На правах рукописи

УШАКОВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

КОНСТАНТЫ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ И СИСТЕМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ

01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Новиков Игорь Яковлевич

Официальные оппоненты: Гольдман Михаил Львович, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет дружбы народов, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, профессор

Седаев Александр Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра высшей математики, профессор.

Ведущая организация: Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика Королёва

Защита состоится 1 марта 2015 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/2378/Диссертация_Ушаков_С.Н..pdf

Автореферат разослан "___" декабря 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы диссертации. Константы неопределённости являются важным инструментом в изучении ортогональных и неортогональных систем функций в гильбертовом пространстве. Они характеризуют локализацию используемых функций как во временной (пространственной), так и в частотной областях. Первый ортонормированный базис, последовательность констант неопределённости элементов которого ограничена сверху, был построен в 1986 году И. Мейером, с чего и началась теория всплесков. В 1988 году Ж. Бургейн доказал, что можно построить ортонормированный базис с константой неопределённости для всех элементов, сколь угодно близкой к минимальной. Однако, что очень важно для теории всплесков, доказательство не дало конструктивных примеров в дальнейшем. Базисы Мейеровского типа, с улучшением свойств масштабирующей функции и уменьшением константы неопределённости, изучались в работах Лебедевой Е.А.. Актуальными остаются задачи улучшения свойств локализованности уже известных базисов функций. Одним из подходов к таким задачам является построение базиса всплескового типа, что на примере системы эрмитовых функций реализовали Ю. Престин и Б. Фишер.

В последние годы большое распространение в прикладных задачах получили системы целочисленных сдвигов функций. Они, как правило, не ортогональны. Поэтому разложение по этим системам дискретных оцифрованных сигналов связано с решением сложных интерполяционных задач. Ключевым моментом при решении таких задач часто является построение узловой функции.

Определение. *Функция* $g(x)$ *, являющаяся линейной комбинацией* $\varphi_k(x)$ *,* $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \varphi_k(x)$ *, называется узловой функцией, если для неё выполнена система равенств* $g(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}$ *, где* δ_{0m} *–*

символ Кронекера.

Наиболее разработанными в этом плане являются базисные сплайны и системы равномерных сдвигов функции Гаусса $G_\sigma(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Случай функции Гаусса подробно рассмотрен в монографии В.Г. Мазьи, Г. Шмидта [1] и последующих работах этих авторов. В цикле работ В.Л. Вендланда, В. Карлина показано, что системы сдвигов функции Гаусса могут быть применены для аппроксимации различных потенциалов, а также для решения линейных и нелинейных граничных задач математической физики. Различные аспекты интерполяции с помощью системы сдвигов функции Гаусса изучались в работах С.Ф. Бойса, К. Калкатерры.

Изучение систем равномерных сдвигов для других функций, а также для конечномерных дискретизированных вариантов является актуальной задачей. Кроме того, так как нахождение узловой функции связано с получением её коэффициентов d_k, то важными являются вопросы о свойствах этих коэффициентов.

В работах по квантовой оптике, таких авторов как Э. Вольф, Р. Глаубер, Л. Мандель, А.М. Переломов, используются когерентные состояния, представляющие собой функции вида

$$\psi(x) = exp\left(-\frac{(x-a)^2 - ibx}{2\sigma^2}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

с фиксированным параметром σ.

Цель работы. Изучение свойств узловых функций, построенных на основе целочисленных сдвигов функций Лоренца и Гаусса. Изучение констант неопределённости для систем когерентных состояний и базиса из функций Эрмита. Основные задачи работы состояли: в получении явных выражений для констант неопределённости, в исследовании зависимости этих констант от различных параметров.

[1] Approximate approximations. / V. Maz'ya, G. Schmidt. //AMS Mathematical Surveys and Monographs. – 2007.– vol.141. – 350 p.

Методика исследований. В работе используются методы теории функций, линейного функционального анализа, линейной алгебры, теории всплесков и теории специальных функций.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Следующие результаты, полученные в работе, являются новыми.

1. Получены формулы для вычисления константы неопределённости линейных комбинаций функций Эрмита. В случае двух функций минимум константы неопределённости найден аналитически, в случае трёх функций — численно.

2. Доказаны знакочередование и монотонность с ростом по модулю индекса коэффициентов узловой функции, построенной с помощью целочисленных сдвигов функции Гаусса, а также нарушение этих свойств для узловой функции, построенной с помощью целочисленных сдвигов функции Лоренца.

3. Для случая узловой функции, построенной с помощью конечных сумм сдвигов функции Гаусса, предложен способ уменьшения амплитуды колебаний за пределами отрезка интерполяции.

4. Получены формулы для констант неопределённости линейных комбинаций когерентных состояний в общем случае и проведено упрощение этих формул при дополнительных предположениях на коэффициенты линейных комбинаций.

Практическая и теоретическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации теоретически обосновывают свойства узловых функций, полученных с помощью целочисленных сдвигов функции Гаусса или Лоренца.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международной конференции "Всплески и приложения" в г.Санкт–Петербурге в 2012 г., на $VIII$ международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" в г. Новороссийск в 2014 г., в

Воронежской зимней математической школе в 2011 г., а также на семинарах Воронежского государственного университета в 2011 – 2014 гг.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1–7]. Работы [1–4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных публикаций [2–4] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации 101 стр.

Краткое содержание диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, определены научная новизна и практическая значимость.

Нумерация приводимых ниже теорем и определений совпадает с их нумерацией в диссертации.

Первая глава является вводной. Здесь приводятся основные определения, необходимые формулы и излагаются результаты, используемые в работе. Важной характеристикой для функции является константа неопределённости.

Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$, причём $\|f\|_{L_2} \neq 0$, тогда радиус $\Delta(f)$ функции $f(x)$ определяется равенством:

$$\Delta_f := \frac{1}{\|f\|_{L_2}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx - \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2\, dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично определяется радиус $\Delta(\widehat{f})$ для преобразования Фурье функции f:

$$\Delta_{\widehat{f}} := \frac{1}{\|\widehat{f}\|_{L_2}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi - \frac{1}{\|\widehat{f}\|_{L_2}^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где прямое преобразование Фурье, задается следующим образом:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-ix\xi} dx.$$

Определение 1.1. *Величина*

$$u(f) = \Delta(f) \cdot \Delta(\widehat{f}).$$

называется константой неопределённости функции f.

В том случае, когда интеграл $\Delta(\widehat{f})$ расходится, полагают $u(f) = \infty$. Константа неопределённости даёт информацию о том насколько хорошо функция f локализована как во временной, так и в частотной областях.

Определим стандартизированный многочлен Эрмита $H_n(x)$ при помощи формулы Родрига:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \; n = 0, 1, \ldots,$$

т.е. n–ый полином Эрмита $H_n(x)$ равен n–ой производной от e^{-x^2}, умноженной на $(-1)^n e^{x^2}$.

Ортонормированные функции Эрмита

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \, H_n(x) \, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

образуют базис в $L_2(\mathbb{R})$. Они являются собственными функциями преобразования Фурье: $\widehat{\varphi}_n(\xi) = (-i)^n \varphi_n(\xi), \; n = 0, 1, 2 \ldots$. Константа неопределённости для функции Эрмита имеет вид: $u(\varphi_n(x)) = n + 1/2$.

Узловую функцию, построенную из сдвигов функции Гаусса $G_\sigma(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$ обозначим через $\widetilde{G}_\sigma(t)$, а из сдвигов функции Лоренца $L_s(t) = \frac{s^2}{t^2+s^2}$ – через $\widetilde{L}_s(x)$,

$$\widetilde{G}_\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{G_\sigma} G_\sigma(t-k), \quad \widetilde{L}_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{L_s} L_s(t-k),$$

где параметры $\sigma > 0$ и $s > 0$.

В дальнейшем потребуются результаты Мазьи В. и Шмидта Г. из выше упомянутой монографии для коэффициентов $d_k^{G_\sigma}$.

Теорема 1.3. *Справедлива формула*

$$d_k^{G_\sigma} = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Известна формула[2] построенной по системе сдвигов $L_s(t)$: для коэффициентов $d_k^{L_s}$:

$$d_k^{L_s} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(st)} dt.$$

Во втором параграфе второй главы выводится формула для константы неопределённости линейной комбинации $\Psi_{\alpha,n,k}(x) = \cos\alpha\,\varphi_n(x) + \sin\alpha\,\varphi_k(x)$, где параметр $\alpha \in [0; 2\pi]$, $n, k = 0, 1, 2 \ldots$.

Теорема 2.1. *Пусть* $|n-k| > 2$, *тогда*

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2},$$

[2] Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М. *О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов* // Математические заметки. 2014. Т. 96 вып. 2. С. 239–250.

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]} u(\Psi_{\alpha,n,k}) = \min(n,\ k) + \frac{1}{2}.$$

Значение $u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)$ в этом случае лежит в отрезке, концами которого являются константы неопределённости для исходных функций φ_n и φ_k.

Теорема 2.2. *Справедливы формулы:*

$$u(\Psi_{\alpha,n,n+2}) = \sqrt{(n^2+3n+6)\sin^4\alpha + (n-n^2)\sin^2\alpha + n^2+n+\frac{1}{4}},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]} u(\Psi_{\alpha,n,n+2}) = \sqrt{\frac{2n^4+14n^3+39n^2+27n+6}{4(n^2+3n+6)}},$$

минимум достигается при $\sin^2\alpha_n = \frac{n^2-n}{2(n^2+3n+6)}$.

Теорема 2.3. *Верна формула*

$$u(\Psi_{\alpha,n,n+1}) =$$

$$= \sqrt{2(n+1)\sin^6\alpha + (2n^2+n)\sin^4\alpha - (2n^2+n)\sin^2\alpha + n^2+n+\frac{1}{4}},$$

минимум достигается при $\sin^2\alpha_n = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, *где* $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$.

Точки минимума в теоремах 2.2 и 2.3 стремятся к одному из следующих углов $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}, m=0,1,2,3$. В этом случае для констант неопределённости верно:

$$u(\Psi_{\frac{\pi}{4},n,n+2}) \approx \frac{\sqrt{3}}{2}(n+\frac{3}{2}),\ u(\Psi_{\frac{\pi}{4},n,n+1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+\frac{1}{2}),$$

где $a_n \approx b_n$ — означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$.

Для случая трёх функций Эрмита рассматривается линейная комбинация $f_{i,j}(n,\alpha,\beta) = a_{n-i}\varphi_{n-i}(x) + a_n\varphi_n(x) + a_{n+j}\varphi_{n+j}(x)$, где

$$a_{n-i} = \sin\alpha\cos\beta,\ a_n = \sin\beta,\ a_{n+j} = \cos\alpha\cos\beta,$$

$\alpha,\beta\in[0,\pi]$, $i,\ j,\ n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant i$.

Возможны пять различных случаев. При $i>1$, $j>1$ константа неопределённости по тем же причинам, что и в теореме 1.1, принадлежит

Таблица 1: Минимальные значения константы неопределённости для функции $f_{i,j}(n,\alpha,\beta)$.

$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{i,j})$	$n=10$	$n=100$	$n=1000$
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{1,1})$	4.46748	42.8727	426.82
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{2,2})$	7.12383	71.0334	707.457
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{1,2})$	8.27098	68.0436	674.265
$\min\limits_{\alpha,\beta} u(f_{2,1})$	6.68749	67.338	673.559

отрезку $[n-i+\frac{1}{2}, n+j+\frac{1}{2}]$. Численные значения минимумов константы неопределённости для других случаев приведены в таблице 1.

В третьей главе рассматриваются системы целочисленных сдвигов функции Гаусса $G_\sigma(t)$ и функции Лоренца $L_s(t)$.

Теорема 3.1 *Коэффициенты* $d_k^{G_\sigma}$ *знакочередуются.*

В отличие от знакочередования, монотонное убывание $|d_k^{G_\sigma}|$ доказать для всех значений параметра σ не удалось. Справедлива

Теорема 3.2 *Начиная с номера*

$$k = \max\left\{\left[\log_q \sqrt{1-q} - 1\right], 0\right\}$$

коэффициенты $d_k^{G_\sigma}$ *монотонно убывают по абсолютной величине.*

Следствие 3.1 *Для монотонного убывания* $|d_k^{G_\sigma}|$ *с нулевого номера достаточно выполнения неравенства:* $q < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *(* $\sigma < 1.02\ldots$ *).*

Следующая теорема показывает, что для случая функции Лоренца при малых значениях параметра s знакочередуемости нет.

Теорема 3.3 *Все коэффициенты* $d_k^{L_s}$ *отрицательны, за исключением* $d_0^{L_s}$, *при выполнении неравенства* $s < \frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{\pi} = 0.5611\ldots$

Численные расчеты показывают, что и при больших значениях s знакочередование с некоторого момента прекращается.

Введём обозначения для двух функционалов

$$F^{\sigma}_{GL}(s,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}-\lambda\frac{s^2}{x^2+s^2}\right)^2dx$$

и

$$F^{s}_{LG}(\sigma,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{s^2}{x^2+s^2}-\lambda e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)^2dx.$$

Для первого функционала считаем зафиксированным параметр σ, для второго — параметр s. Через $\mathrm{Erfc}(x)$ обозначим дополнительную функцию ошибок

$$\mathrm{Erfc}(x)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Теорема 3.4 *Пусть* $b=\frac{s}{\sigma}$. *Минимум* $F^{\sigma}_{GL}(s,\lambda)$ *достигается при*

$$\lambda_1=2e^{\frac{b^2}{2}}\,Erfc\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

и равен

$$F^{\sigma}_{GL}(b,\lambda_1)=\sigma\left(\sqrt{\pi}-2\pi\,b\,e^{b^2}\,Erfc^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

минимум $F^{s}_{LG}(\sigma,\lambda)$ *достигается при*

$$\lambda_2=\sqrt{\pi}\,b\,e^{\frac{b^2}{2}}\,Erfc\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right),$$

и равен

$$F^{s}_{LG}(b,\lambda_2)=s\,\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\pi}\,b\,e^{b^2}\,Erfc^2\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Минимум этих функционалов достигается при $b=0.925368\ldots$:

$$\min_{b,\,\lambda}F^{\sigma}_{GL}(b,\lambda)=\sigma\cdot 0.0494425\ldots,\quad \min_{b,\,\lambda}F^{s}_{LG}(b,\lambda)=s\cdot 0.0438173\ldots.$$

В четвертой главе изучается конечномерный вариант задачи интерполяции: узловая функция $g_n(x)$ ищется в виде конечной суммы

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \cdot q^{(x-k)^2},\ q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

причем число уравнений может быть больше числа неизвестных

$$g_n(j) = \delta_{0j},\ j = -m, \ldots, 0, \ldots, m,\ m \geq n.$$

При численном решении системы величины $g_n(j)$ будут играть роль контрольных сумм. Полученную при $m = n$ узловую функцию обозначим через $g_n^\sigma(x)$, а при $m > n$ — через $g_{n,m}^\sigma(x)$. Исходную систему уравнений можно записать в матричной форме:

$$A \cdot d = y, \tag{4.2}$$

где $a_{ij} = q^{(i-j)^2},\ y_j = \delta_{0j},\ i = -n, \ldots, n,\ j = -m, \ldots, m$.

Обозначим через $W(x_1, \ldots, x_n)$ транспонированный определитель Вандермонда, например

$$W(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

а через $W_{l,k}(x_1, \ldots, x_n)$ минор, получающийся при вычеркивании l-ой строки и k-ого столбца.

Система (4.2) в случае равенства числа неизвестных и уравнений имеет единственное решение.

Теорема 4.1 *Матрица A при $m = n$ — невырождена, а её определитель*

$$\det A = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot W(q^{-2n}, \ldots 1, \ldots, q^{2n}). \tag{4.4}$$

Следствие 4.1 *Поскольку изучаемый в теореме 1 определитель при* $m > n$ *является наибольшим ненулевым минором матрицы* A *размера* $(2n+1) \times (2m+1)$, *то её ранг равен* $2n+1$.

Теорема 4.3 *Для коэффициентов* d_k *верна формула:*

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_{k,\, n+1}(q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n})}{W(q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n})}.$$

Следствие 4.2 *Справедлива формула*

$$d_k = \frac{(-1)^k q^{-k^2} \sum q^{\alpha_1} q^{\alpha_2} \ldots q^{\alpha_{2n+1-k}} \cdot}{\prod\limits_{i \neq k, i=-n}^{n} |q^k - q^i|},$$

где сумма берется по всем сочетаниям $2n+1-k$ *чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1-k}$ *из набора* $-n, -n+1, \ldots, n$.

Следствие 4.3 *Контрольные суммы можно записать в виде отношения определителей:*

$$g_n^\sigma(j) = q^{j^2} \frac{W\left(q^{-2n} \ldots q^{-2}, q^{-2j}, q^2, \ldots q^{2n}\right)}{W\left(q^{-2n} \ldots q^0 \ldots q^{2n}\right)}.$$

Следствие 4.4 $\lim_{\sigma \to \infty} |g_n^\sigma(n+1)| = C_{2n+1}^n$.

При $m > n$ система (1) становится несовместной, коэффициенты d_k вычисляются методом наименьших квадратов. Численное решение искалось методом Гаусса, для проверки вычислялись контрольные суммы $g_n(j)$. В силу чётности функции q^{x^2} верно соотношение $d_k = d_{-k}$. Благодаря этому уменьшается как число уравнений, так и разрыв в порядке между элементами матрицы. Вне отрезка интерполяции $g_n(x)$ сильно осциллирует. Явление осцилляции за пределами отрезка интерполяции в случае $m > n$ может быть значительно уменьшено, хотя при этом возникает эффект регуляризации, при котором значение функции $g_{n,m}(x)$ в нулевой точке ” растекается ” по соседним узлам.

В пятой главе рассматриваются системы когерентных состояний $f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x) = \exp\left(-\frac{(x-k\omega_1)^2}{2}\right)\ e^{i\,m\omega_2 x}$ и равномерных сдвигов функции Гаусса $f_k(\sigma,x) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\,\sigma^2}\right)$, изучаются их линейные комбинации

$$F\left(\omega_1,\omega_2,x\right) = \sum_{k,m} c_{k,m} f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x), \tag{5.1}$$

$$G\left(\sigma,x\right) = \sum_{k} c_k f_k\left(\sigma,x\right). \tag{5.2}$$

Все индексы в суммах здесь и в дальнейшем меняются от $-\infty$ до $+\infty$. Предполагается абсолютная сходимость рядов (5.1)–(5.2), чтобы можно было произвольным образом менять порядок суммирования и группировать слагаемые при перемножении рядов.

Во втором параграфе выписана формула константы неопределённости для системы когерентных состояний в общем случае. Для её упрощения накладываются дополнительные условия на коэффициенты и параметры. Представляет интерес случай неполной системы когерентных состояний:

$$\omega_1\omega_2 = 4\pi N,\ \ N \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

Относительно коэффициентов $c_{k,m}$ предположим, что

$$c_{k,m} = c_k^{\omega_1} \cdot c_m^{\omega_2}, \tag{5.17}$$

где ω_1, ω_2 — это верхние индексы, означающие зависимость коэффициентов от этих параметров. Кроме того, будем считать, что линейная комбинация $F\left(\omega_1,\omega_2,x\right)$ является чётной вещественной функцией. Отсюда коэффициенты $c_{k,m}$ вещественные и выполнено

$$c_k^{\omega_1} = c_{-k}^{\omega_1},\ c_m^{\omega_2} = c_{-m}^{\omega_2}. \tag{5.18}$$

Данные предположения естественны при построении узловой функции с помощью линейной комбинации когерентных состояний или проведении ортогонализации с сохранением структуры сдвигов.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия (5.16)–(5.18), тогда верна формула*

$$u^2\left(F\left(\omega_1,\omega_2\right)\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}-\frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}+\omega_1^2\frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}-\frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}+\omega_2^2\frac{D_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}\right),$$

где

$$C_w=\sum_l l^2\exp\left(-\frac{l^2w^2}{4}\right)a_l^w,\ \ D_w=\sum_l \exp\left(-\frac{l^2w^2}{4}\right)d_l^w,$$

$$A_w=\sum_l \exp\left(-\frac{l^2w^2}{4}\right)a_l^w,\ \ a_l^w=\sum_{k'}c_{l+k'}^w c_{k'}^w,\ \ d_l^w=\sum_{k'}{k'}^2 c_{l+k'}^w c_{k'}^w.$$

Список публикаций по теме диссертации

1. Ушаков С. Н. О константах неопределенности для линейных комбинаций функций Эрмита / С.Н. Ушаков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика, 2012, № 1. — С. 207-212.

2. Минин Л.А. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса / Л.А. Минин, С.М. Ситник, С.Н. Ушаков // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физика. Математика, 2014, № 12 (183), вып. 35. - С. 214-217.

3. Журавлев М.А. О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний / М.А. Журавлев, И.Я. Новиков, С.Н. Ушаков // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014, № 7(118) — С. 17–31.

4. Ситник С.М. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции / С.М. Ситник, А.С. Тимашов, С.Н. Ушаков // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физика. Математика, 2015, № 17 (214), вып. 40. — С. 130–142.

5. Ушаков С.Н. О константах неопределённости для линейных комбинаций функций Эрмита / С.Н. Ушаков // Современные методы теории

функций и смежные проблемы. Материалы ВЗМШ (доп. выпуск) — 2011. — С. 38–39.

6. Ушаков С.Н. О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний / С.Н. Ушаков // VIII Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения": Тезисы докладов. — 2014. — С. 36.

7. Ушаков С.Н. Интерполяция с помощью конечной суммы из сдвигов функции Гаусса. / С.Н. Ушаков //Международная конференция: "Математическое и компьютерное моделирование": Материалы Первой Международной научно–практической конференции. — 2014. — С. 12–13.

Работы [1–4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.