int_0^\tau (\int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(\tau; 0, z(0; t, x))\, ds, \mathcal{E}(v)(t, x)))\, dt.$$

Сделаем замену переменной $z(0; t, x) = y$ в скалярном произведении, так что $z(t; 0, y) = x$. Якобиан этого преобразования равен единице. Тогда

$$J = \int_0^\tau (\int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, y))\, ds, \mathcal{E}(v)(t, z(t; 0, y)))\, dt.$$

Обозначив $\varphi(t, y) = \mathcal{E}(v)(t, z(t; 0, y))$, с помощью интегрирования по частям по t получаем, что

$$J = \int_0^\tau (\int_0^t \varphi(s, y)\, ds, \varphi(t, y))\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{d}{dt}|\int_0^t \varphi(s, y)\, ds|_0^2\, dt =$$
$$\frac{1}{2}|\int_0^\tau \varphi(s, y)\, ds|_0^2 = \frac{1}{2}|\int_0^\tau \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, y))\, ds|_0^2. \tag{3.40}$$

Остальные слагаемые, полученные при умножении (3.28) на v, преобразуются стандартным образом (см. доказательство леммы 2.3). С учетом (3.40) отсюда вытекает соотношение (3.39). Лемма 3.8 доказана.

Лемма 3.9. *Пусть v - слабое решение задачи (3.36)-(3.38). Тогда справедливо неравенство*

$$\|\partial v/\partial t\|_{0,-1} + \sup_t |v(t, .)|_0 + \|v\|_{0,1} \le M_4(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0), \tag{3.41}$$

где M_4 зависит от $\|m\|_{L^\infty(Q_T)}$.

Доказательство леммы 3.9. Проводя стандартные выкладки (см. доказательство леммы 2.3) с учетом (3.10) и используя (3.39), получаем (3.41).

Лемма 3.9 доказана.

Теперь установим разрешимость задачи (3.36)-(3.38).

Лемма 3.10. *При выполнении условий теоремы 3.1 задача (3.36)-(3.38) имеет слабое решение, и справедлива оценка*

$$\|v\|_{U(0,T)} \le M_4(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0). \tag{3.42}$$

Доказательство леммы 3.10. При измеримой и ограниченной $m(t,x)$, удовлетворяющей $0 < k_1 \le m(t,x) \le k_2$, а также при $\mu_2 = 0$ разрешимость задачи (3.36)-(3.38) и оценка (3.42) установлены в лемме 3.1. Обозначим через $R(f, v^0, m)$ оператор, ставящий в соответствие (f, v^0, m) решение v задачи (3.36),(3.38) при $\mu_2 = 0$, так что $v = R(f, v^0, m)$.

Перепишем (3.36) в виде

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mu_0 \triangle v - \mathrm{Div}\,[m(t,x)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = w, \tag{3.43}$$

$$w = f + \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\,ds. \tag{3.44}$$

Воспользовавшись оператором R, перепишем (3.44) в виде

$$w = K(w),\ \ K(w) \equiv f + \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(R(w, v^0, m))(s, z(s;t,x))]\,ds, \tag{3.45}$$

где $z(\tau; t, x)$ является решением задачи (3.37) при $v = R(w, v^0, m)$.

Теперь с помощью принципа сжимающих отображений установим разрешимость уравнения (3.45).

Для начала покажем, что при достаточно малом T оператор K преобразует в себя шар $S(R) = \{w : \|w\|_{0,-1} \le R\}$ достаточно большого радиуса R. Действительно, если положить, что $v = R(w, v^0, m)$, имеем

$$\|K(w)\|_{0,-1} \le \|f\|_{0,-1} + M \|\int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))]\,ds\|_{0,-1}. \tag{3.46}$$

Далее,

$$\begin{gathered}\| \int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))]\,ds\|_{0,-1}^2 = \\ \int_0^T |\int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))]\,ds|_{-1}^2\,dt \le \\ \int_0^T |\int_0^t |\mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))]|_{-1}\,ds|^2\,dt \le \\ M\int_0^T |\int_0^t |v_x(s,z(s;t,x))|_0\,ds|^2\,dt.\end{gathered} \tag{3.47}$$

Делая замену переменной $y = z(s;t,x)$ получаем

$$\begin{gathered}|v_x(s,z(s;t,x))|_0^2 = \int_\Omega |v_x(s,z(s;t,x))|^2\,dx = \\ \int_\Omega |v_x(s,y)|^2\,dy = |v_x(s,y)|_0^2 = |v_x(s,x)|_0^2.\end{gathered} \tag{3.48}$$

с помощью неравенства Гельдера из (3.46)-(3.48) следует, что

$$\begin{gathered}\|K(w)\|_{0,-1} \le \|f\|_{0,-1} + M(\int_0^T t\int_0^t |v_x(s,x)|_1^2\,ds\,dt)^{1/2} \le \\ \|f\|_{0,-1} + M\|v\|_{0,1}T.\end{gathered} \tag{3.49}$$

Из (3.13) вытекает, что

$$\|v\|_{0,1} = \|(R(w,v^0,m))\|_{0,1} \le M_1(\|w\|_{0,-1} + |v^0|_0).$$

Следовательно, для $w \in S(R)$

$$\begin{gathered}\|K(w)\|_{0,-1} \le \|f\|_{0,-1} + M_6T(\|w\|_{0,-1} + |v^0|_0) \le \\ \|f\|_{0,-1} + M_6T(R + |v^0|_0).\end{gathered} \tag{3.50}$$

Здесь M_6 зависит от $\|m\|_{L^\infty(Q_T)}$.

Из (3.50) следует, что найдется такое достаточно малое T_1, что при $T \le T_1$ оператор K преобразует в себя шар $S(R) = \{w : \|w\|_{0,-1} \le R\}$ достаточно большого радиуса R.

Теперь покажем, что найдется такое достаточно малое T_2, что при $T \leq T_2$ оператор K является сжимающим на шаре $S(R)$. Пусть $w_1, w_2 \in S(R)$. Тогда

$$K(w_1) - K(w_2) = \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(R(w_1, v^0, m) - R(w_2, v^0, m))(s, x)]\, ds.$$

Полагая $v^1 = R(w_1, v^0, m),\ v^2 = R(w_2, v^0, m)$ и пользуясь (3.14), имеем

$$\|R(w_1, v^0, m) - R(w_2, v^0, m)\|_{U(0,T)} \leq M_1' \|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;V')}.$$

С помощью этого неравенства, а также соображений, использованных при выводе (3.50), имеем

$$\|K(w_1) - K(w_2)\|_{0,-1} \leq M_6 T \|w_1 - w_2\|_{0,-1}.$$

Отсюда следует, что найдется такое достаточно малое T_2, что при $T \leq T_2$ справедливо неравенство

$$\|K(w_1) - K(w_2)\|_{0,-1} \leq q\|w_1 - w_2\|_{0,-1},\ 0 < q < 1. \tag{3.51}$$

Таким образом, найдется такое $T_0 \leq \min(T_1, T_2)$, что при $T = T_0$ для оператора K выполняются условия принципа сжимающих отображений. Следовательно, уравнение (3.45) однозначно разрешимо при $T = T_0$. Отсюда и из (3.13) с учетом леммы 3.1 следует разрешимость задачи (3.36)-(3.38).

Оценка (3.42) следует из (3.13) и (3.50). Таким образом, лемма 3.10 при $T = T_0$, T_0 мало, доказана.

Для случая произвольного T необходимо рассмотреть последовательность задач

$$\partial v^k/\partial t + v_i^k \partial v^k/\partial x_i - \mu_0 \triangle v^k - \mu_2 \textstyle\int_0^t \mathrm{Div}\, v^k[\mathcal{E}(v^k)(s, z^k(s; t, x))]\, ds -$$

$$\mathrm{Div}\,[m(t,x)\,\mathcal{E}(v^k)] + \nabla p^k = f;\ \mathrm{div}\, v^k = 0 \tag{3.52}$$

$$\text{на } Q_{[T_k, T_{k+1}]} = [T_k, T_{k+1}] \times \Omega;$$

$$z^k(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau \hat{v}^{k-1}(s, z^k(s;t,x))\,ds, \quad \tau, t \in [T_k, T_{k+1}], \quad x \in \Omega, \qquad (3.53)$$

$$v^k(T_k, x) = w^k(x),\ x \in \Omega;\ v^k(t,x) = 0,\ T_k \le t \le T_{k+1},\ x \in \partial\Omega, \qquad (3.54)$$

где

$$T_k = kT_0,\ k = 1, 2, \dots, [T/T_0], w^k(x) = v^{k-1}(T_k, x),$$

$v^0(t,x)$ является решением задачи (3.36)-(3.38) на $[0, T_0]$. Без ограничения общности считаем T/T_0 целым.

Решения задач (3.52)-(3.54) ищутся в классах $U(T_k, T_{k+1})$, определяемых аналогично $U(0,T)$, применив замену $(0,T)$ на (T_k, T_{k+1}).

Нетрудно увидеть, что оценка (3.41) решения задачи (3.36)-(3.38) на $[0,T]$ также справедлива и для решений задач (3.52)-(3.54) с заменой $[0,T]$ на $[T_k, T_{k+1}]$ и v^0 на w^k.

Именно, из этой оценки вытекает равномерная ограниченность $|w^k(t,x)|_0$.

Отсюда следует, что задачи (3.52)-(3.54) однозначно разрешимы на соответствующих отрезках $[T_k, T_{k+1}]$.

Определим $v(t,x)$ при $t \in [0,T]$ как функцию, которая равна $v^k(t,x)$ на $[T_k, T_{k+1}]$. Ясно, что $v(t,x)$ является решением задачи (3.36)-(3.38) на $[0,T]$ и удовлетворяет оценке (3.41). Лемма 3.10 доказана.

Теперь установим разрешимость задачи (3.28)-(3.30).

Лемма 3.11. *Пусть $\theta^{n+1} \in \Upsilon$. Тогда задача (3.28)-(3.30) имеет слабое решение, и справедлива оценка*

$$\|v^{n+1}\|_{U(0,T)} \le M_7(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0). \qquad (3.55)$$

Доказательство леммы 3.11. Пусть $m(t,x) = \mu_0 + \mu_1(\theta^n(t,x))$. Тогда $m(t,x)$ с некоторыми K_1 и K_1^* удовлетворяет условиям 3.1. Утверждение леммы 3.11 вытекает теперь из утвеждения леммы 3.10.

Рассмотрим теперь задачу (3.31)-(3.32) при фиксированном $v^{n+1} \in V$.

Лемма 3.12. *Пусть* $v^{n+1} \in U(0,T)$, $\theta^n \in \Upsilon$. *Тогда задача (3.31)-(3.32) имеет слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta^{n+1}\|_\Upsilon \leq M_8(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{3.56}$$

Доказательство леммы 3.12. Обозначим второе слагаемое в правой части (3.31) через $\tilde{g}$. Теперь покажем, что $\tilde{g} \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$. Легко видеть, что

$$\|\tilde{g}\|_{L_1(\Omega)} = \|\mu_2 \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1}(s, z^n(s;t,x))ds : \mathcal{E}(v^{n+1})\|_{L_1(\Omega)} \leq$$
$$M \int_0^t |v^{n+1}(s, z^n(s;t,x))|_1\, ds |v^{n+1}(t,x)|_1. \tag{3.57}$$

Делая замену переменной $y = z^n(s;t,x)$ получаем, что

$$|v^{n+1}(s, z^n(s;t,x))|_1^2 = \int_\Omega |v^{n+1}(s, z^n(s;t,x))|^2 + |v_x^{n+1}(s, z^n(s;t,x))|^2\, dx =$$
$$\int_\Omega |v^{n+1}(s,y)|^2 + |v_x^{n+1}(s,y)|^2\, dy = |v^{n+1}(s,y)|_1^2.$$

Отсюда и из (3.57), используя интегрирование по t, вытекает

$$\|\tilde{g}\|_{L_1(\Omega)} \leq M \int_0^t |v^{n+1}(s,x)|_1\, ds |v^{n+1}(t,x)|_1 \leq M\|v^{n+1}\|_{0,1}|v^{n+1}(t,x)|_1. \tag{3.58}$$

Из (3.58), используя интегрирование по t, следует, что $\|\tilde{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \leq M\|v^{n+1}\|_{0,1}^2$. Отсюда и из условия на g с помощью леммы 3.12 вытекает слабая разрешимость задачи (3.31)-(3.32) и оценка

$$\|\theta^{n+1}\|_\Upsilon \leq M(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{3.59}$$

Оценки (3.35) установлены.

В силу леммы 3.2 получаем, что задача (3.31)-(3.32) имеет решение $\theta^{n+1} \in \Upsilon$, и справедлива оценка (3.56). Лемма 3.12 доказана.

Из лемм 3.11 и 3.12 следует, что последовательные приближения (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$ определены. Так как функция $\mu_1(s)$ - ограничена, то отсюда вытекает равномерная ограниченность $\mu_1(\theta^{n+1})$, а в силу оценок (3.42) и (3.56) и справедливость (3.35). Оценки (3.35) установлены. Следовательно, теорема 3.2 доказана.

3.4 Предельный переход

Теперь рассмотрим (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$. Определим через v^n - решение задачи (3.28)-(3.30), а θ^n - решение задачи (3.31)-(3.32). Сначала рассмотрим θ^n.

Лемма 3.13. *Последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T : L_p(\Omega))$.*

Доказательство леммы 3.13. Воспользуемся утверждением 1.1.

В качестве возьмем $X = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega))$, $B = L_p(\Omega)$, $Y = W_p^{-1}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$. Тогда условия на X, B, Y выполняются. Из оценки (3.56) следует, что θ^n ограничена в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, а $\partial\theta^n/\partial t$ ограничена в $L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$. Отсюда последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$. Лемма 3.13 доказана.

Без ограничения общности можно считать, что θ^n сходится к θ в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$. Также без ограничения общности будем считать, что θ^n сходится к θ п.в. в $L_p(Q_T)$.

Теперь рассмотрим v^n. Из оценки оценки (3.35) вытекает, что последовательность v^n ограничена в $L_2(0, T; V)$, и следовательно слабо компактна в $L_2(0, T : V)$, а последовательность $\partial v^n/\partial t$ ограничена в $L_2(0, T; V')$ и слабо компактна в $L_2(0, T; V')$.

Без ограничения общности можно считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0, T; V')$.

Тем не менее, v^n обладает лучшими свойствми.

Теорема 3.3. *Последовательность v^n сильно сходится в $L_2(0, T; V)$ к v , а $v^n(T, x)$ сильно сходится в H к $v(T, x)$.*

Для доказательства теоремы сначала исследуем вопрос о сходимости $z^n(s; t, x))$.

Лемма 3.14. *Пусть v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$. Тогда существует подпоследовательность $z^n(s; t, x)$ решений задачи (3.29), сходящаяся равномерно на Q_T к решению $z(s; t, x)$ задачи (0.50) для $v = \lim_{n\to+\infty} v^n$.*

Доказательство леммы 3.14. С помощью оценок (3.25)-(3.26), (3.55), из тождества (0.50) и вытекающего из него соотношения $z_t(\tau;t,x) = -z_x(\tau;t,x)\hat{v}(t,x)$ вытекает равномерная ограниченность $C(Q_T)$-норм для $z^n_\tau(\tau;t,x)$, $z^n_t(\tau;t,x)$, $z^n_x(\tau;t,x)$. В силу теоремы Арцела 1.6 отсюда следует компактность в $C(Q_T)$ последовательности $z^n(s;t,x)$. Будем считать, что $z^n(s;t,x)$ сходится в $C(Q_T)$ к $\tilde{z}(s;t,x)$. Покажем, что $\tilde{z}(s;t,x)$ совпадает с решением $z(s;t,x)$ задачи (0.50) для $v = \lim_{n\to+\infty} v^n$. Перейдем к пределу в соотношении

$$z^n(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau \hat{v}^n(s, z^n(s;t,x))\, ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega. \tag{3.60}$$

Нетрудно увидеть, что

$$\begin{gathered} z^n(\tau;t,x) - z(\tau;t,x) = \textstyle\int_t^\tau (\hat{v}^n(s, z^n(s;t,x)) - \hat{v}^n(s, z(s;t,x)))\, ds + \\ \textstyle\int_t^\tau (\hat{v}^n(s, z(s;t,x)) - \hat{v}(s, z(s;t,x)))\, ds = W_{n1} + W_{n2}. \end{gathered} \tag{3.61}$$

Пусть $t \le \tau$.

С помощью формулы Ньютона-Лейбница из (3.25) и (3.26) получаем, что

$$\begin{aligned} \|W_{n1}\|_{C(\Omega)} \le \int_t^\tau \|\hat{v}^n(s, z^n(s;t,x)) - \hat{v}^n(s, z(s;t,x))\|_{C(\Omega)}\, ds \le \\ M \int_t^\tau \|\hat{v}^n(s,x)\|_{C^1(\Omega)} \|z^n(s;t,x) - z(s;t,x)\|_{C(\Omega)}\, ds \le \\ M \int_t^\tau |v^n(s,x)|_1 \|z^n(s;t,x) - z(s;t,x)\|_{C(\Omega)}\, ds. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Далее, из (3.26) следует, что

$$\begin{gathered} \|W_{n2}\|_{C(\Omega)} \le \textstyle\int_t^\tau \|\hat{v}^n(s, z(s;t,x)) - \hat{v}(s, z(s;t,x))\|_{C(\Omega)}\, ds = \\ \textstyle\int_t^\tau \|\hat{v}^n(s,x) - \hat{v}(s,x)\|_{C(\Omega)}\, ds \le \\ M \textstyle\int_t^\tau |v^n(s,x) - v(s,x)|_0\, ds \le M\|v^n(s,x) - v(s,x)\|_0. \end{gathered} \tag{3.63}$$

Из (3.62) (3.63) следует неравенство

$$\|z^n(\tau;t,x)-z(\tau;t,x)\|_{C(\Omega)} \le M\|v^n(s,x)-v(s,x)\|_0 + \\ M\int_t^\tau |v^n(s,x)|_1 \|z^n(s;t,x)-z(s;t,x)\|_{C(\Omega)}\,ds. \tag{3.64}$$

Из интегрального неравенства (3.64) следует, что

$$\|z^n(\tau;t,x)-z(\tau;t,x)\|_{C(\Omega)} \le \|v^n(s,x)-v(s,x)\|_0 \times \\ \exp(M\int_t^\tau |v^n(s,x)|_1\,ds) \le M\|v^n-v\|_0\,ds\,\exp(M\|v^n\|_{0,1}). \tag{3.65}$$

Поскольку $\|v^n-v\|_0 \to 0$, а последовательность $\|v^n\|_{0,1}$ ограничена, то из (3.65) вытекает, что $\|z^n(\tau;t,x)-z(\tau;t,x)\|_{C(\Omega)} \to 0$ равномерно по $t \le \tau$.

Для случая $t \ge \tau$ рассуждения аналогичны. Отсюда следует, что $\tilde{z}(s;t,x){=}z(s;t,x)$. Лемма 3.14 доказана.

Лемма 3.15. *Из слабой сходимости v^n к v в $L_2(0,T;V)$ следует*

$$\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^n) \to \mu_1(\theta)\mathcal{E}(v) \text{ \textit{слабо в} } L_2(Q_T), \tag{3.66}$$

$$\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,z^n(s;t,x))\,ds \to \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds \text{ \textit{слабо в} } L_2(Q_T). \tag{3.67}$$

Доказательство леммы 3.15. Сначала докажем (3.66). Поскольку θ^n сходится в $L_p(Q_T)$, то из нее можно выделить сходящуюся п.в. подпоследовательность. Будем считать, что $\theta^n \to \theta$ п.в. на Q_T. Тогда и $\mu_1(\theta^n)$ сходится п.в. к $\mu_1(\theta)$ на Q_T. Слабая сходимость $\mathcal{E}(v^n)$ к $\mathcal{E}(v)$ в $L_2(Q_T)$, а затем и слабая в $L_2(Q_T)$ сходимость (3.66) легко вытекает из слабой сходимости v^n к v в $L_2(0,T;V)$.

Покажем теперь, что справедливо (3.67). Рассмотрим выражение

$$J=\int_0^\tau (\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(v)(t,x))\,dt.$$

Используя соотношения (3.23) и (3.24), имеем

$$J=\int_0^\tau (\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,z(\tau;0,z(0;t,x))\,ds, \mathcal{E}(v)(t,x)))\,dt.$$

Используя симметричность $\mathcal{E}(v)$, воспользуемся интегрированием по частям. Имеем:

$$J = \int_0^\tau (\int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(v)(t,x)))\,dt.$$

Используя соотношения (3.66) и (3.67), получаем

$$J = \int_0^\tau (\int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(\tau;0,z(0;t,x))\,ds, \mathcal{E}(v)(t,x)))\,dt.$$

$$I_n = \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s;t,x))\,ds, \varphi(t,x))\,dt = \tag{3.68}$$

$$\int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s;t,x)), \varphi(t,x))\,ds\,dt,$$

где $\varphi(t,x)$ - гладкая финитная на Q_T функция. Изменив в (3.68) порядок интегрирования, имеем

$$I_n = \int_0^T \int_s^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x)\varphi(t,x))\,dt\,ds = \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \int_s^T \varphi(t,x))\,dt\,ds =$$

$$\int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \psi(s,x))\,ds.$$

Здесь $\psi(s,x) = \int_s^T \varphi(t,x)\,dt$ - гладкая на Q_T функция. Из слабой сходимости $\mathcal{E}(v^n)$ в $L_2(Q_T)$ вытекает, что $I_n \to I = \int_0^T (\mathcal{E}(v)(s,x), \psi(s,x))\,ds = \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds, \varphi(t,x))\,dt$. Это означает справедливость (3.67). Лемма 3.15 доказана.

Лемма 3.16. *Пусть v^n, $n = 1, 2, ...$ - слабое решение задачи (3.28)-(3.30). Тогда v^n удовлетворяет следующим тождествам*

$$\frac{1}{2}|v^n(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \|\mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 +$$
$$\frac{1}{2}\mu_2|\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds|_0^2 = \frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v^n\rangle\,ds. \tag{3.69}$$

Доказательство леммы 3.16. Умножив (3.28) на v^n в H и проинтегрировав по t, так же, как и при выводе (3.39), преобразуя слагаемые стандартным образом, получаем

$$\tfrac{1}{2}|v^n(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \|\mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + J = \tag{3.70}$$

$$= \tfrac{1}{2}|v^0|_0^2 + \textstyle\int_0^T \langle f, v^n\rangle\, ds,$$

$$J = \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x)\, ds, \mathcal{E}(v^n)(t,x)))\, dt.$$

Воспользовавшись элементарными преобразованиями, имеем:

$$J = \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^T \frac{d}{dt}(\int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x)\, ds, \int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x)\, ds)\, dt = \tag{3.71}$$

$$= \tfrac{1}{2}|\textstyle\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(t,x)dt|_0^2.$$

С учетом преобразованных первых трех слагаемых из (3.70) и (3.71) вытекает соотношение (3.69). Лемма 3.16 доказана.

Доказательство теоремы 3.3.

Введем в $\aleph = H \times L_2(0,T : L_2(\Omega)) \times L_2(0,T : V)) \times H$ норму $\|x\|_\aleph = (|x_1|_0^2 + \|x_2\|_0 + \|x_3\|_0 + |x_4|_0^2)^{1/2}$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ - произвольный элемент из $\aleph$. Рассмотрим последовательность

$$x^n = (\frac{1}{2}v^n(T,x), \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v^n), \mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n), \frac{1}{2}\mu_2\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(t,x)dt).$$

Из слабой сходимости x_i^n следует слабая сходимость x^n к предельному элементу

$$x = (\frac{1}{2}v(T,x), \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v), \mu_1^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v), \frac{1}{2}\mu_2\int_0^T \mathcal{E}(v)(t,x)\, dt).$$

С другой стороны, из (3.69) что в силу слабой сходимости v^n к v следует, что

$$\|x^n\|_\aleph^2 \to \frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v\rangle\, ds, \tag{3.72}$$

а для v, так же как и для v^n, справедливо тождество

$$\tfrac{1}{2}|v(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v)\|_0^2 + \mu_0^{1/2}\|\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)\|_0^2 + \tag{3.73}$$

$$\tfrac{1}{2}\mu_2\|\textstyle\int_0^T \mathcal{E}(v)(t,x)dt\|_0^2 = \tfrac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v\rangle\, ds.$$

Из (3.72) и (3.73) следует, что $\|x^n\|_{\aleph} \to \|x\|_{\aleph}$.

Отсюда и из слабой сходимости x^n в $\aleph$ следует сильная сходимость x^n к x в $\aleph$ (см. теорему 1.4). Из сильной сходимости x^n в $\aleph$ следует сильная сходимость x_i^n в соответствующих пространствах. Именно, $\mathcal{E}(v^n) \to \mathcal{E}(v)$ в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ сильно. Отсюда в силу неравенства 1.1 вытекает, что $v^n \to v$ в $L_2(0,T;V)$ сильно. Более того, $v^n(T,x)$ сходится к $v(T,x)$ в H сильно. Теорема 3.3 доказана.

3.5 Доказательство теоремы 3.1

Теперь покажем, что полученное (v,θ), $(v \in U(0,T), \theta \in \Upsilon)$, является слабым решением задачи (3.1)-(3.4).

Для начала установим, что v удовлетворяет соотношению (3.8). Из (3.28) следует, что

$$(v^n(T,x),\varphi) - \int_0^T (v_i^n v^n, \partial\varphi/\partial x_i)\,dt + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\varphi))\,dt +$$

$$+ \int_0^T (\mu_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\varphi))\,dt + \mu_2 \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s,x),\mathcal{E}(\varphi))\,ds\,dt = \tag{3.74}$$

$$= \int_0^T \langle f,\varphi\rangle\,dt + (v^0,\varphi), \varphi \in V.$$

В (3.74) первые сомножители в скалярных произведениях сильно в $L_2(0,T;V)$ сходятся к своим пределам. Следовательно,

$$(v(T,x),\varphi) - \int_0^T (v_i v, \partial\varphi/\partial x_i)\,dt + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))\,dt +$$

$$+ \int_0^T (\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))\,dt + \mu_2 \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x),\mathcal{E}(\varphi))\,d\,sdt = \tag{3.75}$$

$$= \int_0^T \langle f,\varphi\rangle\,dt + (v^0,\varphi), \varphi \in V.$$

Легко видеть, что тождество (3.75) остается справедливым, если заменить T на t. Так как в силу $v \in L_2(0,T;V)$ под знаком интеграла находятся суммируемые функции, заменим T в (3.75) на t и продифференцируем (3.75) по t при п.в. t. Получим соотношение (3.8).

Перепишем (3.8) в виде

$$d\langle v,\varphi\rangle/dt=\langle z,\varphi\rangle, \tag{3.76}$$

$$z=\partial(v_iv)/\partial x_i-\mu_0\triangle v-\mathrm{Div}[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)]- \\ -\mu_2\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds+f. \tag{3.77}$$

Здесь $\langle z,\varphi\rangle$ означает двойственность между V' и V.

Из оценок (3.41) и (3.77) следует, что $z\in L_2(0,T;V^{'})$,

$$\|z\|_{L_2(0,T;V')}\le M(\|f\|_{L_2(0,T;V')}+|v^0|_0).$$

Отсюда в силу теоремы 1.1, вытекат, что $\partial v/\partial t\in L_2(0,T;V^{'})$ и

$$\|v\|_{U(0,T)}\le M(\|f\|_{L_2(0,T;V')}+|v^0|_0),$$

а в силу леммы 1.1, вытекает, что $v\in C_w(0,T;H)$. Следовательно, $v\in U(0,T)$. Более того, $v|_{t=0}v^n|_{t=0}=v^0$. Таким образом, v удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (3.1)-(3.4) для v.

Теперь установим, что $\theta\in\Upsilon$ и удовлетворяет соотношению (3.9).

Из (3.31) следует, что

$$d(\theta^n,\phi)/dt-(v_i^n\theta^n,\partial\phi/\partial x_i)+\chi(\partial\theta^n/\partial x_i,\partial\phi/\partial x_i)= \\ \langle g,\phi\rangle+(\tilde{\mu}_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v^n),\phi)+ \\ \mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x):\mathcal{E}(v^n)(t,x)ds,\phi), \tag{3.78}$$

в смысле распределений на $(0,T)$ для любых $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$. Умножая (3.78) на функцию $\psi(t)$, бесконечно дифференцируемую и удовлетворяющую условию

$\psi(0)=\psi(T)=0$, проинтегрируем на [0,T], а затем по частям:

$$-\int_0^T(\theta,\phi)\psi'(t)\,dt-\int_0^T(v_i^n\theta^n,\partial\phi/\partial x_i)\psi(t)\,dt+$$

$$\chi\int_0^T(\partial\theta^n/\partial x_i,\partial\phi/\partial x_i)\,\psi(t)\,dt=\int_0^T\langle g,\phi\rangle\psi(t)\,dt+$$

$$\mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,dt+\int_0^T(\mu_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v^n),\phi)\psi(t)\,dt+ \tag{3.79}$$

$$\mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds:\mathcal{E}(v^n),\phi)\,ds\,\psi(t)\,dt,\quad \phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Из сильной сходимости v^n в $L_2(0,T;V)$ и θ^n в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$ следует возможность предельного перехода во всех слагаемых, за исключением третьего в левой части (3.79).

Из оценки (3.18) следует ограниченность θ^n в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, и, следовательно, слабая компактность в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Без ограничения общности считаем, что θ^n слабо сходится к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Тогда предельный переход в третьем слагаемом также допустим.

Сделав предельный переход в (3.79), получим тождество

$$(-\int_0^T(\theta,\phi)\psi'(t)\,dt)+\int_0^T(v_i\theta,\partial\phi/\partial x_i)\psi(t)\,dt+$$

$$\chi\int_0^T(\partial\theta/\partial x_i,\partial\phi/\partial x_i)\psi(t)\,dt=\int_0^T\langle g,\phi\rangle\psi(t)\,dt+$$

$$\mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,dt++\int_0^T(\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,dt+ \tag{3.80}$$

$$\mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)ds:\mathcal{E}(v),\phi)\psi(t)\,ds\,dt.$$

В силу произвольности ψ из (3.80) следует справедливость соотношения (3.9).

Перепишем (3.8) в виде

$$-\int_0^T\langle\theta,\phi\rangle\psi'(t)\,dt=\int_0^T\langle u,\phi\rangle\psi(t)\,dt, \tag{3.81}$$

$$u=-v_i\partial\theta/\partial x_i+\chi\triangle\theta+g+\mu_0\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)+\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)+$$
$$+\mu_2\int_0^t\mathcal{E}(v)(s,x)ds:\mathcal{E}(v). \tag{3.82}$$

Здесь $\langle u,\phi\rangle$ означает двойственность между $W_p^{-1}(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$. Из (3.55) и (3.56) следует, что $z\in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ и $\|z\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}\le M$. Отсюда в силу теоремы 1.1, вытекает, что $\partial\theta/\partial t\in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ и $\|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}\le M\|z\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}$, а в силу леммы 1.1, следует, что $\theta\in C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega))$. Следовательно, $\theta\in\Upsilon$. Более того, $\theta|_{t=0}\theta^n|_{t=0}=\theta^0$. Таким образом, θ удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (3.1)-(3.4) для θ.

Таким образом, (v,θ) является слабым решением задачи (3.1)-(3.4). Теорема 3.1 доказана.

ГЛАВА 4
СИЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ ТИПА НАВЬЕ-СТОКСА-ФУРЬЕ-ОЛДРОЙДА

4.1 Существование локальных сильных решений

Рассматривается начально-граничная задача

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mathrm{Div}[\mu(\theta)\mathcal{E}(v)]+\nabla p=\\ =f+\mu_0\mathrm{Div}\int\limits_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds,\,\mathrm{div}\,v=0 \text{ на } Q_T=[0,T]\times\Omega;\end{gathered}\tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\partial\theta/\partial t+v_i\partial\theta/\partial x_i-\mathrm{Div}[k(\theta)\nabla\,\theta]=\mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2+\\ +\mu_0\mathcal{E}(v):\int\limits_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds+g \text{ на } Q_T;\end{gathered}\tag{4.2}$$

$$v|_{t=0}=v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T];\tag{4.3}$$

$$\theta|_{t=0}=\theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T].\tag{4.4}$$

Здесь $v=(v_1,v_2)$ - скорость среды, θ - температура среды, μ – вязкость, μ_0, μ – коэффициенты, характеризующие вязкоупругие свойства среды, p – давление, k – коэффициент теплопроводности, f - заданные внешние силы, g – источник тепла.

Пусть $W^2_{2,0}(\Omega) \; = \; W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Введем следующие функциональные пространства

$$W_1 = W^1_2(0,T;H) \cap L_2(0,T;W^2_{2,0}(\Omega)^{(2)} \cap H),$$

$$W_2 = W^1_2(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;W^2_{2,0}(\Omega)).$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $\mu, k \in C(-\infty,\infty)$, причем

$$0 < \mu_0 \le \mu(s) \le \mu_1, |\mu^{'}(s)| \le \mu_2, s \in (-\infty,\infty); \tag{4.5}$$

$$0 < k_0 \le k(s) \le k_1, |k^{'}(s)| \le k_2, s \in (-\infty,\infty); \tag{4.6}$$

2) $v^0 \in W^2_{2,0}(\Omega)^{(2)} \cap V$, $\theta^0 \in W^2_{2,0}(\Omega)$,

$$\nabla v^0 \cdot n = 0, \nabla \theta^0 \cdot n = 0 \text{ на } Q_T, \tag{4.7}$$

где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Определение 4.1. *Сильным решением начально-граничной задачи (4.1)-(4.4) называется пара* (v,θ), *где*

$$v \in W_1, \tag{4.8}$$

$$\theta \in W_2 \tag{4.9}$$

такая, что выполняются уравнения

$$\begin{gathered} \partial v/\partial t + \mathcal{P} v_i \partial v/\partial x_i - \mathcal{P} Div(\mu_0 \mathcal{E}) = \\ \mathcal{P} f + \mu_2 \mathcal{P} Div(\textstyle\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds \end{gathered} \tag{4.10}$$

и (4.2) *при п.в.* t *и условия* (4.3), (4.4).

Функция p из уравнения (4.1) восстанавливается с помощью теоремы де Рама (см. теорему 1.5) через v обычным образом.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 4.1. *Пусть функция* $f \in W_2^1(0,T : H)$, $v^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)^{(2)} \cap H$, $g \in W_2^1(0,T : L_2(\Omega))$, $\theta^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)$. *Пусть выполняются условия* (4.5)-(4.7), μ_2 *и* k_2 *из (4.5) и (4.6) достаточно малы. Тогда задача (4.1) - (4.4) имеет единственное решение при достаточно малом* $T > 0$.

Доказательство теоремы 4.1 разбито на ряд этапов и проводится в разделах 4.2-4.3. В разделе 4.2 рассматривается начально-граничная задача для системы вязкоупругости типа Олдройда с переменной вязкостью и начально-граничной задачи для уравнения сохранения энергии с переменным коэффициентом теплопроводности и интегральной частью. Выполняется сведение этих задач к операторным уравнениям, для разрешимости которых применяется принцип сжимающих отображений.

4.2 Вспомогательные задачи

Сначала рассмотрим задачу

$$L_1(v) := \partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu(\theta)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = \tag{4.11}$$

$$f - \mu_0 \mathrm{Div} \textstyle\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)ds,$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{4.12}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.13}$$

при фиксированном θ.

Пусть

$$w = f - \mu_0 \mathrm{Div} \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)ds. \tag{4.14}$$

Перепишем (4.11) в виде

$$L_1(v) := w, \tag{4.15}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.16}$$

Сначала рассмотрим задачу (4.15) – (4.16) при произвольной w.

Лемма 4.1. *Пусть $w \in W_2^1(0,T;H)$. Тогда задача (4.15) – (4.16) однозначно разрешима и справедлива оценка*

$$\|v\|_{2,0} + \sup_{0\le t\le T} |v(t,x)|_1 \le M_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{4.17}$$

$$\|v_x\|_{L_4(Q_T)} \le M_2(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{4.18}$$

$$\|v^{'}\|_{L_4(Q_T)} \le M_3(\|w\|_{1,0} + |v^0|_2). \tag{4.19}$$

Здесь $\Phi_i(s)$ – некоторые монотонные функции от s, а $M_i = \Phi_i(\|\theta\|_{W_4^{1,1}}(Q_T))$.

Доказательство. Доказательство леммы 4.1 см. [15].

Обозначим через $L_1^{-1}(w)$ оператор, ставящий в соответствие $w \in W_2^1(0,T : H) := W$ решение v задачи (4.15) – (4.16).

Воспользовавшись L_1^{-1}, перепишем (4.14) в виде

$$w = K(w), \tag{4.20}$$

$$K(w) = f + \mu_0 \mathcal{P}\mathrm{Div} \int_0^t \mathcal{E}(L_1^{-1}(w))(s,x)ds := f + K_0(w). \tag{4.21}$$

Зададим в W_1 эквивалентную норму

$$]w[= q\|w^{'}\|_0 + \|w\|_0, 0 < q < 1. \tag{4.22}$$

Рассмотрим шар $B(R) = \{w :]w[\le R\}$, $R > 0$.

Лемма 4.2. *Найдутся такие достаточно малые $T > 0$ и $q > 0$ и достаточно большое $R > 0$, что оператор K переводит в себя $B(R)$.*

Доказательство. Легко видеть, что в силу соотношения $\mathrm{Div}\,\mathcal{E}(v) = \triangle\, v$ и ограниченности оператора $\mathcal{P}$

$$]K(w)[\leq]f[+]K_0(w)[\leq M\|f\|_{1,0} + q\|\triangle L_1^{-1}(w)\|_0 + \|\textstyle\int_0^t \triangle L_1^{-1}(w)ds\|_0.$$

Из (4.17) вытекает, что

$$\|\triangle L_1^{-1}(w)\|_0 \leq M_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{4.23}$$

Воспользуемся неравенством Коши и (4.17). Имеем:

$$\|\int_0^t \triangle L_1^{-1}(w)ds\|_0 \leq T^{\frac{1}{2}}\|\triangle L_1^{-1}(w)ds\|_0 \leq T^{\frac{1}{2}}M_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{4.24}$$

Из (4.17), (4.22) и (4.24) следует неравенство

$$]K(w)[\leq M\|f\|_{0,1} + M_1\|w\|_0(q + T^{\frac{1}{2}}) + T^{\frac{1}{2}}M_1|v^0|_1. \tag{4.25}$$

Из (4.25) следует, что при $w \in B(R)$

$$]K(w)[\leq M\|f\|_{0,1} + M_1R(q + T^{\frac{1}{2}}) + T^{\frac{1}{2}}M_1|v^0|_1.$$

Выбирая q и T_0 достаточно малыми, а $R > 0$ достаточно большим, получаем, что при $0 < T < T_0$

$$]K(w)[\leq R, w \in B(R). \tag{4.26}$$

Следовательно, оператор K переводит $M(R)$ в себя.

Введем в шаре $B(R)$ метрику

$$\rho(w^1, w^2) = \|w^1 - w^2\|_0. \tag{4.27}$$

и рассмотрим его как метрическое пространство, обозначив $M(R)$.

Покажем, что $M(R)$ является полным метрическим пространством.

В самом деле, пусть последовательность $w^n \in M(R)$, $n = 1, 2, ...$ и является фундаментальной по метрике (4.27). В силу полноты $L_2(0, T; H)$ существует $w^0 = \lim_{n\to\infty} w^n$, $w^0 \in L_2(0, T; H)$. Установим, что $w^0 \in M(R)$.

Так как $w^n \in M(R)$, то $\|dw^n/dt\|_0$ равномерно ограничена, а следовательно последовательность dw^n/dt слабо компактна в гильбертовом пространстве $L_2(0,T;H)$, и, таким образом, w^n слабо сходится к $z \in L_2(0,T;H)$.

Легко видеть, что

$$\int_0^T dw^n/dt\varphi\, dt = -\int_0^T w^n d\varphi/dt\, dt \tag{4.28}$$

при любой гладкой финитной на $[0,T]$ функции $\varphi : [0,T] \to H$.

Переходя к пределу в (4.28), получаем

$$\int_0^T z\varphi\, dt = -\int_0^T w^0 d\varphi/dt\, dt.$$

Отсюда вытекает, что $z = dw^0/dt$, И, таким образом, $w^0 \in M(R)$.

Следовательно, полнота $M(R)$ установлена.

Лемма 4.3. *Пусть R, T_0 и q таковы, что справедливо (4.26). Тогда при всех $w^1, w^2 \in M(R)$ найдется такое $T < T_0$, что имеет место неравенство*

$$\|K(w^1) - K(w^2)\|_0 \leq q_0\|w^1 - w^2\|_0$$

при некотором $q_0 \in (0,1)$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_0 \leq q_0\|w^1 - w^2\|_0, 0 < q_0 < 1. \tag{4.29}$$

Обозначим $v^i = L_1^{-1}(w^i), i = 1,2$.

Легко видеть, что

$$\begin{gathered}\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_0 = \| \int_0^t (\triangle L_1^{-1}(w^1) - \triangle L_1^{-1}(w^2))\, ds\|_0 = \\ = \| \int_0^t \triangle(v^1 - v^2)\, ds\|_0 \leq T^{\frac{1}{2}}\|\triangle(v^1 - v^2)\|_0.\end{gathered} \tag{4.30}$$

Обозначим $w = w^1 - w^2$, $v = v^1 - v^2$, $p = p^1 - p^2$. Ясно, что

$$\widehat{L}_1(0) := \partial v/\partial t - \mathrm{Div}\,[\mu(\theta)\,\mathcal{E}(v)] - \nabla p =$$
$$w - v_i \partial v^1/\partial x_i - v_i^2 \partial v/\partial x_i, \tag{4.31}$$
$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T;$$

$$v(0) = 0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{4.32}$$

Из-за отсутствия конвективных слагаемых в $\widehat{L}_1$ оператор $\widehat{L}_1$, порожденный задачей (4.31) – (4.32), проще оператора L_1. Следовательно определен оператор $\widehat{L}_1^{-1}$, обладающий всеми свойствами оператора L_1^{-1}. Именно, для $u(t) = \widehat{L}_1^{-1}(\varphi)$ из (4.17) следует неравенство

$$\|v\|_{2,0} + \sup_t |v(t)|_1 \le M_1 \|\varphi\|_0. \tag{4.33}$$

Отсюда следует, что для задачи (4.31) – (4.32) справедливо неравенство

$$\|v\|_{2,0} + \sup\nolimits_t |v(t)|_1 \le M_1(\|w\|_0 + \|v_i \partial v^1/\partial x_i\|_0 +$$
$$\|v_i^2 \partial v_i/\partial x_i\|_0) = M_1(\|w\|_0 + I_1 + I_2). \tag{4.34}$$

Воспользовавшись стандартными рассуждениями (см. напр. [20]), получим

$$|v_i \partial v^1/\partial x_i|_0 \le M\|v\|_{L_4(\Omega)} \|\partial v^1/\partial x\|_{L_4(\Omega)} \le M|v|_1 \|v_x^1\|_{L_4(\Omega)}, \tag{4.35}$$

$$|v_i^2 \partial v/\partial x_i|_0 \le M\|v^2\|_{L_4(\Omega)} \|\partial v/\partial x\|_{L_4(\Omega)} \le$$
$$M\|v^2\|_{L_4(\Omega)} |v|_2^{1/2} |v|_1^{1/2} \le \varepsilon |v|_2 + M_\varepsilon |v|_1 \|v^2\|_{L_4(\Omega)}^2. \tag{4.36}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малое произвольное число.

Из оценок (4.35) – (4.36) следует, что

$$I_1^2 + I_2^2 \le \varepsilon \|v\|_{2,0}^2 + M_{\mathcal{E}} \int_0^T |v(x,t)|_1^2 (\|v_x^1(t,x)\|_{L_4(\Omega)}^4 + \|v^2(t,x)\|)_{L_4(\Omega)}^4)\, dt. \tag{4.37}$$

Теперь воспользуемся неравенствами (4.34) и (4.36). Отметим, что они установлены на $[0,T]$. Ясно, что они верны и на $[0,s]\subset[0,T]$. Следовательно, при малом $\varepsilon>0$ из (4.37) следует, что справедливо интегральное неравенство

$$|v(s)|_1^2 \le M_1^2\|w\|_0^2 + M_\varepsilon \int_0^s (\|v_x^1(t,x)\|^4_{L_4(\Omega)} + \|v^2(t,x)\|^4_{L_4(\Omega)})|v(x,t)|_1^2\,dt.$$

В силу (4.18) из этого интегрального неравенства вытекает

$$|v(s)|_1^2 \le M_4\|w\|_0, 0\le s\le T, \tag{4.38}$$

где $M_4=\Phi_4(\|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)})$.

Из оценок (4.34) – (4.36), (4.38) следует, что

$$\|v\|_{2,0} \le M_5\|w\|_0, \tag{4.39}$$

где $M_5=\Phi_5(\|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)})$. Здесь $\Phi_4(s)$ и $\Phi_5(s)$ монотонные непрерывные функции от s.

Используя (4.30) и (4.39), получим

$$\|K_0(w^1)-K_0(w^2)\|_0 \le M_5T^{\frac12}\|\triangle(w^1-w^2)\|_0.$$

Выбирая $T<T_0$ достаточно малым, получаем (4.29) с некоторым $q_0\in(0,1)$.

Лемма 4.3 доказана.

В силу принципа сжимающих отображений из лемм 4.2 и 4.3 вытекает однозначная разрешимость уравнения (4.20).

Теорема 4.2. *Задача (4.11)-(4.13) однозначно разрешима при достаточно малом T в условиях теоремы 4.1 и для решения v справедливы оценки (4.17)-(4.19).*

Доказательство. Пусть w_* - решение уравнения (4.20). Легко видеть, что $v=L_1^{-1}(w_*)$ является решением задачи (4.11)-(4.13), а из леммы 4.1 следует, что справедливы оценки (4.17) – (4.19).

Теорема 4.2 доказана.

Рассмотрим теперь задачу

$$\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[k(\theta)\nabla\,\theta] = g + \mu(\xi)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) +$$
$$+\mu_0 \mathcal{E}(v) : \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds, \tag{4.40}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{4.41}$$

Теорема 4.3. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Пусть* $\xi \in W_4^{1,1}(Q_T)$, *а* v *– решение задачи (4.11) – (4.13). Тогда задача (4.40) – (4.41) имеет единственное решение* θ, *а также справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{2,1} + \|\theta'\|_{L_4(Q_T)} + \|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \le M_6, \tag{4.42}$$

где $M_6 = \Phi_6(\|f\|_{0,1}, \|g\|_{0,1}, |v^0|_2, |\theta^0|_2, \|\xi\|_{W_4^{1,1}(Q_T)})$, *а* $\Phi_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ *- монотонная непрерывная функция своих аргументов.*

Доказательство. При $\mu_0 = 0$ доказательство теоремы 4.3 дано в [15]. Правая часть уравнения (4.2) при $\mu_0 > 0$ содержит дополнительное слагаемое $\mu_0\mathcal{E}(v) : \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)ds$, которое лучше слагаемого $\mu(\xi)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)$, а также не зависит от θ.

Следовательно, доказательство теоремы 4.3 для случая $\mu_0 = 0$ проходит также и для случая $\mu_0 > 0$ с некоторыми несущественными дополнениями.

4.3 Доказательство теоремы 4.1

Пусть $K = \{\xi : \xi \in W_4^{1,1}(Q_T), \nabla\xi|_{t=0} = \nabla\theta^0, \|\xi\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \le R_0\}$.

Построим оператор $\mathcal{L} : K \to W_4^{1,1}(Q_T)$.

Поставим в соответствие $\xi \in K$ решение v^ξ задачи (4.11) – (4.13). Далее поставим в соответствие v^ξ решение θ задачи (4.40) при $v = v^\xi$, так что $v = \mathcal{L}\xi$.

Ясно, что для разрешимости задачи (4.1) – (4.4) достаточно найти неподвижную точку оператора $\mathcal{L}$.

В [15] при $\mu_0 = 0$ показано, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям принципа Шаудера о неподвижной точке. Доказательство при этом опирается на теоремы 4.2 и 4.3 о разрешимости соответствующих задач при $\mu_0 = 0$.

Там же установлено, что решение единственно. Отметим, что утверждение теоремы 4.2 справедливо при любом $T > 0$ в случае $\mu_0 = 0$.

Для случая $\mu_0 > 0$ ситуация отличается от случая $\mu_0 = 0$ только лишь ограничением на малость T. В остальном доказательство существования неподвижной точки $\mathcal{L}$ и единственности решения остается таким же.

Теорема 4.1 доказана.

4.4 Существование нелокальных сильных решений

Рассматривается следующая начально-граничная задача

$$\partial_t v + v_i \partial v/\partial x_i - \operatorname{Div}[\mu(\theta)\mathcal{E}(v)] + \nabla p =$$
$$= f + \mu_0 \operatorname{Div} \int\limits_0^t [\mathcal{E}(v)(s,x)]\, ds, \quad \operatorname{div} v = 0 \text{ на } Q_T = [0,T] \times \Omega; \tag{4.43}$$

$$\partial_t \theta + v_i \partial \theta/\partial x_i - \operatorname{Div}[k(\theta)\nabla \theta] = \mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2 +$$
$$+ \mu_0 \mathcal{E}(v) : \int\limits_0^t [\mathcal{E}(v)(s,x)]\, ds + g \text{ in } Q_T; \tag{4.44}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \ \text{ на } \Omega; \ v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{4.45}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \ \text{ on } \Omega; \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{4.46}$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))$ – скорость, $\theta(t,x)$ – температура, $p(t,x)$ – давление, μ – вязкость, k – коэффициент теплопроводности, μ_1 – коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства среды, f – заданные внешние силы, g – источник тепла.

Пусть $W^2_{2,0}(\Omega) = W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Введем следующие функциональные пространства

$$W_1 = W_2^1(0,T;H) \cap L_2(0,T;W_{2,0}^2(\Omega)^{(2)} \cap H),$$

$$W_2 = W_2^1(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_{2,0}^2(\Omega)).$$

Потребуем выполнения следующих условий:

a) $\mu, k \in C^1(-\infty, \infty)$,

$$0 < \mu_0 \leq \mu(s) \leq \mu_1, |\mu'(s)| \leq \mu_2, s \in (-\infty, \infty); \tag{4.47}$$

$$0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1, |k'(s)| \leq k_2, s \in (-\infty, \infty); \tag{4.48}$$

b) $v^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)^{(2)} \cap V$, $\theta^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)$,

$$\nabla v^0 \cdot n = 0, \nabla \theta^0 \cdot n = 0 \text{ в } Q_T, \tag{4.49}$$

где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

c) $f \in W_2^1(0,T : H)$, $g \in W_2^1(0,T : L_2(\Omega))$.

Рассмотрим систему (4.43) – (4.46) в вариационной формулировке

$$\int_0^T (\partial_t v, \varphi)\, dt + \int_0^T (\mu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v))\, dt + \int_0^T ((v \cdot \nabla v)v, \varphi)\, dt =$$

$$\int_0^T (f, v)\, dt + \mu_1 \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v)\, ds, \mathcal{E}(\varphi))\, dt \tag{4.50}$$

$$\forall \varphi \in L_2(0,T;V), v|_{t=0} = v^0 \quad \text{в } \Omega;$$

$$\int_0^T (\partial_t \theta, \psi)\, dt + \int_0^T (k(\theta)\nabla\theta, \nabla\psi)\, dt + \int_0^T (v_i \partial\theta/\partial x_i, \psi)\, dt =$$

$$\int_0^T (\mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2, \psi)\, dt + \mu_1 \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v)\, ds : \mathcal{E}(v), \psi)\, dt \tag{4.51}$$

$$\forall \psi \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \theta|_{t=0} = \theta^0 \quad \text{в } \Omega.$$

Определение 4.2. *Сильным решением задачи (4.43)-(4.46) называется пара (v, θ), где*

$$v \in W_1, \tag{4.52}$$

$$\theta \in W_2. \tag{4.53}$$

такая, что выполняются соотношения (4.50) и (4.51).

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия a) -c). Пусть μ_2 и k_2 из (4.47) и (4.48) достаточно малы. Тогда существует единственное решение задачи (4.43) - (4.46).*

Функция p восстанавливается обычным образом (см. теорему 1.5). Используя теорему 4.4, мы можем переписать (4.43) как

$$\nabla p = f - \partial_t v - (v \cdot \nabla v)v + \mu'(\theta)\nabla\theta\mathcal{E}(v) + \mu(\theta)\triangle v + \mu_1 \int_0^T \Delta v \, ds \ \in L_2(Q_T).$$

Легко видеть, что тройка (v, θ, p) удовлетворяет уравнениям (4.43)- (4.44) в Q_T и условиям (4.45)- (4.46).

Доказательство теоремы 4.4 разбито на ряд этапов и проводится в разделах 4.5-4.6. В разделе 4.5 рассматривается начально-граничная задача для системы вязкоупругости типа Олдройда с переменной вязкостью и начально-граничной задачи для уравнения сохранения энергии с переменным коэффициентом теплопроводности и интегральной частью. Разрешимость этих задач устанавливается путем сведения к операторным уравнениям, для разрешимости которых применяется принцип сжимающих отображений.

4.5 Вспомогательные задачи

Сначала рассмотрим задачу

$$L_{1,\xi}(v) := \partial_t v + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu(\xi)\,\mathcal{E}(v)] - \mu_1 \mathrm{Div}\,\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds+ \tag{4.54}$$

$$\nabla p = f,\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ в } Q_T;$$

$$v|_{t=0} = v^0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.55}$$

при фиксированном $\xi \in W_4^{1,1}(Q_T)$. Решение задачи $v \in W_1$ удовлетворяет равенству

$$\int_0^T (\partial_t v, \varphi)dt + \int_0^T (\mu(\xi)\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi))\,dt + \int_0^T ((v\cdot\nabla v)v, \varphi)dt =$$

$$\int_0^T (f, \varphi)\,dt + \mu_1 \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v)\,ds, \mathcal{E}(\varphi))\,dt \tag{4.56}$$

$$\forall \varphi \in L_2(0,T;V), \quad v|_{t=0} = v^0 \ \text{ на } \Omega.$$

Далее, рассмотрим задачу

$$L_{2,\xi}(\theta) := \partial_t \theta + v_i \partial\theta/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[k(\xi)\nabla\theta] = g+$$

$$+\mu(\xi)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \mu_1 \mathcal{E}(v) : \int_0^T \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds := g + I_{01} + I_{02} = \hat{g}, \tag{4.57}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.58}$$

Решение задачи $\theta \in W_2$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T (\partial_t \theta, \psi)\,dt + \int_0^T (k(\xi)\nabla\theta, \nabla\psi)\,dt + \int_0^T ((v\cdot\nabla)\theta, \psi)\,dt =$$

$$\int_0^T (\mu(\xi)|\mathcal{E}(v)|^2, \psi)\,dt + \mu_1 \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v)\,ds : \mathcal{E}(v), \psi)\,dt \tag{4.59}$$

$$\forall \psi \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)), \theta|_{t=0} = \theta^0.$$

Справедливы следующие результаты.

Теорема 4.5. *Пусть* $\xi \in W_4^{1,1}(Q_T)$, $\nabla\xi|_{t=0} = \theta^0|_{t=0}$. *В условиях на* f *и* v^0 *теоремы 4.4 задача (4.54)-(4.55) однозначно разрешима и справедливы оценки:*

$$\begin{gathered}\|v\|_{0,2} + \|\nabla v\|_{L_4(Q_T)} + \operatorname{ess\,sup}_{0\le t\le T}|v(t,x)|_1 \le \\ \le \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|f\|_0 + |v^0|_1);\end{gathered} \tag{4.60}$$

$$\|v\|_{1,2} + \|\partial_t v\|_{L_4(Q_T)} \le \Phi_2(\|\xi\|_{W_4^{1,1}(\Omega)}, \|f\|_{1,0}, |v^0|_2), \tag{4.61}$$

где $\Phi_i > 0$ *– некоторые монотонно возрастающие функции своих аргументов.*

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия теорем 4.5 и 4.4. Пусть* v *– решение задачи (4.54)-(4.55). Тогда задача (4.57)-(4.58) однозначно разрешима, и справедливы оценки:*

$$\|\theta\|_{0,2} + \|\partial\theta/\partial t\|_{L_4(Q_T)} + \|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \le \Phi_3(\|g\|_{0,1}, |\theta^0|_2, \|\xi\|_{W_4^{1,1}(Q_T)}, \|v\|_{1,2}), \tag{4.62}$$

где $\Phi_3 > 0$ *– монотонно возрастающая функция своих аргументов.*

Докажем теорему 4.5.

Задачу (4.56)-(4.55) перепишем в виде

$$\hat{L}_{1,\xi}(v) = \partial v/\partial t + v_i\partial v/\partial x_i - \operatorname{Div}[\mu(\xi)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = w, \text{ в } Q_T; \tag{4.63}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \text{ в } Q_T; \tag{4.64}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.65}$$

где

$$w = f - \mu_1\int_0^t \triangle v(s,x)ds. \tag{4.66}$$

Вначале рассмотрим задачу (4.63)-(4.65) при произвольной $w \in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Лемма 4.4. *Пусть* $w \in W_2^{1,0}(0,T;H)$. *Тогда задача (4.63)-(4.65) однозначно разрешима и справедливы оценки*

$$\|v\|_{0,2} \le \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|w\|_0 + |v^0|_1) \tag{4.67}$$

$$\|v\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \le \Phi_2(\|\xi\|_{W_4^{1,1}(\Omega)}, \|w\|_{1,0}, |v^0|_2). \tag{4.68}$$

В [35] утверждение леммы 4.4 установлено. Сделаем обобщение оценок (4.67)-(4.68).

Пусть $F = W_p^l(0, T; E)$, E – произвольное Банахово пространство. Введем в F новую эквивалентную норму

$\|u(t)\|_{F(\gamma)} = \|\exp(-\gamma t)u(t)\|_F,\ \gamma \geq \gamma_0 > 0.$

Лемма 4.5. *Пусть v – решение задачи (4.63)-(4.65). Тогда справедливы следующие оценки*

$$\|v\|_{0,2(\gamma)} \leq \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|w\|_{0(\gamma)} + |v^0|_2). \tag{4.69}$$

Докажем лемму 4.5.

Умножив (4.63) на $\exp(-\gamma t)$, получим

$$\partial_t \bar{v} + \exp(\gamma t)\bar{v}_i \partial\bar{v}/\partial x_i - \operatorname{Div}\left[(\mu(\xi) + \gamma)\,\mathcal{E}(\bar{v})\right] + \nabla\bar{p} = \ \bar{w}. \tag{4.70}$$

Здесь $\bar{z} = \exp(-\gamma t)z$ для произвольной z.

В [35] дано доказательство оценки (4.67) для $\gamma = 0$. Оно было получено, формально, посредством замены φ в (4.50) на $\triangle v$, также применения утверждения (4.47) и свойства стремления к нулю конвективного члена в двухмерном пространстве. Ясно, что та же процедура проходит и для (4.70). Отсюда следует

$$\|\bar{v}\|_{0,2} + \operatorname{ess\,sup}_t |\bar{v}(t,x)|_1 \leq \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|\bar{w}\|_{0(\gamma)} + |v^0|_1).$$

Беря в расчет эквивалентность норм $\|\bar{z}\|_{0,2} \sim \|\exp(-\gamma t)z\|_{0,2}$, $\|\bar{z}\|_1 \sim \|exp(-\gamma t)z\|_1$, получаем утверждение леммы 4.5 .

Лемма 4.5 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4.5.

Обозначим через $\hat{L}_{1,\theta}^{-1}$ оператор, ставящий в соответствие w решение v задачи (4.63)-(4.65), так что $\hat{L}_{1,\xi}^{-1}(w) = v$. Ясно, что $\hat{L}_{1,\xi}^{-1} : W_2^{1,0}(Q_T) \to W^1$.

Из (4.69) следует, что

$$\|\triangle \hat{L}_{1,\xi}^{-1}(w)\|_{0(\gamma)} \leq \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|w\|_{0(\gamma)} + |v^0|_1). \tag{4.71}$$

Используя $\hat{L}^{-1}_{1,\theta}$, перепишем задачу (4.63)-(4.66) в виде

$$w = K(w), \tag{4.72}$$

где

$$K(w) = f + \mu_1 \int_0^t \triangle \hat{L}^{-1}_{1,\xi}(w)(s,x)\, ds := f + K_0(w). \tag{4.73}$$

Установим разрешимость задачи (4.72) в $W_2^1(0,T;H)$. Введем в $W_2^1(0,T;H)$ эквивалентную норму

$$]w[= q\|\partial w/\partial t\|_0 + \|w\|_{0(\gamma)}$$

при некоторых $q > 0$ и $\gamma > 0$.

Пусть $B(R) = \{w :]w[\leq R, w \in W_2^1(0,T;H)\}$.

Лемма 4.6. *Найдутся такие достаточно малые $0 < q < 1$ и достаточно большие γ и R, что оператор K переводит $B(R)$ в себя.*

Докажем лемму 4.6.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered}]K(w)[\leq]f[+]K_0(w)[\leq]f[+q\|\triangle \hat{L}^{-1}_{1,\xi}(w)\|_0 + \\ \| \textstyle\int_0^t \triangle \hat{L}^{-1}_{1,\xi}(w)(s,x)\, ds\|_{0(\gamma)} =]f[+qI_1 + I_2. \end{gathered} \tag{4.74}$$

Используя вытекающее из (4.67) неравенство $\|\triangle \hat{L}^{-1}_{1,\theta}(w)\|_0 \leq \Phi_1(\|w\|_0 + |v^0|_1)$, получаем, что

$$I_1 \leq (0,T;H)_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{4.75}$$

Теперь воспользуемся хорошо известным неравенством

$$\| \int_0^t \exp(-\gamma(t-s)) z(s,x)\, ds\|_0 \leq M\gamma^{-1}\|z\|_0, \gamma \geq \gamma_0 > 0,$$

и (4.71). Имеем

$$\begin{gathered} I_2 \leq M\gamma^{-1}\|\exp(-\gamma t)\triangle \hat{L}^{-1}_{1,\xi}(w)\|_0 = M\gamma^{-1}\|\triangle \hat{L}^{-1}_{1,\xi}(w)\|_{0(\gamma)} \leq \\ \gamma^{-1} M \Phi_1(\|\nabla \xi\|_{L_4(Q_T)})(\|w\|_{0(\gamma)} + |v^0|_1). \end{gathered} \tag{4.76}$$

Учитывая (4.71) при оценке I_1, неравенства (4.74) и (4.76), получаем

$$]K(w)[\leq]f[+qM_1(\|w\|_0+|v^0|_1))+M_2\gamma^{-1}(\|w\|_{0(\gamma)}+|v^0|_1). \tag{4.77}$$

Здесь M_1, M_2 зависят от $\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)}$. Так как $\|w\|_0 = \|\exp(\gamma t)\exp(-\gamma t)w\|_0 \leq \exp(\gamma T)\|w\|_{0,\gamma}$, то (4.77) подразумевает

$$\begin{gathered}]K(w)[\leq]f[+(qM_1+M_2\gamma^{-1})|v^0|_1+(qM_1\exp(\gamma T)+M_2\gamma^{-1}\|w\|_{0(\gamma)}\leq \\ \leq]f[+(qM_1+M_2\gamma^{-1})|v^0|_2+(qM_1\exp(\gamma T)+M_2\gamma^{-1})]w[.\end{gathered} \tag{4.78}$$

Выбирая $0<q<1$ достаточно малым, а $\gamma>0$ достаточно большим, получаем из (4.78), что при достаточно большом $R>0$ оператор K переводит шар $B(R)$ в себя.

Пусть R_0 таково, что $K(B(R_0))\subset B(R_0)$. Обозначим через $\mathcal{B}$ метрическое пространство, которое получается введением на шаре $B(R_0)$ метрики

$$\rho(w^1,w^2)=\|w^1-w^2\|_{0(\alpha)}, \alpha>0. \tag{4.79}$$

Лемма 4.7. *Пространство $\mathcal{B}$ является полным метрическим пространством.*

Докажем лемму 4.7.

Пусть $w^n\in\mathcal{B}$, $n=1,2,...$ и является фундаментальной. Тогда w^n фундаментальна в $L_2(0,T;H)$. В силу полноты $L_2(0,T;H)$ последовательность w^n сходится к $w^0\in L_2(0,T;H)$.

Покажем, что $w^0\in\mathcal{B}$. Так как $w^n\in B(R)$, то последовательность $\|dw^n/dt\|_0$ ограничена, и, следовательно, dw^n/dt слабо компактна в гильбертовом пространстве $L_2(0,T;H)$. Отсюда следует, что последовательность $\|dw^n/dt\|_0$ сходится к $z\in L_2(0,T;H)$ с точностью до подпоследовательности.

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^T (dw^n/dt, \varphi)dt = -\int_0^T (w^n, d\varphi/dt)dt \tag{4.80}$$

для любой гладкой финитной функции $\varphi : [0,T] \to H$. Переходя в (4.80) к пределу, получим $\int_0^T (z,\varphi)dt = -\int_0^T w^0 d\varphi/dt$.

Отсюда вытекает, что $z = dw^0/dt$. Более того, ясно, что из $w^n \in \mathcal{B}$ следует $]z[\leq R$. Следовательно, $w^0 = lim w^n$. Полнота $\mathcal{B}$ установлена.

Лемма 4.7 доказана.

Лемма 4.8. *Пусть $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ достаточно велико. Тогда оператор K является сжимающим на $\mathcal{B}$.*

Докажем лемму 4.8. Для этого достаточно показать, что

$$\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_{0(\alpha)} \leq \varrho \|w^1 - w^2\|_{0(\alpha)}, \tag{4.81}$$

где $\varrho \in (0,1)$.

Пусть $v^i = \hat{L}_{1,\xi}^{-1}(w^i), i = 1,2$. Легко видеть, что

$$\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_{0(\alpha)} = \|\exp(-\alpha t)\int_0^t \triangle(\hat{L}_{1,\xi}^{-1}(w^1)(s,x) - \hat{L}_{1,\xi}^{-1}(w^2)(s,x))ds\|_0 =$$

$$\|\int_0^t (\exp(\alpha(s-t))\triangle(\bar{v}^1(s,x) - \bar{v}^2(s,x))\, ds)\|_0.$$

Здесь и далее $\bar{z}(t,x) = exp(-\alpha t)z(t,x)$ для любой z.

Воспользовавшись (4.76), получаем, что

$$\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_{0(\alpha)} \leq M\alpha^{-1}\|\triangle(\bar{v}^1 - \bar{v}^2\|_0. \tag{4.82}$$

Пусть $\bar{w} = \bar{w}^1 - \bar{w}^2$, $\bar{v} = \bar{v}^1 - \bar{v}^2$. Тогда

$$\bar{L}_{1,\xi}(v) := \partial_t v - \mathrm{Div}\,[\mu(\xi)\,\mathcal{E}(\bar{v})] - \triangle\bar{p} =$$

$$\bar{w} + v_i^1 \partial\bar{v}/\partial x_i + \bar{v}_i \partial v^2/\partial x_i, \tag{4.83}$$

$$\mathrm{div}\; v = 0; v|_{t=0} = v^0\;, v|_{\partial\Omega} = 0, 0 \leq t \leq T.$$

Линейный оператор $\bar{L}_{1,\xi}$, порожденный задачей (4.83), из-за отсутствия конвективных членов в уравнении проще оператора $\hat{L}_{1,\xi}$. В частности, для $u = \bar{L}_{1,\xi}(\varphi)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{0,2} + \operatorname{ess\,sup}_t |u(t)|_1 \leq \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})\|\varphi\|_0. \tag{4.84}$$

Неравенство (4.84) предполагает, что для задачи (4.83) справедливо неравенство

$$\|\bar{v}\|_{0,2} + \operatorname{ess\,sup}_t |\bar{v}(t,.)|_1 \leq \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|\bar{w}\|_0 + \|v_i^1 \partial\bar{v}/\partial x_i\|_0 +$$
$$\|\bar{v}_i \partial v^2/\partial x_i\|_0) = \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|w\|_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2). \tag{4.85}$$

Используя стандартные рассуждения (см. например [20]), получаем

$$|v_i^1 \partial\bar{v}/\partial x_i|_0 \leq M\|v^1\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla\bar{v}\|_{L_4(\Omega)} \leq M\|v^1\|_{L_4(\Omega)}|\bar{v}|_1^{1/2}|\bar{v}|_2^{1/2} \leq \varepsilon|\bar{v}|_2 +$$
$$C_\varepsilon |\bar{v}|_1 \|v^1\|^2_{L_4(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.86}$$

$$|\bar{v}_i \partial v^2/\partial x_i|_0 \leq M\|\bar{v}\|_{L_4(\Omega)}\|\partial v^2/\partial x\|_{L_4(\Omega)} \leq M\|\bar{v}\|_1\|\nabla v^2\|_{L_4(\Omega)}, \tag{4.87}$$

Из (4.86)-(4.87) вытекает, что

$$\mathcal{I}_1^2 + \mathcal{I}_2^2 \leq \varepsilon\|\bar{v}\|^2_{0,2} + C_\varepsilon \int_0^T |\bar{v}(t,.)|_1^2 (\|v^1(t,.)\|^4_{L_4(\Omega)} + \|\nabla v^2\|^2_{L_4(\Omega)})dt. \tag{4.88}$$

Пользуясь оценками (4.85) и (4.88) и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, имеем

$$\|\bar{v}\|^2_{0,2} + |\bar{v}(t,.)|_1^2 \leq \Phi_1(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|\bar{w}\|_0 + \textstyle\int_0^T (\|\nabla v^1(s,.)\|^4_{L_4(\Omega)} +$$
$$+\|\nabla v^2(s,.)\|^2_{L_4(\Omega)})|\bar{v}(s,.)|_1^2 ds = \tag{4.89}$$
$$\Phi_3(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})(\|\bar{w}\|_0 + \textstyle\int_0^T \zeta(s)|\bar{v}(s,.)|_1^2 ds).$$

Заметим, что $\Phi_i = M_i\Phi_1$, $i = 3, \ldots, 6$ где $M_i > 0$ – некоторые константы.

Так как $w^i \in \mathcal{B}$, то $w^i \in W_2^1(0,T;H)$, и из (4.60) вытекает суммируемость первого сомножителя под интегралом в (4.89). При этом величина интеграла от этого сомножителя не зависит от α, но зависит от γ.

Следовательно из интегрального неравенства $|\bar{v}(t,.)|_1^2 \leq M_9(\|\bar{w}\|_0 + \int_0^T g(s)|\bar{v}(s,.)|_1^2 ds$ (следствие (4.89)) вытекает, что

$$|\bar{v}(t,.)|_1^2 \leq \Phi_4(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})\|\bar{w}\|_0. \tag{4.90}$$

Из (4.90) и (4.85) следует, что

$$\|\bar{v}\|_{0,2} \leq \Phi_5(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})\|\bar{w}\|_0. \tag{4.91}$$

Из (4.92) и (4.91) следует, что

$$\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_{0(\alpha)} \leq \Phi_6(\|\nabla\xi\|_{L_4(Q_T)})\alpha^{-1}\|v^1 - v^2\|_{0(\gamma)}. \tag{4.92}$$

При достаточно большом $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ вытекает (4.81).

Лемма 4.8 доказана.

Разрешимость уравнения 4.72 на $\mathcal{B}$ вытекает из лемм 4.7 и 4.7. Ясно, что $v = \hat{L}_{1,\xi}^{-1}(w)$ является решением задачи (4.54)-(4.55), где w - решение задачи (4.63)-(4.66). Оценки (4.60)-(4.61) вытекают из оценок (4.67)-(4.68) и (4.71).

Теорема 4.5 доказана.

Теперь докажем теорему 4.6.

При $\mu_1 = 0$ теорема 4.6 доказана в [35]. При $\mu_1 > 0$ в правой части (4.57) появляется дополнительное выражение I_{02}.

Ключевым моментом доказательства является наличие операторных оценок на θ, которые получаются путем дифференцирования (4.57) по t и умножением в $L_2(Q_T)$ на θ_t и $\triangle\theta$. При этом используются оценки (4.60)-(4.61).

Продолжая эту процедуру, появление дополнительного слагаемого в (4.57) приводит к необходимости оценки выражений $(\partial_t I_{02}, \partial_t\theta)_{L_2(Q_T)}$ и $(\partial_t I_{02}, \triangle\theta)_{L_2(Q_T)}$. Эти оценки такие же, как и оценки $(\partial_t I_{01}, \partial_t\theta)_{L_2(Q_T)}$ и $(\partial_t I_{01}, \triangle\theta)_{L_2(Q_T)}$ в [35]. При этом, важны оценки $\|\cdot\|_{L_4(Q_T)}$-норм сомножителей в I_{02} и их производных по t.

Тем не менее, первые сомножители в I_{01} и I_{02} совпадают, а производная по

t второго сомножителя в I_{02} совпадает с первым в I_{01}. Далее,

$$\| \int_0^T \mathcal{E}(v)(s,x)ds\|_{L_4(\Omega)} \leq \int_0^T \|\mathcal{E}(v)(s,x)_{L_4(\Omega)}ds\| \leq$$

$$\leq M \int_0^T \|\nabla v(s,x)\|_{L_4(\Omega)}ds \leq M\|\nabla v\|_{L_4(Q_T)}.$$

Следовательно, оценки $(I_{02}, \partial_t\theta)$ и $(I_{02}, \triangle\theta)$ аналогичны оценкам $(I_{01}, \partial_t\theta)$ и $(I_{01}, \triangle\theta)$.

В остальном для случая $\mu_1 > 0$ доказательство теоремы 4.6 такое же, как и в случая $\mu_1 = 0$.

Теорема 4.6 доказана.

4.6 Доказательство теоремы 4.4

Рассмотрим систему (4.56)-(4.55), (4.57)-(4.58) при фиксированной $\xi \in W_4^{1,1}(Q_T)$. Найдем решение (v, θ) этой системы. Построим оператор $\mathcal{L}\xi = \theta$. Покажем, что оператор $\mathcal{L}$ переводит

$$S(R) = \{\xi : \xi \in W_4^{1,1}(Q_T), \nabla\xi(0) = \nabla\theta^0, \|\xi\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \leq R\},$$

в себя.

Покажем корректность определения $\mathcal{L}$. Пусть $\xi \in S(R)$ фиксирована. В самом деле, из теоремы 4.5 следует разрешимость системы (4.56)-(4.55). Подставляя эти решения v в (4.57) мы получим решение θ этой системы. В силу теоремы 4.5 $\theta \in W_4^{1,1}(Q_T)$.

В случае $\mu_1 = 0$ в [35] были получены следующие факты: в случае достаточно большого $R > 0$ и достаточно малых $\mu_2,\ k_2$, оператор $\mathcal{L}$ переводит $S(R)$ в себя и является компактным. При этом ключевым моментом является наличие априорных оценок для решения задачи (4.54)-(4.55):

$$\operatorname*{ess\,sup}_t |v|_0^2 + \mu_0 \int_0^t |\nabla v|_1^2\, ds + \|v\|_{L_4(Q_T)}^2 \leq M(|v^0|_0^2 + \|f\|_0^2); \tag{4.93}$$

$$\begin{gathered}\text{ess sup}_t\,|\nabla v|_0^2+\|\nabla^2 v\|_0^2+\|\nabla v\|^2_{L_4(Q_T)}\leq\\ \leq\Phi_7(\tfrac{\mu_2^4}{2\mu_0^3}\|\nabla\xi\|^4_{L_4(Q_T)})(|v^0|_0^2+\|f\|_0^2);\end{gathered}\tag{4.94}$$

$$\begin{gathered}\text{ess sup}_t\,|\partial_t v|_0^2+\|\nabla\partial_t v\|_0^2+\|\partial_t v\|^2_{L_4(Q_T)}\leq\\ \Phi_8(\tfrac{\mu_2^2}{\mu_0}\|\partial_t\xi\|^4_{L_4(Q_T)},\tfrac{\mu_2^4}{2\mu_0^3}\|\nabla\xi\|^4_{L_4(Q_T)},|v^0|_2^4,\|f\|^4_{1,0},\|\nabla\theta^0\|^4_{L_4(Q_T)})\end{gathered}\tag{4.95}$$

и решения задачи (4.57)-(4.58):

$$\begin{gathered}\text{ess sup}_t\,|\theta|_0^2+\|\nabla\theta\|_2^2+\|\theta\|^2_{L_4(Q_T)}\leq M(|\theta^0|_0^2+\\ \Phi_9(\tfrac{\mu_2^4}{2\mu_0^3}\|\nabla\xi\|^4_{L_4(Q_T)})(|v^0|_0^2+\|f\|_0^2)+\|g\|_0^2);\end{gathered}\tag{4.96}$$

$$\begin{gathered}\text{ess sup}_t\,|\nabla\theta(t,.)|_0^2+\|\nabla^2\theta\|_0^2+\|\nabla\theta\|^2_{L_4(Q_T)}\leq\\ \Phi_{10}(\tfrac{\mu_2^4}{2\mu_0^3}\|\nabla\xi\|^2_{L_4(Q_T)},\tfrac{k_2^4}{2k_0^3}\|\nabla\xi\|^2_{L_4(Q_T)},\|g\|_0^2,\|f\|_0^2,|\theta^0|_1^2,|v^0|_0^2);\end{gathered}\tag{4.97}$$

$$\begin{gathered}\text{ess sup}_t\,|\partial_t\theta(t,.)|_0^2+\|\partial_t\nabla\theta\|_0^2+\|\partial_t\theta\|^2_{L_4(Q_T)}\leq\\ \Phi_{11}(\tfrac{\mu_2^4}{2\mu_0^3}\|\nabla\xi\|^4_{L_4(Q_T)},\tfrac{k_2^4}{2k_0^3}\|\nabla\xi\|^4_{L_4(Q_T)},\tfrac{\mu_2^2}{2\mu_0}\|\partial_t\xi\|^4_{L_4(Q_T)},\tfrac{k_2^4}{2k_0^3}\|\partial_t\xi\|^4_{L_4(Q_T)},\\ \tfrac{\mu_2^4}{2k_{0,}}\|\partial_t\xi\|^4_{L_4(Q_T)},\|f\|^4_{1,0},\|g\|^4_{1,0},|\theta^0|_2^4,|v^0|_2^4).\end{gathered}\tag{4.98}$$

Здесь Φ_i – монотонная функция своих аргументов. Оказывается, что эти оценки совпадают также для случая $\mu_1>0$.

Лемма 4.9. *Пусть $\mu_1>0$. Пусть μ_2,k_2 – достаточно малы. Тогда выполняются оценки (4.93)-(4.95).*

Докажем лемму 4.9.

Перепишем задачу (4.56)-(4.55) и (4.57)-(4.58) в виде

$$\hat{L}_{1,\xi}(v)-\mu_1\text{Div}\int_0^t\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds=f,\tag{4.99}$$

$$\hat{L}_{2,\theta}(\theta)-\mu(\xi)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)=g+\mu_1\mathcal{E}(v):\int_0^T\mathcal{E}(v)(s,x)ds.\tag{4.100}$$

Докажем (4.93).

Выбирая $\phi=v$ в (4.50) и интегрируя по частям по x, а затем по времени на промежутке $[0,T]$, получим

$$\int_0^t (\hat{L}_{1,\xi}(v), v)\, ds - \mu_1 \int_0^t (\triangle v(s,x), \partial_s v(s,x))\, ds = \int_0^t (f, v)\, ds. \qquad (4.101)$$

Для случая $\mu_1 = 0$ оценка (4.93) вытекает из (4.101) (см. [35]). Рассмотрим второй интеграл в (4.101), обозначив его J. С помощью стандартных преобразований имеем

$$J = \int_0^t \int_0^s (\mathcal{E}(v)(\xi,x), \partial_\xi \mathcal{E}(v)(\xi,x)) d\xi\, ds = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} | \int_0^s \mathcal{E}(v)(\xi,x)|^2\, ds.$$

Таким образом, при $\mu_1 > 0$ дополнительное выражение $\mu_1 J$ в левой части (4.101) является неотрицательным и может быть отброшена. Далее, оценка (4.93) при $\mu_1 > 0$ вытекает из (4.101) по аналогии с оценкой в [35] при $\mu_1 = 0$.

Докажем (4.94).

Выбирая $\phi = \triangle v$ как проверочную функцию (4.50) и интегрируя по времени на $[0,t]$ как в [35], получаем

$$\begin{gathered} \textstyle\int_0^t (L_{1,\xi}(v), \triangle v)\, ds = \int_0^t (f, \triangle v)\, ds + \\ \textstyle+\mu_1 \int_0^t \int_0^s (\triangle v(x,\tau), \triangle v(x,s))\, d\tau\, ds. \end{gathered} \qquad (4.102)$$

Ясно, что

$$\begin{gathered} \textstyle J_2 = | \int_0^t (\int_0^s \triangle(\tau,x) d\tau)\, ds| \le M \int_0^t \int_0^s |v(\tau,.)|_2\, d\tau |v(s,.)|_2\, ds \le \\ \textstyle M(\int_0^t |v(s,.)d\, s|)^2 \le M \int_0^t |v(s,.)|_2^2\, ds. \end{gathered} \qquad (4.103)$$

При $\mu_1 = 0$ имеем (4.94).Отсюда и (4.103) получаем, что при $\mu_1 > 0$

$$\begin{gathered} \textstyle\frac{1}{2}|v(t)|_1^2 + \int_0^t |v(s,.)|_2^2\, ds \le M(|v^0|_1^2 + \int_0^t |f|^2\, ds + \\ \textstyle+\frac{\mu_2^4}{\mu_0^3} \int_0^t \|\nabla \xi(s,.)\|_{W_4^4(\Omega)} |v(s,.)|_1^2\, ds + \mu_1 \int_0^t \int_0^s |v(\tau,.)|_2^2\, d\tau\, ds). \end{gathered} \qquad (4.104)$$

Из (4.104) получаем интегральное неравенство типа Гроноулла относительно $\int_0^t |v(s,.)|_2^2\, ds$, что дает оценку $\int_0^t |v(s,.)|_2^2\, ds$ через правую часть (4.104) для случая $\mu_1 = 0$. Отсюда вытекает справедливость оценки (4.94) и для случая $\mu_1 > 0$.

Докажем оценку (4.95).

Дифференцируя по времени t (4.50) и выбирая $\phi = \partial_t v$ как проверочную функцию в соответствующем интегральном тождестве, интегрируя по времени на $[0, t]$ подобным образом как и в [35], получим

$$\int_0^t (\frac{d}{dt} L_{1,\xi}(v), \partial_s v)\, ds + \mu_1 \int_0^t (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\partial_s v))\, ds = \int_0^t (\partial_s f, \partial_s v)\, ds. \tag{4.105}$$

При $\mu_1 = 0$ оценка (4.95) вытекает из (4.105) (см. [35]). Обозначая второй интеграл в (4.105) I_{03}, получим

$$I_{03} = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} |\mathcal{E}(v)|_0^2\, ds = \frac{1}{2} |\mathcal{E}(v)|_0^2 - \frac{1}{2} |\mathcal{E}(v^0)|^2. \tag{4.106}$$

Таким образом, слагаемое $\frac{1}{2}|D(v)|_0^2$ может быть отброшено. Дальнейшее доказательство (4.95) совпадает со случаем $\mu_1 = 0$ (см. [35], Предположение 4.3). Лемма 4.9 доказана.

Лемма 4.10. *Пусть $\mu_1 > 0$. Пусть μ_2, k_2 – достаточно малы. Тогда справедливы оценки (4.96)-(4.98).*

Докажем лемму 4.10.

Сначала докажем (4.96).

При $\mu_1 = 0$ оценка (4.96) была получена в [35]. Ясно, что она также справедлива, если мы возьмем

$$g + \mu_1 \mathcal{E}(v) : \int_0^t \mathcal{E}(v)\, ds := g + \mu_1 \hat{g} \tag{4.107}$$

вместо g. В этом случае в правой части (4.96) появляется слагаемое $\|g + \mu_1 \hat{g}\|_0^2$ вместо of $\|g\|_0^2$. Ясно, что

$$\int_0^t |g + \mu_1 \hat{g}|_0^2 ds \le 2 \int_0^t |g|_0^2\, ds + 2\mu_1^2 \int_0^t \hat{g}_0^2\, ds. \tag{4.108}$$

Применяя неравенство Гельдера и интегральное неравенство Минковского, получаем, что

$$\begin{gathered} \textstyle\int_0^t |\hat{g}|_0^2 ds \le M \int_0^t \|\nabla v\|_{L_4(\Omega)}^2 (\int_0^s \|\nabla v\|_{L_4(\Omega)}\, d\tau)^2\, ds \le \\ \le M \textstyle\int_0^t \|\nabla v\|_{L_4(\Omega)}^4\, ds. \end{gathered} \tag{4.109}$$

Из (4.108) и (4.109) вытекает, что

$$\int_0^t |g+\mu_1\hat{g}|_0^2 ds \le M(\int_0^t |g|_0^2 ds + \mu_1^2 \int_0^t \|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)}\, ds). \tag{4.110}$$

Отсюда

$$\|g+\mu_1\hat{g}\|_0 \le M(\|g\|_0 + \mu_1 \|\nabla v\|^2_{L_4(Q_T)}). \tag{4.111}$$

Подставляя (4.111) вместо $\|g\|_0$ в правую часть (4.96) и пользуясь оценкой (4.94) получаем (4.96) для случая $\mu_1 > 0$.

Оценка (4.96) доказана.

Докажем (4.97).

Оценка (4.97) была получена в [35] при $\mu_1 = 0$. Это также справедливо для (4.107) вместо g. В этом случае $\|g+\mu_1\hat{g}\|_0$ появляется вместо $\|g\|_0$. Подставляя (4.111) вместо $\|g\|_0$ в правую часть (4.97) при $\mu_1 = 0$ и пользуясь монотонностью Φ_{10} по своим параметрам и (4.93), получаем (4.97) для случая $\mu_1 > 0$ (с другой функцией Φ_{10} того же типа).

Оценка (4.97) доказана.

Докажем (4.98).

Дифференцируя (4.100) по времени t, умножая на θ_t, и интегрируя по времени на $[0,t]$ имеем

$$\begin{gathered}\int_0^t(\partial_s L_{2,\xi}(\theta), \partial_s\theta)\, ds = \int_0^t(\partial_s g, \partial_s\theta)\, ds + \\ +\mu_1 \int_0^t(\mathcal{E}(\partial_s v) : \int_0^s \mathcal{E}(v)\, d\tau, \partial_s\theta)\, ds + \\ +\mu_1 \int_0^t(\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \partial_s\theta)\, ds.\end{gathered} \tag{4.112}$$

Из (4.112) при $\mu_1 = 0$ следует (см. [35], доказательство предположения 4.4) что

$$\begin{gathered}|\partial_t\theta|_0^2 + \int_0^t |\nabla\partial_s\theta|_0^2\, ds \le \Phi_{11} + \int_0^t G_1 |\partial_s\theta|_0^2\, ds \\ + + M\int_0^t \|\nabla\theta\|^4_{L_4(\Omega)}\, ds + \mu_1 J_1 + \mu_1 J_2.\end{gathered} \tag{4.113}$$

Здесь Φ_{11} получается из (4.98),

$$J_1 = \int_0^t (\mathcal{E}(\partial_s v) : \int_0^s \mathcal{E}(v)\, d\tau, \partial_s\theta)\, ds,\;\; J_2 = \int_0^t (\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \partial_s\theta)\, ds,$$

$$G_1 = (1 + \|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)} + \|\partial_t \xi\|^4_{L_4(\Omega)}).$$

Оценка $J_i, i = 1, 2$. Применяя неравенства Гельдера и интегрального неравенства Минковского, получим

$$J_1 \leq \int_0^t |\nabla \partial_t v|_0 \int_0^s \|\nabla v\|_{L_4(\Omega)}\, d\tau \|\partial_s \theta\|_{L_4(\Omega)}\, ds. \tag{4.114}$$

Используя неравенство $\|z\|_{L_4(\Omega)} \leq M|z|_0^{1/2}|\nabla z|_0^{1/2}$, $z \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ для $z = \theta_t$, при $\epsilon > 0$ из (4.114) получаем

$$\begin{gathered} J_1 \leq \int_0^t |\nabla \partial_s v|_0^2\, ds + M(\int_0^s \|\nabla v\|_{L_4(\Omega)}\, d\tau)^2 |\nabla \partial \theta_s|_0 |\partial_s \theta|_0\, ds \leq \\ \int_0^t (|\nabla \partial_s v|_0^2\, ds + C_\epsilon \int_0^t \int_0^s \|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)}\, d\tau |\partial_s \theta|_0^2\, ds + \epsilon \int_0^t |\nabla \partial_s \theta|_0\, ds \leq \\ \int_0^t |\nabla \partial_s v|_0^2\, ds + C_\epsilon \|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)} \int_0^t |\partial_s \theta|_0^2\, ds + \epsilon \int_0^t |\nabla \partial_s \theta|_0^2\, ds. \end{gathered} \tag{4.115}$$

Легко видеть, что

$$J_2 \leq M \int_0^t |\nabla v|^4_{L_4(\Omega)}\, ds + M \int_0^t |\partial_s \theta|_0^2\, ds. \tag{4.116}$$

Пользуясь (4.115), (4.116) и выбирая $\epsilon > 0$ достаточно малым, получаем из (4.113), что

$$|\partial_t \theta|_0^2 + \int_0^t |\nabla \partial_s \theta|_0^2 ds \leq \Phi_{12} + \int_0^t G_2 |\partial_s \theta|_0^2 ds + M \int_0^t \|\nabla \theta\|^4_{L_4(\Omega)} ds. \tag{4.117}$$

Здесь $\Phi_{12} = \Phi_{11} + C(\|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)} + \|\nabla \partial_t v\|^4_{L_4(\Omega)})$, $G_2 = G_1 + C(\|\nabla v\|^4_{L_4(\Omega)} + 1)$.

Следовательно, неравенство (4.117) при $\mu_1 > 0$ является неравенством того же типа, что и (4.113) при $\mu_1 = 0$. Оценка (4.98) доказана.

Лемма 4.10 доказана.

Лемма 4.11. *Пусть выполнены оценки (4.93)-(4.95) и (4.96)-(4.98). Тогда при достаточно большом $R > 0$ и достаточно малых μ_2, k_2, оператор $\mathcal{L}$ переводит $S(R)$ в себя и является компактным.*

Доказательство леммы для случая $\mu_1 > 0$ совпадает со случаем, когда $\mu_1 = 0$, благодаря оценкам (4.93)-(4.95) и (4.96)-(4.98).

Воспользовавшись теоремой Шаудера о неподвижной точке, мы получаем существование неподвижной точки ξ_* оператора $\mathcal{L}$.

Очевидно, что пара (v, θ) – решение задачи (4.43)-(4.46), где $\theta = \xi_*$, и v – решение задачи (4.56)-(4.55) при $\xi = \xi_* = \theta$.

Теорема 4.4 доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер; пер. с англ. Н.И. Малинина под ред. Э.И. Григолюка. – Москва: Наука, 1965.– 224 с.

2. Реология / под ред. Ф. Эйриха; пер. с англ. под общей ред. Ю.Н. Работнова и П.А. Ребиндера. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1962.– 824 с.

3. Maxwell, J. C. On the dynamical theory of gases / J. C. Maxwell. – London: Phil. Trans. Roy. Soc., 1867.– Vol. 157. – 49 p.

4. Thomson, W. Elasticity / W. Thomson. (Kelvin) – Cambridge: Encyclopedia Britannica, 1875 – Vol. 3.

5. Voigt, W. Lehrbuch der Kristallphysik / W. Voigt. – Leipzig – 1875.– 962 p.

6. Oldroyd, J. G. Non-Newtonian flow of liquids and solids/J. G. Oldroyd // Rheology: Theory and Applications(F. R. Eirich, Ed.), AP, New York. – 1956. – Vol. I. – P. 653-682.

7. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды МИАН СССР. – 1988. – 179. – С.126–164.

8. Антонцев, С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 230с.

9. Агранович, Ю.Я. Исследование математических моделей вязкоупругих жидкостей / Ю.Я. Агранович, П.Е. Соболевский // Докл. АН УССР. – 1989. – сер. А, 10. – С.71-74.

10. Агранович, Ю.Я. Исследование слабых решений модели Олдройда вязкоупругой жидкости / Ю.Я. Агранович, П.Е. Соболевский // Качественные методы исследования операторных уравнений. – Ярославль, 1991. – С. 39–43.

11. Орлов, В.П. О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели нелинейно-вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Математические заметки. – 2008. – Т.84, № 2. – С. 238-253.

12. Звягин, В.Г. Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Известия ВУЗов. Математика. – 2013. – 8. – С. 51-56.

13. Blanchard, D. Existence and uniqueness of the solution of a Boussinesq system with nonlinear dissipation / D. Blanchard, N. Bruyere, O. Guibe // Communications on pure and applied analysis. – 2013 September. – Volume 12, № 5. – P.2213-2227.

14. Pawlow, I. Global regular solutions to a Kelvin-Voigt type thermoviscoelastic system / I. Pawlow, W. ZajaczkowskiarXiv. – 1112.3176v1 [math.AP], 2011. – 52p.

15. Consiglieri L. Weak solution for a class of non-Newtonian fluids with energy transfer / L. Consiglieri // J. Math. Fluid, Mech. – 2000. – V.2. – P.267-293.

16. Bonetti, E. Existence and uniqueness of the solution to a 3D thermoviscoelastic system / E. Bonetti, G. Bonfanti // Electromic Journ. of Diff.Equat. – 2003. – 5. – P.1-15.

17. Воротников, Д. А. Обзор результатов и открытых проблем по математическим моделям движения вязкоупругих сред типа джеффриса / Д. А. Воротников, В. Г. Звягин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика.– 2009. – 2. – С. 30-50.

18. Орлов, В. П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / В. П. Орлов //Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Математика. – 2012. – 2. – С. 190-197.

19. Функциональный анализ / под ред. С. Г. Крейна. – М.:Наука, 1972. – 544 с.

20. Темам, Р. Уравнение Навье-Стокса / Р. Темам. – М:Мир, 1981. – 408с.

21. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

22. Lions, J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires / J.-L. Lions. – Dunod Gauthiers-Villar, Paris,1969.

23. Звягин, В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. – М.:УРСС, 2004. – 112 с.

24. Simon, J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. / J. Simon // Ann. Math. Pure Appl. – 1988. – V.146. – P.65-96.

25. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.:Мир, 1967. – 624 с.

26. Орлов, В.П. Исследование математических моделей термовязкоупругости // Докл. РАН. – 1995.– Т.343.–С.41-46.

27. Orlov, V.P. Local solvability of onedimensional problem of termoviscoelastisity / Orlov V.P. // Israel Journal of Mathematics.–1992.–V.78. – P.51-54.

28. Orlov, V.P. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V.P. Orlov, P.E. Sobolevskii // Differential and Integral Equations.– 1991.– V. 4, № 1.– P. 103-115.

29. Орлов, В.П. Исследование математических моделей вязкоупругости / В.П. Орлов, П.Е. Соболевский // Докл. АН УССР.– 1989.–сер.А. №10.– С. 31-35.

30. Звягин, В.Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко // Дифференц. уравнения.– 2002.–Т. 38, № 12. – С. 1633-1645.

31. Звягин, В.Г. О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко// Известия ВУЗов. Математика.–2004.–Т.–508, №9.–С.24-40.

32. Орлов, В.П. О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели нелинейно-вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Математические заметки. – 2008. – Т.84, № 2.– С. 238-253.

33. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости/О.А. Ладыженская. – М.:Наука, 1970. - 204с.

34. Bermudes de Castro, A. Continuum Thermomechanics / A.Bermudes de Castro. – Birkhäuse: Progress in Mathematical Physics , 43, , 2005. – 363 p.

35. Consiglieri, L. Regularity for the Navier-Stokes-Fourier system / L. Consiglieri // Differential Equations and Applications. – 2009. – vol. 1, no. 4. – P. 583-604.

36. Течение полимерных растворой при наличии конвективных ускорений / В. Б. Амфилохиев [и др.] // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного иститута. – 1975. – Т. 96. – С. 3–9.

37. Ворович, И. И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости / И. И. Ворович, В. И. Юдович // Математический сборник. – 1961. – Т. 53, № 4. – С. 393–428.

38. Гольдштейн, Р. В. Механика сплошных сред. Часть I / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов. – Наука. Физматлит, 2000. – 256 с.

39. Лионс, Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

40. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа. / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

41. Павловский, В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200, № 4. – С. 809–812.

42. Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга (Университетская серия Т. 5), 1999. –352 с.

43. Chepyzhov, V. V. Attractors for equations of mathematical physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik. – Providence. RI: AMS Colloquium Publications, 2002. – 363 p.

44. Cioranescu, D. Weak and classical solutions of a family of second grade fluids / D. Cioranescu, V. Girault // International Journal of Non–Linear Mechanics. – 1997. – V. 32. – P. 317–335.

45. Galdi, G. P. Existence and uniqueness of classical solutions of the equations of motion for second–grade fluids / G. P. Galdi, M. Grobbelaar–Van Dalsen, N. Sauer // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1993. – V. 124. – P. 221–237.

46. Guillope, C. Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law / C. Guillope, J. C. Saut // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 1990. – V. 15, № 9. – P. 849–869.

47. Guillope, C. Mathematical problems arising in differential models for viscoelastic fluids / C. Guillope, J. C. Saut // Mathematical topics in fluid mechanics / J. F. Rodrigues, A. Sequeira (eds). – Pitman Research Notes in Mathematics Series V. 274.: Longman Scientific and Technical, Harlow, 1992. – P. 64–92.

48. Kamenskii, M. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications V. 7. Walter de Gruyter, 2001. – 231 p.

49. Leray, J. Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique / J. Leray // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées – 1933. – V. 12. – P. 1–82.

50. Lions, P. L. Global solutions for some Oldroyd models of non–Newtonian flows / P. L. Lions, N. Masmoudi // Chinese Annals of Mathematics. Series B. – 2000. – V. 21, № 2. – P. 131–146.

51. Obukhovskii, V. V. Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid / V. V. Obukhovskii, P. Zecca, V. G. Zvyagin // Topological Methods in Nonlinear Analysis – 2004. – V. 23. – P. 323–337.

52. Sell, G. R. Dynamics of Evolutionary Equations / G. R. Sell, Y. You. – New York: Springer, 1998. – 670 p.

53. Simon, J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1987. – V. 146. – P. 65–96.

54. Zvyagin, V. G. Weak Solutions and Attractors for Motion Equations for an Objective Model of Viscoelastic Medium / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – № 7. – P. 1060105–1060106.

55. Zvyagin, V. G. Approximating–topological methods in some problems of hydrodinamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2008. – V. 3, № 1. – P. 23–49.

56. Zvyagin, V. G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. – De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications V. 12. Walter de Gruyter, 2008. – 230 p.

Публикации автора по теме диссертации

57. Орлов, В.П. Разрешимость одной регуляризованной задачи термовязко-упругости/ В.П. Орлов, М.И. Паршин // КММК-2013, Крым, Судак, пансионат «Звездный» , 22.09.2013-04.10.2013. Сборник тезисов. – 2013.

58. Орлов, В.П. О сильных решениях одной модели термовязкоупругости / В.П. Орлов, М.И. Паршин // КРОМШ-2014. Судак, Российская Федерация, 21-30 сентября. Сборник тезисов. – 2014. – С. 94.

59. Орлов, В.П. Об одной задаче динамики термовязкоупругости среды типа Олдройда / В.П. Орлов, М.И. Паршин // Известия ВУЗов. Математика. – 2014. – № 5. –С. 68–74.

60. Орлов, В.П.Слабая разрешимость одной моделидинамики термовязкоупругой среды / В.П Орлов., М.И. Паршин// Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 3. – С. 136-151.

61. Орлов, В.П.О сильных решениях одной модели термовязкоупругости типа Олдройда / В.П Орлов., М.И. Паршин// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, №3. – С. 69-76.

62. Орлов, В.П.Об одной задаче динамики термовязкоупругой среды с памятью / В.П Орлов., М.И. Паршин// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2015. - Т. 55, №4. - С. 653-668.

63. Orlov V.P.On strong solutions for a Navier-Stokes-Fourier-Oldroid system / V.P. Orlov, M.I. Parshin, V.G. Zvyagin // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. - 2014. - Vol.2, No2. - pp. 277-289.

64. Паршин М. И. О разрешимости одного операторного уравнения / М. И. Паршин // Актуальные направления научных исследований XXI века:теория и практика. 18-19 ноября 2014 г, Воронеж. Сборник научных трудов - 2014. - №5. - часть 2. - С. 46-49.

65. Паршин, М.И. Об одной задаче параболического типа / М.И. Паршин // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, 27 января - 2 февраля 2015 г., Воронеж. – 2015. – С. 95-96.

66. Паршин, М.И. О сильном решении одной задачи параболического типа /М.И. Паршин// Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2015. – Выпуск. 10. –Часть 1. – С. 193-201.

67. Паршин, М.И. О слабом решении одной задачи параболического типа /М.И. Паршин// Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2015. – Выпуск. 10. –Часть 1. – С. 201-207.

68. Паршин, М. И. О существовании слабых решений модели динамики термовязкоупругой среды с памятью / М. И. Паршин // Вестник ЛГПУ.Серия МИФЕ. Липецк ЛГПУ. - 2015. - Вып.1 (16). - С. 30-36.

69. Паршин, М.И. Об одном операторном уравнении / М.И. Паршин // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа, 23 мая — 9 мая 2015 г., Воронеж. – 2015. – С. 160-161.

70. Паршин, М. И. О существовании слабых решений модели динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда / М. И. Паршин // Вестник ЛГПУ. Серия МИФЕ. Липецк ЛГПУ. - 2015. - Вып.2 (18). - С. 40-45.