КУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Машков Евгений Юрьевич

Дифференциальные уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук,
профессор Гликлих Ю.Е.

Курск 2015

Оглавление

Введение.

Актуальность темы. Под дифференциальным уравнением леонтьевского типа понимается класс дифференциально-алгебраических уравнений в R^n вида

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t),$$

где $x(t)$ и $f(t)$ – n-мерные вектора, L и M – постоянные $n \times n$-матрицы, причем L вырождена, а M – невырождена. Такое определение для данного класса уравнений ввел Г. А. Свиридюк в работе [23]. Название обусловлено тем обстоятельством, что при некоторых дополнительных предположениях система моделирует межотраслевую экономику "затраты-выпуск" Леонтьева с учетом запасов [19]. На языке этих уравнений в работах А. Л. Шестакова, Г. А. Свиридюка и А. В. Келлер [26], [27], [41], [40] изучается динамическое искажение сигналов в радиоустройствах. В работах Л. А. Власенко, А. Г. Руткаса, М. С. Филипковской [5], [22], [28], а также O. Schein, G. Denk [39], T. Sickenberger, R. Winkler [42], [45], [46], [47] рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей. Дифференциальные уравнения леонтьевского типа возникают в работах Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткаса [6], [7], [43] при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. В работе А. В. Келлер, Т. А. Шишкина [17] с применением систем леонтьевского типа описана методика построения динамической и статистической балансовых моделей на уровне предприятия, а в работе А. В. Келлер, С. И. Эбель [18] системы леонтьевского типа находят приложение в биологии при описании дискретной балансовой динамической модели клеточного цикла. Отметим также работы Ю. Е. Бояринцева и В. Ф. Чистякова [1], [2], [3], [30], [24], Г. В. Демиденко [12], А. В. Келлер и М. А. Сагадеевой [14], [15], [16], С. М. Чуйко [25], A. Alabert [29], S. L. Campbell [32], в которых очень обстоятельно изучены дифференциальные уравнения леонтьевского типа.

Особую важность для приложений представляет случай, когда в правой части дифференцильного уравнения леонтьевского типа присутствуют помехи, т.е. случайные возмущения типа белого шума $\dot{w}(t)$, то есть оно имеет вид

$$L\dot{\xi}(t) = M\xi(t) + f(t) + \dot{w}(t),$$

где $f(t)$ – входящий сигнал в устройство, описываемое операторами L и M, а $\xi(t)$ – это то, что мы получаем на выходе из устройства.

Для изучения дифференциального уравнения леонтьевского типа требуется рассмотрение производных достаточно высоких порядков от свободных членов (см., например, [1]) – в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса или белого шума. Как известно, производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает исследование уравнения сложным. В связи с этим отметим работу Л. А. Власенко, С. И. Ляшко и А. Г. Руткаса по дифференциальным уравнениям со случайными возмущениями и импульсными воздействиями в правой части [43], в которой на коэффициенты уравнения вводятся ограничения, позволяющие не применять "производные" винеровского процесса.

Предлагаемый в работе метод исследования дифференциального уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов [10], для описания которых не используются обобщенные функции. Отметим, что понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. При этом, отпадает необходимость во введении ограничений на коэффициенты уравнения (как в [43]), следуя которым не приходится использовать "производные" винеровского процесса для изучения уравнения.

Альтернативный метод исследования дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями, также основанный на использовании производных в среднем, разработан А. Л. Шестаковым и Г. А. Свиридюком в работе [40].

Цель работы. Целью данной работы является исследование дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями, а также со случайными возмущениями и импульсными воздействиями в правой части с различными типами матриц коэффициентов с использованием производных в среднем. Введение в рассмотрение и исследование нового класса уравнений – дифференциальных уравнений леонтьевского типа в текущих скоростях.

Методы исследования. Используются методы стохастического анализа и теории дифференциально-алгебраических систем первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Научная новизна.

Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Наиболее значимые из них перечислены в следующем ниже списке:

1. Получены формулы для вычисления симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса.

2. Получены утверждения о приведении к каноническому виду дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями.

3. Получены аналитические формулы для решений дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями, а также со случайными возмущениями и импульсными воздействиями в правой части с регулярным и сингулярным пучками постоянных матриц коэффициентов в терминах симметрических производных в среднем винеровского процесса.

4. Получены аналитические формулы для решений дифференциального уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями с прямоугольными матрицами коэффициентов, зависящими от времени в терминах псевдообратных матриц. А для уравнений с достаточно гладкими квадратными матрицами коэффициентов, зависящими от времени, получены аналитические формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса.

5. Определены дифференциальные уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях, а также получены утверждения о существовании решений этих уравнений.

Практическая и теоретическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями.

Апробация результатов диссертации.
Результаты работы докладывались на международной научно-практической конференции "Измерения: состояние, перспективы развития"(Челябинск, 2012), на Воронежской зимней математической школе С. Г. Крейна (Воронеж, 2014), на Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения": "Современные методы теории краевых задач"(Воронеж, 2014, 2015), на Крымской международной осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Судак, Россия 2014).

Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержана грантом Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект №15-01-00620).

Публикации.
Результаты диссертации опубликованы в пятнадцати работах [48] – [62]. Из совместных работ [48], [51], [53] и [59] в диссертацию вошли лишь результаты, полученные лично автором диссертации. Работы [48] – [52] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации.
Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 13 параграфов, и списка литературы. Объем диссертации — 119 страниц. Библиография содержит 62 наименования.

Содержание диссертации.

В §1.1 *первой главы* приводятся вспомогательные сведения из теории производных в среднем. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в R^n (где мы фиксируем σ-алгебру борелевских множеств), заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной при всех t. Введем в рассмотрение σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств при отображении $\xi(t) : \Omega \to R^n$, которая, согласно Э. Нельсону [36], называется "настоящее" и обозначается $\mathcal{N}_t^\xi$. Обозначим через E_t^ξ условное математическое ожидание относительно "настоящего" $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ (см. [10]). Следуя Э. Нельсону [36], [37], [38] введем следующие

Определение 1.1.1 [36] *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\right),$$

где условия и обозначения такие же, как в (i).

Известно, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий) $Y^0(t,x)$ и $Y^0_*(t,x)$ соответственно на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y^0_*(t,\xi(t))$ (см. [21]).

Определение 1.1.2 [36] *Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Введем в рассмотрение векторные поля $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y^0_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y^0_*(t,x))$.

Определение 1.1.3 [36] $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ *называется те-*

кущей скоростью процесса $\xi(t)$*;* $u^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ *называется осмотической скоростью процесса* $\xi(t)$*.*

Введем, следуя Ю. Е. Гликлиху [34], дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1-случайный процесс $\xi(t)$ по правилу

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^*}{\Delta t}\right),$$

где $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец в R^n, а $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^*$ – это сопряженный вектор-строка, а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$.

Определение 1.1.4 [34] D_2 *называется квадратичной производной в среднем.*

В §1.2 приводятся необходимые сведения из теории матриц. В частности, следуя работам В. Ф. Чистякова [24] и др., приводятся

Теорема 1.2.5 [24] *Пусть:*
(i) $A(t)$ *и* $B(t)$ *–* C^∞*-гладкие* $n\times n$*-матрицы и* $t\in[0,T]$*;*
(ii) многочлен $\xi(t,\lambda) = det(\lambda A(t)+B(t)) = a_d(t)\lambda^d+\ldots+a_1(t)\lambda+a_0(t)$ *удовлетворяет критерию "ранг-степень" для любого* $t\in[0,T]$ *и его старший коэффициент не имеет нулей на* $[0,T]$*.*
Тогда:
(i) $rankA(t) = const = d$ *для* $t\in[0,T]$*;*
(ii) существуют неособенные для любого $t\in[0,T]$ C^∞*-гладкие* $(n\times n)$*-матрицы* $P(t)$ *и* $Q(t)$ *такие, что*

$$P(t)(\lambda A(t)+B(t))Q(t) = \lambda\begin{pmatrix} E_d & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} J(t) & 0\\ 0 & E_{n-d}\end{pmatrix}. \qquad (1.2.2)$$

Теорема 1.2.6 [24] *Пусть:*
(i) $A(t)$ *и* $B(t)$ *– вещественно-аналитические* $n\times n$*-матрицы и* $t\in[0,T]$*;*
(ii) старший коэффициент многочлена $\xi(t,\lambda) = det(\lambda A(t)+B(t)) =$

$= a_d(t)\lambda^d + \ldots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$ не обращается в нуль на $[0, T]$.

Тогда существуют неособенные для любого $t \in [0, T]$ вещественно-аналитические $(n \times n)$-матрицы $P(t), Q(t)$ и выполнено равенство

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}, \qquad (1.2.3)$$

где $N(t)$ – верхнетреугольная матрица с нулевой диагональю, $N^k(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, $J(t)$ некоторый $d \times d$-блок.

В §2.1 доказывается утверждение о вычислении симметрических производных в среднем (текущих скоростей) высших порядков от винеровского процесса $w(t)$, которые используются для исследования дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями. Известно, что $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$ (см. [34]). Имеет место

Лемма 2.1.4 *При целом $k \geq 2$* $\quad D_S^k w(t) = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k} \frac{w(t)}{t^k}$.

В §2.2 доказываются утверждения о приведении к каноническому виду дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями. Рассматривается уравнение в R^n

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + B\tilde{w}(t), \;\; 0 \leq t \leq T, \qquad (2.2.1)$$

где $\xi(t)$ случайный, а $f(t)$ неслучайный (детерминированный) n-мерные векторы, $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ и B – $n \times n$-матрицы, причем $\tilde{L}$ вырождена (имеет нулевой определитель), а B и $\tilde{M}$ – невырождены, вектор-функция $f(t)$ предполагается достаточно гладкой, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс. Пусть пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ регулярен. Для регулярного пучка матриц имеется преобразование Кронекера-Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) $A = (a_j^i)$ и A_R), при котором матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ приводятся к квазидиагональному виду (см. [8]). Тогда уравнение преобразуется следующим образом $L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + C\tilde{w}(t)$, где $C = AB$,

$\eta(t) = A_R^{-1}\xi(t)$. Обозначим через C^* оператор, сопряженный с C, а $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в R^n. Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой

$$\langle X, Y\rangle = ((CC^*)^{-1}X, Y). \tag{2.2.2}$$

Тогда имеют место

Теорема 2.2.1 *(i) Для любых векторов X и Y из R^n выполняется тождество $\langle CX, CY\rangle = (X, Y)$. (ii) Процесс $w(t) = C\tilde{w}(t)$ является винеровским в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Пусть e_1, e_2,..., e_n – естественный ортонормированный базис в R^n с $(\cdot,\cdot)$. Тогда имеют место

Следствие 2.2.1 *Векторы Ce_1, ..., Ce_n образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 2.2.2 *В пространстве R^n с $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в разложении по ортонормированному базису Ce_1, Ce_2,..., Ce_n дифференциальное уравнение леонтьевского типа имеет вид*

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + w(t). \tag{2.2.3}$$

Лемма 2.2.1 $d\langle x, x\rangle = d(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2(C^*)^{-1}C^{-1}x$, *где d – внешний дифференциал.*

Лемма 2.2.2 $Grad\langle x, x\rangle = Grad(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2x$.

Следовательно, при отображении в R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулы для текущих скоростей винеровского процесса сохраняют свой вид.

Замечание 2.2.1 *Дифференциальное уравнение леонтьевского типа вида (2.2.1), но с сингулярным пучком матриц $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ размера $n \times m$*

приводится к каноническому виду аналогично. Разница в преобразовании уравнений состоит лишь в том, что преобразование Кронекера-Вейерштрасса сингулярного пучка матриц к квазидиагональному виду описывается парой невырожденных матриц P_L и P_R размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно (см. [8]).

В §2.3 рассматривается дифференциальное уравнение леонтьевского типа вида (2.2.1), в котором обозначения те же, что и в (2.2.1). Подчеркнем, что при замене белого шума $\dot{w}(t)$ на текущую скорость винеровкого процесса, получаем формулы для решений уравнения, которые определены на открытом промежутке $(0, T)$. Для того, чтобы получить процесс, удовлетворяющий нулевым начальным условиям при $t = 0$, зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, T)$ и зададим (как и в [11]) функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0 \le t \le t_0; \\ t, \text{ если } t_0 \le t. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Тогда согласно результатам предыдущего параграфа имеет место

Теорема 2.3.1 *Пусть $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ – регулярный пучок $n \times n$-матриц, а $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \le t \le T$; пусть A и A_R – невырожденные матрицы размера $n \times n$, приводящие пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т.е. к квазидиагональному виду), $L = A\tilde{L}A_R$ и $M = A\tilde{M}A_R$. Тогда: 1) уравнение (2.2.1) трансформируется в уравнение (2.2.3), которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистемы, соответствующей единичной матрице в L и невырожденной матрице K в M, имеет место аналитическая формула для решений вида*

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)} A f(\tau) d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)} dw(\tau);$$

3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1)\times(p+1)$ с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в M, при $0 < t < T$ имеют место формулы для решений вида

$$\eta^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - D_S w^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{k-i+1}f^j}{dt^{k-i+1}}\right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j +$$

$$+\sum_{k=i+1}^{p+1}\left((-1)^{k-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}}\frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}}\right) - \frac{w^j(t)}{2t},\ \ 1\le i\le p;$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях полученных в пункте 3) процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, которые которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \le t < T$.

В §2.4 изучается сингулярное дифференциальное уравнение леонтьевского типа

$$\tilde{L}\xi(t) = \int_0^t \tilde{M}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t),\ \ 0\le t\le T, \tag{2.4.1}$$

где $\tilde{M}+\lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n\times m$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция. Согласно результатам §2.2, с применением преобразования Кронекера-Вейерштрасса для сингулярного пучка матриц и замены метрики пространства R^n данное уравнение приводится к каноническому уравнению

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t), \tag{2.4.2}$$

где матрица $M+\lambda L$ – квазидиагональна. Для уравнения (2.4.2) при $0 < t < T$ получены условия разрешимости и аналитические формулы для описания решений в терминах текущих скоростей винеровского процесса. Зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях найденных процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \le t < T$.

В §2.5 приведен подход к изучению системы с регулярным пучком матриц коэффициентов и единичной диффузией, основанный на применении преобразования матриц коэффициентов к канонической форме Шура. С применением этого подхода не требуется прибегать к замене метрики пространства, а формулы для решений тоже получаются в терминах симметрических производных в среднем винеровского процесса.

В §3.1 рассматривается дифференциальное уравнение леонтьевского типа с нулевыми начальными условиями и импульсными воздействиями в правой части вида $\frac{d\zeta(t)}{dt}$, где $\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t - t_k)$, $0 \le t \le T$, $0 < t_1 < \cdots < t_N < T$, χ – функция Хевисайда, $\tilde{\zeta}_k(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n. Для данного уравнения при $0 < t < T$ получены аналитические формулы для решений в терминах текущих скоростей винеровского процесса. Зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях найденных процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, принимающие при $t = 0$ нулевые значения, но являющиеся решениями только при $t_0 \le t < T$.

В §3.2 изучается сингулярное дифференциальное уравнение леонтьевского типа с импульсными воздействиями и с невырожденным неединичным коэффициентом диффузии с применением результатов §2.1, §2.2.

В §4.1 сначала изучается дифференциальное уравнение, пучок матриц которого удовлетворяет Теореме 1.2.6 и уже приведен к виду (1.2.3). Доказана

Теорема 4.1.2 *Пусть имеются вещественно-аналитические невырожденная $d \times d$-матрица $J(t)$, верхнетреугольная $(n-d) \times (n-d)$-*

матрица $N(t)$ *с нулями по главной диагонали* ($N^k(t) \equiv 0$ *на* $[0,T]$), *невырожденная* $n\times n$-*матрица* $P(t)$, *пусть* $P_1(t)$ – *матрица из первых* d *строк матрицы* $P(t)$, E – *единичная матрица и* $t \in [0,T]$. *Тогда: 1) для достаточно гладкой вектор функции* $f(t)$ *уравнение*

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds+$$

$$+\int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s)$$

распадается на две независимые подсистемы; 2) для подсистемы, соответствующей матрицам E_d *и* J *имеет место аналитическая формула для решений*

$$\eta(t) = \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)f(\tau)d\tau + \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)dw(\tau),$$

где матричная функция $\Theta(t)$ *удовлетворяет задаче Коши* $\dot{\Theta}(t) = J(t)\Theta(t)$, $\Theta(0) = E_d$; *3) для подсистемы, соответствующей матрицам* $N(t)$ *и* E_{n-d}, *при* $0 < t < T$ *имеют место рекурентные формулы для вычисления решений*

$$\eta^n = -\sum_{j=1}^{n} P_j^n f^j - \sum_{j=1}^{n} P_j^n \frac{w^j}{2t},$$

$$D_S \sum_{j=i+1}^{n} N_j^i \eta^j = \eta^i + \sum_{j=1}^{n} P_j^i f^j + \sum_{j=1}^{n} P_j^i \frac{w^j}{2t};$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, *мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пункте 3) рекурентным соотношениям, заменяем* t *на* $t_0(t)$ *по формуле (2.3.9) и получаем процессы, удовлетворяющие нулевым начальным условиям, но являющиеся решениями только при* $t_0 \le t < T$.

Далее в этом параграфе изучается уравнение с пучком C^∞-гладких матриц, удовлетворяющих Теореме 1.2.5 и уже приведенных к каноническому виду (1.2.2).

В §4.2 изучается дифференциальное уравнение леонтьевского типа

$$dL(t)\xi(t) = M(t)\xi(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),\ S\xi(0) = a,\ 0 \le t \le T, \quad (4.2.1)$$

где $\xi(t) \in R^n$ – искомый случайный процесс, $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$ – вещественные непрерывные $m \times n$-матрицы, причем в случае с квадратными матрицами (когда $m = n$) $L(t)$ вырождена ($det L(t) \equiv 0$ на $[0, T]$), S – постоянная $m \times n$-матрица, $f(t) \in R^m$ – интегрируемая вектор-функция, $w(t) \in R^n$ – винеровский процесс, $a \in R^m$ – постоянный вектор.

Введем в рассмотрение следующие матрицы: $P_0 = E - L^+L$, $P_1 = P_0(MP_0)^+MP_0$, $Q_1 = P_0(SP_0)^+SP_0$, $P_2 = P_0 - P_1$, $Q_2 = P_0 - Q_1$, $P_3 = P_2(SP_2)^+SP_2$, $Q_3 = Q_2(MQ_2)^+MQ_2$, $P_4 = P_2 - P_3$, $Q_4 = Q_2 - Q_3$,

$$\Xi = \begin{pmatrix} E - SP_2(SP_2)^+ & 0 \\ 0 & E - MQ_2(MQ_2)^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & -S \\ M & -M \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \\ 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \end{pmatrix}(E - \Xi^+\Xi), \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix}(E - \Xi^+\Xi)$$

$$\Lambda = SL^+(0)X(0),\ \ G = \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)ds,$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = M(t)L^+(t)X(t),\ \ X(0) = E.$$

Тогда имеют место

Теорема 4.2.1 *Пусть в задаче (4.2.1) для матриц $L(t)$, $M(t)$, S выполняются тождества*

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)X^{-1}(s)M(s)\Phi_1(s) = 0, \quad (4.2.47)$$

$$[E - (\Lambda - \Lambda G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+]S\Phi_2(t) = 0,\ \ t, s \in [0, T]. \quad (4.2.48)$$

Тогда для того, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно *выполнения условий*

$$[E-L(t)L^+(t)]X(t)G^+\{\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$

$$+\int_0^T X^*(s)[E-L(t)L^+(t)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\} =$$

$$= [E-L(t)L^+(t)]\{z(t)+X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N(s)dw(s)\}, \tag{4.2.49}$$

$$[E-(\Lambda-\Lambda G^+G)(\Lambda-\Lambda G^+G)^+]\{a+$$

$$+\Lambda G^+[\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$

$$+\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds]\} = 0, \tag{4.2.50}$$

где $z(s)$ является решением следующей задачи Коши:

$$dz(t) = M(t)L^+(t)z(t)dt + f(t)dt, \ \ z(0) = 0.$$

Теорема 4.2.2 *Если матрицы $L(t)$, $M(t)$, S в задаче (4.2.1) удовлетворяют равенствам (4.2.47), (4.2.48) и задача имеет решение, то ее общее решение записывается двумя способами:*

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_1(t)r(t) + P_4(t)r_0(t),$$

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_2(t)r(t) + Q_4(t)r_0(t),$$

где матрицы $H_1(t)$, $H_2(t)$ вычисляются по формулам

$$H_1 = [E-P_2(SP_2)^+S]\Phi_1 + P_2(SP_2)^+S\Phi_2,$$

$$H_2 = [E-Q_2(MQ_2)^+M]\Phi_2 + Q_2(MQ_2)^+M\Phi_1,$$

$r(t)$, $r_0(t)$ – произвольные непрерывные векторы, а $\eta(t)$ является решением уравнения Ито

$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t)$$

с начальным условием

$$\eta(0) = -[E - (E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+\Lambda]\cdot$$

$$\cdot G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]\theta(s)ds+$$

$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\}+$$

$$+(E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+ \cdot \{a - S\Phi_2(0)r(0)\} + \alpha,$$

где α *является решением системы* $\Lambda\alpha = 0$, $G\alpha = 0$, *а вектор* $\theta(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$d\theta(t) = M(t)L^+(t)\theta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt, \;\; \theta(0) = 0.$$

Теорема 4.2.3 *Решение задачи (4.2.1) (если оно существует) единственно тогда и только тогда, когда система* $\Lambda\alpha = 0, G\alpha = 0$ *имеет лишь нулевое решение* $\alpha = 0$ *и верны равенства*

$$P_4(t) = Q_4(t) = 0, \;\; 0 \le t \le T,$$

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = 0, \;\; 0 \le t \le T. \tag{4.2.51}$$

В §5.1 вводятся и изучаются дифференциальные уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях. Доказана

Теорема 5.1.1 *Пусть* $\tilde{L}$ *и* $\tilde{M}$ *– вырожденная* ($d = rank\tilde{L}$) *и невырожденная соответственно* $n \times n$*-матрицы, образующие регулярный пучок* $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ *и выполняется критерий "ранг-степень"* $rank\tilde{L} = deg[det(\lambda\tilde{L}+\tilde{M})]$*; пусть* P *и* Q *–* $n\times n$*-матрицы, приводящие пучок* $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ *к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса,* $L = P\tilde{L}Q$ *и* $M = P\tilde{M}Q$*; пусть* $\bar{L} = QLQ^*$ *и* $t \in [0, T]$*. Тогда для* C^∞*-гладкой* n*-мерной вектор-функции* $\tilde{f}(t)$ *уравнение* $\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{L}, \end{cases}$ *преобразованное к*

$$\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = L, \end{cases}$$ *где* $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$, $f(t) = P\tilde{f}(t)$, *с начальными условиями* $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$ *в* R^{n-d} *и случайной величиной с плотностью* ρ_0 *нигде не равной нулю в* R^d*, имеет решение.*

В §5.2 изучается уравнение более общего вида, чем в §5.1. Доказан аналог Теоремы 5.1.1 с матрицей диффузии более общего вида.

В работе используется двойная нумерация параграфов, где, как обычно, сначала указывается номер главы, затем номер параграфа. Внутри каждого параграфа все определения, леммы и т.п. нумеруются заново и приобретают тройную нумерацию: номер главы. номер параграфа. номер теоремы и т.п. Формулы получают такую же тройную нумерацию.

Глава I.

Предварительные сведения

1.1. Вспомогательные сведения из теории производных в среднем

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в R^n (где мы фиксируем σ-алгебру борелевских множеств), $t \in [0, l]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной при всех t. Введем в рассмотрение σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств при отображении $\xi(t) : \Omega \to R^n$, которая, согласно Э. Нельсону [36], называется "настоящее" и обозначается $\mathcal{N}_t^\xi$. Для удобства мы обозначим через E_t^ξ условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно "настоящего" $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ (см. [10]). Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E.

В общем случае, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, поэтому его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Э. Нельсону (см., например, [36], [37], [38]) даем следующее определение:

Определение 1.1.1. *[36] (i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ про-*

цесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\right),$$

где условия и обозначения такие же, как в (i).

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [21]) вытекает, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий) $Y^0(t,x)$ и $Y^0_*(t,x)$ на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y^0_*(t,\xi(t))$.

Определение 1.1.2. *[36] Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Введем в рассмотрение векторные поля $v^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y^0_*(t,x))$ и $u^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y^0_*(t,x))$.

Определение 1.1.3. *[36] $v^{\xi}(t) = v^{\xi}(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^{\xi}(t) = u^{\xi}(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

Физический смысл текущей и осмотической скоростей (см., например, [10], [36], [37], [38]) состоит в следующем. Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов. Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает "случайность" процесса .

Рассмотрим диффузионный процесс (см., например, [34]) $\xi(t)$ в R^n, являющийся сильным решением стохастического уравнения

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + w(t), \qquad (1.1.1)$$

где $w(t)$ – винеровский процесс, $a(t, x)$ – гладкое по совокупности переменных отображение из $[0, l] \times R^n$ в R^n.

Через $\rho^\xi(t, x)$ обозначим плотность процесса, удовлетворяющего (1.1.1), относительно лебеговой меры λ на $[0, l] \times R^n$. Тогда имеют место утверждения:

Лемма 1.1.1. *[34] Для процесса* (1.1.1) *в* R^n *векторное поле* $u^\xi(t, x)$ *имеет вид*

$$u^\xi(t, x) = \frac{1}{2} grad \ln \rho^\xi(t, x). \qquad (1.1.2)$$

Лемма 1.1.2. *[34] Для процесса* (1.1.1) *в* R^n *векторное поле* $v^\xi(t, x)$ *и плотность* $\rho^\xi(t, x)$ *удовлетворяют уравнению непрерывности*

$$\frac{\partial \rho^\xi(t, x)}{\partial t} = -div(\rho^\xi v^\xi). \qquad (1.1.3)$$

Введем, следуя Ю. Е. Гликлиху [34], дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1-случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0, l]$ по правилу

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t} \right),$$

где $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец (вектор в R^n), а $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ – это вектор-строка (сопряженный или транспонированный вектор), а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Отметим, что матричное произведение столбца слева и строки справа – это матрица, так что $D_2\xi(t)$ есть симметрическая неотрицательно-определенная матричная функция на $[0, l] \times R^n$.

Определение 1.1.4. *[34] D_2 называется квадратичной производной в среднем.*

Замечание 1.1.1. *Из свойств условного математического ожидания [21] следует, что существует измеримое по Борелю отображение (регрессия) $\alpha(t,x)\colon R\times R^n \to \bar{S}_+$, такое, что $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$, где $\bar{S}_+$ – множество неотрицательно определенных симметрических $n\times n$ матриц.*

Рассмотрим теперь диффузионным процесс, являющийся сильным решением следующего стохастического дифференциального уравнения в форме Ито

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t A(s,\xi(s))dw(s), \tag{1.1.4}$$

где $a(t,x)$ и $A(t,x)$ – гладкие по совокупности переменных отображения из $[0,l]\times R^n$ в R^n и в $L(R^n,R^n)$, соответствено. Тогда имеют место

Теорема 1.1.1. *[34] Пусть $\xi(t)$ – диффузионный процесс* (1.1.4). *Тогда производная в среднем справа $D\xi(t)$ существует и имеет вид $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$.*

Теорема 1.1.2. *[34] Для диффузионного процесса* (1.1.4) *квадратичная производная $D_2\xi(t)$ существует и имеет вид $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$, $\alpha(t,x) = A(t,x)A^*(t,x)$ – коэффициент диффузии.*

Приведем еще утверждения, которые нужны будут в дальнейшем:

Лемма 1.1.3. *[34] Пусть $\alpha(t,x)$ является непрерывным (измеримым, гладким) по совокупности переменных отображением из $[0,l]\times R^n$ в $S_+(n)$. Тогда существует непрерывное (измеримое, гладкое, соответственно) по совокупности переменых отображение $A(t,x)$ из $[0,l]\times R^n$ в $L(R^n,R^n)$ такое, что для всех $t\in R$, $x\in R^n$ имеет место равенство $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.*

Лемма 1.1.4. *[34] Пусть процесс $\xi(t)$ является мартингалом отно-*

сительно его прошлого $\mathcal{P}_t^\xi$ и $t \in [0,l)$. Тогда $D\xi(t) = 0$.

1.2. Необходимые сведения из теории матриц

Приведем основные понятия и утверждения из теории матриц, необходимые для изучения дифференциальных уравнений леонтьевского типа.

Определение 1.2.1. *[13] Если A и B – матрицы размера $m \times n$, то матрица $A - \lambda B$ называется матричным пучком, или просто пучком. Здесь λ является параметром, а не конкретным числом. Если A и B – квадратные матрицы и $det(A - \lambda B)$ не равен нулю тождественно, то пучок $A - \lambda B$ называют регулярным. В противном случае, пучок называется сингулярным. Для регулярного пучка $det(A - \lambda B)$ многочлен $p(\lambda) \equiv det(A - \lambda B)$ называется характеристическим многочленом.*

Определение 1.2.2. *[24] Пусть A и B квадратные матрицы одинаковых размеров. Тогда ненулевой многочлен $det(\lambda A + B)$ удовлетворяет критерию "ранг-степень", если*

$$rankA = deg[det(\lambda A + B)].$$

Теорема 1.2.1. *[24] Пусть у нас имеются $n \times n$-матрицы A и B, такие, что характеристический многочлен $p(\lambda) = det(\lambda A + B)$ удовлетворяет критерию "ранг-степень". Тогда существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что*

$$P(\lambda A + B)Q = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix},$$

где J – $d \times d$-матрица.

Всюду далее через E будем обозначать единичную матрицу, 0 – нулевая матрица, imA, $kerA$ – образ и ядро матрицы A соответственно. Будем опускать указание зависимости матриц от t там, где это не вызывает недоразумений.

Определение 1.2.3. *[24],[8] Матрица $A^+(t)$ размерности $n \times m$ называется псевдообратной к $m \times n$-матрице $A(t)$, $t \in [0,T]$, если для любого $t \in [0,T]$ выполняются равенства*

$$A(t)A^+(t)A(t) = A(t), \;\; A^+(t)A(t)A^+(t) = A^+(t),$$
$$[A(t)A^+(t)]^T = A(t)A^+(t), \;\; [A^+(t)A(t)]^T = A^+(t)A(t).$$

Как следует из работ [24],[8], псевдообратная матрица существует и единственна для любой вещественной матрицы.

Теорема 1.2.2. *[24] Пусть:*

(i) $A(t)$ – непрерывная на промежутке $[0,T]$ $n \times n$-матрица;

(ii) $rank A(t) = const = \rho$ для любого $t \in [0,T]$.

Тогда существует непрерывная на $[0,T]$ псевдообратная матрица $A^+(t)$.

Лемма 1.2.1. *[1] Пусть:*

(i) $A(t), B(t)$ – непрерывные на промежутке $[0,T]$ $m \times n$-матрицы, C – постоянная вещественная $m \times n$-матрица;

(ii) матрицы $A^+(t)$, $(B(t)P_0(t))^+$, $(CP_0)^+$, $(CP_2(t))^+$, $(B(t)Q_2(t))^+$ непрерывны на промежутке $[0,T]$, где $P_0 = E - A^+A$, $P_2 = P_0 - P_1$, $Q_2 = P_0 - Q_1$, $P_1 = P_0(BP_0)^+BP_0$, $Q_1 = P_0(CP_0)^+CP_0$.

Тогда матрицы A^+A, P_0 и P_1, $P_2 = P_0 - P_1$ и $P_3 = P_2(CP_2)^+CP_2$, $P_4 = P_2 - P_3$ непрерывны на промежутке $[0,T]$ и являются проекторами на множества imA, $kerA$, $kerA \cap kerB$, $kerA \cap kerB \cap kerC$ соответственно. Так же матрицы Q_1, $Q_2 = P_0 - Q_1$ и $Q_3 = Q_2(BQ_2)^+BQ_2$, $Q_4 = Q_2 - Q_3$ непрерывны на $[0,T]$ и являются проекторами на множества $kerA$, $kerA \cap kerC$, $kerA \cap kerB \cap kerC$ соответственно.

Рассмотрим систему

$$AX = Y, \tag{1.2.1}$$

где X – искомый вектор, A и Y – матрица и вектор подходящих размеров (т.е. такие, что возможно записать систему (1.2.1)). Тогда имеет место классическая теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы (1.2.1):

Теорема 1.2.3. *[1] Для разрешимости системы* (1.2.1) *необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$(E - AA^{+})Y = 0.$$

Приведем теорему о представлении решений системы (1.2.1).

Теорема 1.2.4. *[1] Если система* (1.2.1) *разрешима, то ее общее решение записывается по формуле*

$$X = A^{+}Y + (E - A^{+}A)U,$$

где U – произвольный вектор.

Приведем некоторые утверждения о преобразованиях пучков переменных матриц.

Теорема 1.2.5. *[24] Пусть:*

(i) $A(t)$ и $B(t)$ – C^{∞}-гладкие $n \times n$-матрицы и $t \in [0, T]$;

(ii) многочлен $\xi(t, \lambda) = det(\lambda A(t) + B(t)) = a_d(t)\lambda^d + \ldots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$ удовлетворяет критерию "ранг-степень" для любого $t \in [0, T]$ и его старший коэффициент не имеет нулей на $[0, T]$.

Тогда:

(i) $rankA(t) = const = d$ для $t \in [0, T]$;

(ii) существуют неособенные для любого $t \in [0, T]$ C^{∞}-гладкие $(n \times n)$-матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ такие, что

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}. \tag{1.2.2}$$

Теорема 1.2.6. *[24] Пусть:*
(i) $A(t)$ *и* $B(t)$ *– вещественно-аналитические* $n \times n$*-матрицы и* $t \in [0, T]$*;*
(ii) старший коэффициент многочлена $\xi(t, \lambda) = det(\lambda A(t) + B(t)) = a_d(t)\lambda^d + \ldots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$ *не обращается в нуль на* $[0, T]$*.*

Тогда существуют неособенные для любого $t \in [0, T]$ *вещественно-аналитические* $(n \times n)$*-матрицы* $P(t), Q(t)$ *и выполнено равенство*

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}, \quad (1.2.3)$$

где $N(t)$ *– верхнетреугольная матрица с нулевой диагональю,* $N^k(t) = 0$ *на* $[0, T]$*,* $J(t)$ *некоторый* $d \times d$*-блок.*

Глава II.

Дифференциальные уравнения леонтьевского типа с постоянными матрицами

2.1. Вычисление симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса

Опишем вычисление симметрических производных в среднем (текущих скоростей) высших порядков от винеровского процесса, которые, как было сказано ранее, целесообразно использовать для исследования дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями.

Пусть $w(t)$ – винеровский процесс в R^n. Поскольку винеровский процесс является мартингалом, то по Лемме 1.1.4 выполняется равенство $Dw(t) = 0$, где $t \in [0, l)$. В монографии [10] доказана

Лемма 2.1.1. *Для $t \in (0, l]$ верно равенство $D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}$.*

Следовательно, для симметрической производной в среднем (текущей скорости) винеровского процесса согласно Определению 1.1.2 имеет место

Следствие 2.1.1. *[11],[34] $D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}$.*

Замечание 2.1.1. *[11] Поскольку для винеровского процесса $E(w(t)^2) = t$, то на феноменологическом уровне рассуждений можно сказать, что средний пробег частицы винеровского процесса за время t равен $\sqrt{t}$ и, следовательно, у белого шума $\dot{w}(t)$ он равен $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Но аналогичные феноменологические рассуждения для текущей скорости $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$ дают тот же результат для среднего пробега частицы: $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Это в некотором смысле естественное соотношение между "производной" $\dot{w}(t)$ винеровского процесса и его текущей скоростью, которая, как было сказано выше, является естественным аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов.*

Перейдем к вычислению симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса. Следуя системе обозначений из [10], [34] производную порядка k мы будем обозначать как D^w, D_*^w или D_S^w от производных порядка $k-1$. Эти обозначения подчеркивают, что мы всегда используем σ-алгебру "настоящее" именно винеровского процесса $w(t)$.

Лемма 2.1.2. *[11] (i) $D^w \frac{w(t)}{t} = -\frac{w(t)}{t^2}$ для $t \in (0, l)$;*

(ii) $D_*^w \frac{w(t)}{t} = 0$ для $t \in (0, l]$;

(iii) $D_S^w \frac{w(t)}{t} = -\frac{w(t)}{2t^2}$ для $t \in (0, l)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$D^w \frac{w(t)}{t} = (\frac{d}{dt}\frac{1}{t})w(t) + \frac{1}{t} D w(t) = -\frac{w(t)}{t^2}$$

и

$$D_*^w \frac{w(t)}{t} = (\frac{d}{dt}\frac{1}{t})w(t) + \frac{1}{t} D_* w(t) = -\frac{w(t)}{t^2} + \frac{w(t)}{t^2} = 0.$$

Утверждение (iii) вытекает из последних двух формул. ■

Лемма 2.1.3. *[11] (i) $D^w(\frac{w(t)}{t^k}) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}}$;*

(ii) $D_*^w(\frac{w(t)}{t^k}) = -(k-1)\frac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(iii) $D_S^w(\frac{w(t)}{t^k}) = -\frac{2k-1}{2}\frac{w(t)}{t^{k+1}}$.

Доказательство.

(i) $D^w \frac{w(t)}{t^k} = (\frac{d}{dt}\frac{1}{t^k})w(t) + \frac{1}{t^k}Dw(t) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}} + 0 = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(ii) $D_*^w \frac{w(t)}{t^k} = (\frac{d}{dt}\frac{1}{t^k})w(t) + \frac{1}{t^k}D_*w(t) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}} + \frac{1}{t^k}\frac{w(t)}{t} = 0$;

(iii) Из последних двух формул следует, что $D_S^w(\frac{w(t)}{t^k}) = -\frac{2k-1}{2}\frac{w(t)}{t^{k+1}}$. ■

Лемма 2.1.4. *При целом* $k \geq 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}.$$

Эта формула доказывается по индукции, исходя из утверждений Следствия 2.1.1, Леммы 2.1.2 (iii) и Леммы 2.1.3 (iii).

2.2. О приведении дифференциальных уравнений леонтьевского типа к каноническому виду

Опишем метод приведения дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями и с постоянными матрицами коэффициентов к каноническому виду, используя преобразование Кронекера-Вейерштрасса (название для преобразования оправдано тем, что впервые оно было описано в работах L. Kroneker [35] и K. Weierstrass [44]) для различных типов пучков (регулярных и сингулярных) постоянных матриц. Введем дифференциальное уравнение леонтьевского типа в R^n

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + B\tilde{w}(t), \;\; 0 \leq t \leq T, \qquad (2.2.1)$$

где $\xi(t)$ случайный, а $f(t)$ неслучайный (детерминированный) n-мерные векторы, $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ и B – $n \times n$-матрицы, причем $\tilde{L}$ вырождена (имеет нулевой определитель), а B и $\tilde{M}$ – невырождены, вектор-функция $f(t)$ предполагается достаточно гладкой, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс.

Пусть пучок $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ регулярен. Тогда применяя к регулярному пучку матриц преобразование Кронекера-Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) $A=(a^i_j)$ и A_R), приведем матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ к квазидиагональному виду (см., например, [8]).

Таким образом, после применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса, уравнение (2.2.1) преобразуется следующим образом $L\eta(t)=\int_0^t M\eta(s)ds+\int_0^t Af(s)ds+C\tilde{w}(t)$, где $C=AB$, $\eta(t)=A_R^{-1}\xi(t)$.

Обозначим через C^* оператор, сопряженный с C, а $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в R^n. Напомним, что винеровский процесс $\tilde{w}(t)$ является гауссовским со средним 0 и матрицей ковариаций It, где I – единичная матрица, т.е. с плотностью распределения $\rho^w(t,x)=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp(\frac{-x^2}{2t})$ относительно формы объема евклидовой метрики $(\cdot,\cdot)$. Так как матрица CC^* невырождена, существует обратная матрица $(CC^*)^{-1}=(C^*)^{-1}C^{-1}$. Следовательно (см. [9]), $C\tilde{w}(t)$ также является гауссовским процессом со средним 0 и матрицей ковариаций CC^*t и, значит, с плотностью

$$\rho^{C\tilde{w}}(t,x)=((2\pi t)^{-\frac{n}{2}}\triangle^{-\frac{1}{2}})\exp(\frac{-((CC^*)^{-1}x,x)}{2t})$$

относительно той же формы объема, где $\triangle$ – определитель матрицы CC^*.

Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой

$$\langle X,Y\rangle=((CC^*)^{-1}X,Y). \tag{2.2.2}$$

Теорема 2.2.1. *(i) Для любых векторов X и Y из R^n выполняется тождество $\langle CX,CY\rangle=(X,Y)$. (ii) Процесс $w(t)=C\tilde{w}(t)$ является винеровским в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Доказательство. Напомним, что $(CC^*)^{-1}=(C^*)^{-1}C^{-1}$. Тогда

$$\langle CX,CY\rangle=((C^*)^{-1}C^{-1}CX,CY)=(C^{-1}CX,C^{-1}CY)=(X,Y).$$

Форма объема метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отличается от формы объема метрики $(\cdot,\cdot)$

множителем $\triangle^{-\frac{1}{2}}$, т.е. плотность процесса $C\tilde{w}(t)$ относительно формы объема метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ имеет вид

$$((2\pi t)^{-\frac{n}{2}})\exp(\frac{-((CC^*)^{-1}x,x)}{2t}) = ((2\pi t)^{-\frac{n}{2}})\exp(\frac{-\langle x,x\rangle}{2t}).$$

Легко видеть, что остальные требования из определения винеровского процесса также выполняются для $C\tilde{w}(t)$ в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ■

Пусть e_1, e_2,..., e_n – естественный ортонормированный базис в R^n с $(\cdot,\cdot)$.

Следствие 2.2.1. *Векторы Ce_1, Ce_2,..., Ce_n образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 2.2.2. *В пространстве R^n с $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в разложении по ортонормированному базису Ce_1, Ce_2,..., Ce_n дифференциальное уравнение леонтьевского типа имеет вид*

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + w(t). \tag{2.2.3}$$

Напомним, что в выражения для текущей скорости винеровского процесса в данном случае входит $Grad(C^{-1}x, C^{-1}x)$, где $Grad$ – градиент относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 2.2.1. $d\langle x,x\rangle = d(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2(C^*)^{-1}C^{-1}x$, *где d – внешний дифференциал.*

Лемма 2.2.2. $Grad\langle x,x\rangle = Grad(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2x.$

Доказательство следует из формулы поднятия индексов

$$Grad(C^{-1}x, C^{-1}x) = CC^*d(C^{-1}x, C^{-1}x)$$

и из предыдущей леммы.

Следовательно, при отображении в R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулы для текущих скоростей винеровского процесса сохраняют свой вид.

Итак, если пучек $\tilde{M}+\lambda\tilde{L}$ регулярен, то после применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса дифференциальное уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ приобретает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + w(t).$$

Замечание 2.2.1. *Дифференциальное уравнение леонтьевского типа вида* (2.2.1)*, но с сингулярным пучком матриц* $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ *размера* $n \times m$ *приводится к каноническому виду аналогично. Разница в преобразовании уравнений состоит лишь в том, что преобразование Кронекера-Вейерштрасса сингулярного пучка матриц к квазидиагональному виду описывается парой невырожденных матриц* P_L *и* P_R *размеров* $n \times n$ *и* $m \times m$ *соответственно (см. [8]).*

2.3. Исследование дифференциального уравнения леонтьевского типа

Рассматривается дифференциальное уравнение леонтьевского типа в R^n вида (2.2.1), т.е.

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + B\tilde{w}(t),\ \ 0 \leq t \leq T,$$

где обозначения те же, что и в (2.2.1). Физический смысл: $f(t)$ – входящий сигнал в устройство, описываемое операторами $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$, белый шум, т.е. "производная" $\tilde{w}(t)$, – помехи, B – некоторая матрица коэффициентов, $\xi(t)$ – сигнал на выходе из устройства (см. [26], [27], [40]).

Пусть пучок $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ регулярен. Выполняя для регулярного пучка матриц преобразование Кронекера-Вейерштрасса (задается парой невырожденных матриц (операторов) $A = (a^i_j)$ и A_R), получим квазидиагональные матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ (см. [8]), причем, при соответствующей нумерации векторов базиса, в $L = A\tilde{L}A_R$ сначала вдоль главной диагонали стоят жордановы клетки с нулями по диагонали, а последняя матрица вдоль главной диагонали – единичная. В $M = A\tilde{M}A_R$ в строках, соответствующих жордановым клеткам стоит единичная матрица, а последний блок вдоль главной диагонали представляет собой некоторую невырожденную матрицу. Приведем матрицы L и M в общем явном виде:

$$L = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q} & a_{n-q+1}^{n-q} & \dots & a_n^{n-q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q+1} & a_{n-q+1}^{n-q+1} & \dots & a_n^{n-q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n} & a_{n-q+1}^{n} & \dots & a_n^{n} \end{pmatrix}.$$

Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой (2.2.2). Тогда (согласно результатам параграфа §2.2) после применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса дифференциальное уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (Следствие 2.2.2) приобретает вид (2.2.3), т.е.

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + w(t).$$

Из вида (2.2.3) понятно (ср. (1.1.1)), что (для простоты) начальное условие для решения (2.2.3) предполагается вида $\eta(0) = 0$. Скажем сразу, что для построенных нами ниже решений это условие не выполняется. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Замечание 2.3.1. *Переписав* (2.2.3) *в виде* $L\eta(t) - M\int_0^t \eta(s)ds - \int_0^t Af(s)ds = w(t)$, *мы видим, что "настоящее" для процесса* $L\eta(t) -$

$M\int_0^t \eta(s)ds - \int_0^t Af(s)ds$ совпадает с "настоящим" для $w(t)$. Поэтому последнюю σ-алгебру мы и будем использовать при нахождении производных в среднем, т.е. применять к (2.2.3) производные D^w, D^w_* или D^w_S.

Учитывая структуру матриц L и M нетрудно видеть, что (2.2.3) распадается на несколько независимых систем уравнений. Самое "нижнее" из них соответствует единичному отрезку диагонали в L и блоку, состоящему из матрицы в правом нижнем углу в M. Обозначим последнюю матрицу через K, через $\vartheta(t)$ обозначим вектор размерности $q+1$, составленный из последних $q+1$ координат вектора $\eta(t)$. Тогда $\vartheta(t)$ описывается уравнением

$$\vartheta(t) = K\int_0^t \vartheta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + w(t), \tag{2.3.1}$$

в R^{q+1}. Здесь $w(t)$ – $(q+1)$-мерный винеровский процесс, составленный из последних $q+1$ координат винеровского процесса в R^n, а $Af(t)$ – $(q+1)$-мерный вектор, составленный из последних $q+1$ координат $Af(t)$. Для уравнения (2.3.1) известна аналитическая формула для решений (см. [20], [33]):

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}Af(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau).$$

Другие системы соответствуют клеткам Жордана в L и единичным матрицам соответствующей размерности, выбранным из строк и столбцов M. Рассмотрим этот случай на примере $(p+1)\times(p+1)$-матрицы (жордановой клетки) N в левом верхнем углу L

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующей ей единичной матрице в M. Через $(Af)_{(p+1)}$ обозначим $(p+1)$-мерный вектор, составленный из первых $p+1$ координат вектора $Af(t)$, через $\eta_{(p+1)}(t)$ – $(p+1)$-мерный вектор с координатами $(\eta^1(t), \eta^2(t), \dots, \eta^{p+1}(t))$, составленный из первых $p+1$ координат вектора $\eta(t)$, а через $w_{(p+1)}(t)$ – вектор с координатами $(w^1(t), w^2(t), \dots, w^{p+1}(t))$, состоящий из первых $p+1$ координат вектора $w(t)$. Заметим, что координаты вектора Af имеют вид $(Af)^i = \sum_{j=1}^n a^i_j f^j$. Тогда $\eta_{(p+1)}(t)$ описывается уравнением

$$N\eta_{(p+1)}(t) = \int_0^t (\eta_{(p+1)}(s) + (Af)_{(p+1)}(s))ds + w_{(p+1)}(t).$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^p(t) \\ \eta^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t (\eta^1(s) + \sum_{j=1}^n a^1_j f^j)ds \\ \int_0^t (\eta^2(s) + \sum_{j=1}^n a^2_j f^j)ds \\ \vdots \\ \int_0^t (\eta^p(s) + \sum_{j=1}^n a^p_j f^j)ds \\ \int_0^t (\eta^{p+1}(s) + \sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j)ds \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Из последнего уравнения системы (2.3.2) получаем, что

$$\int_0^t \eta^{p+1}(s)ds = -\int_0^t (\sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j)ds - w^{p+1}(t). \quad (2.3.3)$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения при $0 < t < T$ мы находим $\eta^{p+1}(t)$ применением к обеим частям равенства производной D^w_S (см. Замечание 2.3.1). Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D^w_* (и, следовательно, D^w_S) к интегралу в левой и правой частях при $0 < t < T$ дает одинаковые результаты $\eta^{p+1}(t)$ и $\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j$, соответственно. Таким образом, мы при $0 < t < T$ получаем, что

$$\eta^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - D_S w^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}. \qquad (2.3.4)$$

Из предпоследнего уравнения системы (2.3.2) мы получаем, что

$$\eta^{p+1}(t) = \int_0^t (\eta^p(s) + \sum_{j=1}^{n} a_j^p f^j) ds + w^p(t), \qquad (2.3.5)$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, при $0 < t < T$ выводим

$$\eta^p(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^p f^j + D_S^w \eta^{p+1}(t) - D_S^w w^p(t).$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\eta^{p+1}(t)$ из (2.3.4) и использовав Лемму 2.1.2, при $0 < t < T$ получим

$$\eta^p(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{df^{p+1}}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_j^p f^j + \frac{w^{p+1}(t)}{4t^2} - \frac{w^p(t)}{2t}. \qquad (2.3.6)$$

В точности аналогично, для $1 \leq i \leq p$ мы при $0 < t < T$ получаем рекурентную формулу

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j. \qquad (2.3.7)$$

С помощью Леммы 2.1.4 по формуле (2.3.7) при $0 < t < T$ получаем явное выражение для любого $\eta^i(t)$

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1} \frac{d^{k-i+1} f^j}{dt^{k-i+1}} \right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j +$$
$$+ \sum_{k=i+1}^{p+1} \left((-1)^{k-i+1} \frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}} \frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}} \right) - \frac{w^j(t)}{2t}. \qquad (2.3.8)$$

Перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (2.3.2). Принимая во внимание определение симметрических производных в среднем, нетрудно заметить, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы как приращения по времени вправо, так и влево. Тогда из формул (2.3.4), (2.3.6) и (2.3.8) видно, что решения $\eta^l(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geq 1$. Следовательно, решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т.е. значения решений при $t = 0$ не существуют. Один из вариантов разрешения указанной ситуации (как и в [11]) состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0 \leq t \leq t_0; \\ t, \text{ если } t_0 \leq t. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в формулах (2.3.4), (2.3.6) и (2.3.8) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t_0 \leq t < T$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t \geq \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Таким образом, мы получаем

Теорема 2.3.1. *Пусть $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ – регулярный пучок $n \times n$-матриц, а $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \leq t \leq T$; A и A_R – невырожденные матрицы размера $n \times n$, приводящие пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т.е. к квазидиагональному виду), $L = A\tilde{L}A_R$ и $M = A\tilde{M}A_R$. Тогда: 1) уравнение (2.2.1) трансформируется в уравнение (2.2.3), которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистемы, соответствующей единичной матрице в L и невырожденной матрице K в M, имеет место аналитическая формула для решений вида*

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)} A f(\tau) d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)} dw(\tau);$$

3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1)\times(p+1)$ с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в M, при $0 < t < T$ имеют место формулы для решений вида

$$\eta^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - D_S w^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{k-i+1}f^j}{dt^{k-i+1}}\right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j +$$

$$+\sum_{k=i+1}^{p+1}\left((-1)^{k-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}}\frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}}\right) - \frac{w^j(t)}{2t},\ \ 1\le i\le p;$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях полученных в пункте 3) процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) *и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \le t < T$.*

Замечание 2.3.2. *Как отмечено в работе [11], значения производных в среднем существенно зависят от того, σ-алгебру "настоящее" какого процесса мы используем. Продемонстрируем это на примере полученных выше формул. В Замечании 2.3.1 мы обосновали использование σ-алгебры "настоящее" n-мерного винеровского процесса (т.е. использование производной D_S^w), исходя из рассмотрения* (2.2.3) *как единой системы. Однако, вообще говоря, в условие конкретной задачи может входить требование об использовании какой-нибудь другой σ-алгебры. Тогда формулы для решений изменятся. Например, так произойдет если рассматривать уравнения системы* (2.3.2) *по отдельности. Уравнение* (2.3.3) *не зависит от других уравнений системы* (2.3.2) *и может исследоваться отдельно от* (2.3.2)*. В этом случае, рассуждая как в Замечании 2.3.1, придем к выводу, что в конструкции производных в среднем для процессов $\eta^{p+1}(t)$ и $w^{p+1}(t)$ надо использовать σ-алгебру "настоящее" процесса $w^{p+1}(t)$. Перепишем затем уравнение* (2.3.5) *в виде*

$\eta^{p+1}(t) - \int_0^t(\eta^p(s) - \sum_{j=1}^n a_j^p f^j)ds = w^p(t)$. Вновь рассуждая аналогично Замечанию 2.3.1, приходим к выводу, что для производных в среднем процессов из этого уравнения надо использовать σ-алгебру "настоящее" процесса $w^p(t)$ и т.д. Как известно, координаты n-мерного процесса $w(t)$ являются независимыми 1-мерными винеровскими процессами. Согласно свойствам условного математического ожидания это означает, что $E_t^{w^i}(w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0$ при $i \neq j$. Аналог рекурентной формулы (2.3.7) примет вид $\eta^i(t) = D_S^{w^i}\eta^{i+1}(t) - D_S^{w^i}w^i(t) - \sum_{j=1}^n a_j^i f^j$. Однако из сказанного выше и конструкции производных в среднем следует, что $D_S^{w^i}\eta^{i+1} = 0 + \frac{ds^{i+1}(t)}{dt}$, где $s^{i+1}(t)$ – детерминированное слагаемое из $\eta^{i+1}(t)$, т.е. $\eta^i(t) = \frac{ds^{i+1}(t)}{dt} - \sum_{j=1}^n a_j^i f^j - \frac{w^i(t)}{2t}$ при всех $i = 1, 2, ..., p$.

2.4. Изучение сингулярного дифференциального уравнения леонтьевского типа

Сингулярное дифференциальное уравнение леонтьевского типа – это дифференциальное уравнение в R^n вида

$$\tilde{L}\xi(t) = \int_0^t \tilde{M}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t), \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{2.4.1}$$

где $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$, у которого строки и столбцы не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция.

Для сингулярного пучка матриц $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ имеется преобразование Кронекера-Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно), при котором матрица $P_L\tilde{M}P_R + \lambda P_L\tilde{L}P_R$ – квазидиагональна (см., например, [8]) и тогда уравнение (2.4.1) преобразуется следующим образом

$$P_L \tilde{L} P_R P_R^{-1} \xi(t) = \int_0^t P_L \tilde{M} P_R P_R^{-1} \xi(s) ds + \int_0^t P_L f(s) ds + P_L \tilde{w}(t).$$

При соответствующей нумерации векторов базиса, в $L = P_L \tilde{L} P_R$ вдоль главной диагонали стоят в указанном порядке блоки следующих типов: N – жордановы клетки с нулями вдоль главной диагонали, E – единичная матрица, A и G – прямоугольные матрицы указанного ниже вида (сингулярные клетки). В $M = P_L \tilde{M} P_R$ строках, соответствующих блокам L, стоят в указанном порядке такие блоки: E – единичная матрица, K – некоторая квадратная матрица, B и H – прямоугольные матрицы указанного ниже вида (сингулярные клетки).

Приведем матрицы A и B, G и H в общем явном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через P_L^* оператор, сопряженный с P_L, а $(\cdot, \cdot)$ – стандартное скалярное произведение в R^n. Как и в §2.2 введем в R^n новое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ формулой (2.2.2) (здесь $C = P_L$). Тогда (согласно результатам параграфа §2.2) после применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса сингулярное дифференциальное уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ приобретает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t), \tag{2.4.2}$$

откуда понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (2.4.2) предполагается вида $\eta(0) = 0$.

Нетрудно заметить, учитывая квазидиагональную структуру матриц L и M, что система (2.4.2) распадается на несколько независимых систем уравнений четырех типов (каждой паре соответствующих блоков в L и M соответствует уравнение определенного типа). Обозначим через $\varsigma(t)$, $\vartheta(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ компоненты вектора $\eta(t)$, соответствующие парам блоков N и E, E и K, A и B, G и H соответственно. Также через $u(t), v(t), g(t), z(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$. Соответствующие компоненты винеровского процесса будут тоже винеровскими процессами и будем обозначать их как и сам винеровский процесс через $w(t)$. Исследуем каждый тип уравнений.

Паре матриц N и E размера $(p+1) \times (p+1)$ соответствует система типа

$$N\varsigma(t) = \int_0^t \varsigma(s)ds + \int_0^t u(s)ds + w(t).$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma^1(t) \\ \varsigma^2(t) \\ \vdots \\ \varsigma^p(t) \\ \varsigma^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t (\varsigma^1(s) + u^1(s))ds \\ \int_0^t (\varsigma^2(s) + u^2(s))ds \\ \vdots \\ \int_0^t (\varsigma^p(s) + u^p(s))ds \\ \int_0^t (\varsigma^{p+1}(s) + u^{p+1}(s))ds \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Из последнего уравнения системы (2.4.3) получаем, что

$$\int_0^t (\varsigma^{p+1}(s) + u^{p+1}(s))ds = -w^{p+1}(t).$$

Поскольку текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения (как и в предыдущем параграфе) мы при $0 < t < T$ находим $\varsigma^{p+1}(t)$ применением к обеим частям производной D_S^w. Тогда при $0 < t < T$ мы получаем, что

$$\varsigma^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - D_S w^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}. \tag{2.4.4}$$

Из предпоследнего уравнения системы (2.4.3) мы получаем, что

$$\varsigma^{p+1}(t) = \int_0^t (\varsigma^p(s) + u^p(s))ds + w^p(t),$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, при $0 < t < T$ выводим

$$\varsigma^p(t) = -u^p(t) + D_S^w \varsigma^{p+1}(t) - D_S^w w^p(t).$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\varsigma^{p+1}(t)$ из (2.4.4) и использовав Лемму 2.1.2, при $0 < t < T$ получим

$$\varsigma^p(t) = -\frac{du^{p+1}}{dt} - u^p(t) + \frac{w^{p+1}(t)}{2t^2} - \frac{w^p(t)}{2t}.$$

В точности аналогично, для $1 \le i \le p$ при $0 < t < T$ мы получаем рекурентную формулу

$$\varsigma^i(t) = D_S^w \varsigma^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - u^i. \tag{2.4.5}$$

С помощью Лемм 2.1.3 и 2.1.4 по формуле (2.4.5) при $0 < t < T$ нетрудно получить явное выражение для любого $\varsigma^i(t)$.

Для пары матриц E и K размеров $(q+1)\times(q+1)$ получаем систему в R^{q+1} типа

$$\vartheta(t) = K\cdot\int_0^t \vartheta(s)ds + \int_0^t v(s)ds + w(t). \tag{2.4.6}$$

Для уравнения (2.4.6) известна аналитическая формула для решений (см. [20], [33])

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}v(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau).$$

Рассмотрев пару матриц A и B размера $l\times(l+1)$, получим систему вида

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + \int_0^t g(s)ds + w(t).$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1(t)\\ \eta^2(t)\\ \vdots\\ \eta^l(t)\\ \eta^{l+1}(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1(s)\\ \eta^2(s)\\ \vdots\\ \eta^l(s)\\ \eta^{l+1}(s) \end{pmatrix} ds$$

$$+\int_0^t \begin{pmatrix} g^1(s)\\ g^2(s)\\ \vdots\\ g^{l-1}(s)\\ g^l(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t)\\ w^2(t)\\ \vdots\\ w^{l-1}(t)\\ w^l(t) \end{pmatrix}, \tag{2.4.7}$$

т.е.,

$$\eta^2(t) = \int_0^t (\eta^1(s) + g^1(s))ds + w^1,$$

$$\eta^3(t) = \int_0^t (\eta^2(s) + g^2(s))ds + w^2,$$
$$\eta^{l+1}(t) = \int_0^t (\eta^l(s) + g^l(s))ds + w^l.$$

Это означает, что можно взять в качестве η^{l+1} произвольный случайный процесс на $[0, T]$, принимающий при $t = 0$ нулевое значение и для которого при $0 < t < T$ можно вычислить симметрическую производную порядка l, а потом рекурентно получить все остальные компоненты процесса η. Дело обстоит таким образом потому, что в системе число неизвестных на единицу больше, чем число уравнений, т.е. система недоопределена. Аналогично случаю первой независимой системы, имеют место формулы:

$$\eta^l(t) = D_S^w \eta^{l+1} - D_S^w w^l - g^l(t) = D_S^w \eta^{l+1} - \frac{w^l(t)}{2t} - g^l(t), \;\; 0 < t < T;$$
$$\eta^l(t) = \int_0^t (\eta^{l-1}(s) + g^{l-1}(s))ds + w^{l-1};$$
$$\eta^{l-1}(t) = D_S^w \eta^l - D_S^w w^{l-1} - g^{l-1}(t) = D_S^2 \eta^{l+1} + \frac{w^l(t)}{4t^2} - \frac{w^{l-1}}{2t} - g^{l-1},$$
$$0 < t < T.$$

Точно также, для $1 \leq i \leq l$ при $0 < t < T$ получаем

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1} - D_S^w w^i(t) - g^i(t). \tag{2.4.8}$$

С помощью Лемм 2.1.3 и 2.1.4 по формуле (2.4.8) при $0 < t < T$ несложно получить явное выражение для любого $\eta^i(t)$.

И, наконец, для матриц G и H размера $(k+1) \times k$ имеем систему типа

$$G\theta(t) = \int_0^t H\theta(s)ds + \int_0^t z(s)ds + w(s).$$

В координатной форме получаем систему вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1(t) \\ \theta^2(t) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(t) \\ \theta^k(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1(s) \\ \theta^2(s) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(s) \\ \theta^k(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} z^1(s) \\ z^2(s) \\ \vdots \\ z^k(s) \\ z^{k+1}(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^k(t) \\ w^{k+1}(t) \end{pmatrix} \tag{2.4.9}$$

или

$$\begin{gathered} 0 = \int_0^t (\theta^1(s) + z^1(s)) ds + w^1, \\ \theta^1(t) = \int_0^t (\theta^2(s) + z^2(s)) ds + w^2, \\ \theta^{k-1}(t) = \int_0^t (\theta^k(s) + z^k(s)) ds + w^k, \\ \theta^k(t) = \int_0^t z^{k+1}(s) ds + w^{k+1}. \end{gathered}$$

Начиная с первого уравнения, при $0 < t < T$ последовательно получаем

$$\begin{gathered} \theta^1(t) = -z^1(t) - D_S^w w^1 = -z^1 - \frac{w^1(t)}{2t}, \\ \theta^2(t) = -z^2(t) + D_S^w \theta^1 - D_S^w w^2(t) = -z^2(t) - \frac{dz^1(t)}{dt} + \frac{w^1(t)}{4t^2} - \frac{w^2(t)}{2t}, \\ \theta^k(t) = -z^k(t) - \frac{dz^{k-1}(t)}{dt} - \dots - \frac{d^{k-1}z^1(t)}{dt^{k-1}} - \\ -D_S w^k(t) - D_S^2 w^{k-1}(t) - \dots - D_S^k w^1(t), \end{gathered}$$

а также при $0 < t < T$ условие согласования

$$\int_0^t z^{k+1}(s)ds + w^{k+1}(t) = -z^k(t) - \frac{dz^{k-1}(t)}{dt} - ... - \frac{d^{k-1}z^1(t)}{dt^{k-1}} -$$
$$- D_S w^k(t) - D_S^2 w^{k-1}(t) - ... - D_S^k w^1(t).$$

Если компоненты z^i и w^i не удовлетворяют этому условию, то система не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т.е. данная подсистема переопределена. Как и ранее, для $2 \leq i \leq k$ при $0 < t < T$ имеет место рекурентная формула

$$\theta^i(t) = -z^i(t) + D_S^w \theta^{i-1} - D_S^w w^i(t).$$

Отметим, что вопрос о нулевых начальных условиях для решений систем (2.4.3), (2.4.7) и (2.4.9) решается также как и в предыдущем параграфе с использованием функции $t_0(t)$ (см. (2.3.9)).

Итак, суммируя выше сказанное, мы доказали

Теорема 2.4.1. *Пусть $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$, у которого строки и столбцы не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \leq t \leq T$; P_L и P_R – невырожденные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, приводящие пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т.е. к квазидиагональному виду), $L = P_L\tilde{L}P_R$ и $M = P_L\tilde{M}P_R$. Тогда: 1) уравнение* (2.4.1) *трансформируется к каноническому уравнению* (2.4.2), *которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистемы, соответствующей единичной матрице в L и квадратной матрице K в M, имеет место аналитическая формула для решений вида*

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}v(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau),$$

где $v(t)$ соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$; 3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1) \times$

$(p+1)$ *с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в* M, *при* $0<t<T$ *имеют место рекуретные соотношения для вычисления решений вида*

$$\varsigma^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$
$$\varsigma^{i}(t) = D_S^w \varsigma^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - u^i,$$

где $u(t)$ *тоже соответствующие компоненты вектора* $P_L f(t)$; *4) для подсистем, соответствующих сингулярным клеткам из* $M+\lambda L$ *размера* $l\times(l+1)$, *при* $0<t<T$ *имеют место рекурентные соотношения для вычисления решений вида*

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1} - D_S^w w^i(t) - g^i(t),$$

где $1\le i\le l$, $g(t)$ – *соответствующие компоненты вектора* $P_L f(t)$, η^{l+1} – *произвольный случайный процесс на* $[0,T]$, *принимающий при* $t=0$ *нулевое значение и для которого при* $0<t<T$ *можно вычислить симметрическую производную порядка* l; *5) для подсистем, соответствующих сингулярным клеткам из* $M+\lambda L$ *размера* $(k+1)\times k$, *при* $0<t<T$ *имеют место при выполнении условий согласования*

$$\int_0^t z^{k+1}(s)ds + w^{k+1}(t) = -z^k(t) - \frac{dz^{k-1}(t)}{dt} - \ldots - \frac{d^{k-1}z^1(t)}{dt^{k-1}} -$$
$$-\frac{w^k(t)}{2t} + \frac{w^{k-1}(t)}{4t^2} - \ldots - (-1)^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w^1(t)}{t^k}$$

рекурентные соотношения для вычисления решений вида

$$\theta^1(t) = -z^1(t) - D_S^w w^1 = -z^1 - \frac{w^1(t)}{2t},$$
$$\theta^i(t) = -z^i(t) + D_S^w \theta^{i-1} - D_S^w w^i(t),$$

где $z(t)$ *соответствующие компоненты вектора* $P_L f(t)$; *6) зафиксировав сколь угодно малый момент времени* $t_0>0$, *мы в знаменателях процес-*

сов, удовлетворяющих приведенным в пунктах 3)-5) рекурентным соотношениям, заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) *и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \leq t < T$.*

2.5. Применение канонической формы Шура регулярного пучка матриц

В этом параграфе опишем подход к изучению системы леонтьевского типа с регулярным пучком матриц коэффициентов и единичной диффузией, основанный на применении преобразования матриц коэффициентов к канонической форме Шура. С применением этого подхода не требуется прибегать к замене метрики пространства, а формулы для решений тоже получаются в терминах производных в среднем винеровского процесса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение леонтьевского типа в R^n

$$\tilde{A}\xi(t) = \int_0^t \tilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t), \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{2.5.1}$$

где $\xi(t)$ – случайный, а $f(t)$ – не случайный n-мерные векторы, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – $n \times n$-матрицы, $\tilde{A}$ вырождена, а $\tilde{B}$ – невырождена. Вектор-функция $f(t)$ предполагается достаточно гладкой.

Выполним для регулярного пучка матриц $\tilde{B}+\lambda\tilde{A}$ преобразование Шура (описывается парой вещественных ортогональных матрицы Q_L и Q_R (см., например, [13])). Тогда уравнение (2.5.1) преобразуется следующим образом

$$Q_L\tilde{A}Q_RQ_R^{-1}\xi(t) = \int_0^t Q_L\tilde{B}Q_RQ_R^{-1}\xi(s)ds + \int_0^t Q_Lf(s)ds + Q_L\tilde{w}(t)$$

или в новых обозначениях примет вид

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + \int_0^t g(s)ds + w(t), \tag{2.5.2}$$

где $A = Q_L\tilde{A}Q_R$ – верхняя квазитреугольная матрица, $B = Q_L\tilde{B}Q_R$ – верхнетреугольная матрица, $w(t) = Q_L\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс, $\eta(t) = Q_R^{-1}\xi(t)$, $Q_Lf(t) = g(t)$. Пронумеровав вектора базиса соответствующим образом, в A сначала вдоль главной диагонали стоят блоки размера 2×2, потом невырожденные блоки размера 1×1, а затем вырожденные блоки размера 1×1. Отметим, что из вида (2.5.2) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (2.5.2) предполагается вида $\eta(0) = 0$.

В соответствии с канонической формой Шура, уравнение (2.5.2) распадается на дифференциальные уравнения следующих типов. Для строк A с блоками размера 2×2 получаем подсистему из пары уравнений

$$a_{ii}\eta^i(t) + a_{i,i+1}\eta^{i+1}(t) + a_{i,i+2}\eta^{i+2} + \ldots + a_{in}\eta^n =$$
$$= \int_0^t (b_{ii}\eta^i(s) + b_{i,i+1}\eta^{i+1}(s) + \ldots + b_{in}\eta^n(s))ds + \int_0^t g^i(s)ds + w^i(t),$$
$$a_{i+1,i}\eta^i(t) + a_{i+1,i+1}\eta^{i+1}(t) + a_{i+1,i+2}\eta^{i+2} + \ldots + a_{i+1,n}\eta^n =$$
$$= \int_0^t (b_{i+1,i+1}\eta^{i+1}(s) + b_{i+1,i+2}\eta^{i+2}(s) + \ldots + b_{i+1,n}\eta^n(s))ds +$$
$$+ \int_0^t g^{i+1}(s)ds + w^{i+1}(t).$$

В матричной форме в новых обозначениях эта подсистема уравнений принимает вид

$$\bar{\eta}(t) + \chi(t) = \int_0^t K\bar{\eta}(s)ds + \int_0^t \theta(s)ds + \int_0^t \bar{g}(s)ds + \Lambda\bar{w}(t),$$

где

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta^i \\ \eta^{i+1} \end{pmatrix},\ B_{ii} = \begin{pmatrix} b_{ii} & b_{i,i+1} \\ 0 & b_{i+1,i+1} \end{pmatrix},\ \Lambda = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\chi = \Lambda \begin{pmatrix} a_{i,i+2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,i+2} & \cdots & a_{i+1,n} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \ldots \eta^n\right)^T,$$

$$\theta(t) = \Lambda \begin{pmatrix} b_{i,i+2} & \cdots & b_{in} \\ b_{i+1,i+2} & \cdots & b_{i+1,n} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \ldots \eta^n\right)^T,$$

$\bar{g} = \Lambda \begin{pmatrix} g^i \\ g^{i+1} \end{pmatrix}$, $\bar{w} = \begin{pmatrix} w^i \\ w^{i+1} \end{pmatrix}$, $K = \Lambda B_{ii}$.

Для этой подсистемы уравнений имеет место аналитическая формула для решений (см. [20], [33])

$$\bar{\eta}(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)} \Lambda d\bar{w}_\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)} \left(\theta(\tau) + \bar{g}(\tau) - K\chi(\tau)\right) d\tau - \chi(t).$$

Для строк A с блоками размера 1×1 получаем уравнения

$$a_{jj}\eta^j(t) + a_{j,j+1}\eta^{j+1}(t) + \ldots + a_{jn}\eta^n(t) =$$
$$= \int_0^t (b_{jj}\eta^j(s) + b_{j,j+1}\eta^{j+1}(s) + \ldots + b_{jn}\eta^n(s))ds + \int_0^t g^j(s)ds + w^j(t).$$

Для такого типа уравнений тоже есть аналитическая формула для решений (см. [20], [33])

$$\eta^j(t) = \int_0^t e^{\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)} \frac{1}{a_{jj}} dw_u^j + \int_0^t e^{\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)} [\frac{1}{a_{jj}} g^j(u) + \frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}}\eta^{j+1}(u) +$$
$$+ \ldots + \frac{b_{jn}}{a_{jj}}\eta^n(u) - \frac{b_{jj}}{a_{jj}^2}(a_{j,j+1}\eta^{j+1}(u) + \ldots + a_{jn}\eta^n(u))]du -$$
$$-\frac{a_{j,j+1}}{a_{jj}}\eta^{j+1} - \ldots - \frac{a_{jn}}{a_{jj}}\eta^n.$$

Последние $n-m+1$ компонент процесса η, соответствующие строкам A с нулевыми диагональными блоками, соберем в одно матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & a_{m+1,m+2} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^m(t) \\ \eta^{m+1}(t) \\ \vdots \\ \eta^n(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} b_{mm} & b_{m,m+1} & \ldots & b_{mn} \\ 0 & b_{m+1,m+1} & \ldots & b_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^m(s) \\ \eta^{m+1}(s) \\ \vdots \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+\int_0^t \begin{pmatrix} g^m(s) \\ g^{m+1}(s) \\ \vdots \\ g^n(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^m(t) \\ w^{m+1}(t) \\ \vdots \\ w^n(t) \end{pmatrix}. \qquad (2.5.3)$$

Из последнего уравнения системы (2.5.3) получаем, что

$$\int_0^t b_{nn}\eta^n(s)ds = -\int_0^t g^n(s)ds - w^n(t).$$

Применяя (как и в §2.3) к обеим частям этого уравнения симметрическую производную в среднем D_S^w (текущую скорость), мы при $0 < t < T$ находим $\eta^n(t)$. Тогда в соответствии со Следствием 2.1.1, мы при $0 < t < T$ получаем, что

$$\eta^n(t) = -\frac{1}{b_{nn}}g^n(t) - \frac{1}{b_{nn}}D_S w^n(t) = -\frac{1}{b_{nn}}g^n(t) - \frac{1}{b_{nn}}\frac{w^n(t)}{2t}. \qquad (2.5.4)$$

Из предпоследнего уравнения системы (2.5.3) мы получаем, что

$$a_{n-1,n}\eta^n = \int_0^t (b_{n-1,n-1}\eta^{n-1}(s) + b_{n-1,n}\eta^n(s))ds + \int_0^t g^{n-1}(s)ds + w^{n-1}(t),$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, при $0 < t < T$ выводим

$$\eta^{n-1}(t) = \frac{a_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}}D_S\eta^n - \frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}}\eta^n - \\ - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}g^{n-1}(t) - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}D_S w^{n-1}(t).$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $\eta^n(t)$ и использовав Лемму 2.1.2, при $0 < t < T$ получаем

$$\eta^{n-1}(t) = -\frac{a_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}\frac{dg^n(t)}{dt} + \frac{a_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}\frac{w^n(t)}{4t^2} + \\ + \frac{b_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}g^n(t) + \frac{b_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}\frac{w^n(t)}{2t} - \\ - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}g^{n-1}(t) - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}\frac{w^{n-1}(t)}{2t}.$$

В точности аналогично, для $m \le l \le n-1$ при $0 < t < T$ получаем формулу для определения $\eta^l(t)$

$$D_S(a_{l,l+1}\eta^{l+1} + a_{l,l+2}\eta^{l+2} + \ldots + a_{ln}\eta^n) = b_{ll}\eta^l + b_{l,l+1}\eta^{l+1} + \ldots \\ + b_{l,n}\eta^n + g^l(t) + D_S w^l(t). \quad (2.5.5)$$

С помощью Леммы 2.1.4 и формулы (2.5.5) при $0 < t < T$ нетрудно получить явное выражение для любого $\eta^l(t)$.

Перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (2.5.3). Как и в параграфе §2.3, для выполнения нулевых начальных условий мы в процессах, удовлетворяющих рекурентным соотношениям (2.5.4) и (2.5.5), в знаменателях t заменяем на $t_0(t)$, где $t_0(t)$ определяется по формуле (2.3.9).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема 2.5.1. *Пусть $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – регулярный пучок $n \times n$-матриц, а $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \le t \le T$; Q_L и Q_R – вещественные ортогональные матрицы размера $n \times n$, преобразующие пучок $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ к обобщенной вещественной канонической форме Шура (т.е. матрица $A = Q_L\tilde{A}Q_R$ – верхняя квазитреугольная, в которой сначала вдоль главной диагонали стоят невырожденные блоки, а потом вырожденные, а матрица $B = Q_L\tilde{B}Q_R$ – верхнетреугольная). Тогда: 1) уравнение* (2.5.1) *преобразуется в уравнение* (2.5.2)*, которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистем, соответствующих строкам A с невырожденными блоками размера 2×2, имеет место аналитическая формула для решений вида*

$$\bar{\eta}(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}\Lambda d\bar{w}_\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)} \left(\theta(\tau) + \bar{g}(\tau) - K\chi(\tau)\right) d\tau - \chi(t),$$

где $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta^i \\ \eta^{i+1} \end{pmatrix}$, $B_{ii} = \begin{pmatrix} b_{ii} & b_{i,i+1} \\ 0 & b_{i+1,i+1} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}^{-1}$,

$$\chi = \Lambda \begin{pmatrix} a_{i,i+2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,i+2} & \cdots & a_{i+1,n} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \dots \eta^{n}\right)^T,$$

$$\theta(t) = \Lambda \begin{pmatrix} b_{i,i+2} & \cdots & b_{in} \\ b_{i+1,i+2} & \cdots & b_{i+1,n} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \dots \eta^{n}\right)^T,$$

$$\bar{g} = \Lambda \begin{pmatrix} g^i \\ g^{i+1} \end{pmatrix}, \ \bar{w} = \begin{pmatrix} w^i \\ w^{i+1} \end{pmatrix}, \ K = \Lambda B_{ii};$$

3) для подсистем, соответствующих строкам A с невырожденными блоками размера 1×1, имеет место аналитическая формула для решений вида

$$\eta^j(t) = \int_0^t e^{\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)} \frac{1}{a_{jj}} dw_u^j + \int_0^t e^{\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)} [\frac{1}{a_{jj}} g^j(u) + \frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}} \eta^{j+1}(u) +$$

$$+ \dots + \frac{b_{jn}}{a_{jj}} \eta^n(u) - \frac{b_{jj}}{a_{jj}^2} (a_{j,j+1}\eta^{j+1}(u) + \dots + a_{jn}\eta^n(u))] du -$$

$$- \frac{a_{j,j+1}}{a_{jj}} \eta^{j+1} - \dots - \frac{a_{jn}}{a_{jj}} \eta^n;$$

4) для уравнений, соответствующих $n-m+1$ строкам A с вырожденными блоками размера 1×1, образующих подсистему из последних $n-m+1$ уравнений системы (2.5.2), при $0 < t < T$ имеют место рекурентные соотношения для вычисления решений вида

$$\eta^n(t) = -\frac{1}{b_{nn}} g^n(t) - \frac{1}{b_{nn}} D_S w^n(t) = -\frac{1}{b_{nn}} g^n(t) - \frac{1}{b_{nn}} \frac{w^n(t)}{2t},$$

$$D_S(a_{l,l+1}\eta^{l+1} + a_{l,l+2}\eta^{l+2} + \dots + a_{ln}\eta^n) = b_{ll}\eta^l + b_{l,l+1}\eta^{l+1} + \dots$$

$$+ b_{l,n}\eta^n + g^l(t) + D_S w^l(t),$$

где $m \leq l \leq n-1$; 5) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пункте 4) рекурентным соотношениям, заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \leq t < T$.

Глава III.

Случай с импульсными воздействиями

3.1. Изучение дифференциальных уравнений леонтьевского типа

В [6] описывается модель динамики n-мерного вектора $\xi(t)$ основных производственных фондов корпорации из n предприятий с учетом влияния импульсных внешних инвестиций при корпоративном использовании реинвестированных средств предприятий. Полученное уравнение динамики оказалось не разрешенным относительно производной $\acute{\xi}(t)$. В работах [43], [7], в отличие от [6], учитываются случайные возмущения при поступлении внешних инвестиций и влияние случайной окружающей среды на динамику основных фондов. В результате динамика основных производственных фондов описывается дифференциальным уравнением леонтьевского типа с импульсными воздействиями

$$d\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\xi(t)dt + f(t)dt + dB\zeta(t) + \Lambda d\tilde{w}(t), \ \ 0 \le t \le T,$$

где $\tilde{L}$, $\tilde{M}$, B, Λ – $n \times n$-матрицы, причем $\tilde{L}$ вырождена, а $\tilde{M}$ и Λ – невырождены; $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – регулярный пучок матриц; $\xi(t)$ – n-мерный случайный процесс; $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция; $\zeta(t)$ – n-мерный процесс скачков; $\tilde{w}(t)$ – n-мерный винеровский процесс. Экономический смысл: вектор $\xi(t)$ описывает динамику основных производственных фондов корпорации из n предприятий; вектора $f(t)$ и $\zeta(t)$ отвечают внешним непрерывным и импульсным инвестициям, вложенным в каждое предприятие; белый шум, т.е. "производная" $\tilde{w}(t)$, отвечает случайным возмущениям при поступлении внешних инвестиций и влиянию случайной окружающей среды на динамику основных фондов; матрица $\tilde{L}$ отражает корпоративное использование индивидуальных средств накопления предприятий; элементы матрицы $\tilde{M}$ зависят от прибыли и фондоотдачи предприятий. Ситуация с обратимостью $\tilde{M}$ возникает, когда каждое предприятие направляет на другие предприятия значительно меньшую долю своей чистой прибыли на реинвестирование и погашение долгов, чем оставляет себе для этих же целей.

Особенность уравнений леонтьевского типа, как видно из предыдущих параграфов, предполагает рассматривать производные высших порядков от правой части (в том числе и винеровского процесса). В работе [43] на коэффициенты уравнения вводятся ограничения, позволяющие не применять "производные" винеровского процесса. Здесь мы проводим исследование уравнения, которое не использует эти ограничения.

Итак, как уже сказано выше, дифференциальное уравнение леонтьевского типа с импульсными воздействиями – это дифференциальное уравнение в R^n вида

$$\tilde{L}\xi(t) = \int_0^t \tilde{M}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + B\zeta(t) + \Lambda\tilde{w}(t), \;\; 0 \le t \le T. \qquad (3.1.1)$$

Здесь процесс скачков $\zeta(t) = \zeta(t,\omega)$ задается следующим образом

$$\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k), \;\; 0 < t_1 < \cdots < t_N < T,$$

где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных, $\tilde{\zeta}_k(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n. Из вида (3.1.1) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (3.1.1) предполагается вида

$$\xi(0,\omega) = 0. \tag{3.1.2}$$

Формулы для решений задачи (3.1.1), (3.1.2) будем искать среди случайных процессов $\xi(t,\omega)$, которые удовлетворяют (в том смысле как описывается ниже) дифференциальным уравнениям

$$\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(0) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \ \ 0 \le t \le t_1,$$
$$\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(t_k) = \tilde{M}\int_{t_k}^t \xi(s)ds + \int_{t_k}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \ \ t_k \le t \le t_{k+1},$$
$$\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(t_N) = \tilde{M}\int_{t_N}^t \xi(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \ \ t_N \le t \le T,$$

при всех $k = 1, 2, \ldots, N-1$, в точках t_k удовлетворяют равенствам

$$\tilde{L}\xi(t_k + 0, \omega) - \tilde{L}\xi(t_k - 0, \omega) = B\tilde{\zeta}_k(\omega), k = 1, 2, \ldots, N,$$

и в начальный момент времени $t = 0$ удовлетворяют начальному условию (3.1.2).

Итак, процесс $\xi(t)$ для решения задачи (3.1.1), (3.1.2) определяется последовательно для $k = 0, 1, \ldots, N$ через случайные процессы $\xi_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{L}\xi_0(t) - \tilde{L}\xi_0(0) = \tilde{M}\int_0^t \xi_0(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \ \ 0 \le t \le t_1, \ (k = 0),$$
$$\tilde{L}\xi_k(t) - \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{M}\int_{t_k}^t \xi_k(s)ds + \int_{t_k}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \ \ t_k \le t \le t_{k+1},$$
$$\tilde{L}\xi_N(t) - \tilde{L}\xi_N(t_N) = \tilde{M}\int_{t_N}^t \xi_N(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \ \ t_N \le t \le T,$$

$k = 1, 2, \ldots, N-1$, где

$$\xi_0(0) = 0, \ \ \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{L}\xi_{k-1}(t_k, \omega) + B\tilde{\zeta}_k(\omega), \ \ k = 1, \ldots, N.$$

Как нетрудно видеть, уравнение (3.1.1) в общей форме неудобно для изучения, поэтому приведем его к некоторому каноническому виду, используя при этом метод, полученный в параграфе §2.2 для уравнений без импульсных воздействий. Для регулярного пучка матриц существует преобразование Кронекера-Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) $A = (a^i_j)$ и A_R), при котором матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ приводятся к квазидиагональному виду (см. [8]), причем, при соответствующей нумерации векторов базиса, $L = A\tilde{L}A_R$ и $M = A\tilde{M}A_R$ имеют такой же вид как и в параграфе §2.3.

Таким образом, после применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса, уравнение (3.1.1) преобразуется следующим образом

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + AB\zeta(t) + C\tilde{w}(t),$$

где $C = A\Lambda$, $\eta(t) = A_R^{-1}\xi(t)$.

Как и в §2.2 введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой (2.2.2). Тогда (согласно результатам параграфа §2.2) после применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса дифференциальное уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ приобретает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + AB\zeta(t) + w(t), \tag{3.1.3}$$

$$\eta(0) = 0. \tag{3.1.4}$$

Тогда, учитывая сказаное выше, формулы для решений $\eta(t)$ задачи (3.1.3), (3.1.4) определяется последовательно для $k = 0, 1, \dots, N$ через случайные процессы $\eta_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$L\eta_0(t) - L\eta_0(0) = \int_0^t M\eta_0(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + w(t),\ 0 \le t \le t_1, \tag{3.1.5}$$

$$L\eta_k(t) - L\eta_k(t_k) = \int_{t_k}^{t} M\eta_k(s)ds + \int_{t_k}^{t} Af(s)ds + w(t), \;\; t_k \le t \le t_{k+1}, \tag{3.1.6}$$

$$L\eta_N(t) - L\eta_N(t_N) = \int_{t_N}^{t} M\eta_N(s)ds + \int_{t_N}^{t} Af(s)ds + w(t), \;\; t_N \le t \le T, \tag{3.1.7}$$

$k = 1, \ldots, N-1$, где

$$\eta_0(0) = 0, \;\; L\eta_k(t_k) = L\eta_{k-1}(t_k, \omega) + G\tilde{\zeta}_k(\omega), \;\; k = 1, \ldots, N \tag{3.1.8}$$

и $G = AB$. Как было отмечено выше, для построения процесса, описывающего модель, заданную уравнениями (3.1.5), (3.1.6) и (3.1.7), нужны производные свободных членов (включая винеровский процесс). Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций. Поэтому чтобы избежать использования обобщенных функций, мы для построения процесса, описывающего модель, заданную (3.1.5), (3.1.6) и (3.1.7) будем использовать симметрические производные в среднем (текущие скорости) D_S^w для случайных процессов.

Принимая во внимание структуру матриц L и M, нетрудно видеть, что задачи (3.1.3), (3.1.4) и (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) распадаются на несколько независимых систем уравнений. Самое "нижнее" из них соответствует единичному отрезку в диагонали в L и блоку, состоящему из матрицы в правом нижнем углу в M. Обозначим последнюю матрицу через K, через $\vartheta(t)$ обозначим вектор размерности $q+1$, составленный из последних $q+1$ координат вектора $\eta(t)$. Тогда $\vartheta_k(t)$ описывается уравнением

$$\vartheta_k(t) - \vartheta_k(t_k) = K\int_{t_k}^{t} \vartheta_k(s)ds + \int_{t_k}^{t} Af(s)ds + w(t), \tag{3.1.9}$$

$$t_k \le t \le t_{k+1}, \; k = 1, 2, ..., N-1$$

в R^{q+1}. Здесь $w(t)$ – $(q+1)$-мерный винеровский процесс, составленный из последних $q+1$ координат винеровского процесса в R^n, $Af(t)$ – $(q+1)$-мерный вектор, составленный из последних $q+1$ координат вектора $Af(t)$. Для уравнения (3.1.9) известна аналитическая формула для решений (см. [20], [33]):

$$\vartheta_k(t) = e^{K(t-t_k)}\vartheta_k(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{K(t-\tau)}Af(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t} e^{K(t-\tau)}dw(\tau).$$

Отметим, что для уравнений вида (3.1.9), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, имеют место аналогичные формулы для решений. Суммируя все $\vartheta_k(t)$, получаем выражение для $\vartheta(t)$

$$\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{K(t-t_k)}G\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_0^t e^{K(t-\tau)}Af(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau),$$

где $G\tilde{\zeta}_k(\omega)$ – $(q+1)$-мерный вектор, составленный из последних $q+1$ координат вектора $G\tilde{\zeta}_k(\omega)$.

Другие системы соответствуют клеткам Жордана в L и единичным матрицам соответствующей размерности, выбранным из строк и столбцов M. Рассмотрим этот случай на примере $(p+1)\times(p+1)$ матрицы (жордановой клетки) N в левом верхнем углу L

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующей ей единичной матрице в M. Через $(Af)_{(p+1)}$ обозначим $(p+1)$-мерный вектор, составленный из первых $p+1$ координат вектора $Af(t)$, через $\eta_{(p+1)}(t)$ – $(p+1)$-мерный вектор, составленный из первых $p+1$ координат вектора $\eta(t)$, а через $w_{(p+1)}(t)$ вектор, состоящий из первых $p+1$

координат вектора $w(t)$. Легко видеть, что координаты вектора Af имеют вид $(Af)^i = \sum_{j=1}^n a^i_j f^j$. Тогда $(\eta_k)_{(p+1)}(t)$ является решением уравнения

$$N(\eta_k)_{(p+1)}(t) - N(\eta_k)_{(p+1)}(t_k) = \int_{t_k}^{t} ((\eta_k)_{(p+1)}(s) + (Af)_{(p+1)}(s))ds + w_{(p+1)}(t), \tag{3.1.10}$$

$$t_k \le t \le t_{k+1},\ k = 1, 2, ..., N-1.$$

В координатной форме это уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\eta_k)^1(t) \\ (\eta_k)^2(t) \\ \vdots \\ (\eta_k)^p(t) \\ (\eta_k)^{p+1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\eta_k)^1(t_k) \\ (\eta_k)^2(t_k) \\ \vdots \\ (\eta_k)^p(t_k) \\ (\eta_k)^{p+1}(t_k) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{t_k}^t (\eta_k^1(s) + \sum_{j=1}^n a^1_j f^j)ds \\ \int_{t_k}^t (\eta_k^2(s) + \sum_{j=1}^n a^2_j f^j)ds \\ \vdots \\ \int_{t_k}^t (\eta_k^p(s) + \sum_{j=1}^n a^p_j f^j)ds \\ \int_{t_k}^t (\eta_k^{p+1}(s) + \sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j)ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}, \tag{3.1.11}$$

где $k = 1, 2, ..., N-1$. Из последнего уравнения системы (3.1.11) получаем, что

$$\int_{t_k}^t (\eta_k^{p+1}(s) + \sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j)ds = -w^{p+1}(t).$$

Взяв (как и в §2.3) симметрическую производную в среднем (текущую скорость) D^w_S от обеих частей этого уравнения, мы получаем

$$(\eta_k)^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j - D_S w^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^n a^{p+1}_j f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}, \tag{3.1.12}$$

$k=1,2,...,N-1$. Из предпоследнего уравнения системы (3.1.11) мы получаем, что

$$\eta_k^{p+1}(t)-\eta_k^{p+1}(t_k)=\int_{t_k}^{t}(\eta^p(s)+\sum_{j=1}^{n}a_j^p f^j)ds+w^p(t),$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, выводим

$$\eta_k^p(t)=-\sum_{j=1}^{n}a_j^p f^j+D_S^w\eta_k^{p+1}(t)-D_S^w w^p(t).$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\eta_k^{p+1}(t)$ из (3.1.12) и использовав Лемму 2.1.3, получим

$$\eta_k^p(t)=-\sum_{j=1}^{n}a_j^{p+1}\frac{df^j}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_j^p f^j+\frac{w^{p+1}(t)}{2t^2}-\frac{w^p(t)}{2t}.$$

В точности аналогично, для $1\le i\le p$ мы получаем рекурентную формулу

$$\eta_k^i(t)=D_S^w\eta_k^{i+1}(t)-D_S^w w^i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_j^i f^j. \tag{3.1.13}$$

С помощью Леммы 2.1.4 по формуле (3.1.13) получаем явное выражение для любого $\eta_k^i(t)$:

$$\eta_k^i(t)=-\sum_{k=i}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^{k+1}\frac{d^{k-i+1}f^j}{dt^{k-i+1}}\right)-\sum_{j=1}^{n}a_j^i f^j+$$
$$+\sum_{k=i+1}^{p+1}\left((-1)^{k-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}}\frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}}\right)-\frac{w^j(t)}{2t}.$$

Заметим, что для уравнений вида (3.1.10), заданных на промежутках $[0,t_1]$ и $[t_N,T]$, имеют место при $0<t\le t_1$ и $t_N\le t<T$ соответственно аналогичные формулы для решений. При этом, найденные процессы удовлетворяют условиям (3.1.8) в том случае, когда компоненты случайной величины $G\tilde{\zeta}_k(\omega)$, соответствующие жордановым клеткам с нулями по главной диагонали в L, равны нулю.

Итак, с учетом выше сказанного, при $0 < t < T$ получаем формулы для $\eta_{(p+1)}(t)$:

$$\eta^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1} \frac{d^{k-i+1} f^j}{dt^{k-i+1}} \right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{p+1} \left((-1)^{k-i+1} \frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}} \frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}} \right) - \frac{w^j(t)}{2t}.$$

Вопрос о нулевых начальных условиях (при $k = 0$) для решений системы вида (3.1.10), заданной на промежутке $[0, t_1]$, решается способом, описанным в конце §2.3.

Таким образом, суммируя выше сказанное, мы доказали следующее утверждение

Теорема 3.1.1. *Пусть $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ – регулярный пучок $n\times n$-матриц, B – $n \times n$-матрица, а $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \le t \le T$; пусть $0 < t_1 < \cdots < t_N < T$; A и A_R – невырожденные матрицы размера $n \times n$, приводящие пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т.е. к квазидиагональному виду), $L = A\tilde{L}A_R$ и $M = A\tilde{M}A_R$, $G = AB$; пусть $\tilde{\zeta}_k(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ – случайные величины со значениями в R^n, такие, что компоненты случайной величины $G\tilde{\zeta}_k(\omega)$, соответствующие жордановым клеткам с нулями по главной диагонали в L, равны нулю; пусть $\zeta(t, \omega) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t - t_k)$, где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных. Тогда: 1) уравнение* (3.1.1) *преобразуется в каноническое уравнение* (3.1.3), *которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистемы в R^{q+1}, соответствующей единичной матрице в L и невырожденной $(q + 1) \times (q + 1)$ – матрице K в*

M, имеет место аналитическая формула для решений вида

$$\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{K(t-t_k)} G\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_0^t e^{K(t-\tau)} Af(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)} dw(\tau),$$

где $G\tilde{\zeta}_k(\omega)$, $Af(t)$ – соответствующие компоненты векторов $G\tilde{\zeta}_k(\omega))$, $Af(t)$, принадлежащие R^{q+1}; 3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1)\times(p+1)$ с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в M, при $0 < t < T$ имеют место формулы для решений вида

$$\eta^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - D_S w^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{p+1} f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1} \frac{d^{k-i+1} f^j}{dt^{k-i+1}} \right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{p+1} \left((-1)^{k-i+1} \frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}} \frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}} \right) - \frac{w^j(t)}{2t}, \ \ 1 \le i \le p;$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях полученных в пункте 3) процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) *и получаем процессы, принимающие при $t = 0$ нулевые значения, но являющиеся решениями только при $t_0 \le t < T$.*

3.2. Сингулярные диффференциальные уравнения леонтьевского типа

Сингулярное дифференциальное уравнение леонтьевского типа с импульсными воздействиями – это дифференциальное уравнение в R^n вида

$$\tilde{L}\xi(t) = \int_0^t \tilde{M}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + S\zeta(t) + \Lambda\tilde{w}(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{3.2.1}$$

где $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$, у которого строки и столбцы не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами; $\xi(t)$ – искомый случайный процесс; $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в

R^n; Λ – невырожденная матрица размера $n \times n$; $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция; $\zeta(t)$ – n-мерный процесс скачков; S – $n \times n$-матрица. Кроме этого, здесь процесс скачков $\zeta(t) = \zeta(t,\omega)$ задается следующим образом

$$\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t - t_k), \;\; 0 < t_1 < \cdots < t_N < T,$$

где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных, $\tilde{\zeta}_k(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n. Из вида (3.2.1) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (3.2.1) предполагается вида

$$\xi(0,\omega) = 0. \tag{3.2.2}$$

Отметим, что в [43] рассматривалось дифференциальное уравнение леонтьевского типа с регулярным пучком матриц коэффициентов.

Формулы для решений задачи (3.2.1), (3.2.2) будем искать среди случайных процессов $\xi(t,\omega)$, которые удовлетворяют (в том смысле как описывается ниже) дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(0) &= \tilde{M}\int_0^t \xi_k(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \;\; 0 \le t \le t_1,\\
\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(t_k) &= \tilde{M}\int_{t_k}^t \xi(s)ds + \int_{t_k}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t),\; t_k \le t \le t_{k+1},\\
\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(t_N) &= \tilde{M}\int_{t_N}^t \xi(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t), \;\; t_N \le t \le T,
\end{aligned}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots, N-1$, в точках t_k удовлетворяют равенствам

$$\tilde{L}\xi(t_k + 0,\omega) - \tilde{L}\xi(t_k - 0,\omega) = S\tilde{\zeta}_k(\omega), \;\; k = 1, 2, \ldots, N$$

и в начальный момент времени $t = 0$ удовлетворяют начальному условию (3.2.2).

Таким образом, процесс $\xi(t)$ для решения задачи (3.2.1), (3.2.2) определяется последовательно для $k = 0, 1, \ldots, N$ через случайные процессы $\xi_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{L}\xi_0(t) - \tilde{L}\xi_0(0) = \tilde{M}\int_0^t \xi_0(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t),\ 0 \le t \le t_1, (k = 0),$$
$$\tilde{L}\xi_k(t) - \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{M}\int_{t_k}^t \xi_k(s)ds + \int_{t_k}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t),\ t_k \le t \le t_{k+1},$$
$$\tilde{L}\xi_N(t) - \tilde{L}\xi_N(t_N) = \tilde{M}\int_{t_N}^t \xi_N(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \Lambda\tilde{w}(t),\ t_N \le t \le T,$$

$k = 1, 2, \ldots, N-1$, где

$$\xi_0(0) = 0,\ \ \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{L}\xi_{k-1}(t_k, \omega) + S\tilde{\zeta}_k(\omega),\ \ k = 1, \ldots, N.$$

Как и в предыдущем параграфе приведем уравнение (3.2.1) к каноническому виду, применив при этом метод, полученный в параграфе §2.2 для уравнений леонтьевского типа без процесса скачков в правой части. Выполнив для сингулярного пучка матриц $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ преобразование Кронекера-Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно), получим квазидиагональную матрицу $P_L\tilde{M}P_R + \lambda P_L\tilde{L}P_R$ (см. [8]) и тогда уравнение (3.2.1) преобразуется следующим образом

$$P_L\tilde{L}P_R\eta(t) = \int_0^t P_L\tilde{M}P_R\eta(s)ds + \int_0^t P_Lf(s)ds + P_LS\zeta(t) + C\tilde{w}(t),$$

где $C = P_L\Lambda$, $\eta(t) = P_R^{-1}\xi(t)$. При соответствующей нумерации векторов базиса, $L = P_L\tilde{L}P_R$ и $M = P_L\tilde{M}P_R$ имеют вид, описанный в §2.4.

Как и в §2.2 введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой (2.2.2). Тогда (согласно результатам параграфа §2.2) после применения преобразования Кронекера-Вейерштрасса дифференциальное уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ приобретает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + P_L S\zeta(t) + w(t), \tag{3.2.3}$$

$$\eta(0) = 0. \tag{3.2.4}$$

Тогда, учитывая сказаное выше, формулы для решений $\eta(t)$ задачи (3.2.3), (3.2.4) определяется последовательно для $k = 0, 1, \ldots, N$ через случайные процессы $\eta_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$L\eta_0(t) - L\eta_0(0) = \int_0^t M\eta_0(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t),\ 0 \le t \le t_1, \tag{3.2.5}$$

$$L\eta_k(t) - L\eta_k(t_k) = \int_{t_k}^t M\eta_k(s)ds + \int_{t_k}^t P_L f(s)ds + w(t),\ t_k \le t \le t_{k+1}, \tag{3.2.6}$$

$$L\eta_N(t) - L\eta_N(t_N) = \int_{t_N}^t M\eta_N(s)ds + \int_{t_N}^t P_L f(s)ds + w(t),\ t_N \le t \le T, \tag{3.2.7}$$

$k = 1, 2, \ldots, N-1$, где

$$\eta_0(0) = 0,\ \ L\eta_k(t_k) = L\eta_{k-1}(t_k, \omega) + Q\tilde{\zeta}_k(\omega),\ \ k = 1, \ldots, N \tag{3.2.8}$$

и $Q = P_L S$. Как и в предыдущем параграфе, для построения процесса, описывающего модель, заданную (3.2.5), (3.2.6) и (3.2.7) будем использовать симметрические производные в среднем (текущие скорости) D_S^w для случайных процессов.

Принимая во внимание структуру матриц L и M, нетрудно заметить, что задачи (3.2.3), (3.2.4) и, следовательно, (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) распадаются на несколько независимых систем уравнений четырех типов (каждой паре соответствующих блоков в L и M соответствует уравнение определенного типа). Как и в параграфе §2.4 обозначим через $\varsigma(t)$, $\vartheta(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ компоненты вектора $\eta(t)$, соответствующие парам блоков N и E, E и K, A и B, G и H соответственно. Также через $u(t), v(t), g(t), z(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$. Соответствующие компоненты винеровского процесса будут тоже винеровскими процессами и будем обозначать их как и сам винеровский процесс через $w(t)$. Изучим каждый тип уравнений.

Паре матриц N и E размера $(p+1)\times(p+1)$ соответствует система типа

$$N\varsigma_k(t) - N\varsigma_k(t_k) = \int_{t_k}^{t} \varsigma_k(s)ds + \int_{t_k}^{t} u(s)ds + w(t), \tag{3.2.9}$$
$$t_k \le t \le t_{k+1}, \;\; k = 1, 2, ..., N-1.$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(t) \\ \varsigma_k^2(t) \\ \vdots \\ \varsigma_k^p(t) \\ \varsigma_k^{p+1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(t_k) \\ \varsigma_k^2(t_k) \\ \vdots \\ \varsigma_k^p(t_k) \\ \varsigma_k^{p+1}(t_k) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \int_{t_k}^t (\varsigma_k^1(s) + u^1(s))ds \\ \int_{t_k}^t (\varsigma_k^2(s) + u^2(s))ds \\ \vdots \\ \int_{t_k}^t (\varsigma_k^p(s) + u^p(s))ds \\ \int_{t_k}^t (\varsigma_k^{p+1}(s) + u^{p+1}(s))ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.2.10}$$

Из последнего уравнения системы (3.2.10) получаем, что

$$\int_{t_k}^{t} (\varsigma_k^{p+1}(s) + u^{p+1}(s))ds = -w^{p+1}(t).$$

Тогда из этого уравнения (как и в §2.3) мы находим $\varsigma_k^{p+1}(t)$ применением к обеим его частям производной D_S^w (текущей скорости)

$$\varsigma_k^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - D_S w^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}. \tag{3.2.11}$$

Из предпоследнего уравнения системы (3.2.10) мы получаем, что

$$\varsigma_k^{p+1}(t) = \int_{t_k}^{t} (\varsigma_k^{p}(s) + u^p(s))ds + w^p(t),$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, выводим

$$\varsigma_k^{p}(t) = -u^p(t) + D_S^w \varsigma_k^{p+1}(t) - D_S^w w^p(t).$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\varsigma_k^{p+1}(t)$ из (3.2.11) и использовав Лемму 2.1.2, при получим

$$\varsigma_k^{p}(t) = -\frac{du^{p+1}}{dt} - u^p(t) + \frac{w^{p+1}(t)}{2t^2} - \frac{w^p(t)}{2t}.$$

В точности аналогично, для $1 \leq i \leq p$ мы получаем рекурентную формулу

$$\varsigma_k^{i}(t) = D_S^w \varsigma_k^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - u^i. \tag{3.2.12}$$

С помощью Леммы 2.1.4 по формуле (3.2.12) нетрудно получить явное выражение для любого $\varsigma_k^i(t)$. Отметим, что для уравнений вида (3.2.9), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, справедливы при $0 < t \leq t_1$ и $t_N \leq t < T$ соответственно аналогичные формулы для решений. При этом, процессы, удовлетворяющие найденной рекурентной формуле, удовлетворяют ограничениям (3.2.8) в том случае, если компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$, соответствующие жордановым клеткам с нулями по главной диагонали в L, равны нулю. Стало быть, компоненты процесса $\varsigma^i(t)$ при $0 < t < T$ находятся из следующих соотношений

$$\varsigma^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - D_S w^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$

$$\varsigma^{i}(t) = D_S^w \varsigma^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - u^i, \;\; i = 1, 2, ..., p.$$

Для пары матриц E и K размеров $(q+1) \times (q+1)$ получаем систему в R^{q+1} типа

$$\vartheta_k(t) - \vartheta_k(t_k) = K \int_{t_k}^{t} \vartheta_k(s)ds + \int_{t_k}^{t} v(s)ds + w(t), \tag{3.2.13}$$

$$t_k \leq t \leq t_{k+1}, \;\; k = 1, 2, ..., N-1.$$

Для этого уравнения известна аналитическая формула для решений (см. [20], [33])

$$\vartheta_k(t) = e^{K(t-t_k)}\vartheta_k(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{K(t-\tau)}v(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t} e^{K(t-\tau)}dw(\tau).$$

Для уравнения вида (3.2.13), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, справедливы аналогичные формулы для решений. Суммируя все $\vartheta_k(t)$, получаем выражение для $\vartheta(t)$

$$\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{K(t-t_k)}Q\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_{0}^{t} e^{K(t-\tau)}v(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} e^{K(t-\tau)}dw(\tau),$$

где из произведения $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$ берутся только элементы из R^{q+1}.

Рассмотрев пару матриц A и B размера $l \times (l+1)$, получим систему вида

$$A\eta_k(t) - A\eta_k(t_k) = \int_{t_k}^{t} B\eta_k(s)ds + \int_{t_k}^{t} g(s)ds + w(t), \tag{3.2.14}$$
$$t_k \le t \le t_{k+1}, \ \ k = 1, 2, ..., N-1.$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^1(t) \\ \eta_k^2(t) \\ \vdots \\ \eta_k^l(t) \\ \eta_k^{l+1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^1(t_k) \\ \eta_k^2(t_k) \\ \vdots \\ \eta_k^l(t_k) \\ \eta_k^{l+1}(t_k) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^1(s) \\ \eta_k^2(s) \\ \vdots \\ \eta_k^l(s) \\ \eta_k^{l+1}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+\int_{t_k}^{t}\begin{pmatrix} g^1(s)\\ g^2(s)\\ \vdots\\ g^{l-1}(s)\\ g^l(s)\end{pmatrix} ds+\begin{pmatrix} w^1(t)\\ w^2(t)\\ \vdots\\ w^{l-1}(t)\\ w^l(t)\end{pmatrix},$$

т.е.,

$$\eta_k^2(t)-\eta_k^2(t_k)=\int_{t_k}^{t}(\eta_k^1(s)+g^1(s))ds+w^1,$$
$$\eta_k^3(t)-\eta_k^3(t_k)=\int_{t_k}^{t}(\eta_k^2(s)+g^2(s))ds+w^2,$$
$$\eta_k^{l+1}(t)-\eta_k^{l+1}(t_k)=\int_{t_k}^{t}(\eta_k^l(s)+g^l(s))ds+w^l.$$

Как и в случае первой независимой системы, имеют место формулы:

$$\eta_k^l(t)=D_S^w\eta_k^{l+1}-D_S^w w^l-g^l(t)=D_S^w\eta_k^{l+1}-\frac{w^l(t)}{2t}-g^l(t),$$
$$\eta_k^l(t)=\int_{t_k}^{t}(\eta_k^{l-1}(s)+g^{l-1}(s))ds+w^{l-1},$$
$$\eta_k^{l-1}(t)=D_S^w\eta_k^l-D_S^w w^{l-1}-g^{l-1}(t)=D_S^2\eta_k^{l+1}+\frac{w^l(t)}{4t^2}-\frac{w^{l-1}}{2t}-g^{l-1}.$$

Точно также, для $1\le i\le l$ получаем

$$\eta_k^i(t)=D_S^w\eta_k^{i+1}-D_S^w w^i(t)-g^i(t). \tag{3.2.15}$$

Нетрудно заметить, что для уравнений вида (3.2.14), заданных на промежутках $[0,t_1]$ и $[t_N,T]$, имеют место при $0<t\le t_1$ и $t_N\le t<T$ соответственно аналогичные формулы для решений. Как и в §2.4 в качестве η^{l+1} берется произвольный случайный процесс на $[0,T]$, принимающий при $t=0$ нулевое значение и для которого при $0<t<T$ можно вычислить симметрическую производную порядка l. С помощью Леммы 2.1.4 по формуле (3.2.15) несложно получить явное выражение для любого $\eta_k^i(t)$, $k=0,1,2,...,N$. При этом, процессы, удовлетворяющие найденному рекуррентному соотношению, удовлетворяют ограничениям (3.2.8) в том случае,

когда компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$, соответствующие сингулярным клеткам A и B, равны нулю. Таким образом, для вычисления $\eta(t)$ при $0 < t < T$ имеет место формула

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1} - D_S^w w^i(t) - g^i(t).$$

И, наконец, для матриц G и H размера $(r+1)\times r$ имеем систему типа

$$G\theta_k(t) - G\theta_k(t_k) = \int_{t_k}^{t} H\theta_k(s)ds + \int_{t_k}^{t} z(s)ds + w(s), \tag{3.2.16}$$
$$t_k \le t \le t_{k+1}, \;\; k = 1, 2, ..., N-1.$$

В координатной форме получаем систему вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^1(t) \\ \theta_k^2(t) \\ \vdots \\ \theta_k^{r-1}(t) \\ \theta_k^r(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^1(t_k) \\ \theta_k^2(t_k) \\ \vdots \\ \theta_k^{r-1}(t_k) \\ \theta_k^r(t_k) \end{pmatrix} =$$

$$\int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^1(s) \\ \theta_k^2(s) \\ \vdots \\ \theta_k^{r-1}(s) \\ \theta_k^r(s) \end{pmatrix} ds + \int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} z^1(s) \\ z^2(s) \\ \vdots \\ z^r(s) \\ z^{r+1}(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^r(t) \\ w^{r+1}(t) \end{pmatrix}$$

или

$$0 = \int_{t_k}^{t} (\theta_k^1(s) + z^1(s))ds + w^1,$$

$$\theta_k^1(t) - \theta_k^1(t_k) = \int_{t_k}^{t} (\theta_k^2(s) + z^2(s))ds + w^2,$$

$$\theta_k^{r-1}(t) - \theta_k^{r-1}(t_k) = \int_{t_k}^{t} (\theta_k^r(s) + z^r(s))ds + w^r,$$

$$\theta_k^r(t) - \theta_k^r(t_k) = \int_{t_k}^{t} z^{r+1}(s)ds + w^{r+1}.$$

Начиная с первого уравнения, последовательно получаем

$$\theta_k^1(t) = -z^1(t) - D_S^w w^1 = -z^1 - \frac{w^1(t)}{2t},$$

$$\theta_k^2(t) = -z^2(t) + D_S^w \theta_k^1 - D_S^w w^2(t) = -z^2(t) - \frac{dz^1(t)}{dt} + \frac{w^1(t)}{4t^2} - \frac{w^2(t)}{2t},$$

$$\theta_k^r(t) = -z^r(t) - \frac{dz^{r-1}(t)}{dt} - ... - \frac{d^{r-1}z^1(t)}{dt^{r-1}} -$$

$$-D_S w^r(t) - D_S^2 w^{r-1}(t) - ... - D_S^r w^1(t),$$

а также условие согласования

$$\theta_k^r(t_k) + \int_{t_k}^{t} z^{r+1}(s)ds + w^{r+1}(t) = -z^r(t) - \frac{dz^{r-1}(t)}{dt} - ... - \frac{d^{r-1}z^1(t)}{dt^{r-1}} -$$

$$- D_S w^r(t) - D_S^2 w^{r-1}(t) - ... - D_S^r w^1(t), \;\; t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

Если компоненты z^i и w^i не удовлетворяют этому условию, то система не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т.е. данная подсистема переопределена. Как и ранее, для $2 \leq i \leq r$ имеет место рекурентная формула

$$\theta_k^i(t) = -z^i(t) + D_S^w \theta_k^{i-1} - D_S^w w^i(t). \tag{3.2.17}$$

С помощью Леммы 2.1.4 по формулам (3.2.17) несложно получить явное выражение для любого $\theta_k^i(t)$. Легко видеть, что для уравнений вида (3.2.16), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, справедливы при $0 < t \leq t_1$ и $t_N \leq t < T$ соответственно аналогичные условия согласования и формулы для решений. При этом, процессы, удовлетворяющие полученной рекурентной формуле, удовлетворяют условиям (3.2.8) в том случае, если компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$, соответствующие сингулярным клеткам G и H, равны нулю. Стало быть, при $0 < t < T$ имеют место при выполнении условий согласования

$$\int_0^t z^{r+1}(s)ds + w^{r+1}(t) = -z^r(t) - \frac{dz^{r-1}(t)}{dt} - \ldots - \frac{d^{r-1}z^1(t)}{dt^{r-1}} -$$

$$-\frac{w^r(t)}{2t} + \frac{w^{r-1}(t)}{4t^2} - \ldots - (-1)^{r-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{r-1}(2i-1)}{2^r}\frac{w^1(t)}{t^r},\ 0 < t < T$$

соотношения для определения компонент $\theta^i(t)$

$$\theta^1 = -z^1 - \frac{w^1}{2t},$$

$$\theta^i(t) = -z^i(t) + D_S^w\theta^{i-1} - D_S^w w^i(t).$$

Как и в предыдущем параграфе, вопрос о нулевых начальных условиях (при $k = 0$) для решений систем вида (3.2.9), (3.2.14) и (3.2.16), заданных на промежутке $[0, t_1]$, решается методом, указанным в конце §2.3 с применением функции $t_0(t)$ (см. (2.3.9)).

Таким образом, суммируя выше сказанное, мы доказали следующее утверждение

Теорема 3.2.1. *Пусть $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$, у которого строки и столбцы не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами, S – $n \times n$-матрица, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \le t \le T$; пусть $0 < t_1 < \cdots < t_N < T$; P_L и P_R – невырожденные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, приводящие пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т.е. к квазидиагональному виду), $L = P_L\tilde{L}P_R$ и $M = P_L\tilde{M}P_R$, $Q = P_L S$; пусть $\tilde{\zeta}_k(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ – случайные величины со значениями в R^n, такие, что компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$, соответствующие жордановым и сингулярным клеткам по главной диагонали в L, равны нулю; пусть $\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^N \tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t - t_k)$, где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных. Тогда: 1) уравнение* (3.2.1) *трансформируется к каноническому уравнению (3.2.3), которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистемы в R^{q+1}, соответствующей единичной матрице в L и $(q+1)\times(q+1)$-матрице K в M, имеет место аналитическая формула для решений вида*

$$\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{K(t-t_k)} Q\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_0^t e^{K(t-\tau)}v(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau),$$

где $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$, $v(t)$ – соответствующие компоненты векторов $Q\tilde{\zeta}_k(\omega))$, $P_L f(t)$, принадлежащие R^{q+1}; 3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1)\times(p+1)$ с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в M, при $0 < t < T$ имеют место рекуретные соотношения для вычисления решений вида

$$\varsigma^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$
$$\varsigma^{i}(t) = D_S^w \varsigma^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - u^i,$$

где $u(t)$ тоже соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$; 4) для подсистем, соответствующих сингулярным клеткам из $M+\lambda L$ размера $l\times(l+1)$, при $0<t<T$ имеют место рекурентные соотношения для вычисления решений вида

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1} - D_S^w w^i(t) - g^i(t),$$

где $1 \le i \le l$, $g(t)$ – соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$, η^{l+1} – произвольный случайный процесс на $[0,T]$, принимающий при $t=0$ нулевое значение и для которого при $0<t<T$ можно вычислить симметрическую производную порядка l; 5) для подсистем, соответствующих сингулярным клеткам из $M+\lambda L$ размера $(r+1)\times r$, при $0<t<T$ имеют место при выполнении условий согласования

$$\int_0^t z^{r+1}(s)ds + w^{r+1}(t) = -z^r(t) - \frac{dz^{r-1}(t)}{dt} - \ldots - \frac{d^{r-1}z^1(t)}{dt^{r-1}} -$$

$$-\frac{w^r(t)}{2t}+\frac{w^{r-1}(t)}{4t^2}-...-(-1)^{r-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{r-1}(2i-1)}{2^r}\frac{w^1(t)}{t^r}$$

рекурентные соотношения для вычисления решений вида

$$\theta^1(t)=-z^1(t)-D_S^w w^1=-z^1-\frac{w^1(t)}{2t},$$
$$\theta^i(t)=-z^i(t)+D_S^w\theta^{i-1}-D_S^w w^i(t),$$

где $z(t)$ *соответствующие компоненты вектора* $P_L f(t)$*; 6) зафиксировав сколь угодно малый момент времени* $t_0>0$*, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пунктах 3)-5) рекурентным соотношениям, заменяем* t *на* $t_0(t)$ *по формуле* (2.3.9) *и получаем процессы, которые при* $t=0$ *принимают нулевые значения, но становятся решениями только при* $t_0\le t<T$.

Глава IV.

Дифференциальные уравнения леонтьевского типа с матрицами, зависящими от времени

4.1. Случай с вещественно-аналитическими и с C^∞-гладкими квадратными матрицами

В этом параграфе рассматривается сначала дифференциальное уравнение леонтьевского типа со случайными возмущениями и с вещественно-аналитическими квадратными матрицами коэффициентов, зависящими от времени. Затем рассматривается система с C^∞-гладкими квадратными матрицами, зависящими от времени и удовлетворяющими критерию "ранг-степень".

Для дальнейшего нам понадобится вспомогательная теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс, $P(t)$ – достаточно гладкая $k \times n$-матрица, $t \in (0, T)$. Тогда для любого t имеет место формула $D_S^w \int_0^t P(s)dw(s) = P(t)\frac{w(t)}{2t}$.*

Доказывается Теорема 4.1.1 с применением Определения 1.1.1 производных в среднем, свойств интеграла Ито и Следствия 2.1.1.

Пусть у нас имеются вещественно-аналитические $n \times n$-матрицы $L(t)$ и $M(t)$, $t \in [0,T]$, причем $L(t)$ вырождена, а $M(t)$ – невырождена. Пусть старший коэффициент многочлена $\xi(t,\lambda) = det(\lambda L(t) + M(t))$ не обращается в нуль на $[0,T]$. Тогда, как известно (Теорема 1.2.6), существуют неособеные для любого $t \in [0,T]$ вещественно-аналитические $n \times n$-матрицы $P(t)$ и $Q(t)$, такие, что пучок $P(t)(\lambda L(t) + M(t))Q(t)$ имеет вид (1.2.3), т.е.

$$P(t)(\lambda L(t) + M(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix},$$

где $N(t)$ – верхнетреугольная матрица с нулевой диагональю, а именно

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & N^{d+1}_{d+2}(t) & N^{d+1}_{d+3}(t) & \cdots & N^{d+1}_{n}(t) \\ 0 & 0 & N^{d+2}_{d+3}(t) & \cdots & N^{d+2}_{n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N^{n-1}_{n}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$N^k(t) = 0$ на $[0,T]$, $J(t)$ некоторый $d \times d$-блок. В связи с этим мы рассматриваем дифференциальное уравнение леонтьевского типа со случайными возмущениями в R^n с вещественно-аналитическими матрицами $L(t)$ и $M(t)$, пучок которых уже приведен к каноническому виду (1.2.3).

Итак, с учетом выше сказанного, рассматривается специальная система в R^n вида

$$L(t)\eta(t) = \int_0^t M(s)\eta(s)ds + \int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s), \ \ 0 \le t \le T,$$

где $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс, $f(t)$ – достаточно гладкая функция. Понятно, что (для простоты) $\eta(0) = 0$. В матричных обозначениях система имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds + \\ + \int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s),$$

где, как нетрудно видеть, пучок матриц коэффициентов имеет вид (1.2.3).

Верхним парам блочных матриц соответствует система

$$\eta(t) = \int_0^t J(s)\eta(s)ds + \int_0^t P_1(s)f(s)ds + \int_0^t P_1(s)dw(s),$$

где $P_1(t)$ – матрица из первых d строк матрицы $P(t)$. Для систем такого вида известна аналитическая формула для решений (см., например, [33])

$$\eta(t) = \Theta(t) \int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)f(\tau)d\tau + \Theta(t) \int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)dw(\tau),$$

где матричная функция $\Theta(t)$ удовлетворяет задаче Коши $\dot{\Theta}(t) = J(t)\Theta(t)$, $\Theta(0) = E_d$.

Для нижних пар блочных матриц получаем систему вида

$$\begin{pmatrix} 0 & N^{d+1}_{d+2} & N^{d+1}_{d+3} & \cdots & N^{d+1}_{n} \\ 0 & 0 & N^{d+2}_{d+3} & \cdots & N^{d+2}_{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N^{n-1}_{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{d+1} \\ \eta^{d+2} \\ \vdots \\ \eta^{n-1} \\ \eta^{n} \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^{n}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} P^{d+1}_1(s) & P^{d+1}_2(s) & \cdots & P^{d+1}_n(s) \\ P^{d+2}_1(s) & P^{d+2}_2(s) & \cdots & P^{d+2}_n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{n}_1(s) & P^{n}_2(s) & \cdots & P^{n}_n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(s) \\ \vdots \\ f^{n-1}(s) \\ f^{n}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$
+\int_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{n}(s) & P_2^{n}(s) & \cdots & P_n^{n}(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix}. \qquad (4.1.1)
$$

Особенность подобных систем уравнений предполагает рассмотрения производных от их правых частей достаточно высоких порядков (включая винеровский процесс), которые, как известно, существуют только в терминах обобщенных функций. Поэтому, чтобы избежать использования аппарата обобщенных функций, мы для дифференцирования уравнений будем применять симметрические производные в среднем D_S^w (текущие скорости), а для вычисления симметрических производных в среднем от винеровского процесса будем пользоваться Леммами 2.1.3 и 2.1.4. Итак, получим формулы для решений 4.1.1 в терминах производных в среднем.

Применяя к обеим частям последнего уравнения системы производную D_S^w, при $0 < t < T$ с использованием Теоремы 4.1.1 получаем:

$$
\eta^n = -\sum_{j=1}^{n} P_j^n f^j - \sum_{j=1}^{n} P_j^n \frac{w^j}{2t},
$$

откуда

$$
D_S^w \eta_n = -\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} P_j^n f^j - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} P_j^n\right) \frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{n} P_j^n \frac{w^j}{4t^2}.
$$

Также из предпоследнего уравнения системы при $0 < t < T$ получаем

$$
\left(\frac{d}{dt} N_n^{n-1}\right) \eta_n + N_n^{n-1} D_S^w \eta_n = \eta^{n-1} + \sum_{j=1}^{n} P_j^{n-1} f^j + \sum_{j=1}^{n-1} P_j^n \frac{w^j}{2t},
$$

тогда при $0 < t < T$

$$
\eta^{n-1} = \left(\frac{d}{dt} N_n^{n-1}\right) \left(-\sum_{j=1}^{n} P_j^n f^j - \sum_{j=1}^{n} P_j^n \frac{w^j}{2t}\right) +
$$

$$+ N_n^{n-1}\left(-\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} P_j^n f^j - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}P_j^n\right)\frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{n} P_j^n \frac{w^j}{4t^2}\right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} P_j^{n-1} f^j - \sum_{j=1}^{n-1} P_j^n \frac{w^j}{2t}.$$

Аналогично, для $d+1 \le i \le n-1$ при $0 < t < T$ имеет место рекурентная формула

$$D_S \sum_{j=i+1}^{n} N_j^i \eta^j = \eta^i + \sum_{j=1}^{n} P_j^i f^j + \sum_{j=1}^{n} P_j^i \frac{w^j}{2t},$$

$$D_S^w \sum_{j=i+1}^{n} N_j^i \eta^j = \sum_{j=i+1}^{n}\left(\left(\frac{d}{dt}N_j^i\right)\eta^j + N_j^i D_S^w \eta^j\right).$$

Вопрос о нулевых начальных условиях для решений системы (4.1.1) решается с помощью приема, описанного в параграфе §2.3 с применением $t_0(t)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 4.1.2. *Пусть имеются вещественно-аналитические невырожденная $d \times d$-матрица $J(t)$, верхнетреугольная $(n-d)\times(n-d)$-матрица $N(t)$ с нулями по главной диагонали ($N^k(t) \equiv 0$ на $[0,T]$), невырожденная $n \times n$ – матрица $P(t)$, пусть $P_1(t)$ – матрица из первых d строк матрицы $P(t)$, E – единичная матрица и $t \in [0,T]$. Тогда: 1) для достаточно гладкой вектор функции $f(t)$ уравнение*

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds +$$

$$+ \int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s)$$

распадается на две независимые подсистемы; 2) для подсистемы, соответствующей матрицам E_d и J, имеет место аналитическая формула для решений

$$\eta(t) = \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)f(\tau)d\tau + \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)dw(\tau),$$

где матричная функция $\Theta(t)$ *удовлетворяет задаче Коши* $\dot{\Theta}(t) = J(t)\Theta(t)$, $\Theta(0) = E_d$*; 3) для подсистемы, соответствующей матрицам* $N(t)$ *и* E_{n-d}*, при* $0 < t < T$ *имеют место рекурентные формулы для вычисления решений*

$$\eta^n = -\sum_{j=1}^{n} P_j^n f^j - \sum_{j=1}^{n} P_j^n \frac{w^j}{2t},$$

$$D_S \sum_{j=i+1}^{n} N_j^i \eta^j = \eta^i + \sum_{j=1}^{n} P_j^i f^j + \sum_{j=1}^{n} P_j^i \frac{w^j}{2t};$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$*, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пункте 3) рекурентным соотношениям, заменяем* t *на* $t_0(t)$ *по формуле* (2.3.9) *и получаем процессы, удовлетворяющие нулевым начальным условиям, но являющиеся решениями только при* $t_0 \le t < T$*.*

Перейдем теперь к случаю с C^∞-гладкими матрицами. Пусть у нас есть C^∞-гладкие квадратные матрицы матрицы $L(t)$ и $M(t)$, причем $L(t)$ вырождена, а $M(t)$ – невырождена. Пусть многочлен $\xi(t, \lambda) = det(\lambda L(t) + M(t))$ удовлетворяет критерию "ранг-степень" для любого $t \in [0, T]$ и его старший коэффициент не имеет нулей на $[0, T]$. Тогда, как известно (Теорема 1.2.5), существуют неособенные для любого $t \in [0, T]$ C^∞-гладкие $(n \times n)$-матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ такие, что пучок $P(t)(\lambda L(t) + M(t))Q(t)$ имеет вид (1.2.2), т.е.

$$P(t)(\lambda L(t) + M(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}.$$

В связи с этим мы рассматриваем дифференциальное уравнение леонтьевского типа со случайными возмущениями в R^n с C^∞-гладкими матрицами $L(t)$ и $M(t)$, пучок которых уже приведен к каноническому виду (1.2.2).

Итак, рассмотрим уравнение леонтьевского типа в R^n, пучок матриц коэффициентов которого уже приведен к виду (1.2.2), т.е.

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds +$$
$$+ \int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s),\ 0 \le t \le T.$$

Очевидно, что верхним парам блочных матриц соответствует система того же вида, что и в первом случае. Для нижних пар блочных матриц получаем систему вида

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} ds = -$$
$$- \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(s) \\ \vdots \\ f^{n-1}(s) \\ f^n(s) \end{pmatrix} ds -$$
$$- \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix}.$$

Взяв симметрические производные в среднем (текущие скорости) D_S^w от обеих частей равенств этой системы, при $0 < t < T$ с использованием

Теоремы 4.1.1 получим следующие формулы для ее решений:

$$\begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^{n}(s) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} P_1^{d+1} & P_2^{d+1} & \cdots & P_n^{d+1} \\ P_1^{d+2} & P_2^{d+2} & \cdots & P_n^{d+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{n} & P_2^{n} & \cdots & P_n^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^{n-1} \\ f^n \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} P_1^{d+1} & P_2^{d+1} & \cdots & P_n^{d+1} \\ P_1^{d+2} & P_2^{d+2} & \cdots & P_n^{d+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{n} & P_2^{n} & \cdots & P_n^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w^1}{2t} \\ \vdots \\ \frac{w^{n-1}}{2t} \\ \frac{w^n}{2t} \end{pmatrix},$$

где проблема выполнения начальных условий $\eta(0) = 0$ решается тоже как и в параграфе §2.3 с использованием функции $t_0(t)$ (формула (2.3.9)).

Итак, справедлива

Теорема 4.1.3. *Пусть имеются невырожденные C^∞-гладкие $d \times d$-матрица $J(t)$, $n \times n$ – матрица $P(t)$, $n > d$, $t \in [0,T]$, пусть $P_1(t)$ – матрица из первых d строк матрицы $P(t)$, пусть E – единичная матрица и $t \in [0,T]$. Тогда: 1) для непрерывной вектор функции $f(t)$ уравнение*

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds +$$

$$+\int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s)$$

распадается на две независимые подсистемы; 2) для подсистемы, соответствующей матрицам E_d и J имеет место аналитическая формула для решений

$$\eta(t) = \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)f(\tau)d\tau + \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)dw(\tau),$$

где матричная функция $\Theta(t)$ удовлетворяет задаче Коши $\dot{\Theta}(t) = J(t)\Theta(t)$, $\Theta(0) = E_d$; 3) для подсистемы, соответствующей нулевой мат-

рице и матрице E_{n-d}, при $0 < t < T$ имеют место формулы для вычисления решений вида

$$\begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^{n}(s) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} P_1^{d+1} & P_2^{d+1} & \cdots & P_n^{d+1} \\ P_1^{d+2} & P_2^{d+2} & \cdots & P_n^{d+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{n} & P_2^{n} & \cdots & P_n^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^{n-1} \\ f^n \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} P_1^{d+1} & P_2^{d+1} & \cdots & P_n^{d+1} \\ P_1^{d+2} & P_2^{d+2} & \cdots & P_n^{d+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{n} & P_2^{n} & \cdots & P_n^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w^1}{2t} \\ \vdots \\ \frac{w^{n-1}}{2t} \\ \frac{w^n}{2t} \end{pmatrix};$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях полученных в пункте 3) процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \leq t < T$.

4.2. Случай с непрерывными матрицами

В этом параграфе проведем исследование дифференциального уравнения леонтьевского типа с прямоугольными матрицами коэффициентов, зависящими от времени. Здесь мы не требуем аналитичности или C^∞-гладкости матриц, но задаем сложные дополнительные условия. Предполагается, что начальные условия для рассматриваемого в этом параграфе уравнения являются решениями некоторой системы линейных алгебраических уравнений, матрица которой постоянна и имеет такой же размер, как и матрицы дифференциального уравнения. Мы модифицируем подход, описанный в работе Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова [1] при изучении соответствующих дифферециальных уравнений без случайных возмущений. Результатом параграфа являются утверждения, в которых для рассматриваемой системы с данными начальными условиями приведены достаточные условия существования решений, а так же приведены формулы для нахождения этих решений.

Рассматривается дифференциальное уравнение леонтьевского типа

$$dL(t)\xi(t) = M(t)\xi(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),\ S\xi(0) = a,\ 0 \le t \le T, \quad (4.2.1)$$

где $\xi(t) \in R^n$ – искомый случайный процесс, $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$ – вещественные непрерывные $m \times n$-матрицы, причем в случае с квадратными матрицами (когда $m = n$) $L(t)$ вырождена ($detL(t) \equiv 0$ на $[0, T]$), S – постоянная $m \times n$-матрица, $f(t) \in R^m$ – интегрируемая вектор-функция, $w(t) \in R^n$ – винеровский процесс, заданный на полном фильтрованном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P}\}$, подчиненный $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, $a \in R^m$ – постоянный вектор.

Определение 4.2.1. *[4] Решением задачи* (4.2.1) *называется случайный процесс $\xi(t) \in R^n$, неупреждающий относительно семейства σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T}$, который с вероятностью единица удовлетворяет* (4.2.1).

Как и в [1] введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$P_0 = E - L^+L,$$
$$P_1 = P_0(MP_0)^+MP_0,\ \ Q_1 = P_0(SP_0)^+SP_0,$$
$$P_2 = P_0 - P_1,\ \ Q_2 = P_0 - Q_1,$$
$$P_3 = P_2(SP_2)^+SP_2,\ \ Q_3 = Q_2(MQ_2)^+MQ_2,$$
$$P_4 = P_2 - P_3,\ \ Q_4 = Q_2 - Q_3.$$

Будем предполагать, что матрицы L^+, $(MP_0)^+$, $(SP_0)^+$, $(SP_2)^+$, $(MQ_2)^+$ непрерывны. Тогда согласно Лемме 1.2.1 матрица P_0 является проектором n-мерного евклидова пространства векторов на нуль пространства матрицы L, а P_2 и P_3 являются проекторами на пересечение ядер матриц L и M. Матрица P_4 является проектором на пересечение $kerL \cap kerM \cap kerS$. Так же матрицы Q_1, $Q_2 = P_0 - Q_1$ и $Q_3 = Q_2(MQ_2)^+MQ_2$, $Q_4 = Q_2 - Q_3$ являются проекторами на множества $kerL$, $kerL \cap kerS$, $kerL \cap kerM \cap kerS$ соответственно.

Используя введенные проекторы и свойства псевдообратных матриц, устанавливаем (см. [1]), что процесс $\xi(t)$ представляется в следующих двух видах:

$$\xi = L^+\eta + u_1 + v_1 + h_1, \tag{4.2.2}$$

$$\xi = L^+\eta + u_2 + v_2 + h_2, \tag{4.2.3}$$

где

$$\eta = L\xi, \tag{4.2.4}$$

$$u_1 = P_1\xi, \;\; v_1 = P_3\xi, \;\; h_1 = P_4\xi, \tag{4.2.5}$$

$$u_2 = Q_1\xi, \;\; v_2 = Q_3\xi, \;\; h_2 = Q_4\xi \tag{4.2.6}$$

и

$$u_1 \in kerL, \;\; v_1 \in kerL \cap kerM, \;\; u_2 \in kerL, \;\; v_2 \in kerL \cap kerS, \tag{4.2.7}$$

h_1 и h_2 принадлежат множеству $kerL \cap kerM \cap kerS$.

Так как подстановки векторов (4.2.2) и (4.2.3) в задачу (4.2.1) должны дать один результат, то потребуем (как и в [1]) одновременного выполнения равенств

$$Mv_2 = M(u_1 - u_2), \tag{4.2.8}$$

$$Sv_1 = S(u_2 - u_1). \tag{4.2.9}$$

Подставим вектор (4.2.2) в выражения для u_1 и v_1 из (4.2.5), тогда принимая во внимание (4.2.7) сначала получим (см. [1])

$$[E - P_0(MP_0)^+M]u_1 = 0. \tag{4.2.10}$$

Потом с учетом (4.2.9) и (4.2.10) будем иметь

$$v_1 = P_2(SP_2)^+S(u_2 - u_1). \qquad (4.2.11)$$

Точно также, подставляя вектор (4.2.3) в (4.2.6), придем к равенствам

$$[E - P_0(SP_0)^+S]u_2 = 0, \qquad (4.2.12)$$

$$v_2 = Q_2(MQ_2)^+M(u_1 - u_2). \qquad (4.2.13)$$

Поскольку должны выполняться равенства (4.2.8) и (4.2.9), из (4.2.11) и (4.2.13) следует (как и в [1]), что

$$[E - SP_2(SP_2)^+]S(u_1 - u_2) = 0, \qquad (4.2.14)$$

$$[E - MQ_2(MQ_2)^+]M(u_1 - u_2) = 0. \qquad (4.2.15)$$

Подстановка любого из равенств (4.2.2) и (4.2.3) в формулу (4.2.4) дает (см. [1])

$$(E - LL^+)\eta = 0. \qquad (4.2.16)$$

Подставляя вектор (4.2.2) в уравнение (4.2.1), а вектор (4.2.3) – в начальное условие для (4.2.1), получим

$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + M(t)u_1(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t), \qquad (4.2.17)$$

$$L^+(0)\eta(0) = a - Su_2(0). \qquad (4.2.18)$$

Итак, решение задачи (4.2.1) свелось к решению задачи (4.2.17) и (4.2.18) с условиями (4.2.10), (4.2.12), (4.2.14), (4.2.15), (4.2.16). Отметим, что если $u_1 \in kerM$, то согласно уравнению (4.2.10) верно равенство $u_1 = 0$. Аналогичным образом из равенства (4.2.12) следует, что в случае когда $u_2 \in kerS$ имеем $u_2 = 0$.

Систему уравнений (4.2.10), (4.2.12), (4.2.14), (4.2.15) относительно векторов u_1 и u_2 можно разрешить явно. Для этого, вводя обозначение

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, запишем ее в виде двух равносильных систем (см. [1])

$$\begin{pmatrix} E - P_0(MP_0)^+M & 0 \\ 0 & E - P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix} u = 0, \tag{4.2.19}$$

$$\begin{pmatrix} E - SP_2(SP_2)^+ & 0 \\ 0 & E - MQ_2(MQ_2)^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & -S \\ M & -M \end{pmatrix} u = 0. \tag{4.2.20}$$

Общее решение системы (4.2.19) находится по формуле

$$u = \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \\ 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix} p, \tag{4.2.21}$$

где $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ – произвольный вектор. Эта формула выводится с применением того, что матрицы $P_0(MP_0)^+M$, $P_0(SP_0)^+S$ являются проекторами. Поскольку системы (4.2.19) и (4.2.20) эквивалентны, то подставляя решение первой (4.2.21) в (4.2.20), получаем условие, которому должно удовлетворять p

$$\Xi p = 0, \tag{4.2.22}$$

где

$$\Xi = \begin{pmatrix} E - SP_2(SP_2)^+ & 0 \\ 0 & E - MQ_2(MQ_2)^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & -S \\ M & -M \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \\ 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix}.$$

Равенству (4.2.22) удовлетворяют такие p:

$$p = (E - \Xi^+\Xi)r, \tag{4.2.23}$$

где $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ – произвольный вектор.

Наконец, подставив (4.2.23) в (4.2.21), получим общую формулу для решения системы (4.2.19), (4.2.20) (см. [1]), а именно: $u = \Phi r$, где

$$\Phi = \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \\ 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix} (E - \Xi^+\Xi)$$

и r является произвольным вектором. Причем компоненты вектора u вычисляются по формулам:

$$u_1 = \Phi_1 r, \;\; u_2 = \Phi_2 r, \tag{4.2.24}$$

где

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \end{pmatrix} (E - \Xi^+\Xi),$$
$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix} (E - \Xi^+\Xi).$$

Формулы (4.2.11) и (4.2.13) для вычисления векторов v_1 и v_2 теперь таковы:

$$v_1 = P_2(SP_2)^+S(\Phi_2 - \Phi_1)r, \tag{4.2.25}$$

$$v_2 = Q_2(MQ_2)^+M(\Phi_1 - \Phi_2)r. \tag{4.2.26}$$

Подставим векторы (4.2.24) в уравнения (4.2.17), (4.2.18), тогда

$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t), \tag{4.2.27}$$

$$L^+(0)\eta(0) = a - S\Phi_2(0)r(0). \tag{4.2.28}$$

Теперь будем пользоваться тем что любое решение уравнения (4.2.27) удовлетворяет соотношению (см. [20], [33])

$$\eta(t) = X(t)\eta(0) + \theta(t), \tag{4.2.29}$$

где матрица $X(t)$ и вектор $\theta(t)$ являются решениями соответственно следующих задач Коши:

$$\frac{dX(t)}{dt} = M(t)L^+(t)X(t), \;\; X(0) = E,$$

$$d\theta(t) = M(t)L^+(t)\theta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),$$
$$\theta(0) = 0.$$

Для решения задачи относительно $\theta(t)$ имеет место формула (см. [20], [33])

$$\theta(t) = X(t)\chi(t),$$

где

$$\chi(t) = \int_0^t X^{-1}(s)[M(s)\Phi_1(s)r(s) + f(s)]ds + \int_0^t X^{-1}(s)N(s)dw(s)$$

поэтому равенство (4.2.29) переписывается так

$$\eta(t) = X(t)\eta(0) + X(t)\chi(t). \tag{4.2.30}$$

Подставив (4.2.30) в условия (4.2.16), (4.2.28), будем иметь

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)\eta(0) = -[E - L(t)L^+(t)]X(t)\chi(t),$$
$$0 \le t \le T, \tag{4.2.31}$$
$$\Lambda\eta(0) = a - S\Phi_2(0)r(0), \tag{4.2.32}$$

где

$$\Lambda = SL^+(0)X(0).$$

Воспользуемся (как и в [1]) следующими леммами из теории алгебраических систем.

Лемма 4.2.1. *[2] Пусть матрица $A(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ и*

$$G = \int_0^T A^*(s)A(s)ds. \tag{4.2.33}$$

Тогда любое решение c системы

$$Gc = 0 \tag{4.2.34}$$

есть постоянное решение системы

$$A(t)c = 0, \ \ 0 \leq t \leq T \tag{4.2.35}$$

с матрицей $A(t)$. Обратно, любое постоянное решение системы (4.2.35) *является решением системы* (4.2.34).

Лемма 4.2.2. *[3] Пусть в системе уравнений*

$$A(t)y = B(t), \ \ 0 \leq t \leq T \tag{4.2.36}$$

матрицы $A(t)$ и $B(t)$ непрерывны. Тогда система (4.2.36) *имеет постоянное (не зависящее от $t \in [0, T]$) решение y тогда и только тогда, когда при всех $t \in [0, T]$ имеет место равенство*

$$A(t)G^{+} \int_0^T A^{*}(s)B(s)ds = B(t) \tag{4.2.37}$$

(G является матрицей (4.2.33)*).*

Лемма 4.2.3. *[30] Если выполнены условия леммы 4.2.2 и верно равенство* (4.2.37)*, то общее решение системы* (4.2.36) *имеет вид*

$$y = G^{+} \int_0^T A^{*}(s)B(s)ds + (E - G^{+}G)c, \tag{4.2.38}$$

где c есть произвольный вектор.

Следствие 4.2.1. *[1] (из леммы 4.2.2). Если система* (4.2.36) *имеет не зависящее от t решение y, то выполненяется равенство*

$$(E - GG^{+}) \int_0^T A^{*}(s)B(s)ds = 0.$$

Будем теперь применять сформулированные леммы к уравнению (4.2.31). У нас

$$A(t) = [E - L(t)L^{+}(t)]X(t),$$

$$B(t) = -A(t)\chi(t)$$

и, так как матрица $E - L(t)L^+(t)$ является самосопряженным проектором, имеет место равенство

$$A^*(t)A(t) = X^*(t)[E - L(t)L^+(t)]X(t).$$

Следовательно,

$$G = \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)ds,$$

$$\int_0^T A^*(s)B(s) = \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)\chi(s)ds,$$

тогда по формуле (4.2.38) получаем

$$\eta(0) = -G^+ \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)\chi(s)ds + (E - G^+G)c, \quad (4.2.39)$$

где c является произвольным вектором. При этом согласно Лемме 4.2.2 должно выполняться условие разрешимости (4.2.31) относительно $\eta(0)$

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)G^+ \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)\chi(s)ds =$$
$$= [E - LL^+]X(t)\chi(t), \ \ 0 \le t \le T. \quad (4.2.40)$$

Подставив вектор (4.2.39) в уравнение (4.2.32), получим уравнение для нахождения вектора c:

$$(\Lambda - \Lambda G^+G)c = a - S\Phi_2(0)r(0)+$$
$$+\Lambda G^+ \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)\chi(s)ds. \quad (4.2.41)$$

Решение уравнения (4.2.41) с использованием Теоремы 1.2.4 записывается следующим образом:

$$c = (\Lambda - \Lambda G^+G)^+\{a - S\Phi_2(0)r(0)+$$
$$+\Lambda G^+ \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)\chi(s)ds\}+$$
$$+[E - (\Lambda - \Lambda G^+G)^+(\Lambda - \Lambda G^+G)]\beta, \quad (4.2.42)$$

где β – произвольный вектор. Формула (4.2.42) согласно Теореме 1.2.3 имеет место при выполнении условия совместности на систему (4.2.41)

$$[E-(\Lambda-\Lambda G^{+}G)(\Lambda-\Lambda G^{+}G)^{+}]\{a-S\Phi_2(0)r(0)+$$
$$+\Lambda G^{+}\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^{+}(s)]X(s)\chi(s)ds\}=0. \qquad (4.2.43)$$

Совершая подстановку (4.2.42) в (4.2.39), приходим к последнему выражению для вектора $\eta(0)$, а именно:

$$\eta(0)=-[E-(E-G^{+}G)(\Lambda-\Lambda G^{+}G)^{+}\Lambda]G^{+}\int_0^T X^*(s)[E-$$
$$-L(s)L^{+}(s)]X(s)\chi(s)ds+(E-G^{+}G)(\Lambda-\Lambda G^{+}G)^{+}\cdot$$
$$\cdot\{a-S\Phi_2(0)r(0)\}+$$
$$+(E-G^{+}G)[E-(\Lambda-\Lambda G^{+}G)^{+}(\Lambda-\Lambda G^{+}G)]\beta, \qquad (4.2.44)$$

где β – произвольный вектор.

Как нетрудно увидеть, условия разрешимости (4.2.40), (4.2.43) представляют собой систему интегральных уравнений относительно вектора $r(t)$, так как вектор $\chi(t)$, входящий в эту систему, связан с $r(t)$ интегральной формулой

$$\chi(t)=\int_0^t X^{-1}(s)[M(s)\Phi_1(s)r(s)+f(s)]ds+\int_0^t X^{-1}(s)N(s)dw(s). \quad (4.2.45)$$

Итак, установлено, что общее решение задачи (4.2.1) выписывается в двух видах: (4.2.2) и (4.2.3), где векторы u_1, u_2, v_1, v_2 вычисляются по формулам (4.2.24), (4.2.25), (4.2.26). Вектор $r(t)$ есть произвольное решение интегральной системы (4.2.40), (4.2.43), (4.2.45), вектор $\eta(t)$ является решением уравнения (4.2.27) с начальным условием (4.2.44). Так как векторы $h_1(t)$ и $h_2(t)$ принадлежат пересечению $kerL\cap kerM\cap kerS$, то для их вычисления справедливы формулы

$$h_1(t)=P_4\gamma(t),\;\; h_2(t)=Q_4\gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ произвольный непрерывный вектор, определенный на отрезке $[0, T]$.

В работах [3, 30] установлено, что матрица, которая действует на вектор β в формуле (4.2.44), является проектором на множество $kerG \cap ker\Lambda$. Тогда третье слагаемое в правой части равенства (4.2.44) (которое обозначим через α) есть произвольное решение системы

$$\Lambda\alpha = 0, \ \ G\alpha = 0. \tag{4.2.46}$$

Основная проблема при решении задачи (4.2.1) состоит в решении интегральной системы (4.2.40), (4.2.43), (4.2.45), которой удовлетворяет вектор $r(t)$.

Получим условия разрешимости и формулы для решения задачи (4.2.1).

Задачу (4.2.1) будем рассматривать (как и в [1]) для таких матриц $L(t)$, $M(t)$ и S, для которых выполняются тождества

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)X^{-1}(s)M(s)\Phi_1(s) = 0,$$
$$[E - (\Lambda - \Lambda G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+]S\Phi_2(t) = 0,$$
$$t, s \in [0, T].$$

Тогда для задачи (4.2.1) выполняются условия совместности

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$
$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(t)L^+(t)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\} =$$
$$= [E - L(t)L^+(t)]\{z(t) + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N(s)dw(s)\},$$
$$[E - (\Lambda - \Lambda G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+]\{a+$$
$$+\Lambda G^+[\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$

$$+\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds]\} = 0,$$

где $z(s)$ является решением следующей задачи Коши:

$$dz(t) = M(t)L^+(t)z(t)dt + f(t)dt,$$
$$z(0) = 0.$$

Таким образом, ссылаясь на выше сказанное, получаем следующие теоремы.

Теорема 4.2.1. *Пусть в задаче* (4.2.1) *для матриц* $L(t)$, $M(t)$, S *выполняются тождества*

$$[E-L(t)L^+(t)]X(t)X^{-1}(s)M(s)\Phi_1(s) = 0, \tag{4.2.47}$$

$$[E-(\Lambda-\Lambda G^+G)(\Lambda-\Lambda G^+G)^+]S\Phi_2(t) = 0, \;\; t, s \in [0, T]. \tag{4.2.48}$$

Тогда для того, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно выполнения условий

$$[E-L(t)L^+(t)]X(t)G^+\{\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$
$$+\int_0^T X^*(s)[E-L(t)L^+(t)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\} =$$
$$= [E-L(t)L^+(t)]\{z(t)+X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N(s)dw(s)\}, \tag{4.2.49}$$

$$[E-(\Lambda-\Lambda G^+G)(\Lambda-\Lambda G^+G)^+]\{a+$$
$$+\Lambda G^+[\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$
$$+\int_0^T X^*(s)[E-L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds]\} =$$
$$= 0, \tag{4.2.50}$$

где $z(s)$ *является решением следующей задачи Коши:*

$$dz(t) = M(t)L^+(t)z(t)dt + f(t)dt, \;\; z(0) = 0.$$

Теорема 4.2.2. *Если матрицы $L(t)$, $M(t)$, S в задаче (4.2.1) удовлетворяют равенствам (4.2.47), (4.2.48) и задача имеет решение, то ее общее решение записывается двумя способами:*

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_1(t)r(t) + P_4(t)r_0(t),$$
$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_2(t)r(t) + Q_4(t)r_0(t),$$

где матрицы $H_1(t)$, $H_2(t)$ вычисляются по формулам

$$H_1 = [E - P_2(SP_2)^+S]\Phi_1 + P_2(SP_2)^+S\Phi_2,$$
$$H_2 = [E - Q_2(MQ_2)^+M]\Phi_2 + Q_2(MQ_2)^+M\Phi_1,$$

$r(t)$, $r_0(t)$ *– произвольные непрерывные векторы, а $\eta(t)$ является решением уравнения Ито*

$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t)$$

с начальным условием

$$\eta(0) = -[E - (E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+\Lambda]\cdot$$
$$\cdot G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]\theta(s)ds +$$
$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\}+$$
$$+(E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+\cdot\{a - S\Phi_2(0)r(0)\} + \alpha,$$

где α является решением системы $\Lambda\alpha = 0, G\alpha = 0$, а вектор $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$d\theta(t) = M(t)L^+(t)\theta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt, \;\; \theta(0) = 0.$$

Теорема 4.2.3. *Решение задачи* (4.2.1) *(если оно существует) единственно тогда и только тогда, когда система* $\Lambda\alpha = 0, G\alpha = 0$ *имеет лишь нулевое решение* $\alpha = 0$ *и верны равенства*

$$P_4(t) = Q_4(t) = 0, \;\; 0 \le t \le T,$$
$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = 0, \;\; 0 \le t \le T. \qquad (4.2.51)$$

Теорема 4.2.4. *Пусть в задаче* (4.2.1)*, выполняются условия совместности* (4.2.49), (4.2.50) *и имеют место равенства* (4.2.51)*. Тогда существуют решения задачи* (4.2.1)*, а общее решение имеет вид*

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + h(t), 0 \le t \le T,$$

где $h(t)$ *– произвольный непрерывный вектор, удовлетворяющий системе*

$$L(t)h(t) = 0, \;\; M(t)h(t) = 0, \;\; Sh(t) = 0, \qquad (4.2.52)$$

а вектор $\eta(t)$ *получается из системы следующих двух уравнений:*

$$dz(t) = M(t)L^+(t)z(t)dt + f(t)dt, \;\; z(0) = 0,$$
$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),$$
$$\eta(0) = -[E - (E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+\Lambda]\cdot$$
$$\cdot G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$
$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\}+$$
$$+(E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+a + \alpha, \qquad (4.2.53)$$

где α *– произвольное решение системы*

$$\Lambda\alpha = 0, \;\; G\alpha = 0. \qquad (4.2.54)$$

Замечание 4.2.1. *Если системы* (4.2.52), (4.2.54) *имеют только нулевое решение, то при данных условиях теоремы 4.2.4 решение задачи* (4.2.1) *единственно и оно выписывается формулой*

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t).$$

При этом в равенстве (4.2.53) *нужно положить* $\alpha = 0$.

Имеет место следствие из Теоремы 4.2.4:

Следствие 4.2.2. *Пусть в задаче* (4.2.1), $S = 0$, $a = 0$, *а матрицы* $L(t)$, $M(t)$ *и вектор* $f(t)$ *удовлетворяют условию* (4.2.49). *Тогда если столбцы матрицы* $L(t)$ *линейно-независимы, то задача* (4.2.1) *разрешима, а ее общее решение имеет вид*

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t), \;\; 0 \le t \le T,$$

а вектор $\eta(t)$ *является решением следующей задачи Коши:*

$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),$$

$$\eta(0) = -G^+ \cdot \{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]z(s)ds +$$

$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\} + \alpha.$$

Здесь α *– произвольное решение уравнения* $G\alpha = 0$.

Если в задаче (4.2.1), матрицы L, M и N – постоянные, а $S = 0$ и $a = 0$, то применяя к ней (как и в работе [25]) теоремы 1.2.3 и 1.2.4, получим следующую теорему о разрешимости:

Теорема 4.2.5. *Пусть в задаче* (4.2.1) *матрицы* L, M *и* N *– постоянные,* $S = 0$ *и* $a = 0$ *и выполняются условия*

$$(E - LL^+)M, \;\; (E - LL^+)f(t), \;\; (E - LL^+)N.$$

Тогда (4.2.1) *имеет решение вида*

$$\xi(t) = Y(t)\xi(0) + Y(t)\int_0^t Y^{-1}(s)L^+f(s)ds + +Y(t)\int_0^t Y^{-1}(s)L^+Ndw(s),$$

где $Y(t)$ – нормальная фундаментальная матрица системы

$$dY(t) = L^+ MY(t)dt, \;\; Y(0) = E.$$

Глава V.

Дифференциальные уравнения леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения

5.1. Основная конструкция

Как сказано выше, текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов. Это означает, что уравнения с текущими скоростями, по видимому, являются наиболее естественными с физической точки зрения.

Пусть заданы измеримые по Борелю отображения $v(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ из $[0,T]\times R^n$ в R^n и в $\bar{S}_+(n)$, соответственно, где $\bar{S}_+(n)$ – множество симметрических неотрицательно-определенная матричных функций на $[0,T]\times R^n$.

Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{5.1.1}$$

называется дифференциальным уравнением первого порядка с текущими скоростями (см., например, [34]).

Определение 5.1.1. *[34] Говорят, что* (5.1.1) *имеет решение на* *отрезке* $[0,T]$ *с начальным условием* $\xi(0)=\xi_0$, *если существует вероятностное пространство* $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ *и процесс* $\xi(t)$, *заданный на* $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, *существующий при* $t\in[0,T]$ *и принимающий значения в* R^n *такие, что для* $\xi(t)$ *P-п. н.* (5.1.1) *выполняется при всех* $t\in[0,T]$.

Пусть $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ – вырожденная и невырожденная соответственно $n\times n$-матрицы, такие, что пучок $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ является регулярным. Всюду ниже мы предполагаем, что этот пучок удовлетворяет критерию "ранг-степень", т.е. $rank\tilde{L}=deg[det(\lambda\tilde{L}+\tilde{M})]$. Тогда согласно Теореме 1.2.1 существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $L=P\tilde{L}Q=\begin{pmatrix} E_d & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ и $M=P\tilde{M}Q=\begin{pmatrix} J & 0\\ 0 & E_{n-d}\end{pmatrix}$. Отметим, что поскольку M невырождена, то и J также невырождена.

Введем матрицу $\bar{L}=QLQ^*$. Для C^∞-гладкой n-мерной вектор-функции $\tilde{f}(t)$ рассмотрим систему в R^n

$$\begin{cases}\tilde{L}D_S\xi(t)=\tilde{M}\xi(t)+\tilde{f}(t),\\ D_2\xi(t)=\bar{L},\end{cases} \tag{5.1.2}$$

которую будем называть *дифференциальным уравнением леонтьевского типа в текущих скоростях.* Адекватные начальные условия для решений уравнения (5.1.2) будут описаны ниже. Отметим, что и матрица L, и матрица $\bar{L}$ по построению симметричны и неотрицательно определены. Поэтому вторая строка в (5.1.2) корректна.

Обозначим $\eta(t)=Q^{-1}\xi(t)$, $f(t)=P\tilde{f}(t)$. Тогда согласно преобразованию, описанному в Теореме 1.2.1, первое равенство из (5.1.2) примет вид $LD_S\eta(t)=M\eta(t)+f(t)$. Принимая во внимание равенство $\eta(t)=Q^{-1}\xi(t)$ и определение D_2 по формуле (1.1.) получаем, что второе равенство для $\eta(t)$ из (5.1.2) принимает вид $D_2\eta(t)=L$. Таким образом, уравнение (5.1.2) преобразуется в уравнение для $\eta(t)$ и принимает следующий канонический вид:

$$\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = L \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Таким образом, R^n разлагается в прямую сумму двух подпространств R^d и R^{n-d} так, что уравнение (5.1.3) разлагается на два независимых уравнения в этих подпространствах:

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = J\eta^{(1)}(t) + f^{(1)}(t), \\ D_2\eta^{(1)} = I_d \end{cases} \tag{5.1.4}$$

в подпространстве R^d и

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t) + f^{(2)}(t) = 0, \\ D_2\eta^{(2)} = 0 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

в подпространстве R^{n-d}.

Из второго равенства (5.1.5) следует, что решение уравнения (5.1.5) не является стохастическим, тогда из первого равенства следует, что решение уравнения (5.1.5) имеет вид $\eta^{(2)}(t) = -f^{(2)}(t)$. Очевидно, что начальные условия в этом случае предполагаются вида $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$.

Для простоты обозначим C^∞-гладкое векторное поле $Jx + f^{(1)}(t)$ в R^d символом $v(t,x)$ и обозначим через g_t поток этого векторного поля. Из второго равенства (5.1.4) следует, что решение, если оно существует, должно представляться в виде (1.1.1). Введем вероятностную плотность ρ_0 в R^d такую, что она нигде не равна нулю. В этом случае из Теоремы 8.50 из монографии [34] следует, что плотность $\rho(t)$ решения (5.1.4) с начальной плотностью ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$, где $p(t,x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int_0^t (div\ \ v)(s, g_s(g_{-t}(x))ds,\ \ p_0 = \ln \rho_0$. Следовательно, плотность

$\rho(t)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с векторным полем $v(t,x)$.

Подчеркнем, что $\rho(t,x)$ корректно определено для всех $t \in [0,T]$. Обозначим через $\eta_0^{(1)}$ случайную величину в R^d с плотностью ρ_0.

По построению $D_S\eta^{(1)}(t) = v(t,\eta^{(1)}(t))$. По Лемме 1.1.1 осмотическая скорость решения стохастического дифференциального уравнения (1.1.1) с единичной диффузией имеет вид $u = \frac{1}{2} grad\, p = grad \ln\sqrt{\rho}$. Отметим, что u однозначно определяется плотностью ρ и, следовательно, производная в среднем справа для решения также однозначно определяется формулой $a(t,x) = v(t,x) + u(t,x)$. Тогда из общей теории уравнений с производными в среднем справа (см. Теоремы (1.1.1) и (1.1.2), а также [34]) следует, что $\eta^{(1)}(t)$ должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению

$$\eta^{(1)}(t) = \eta_0^{(1)} + \int_0^t a(s,\eta^{(1)}(s))ds + w(t), \tag{5.1.6}$$

которое имеет сильное и сильно единственное решение $\eta^{(1)}(t)$ с начальной плотностью ρ_0, которое корректно определено для $t \in [0,T]$ (см. [33]). Это и есть решение уравнения (5.1.4) в виде (1.1.1), которое мы ищем.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема 5.1.1. *Пусть $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ – вырожденная ($d = rank\tilde{L}$) и невырожденная соответственно $n \times n$-матрицы, образующие регулярный пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ и выполняется критерий "ранг-степень" $rank\tilde{L} = deg[det(\lambda\tilde{L}+\tilde{M})]$; пусть P и Q – $n\times n$-матрицы, приводящие пучок $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса, $L = P\tilde{L}Q$ и $M = P\tilde{M}Q$; пусть $\bar{L} = QLQ^*$ и $t \in [0,T]$. Тогда для C^∞-гладкой n-мерной вектор-функции $\tilde{f}(t)$ уравнение* $\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{L}, \end{cases}$ *преобразованное к*

$$\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = L, \end{cases}$$ *где* $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$*,* $f(t) = P\tilde{f}(t)$*, с начальными условиями* $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$ *в* R^{n-d} *и случайной величиной с плотностью* ρ_0 *нигде не равной нулю в* R^d*, имеет решение.*

5.2. Одно обобщение

Рассмотрим некоторую симметрическую положительно определенную матрицу Ξ в R^d. Для матрицы Ξ существует (см. Лемму (1.1.3)) невырожденная матрица A в R^d, такая, что $\Xi = AA^*$, где матрица A^* является сопряженной к A. Введем в R^n матрицы $\Theta = \begin{pmatrix} \Xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{\Theta} = Q\Theta Q^*$. Тогда мы будем иметь дело с уравнением

$$\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{\Theta}, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

в котором $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ такие как и в уравнении (5.1.2). Таким же образом, как (5.1.2) преобразуется в (5.1.3), с применением P и Q преобразуем (5.2.1) в уравнение

$$\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = \Theta. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Отметим, что поскольку по построению матрицы $\bar{\Theta}$ и Θ симметричны и положительно определены, уравнения (5.2.1) и (5.2.2) корректны.

Так же как и выше, (5.2.2) распадается на два независимых уравнения

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = J\eta^{(1)}(t) + f^{(1)}(t), \\ D_2\eta^{(1)} = \Xi \end{cases} \tag{5.2.3}$$

в подпространстве R^d и

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t) + f^{(2)}(t) = 0, \\ D_2\eta^{(2)} = 0 \end{cases} \tag{5.2.4}$$

в подпространстве R^{n-d}. Заметим, что (5.2.4) совпадает с (5.1.5), поэтому его изучение проводится тоже как и (5.1.5).

Отметим, что если решение (5.2.3) существует, то оно должно представляться в виде (1.1.4).

Для исследования (5.2.3) введем в R^d новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, которое для произвольных векторов X и Y из R^d принимает вид $\langle X, Y\rangle = (\Xi^{-1}X, Y)$. Введем начальное вероятностное распределение ρ_0 в R^d такое, что оно нигде не равно нулю, через $\eta_0^{(1)}$ обозначим случайную величину в R^d с плотностью ρ_0. Рассмотрим векторное поле $v(t,x) = Jx + f^{(1)}(t)$ и обозначим через g_t его поток. Тогда из Теоремы 8.50 из [34] следует, что плотность $\rho(t)$ решения (5.2.3) с начальной плотностью ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$, где $p(t,x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int_0^t (Div\ \ v)(s, g_s(g_{-t}(x))ds$, $\ p_0 = \ln\rho_0$ и Div обозначает дивергенцию в R^d со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Отсюда, для заданной матрицы Ξ и начальной плотности ρ_0 построенная плотность $\rho(t)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с гладким векторным полем $v(t,x)$. Тогда после нахождения плотности $\rho(t)$ для решения уравнения (5.2.3) мы можем вычислить также осмотическую скорость $u(t,x)$ по формуле $u = \frac{1}{2} Grad\, p$, где $Grad$ – градиент относительно нового скалярного произведения [31], [34]. Заметим, что u однозначно определяется плотностью ρ и матрицей Ξ и, стало быть, производная в среднем справа для решения также однозначно вычисляется по формуле $a(t,x) = v(t,x) + \frac{1}{2} Grad\, p$. Следовательно, по теории уравнений с производными в среднем справа (см. Теоремы (1.1.1) и (1.1.2), а также [34]) $\eta^{(1)}(t)$, как и выше, должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению $\eta^{(1)}(t) = \eta_0^{(1)} + \int_0^t a(s, \eta^{(1)}(s))ds + Aw(t)$ (аналог (5.1.6)), которое имеет сильное и сильно единственное решение $\eta^{(1)}(t)$ с начальной плотностью ρ_0, корректно определенное для $t \in [0, T]$ (см. [33]). А это и есть решение уравнения (5.2.3) в виде (1.1.4), которое мы ищем.

Таким образом, мы доказали

Теорема 5.2.1. *Пусть $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ – вырожденная ($d = rank\tilde{L}$) и невырожденная соответственно $n \times n$-матрицы, образующие регулярный пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ и выполняется критерий "ранг-степень" $rank\tilde{L} = deg[det(\lambda\tilde{L} + \tilde{M})]$; пусть P и Q – $n \times n$-матрицы, преобразующие пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса, $L = P\tilde{L}Q$ и $M = P\tilde{M}Q$; пусть Ξ – симметрическая положительно определенная матрица в R^d, $\Theta = \begin{pmatrix} \Xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\Theta} = Q\Theta Q^*$ и $t \in [0, T]$. Тогда для C^∞-гладкой n-мерной вектор-функции $\tilde{f}(t)$ уравнение $\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{\Theta}, \end{cases}$ преобразованное к $\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = \Theta, \end{cases}$ где $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$, $f(t) = P\tilde{f}(t)$, с начальными условиями $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$ в R^{n-d} и случайной величиной с плотностью ρ_0 нигде не равной нулю в R^d, имеет решение.*

Литература

Список использованных источников

[1] Бояринцев Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.

[2] Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 222 с.

[3] Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 158 с.

[4] Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2005. – 408 с.

[5] Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями / Л. А. Власенко // Днепропетровск: Системные технологии, 2006, 273 с.

[6] Власенко Л. А. Математические модели динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Экономическая кибернетика. - 2009.- №5-6 (59-60).- С. 64-71.

[7] Власенко Л. А. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Экономическая кибернетика.- 2011. №1-3 (67-69). С. 4-9

[8] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер.-М.: Физматлит, 1967.–575 с.

[9] Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход.-М.: Наука, 1977.–567 с.

[10] Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю. Е. Гликлих.-М.:Комкнига, 2005 - 416 с.

[11] Гликлих Ю. Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю. Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование.- 2012.- №27(286), вып.13.- С. 24-34

[12] Демиденко Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский // Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научн. книга, 1998.

[13] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель.- М.: Мир – 2001. – 435 с.

[14] Келлер А.В. Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера-Сидорова для систем леонтьевского типа / Келлер А.В. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2009. № 26 (159). С. 82-86.

[15] Келлер А. В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоуолтера-Сидорова и численные решения / А. В. Келлер // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2010. – Том 3, выпуск 2. – С. 30-43

[16] Келлер А.В. Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа / А. В. Келлер, М. А. Сагадеева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2013. Т. 32. № 19 (162). С. 57-66.

[17] Келлер А. В. Методика построения динамической и статистической балансовых моделей на уровне предприятия / А. В. Келлер, Т. А. Шишкина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. 2013. Т. 7. № 3. С. 6-11.

[18] Келлер А. В. О вырожденной дискретной балансовой динамической модели клеточного цикла / А. В. Келлер, С. И. Эбель // В сборнике: Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию сборник трудов всероссийской научно-практической конференции. Ответственный редактор Ю.М. Ковалев. Челябинск, 2014. С. 74-79.

[19] Леонтьев В. В. Межотраслевая экономика / В. В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997. – 324 с.

[20] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. – М.: Мир, 2003. – 408 с.

[21] Партасарати К. Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Р. Партасарати.- М.: Мир, 1988.- 343 с.

[22] Руткас А. Г. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – №1(111). – С.135-145.

[23] Свиридюк Г. А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г. А. Свиридюк, С. В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – №8. – С. 46-52.

[24] Чистяков В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.

[25] Чуйко С. М. Линейные Нетеровы Краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем / С. М. Чуйко. – Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т.5 №5. – С. 769-783.

[26] Шестаков А. Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2010. – №16(192). – С. 116-120.

[27] Шестаков А. Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2011. – №17(234). – С. 70 - 75.

[28] Филипковская М. С. Об условиях глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2014". Воронеж,

26-31 января 2014 г. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" 2014, С. 362-372.

[29] Alabert A. Linear stochastic differential algebraic equations with constant coefficients / A. Alabert, M. Ferrante // Electr. Comm. in Probability. – 2006. – 11. – P.316-335.

[30] Boyarintsev Yu. E. Methods of Solving Singular Sustems of Ordinary Differential Equations / Yu. E. Boyarintsev. – Chichester; New York; Brisbane; Toronto; Singapore: John and Sons, 1992. – 163 p.

[31] Cresson, J. Stochastic Embedding of Dynamical Sustems / J. Cresson, S. Darses // J. of Mathematical Physics.-2007.-V.48.-P. 072703-1–072303-54. [DOI: 10.1063/1.2736519].

[32] Campbell S. L. Singular Sustems of differential equations / S. L. Campbell. – San Francisco – London – Melborne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.

[33] Gihman I. I. Theory of stochastic processes / I. I. Gihman, A. V. Scorohod // Vol. 3. New York (NY): Springer-Verlag; 1979.

[34] Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics /Yu. E. Gliklikh.-London: Springer-Verlag, 2011.-460 p.

[35] Kroneker L. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen / L. Kroneker // Akad. der Wiss. Berlin 27. Nov. 1890, Werke Vol. 3, P. 141-155.

[36] Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews, 1966.- Vol. 150, No. 4.- P. 1079 – 1085

[37] Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson.- Princeton: Princeton University Press, 1967.- 142 p.

[38] Nelson E. Quantum fluctuations / E. Nelson.- Princeton: Princeton University Press, 1985.- 147 p.

[39] Schein O. Numerical solution of stochastic differential-algebraic equations with applications to transient noise simulation of microelectronic circuits / O. Schein, G. Denk // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 100, No. 1, P. 77-92, Nov. 1998.

[40] Shestakov A. L. On the measurement of the «white noise» / A. L. Shestakov, G. A. Sviridyuk // Vestnik of South Ural State University.- 2012.- Issue №27(286).- P. 99-108.

[41] Shestakov A.L. The theory of optimal measurements / A. L. Shestakov, A. V. Keller, G. A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2014. T. 1. № 1. P. 3-16.

[42] Sickenberger T. Stochastic oscillations in circuit simulation / T. Sickenberger, R. Winkler // PAMM · Proc. Appl. Math. Mech., 2007. Vol. 7, Issue 1. P. 4050023–4050024.

[43] Vlasenko L. A. On a stochastic impulsive sustem / L. A. Vlasenko, S. L. Lyshko, A. G. Rutkas // ISSN 1025-6415 Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2012, №2. P. 50-55.

[44] Weierstrass K. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen / K. Weierstrass // Akad. der Wiss. Berlin 18. May 1868. Werke Vol. 2, P. 19-44.

[45] Winkler R. Stochastic differential algebraic equations in transient noise analysis / R. Winkler // Proceedings of Scientific Computing in Electrical

Engineering, September, 25th - 9th, 2004, Capo D'Orlando, Springer Series Mathematics in Industry, 2006. Vol. 9. P. 151-156.

[46] Winkler R. Stochastic differential algebraic equation of index 1 and applications in cir-cuit simulation / R. Winkler // J. Computat. and Appl. Math. – 2003. – 157, №2. – P. 477-505.

[47] Winkler R. Stochastic DAEs in Transient Noise Simulation / R. Winkler // Proceedings of Scientific Computing in Electrical Engineering, June, 23rd - 28th, 2002, Eindhoven, Springer Series Mathematics in Industry, 2004. Vol. 4. P. 408-415.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

[48] Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes / Yu. E. Gliklikh, E. Yu. Mashkov // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. – 2013. – Vol.6. – Issue 2. – P. 25-39.

[49] Машков Е. Ю. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов / Е. Ю. Машков // Научные Ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика и Физика.- №5(176) 2014. Выпуск 34. С. 49-60.

[50] Машков Е. Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа / Е. Ю. Машков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика и Математика. – 2014, №3. – С. 121-128.

[51] Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff type equation with non-constant coefficients / Yu. E. Gliklikh, E. Yu. Mashkov // Applicable Analysis: An International Journal. – Taylor and Francis. – 2015. – Vol. 94, Issue 8.– P. 1614-1623.

[52] Машков Е. Ю. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа с импульсными воздействиями / Е. Ю. Машков // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. — №2(15) 2015. С.26-35.

Статьи в других научных изданиях

[53] Машков Е. Ю. О приведении стохастических уравнений леонтьевского типа к каноническому виду / Ю. Е. Гликлих, Е. Ю. Машков // Измерения: состояние, перспективы развития. Материалы международной научно-практической конференции. Челябинск 25-27 сентября 2012 г. Том 1. Челябинск. Издательский центр ЮУрГУ, 2012.- С. 73-75

[54] Машков Е. Ю. Каноническая форма Шура и стохастические уравнения леонтьевского типа / Е. Ю. Машков // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2014". Воронеж, 26-31 января 2014 г. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" 2014, С. 215-218.

[55] Машков Е. Ю. Об одном уравнении леонтьевского типа с белым шумом / Е. Ю. Машков // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XXV". Воронеж, 3 мая – 9 мая 2014 г. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" 2014, С. 118-122.

[56] Mashkov E. Yu. On the stochastic systems of differential-algebraic type / E. Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2014, Vol. 1, No. 1, P. 34-45.

[57] Машков Е. Ю. О разрешимости стохастических систем дифференциально-алгебраического типа / Е. Ю. Машков // Крымская международная осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник тезисов. – Судак, Российская федерация, 21 сентября – 30 сентября, 2014 г. Симферополь: Издательство Таврического национального университета им. В. И. Вернадского 2014, С. 34-35.

[58] Машков Е. Ю. О разрешимости одной стохастической системы дифференциально-алгебраического типа / Е. Ю. Машков // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В. К. Иванова. Челябинск, 10-14 ноября 2014 года. - С. 208-209.

[59] Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution / Yu. E. Gliklikh, E. Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2014, Vol. 1, No. 2, P. 45–51.

[60] Машков Е. Ю. Некоторые теоремы о разрешимости стохастических систем дифференциально-алгебраического типа / Е. Ю. Машков // Auditorium: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2014. №4. URL: http://auditorium.kursksu.ru/ pdf/004-003.pdf С. 15-18.

[61] Машков Е. Ю. Об одном стохастическом уравнении леонтьевского типа с импульсными воздействиями / Е. Ю. Машков // Вестник факультета

прикладной математики и механики ВГУ. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, – 2015. – Выпуск 10, Часть 1 – С. 169-183

[62] Машков Е. Ю. Сингулярные стохастические уравнения дифференциально-алгебраического типа с импульсными воздействиями / Е. Ю. Машков // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXVI". Воронеж, 3 мая – 9 мая 2015 г. Воронеж: Издательский дом ВГУ 2015, С. 140-142.