Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского»

На правах рукописи

Родикова Евгения Геннадьевна

Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Шамоян Файзо Агитович

Брянск 2014

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Одним из важнейших направлений исследований в современном комплексном анализе является построение факторизационных представлений весовых классов аналитических функций. Помимо того, что результаты этих исследований имеют самостоятельный интерес, они также широко применяются при решении различных задач комплексного и функционального анализа: при изучении граничных свойств классов аналитических функций, в вопросах теории интерполяции, в задачах аппроксимации, в теории операторов и т.д. Истоки теории факторизации лежат в классических работах К. Вейрштрасса, Ж. Адамара, Ф. Бореля, В.В. Голубева, посвященных факторизации целых функций, и в работах Р. Неванлинны, В.И. Смирнова о представлении функций ограниченного вида и классов Харди. Интерес к этим проблемам не иссякает и в настоящее время. В последние десятилетия были написаны несколько монографий по этой тематике: М.М. Джрбашяном (1966 г.), А.Е. Джрбашяном и Ф.А. Шамояном (1988 г.), Г. Хеденмальмом, Б. Коренблюмом и К. Жу (2000 г.), К. Сейпом (2004 г.), Ф.А. Шамояном и Е.Н. Шубабко (2009 г.). При построении факторизационных представлений существенное значение имеет характеризация корневых множеств соответствующих классов аналитических функций. По этой проблеме опубликованы многочисленные работы отечественных и зарубежных ученых: У. Хеймана, С. Линдена, М. Цудзи, Ф.А. Шамояна, Н.А. Широкова, Б.Н. Хабибуллина, Б.И. Коренблюма, К. Сейпа, Г. Хеденмальма, А. Боричева, и др. На основании вышеизложеного можно заключить, что выбранная тема диссертационного исследования весьма актуальна.

Приведём обзор некоторых результатов, тесно связанных с тематикой диссертационной работы. Для этого введём необходимые обозначения.

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ – множество всех аналитических в D функций, $h(D)$ – множество всех гармонических в D функций. Символом Z_f будем обозначать множество всех корней ненулевой функции f, $n(t)$ — количество нулей функции f в круге $|z| < t$, $a^+ = \max(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

В 20-е годы прошлого столетия в работах одного из классиков комплексного анализа Р. Неванлинны было введено понятие характеристической функции, явившееся основопологающим для всей теории аналитических функций: Пусть $f \in H(D)$, характеристикой Р. Неванлинны называется функция

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^{+} |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

где $0 < r < 1$ (см. [17]).

Классом Р. Неванлинны или классом функций ограниченного вида называется множество N функций $f \in H(D)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} T(r, f) < +\infty.$$

Р. Неванлинна построил факторизационное представление класса N:
Класс N совпадает с множеством функций $f \in H(D)$, допускающих представление вида

$$f(z) = e^{i\gamma} z^{\lambda} B(z, z_k) \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(\theta) \right\},$$

где $B(z, z_k) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$ *— произведение Бляшке,* $\{z_k\}$ *— последовательность точек из* D*, удовлетворяющая условию Бляшке:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty, \tag{0.1}$$

ψ *— вещественная функция ограниченной вариации на* $[0, 2\pi]$*,* $\gamma \in \mathbb{R}$*,* $\lambda \in \mathbb{Z}$*.*

Этот результат нашел многочисленные приложения в ряде разделов комплексного, гармонического и функционального анализа.

В своей монографии Р. Неванлинна ввел также более широкий класс

$$S_{\alpha} := \left\{ f \in H(D) : \int\limits_{0}^{1} (1 - r)^{\alpha} T(r, f) dr < \infty \right\}, \alpha > -1.$$

и получил необходимое условие на нули функций из этого класса (см. [17]):

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}<+\infty.$$

Каноническое представление класса S_α получено М.М. Джрбашяном в [7]. Достаточность найденного Р. Неванлинной условия была доказана лишь в 1978 г. Ф.А. Шамояном в работе [34].

В 1999 г. в работе [37] Ф.А. Шамоян обобщил классы Неванлинны-Джрбашяна в следующем направлении: он ввел в рассмотрение классы

$$S_\alpha^p := \left\{ f\in H(D): \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr<+\infty \right\},\ \alpha>-1$$

получил полное описание корневых множеств и построил факторизационное представление этих классов функций при всех $0<p<+\infty$.

В 1964 г. М.М. Джрбашян поставил задачу обобщить теорию Р. Неванлинны. В работе [8] им была введена новая характеристическая функция $T_\alpha(r,f)$. Следуя М.М. Джрбашяну, назовем ее α-характеристикой: для любой $f\in H(D)$, $\alpha>-2$

$$T_\alpha(r,f)=\frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi\cdot\Gamma(\alpha+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})|dt\right)^+ d\varphi, \tag{0.2}$$

где Γ — функция Эйлера.

В этой же работе М. Джрбашяном введен класс N_α аналитических в D функций с ограниченной α-характеристикой, охарактеризованы нулевые множества и получено параметрическое представление указанного класса функций. Эти результаты стали основополагающими для построения новой теории классов мероморфных функций (см. [10]). Отметим, что $S_\alpha\subset N_\alpha$, причем указанное включение — строгое (см. [8, 36]).

На основании вышеизложенного, естественно определить класс

$$N_{\alpha,\gamma}^p := \left\{ f\in H(D): \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T_\alpha^p(r,f)dr<+\infty \right\},\ \alpha>-1,\ \gamma>-1.$$

Возникает необходимость характеризации корневых множеств и построения факторизационного представления этого класса.

В последние годы внимание ряда специалистов в области комплексного анализа приковано к проблеме описания корневых множеств весовых классов аналитических в единичном круге функций, растущих вблизи части его границы. Интерес к этой проблеме объясняется в том числе и важностью приложений этих результатов в спектральной теории линейных операторов, теории возмущений и др. (см. [45, 52, 53, 54])

Пусть E — конечное множество точек на единичной окружности $\mathbb{T}$, $\rho(z, E) = dist(z, E)$ – расстояние от произвольной точки $z \in D$ до множества E. Введем в рассмотрение класс

$$H_\varphi(E) = \left\{ f \in H(D) : \ln|f(z)| \leq c_f \varphi\left(\frac{1}{\rho(z, E)}\right), z \in D \right\},$$

где φ - монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$.

В том случае, когда E состоит из одной точки, $\varphi(t) = t^q$, $0 < q < 1$, характеризация корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ была получена в работах М.М. Джрбашяна [7], Х. Шапиро и А. Шилдса [59]. Для случая $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = \ln t$ результат окончательного характера был получен К. Сейпом (см. [55]). Полное описание корневых множеств и факторизационное представление класса $H_\varphi(E)$, $E = \mathbb{T}$, в случае более общих весов получено еще в 80-х гг. Ф.А. Шамояном (см. [34, 35, 48]). Отметим также работы [14], [26], [27] Б.Н. Хабибуллина и его соавторов в этом направлении.

В 2009 г. для случая, когда $E \subset \mathbb{T}$ — конечное множество точек на единичной окружности, в работе [45] было установлено следующее утверждение: *Если $f \in H_\varphi(E)$, $\varphi(t) = t^q$, $q \geq 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность нулей функции f, то сходится ряд:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho(z_k, E))^{(q-1+\varepsilon)^+}(1 - |z_k|) < +\infty,$$

где ε – сколь угодно малое положительное число.

В недавних работах Л. Голинского, С. Купина, С. Фаворова, Л. Радченко последний результат был обобщен в различных направлениях (см. [52, 53, 54]). Однако полного описания корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ до сих пор не было получено. Естественно возникает необходимость окончательного решения этой задачи.

В начале 40-х годов прошлого века одним из классиков комплексного анализа И. И. Приваловым (см. [21]) был введен в рассмотрение класс $\Pi_p\,(0 < p < +\infty)$ аналитических в единичном круге функций, для которых:

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta < +\infty.$$

При $1 \le p < +\infty$ справедливо включение $\Pi_p \subseteq N$, и из свойств произведения Бляшке следует, что корневые множества характеризуются условием Бляшке (0.1). Однако при $0 < p < 1$ условие Бляшке уже не является необходимым, более того — нулевые множества классов $\Pi_p\,(0 < p < 1)$ существенно зависят от значения параметра p, как установлено в работе Ф. А. Шамояна и его соавторов [39]. Вопрос получения полного описания корневых множеств указанного класса функций до сих пор остается открытым.

Исследованию корневых множеств и построению факторизационных представлений аналитических в полуплоскости функций конечного порядка, а также приложению этих результатов в теории краевых задач посвящена монография Н.В. Говорова [6]. В 1971 г. А.И. Хейфиц в 1971 г. в работе [31] получил представление для аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка. Одним из важных свойств факторизационных представлений является принадлежность каждого сомножителя рассматриваемому классу. Однако в работе [31] указанное свойство не было установлено. Нерешенным также оставался вопрос характеризации корневых множеств аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка. Естественно возникает вопрос окончательного решения этих задач.

Как было отмечено выше, факторизационные представления находят многочисленные приложения в решении различных проблем комплексного анализа. Одной из них является задача интерполяции. Теория интерполяции в различных классах голоморфных функций стала интенсивно развиваться после основополагающей работы Л. Карлесона [46] о свободной интерполяции в классе ограниченных аналитических функций в круге. Термин «свободная интерполяция» впервые был введен в работе С.А. Виноградова и В.П. Хавина [4] при решении интерполяционной задачи в подклассах классов N функций ограниченного вида. Задача интерполяции в классах Р. Неванлинны и В.И.

Смирнова была решена в работах [16, 50], в классах Харди и Бергмана - в работах [58, 55]. Отметим, что изменение класса функций, в котором решается задача интерполяции, влечет существенные изменения в методах ее решения. Ввиду большой прикладной значимости результатов в этой области исследований, проблема описания следов различных классов аналитических функций остается весьма актуальной.

При исследовании вопросов интерполяции часто появляется необходимость в доказательстве теорем вложения. Впервые теоремы вложения в классах Харди были установлены Л. Карлесоном и применялись им в решении интерполяционной задачи в классе H^∞ (см. [46]). Доказательству теорем вложения в пространствах Бергмана посвящены работы отечественных математиков В.Л. Олейника и Б.С. Павлова (см. [19, 20]). Появление новых классов функций влечет за собой необходимость в доказательстве для них теорем вышеуказанного типа.

Одной из классических задач в комплексном анализе является оценка скорости роста функции и коэффициентов ее разложения в ряд Тейлора. Она имеет существенные приложения в вопросах описания сопряженных пространств к пространствам аналитических функций, в теории теплицевых операторов, при описании мультипликаторов и т.д. В середине прошлого столетия указанная задача в классе функций ограниченного вида была решена С.Н. Мергеляном (см.[22]). Аналог этого результата в классе Неванлинны-Джрбашяна S_α получил С. В. Шведенко (см. [44]). Точных оценок модуля и коэффициентов разложения функции из класса S^p_α, введенного Ф.А. Шамояном в [37], до сих пор не было получено.

Цель работы:

1. Характеризация корневых множеств и построение факторизационных представлений весовых классов аналитических в круге и в полуплоскости функций.

2. Решение интерполяционной задачи, доказательство теорем вложения в весовых классах аналитических в круге функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны и описание коэффициентных мультипликаторов из классов аналитических в круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых принадлежит L^p-весовым пространствам, в классы Харди.

Методы исследования: В работе применяются общие методы комплексного и функционального анализа, а также специальные методы, основанные на факторизационных и интегральных представлениях исследуемых классов.

Научная новизна:

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Охарактеризованы корневые множества и построено факторизационное представление весовых классов аналитических в круге функций, α - характеристика которых принадлежит L^p - весовым пространствам.

2. Получено полное описание корневых множеств весовых классов аналитических в единичном круге функций, допускающих рост вблизи конечного множества точек на граничной окружности.

3. Получено необходимое условие на нули функций из класса И.И. Привалова $\Pi_p\,(0 < p < 1)$, близкое к достаточному.

4. Охарактеризованы корневые множества и построено факторизационное представление весовых классов аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка.

5. В явном виде получено решение интерполяционной задачи в классе аналитических в круге функций со степенным ростом характеристики Р. Неванлинны.

6. Доказаны теоремы вложения для весовых классов аналитических в единичном круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых принадлежит L^p - весовым пространствам.

7. Описаны коэффициентные мультипликаторы из весовых классов аналитических в единичном круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых принадлежит L^p - весовым пространствам, в классы Харди.

Практическая и теоретическая значимость:

Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты исследования могут быть использованы в общей теории аналитических функций, в теории операторов и функциональных пространств, а также могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей университетов.

Апробация результатов диссертации:

Основные результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 2011 г.), «Комплексный анализ и приложения» (Петрозаводск, 2012 г.), «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2013 г.), на Воронежской зимней математической школе (2013 г.), на Саратовской зимней математической школе (Саратов, 2012 г., 2014 г.), на Воронежской весенней математической школе (2014 г.), а также неоднократно на семинарах по комплексному анализу Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержана грантом РФФИ (проект №13-01-97508).

Публикации.

Результаты исследований нашли отражение в 14 работах: [61]–[74]. Работы [61]–[65] входят в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В совместных работах [63, 65, 68, 70, 73] научному руководителю принадлежат постановка задачи и идея доказательства.

Структура и объем диссертации.

Работа состоит из введения, двух глав, разбитых в общей сложности на 8 параграфов, и списка использованной литературы. Работа занимает 121 страницу. Библиография содержит 60 наименований.

Содержание диссертации.

Первая глава диссертационной работы посвящена вопросам факторизации и характеризации корневых множеств весовых классов аналитических функций.

Для формулировки основных результатов введем дополнительные обозначения. Здесь и в дальнейшем, если не оговорено иное, мы будем обозначать через C, c, $c_1, ..., c_n(\alpha, \beta, ...)$ положительные константы, зависящие от α, $\beta, ...$

Следуя М.М. Джрбашяну (см. [7]), введем бесконечное произведение $\pi_\beta(z, \alpha_k)$, $\beta > -1$, с нулями в точках последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$\pi_\beta(z,\alpha_k)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\exp(-U_\beta(z,\alpha_k)),\tag{0.3}$$

где

$$U_\beta(z,\alpha_k)=\frac{2(\beta+1)}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\beta\ln|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\alpha_k}|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}}d\theta\rho d\rho.\tag{0.4}$$

Как установлено в [7], произведение $\pi_\beta(z,\alpha_k)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|)^{\beta+2}<+\infty.\tag{0.5}$$

Введем также в рассмотрение класс О. Бесова на единичной окружности (см. [24, с. 179]). Функция $\psi\in L^1(-\pi,\pi)$ принадлежит классу О. Бесова $B^s_{1,p}$, если

$$\|\psi\|_{B^s_{1,p}}=\left(\int\limits_0^1\frac{\|\Delta^2_t(\psi)\|^p_{L^1}}{t^{sp+1}}dt\right)^{1/p}<+\infty,\tag{0.6}$$

где $0<p<+\infty$, $0<s<2$, $\Delta^2_t(\psi)(e^{i\theta})=\psi(e^{i(\theta+t)})-2\psi(e^{i\theta})+\psi(e^{i(\theta-t)})$, $\theta\in[-\pi,\pi]$.

Если же $s\geq 2$, то $\psi^{(n)}\in B^{s'}_{1,p}$, $s'=s-[s]$, $[s]$ – целая часть числа s.

В том случае, если $p=\infty$, $0<s<2$, суммируемая на единичной окружности функция ψ принадлежит классу $B^s_{1,\infty}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0<t<1}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(e^{i(\theta+t)})-2\psi(e^{i\theta})+\psi(e^{i(\theta-t)})|}{|t|^s}d\theta\right\}<+\infty.\tag{0.7}$$

Следуя М.М. Джрбашяну (см. [9, с. 606]), определим также функцию

$$N_\alpha\left(r,\frac{1}{f}\right)=\frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)}\int_0^r(r-t)^{\alpha+1}\cdot\frac{n(t)-n(0)}{t}dt+\frac{n(0)}{\Gamma(\alpha+2)}(\ln r-k_\alpha),\tag{0.8}$$

где $n(0)$ — кратность нуля в точке $z=0$, $k_\alpha=\alpha\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\alpha>-2$.

В *первом параграфе* первой главы получено полное описание корневых множеств класса $N^p_{\alpha,\gamma}(\alpha > -1, \gamma > -1)$ при всех $0 < p < +\infty$ и построено факторизационное представление указанного класса функций.

Теорема 1.1 *Для того чтобы последовательность точек $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ единичного круга являлась корневым множеством некоторой тождественно отличной от нуля функции $f \in N^p_{\alpha,\gamma}$ $(0 < p < +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^p_{\alpha,k}}{2^{k(\gamma+1)}} < +\infty, \tag{0.9}$$

где $n_{\alpha,k} = N_\alpha\left(1 - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{f}\right)$ (см. (0.8)).

Теорема 1.2 *Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$f \in N^p_{\alpha,\gamma}$;*

2. *$f(z)$ может быть представлена в виде:*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1 - e^{-i\theta}z)^{\beta+1}}\right),\ z \in D,$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность точек из D, удовлетворяющая условию (0.9), $\pi_\beta(z, z_k)$ - произведение М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\psi \in B^s_{1,p}$, $s = \beta - (\alpha+1) - \frac{\gamma+1}{p}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $c_\lambda \in \mathbb{C}$.

Во *втором параграфе* первой главы получено полное описание корневых множеств весовых классов $H_\varphi(E)$ аналитических в единичном круге функций, допускающих рост вблизи конечного множества точек $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1}$ на его границе. Установлены следующие результаты:

Теорема 1.3 *Пусть φ – монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$, такая что*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi.$$

Если $f \in H_\varphi(E)$ и $Z_f = \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то для любого $R > 1$ справедлива оценка

$$\sum_{\frac{1}{R} \le \rho(z_n, E) \le 2} (1 - |z_n|^2) \le c_F \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int\limits_1^R \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right). \qquad (0.10)$$

Обратно,
а) *если $\alpha_\varphi \notin \mathbb{Z}_+$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность точек из D, удовлетворяющая условию* (0.10),
б) *если $\alpha_\varphi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность точек из D, удовлетворяющая, наряду с условием* (0.10), *условию*

$$\sup_{0 \le k \le m-1} \Big| \sum_{\frac{1}{R} \le \rho(z_n, E) \le 2} \left(i \frac{e^{i\tau_k} + z_n}{e^{i\tau_k} - z_n} \right)^{-\alpha_\varphi} \Big| \le M,\ M > 0,$$

причем

$$\sup_{x > 1} \frac{x^{\alpha_\varphi}}{\varphi(x)} < +\infty,$$

тогда можно построить функцию $g \in H_\varphi(E)$, нули которой совпадают с точками последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

В теореме 1.4 получено необходимое и достаточное условие на мажоранту φ, при котором корневое множество функции из класса $H_\varphi(E)$ удовлетворяет условию Бляшке.

Теорема 1.4 *Следующие утверждения равносильны:*

1. *Для любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in H_\varphi(E)$, выполняется условие Бляшке, т.е.*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) < +\infty,$$

2. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx < +\infty,$$

где φ – монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$.

В теореме 1.5 получен аналог результата работы [35] для класса $H_\varphi(E)$.

В *третьем параграфе* первой главы исследуются нулевые множества функций из класса И. И. Привалова. В частности, доказано следующее утверждение:

Теорема 1.6 *Если f — тождественно отличная от нуля функция из класса $\Pi_p\,(0<p<1)$, $f(z_k)=0$, $k=1,2,...$, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\frac{1}{p}}\ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)<+\infty,$$

при любом положительном $\varepsilon>0$.

Как следует из упомянутых ранее результатов работы [39], полученное условие близко к точному. Более того, справедлива

Теорема 1.7 *Если f — тождественно отличная от нуля функция из класса $\Pi_p\,(0<p<1)$, $f(z_k)=0$, $k=1,2,...$, $f(0)=1$, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\omega(1-|z_k|)(1-|z_k|)^2<+\infty,$$

где $\omega\in C^{(1)}(0,1]\bigcap\Omega$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int\limits_0^1\frac{\omega^p(u)}{u^{2(1-p)}}du<+\infty,\ \alpha_\omega=\varliminf_{t\to 0}\frac{\omega'(t)\cdot t}{\omega(t)}>-1.$$

Здесь Ω – множество всех измеримых положительных функций на $(0,1]$, для которых существуют числа m_ω, q_ω из $(0,1]$, M_ω такие что (см. [41, с. 10])

$$m_\omega\le\frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)}\le M_\omega,\ r\in(0,1],\ \lambda\in[q_\omega,1]. \tag{0.11}$$

Последующие параграфы первой главы посвящены описанию корневых множеств и построению факторизационного представления аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка.

Пусть C_+ -— верхняя полуплоскость комплексной плоскости, φ — монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$, $\varphi\in C^1(R_+)$.

Введем в рассмотрение класс $X_\varphi^\infty(C_+)$ аналитических в верхней полуплоскости функций, для которых

$$\ln|f(z)| \le A_f \varphi(B_f|z|), z \in C_+,$$

где A_f, B_f - положительные постоянные, значения которых зависят только от функции f. Обозначим Z_f — множество нулей функции $f \in X_\varphi^\infty(C_+)$

Будем называть *весовой* монотонно возрастающую положительную функцию $\varphi \in C^1(R_+)$ с условием

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = +\infty.$$

В *четвертом параграфе* первой главы установлена справедливость следующих утверждений:

Теорема 1.8 *Пусть φ — весовая функция, $\ln\varphi$ выпукла вниз. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f,\ f \in X_\varphi^\infty(C_+)$ *;*
2. $\exists\, c_1 > 0 :\ \forall\, 0 < R < 1$ *справедливо*

$$\sum_{\rho<r_n\le R} \frac{\sin\theta_n}{r_n} < c_1 \frac{\varphi(c_2 R)}{R},$$

где константа c_1 зависит только от последовательности $\{z_n\}$.

Обозначим через $N_{p_n}(z, z_n)$ первичный множитель Р. Неванлинны (см. [6]). Пусть далее

$$E(z, z_n) = \prod_{n=1}^{+\infty} N_{p_n}(z, z_n),$$

Справедлива

Теорема 1.9 *Пусть φ — весовая функция, $\ln\varphi$ выпукла вниз. Каждую функцию $f \in X_\varphi^\infty(C_+)$, аналитическую в замкнутой полуплоскости C_+, можно представить в виде*

$$f(z) = \exp(G(z)) \times E(z, z_n),$$

где $Z_f = \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $p_n = \left[\frac{\ln\varphi(C_0|z_n|)}{\ln 2}\right] - 1$ при некотором $C_0 > 0$, причем функции $E(z, z_n)$ и $\exp(G(z))$ принадлежат классу $X_\varphi^\infty(C_+)$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена приложению факторизационных представлений к решению задачи свободной интерполяции в весовых классах аналитических в круге функций со степенным ростом характеристики Р. Неванлинны.

Введем в рассмотрение класс S_α^∞, $\alpha > 0$ (см. [41, с. 126]):

$$S_\alpha^\infty := \left\{ f \in H(D) : T(r,f) \leq \frac{C_f}{(1-r)^\alpha} \right\},$$

где $C_f > 0$ — положительная константа, значения которой зависят разве что от функции f, $r \in [0,1)$.

Хорошо известно, если $f \in S_\alpha^\infty$, то

$$M(r,f) = \max_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \exp\left\{ \frac{c_f}{(1-r)^{\alpha+1}} \right\}$$

при всех $\alpha > 0$, $c_f > 0$ (см. [41, с. 144]).

Ясно, что если $f \in S_\alpha^\infty$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — последовательность точек из единичного круга, то оператор $R(f) = (f(\alpha_1), ..., f(\alpha_k), ...)$ отображает класс S_α^∞ в класс весовых последовательностей

$$l_\alpha = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \leq \exp \frac{\lambda}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, \lambda > 0 \right\}.$$

Определение 0.1. Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем *интерполяционной последовательностью* в классе S_α^∞, если $R(S_\alpha^\infty) = l_\alpha$.

Обозначим $\Gamma_\delta(\theta)$ — угол Штольца с вершиной в точке $e^{i\theta}$ раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$.

В *первом параграфе* второй главы установлен следующий результат:

Теорема 2.1 *Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел из D, расположенных в конечном числе углов Штольца: $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ при некотором $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+1}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - *интерполяционная последовательность в классе S_α^∞, $\alpha > 0$;*

2.

$$n(r) = \{card\, \alpha_k : |\alpha_k| < r\} \leq \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}}$$

для некоторого $c > 0$*;*

$$|\pi'_\beta(\alpha_n, \alpha_k)| \geq \exp \frac{-M}{(1 - |\alpha_n|)^{\alpha+1}},$$

для некоторого $M > 0$ *и при всех* $\beta > \alpha - 1$*.*

Во *втором параграфе* второй главы исследован вопрос о вложении классов аналитических в единичном круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых принадлежит L^p - весовым пространствам, в пространство Лебега.

Для всех $0 < p < +\infty$ и $\omega \in \Omega$ (см. (0.11)) введем в рассмотрение класс функций (см. [37]):

$$S^p_\omega = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1 - r) T^p(r, f) dr < +\infty \right\}.$$

Для формулировки основных результатов введем также следующие обозначения. Пусть $l \in [0, 1)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, положим

$$\Delta_l(\theta) = \left\{ z \in D : 1 - l < |z| < 1,\ |\arg z - \theta| \leq \frac{l}{2} \right\}, \qquad (0.12)$$

то есть $\Delta_l(\theta)$ — прямоугольник Л. Карлесона. Справедлива

Теорема 2.2 *Пусть* μ *— конечная неотрицательная борелевская мера в единичном круге* D*,* $1 \leq p < +\infty$*. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\int\limits_D \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \leq C \int\limits_0^1 \omega(1 - r) T^p(r, f) dr < +\infty$, $f \in S^p_\omega$,

2. $\mu(\Delta_l(\theta)) \leq C_1 \cdot \omega(l) \cdot l^{p+1}$, *при всех* $\theta \in [-\pi, \pi]$, $l \in (0, 1)$.

При $0 < p < 1$ характеризация мер имеет другой вид. Зададим диадическое разбиение $\Delta_{k,s}$ единичного круга. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}$, причем $-2^k \leq s \leq 2^k - 1$,

$$\Delta_{k,s} = \left\{ z \in D : 1 - \frac{1}{2^k} < |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{\pi s}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(s+1)}{2^k} \right\}. \qquad (0.13)$$

Теорема 2.3 *Пусть μ — конечная неотрицательная борелевская мера в единичном круге D, $0 < p < 1$, $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, 2...$ Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\int\limits_D \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \leq C \int\limits_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr < +\infty$, $f \in S^p_\omega$,

2. $\sum\limits_{s=-2^k}^{2^k-1} (\mu(\Delta_{k,s}))^{\frac{1}{1-p}} \leq c(1-r_k)^{\frac{1+p}{1-p}}(\omega(1-r_k))^{\frac{1}{1-p}}$.

В *третьем параграфе* второй главы получены точные оценки максимума модуля и коэффициентов Тейлора функции из класса S^p_α. На основе этих оценок мы даем полную характеризацию коэффициентных мультипликаторов из этого класса:

Пусть X — некоторый класс аналитических в единичном круге D функций.

Определение 0.2. Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем коэффициентным *мультипликатором* из класса S^p_α в класс X, если для произвольной функции $f \in S^p_\alpha$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция $\Lambda(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in X$.

Описанию мультипликаторов в различных классах голоморфных функций посвящены работы отечественных и зарубежных ученых (см. [11, 38, 43, 60]). Нами установлено следующее утверждение:

Теорема 2.6 *Пусть X совпадает с одним из следующих классов: S^p_β $(-1 < \beta < \alpha)$ или H^p $(0 < p \leq \infty)$. Тогда для того чтобы последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ являлась коэффициентным мультипликатором из класса S^p_α в класс X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right),\ c > 0,\ k \to +\infty.$$

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за постановку задач и постоянное внимание к работе.

1 Факторизационные представления и описание корневых множеств весовых классов аналитических функций

Первая глава посвящена вопросам факторизации и характеризации корневых множеств весовых классов аналитических функций. В первом параграфе этой главы мы строим факторизационное представление класса $N^p_{\alpha,\gamma}$ аналитических в единичном круге функций с α - характеристикой из L^p - весовых пространств при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$. Во втором параграфе получено полное описание корневых множеств аналитических в круге функций, имеющих заданный рост при приближении к конечному множеству точек на граничной окружности. В третьем параграфе получено необходимое условие на нули функций из класса И.И. Привалова $\Pi_p (0 < p < 1)$, близкое к достаточному. Последующие параграфы главы посвящены описанию корневых множеств аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка и построению факторизационного представления аналитических в замкнутой полуплоскости функций из этих классов.

1.1 Факторизационное представление и описание корневых множеств класса аналитических в круге функций с α - характеристикой из L^p - весовых пространств

Для всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$ определим класс $N^p_{\alpha,\gamma}$ аналитических в единичном круге функций, для которых

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T^p_\alpha(r,f)dr < +\infty.$$

Основным результатом этого параграфа является доказательство следующих двух утверждений:

Теорема 1.1. *Для того чтобы последовательность точек* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *единичного круга являлась корневым множеством некоторой тождественно отличной от нуля функции* $f \in N^p_{\alpha,\gamma}$ *при всех* $0 < p < +\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^p_{\alpha,k}}{2^{k(\gamma+1)}} < +\infty, \tag{1.1}$$

где $n_{\alpha,k} = N_\alpha\left(1 - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{f}\right)$ *(см.* (0.8)*).*

Напомним, что если $n(0) = 0$, то

$$n_\alpha(r, f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)} \int_0^r (r-t)^{\alpha+1} \cdot \frac{n(t)}{t} dt.$$

Теорема 1.2. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $f \in N^p_{\alpha,\gamma}$;

2. $f(z)$ *может быть представлена в виде:*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1 - e^{-i\theta}z)^{\beta+1}}\right), \; z \in D, \tag{1.2}$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из* D, *удовлетворяющая условию* (1.1), $\pi_\beta(z, z_k)$ *- произведение М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\psi \in B^s_{1,p}$, $s = \beta - (\alpha+1) - \frac{\gamma+1}{p}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $c_\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство основных результатов работы основывается на вспомогательных утверждениях.

Лемма 1.1. *(см. [41]) Пусть* $\beta > 1$. *При всех* $r, \rho \in [0, 1)$ *справедливы оценки:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^\beta} \le \frac{c}{(1-r)^{\beta-1}}, \tag{1.3}$$

$$\int_0^1 \frac{d\rho}{|1-\rho re^{i\theta}|^{\beta}} \le \frac{c}{|1-re^{i\theta}|^{\beta-1}}. \tag{1.4}$$

Лемма 1.2. *Сходимость ряда* (1.1) *эквивалентна сходимости интеграла*

$$\int_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr < +\infty, \tag{1.5}$$

где $n_\alpha(r) = N_\alpha(r, \frac{1}{f})$.

Доказательство. Докажем сначала импликацию (1.5) $\to$ (1.1). Пусть интеграл (1.5) сходится. Разобьем его на части:

$$\int_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr,$$

где $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, ...$

Оценим снизу получившуюся сумму с учетом возрастания функции $n_\alpha(r)$:

$$c \ge \int_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr \ge \sum_{k=0}^{+\infty} n_\alpha^p(r_k) \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-r)^\gamma dr,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} n_{\alpha,k}^p \frac{1}{2^{k(\gamma+1)}} \left(1 - \frac{1}{2^{\gamma+1}}\right) \le const.$$

Значит, (1.5) $\to$ (1.1).

Докажем обратное. Предположим, что (1.1) сходится. Снова разобьем интеграл (1.5) на части и оценим его сверху:

$$\int_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{+\infty} n_\alpha^p(r_{k+1}) \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-r)^\gamma dr \le c_\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} n_{\alpha,k+1}^p \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\gamma+1} \le$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty} n_{\alpha,\,m}^{p} \left(\frac{1}{2^m}\right)^{\gamma+1} \leq const.$$

Значит, (1.1) $\rightarrow$ (1.5). Таким образом, лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Если ряд* (1.1) *сходится, то сходится и ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\beta+2} \tag{1.6}$$

при всех $\beta > \alpha + \frac{\gamma+1}{p}$, *где* $0 < p < +\infty$.

Доказательство. По лемме 1.2 интеграл (1.5) сходится. Покажем, что

$$\int_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr \geq c_\alpha \int_0^1 n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p+\gamma} dr, \tag{1.7}$$

где $n(r) = \{card\, z_k : |z_k| < r\}$, $k = 1, 2, ...$ Не ограничивая общности, будем считать, что $n(0) = 0$. Имеем:

$$\int_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^p \int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_0^r (r-t)^{\alpha+1} \frac{n(t)}{t} dt\right)^p dr.$$

Далее,

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_0^r (r-t)^{\alpha+1} \frac{n(t)}{t} dt\right)^p dr \geq$$

$$\geq \int_{1/3}^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{r-\frac{1-r}{2}}^r (r-t)^{\alpha+1} n(t) dt\right)^p dr \geq$$

$$\geq \tilde{c}_\alpha \int_{1/3}^1 n^p \left(\frac{3r-1}{2}\right) (1-r)^{\gamma+(\alpha+2)p} dr = c_\alpha \int_0^1 n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma} d\rho.$$

Таким образом, неравенство (1.7) доказано.

Поскольку интеграл (1.5) сходится, то

$$c \geq \int\limits_r^1 n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma} d\rho,$$

где $0 < r < 1$, откуда

$$n(r) \leq \frac{c}{(1-r)^{(\alpha+2)+\frac{\gamma+1}{p}}}, 0 < r < 1. \tag{1.8}$$

Разобьем сумму (1.6) на части:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\Delta_k}(1-|z_k|)^{\beta+2} n_k,$$

где $\Delta_k = [1-\frac{1}{2^{k-1}}, 1-\frac{1}{2^k})$, $n_k = n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$, $k = 1, 2, ...$

Воспользуемся в последней сумме оценкой (1.8):

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\Delta_k}(1-|z_k|)^{\beta+2-(\alpha+2)-\frac{\gamma+1}{p}},$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(1-|z_m|)^{\beta+2} \leq \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(\beta-(\alpha+\frac{\gamma+1}{p}))}.$$

Поскольку по условию $\beta > \alpha + \frac{\gamma+1}{p}$, то сходится ряд в правой части последнего неравенства, откуда следует сходимость ряда (1.6) . Лемма 1.3 доказана.

Следующая лемма содержит полезную оценку произведения М. Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$ (см., например, [34]):

Лемма 1.4. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ *удовлетворяет условию* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} < +\infty$, $\beta > -1$, *тогда для произведения* $\pi_\beta(z, z_k)$ *с нулями в точках* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *справедлива следующая оценка:*

$$\ln|\pi_\beta(z, z_k)| \leq c_\beta \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|1-\overline{z}_k z|}\right)^{\beta+2}. \tag{1.9}$$

Перейдем теперь к доказательству основных результатов параграфа.

Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $f(0)=1$. Тогда по формуле Иенсена имеем:

$$\int\limits_0^t \frac{n(s)}{s} ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f(te^{i\varphi})| d\varphi.$$

Умножим обе части равенства на $(r-t)^\alpha$ и проинтегрируем по $t \in [0,r)$, $0<r<1$:

$$\int\limits_0^r (r-t)^\alpha \int\limits_0^t \frac{n(s)}{s} dsdt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^r (r-t)^\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f(te^{i\varphi})| d\varphi dt. \tag{1.10}$$

Рассмотрим интеграл в левой части равенства. Проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^r (r-t)^\alpha \int\limits_0^t \frac{n(s)}{s} dsdt = \frac{1}{(\alpha+1)} \int\limits_0^r (r-t)^{\alpha+1} \frac{n(t)}{t} dt.$$

Умножим теперь обе части равенства (1.10) на $\frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+1)}$. Меняя порядок интегрирования в правой части этого равенства, получим:

$$\frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)} \int\limits_0^r (r-t)^{\alpha+1} \frac{n(t)}{t} dt \le$$

$$\le \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi\Gamma(\alpha+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi = T_\alpha(r,f).$$

Возведем обе части нервенства в степень p, $0<p<+\infty$, далее умножим на $(1-r)^\gamma$ и проинтегрируем по $r \in [0,1)$:

$$\int\limits_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr \le \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T_\alpha^p(r,f) dr.$$

По условию интеграл в правой части неравенства сходится, поэтому

$$\int_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr < +\infty.$$

В силу леммы 1.2, сходится и ряд (1.1).

Достаточность. Предположим, что ряд (1.1) сходится. Покажем, что произведение $\pi_\beta(z, z_k)$ принадлежит классу $N_{\alpha,\gamma}^p$ при всех $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$, $0 < p < +\infty$, то есть нужно доказать сходимость интеграла

$$I = \int_0^1 (1-r)^\gamma T_\alpha^p(\pi_\beta, r) dr.$$

Воспользуемся оценкой (1.9). Обозначим через $c_p = \left(\frac{1}{2\pi\Gamma(\alpha+1)}\right)^p$. Будем иметь:

$$I \le c_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(r^{-(\alpha+1)} \int_0^r (r-t)^\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|z_k|}{|1-\overline{z}_k t e^{i\varphi}|} \right)^{\beta+2} dt \right)^+ d\varphi \right)^p dr$$

$$= c_p \int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\beta+2} \int_0^r \frac{(r-t)^\alpha}{|1-\overline{z}_k t e^{i\varphi}|^{\beta+2}} dt \right)^+ d\varphi \right)^p dr$$

$$= c_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\beta+2} \int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{|1-\overline{z}_k u r e^{i\varphi}|^{\beta+2}} du \right)^+ d\varphi \right)^p dr.$$

Используя оценку (1.4), получим:

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{|1-\overline{z}_k u r e^{i\varphi}|^{\beta+2}} du \le \frac{c}{|1-\overline{z}_k r e^{i\varphi}|^{\beta-\alpha+1}}.$$

Поэтому

$$I \le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-|z_k|)^{\beta+2}}{|1-\overline{z}_k r e^{i\varphi}|^{\beta-\alpha+1}} d\varphi \right)^p dr.$$

Используя теперь оценку (1.3) для внутреннего интеграла, получаем:

$$I \le \tilde{c}_p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-|z_k|)^{\beta+2}}{(1-r|z_k|)^{\beta-\alpha}} \right)^p dr. \tag{1.11}$$

Оценка (1.11) равносильна

$$I \le \tilde{c}_p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{\beta+2}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dn(t) \right)^p dr.$$

Интегрируя по частям во внутреннем интеграле, будем иметь:

$$I \le \tilde{c}_p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_0^1 n(t) \frac{(1-t)^{\beta+1}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dt \right)^p dr.$$

Разбивая внутренний интеграл на части, получаем:

$$I \le \tilde{c}_p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} n(t) \frac{(1-t)^{\beta+1}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dt \right)^p dr \le$$

$$\le \tilde{c}_p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} n_k \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{(1-t)^{\beta+1}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dt \right)^p dr,$$

где $n_k = n(r_k)$, $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, ...$

Продолжим оценивать I сверху.

$$I \le \tilde{c}_p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k}{(1-rr_k)^{\beta-\alpha}} \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} (1-t)^{\beta+1} dt \right)^p dr \le$$

$$\le \tilde{c}_{\beta,p} \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k}{(1-rr_k)^{\beta-\alpha}} \frac{1}{2^{k(\beta+2)}} \right)^p dr.$$

Пусть $0 < p \le 1$. Тогда, используя оценку $(a+b)^p \le (a^p+b^p)$, $\forall a,\ b \in \mathbb{R}_+$, справедливую при всех $0 < p \leq 1$, и оценку (1.4), будем иметь:

$$I \leq \tilde{c}_{\beta,p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{(\beta+2)kp}} \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\gamma dr}{(1-rr_k)^{(\beta-\alpha)p}} \leq \tilde{c}_{\beta,p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{(\beta+2)kp}} \frac{1}{(1-r_k)^{(\beta-\alpha)p-\gamma-1}}.$$

Но $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, ...$, поэтому

$$I \leq \tilde{c}_{\beta,p} \sum_{k=1}^{+\infty} n_k^p \frac{2^{k((\beta-\alpha)p-\gamma-1)}}{2^{(\beta+2)kp}} \leq \tilde{c}_{\beta,p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k((\alpha+2)p+\gamma+1)}}.$$

Аналогичным образом, как в лемме 1.2, можно показать, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k((\alpha+2)p+\gamma+1)}}$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_0^1 n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p+\gamma} dr$. Значит,

$$I \leq c_\alpha \int\limits_0^1 n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p+\gamma} dr.$$

Исользуя теперь оценку (1.7) и лемму 1.2, получаем:

$$I \leq c_\alpha \int\limits_0^1 n_\alpha^p(r)(1-r)^\gamma dr \leq c_\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_{\alpha,k}^p}{2^{k(\gamma+1)}} < +\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что при $0 < p \leq 1$ если (1.1) сходится, то произведение $\pi_\beta(z, z_k) \in N_{\alpha,\gamma}^p$.

Докажем аналогичное утверждение при $p > 1$. Пусть

$$J = \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T_\alpha^p(r, f) dr =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\Gamma(\alpha+1)}\right)^p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} r^{-(\alpha+1)} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt\right)^+ d\varphi\right)^p dr.$$

Теперь заметим, что

$$\left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt\right)^+ \leq \int_0^r (r-t)^\alpha \ln^+|f(te^{i\varphi})| dt,$$

поэтому, меняя порядок интегрирования, получим:

$$J \leq (\Gamma(\alpha+1))^{-p} \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_0^1 (1-u)^\alpha T(ru, f) du \right)^p dr,$$

где $T(ru, f)$ - характеристика Р. Неванлинны функции f. Далее, разбивая внутренний интеграл на части и используя неравенство $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$, $\forall a,\ b \in \mathbb{R}_+$, $0 < p < +\infty$, получаем:

$$J \leq 2^p (\Gamma(\alpha+1))^{-p} (J_1 + J_2), \tag{1.12}$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_0^r (1-u)^\alpha T(ru, f) du \right)^p dr,$$

$$J_2 = \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_r^1 (1-u)^\alpha T(ru, f) du \right)^p dr.$$

Рассмотрим интеграл J_2. Так как $T(r, f)$ – монотонно растущая функция на интервале $(0, 1)$, то

$$J_2 = \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_r^1 (1-u)^\alpha T(ru, f) du \right)^p dr \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T^p(r, f) \left(\int\limits_r^1 (1-u)^\alpha du \right)^p dr,$$

откуда

$$J_2 \leq \int\limits_0^1 T^p(r, f)(1-r)^{(\alpha+1)p+\gamma} dr. \tag{1.13}$$

Пусть теперь $g(r)$ - произвольная неотрицательная функция из $L^q(0, 1)$, такая что $\|g\|_{L_q} = 1$ и

$$\tilde{J}_1 = (J_1)^{\frac{1}{p}} = \int\limits_0^1 g(r)(1-r)^{\frac{\gamma}{p}} \int\limits_0^r (1-u)^\alpha T(ru, f) du dr \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 g(r)(1-r)^{\frac{\gamma}{p}} \int\limits_0^r (1-u)^\alpha T(u, f) du dr.$$

Поменяем порядок интегрирования в последнем интеграле:

$$\tilde{J}_1 \leq \int\limits_0^1 (1-u)^\alpha T(u, f) \int\limits_u^1 g(r)(1-r)^{\frac{\gamma}{p}} dr du \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 (1-u)^{\alpha+\frac{\gamma}{p}} T(u, f) \left(\int\limits_u^1 g(r) dr \right) du =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-u)^{\alpha+\frac{\gamma}{p}+1} T(u, f) \frac{1}{1-u} \left(\int\limits_u^1 g(r) dr \right) du.$$

В последнем интеграле применим неравенство Гёльдера:

$$\tilde{J}_1 \leq \left(\int\limits_0^1 (1-u)^{(\alpha+1)p+\gamma} T^p(u, f) du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-u)^q} \left(\int\limits_u^1 g(r) dr \right)^q du \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя теперь неравенство Харди (см. [28, с. 296]), получаем:

$$\tilde{J}_1 \leq \left(\int\limits_0^1 (1-u)^{(\alpha+1)p+\gamma} T^p(u, f) du \right)^{\frac{1}{p}} \times c_q \|g\|_{L_q}.$$

Таким образом,

$$J_1 \leq \int\limits_0^1 T^p(r, f)(1-r)^{(\alpha+1)p+\gamma} dr. \tag{1.14}$$

В качестве функции f рассмотрим произведение М. Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$, где $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$. Из параметрического представления класса $S^p_{(\alpha+1)p+\gamma}$

следует, что произведение $\pi_\beta(z, z_k) \in S^p_{(\alpha+1)p+\gamma}$ при указанном выборе β (см. [37]). Поэтому из оценок (1.13), (1.14) следует, что интегралы J_1, J_2 сходятся. Из неравенства (1.12) заключаем, что J сходится, то есть $\pi_\beta(z, z_k) \in N^p_{\alpha,\gamma}$ при всех $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2.

Сначала докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Из теоремы 1.1 следует, что всякая функция $f \in N^p_{\alpha,\gamma}$ представима в виде:

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp(h(z)),$$

где $\exp(h(z))$ - функция из класса $N^p_{\alpha,\gamma}$, не имеющая нулей. Действительно, не ограничивая общности, будем считать, что кратность нуля в точке $z = 0$ равна нулю. Так как $\exp(h(z)) = \frac{f(z)}{\pi_\beta(z,z_k)}$, то $\exp(h(z)) \in N^p_{\alpha,\gamma}$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\pi_\beta(z,z_k)} \in N^p_{\alpha,\gamma}$. Последнее включение непосредственно следует из соотношения α-равновесия (см. [9, с. 609]):

$$T_\alpha(r, f) = T_\alpha\left(r, \frac{1}{f}\right) + c_\alpha.$$

Докажем теперь, что $h(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+1}}$, где $\psi \in B^s_{1,p}$, где $s = \beta - (\alpha + 1) - \frac{\gamma+1}{p}$. Обозначим $u(z) = \Re h(z)$, $u \in h(D)$. Так как $\exp(h(z)) \in N^p_{\alpha,\gamma}$, то

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+_\alpha(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr < +\infty, \tag{1.15}$$

где

$$u_\alpha(re^{i\varphi}) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^r (r-t)^\alpha u(te^{i\varphi})dt.$$

Как установлено в [9, с. 596], $u_\alpha(re^{i\varphi}) \in h(D)$.

Так как $u_\alpha = u^+_\alpha - u^-_\alpha$, где $u^+_\alpha = \max(u_\alpha, 0)$, $u^-_\alpha = \max(-u_\alpha, 0)$, то по теореме о среднем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_\alpha(re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^+(re^{i\varphi})d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^-(re^{i\varphi})d\varphi = u_\alpha(0),$$

откуда ввиду неравенства

$$(a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p),\ \forall a,b\in\mathbb{R}_+,\ 0<p<+\infty, \tag{1.16}$$

получим:

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^-(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr \le 2^p\left(\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr + |u_\alpha(0)|^p\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^-(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr < +\infty. \tag{1.17}$$

Далее, $|u_\alpha| = u_\alpha^+ + u_\alpha^-$, поэтому с учетом (1.15), (1.17), а также неравенства (1.16), получим:

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u_\alpha(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr < +\infty.$$

Учитывая ограниченность оператора гармонического сопряжения в пространстве L^p_γ при всех $0<p<+\infty$, (см. [37]), получаем:

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr < +\infty, \tag{1.18}$$

где $h_\alpha \in H(D)$, $u_\alpha = \Re h_\alpha$.

Пусть $\beta' = \beta - (\alpha+1)$. Обозначим

$$\psi(z) = D^{-\beta'}h_\alpha(z) = \beta'\int\limits_0^1 (1-s)^{\beta'-1}h_\alpha(sz)ds,\ z\in D, \tag{1.19}$$

где $D^{-\beta'}$ — оператор интегро-дифференцирования (см. [41, с. 41], [9, с. 567]).

С учетом введенного обозначения $h_\alpha(z) = D^{-(\alpha+1)}h(z)$. Очевидно, что $\psi \in H(D)$. Докажем, что $\psi \in H^1$, где H^1 — класс Харди.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi(re^{i\varphi})| d\varphi \le \beta' \int\limits_0^1 (1-s)^{\beta'-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(sre^{i\varphi})| d\varphi ds.$$

Из (1.18) получаем:

$$\int\limits_R^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \to 0, R \to 1-0.$$

Поэтому $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(Re^{i\varphi})| d\varphi \le \frac{c_\alpha}{(1-R)^{\frac{\gamma+1}{p}}}$. А значит,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi(re^{i\varphi})| d\varphi \le c_\alpha \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta'-1}}{(1-sr)^{\frac{\gamma+1}{p}}} ds \le \frac{c}{\beta' - \frac{\gamma+1}{p}}.$$

По условию теоремы $\beta > (\alpha+1) + \frac{\gamma+1}{p}$, то есть $\beta' > \frac{\gamma+1}{p}$, поэтому $\psi \in H^1$.

Так как $\psi \in H^1$, то ψ представима в виде интеграла Коши:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})}{(1-e^{-i\theta}z)} d\theta. \tag{1.20}$$

С другой стороны, с учетом представления (1.19), $\psi(z) = D^{-\beta'}(D^{-(\alpha+1)}h(z))$, откуда, согласно свойству интегро-дифференциальных операторов, получаем $\psi(z) = D^{-(\alpha+\beta'+1)}h(z) = D^{-\beta}h(z)$. Применяя обратный оператор к функции $\psi(z)$, будем иметь:

$$h(z) = D^\beta \psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}) d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+1}}, \; z \in D,$$

где $\psi \in H^1$, $\beta > (\alpha+1) + \frac{\gamma+1}{p}$.

Докажем теперь, что $\psi \in B^s_{1,p}$, где $s = \beta - (\alpha+1) - \frac{\gamma+1}{p}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < s < 2$.

Неравенство (1.18) с учетом введенных обозначений в (1.19) можно переписать в виде:

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D^{\beta'}\psi(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty.$$

Принимая во внимание теперь представление (1.20), будем иметь:

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}re^{i\varphi})^{\beta'+1}} \right| d\varphi \right)^p dr < +\infty,$$

где $\psi \in H^1$, $\beta' > \frac{\gamma+1}{p}$.

Как установлено в [37, с. 1437], в этом случае функция $\psi \in B^s_{1,p}$, где $s = \beta' - \frac{\gamma+1}{p} = \beta - (\alpha+1) - \frac{\gamma+1}{p}$. Итак, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) установлена.

Перейдем к доказательству импликации 2) $\Rightarrow$ 1).

Учитывая теорему 1.1, для этого достаточно показать, что функция $h(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+1}} \right) \in N^p_{\alpha,\gamma}$, где $\psi \in B^s_{1,p}$, $s = \beta - (\alpha+1) - \frac{\gamma+1}{p}$. Доказательство принадлежности функции $h(z)$ рассматриваемому классу с учетом вышеизложенных замечаний сводится к доказательству сходимости интеграла

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty, \tag{1.21}$$

где $h_\alpha(z) = D^{-(\alpha+1)}h(z) = D^{\beta'}\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta'+1}}$, $\beta' = \beta - (\alpha+1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < \beta' - \frac{\gamma+1}{p} < 2$.

Оценка (1.21) при выбранных ограничениях на β' и s установлена в работе Ф.А. Шамояна (см. [37, с. 1440]). Теорема 1.2 доказана полностью.

Замечание 1.1. При доказательстве теорем этого параграфа применялись методы, разработанные Ф.А. Шамояном в работе [37].

1.2 О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи конечного множества точек на границе

Пусть $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1}$ – m точек на единичной окружности $\mathbb{T}$. Обозначим $\rho(z,E) = dist(z,E)$ – расстояние от произвольной точки $z \in D$ до множества E. Рассмотрим класс

$$H_\varphi(E) = \left\{ f \in H(D) : \ln|f(z)| \le c_f \varphi\left(\frac{1}{\rho(z,E)}\right), z \in D \right\},$$

где φ - монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$.

Как уже было отмечено во введении, в том случае, когда E состоит из одной точки, $\varphi(t) = t^q$, $0 < q < 1$, полное описание корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ было получено в работах М.М. Джрбашяна [7], Х. Шапиро и А. Шилдса [59]. Для случая $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = \ln t$ результат окончательного характера был получен К. Сейпом (см. [55]). Полное описание корневых множеств и факторизационное представление класса $H_\varphi(E)$, $E = \mathbb{T}$, в случае более общих весов получено еще в 80-х гг. Ф.А. Шамояном (см. [34], [35], [48]). Приведем некоторые результаты из этих работ.

Пусть $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1,+\infty)$, такая что

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \beta_\varphi, \ \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi, \tag{1.22}$$

и $1 < \beta_\varphi \le \alpha_\varphi < +\infty$.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема А. *Пусть* $\Delta_{k,l} = \left\{1 - \frac{1}{2^k} \le |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{\pi l}{2^k} \le arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k}\right\}$ *- разбиение Уитни единичного круга,* $k = 0, 1, 2, ..., l = -2^k, ..., 2^k - 1$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *- последовательность точек из* D, $n_{k,l}$ *- число точек* $\{z_k\}$ *в прямоугольнике* $\Delta_{k,l}$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $Z = Z_f$ *для* $f \in H_\varphi(\mathbb{T})$,

2. $n_{k,l} \le c\varphi(2^k)$, $k = 1, 2, ..., l = -2^k, ..., 2^k - 1$.

Теорема Б. *Пусть* $\psi(x)$ *- монотонно убывающая функция на полуоси* $(0, +\infty)$, *такая что* $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$, $\varphi(x)$ *– монотонно возрастающая поло-*

жительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1,+\infty)$, удовлетворяющая условиям (1.22). Тогда следующие утверждения равносильны:

1. *Для произвольной последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in H_\varphi(\mathbb{T})$, сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \psi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right) < +\infty$;*

2. *$\int\limits_1^{+\infty} \psi(x)\varphi(x)dx < +\infty$.*

В дальнейшем для случая, когда $E \subset \mathbb{T}$ - конечное множество точек на единичной окружности, в работе [45] было установлено следующее утверждение:

Теорема B. *Если $f \in H_\varphi(E)$, $\varphi(t) = t^q$, $q \geq 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность нулей функции f, то сходится ряд:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho(z_k, E))^{(q-1+\varepsilon)^+}(1-|z_k|) < +\infty,$$

где ε – сколь угодно малое положительное число.

В недавних работах Л. Голинского, С. Купина, С. Фаворова, Л. Радченко последний результат был обобщен в различных направлениях в (см. [52]-[54]). В частности, в работе [54], авторы получили аналог необходимого условия в теореме Б для класса $H_\varphi(E)$. Однако полного описания корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ до сих пор не было получено.

Нами для случая конечного множества $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1} \subset \mathbb{T}$ установлены следующие результаты:

Теорема 1.3. *Пусть φ – монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1,+\infty)$, такая что*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi. \tag{1.23}$$

Если $f \in H_\varphi(E)$ и $Z_f = \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то для любого $R > 1$ справедлива оценка

$$\sum_{\frac{1}{R} \leq \rho(z_n, E) \leq 2} (1-|z_n|^2) \leq c_F \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int\limits_1^R \frac{\varphi(x)}{x^2}dx \right). \tag{1.24}$$

Обратно,
а) если $\alpha_\varphi \notin \mathbb{Z}_+$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из* D, *удовлетворяющая условию* (1.24),
б) если $\alpha_\varphi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из* D, *удовлетворяющая наряду с условием* (1.24) *условию*

$$\sup_{0\le k\le m-1}\Big|\sum_{\frac{1}{R}\le\rho(z_n,E)\le 2}\left(i\frac{e^{i\tau_k}+z_n}{e^{i\tau_k}-z_n}\right)^{-\alpha_\varphi}\Big|\le M,\ M>0,$$

причем

$$\sup_{x>1}\frac{x^{\alpha_\varphi}}{\varphi(x)}<+\infty,$$

тогда можно построить функцию $g \in H_\varphi(E)$, *нули которой совпадают с точками последовательности* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

В теореме 1.4 получено необходимое и достаточное условие на мажоранту φ, при котором корневые множества функций из класса $H_\varphi(E)$ удовлетворяют условию Бляшке:

Теорема 1.4. *Следующие утверждения равносильны:*

1. *Для любой последовательности* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in H_\varphi(E)$, *выполняется условие Бляшке, т.е.*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|z_n|)<+\infty,$$

2. $$\int_1^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx<+\infty, \tag{1.25}$$
где $\varphi(x)$ *– монотонно возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1,+\infty)$.

В следующей теореме доказан аналог теоремы Б для класса $H_\varphi(E)$:

Теорема 1.5. *Пусть* φ *– монотонно возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1,+\infty)$, *такая что* $\alpha_\varphi \ge 1$, $f \in H_\varphi(E)$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $\psi(x) \downarrow 0$, $x \to 0+$, $\psi \in C^{(1)}(0,+\infty)$, *и при этом*

$$\lim_{R\to+\infty}\psi\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\varphi(R)}{R}<+\infty.$$

Тогда если $\int\limits_1^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\varphi(x)}{x^3}dx < +\infty$, *то ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi(\rho(z_k, E))(1 - |z_k|) < +\infty. \tag{1.26}$$

Обратно, если $\int\limits_1^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\varphi(x)}{x^3}dx = +\infty$, *то существует отличная от тождественного нуля функция* $g \in H_\varphi(E)$, *такая что* $g(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *для которой ряд* (1.26) *расходится.*

Замечание 1.2. Если в формулировке теоремы 1.5 положить $0 < \alpha_\varphi < 1$, то ряд (1.26) будет сходиться даже в том случае, когда $\psi(x) > \delta > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ (см., например, [48]). Отметим также, что метод доказательства теорем 1.3-1.5 существенно отличается от методов, используемых в статьях [45], [52]-[54], и впервые был применен Ф.А. Шамояном в работах [56], [40].

Замечание 1.3. Интересно сравнить результат теоремы 1.4 для случая нулей, расположенных на радиусе (0,1) единичного круга, со следующей теоремой Хеймана-Коренблюма (см. [51]):

Теорема Г. *Пусть* φ *– монотонно возрастающая положительная функция на* $\mathbb{R}_+$. *Следующие утверждения равносильны:*

1. *Для любой последовательности* $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in H_\varphi(\mathbb{T})$, $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *выполняется условие Бляшке:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - r_n) < +\infty,$$

2.

$$\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx < +\infty. \tag{1.27}$$

Из сходимости интеграла (1.27) следует сходимость интеграла (1.25), но обратное неверно. На это указывает пример функции $\varphi(x) = \frac{x}{(\ln 2x)^2}$, $x \geq 1$. Доказательство основных результатов опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1.5. *Пусть* $w = \rho e^{i\theta} = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$ *– конформное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость* C_+, *где* $0 \le \tau_0 \le 2\pi$. *Тогда при всех* $0 < \theta < \pi$, $1 \le \rho < +\infty$ *справедливы оценки:*

$$\frac{\sin\theta}{\rho} \le 1 - |z|^2 \le \frac{4\sin\theta}{\rho}, \tag{1.28}$$

$$\frac{1}{\rho} \le |e^{i\tau_0} - z| \le \frac{2}{\rho}. \tag{1.29}$$

Доказательство.
Поскольку $w = \rho e^{i\theta} = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$, то $z = e^{i\tau_0}\frac{1+iw}{1-iw}$, откуда

$$1 - |z|^2 = \frac{4\rho\sin\theta}{1 + 2\rho\sin\theta + \rho^2} = \frac{4\sin\theta}{\rho} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2\sin\theta}{\rho} + 1\right)}.$$

Учитывая, что $1 \le \rho < +\infty$ и $\sin\theta > 0$, получаем:

$$1 \le \frac{1}{\rho^2} + \frac{2\sin\theta}{\rho} + 1 \le 1 + 2\sin\theta + 1 \le 4,$$

откуда непосредственно следует неравенство (1.28). Поскольку $w = \rho e^{i\theta} = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$, то $e^{i\tau_0} - z = \frac{2}{1-iw}$. Далее,

$$|1 - z| = \frac{2}{|1 + \rho\sin\theta - i\rho\cos\theta|} = \frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{2\sin\theta}{\rho} + 1}},$$

откуда, снова учитывая, что $1 \le \rho < +\infty$ и $\sin\theta > 0$, получим неравенство (1.29). Лемма 1.5 доказана.

Следующее утверждение непосредственно следует из определения класса $H_\varphi(E)$:

Лемма 1.6. *Класс* $H_\varphi(E)$ *совпадает с классом функций*

$$H^*_\varphi(E) = \left\{ f \in H(D) : \ln|f(z)| \le c_f \left(\sum_{k=0}^{m-1} \varphi\left(\frac{1}{|z - e^{i\tau_k}|} \right) \right), z \in D \right\},$$

где φ *– возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$.

Будем исследовать структуру корневых множеств класса H^*_φ.

При доказательстве основных теорем этого параграфа существенную роль играет следующее утверждение, необходимая часть которого установлена в работе [40], а достаточная часть – в работе [3]:

Теорема Д. *Пусть $\varphi(t)$ - монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$, $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$, $\alpha_\varphi > 1$.*

Если последовательность $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$, $\rho_n \geq \rho_0 > 0$, точек из верхней полуплоскости C_+ является корневым множеством некоторой ненулевой функции из класса $H^\infty_\varphi(C_+) = \{f \in H(C_+) : \ln|f(w)| \leq c\varphi(|w|)\}$, то

$$\sum_{0<\rho_0<\rho_n\leq R} \frac{\sin\theta_n}{\rho_n} \leq C\frac{\varphi(R)}{R}, \tag{1.30}$$

где $C > 0$.

Обратно, если $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$, $\rho_n \geq \rho_0 > 0$ - произвольная последовательность точек из верхней полуплоскости C_+, удовлетворяющая условию (1.30) *и при $\alpha_\varphi \in \mathbb{Z}_+$ условиям:*

$$\Big|\sum_{0<\rho_0<\rho_n\leq R} \frac{1}{\rho_n^{\alpha_\varphi} e^{i\alpha_\varphi\theta_n}}\Big| \leq M, 0 < R < +\infty,$$

$$\sup_{x>1} \frac{x^{\alpha_\varphi}}{\varphi(x)} < +\infty,$$

то можно построить функцию $g \in H^\infty_\varphi(C_+)$, нули которой совпадают с последовательностью $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$.

Перейдем к доказательству основных результатов параграфа.

Доказательство теоремы 1.3.

Фиксируем $e^{i\tau_0} \in E$. Введем обозначение: $l_E = \min\limits_{0\leq k,j\leq m-1} |e^{i\tau_k} - e^{i\tau_j}|$, $k \neq j$. Очевидно, что $l_E > 0$. Отобразим единичный круг D на верхнюю полуплоскость C_+ с помощью функции $w = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$.

Обозначим через $x_k = i\frac{e^{i\tau_0}+e^{i\tau_k}}{e^{i\tau_0}-e^{i\tau_k}}$, т.е. $e^{i\tau_k} = e^{i\tau_0}\frac{x_k-i}{x_k+i}$, $x_k \in \mathbb{R}$.

Выясним, какие условия накладываются на x_k.

$$|x_k| = 2\left|\frac{x_k + i - i}{2}\right| \leq 2\frac{|x_k + i|}{2} + 1 = \frac{2}{|e^{i\tau_0} - e^{i\tau_k}|} + 1 \leq \frac{2}{l_E} + 1.$$

Таким образом, все точки x_k находятся внутри полукруга $C_E^+ := \left\{ w \in C_+ : |w| \leq \frac{2}{l_E} + 1 \right\}$. Пусть $r_E = 2\left(\frac{1}{l_E} + 1\right)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что множество E состоит из одной точки, т.е. $E = \{e^{i\tau_0}\}$.

Рассмотрим функцию $F(w) = f\left(e^{i\tau_0}\frac{iw+1}{iw-1}\right)$, $w \in C_+$, аналитическую в верхней полуплоскости. Так как $f \in H_\varphi^*$, то

$$\ln|F(w)| \leq c_f \varphi\left(\frac{|w+i|}{2}\right) \leq c_f \varphi\left(\frac{|w|+1}{2}\right) \leq c_f \varphi(|w|), \tag{1.31}$$

при всех $w : |w| \geq 1$.

Обозначим $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ - последовательность нулей функции F. Пусть далее $F_\eta(w) = F(w + i\eta)$, $\eta > 0$. Очевидно, что F_η - аналитическая в полуплоскости $\Im w > -\eta$. Применим к функции $F_\eta(w)$ формулу Карлемана в полукольце $C_{r_E,R} := \{w \in C_+ : r_E \leq |w| \leq R\}$ (см., например, [25, с. 139]):

$$\sum_{r_E \leq \widetilde{\rho}_n \leq R} \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_n} - \frac{\widetilde{\rho}_n}{R^2}\right) \sin\widetilde{\theta}_n = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi \ln|F_\eta(Re^{i\theta})| \sin\theta d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{r_E \leq |x| \leq R} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2}\right) \ln|F_\eta(x)||F_\eta(-x)|dx + A_\eta(R, f),$$

где $\{\widetilde{\rho}_n e^{i\widetilde{\theta}_n}\}$ - последовательность нулей функции F_η в полукольце $C_{r_E,R}$, $A_\eta(R, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \Im\{\left(\frac{e^{-i\theta}}{r_E} - \frac{r_E e^{i\theta}}{R^2}\right) \ln F_\eta(r_E e^{i\theta})\} d\theta$.

Заметим, что все слагаемые в левой части равенства неотрицательны, поэтому, принимая во внимание оценку (1.31), получим:

$$\sum_{r_E \leq \widetilde{\rho}_n \leq R} \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_n} - \frac{\widetilde{\rho}_n}{R^2}\right) \sin\widetilde{\theta}_n \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_f \left(\frac{\varphi(R+\eta)}{R} + \int_{r_E}^{R} \frac{\varphi(x+\eta)}{x^2} dx\right) + A_\eta(R, f).$$

В условиях теоремы можно перейти к пределу при $\eta \to 0+$. Получим:

$$\sum_{r_E\le\rho_n\le R}\left(\frac{1}{\rho_n}-\frac{\rho_n}{R^2}\right)\sin\theta_n\le C_f\left(\frac{\varphi(R)}{R}+\int\limits_{r_E}^{R}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right)+A(R,f), \qquad (1.32)$$

где $A(R,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \Im\{\left(\frac{e^{-i\theta}}{r_E}-\frac{r_Ee^{i\theta}}{R^2}\right)\ln F(r_Ee^{i\theta})\}d\theta=O(1)$ при $R\to+\infty$.

Положим теперь $R'=\frac{R}{2}$. Выбирая нули только из кольца $r_E\le\rho_n\le R'$, из (1.32) получим:

$$\sum_{r_E\le\rho_n\le R'}\frac{\sin\theta_n}{\rho_n}\le C_f\left(\frac{\varphi(2R')}{2R'}+\int\limits_{r_E}^{2R'}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right). \qquad (1.33)$$

Поскольку $\int\limits_{r_E}^{2R'}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx=\int\limits_{r_E}^{R'}...+\int\limits_{R'}^{2R'}...\le\int\limits_{r_E}^{R'}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx+\frac{\varphi(2R')}{2R'}$, ввиду возрастания функции $\varphi(x)$, то оценка (1.33) эквивалентна оценке

$$\sum_{r_E\le\rho_n\le R'}\frac{\sin\theta_n}{\rho_n}\le C_f\left(\frac{\varphi(2R')}{R'}+\int\limits_{r_E}^{R'}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right). \qquad (1.34)$$

Теперь заметим, что для произвольного положительного $\varepsilon>0$ при достаточно больших x справедливо

$$\varphi(cx)\le c^{\alpha_\varphi+\varepsilon}\varphi(x), \qquad (1.35)$$

где $c>0$.

Действительно, из (1.23) следует, что для всех $t\ge t_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)}<\alpha_\varphi+\varepsilon$, поэтому

$$\int\limits_x^{cx}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt\le(\alpha_\varphi+\varepsilon)\int\limits_x^{cx}\frac{dt}{t},$$

а значит, $\ln\frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)}\le(\alpha_\varphi+\varepsilon)\ln c$, откуда следует (1.35).

Принимая во внимание оценку (1.35), из (1.34) получим:

$$\sum_{r_E \le \rho_n \le R} \frac{\sin\theta_n}{\rho_n} \le C_f \left(2^{\alpha_\varphi+\varepsilon} \frac{\varphi(R)}{R} + \int\limits_{r_E}^{R} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right). \qquad (1.36)$$

Ввиду оценок (1.28), (1.29), неравенство (1.36) эквивалентно неравенству

$$\sum_{\frac{1}{R} \le |e^{i\tau_0} - z_n| \le 2} (1 - |z_n|^2) \le C_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int\limits_{r_E}^{R} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right). \qquad (1.37)$$

В силу произвольности выбора точки $e^{i\tau_0}$ из множества $E \subset \mathbb{T}$ и учитывая лемму 1.6, делаем вывод о справедливости оценки (1.24). Необходимость доказана.

Перейдем к доказательству обратного утверждения.

Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность точек из D, удовлетворяющая условию (1.24), $\alpha_\varphi \notin \mathbb{Z}_+$, $\alpha_\varphi > 1$. Докажем, что можно построить функцию $g \in H_\varphi(E)$, нули которой совпадают с точками последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Как и при доказательстве необходимости, отобразим единичный круг на верхнюю полуплоскость с помощью функции $w = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$. Точки последовательности $\{z_n\} \in D$ отобразятся соответсвенно на точки последовательности $\{\rho_n e^{i\theta_n}\} \in C_+$, $\rho_n e^{i\theta_n} = i\frac{e^{i\tau_0}+z_n}{e^{i\tau_0}-z_n}$ удовлетворяющие, ввиду леммы 1.5, оценке (1.36).

Применяя правило Лопиталя, легко убедиться в справедливости оценки:

$$\int\limits_{r_E}^{R} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \le C \frac{\varphi(R)}{R}.$$

Поэтому неравенство (1.24) для $E = \{e^{i\tau_0}\}$ можно переписать в виде:

$$\sum_{\frac{1}{R} \le |e^{i\tau_0} - z_n| \le 2} (1 - |z_n|^2) \le C \frac{\varphi(R)}{R}. \qquad (1.38)$$

В силу леммы 1.5, неравенство (1.38) эквивалентно (1.30).

По теореме Д, если последовательность точек из верхней полуплоскости $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$ удовлетворяет условию (1.30) при $\alpha_\varphi > 1$, то можно построить функцию $g(w) \in H(C_+)$, такую что $\ln|g(w)| \leq \varphi(|w|)$, нули которой совпадают с последовательностью $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$. Рассмотрим функцию $G(z) = g\left(i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}\right)$. Очевидно, $G(z) \in H(D)$. Более того, $G \in H_\varphi(E)$. Нули функции G совпадают с последовательностью $\{z_n\}$, $z_n = \frac{i\rho_n e^{i\theta_n}+1}{i\rho_n e^{i\theta_n}-1}$ и выполняется оценка (1.38).

Справедливость пункта б) устанавливается аналогичным образом. Достаточность доказана. Таким образом, теорема 1.3 доказана полностью.

Для удобства изложения докажем сначала теорему 1.5.

Доказательство теоремы 1.5.

Фиксируем $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Не ограничивая общности, можно полагать, что $\tau_0 = 0$. Проведем доказательство для случая $E = \{e^{i\tau_0}\}$.

Отобразим, как и выше, единичный круг D на верхнюю полуплоскость C_+ с помощью функции $w = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$. Точки последовательности $\{z_n\} \in D$, $\{z_n\} = Z_f$, отобразятся соответственно на точки последовательности $\{\rho_n e^{i\theta_n}\} \in C_+$, $\rho_n e^{i\theta_n} = i\frac{e^{i\tau_0}+z_n}{e^{i\tau_0}-z_n}$.

Пусть $s(\rho) = \sum\limits_{r_E<\rho_n\leq\rho} \frac{\sin\theta_n}{\rho_n}$, тогда для любой функции $\psi \in C^{(1)}(0,+\infty)$ справедливо равенство:

$$\sum_{r_E<\rho_n\leq R} \psi\left(\frac{1}{\rho_n}\right)\frac{\sin\theta_n}{\rho_n} = \int\limits_{r_E}^{R} \psi\left(\frac{1}{x}\right) ds(x) = I(R).$$

Следовательно,

$$I(R) = s(R)\psi\left(\frac{1}{R}\right) + \int\limits_{r_E}^{R} \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}s(x)dx.$$

Но $\psi'\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$, поэтому, учитывая, что $s(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$ по теореме Д, получаем:

$$I(R) \leq \frac{\varphi(R)}{R}\psi\left(\frac{1}{R}\right) + \int\limits_{r_E}^{R} \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\varphi(x)}{x^3}dx.$$

В условиях теоремы $I(R)$ ограничено, значит, сходится ряд

$$\sum_{r_E<\rho_n\leq R} \psi\left(\frac{1}{\rho_n}\right)\frac{\sin\theta_n}{\rho_n} < +\infty. \tag{1.39}$$

Но (1.39) ввиду леммы 1.5 эквивалентно (1.26).

Перейдем к доказательству обратного утверждения этой теоремы. Разобьем полуинтервал $[0,1)$ на полузамкнутые интервалы $\Delta_k = \left[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Построим последовательность $\{r_k\}$ следующим образом: $r_k \in \Delta_k$, т.е. $1-\frac{1}{2^k} \le r_k < 1-\frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0,1,2,\ldots$, причем кратность r_k равна $[\varphi(2^k)]$, где $[a]$ – целая часть $a \in \mathbb{R}$. Докажем, что если $\int\limits_{r_E}^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\varphi(x)}{x^3}dx = +\infty$, то ряд (1.26) расходится. Обозначим Ω_k полузамнутый интервал $[2^k, 2^{k+1})$, $k = 0,1,2,\ldots$. Тогда $[1,+\infty) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}\Omega_k$.

Для любого $p > 1$ справедливо:

$$\int\limits_1^{2^p} \frac{\varphi(t)}{t^3}\psi'\left(\frac{1}{t}\right)dt = \sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_{\Omega_k}\frac{\varphi(t)}{t^3}\psi'\left(\frac{1}{t}\right)dt = \sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\varphi(t)}{t}\psi'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{p-1}\frac{\varphi(2^{k+1})}{2^k}\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}\psi'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt = 2\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\varphi(2^{k+1})}{2^{k+1}}\left(\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)-\psi\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) \le$$

$$\le 2\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\varphi(2^{k+1})}{2^{k+1}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right),$$

ввиду того, что $\psi\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) > 0$, $k = 0,1,2,\ldots,p-1$.

Применяя оценку (1.35), окончательно получим:

$$\int\limits_1^{2^p}\frac{\varphi(t)}{t^3}\psi'\left(\frac{1}{t}\right)dt \le c_\varphi\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\varphi(2^k)}{2^k}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Так как интеграл в левой части неравенства стремится к бесконечности при $p \to +\infty$, то расходится ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi(2^k)}{2^k}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) = +\infty. \tag{1.40}$$

Но ряды (1.26) и (1.40) – равнорасходящиеся при указанном выборе последовательности $\{z_k\}$, следовательно, ряд (1.26) расходится.

Докажем теперь, что произведение М.М. Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$ (см.

(0.3)) с нулями $z_k = r_k$, $k = 1, 2, ...$, где $r_k \in \Delta_k$, принадлежит классу $H_\varphi(E)$.

Покажем, что в условиях теоремы произведение $\pi_\beta(z, r_k)$ сходится при всех $\beta > \alpha_\varphi - 2$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} = \sum_{k\geq 1}\sum_{r_m\in\Delta_k}(1-r_m)^{\beta+2}n_m \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k((\beta+2)-(\alpha_\varphi+\varepsilon))}.$$

Очевидно, ряд сходится при всех $\beta > \alpha_\varphi - 2$, $0 < \varepsilon < \beta + 2 - \alpha_\varphi$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2}$ следует абсолютная и равномерная сходимость бесконечного произведения $\pi_\beta(z, z_k)$.

Теперь докажем, что $\pi_\beta(z, r_k) \in H_\varphi(E)$. Используя известную оценку произведения М. Джрбашяна (1.9), получим:

$$\ln|\pi_\beta(z, r_k)| \leq c(\beta)\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-r_k}{|1-r_kz|}\right)^{\beta+2} = c(\beta)\sum_{k\geq 1}\sum_{r_m\in\Delta_k}n_m\cdot\left(\frac{1-r_m}{|1-r_mz|}\right)^{\beta+2},$$

$$\ln|\pi_\beta(z, r_k)| \leq c(\beta)\sum_{k\geq 1}\frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_kz|^{\beta+2}}. \tag{1.41}$$

Пусть $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |1-z| < \frac{1}{2^n}$, где n - фиксированное натуральное число. Разобьем ряд на части:

$$I = \sum_{k\geq 1}\frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_kz|^{\beta+2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(...) + \frac{\varphi(2^n)}{2^{n(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_nz|^{\beta+2}} + \frac{\varphi(2^{n+1})}{2^{(n+1)(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_{n+1}z|^{\beta+2}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty}(...) =$$

$$= I_1 + (I_n + I_{n+1}) + I_2.$$

Рассмотрим сумму I_1. Оценим снизу $|1-r_kz|$ при $1 \leq k \leq n-1$:

$$|1-r_kz| = |(1-r_k)+r_k(1-z)| \geq (1-r_k) - |1-z| > (1-r_k) - \frac{1-r_k}{2} > \frac{1}{2^{k+2}}.$$

С учетом этой оценки получаем:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}} \frac{1}{|1 - r_k z|^{\beta+2}} \leq 2^{2(\beta+2)} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(2^k).$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \varphi(2^k) \leq 2 \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\varphi(t)}{t} dt$, поэтому справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(2^k) \leq 2 \int\limits_1^{2^n} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

Покажем, что $\int\limits_1^y \frac{\varphi(t)}{t} dt \sim \frac{1}{\alpha_\varphi} \varphi(y)$ при $y \to +\infty$, $0 < \alpha_\varphi < +\infty$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\int\limits_1^y \frac{\varphi(t)}{t} dt}{\varphi(y)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\varphi(y)}{y \varphi'(y)} = \frac{1}{\alpha_\varphi}.$$

Поэтому заключаем:

$$I_1 \leq c_{\varphi,\beta} \varphi(2^n).$$

Рассмотрим I_2. Оценим снизу $|1 - r_k z|$ при $k \geq n+2$:

$$|1 - r_k z| = |(1-z) + z(1-r_k)| \geq |1-z| - (1-r_k) > |1-z| - \frac{1}{2^{n+2}} > \frac{|1-z|}{2} \geq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

С учетом этой оценки получаем:

$$I_2 \leq \sum_{k \geq n+2} \frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}} 2^{(n+2)(\beta+2)} \leq 2^{(n+2)(\beta+2)} \sum_{k \geq n+2} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}} dt \leq$$

$$\leq 2^{(n+2)(\beta+2)} \int\limits_{2^{n+2}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}} dt.$$

Покажем, что $\int\limits_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}} dt \sim \frac{1}{(\beta+2) - \alpha_\varphi} \cdot \frac{\varphi(x)}{x^{\beta+2}}$, при $x \to +\infty$. Снова воспользуемся правилом Лопиталя при вычислении предела:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}}dt}{\frac{\varphi(x)}{x^{\beta+2}}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\varphi(x)}{x^{\beta+3}}}{\frac{(x\varphi'(x)-(\beta+2)\varphi(x))x^{\beta+1}}{x^{2(\beta+2)}}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-(\beta+2)}=\frac{1}{(\beta+2)-\alpha_\varphi}>0,$$

поскольку $\beta+2>\alpha_\varphi$. Поэтому заключаем:

$$I_2\le c_\varphi\varphi(2^{n+2})\le\widetilde{c}_\varphi\varphi(2^n).$$

Осталось оценить сумму:

$$I_n+I_{n+1}=\frac{\varphi(2^n)}{2^{n(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_nz|^{\beta+2}}+\frac{\varphi(2^{n+1})}{2^{(n+1)(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_{n+1}z|^{\beta+2}}.$$

Поскольку $(1-r_n)\le|1-r_nz|$ при всех $z\in D$, $r_n\in(0,1)$, $n=1,2,...$, и с учетом неравенства (1.35), получим:

$$I_n+I_{n+1}\le\varphi(2^n)+\varphi(2^{n+1})=c_\varphi\varphi(2^n).$$

Объединяя оценки для I_1,I_2, I_n+I_{n+1}, из (1.41) получаем:

$$\ln|\pi_\beta(z,r_k)|\le C(\varphi)\varphi(2^n),$$

то есть

$$\ln|\pi_\beta(z,r_k)|\le C(\varphi)\varphi\left(\frac{1}{|1-z|}\right).$$

Таким образом, $\pi_\beta(z,r_k)\in H_\varphi(E)$.

В силу произвольности выбора τ_0 и с учетом леммы 1.6, делаем вывод о справедливости теоремы для общего случая, т.е. для $E=\{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1}\in\mathbb{T}$. Теорема 1.5 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1.4.

Сначала заметим, что если $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx<+\infty$, то

$$\frac{\varphi(R)}{R} \to 0,\ R \to +\infty. \tag{1.42}$$

Импликация 2) $\to$ 1) сразу следует из оценок (1.24) и (1.42).

Импликация 1) $\to$ 2) непосредственно следует из доказательства второй части теоремы 1.5. Теорема 1.4 доказана.

1.3 О нулях аналитических классов И. И. Привалова

Рассмотрим класс И. И. Привалова (см. [21]):

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})| \right)^p d\theta < +\infty \right\}, 0 < p < +\infty.$$

Сначала заметим, что из неравенства Гёльдера сразу следует, что при $1 \leq p < +\infty$ справедливо включение $\Pi_p \subseteq N$, и поэтому для нулевого множества каждой функции $f \in \Pi_p$ выполняется условие Бляшке. Обратное тоже верно: любая последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ с условием Бляшке является корневым множеством некоторой функции из класса Π_p $(1 \leq p < +\infty)$. В качестве такой функции можно выбрать произведение Бляшке. Однако при $0 < p < 1$ условие Бляшке уже не является необходимым.

В работе [39] был получен следующий результат:

Теорема E. *Если $f \in \Pi_p$, $0 < p < 1$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, ...$, $f \not\equiv 0$, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p}+\varepsilon} < +\infty, \tag{1.43}$$

при любом положительном $\varepsilon > 0$.

Обратно, существуют функция $f \in \Pi_p$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $z_k \in D$, $k = 1, 2, ...$, такие что $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, ...$, $f \not\equiv 0$, но

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1+\varepsilon}{p}} \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) = +\infty$$

при любом положительном $\varepsilon > 0$.

В этом параграфе нами получено необходимое условие на нули функций из класса И. И. Привалова, близкое к достаточному. Оказывается, множитель

$(1-|z_k|)^{\varepsilon}$ в условии (1.43) можно заменить множителем $\ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)$, то есть справедлива

Теорема 1.6. *Если f — тождественно отличная от нуля функция из класса $\Pi_p\,(0<p<1)$, $f(z_k)=0$, $k=1,2,...$, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\frac{1}{p}}\ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)<+\infty, \tag{1.44}$$

при любом положительном $\varepsilon>0$.

Более того, справедлива

Теорема 1.7. *Если f — тождественно отличная от нуля функция из класса $\Pi_p\,(0<p<1)$, $f(z_k)=0$, $k=1,2,...$, $f(0)=1$, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\omega(1-|z_k|)(1-|z_k|)^2<+\infty, \tag{1.45}$$

где $\omega\in C^{(1)}(0,1]\bigcap\Omega$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int\limits_0^1\frac{\omega^p(u)}{u^{2(1-p)}}du<+\infty, \tag{1.46}$$

$$\alpha_\omega=\varliminf_{t\to 0}\frac{\omega'(t)\cdot t}{\omega(t)}>-1. \tag{1.47}$$

Напомним, что Ω – множество всех измеримых положительных функций на $(0,1]$ с условием (0.11).

Доказательство теоремы 1.7.

Из формулы Иенсена при $f(0)=1$ имеем:

$$\int\limits_0^r\frac{n(t)}{t}dt\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi.$$

Умножим обе части неравенства на функцию $\omega(1-r)$, удовлетворяющую условиям теоремы, и проинтегрируем по $r \in [0,1)$:

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r) \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t} dtrdr \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \omega(1-r) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi rdr. \qquad (1.48)$$

Зададим диадическое разбиение $\Delta_{k,l}$ единичного круга (см. (0.13)).

Возведем обе части неравенства (1.48) в степень $0 < p < 1$ и рассмотрим интеграл в правой его части:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \omega(1-r) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi rdr \right)^p \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_{k,l}} \omega(1-|z|) \ln^+ |f(z)| dm_2(z) \right)^p \\ &\le \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{z \in \Delta_{k,l}} \left(\ln^+ |f(z)| \right) \cdot \omega(1-|z_{k,l}|) \cdot |\Delta_{k,l}| \right)^p, \end{aligned}$$

где $z_{k,l}$ - центр криволинейного прямоугольника $\Delta_{k,l}$.

Но, как установлено в [41, с. 39],

$$c_1 |\Delta_{k,l}| \leqslant (1-|z_{k,l}|)^2 \leqslant c_2 (1-|z|)^2, \ \omega(1-|z_{k,l}|) \leqslant c_3 \omega(1-|z|).$$

Поэтому

$$I \le c_p \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{z \in \Delta_{k,l}} \left(\ln^+ |f(z)| \right)^p \omega^p(1-|z|)(1-|z|)^{2p}.$$

Продолжим оценку, используя результат работы [41] (см. теорему 2.10):

$$I \le c_p \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega^p(1-r)(1-r)^{2p-2} \left(\ln^+ |f(re^{i\varphi})| \right)^p d\varphi rdr \le$$

$$\le \sup_{0<r<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\varphi})| \right)^p d\varphi \times \int\limits_0^1 \omega^p(1-r)(1-r)^{2p-2} rdr.$$

Таким образом, имеем:

$$\left(\int\limits_0^1 \omega(1-r)\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}dtrdr\right)^p \leq$$

$$\leq \sup_{0<r<1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+|f(re^{i\varphi})|\right)^p d\varphi \times c_p\int\limits_0^1 \omega^p(1-r)(1-r)^{2p-2}rdr.$$

Так как $f \in \Pi(p)$, то из последней оценки получаем:

$$\left(\int\limits_0^1 \omega(1-r)\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}dtrdr\right)^p \leq c_p\int\limits_0^1 \omega^p(1-r)(1-r)^{2p-2}dr. \tag{1.49}$$

По условию (1.46) теоремы интеграл в правой части неравенства сходится, значит, сходится и интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \omega(1-r)\int\limits_0^r n(t)dtdr < +\infty.$$

Дважды проинтегрировав по частям получим:

$$I \geq \int\limits_0^1\left(\int\limits_r^1\int\limits_u^1 \omega(1-v)dvdu\right)dn(r),$$

откуда заключаем, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int\limits_{r_k}^1\int\limits_u^1 \omega(1-v)dvdu < +\infty. \tag{1.50}$$

Покажем, что $\int\limits_u^1 \omega(1-v)dv = O\left(\omega(1-u)(1-u)\right)$, $u \to 1-0$. Действительно, пользуясь правилом Лопиталя при вычислении соответствующего предела получаем:

$$\lim_{u\to 1-0}\frac{\int\limits_u^1 \omega(1-v)dv}{\omega(1-u)(1-u)} = \lim_{u\to 1-0}\frac{\omega(1-u)}{\omega'(1-u)(1-u)+\omega(1-u)} = \frac{1}{\alpha_\omega+1}.$$

По условию (1.47) теоремы $\alpha_\omega > -1$, поэтому требуемая оценка установлена. Значит, (1.50) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{r_k}^{1} \omega(1-u)(1-u)du < +\infty. \tag{1.51}$$

Аналогично устанавливается, что (1.51) эквивалентно

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \omega(1-r_k)(1-r_k)^2 < +\infty.$$

Теорема 1.7 доказана.

Замечание 1.4. Теорема 1.6 сразу следует из теоремы 1.7 при $\omega(1-r) = (1-r)^{\frac{1}{p}-2} \ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\left(\frac{1}{1-r}\right)$, где $\varepsilon > 0$.

1.4 Факторизационное представление и описание корней классов аналитических в верхней полуплоскости функций с мажоратой бесконечного порядка

Рассмотрим класс $X_\varphi^\infty(C_+)$ аналитических в верхней полуплоскости функций, для которых

$$\ln|f(z)| \le A_f \varphi(B_f|z|), z \in C_+,$$

где A_f, B_f - положительные постоянные, значения которых зависят только от функции f, φ — весовая функция.

Определение 1.1. Монотонно возрастающую положительную функцию $\varphi \in C^1(R_+)$ с условием

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = +\infty, \tag{1.52}$$

назовем *весовой*.

Как уже было отмечено во введении, представление аналитических функций бесконечного порядка в полуплоскости было получено в работах И.О. Хачатаряна [29] и А.И. Хейфица [31]. Однако в указанных работах не был получен результат окончательного характера: не доказана принадлежность каждого фактора, входящего в произведение, рассматриваемому классу.

Целью этой части диссертационной работы является характеризация корневых множеств и построение факторизационного представления класса $X_\varphi^\infty(C_+)$. Для изложения результатов параграфа ведем дополнительные обозначения.

Обозначим через $N_{p_n}(z, z_n)$ первичный множитель Р. Неванлинны (см. [6]):

$$N_{p_n}(z, z_n) = \frac{1 - z/z_n}{1 - z/\overline{z}_n} \cdot \exp \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{j} \left(\left(\frac{z}{z_n} \right)^j - \left(\frac{z}{\overline{z}_n} \right)^j \right).$$

Пусть далее

$$E(z, z_n) = \prod_{n=1}^{+\infty} N_{p_n}(z, z_n), \tag{1.53}$$

$$L(t, z) = \begin{cases} \frac{1}{(t-z)}, \text{ при } |t| < 1, \\ \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} - \frac{z}{t^2} - \dots - \frac{z^{p_n}}{t^{p_n+1}}, \text{при } n - 1 \le |t| < n. \end{cases}$$

Приведем результат А.И. Хейфица (см. [31]):

Теорема Хейфица. *Каждую функцию $f \in H(C_+)$ с условием $\ln |f(z)| \le c_f \varphi(|z|)$, $z \in C_+$, где φ - монотонно возрастающая положительная функция на $(0, +\infty)$, можно представить в виде*

$$f(z) = \exp(G(z)) \times E(z, z_n),$$

где $\{z_n\} = Z_f$, $p_1 = 0$, $p_n = [\ln \varphi(n + 1)]$, $n = 2, 3, \dots,$

$$G(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} L(t, z) d\psi(t) + ih(z),$$

где $\psi(t) = \lim\limits_{y \to 0+} \int\limits_0^t \ln |f(x + iy)| dx$, $h(z)$ – целая функция с вещественными тейлоровскими коэффициентами, рост которой оценивается через $\varphi(|z|)$.

Обозначим Z_f - множество нулей функции $f \in X_\varphi^\infty(C_+)$. Нами установлены следующие утверждения:

Теорема 1.8. *Пусть φ — весовая функция, $\ln\varphi$ выпукла вниз. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$ *;*

2. $\exists\, c_1 > 0 : \ \forall\, 0 < R < 1$ *справедливо*

$$\sum_{\rho < r_n \le R} \frac{\sin\theta_n}{r_n} < c_1 \frac{\varphi(c_2 R)}{R}, \tag{1.54}$$

где константа c_1 зависит только от последовательности $\{z_n\}$.

Теорема 1.9. *Пусть φ — весовая функция, $\ln\varphi$ выпукла вниз. Каждую функцию $f \in X_\varphi^\infty(C_+)$, аналитическую в замкнутой полуплоскости C_+, можно представить в виде*

$$f(z) = \exp(G(z)) \times \prod_{n=1}^{+\infty} N_{p_n}(z, z_n), \tag{1.55}$$

где $Z_f = \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $p_n = \left[\frac{\ln\varphi(C_0|z_n|)}{\ln 2}\right] - 1$ при некотором $C_0 > 0$, причем функции $E(z, z_n)$ и $\exp(G(z))$ принадлежат классу $X_\varphi^\infty(C_+)$.

Если $\varphi'/\varphi \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$, $1/\sqrt{(\ln\varphi)'}$ — выпуклая функция, то $\exp(\pm G(z)) \in X_\varphi^\infty(C_+)$.

Доказательство основных результатов этого параграфа основывается на вспомогательных утверждениях. Справедлива

Лемма 1.7. *Пусть φ – весовая функция, $\varphi \in C^{(1)}[0, +\infty)$, $I(r) = \int\limits_\rho^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right)\varphi(Bx)dx$, $B > 0$. Тогда $I(r) = o\left(\frac{\varphi(Br)}{r}\right)$ при $r \to +\infty$.*

Доказательство. Ясно, что $0 \le I(r) \le \int\limits_\rho^r \frac{\varphi(Bx)}{x^2}dx$. Докажем, что

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\int\limits_\rho^r \frac{\varphi(Bx)}{x^2}dx}{\frac{\varphi(Br)}{r}} = 0. \tag{1.56}$$

Действительно, применим правило Лопиталя в (1.56):

$$0 \le \lim_{r\to+\infty} \frac{I(r)}{\frac{\varphi(Br)}{r}} \le \lim_{r\to+\infty} \frac{\frac{\varphi(Br)}{r^2}}{\frac{B\varphi'(Br)}{r} - \frac{\varphi(Br)}{r^2}} =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\frac{Br\varphi'(Br)}{\varphi(Br)} - 1} = 0.$$

Таким образом, оценка (1.56) установлена. Отсюда сразу следует утверждение леммы 1.7.

Сформулируем также теорему, доказанную Н.К. Никольским (см.[18], с. 40):

Теорема Никольского. *Пусть* f *аналитична в полосе* $\Omega = \{\zeta = \sigma + i\theta \in \mathbb{C} : |\Im\zeta| < \frac{\pi}{2}\}$, $\varphi \in C^{(1)}[0,+\infty)$, $\varphi'/\varphi \uparrow +\infty$ *при* $x \to +\infty$, *и* $\ln|f(\zeta)| \le \varphi(\Re\zeta)$, $\Re\zeta \ge 0$. *Если* $1/\sqrt{(\ln\varphi)'}$ *— выпуклая функция, то для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует* σ_ε, *такое что при всех* $\sigma > \sigma_\varepsilon$ *и* $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \le \theta \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ *справедлива оценка:*

$$\ln|f(\sigma + i\theta)| \ge -M\varphi(\sigma), \tag{1.57}$$

$M = 1 + 2\pi(e^{\pi+1} + 1)$.

Перейдем теперь к доказательству основных результатов параграфа.

Доказательство теоремы 1.8.

Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Обозначим $\{r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ - последовательность нулей функции f. Пусть далее $f_\eta(z) = f(z + i\eta)$, $\eta > 0$. Очевидно, что f_η - аналитическая в полуплоскости $\Im z > -\eta$. Применим к функции $f_\eta(z)$ формулу Карлемана в полукольце $K_{\rho,r} := \{z \in C_+ : \rho \le |z| \le r\}$ (см. [6, с. 26]):

$$\sum_{\rho\le\widetilde{r}_n\le r} \left(\frac{1}{\widetilde{r}_n} - \frac{\widetilde{r}_n}{r^2}\right)\sin\widetilde{\theta}_n = \frac{1}{\pi r}\int\limits_0^\pi \ln|f_\eta(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_\rho^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f_\eta(x)||f_\eta(-x)|dx + A_\eta(r,f),$$

где $\{\widetilde{r}_n e^{i\widetilde{\theta}_n}\}$ - последовательность нулей функции f_η в полукольце $K_{\rho,r}$,

$A_\eta(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \Im\{\left(\frac{e^{-i\theta}}{\rho}-\frac{\rho e^{i\theta}}{r^2}\right)\ln f_\eta(\rho e^{i\theta})\}d\theta.$

Заметим, что все слагаемые в левой части равенства неотрицательны, поэтому, принимая во внимание принадлежность функции f классу $X_\varphi^\infty(C_+)$, получим:

$$\sum_{\rho\le\widetilde{r}_n\le R}\left(\frac{1}{\widetilde{r}_n}-\frac{\widetilde{r}_n}{R^2}\right)\sin\widetilde{\theta}_n\le\frac{2A_f}{\pi r}\varphi(B_f(r+\eta))+$$

$$+\frac{A_f}{\pi}\int\limits_\rho^r\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{r^2}\right)\varphi(B_f(x+\eta))dx+A_\eta(r,f).$$

В условиях теоремы можно перейти к пределу при $\eta\to 0+$. Получим:

$$\sum_{\rho\le r_n\le r}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{r_n}{r^2}\right)\sin\theta_n\le$$

$$\le\frac{2A_f\cdot\varphi(B_f r)}{\pi r}+\frac{A_f}{\pi}\int\limits_\rho^r\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{r^2}\right)\varphi(B_f x)dx+A(r,f),$$

где $A(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \Im\{\left(\frac{e^{-i\theta}}{\rho}-\frac{\rho e^{i\theta}}{r^2}\right)\ln f(\rho e^{i\theta})\}d\theta=O(1)$ при $r\to+\infty$.

По лемме 1.7 $\frac{A_f}{\pi}\int\limits_\rho^r\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{r^2}\right)\varphi(B_f x)dx=o\left(\frac{\varphi(B_f r)}{r}\right)$, поэтому

$$\sum_{\rho<r_n<r}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{r_n}{r^2}\right)\sin\theta_n\le 2A_f\frac{\varphi(B_f r)}{r}.$$

Положим теперь $R=\frac{r}{2}$. Подбирая нули только из $K_{\rho,R}$, получаем:

$$\sum_{\rho<r_n<R}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{r_n}{r^2}\right)\sin\theta_n\le A_f\frac{\varphi(2B_f R)}{R},$$

откуда имеем

$$\sum_{\rho<r_n<R}\frac{\sin\theta_n}{r_n}\le c_1\frac{\varphi(c_2 R)}{R},$$

где $c_1=A_f$, $c_2=2B_f$. Таким образом, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана.

Установим обратную импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим функцию $E(z,z_n)$, определяюмую равенством (1.53) с нулями $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $z_n=r_ne^{i\theta_n}$, $n=1,2,...$, удовлетворяющими условию (1.54). Докажем, что произведение

(1.53) сходится в C_+ и $E \in X_\varphi^\infty(C_+)$.

Пусть $z \in C_+$, $z \neq z_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\ln|E(z, z_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln|N_{p_n}(z, z_n)|, \tag{1.58}$$

$p_n = \left[\frac{\ln\varphi(C_0|z_n|)}{\ln 2}\right] - 1$, $C_0 > 0$. Разобьем сумму (1.58) на две части:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln|N_{p_n}(z, z_n)| = \sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}} \ln|N_{p_n}| + \sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right| > \frac{1}{2}} \ln|N_{p_n}| = I_1 + I_2.$$

Оценим каждую из этих сумм отдельно. Как установлено в монографии Н.В. Говорова [6, с. 35],

$$I_1 = \sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}} \ln|N_{p_n}| \leq \sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}} 4|z|^{p_n+1} \frac{\sin\theta_n}{|z_n|^{p_n+1}}, \tag{1.59}$$

Продолжим оценку:

$$I_1 \leq \sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}} 4|z_n| \left(\frac{1}{2}\right)^{p_n+1} \frac{\sin\theta_n}{|z_n|} = \sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}} 4|z_n| \exp\left((p_n+1)\ln\frac{1}{2}\right) \frac{\sin\theta_n}{|z_n|} =$$
$$= \sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}} 4|z_n| \exp\left(-\ln\varphi(C_0|z_n|)\right) \frac{\sin\theta_n}{|z_n|}.$$

Докажем, что

$$I(R) = \sum_{|z_n| \leq R} \exp\left(-\ln\varphi(C_0|z_n|)\right) \sin\theta_n \leq const. \tag{1.60}$$

Введем функцию

$$s(r) = \sum_{0<\rho<r_n \leq r} \frac{\sin\theta_n}{r_n}, \tag{1.61}$$

где $r_n = |z_n|$, $r = |z|$. Нетрудно видеть, что $s(r)$ — монотонно растущая кусочно-постоянная функция на $(\rho, +\infty)$, причём её скачки совпадают с точками r_n, $n = 1, 2, \ldots$ Поэтому $I(R) = \int\limits_0^R t \cdot \exp(-\ln\varphi(C_0 t))ds(t)$. Интегрированием по частям получим:

$$I(R)\le\left(R\exp(-\ln\varphi(C_0R))s(R)+C_0\int\limits_0^R s(t)\exp(-\ln\varphi(C_0t))\frac{t\varphi'(C_0t)}{\varphi(C_0t)}dt\right).$$

Из оценки (1.54) следует, что $s(r)\le\frac{c_1\varphi(c_2r)}{r}$, поэтому

$$I(R)\le c_1\exp(-\ln\varphi(C_0R)+\ln\varphi(c_2R))+$$
$$+c_1\cdot C_0\int\limits_0^R\exp(-\ln\varphi(C_0t)+\ln\varphi(c_2t))\frac{\varphi'(C_0t)}{\varphi(C_0t)}dt.$$

Подбирая C_0 достаточно большим, чтобы $\ln\varphi(c_2t)\le\frac{1}{2}\ln\varphi(C_0t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, получаем:

$$I(R)\le c_1\exp(-\frac{1}{2}\ln\varphi(C_0R))-2c_1\cdot\int\limits_0^R\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\varphi(C_0t)\right)d\left(-\frac{1}{2}\ln\varphi(C_0t)\right),$$

и окончательно:

$$I(R)\le 2c_1-c_1\exp(-\frac{1}{2}\ln\varphi(C_0R))\le const$$

при всех $R\in\mathbb{R}_+$. Поэтому (1.60) установлено, а значит, $I_1\le const$.

Оценим теперь I_2. Как установлено в монографии Н.В. Говорова [6],

$$\sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right|>\frac{1}{2}}\ln|N_{p_n}|\le\sum_{\left|\frac{z}{z_n}\right|>\frac{1}{2}}2^{p_n+1}|z|^{p_n}\frac{\sin\theta_n}{r_n^{p_n}}. \tag{1.62}$$

Неравенство (1.62) с учетом обозначения (1.61) можно переписать в виде:

$$I_2=\sum_{|z_n|<2|z|}4|z|\left(\frac{2|z|}{|z_n|}\right)^{p_n-1}\frac{\sin\theta_n}{|z_n|}=$$
$$=4|z|\int\limits_\rho^{2|z|}\exp\left((p_n-1)\cdot\ln\frac{2|z|}{t}\right)ds(t).$$

Поскольку $\ln\frac{2|z|}{t}>0$ при всех $0<t<2|z|$, а $(p_n-1)\le\ln\varphi(C_0|z_n|)+1$ при всех n, то

$$I_2 \le 4|z| \int\limits_{\rho}^{2|z|} \exp(\ln\varphi(C_0 t)\cdot \ln\frac{2|z|}{t})ds(t).$$

Не ограничивая общности, положим $\rho = 1$, $\varphi(0) = 1$. Интегрируя по частям, получаем:

$$I_2 \le 4|z|s(2|z|) - 4|z| \int\limits_{1}^{2|z|} s(t)\exp\left(\ln\varphi(C_0 t)\cdot\ln\frac{2|z|}{t}\right)\times$$
$$\times\left(C_0\frac{\varphi'(C_0 t)}{\varphi(C_0 t)}\ln\frac{2|z|}{t} - \frac{\ln\varphi(C_0 t)}{t}\right)dt \le$$

$$\le 4|z|s(2|z|) + 4C_0|z| \int\limits_{1}^{2|z|} s(t)\exp\left(\ln\varphi(C_0 t)\cdot\ln\frac{2|z|}{t}\right)\cdot\frac{\ln\varphi(C_0 t)}{t}dt \le$$

$$\le 4|z|s(2|z|) + 4C_0|z|s(2|z|)\ln\varphi(2C_0|z|)\int\limits_{1}^{2|z|}\exp\left(\ln\varphi(C_0 t)\cdot\ln\frac{2|z|}{t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Последний интеграл обозначим через I_2^1 и приступим к его оценке. Сделаем замену переменной. Пусть $\ln\frac{2|z|}{t} = u$, тогда

$$I_2^1 \le \int\limits_{0}^{\ln 2|z|} \exp\{u\ln\varphi(2C_0|z|e^{-u})\}du.$$

Пусть $\psi = \ln\varphi$. Оценим $u\cdot\psi(2C_0|z|e^{-u})$:

$$u\cdot\psi(2C_0|z|e^{-u}) = u\int\limits_{0}^{2C_0|z|e^{-u}}\psi'(t)dt = \int\limits_{0}^{ue^{-u}2C_0|z|}\psi'\left(\frac{x}{u}\right)dx \le \int\limits_{0}^{2C_0|z|}\psi'\left(\frac{x}{u}\right)dx.$$

Поскольку функция $\ln\varphi$ — выпуклая вниз, то есть ψ' — возрастающая, при всех $u \ge 1$ имеем:

$$u\cdot\psi(2C_0|z|e^{-u}) \le \int\limits_{0}^{2C_0|z|}\psi'(x)dx = \psi(2C_0|z|).$$

Очевидно, что при $0 < u < 1$ оценка $u \cdot \psi(2C_0|z|e^{-u}) \le \psi(2C_0|z|)$ также справедлива. С учетом последних замечаний получаем:

$$I_2^1 \le \exp\psi(2C_0|z|)\ln(2|z|).$$

Значит,

$$I_2 \le 4|z|\Big(s(2|z|) + C_0 s(2|z|)\ln(2|z|)\cdot\exp(\psi(2C_0|z|))\cdot\ln\varphi(2C_0|z|)\Big).$$

Но по условию (1.54) теоремы $s(r) \le c_1\frac{\varphi(c_2r)}{r}$, поэтому

$$I_2 \le 2c_1\varphi(2c_2|z|) + 2c_1C_0\ln 2|z|\cdot\varphi(2c_2|z|)\cdot\exp(\psi(2C_0|z|))\cdot\ln\varphi(2C_0|z|),$$

откуда заключаем:

$$I_2 \le 2c_1\varphi(2C_0|z|) + 2c_1C_0\ln 2|z|\cdot\ln\varphi(2C_0|z|)\cdot\exp(2\psi(2C_0|z|)),$$

при $C_0 > c_2$. Как установлено в [2], если ψ — выпуклая вниз на $[0,+\infty)$, $\psi(0)=0$, то для любого $C \ge 1$ справедлива оценка:

$$C\psi(x) \le \psi(Cx). \tag{1.63}$$

Используя эту оценку, заключаем:

$$I_2 \le 2c_1\varphi(2C_0|z|) + 2c_1C_0\ln 2|z|\cdot\ln\varphi(2C_0|z|)\cdot\exp(\psi(2\cdot 2C_0|z|)),$$

откуда окончательно получим:

$$I_2 \le C_4\varphi(C_3|z|),$$

где $C_3 > 0$, $C_4 > 0$.

Объединяя оценки для I_1 и I_2, заключаем:

$$\ln|E(z,z_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln|N_{p_n}(z,z_n)| \le C_4\varphi(C_3|z|).$$

Значит, $E(z,z_n) \in X_\varphi^\infty(C_+)$. Теорема 1.8 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1.9.

Обозначим $g(z)=\exp(G(z))=\frac{f(z)}{E(z,z_n)}$, $C_R=\{z:\ |z|<R,\ \Im z>0\}$. Докажем, что $g\in X^{\infty}_{\varphi}(C_+)$. Применим к этой функции формулу Р. Неванлинны (см. [6, с. 22]):

$$\begin{aligned}\ln|g(z)| &= \sum_{z_k\in C_R}\ln\left|\frac{R(z-z_k)}{(R^2-\overline{z}_kz)}\frac{(R^2-z_kz)}{R(z-\overline{z}_k)}\right| \\ &+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}-\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{-i\theta}-z|^2}\right)\ln|g(Re^{i\theta})|d\theta \\ &+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\left(\frac{r\sin\varphi}{|t-z|^2}-\frac{R^2r\sin\varphi}{|R^2-zt|^2}\right)\ln|g(t)|dt.\end{aligned}$$

Докажем, что первое слагаемое в этой формуле принимает отрицательные значения. Действительно, обозначим $a=zR^2+|z_k|^2\overline{z}$, $b=z_kR^2+|z|^2\overline{z}_k$. Тогда $\ln\left|\frac{R(z-z_k)}{(R^2-\overline{z}_kz)}\frac{(R^2-z_kz)}{R(z-\overline{z}_k)}\right|=\ln\left|\frac{a-b}{a-\overline{b}}\right|<\ln 1=0$, поскольку $\Im b>0$. Суммируя теперь по всем $|z_k|\in C_R$, получим

$$\sum_{z_k\in C_R}\ln\left|\frac{R(z-z_k)}{(R^2-\overline{z}_kz)}\frac{(R^2-z_kz)}{R(z-\overline{z}_k)}\right|<0.$$

Положим теперь $z=\frac{iR}{2}$. Будем иметь:

$$\begin{aligned}\ln\left|g\left(\frac{iR}{2}\right)\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3R^2}{4|Re^{i\theta}-iR/2|^2}-\frac{3R^2}{4|Re^{-i\theta}-iR/2|^2}\right)\ln|g(Re^{i\theta})|d\theta \\ &+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\left(\frac{R}{2|t-iR/2|^2}-\frac{R^2\cdot R}{2|R^2-iRt/2|}\right)\ln|g(t)|dt \\ &=J_1+J_2.\end{aligned}$$

Преобразуем выражения, стоящие под знаками интегралов J_1 и J_2.

$$\begin{aligned}\frac{3R^2}{4|Re^{i\theta}-iR/2|^2}-\frac{3R^2}{4|Re^{-i\theta}-iR/2|^2} &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{|e^{i\theta}-i/2|^2}-\frac{1}{|e^{-i\theta}-i/2|^2}\right) \\ &=\frac{3\sin\theta}{2(9/16+\cos^2\theta)}\ge 0,\end{aligned}$$

если $0 \le \theta \le \pi$.

Рассмотрим теперь выражение под знаком интеграла J_2:

$$\begin{aligned}\frac{R}{2|t-iR/2|^2} - \frac{R^2\cdot R}{2|R^2-iRt/2|^2} &= \frac{R}{2}\left(\frac{1}{|t-iR/2|^2} - \frac{1}{|R-it/2|^2}\right) \\ &= \frac{3R}{8}\frac{(R^2-t^2)}{(t^2+R^2/4)(R^2+t^2/4)} \ge 0\end{aligned}$$

при $-R \le t \le R$.

С учетом последних замечаний получаем:

$$\begin{aligned}\ln\left|g\left(\frac{iR}{2}\right)\right| \le \frac{3}{4\pi}\int_0^\pi \ln|g(Re^{i\theta})|\frac{\sin\theta}{(9/16+\cos^2\theta)}d\theta \\ + \frac{3R}{8\pi}\int_{-R}^{R}\frac{(R^2-t^2)}{(t^2+R^2/4)(R^2+t^2/4)}\ln|g(t)|dt.\end{aligned} \tag{1.64}$$

Теперь оценим каждое слагаемое в неравенстве (1.64) отдельно. Сначала заметим, что

$$\ln|g(Re^{i\theta})| = \ln|f(Re^{i\theta})| - \ln|E| = \ln|f(Re^{i\theta})| - \ln^+|E| + \ln^-|E|,$$

где $\ln^+|E| = \max(\ln|E|, 0)$, $\ln^-|E| = \max(-\ln|E|, 0)$.

Поэтому

$$J_1 \le \frac{4}{3\pi}\left(\int_0^\pi \ln|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta - \int_0^\pi \ln^+|E|\sin\theta d\theta + \int_0^\pi \ln^-|E|\sin\theta d\theta\right).$$

Так как $f \in X_\varphi^\infty(C_+)$, то

$$\int_0^\pi \ln|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \le c_1\varphi(c_2R).$$

Для оценки второго слагаемого применим к функции $E(z,z_n)$ формулу Карлемана для верхней полуплоскости. Учитывая, что на вещественной оси $|E| = 1$, получаем:

$$\sum_{\rho<r_k<r}\left(\frac{1}{r_k}-\frac{r_k}{r^2}\right)\sin\theta_k=\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^{\pi}\ln|E(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta+C,$$

где $C>0$.

Так как все слагаемые в левой части равенства положительны, $\ln|E|=\ln^+|E|-\ln^-|E|$ и $E\in X^{\infty}_{\varphi}(C_+)$, то

$$\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^{\pi}\ln^-|E(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta+C\leq\frac{c_1\varphi(c_2R)}{R},$$

откуда

$$\frac{4}{3\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln^-|E(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\leq c_1\varphi(c_2R).$$

Оценим последнее слагаемое. Так как $-\ln^+x\leq\ln^-x$ при любом $x>0$, то

$$-\frac{4}{3\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln^+|E(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\leq\frac{4}{3\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln^-|E(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\leq c_1\varphi(c_2R).$$

Суммируя, получаем:

$$J_1=\frac{4}{3\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln|g(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\leq c_1\varphi(c_2R).\tag{1.65}$$

Оценим J_2. Так как $|g(z)|=|f(z)|$ при $z\in\mathbb{R}$, то

$$J_2\leq\frac{3R}{8\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{(R^2-t^2)}{(t^2+R^2/4)(R^2+t^2/4)}\ln^+|f(t)|dt\leq cR\int\limits_{-R}^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\ln^+|f(t)|dt,$$

где $c>0$. Принимая во внимание лемму 1.7, будем иметь:

$$J_2\leq c\int\limits_{-R}^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\varphi(c_2t)dt=o(\varphi(c_2R)).\tag{1.66}$$

Подставляя оценки (1.65) и (1.66) в неравенство (1.64), получим:

$$\ln\left|g\left(\frac{iR}{2}\right)\right| \le c_1\varphi(c_2R). \tag{1.67}$$

Зададим теперь отображение верхней полуплоскости на себя с помощью линейной функции $\zeta = az + b$, где $a > 0, b \le 0$. Рассмотрим функцию $\tilde{g}(\zeta) = g\left(\frac{1}{a}(\zeta - b)\right)$, аналитическую в C_+. Ясно, что $\tilde{g} \in X_\varphi^\infty(C_+)$. Пусть $\zeta = i\frac{R}{2}$. Из оценки (1.67) будем иметь:

$$\ln\left|\tilde{g}\left(\frac{iR}{2}\right)\right| \le c_1\varphi(c_2R).$$

В терминах функции g это означает:

$$\ln|g(z)| = \ln\left|g\left(\frac{1}{a}\left(\frac{iR}{2} - b\right)\right)\right| \le c_1\varphi\left(2c_2|az+b|\right) \le c_1\varphi(c_3|z|).$$

То есть $g \in X_\varphi^\infty(C_+)$.

Осталось доказать принадлежность функций $\exp(G(z))$ и $\exp(-G(z))$ классу $X_\varphi^\infty(C_+)$.

Рассмотрим функцию $g(z)$ в криволинейной полуполосе $\Omega_\theta := \left\{x + iy : |y - \theta| < \frac{\pi}{\psi'(x)}\right\}$, где $\psi(x) = \ln\varphi(x)$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Функция $g(z)$ – аналитическая в Ω_θ и $\ln|g(z)| \le c_1\varphi(c_2|z|)$. Применяя теорему Н.К. Никольского (см. (1.57)), получим:

$$|\ln|g(z)|| \le c_1\varphi(c_2|z|),\ \forall z \in \Omega_\theta,$$

Последняя оценка эквивалентна неравенству

$$|\Re G(z)| \le c_1\varphi(c_2|z|),\ \forall z \in \Omega_\theta. \tag{1.68}$$

Неравенство (1.68) с помощью преобразования поворота можно распространить на всю верхнюю полуплоскость. Значит, функции $\exp(G(z))$ и $\exp(-G(z))$ принадлежат классу $X_\varphi^\infty(C_+)$. Теорема доказана.

Замечание 1.5. Отметим, что при доказательстве импликации 2) $\Rightarrow$ 1) применялся метод, разработанный в работе [2].

1.5 Характеризация вещественных корней аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка

Пусть $\mathbb{P}^+$ – правая полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Рассмотрим класс

$$X(\lambda) := \left\{ f \in H(\mathbb{P}^+) : \ln|f(z)| \leq c_f \lambda(\Re z), z \in \mathbb{P}^+ \right\},$$

где λ – весовая функция, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lambda'(x)x}{\lambda(x)} = +\infty$, c_f – положительная постоянная, значения которой зависят только от функции f.

Обозначим через Z_f^+ множество вещественных положительных нулей функции f. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.10. *Пусть* $Z = \{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– неубывающая последовательность положительных чисел,* $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k = +\infty$*,* λ *– весовая функция,* $\psi(x) = \ln \lambda(x)$ *выпукла на* $(0, +\infty)$*, причем* $\psi \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$*,* $\psi'(0) \neq 0$ *и* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\psi''(x))^2}{(\psi'(x))^3} < +\infty$*. Для того чтобы* $Z = Z_f^+$ *для некоторой тождественно отличной от нуля функции* $f \in X(\lambda)$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$n(r) = \{card\, r_k : 0 < r_k < r\} \leq c\lambda(r), c > 0. \tag{1.69}$$

Доказательство теоремы 1.10.

Необходимость. Рассмотрим область

$$\Omega_+ = \left\{ z = x + iy : x \geq 0,\, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{\psi'(x)} \right\}.$$

Конформно отобразим Ω_+ на полосу $\Pi_+ = \left\{ w = u + iv :\ u \geq 0,\, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ с помощью функции $Z^+(x+iy)$ так, чтобы чтобы образом бесконечности была бесконечность, а образом отрезка $\left[0, \frac{\pi i}{\psi'(0)}\right]$ отрезок $\left[0, \frac{\pi i}{2}\right]$. Согласно теореме Римана о конформном отображении, эти условия однозначно определяют конформно отображающую функцию $Z^+(x+iy)$.

По принципу симметрии Римана - Шварца функция $Z^+(x+iy)$ имеет аналитическое продолжение $Z(x+iy)$ в область

$$\Omega=\left\{z=x+iy: x\geq 0,\, |y|\leq\frac{\pi}{\psi'(x)}\right\}.$$

Функция $Z(x+iy)$ отображает криволинейную полуполосу Ω на каноническую полуполосу

$$\Pi=\left\{w=u+iv:\, u\geq 0, |v|\leq\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Так как $f\in X(\lambda)$, то

$$\ln|f(Z^{-1}(w))|\leq\lambda(\Re Z^{-1}(w)),\, w\in\Pi,$$

где $Z^{-1}(w)$ – функция, обратная к $Z(x+iy)$. Ясно, что $f(Z^{-1}(w))\in H(\Pi)$. По теореме Варшавского (см. [12, с. 230])

$$u=\Re Z(x+iy)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\psi'(t)dt+o(1)=\frac{1}{2}\psi(x)+O(1)=\frac{1}{2}\ln\lambda(x)+O(1),$$

при $x\to+\infty$.

Отобразим теперь полуполосу Π на область

$$\Delta=\{\zeta=\xi+i\eta:\, |\zeta|\geq 1,\xi\geq 0\}$$

с помощью функции $\zeta=e^w$.

Рассмотрим функцию $F(\zeta)=f(Z^{-1}(\ln\zeta))\in H(\Delta)$. Ясно, что

$$\ln|f(Z^{-1}(\ln\zeta))|\leq\lambda(\Re Z^{-1}(\ln\zeta)),\,\zeta\in\Delta.$$

Так как $z=x+iy=Z^{-1}(\ln\zeta)$, то

$$\ln|\zeta|=\Re Z(Z^{-1}(\ln\zeta))=\Re Z(x+iy)=\frac{1}{2}\ln\lambda(x)+O(1), \tag{1.70}$$

при $x\to+\infty$.

Отсюда $\lambda(x) = c|\zeta|^2$, $c > 0$. Таким образом, $F \in H(\Delta)$ и

$$\ln|F(\zeta)| \le c_F|\zeta|^2, \zeta \in \Delta. \tag{1.71}$$

Оценим теперь количество вещественных нулей функции F на промежутке $[\rho, R]$, $1 \le \rho \le R$. Обозначим $\rho_1 e^{i\theta_1}, ..., \rho_n e^{i\theta_n}$ – нули функции $F(\zeta)$ в полукольце $K_{\rho,R} = \{\zeta \in \Delta : 1 \le \rho \le |\zeta| \le R\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $F_\varepsilon(\zeta) = F(\zeta + \varepsilon)$. Очевидно, что функция F_ε - аналитическая в полуплоскости $\{\Re\zeta > -\varepsilon\}$. Применим к функции F_ε формулу Карлемана для правой полуплоскости (см. [25, с. 139]):

$$\sum_{\rho \le \widetilde{\rho}_n \le R} \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_n} - \frac{\widetilde{\rho}_n}{R^2}\right) \cos\widetilde{\theta}_n = \frac{1}{\pi R} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln|F_\varepsilon(Re^{i\theta})| \cos\theta d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\rho \le |\eta| \le R} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{R^2}\right) \ln|F_\varepsilon(i\eta)||F_\varepsilon(-i\eta)| d\eta + A(R, F),$$

где $\widetilde{\rho}_1 e^{i\widetilde{\theta}_1}, ..., \widetilde{\rho}_n e^{i\widetilde{\theta}_n}$ – нули функции F_ε в полукольце $K_{\rho,R}$, $A(R, F) = O(1)$ при $R \to +\infty$.

Заметим, что все слагаемые в левой части равенства неотрицательны, то есть $\sum\limits_{\rho \le \widetilde{\rho}_n \le R} \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_n} - \frac{\widetilde{\rho}_n}{R^2}\right) \cos\widetilde{\theta}_n \ge 0$. Принимая во внимание оценку (1.71), получаем:

$$\sum_{\rho \le \widetilde{\rho}_n \le R} \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_n} - \frac{\widetilde{\rho}_n}{R^2}\right) \cos\widetilde{\theta}_n \le \frac{c_F(R^2 + \varepsilon^2)}{\pi R} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta +$$

$$+\frac{2c_F}{2\pi} \int\limits_{\rho \le |\eta| \le R} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{R^2}\right) (\eta^2 + \varepsilon^2) d\eta + A(R, F).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$, имеем:

$$\sum_{\rho \le \rho_n \le R} \left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{R^2}\right) \cos\theta_n \le \frac{2c_F R}{\pi} + \frac{2c_F}{2\pi} \int\limits_{\rho \le |\eta| \le R} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{R^2}\right) \eta^2 d\eta + O(1),$$

откуда следует
$$\sum_{\rho\le\rho_n\le R}\left(\frac{1}{\rho_n}-\frac{\rho_n}{R^2}\right)\cos\theta_n\le\tilde{c}_F R$$
Выбирая вещественные нули ($\theta_k = 0$, $k = 1,2,...$) только из полукольца $\rho\le\rho_n\le\frac{R}{2}$, из последнего неравенства получим: $\frac{3}{2R}n_F(R/2)\le\tilde{c}_F R$, откуда следует, что
$$n_F(R)\le C_F R^2, \tag{1.72}$$
где $n_F(R)$ – количество вещественных нулей функции F на промежутке $[\rho, R]$.

В то же время, если $F(\rho_k)=0$, $k=1,2,...$, то $f(Z^{-1}(\ln r_k)) = f(r_k) = 0$, $k=1,2,...$, $\{\rho_k\}$, $\{r_k\}$ – вещественные нули функций F и f соответственно. В силу принципа соответствия границ при конформном отображении, Z^{-1} – монотонно растущая на $[0,+\infty)$, поэтому из (1.72) выводим неравенство:
$$\left\{card\,\rho_k : Z^{-1}(\ln 1)\le Z^{-1}(\ln\rho_k)\le Z^{-1}(\ln R)\right\}\le C_F R^2,$$
равносильное
$$\left\{card\,r_k : 0\le r_k\le Z^{-1}(\ln R)\right\}\le c_f R^2.$$
Пусть $r = Z^{-1}(\ln R)$, тогда:
$$n(r) = \{card\,r_k : 0\le r_k\le r\}\le c_f\exp(2Z(r))\le c_f\exp(2\Re Z(r)+O(1)),$$
$r\to+\infty$.

Принимая во внимание теперь равенство (1.70), окончательно получим:
$$n(r) = \{card\,r_k : 0\le r_k\le r\}\le c_f\lambda(r),$$
то есть оценку (1.69).

Достаточность. Доказательство этой части теоремы совпадает с доказательством соответствующего результата для целых функций из [42]. Для полноты изложения приведем его. Пусть дана неубывающая последовательность положительных вещественных чисел $\{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $r_k\uparrow+\infty$, $k\to+\infty$, для которой справедлива оценка (1.69). Докажем, что существует тождественно отличная от нуля функция $f\in X(\lambda)$, такая что $f(r_k)=0$, $k=1,2,...$

Положим $\Lambda(r) = (\lambda(r))^{2/3}$, $r>0$. Очевидно, что $\Lambda(x)$ – весовая функция. Из результатов работы Дж. Клуни (см. [47]) следует, что существует целая функция $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, где $a_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, такая что

$$c_1 \leq \frac{\Lambda(r)}{M(r, g)} \leq c_2, \tag{1.73}$$

где $M(r, g) = \max\limits_{|z| \leq r} |g(z)|$.

Так как для любых неотрицательных r_1, r_2, таких что $r_1 > r_2$ справедливо неравенство

$$g(r_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r_1^n > \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r_2^n = g(r_2),$$

то функция $g(r)$ монотонно возрастает на $(0, +\infty)$, а значит, существует обратная функция $\nu(r) = g^{-1}(r)$. Обозначим $\rho_k = \nu^{-1}(r_k) = g(r_k)$, т.е. $r_k = \nu(\rho_k)$, $k = 1, 2, ...$ Положим $r = \nu(\rho)$. По условию

$$n(r) \leq c_f \lambda(r),$$

поэтому с учетом новых обозначений и неравенства (1.73) получим:

$$n(\nu(\rho)) \leq c_f \lambda(\nu(\rho)) \leq c_f (\Lambda(\nu(\rho)))^{3/2} \leq c_1 \rho^{3/2}.$$

По теореме Ж. Адамара существует целая функция $G(z)$ порядка $3/2$ и нормального типа, такая что $G(\rho_k) = 0$, $k = 1, 2, ...$ Пусть $f(z) = G(g(z))$, $z \in \mathbb{C}_+$, следовательно, $f \in H(\mathbb{C}_+)$, $f(r_k) = G(g(r_k)) = G(\rho_k) = 0$, $k = 1, 2, ...$ При этом ввиду строгой монотонности функции g на $(0, +\infty)$, функция f других вещественных положительных корней не имеет. Справедливо

$$\ln M(r, f) = \ln \max_{|z| \leq r} |f(z)| = \ln \max_{|z| \leq r} |G(g(z))| \leq c \sup_{|z| \leq r} |g(z)|^{3/2} =$$

$$= c|g(r)|^{3/2} \leq c_1 (\Lambda(r))^{3/2} = c_1 \lambda(r) = c_1 \lambda(\Re z).$$

Таким образом, требуемая функция $f \in X(\lambda)$ построена. Теорема 1.10 доказана полностью.

2 Приложение факторизационных представлений к некоторым задачам в классах аналитических в круге функций с ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны

Вторая глава диссетационной работы посвящена приложению факторизации и других методов, разработанных в первой главе, к решению интерполяционной задачи, доказательству теорем вложения и описанию коэффициентных мультипликаторов из классов аналитических в круге функций с различными ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны.

2.1 Об интерполяции в классах аналитических в круге функций со степенным ростом характеристики Р. Неванлинны

Рассмотрим класс функций

$$S_\alpha^\infty := \left\{ f \in H(D) : T(r,f) \leq \frac{C_f}{(1-r)^\alpha} \right\},\ \alpha > 0$$

где $C_f > 0$ - положительная константа, значения которой зависят разве что от функции f, $r \in [0,1)$, $T(r,f)$ - характеристика Р. Неванлинны функции f.

Хорошо известно, если $f \in S_\alpha^\infty$, то

$$M(r,f) = \max_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \exp\left\{ \frac{c_f}{(1-r)^{\alpha+1}} \right\} \tag{2.1}$$

при всех $\alpha > 0$, $c_f > 0$ (см. [41, с. 144]).

Ясно, что если $f \in S_\alpha^\infty$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - последовательность точек из единичного круга, то оператор $R(f) = (f(\alpha_1), ..., f(\alpha_k), ...)$ отображает класс S_α^∞ в класс весовых последовательностей

$$l_\alpha = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \le \exp \frac{\lambda}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, \lambda > 0 \right\}.$$

В этом параграфе мы ответим на вопрос, при каких условиях на последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ оператор $R(f)$ отображает класс S_α^∞ *на* класс l_α.

Для формулировки результатов введем дополнительные обозначения и определения.

Определение 2.1. Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем *интерполяционной последовательностью* в классе S_α^∞, если $R(S_\alpha^\infty) = l_\alpha$.

Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, \alpha_k)$ будем обозначать, как и выше, бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Обозначим $\pi_{\beta,n}(z, \alpha_k)$ произведение $\pi_\beta(z, \alpha_k)$ без n-го фактора.

Определение 2.2. Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ будем называть часть угла, содержащуюся в D, раствора меньше, чем π, биссектриса которого совпадает с радиусом, соединяющим центр окружности с точкой $e^{i\theta}$, то есть

$$\Gamma_\delta(\theta) := \{z \in D : |\arg(e^{i\theta} - z) - \theta| \le \frac{\pi\delta}{2}\},$$

где $0 < \delta < 1$.

Основным результатом этого параграфа является доказательство следующей теоремы:

Теорема 2.1. *Пусть* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *- произвольная последовательность комплексных чисел из* D*, расположенных в конечном числе углов Штольца:*

$$\{\alpha_k\} \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s), \tag{2.2}$$

при некотором $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+1}$*. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *- интерполяционная последовательность в классе* S_α^∞*,* $\alpha > 0$*;*

2.
$$n(r) = \{card\, \alpha_k : |\alpha_k| < r\} \le \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}}, \tag{2.3}$$

для некоторого $c > 0$*;*

$$|\pi'_\beta(\alpha_n,\alpha_k)| \geq \exp\frac{-M}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}}, \tag{2.4}$$

для некоторого $M>0$ и при всех $\beta>\alpha-1$.

Доказательство основного результата этого параграфа основывается на следующих вспомогательных утверждениях:

Теорема А. (см. [57]). *Класс S_α^∞ совпадает с классом аналитических в D функций, представимых в виде:*

$$f(z)=c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z,\alpha_k)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi(e^{i\theta})}{(1-ze^{-i\theta})^{\beta+2}}d\theta\right\}, z\in D, \tag{2.5}$$

при всех $\beta>\alpha-1$, где $\psi(e^{i\theta})$ - некоторая вещественная функция из класса О. Бесова $B_{1,\infty}^{\beta-\alpha+1}$, $\lambda\in\mathbb{Z}_+$, $c_\lambda\in\mathbb{C}$, последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ удовлетворяет условию

$$n(r,f)\leq\frac{c_f}{(1-r)^{\alpha+1}}.$$

Ясно, что класс l_α совпадает с классом последовательностей $\{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$ таких, что

$$\sup_{k\geq1}\left\{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}\ln(1+|\gamma_k|)\right\}<+\infty,$$

где $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset D$.

Для дальнейшего изложения введем в пространствах S_α^∞ и l_α метрики: $\forall f,g\in S_\alpha^\infty$

$$\rho_{S_\alpha^\infty}(f,g)=\sup_{0<r<1}\left\{(1-r)^\alpha\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln(1+|f(re^{i\theta})-g(re^{i\theta})|)d\theta\right\},$$

$\forall a=\{a_k\}, b=\{b_k\}\in l_\alpha$

$$\rho_{l_\alpha}(a,b)=\sup_{k\geq1}\left\{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}\ln(1+|a_k-b_k|)\right\}.$$

Нетрудно проверить, что относительно введенных метрик указанные пространства являются полными метрическими пространствами, причем пространство S_α^∞ инвариантно относительно сдвигов. Справедлива

Лемма 2.1. *Если оператор $R(f) = (f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n), ...)$ отображает пространство S_α^∞ на пространство l_α, тогда существует последовательность функций $\{g_n(z)\}_{n=1}^{+\infty} \in S_\alpha^\infty$, таких что*

$$\sup_{n\ge 1} \rho_{S_\alpha^\infty}(g_n, 0) \le C,\ C > 0$$

и

$$g_n(\alpha_k) = \gamma_k^{(n)},$$

где

$$\gamma_k^{(n)} = \begin{cases} 0, \text{ при } k \ne n, \\ \exp \frac{\varepsilon}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, \text{ при } k = n, \end{cases}$$

для всех $k, n = 1, 2, ...$, здесь ε — достаточно маленькое положительное число.

Доказательство. Обозначим через S_L, $L > 0$, множество последовательностей $c = \{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ из пространства l_α, таких что $c_k = F(\alpha_k)$, $k = 1, 2, ...$ для некоторой функции $F \in S_\alpha^\infty$, удовлетворяющей условию $\rho_{S_\alpha^\infty}(F, 0) \le L$, то есть

$$\sup_{0<r<1} \left\{ (1-r)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + |F(re^{i\theta})|) d\theta \right\} \le L.$$

По условию $R(S_\alpha^\infty) = l_\alpha$, что эквивалентно тому, что $l_\alpha = \cup_{L=1}^{+\infty} S_L$. Докажем, что множества S_L замкнуты при всех L в l_α, то есть если $c^{(m)} = \{c_k^{(m)}\}_{k=1}^{+\infty} \in S_L$ и $\rho_{l_\alpha}(c^{(m)}, c^{(0)}) \to 0$ при $m \to +\infty$, то $c^{(0)} \in S_L$.

Имеем:

$$c_k^{(m)} = F_m(\alpha_k),\ k = 1, 2, ...,\ F_m \in S_\alpha^\infty,$$

причем

$$\rho_{S_\alpha^\infty}(F_m, 0) \le L \tag{2.6}$$

и $\rho_{l_\alpha}(c^{(m)}, c^{(0)}) \to 0$ при $m \to +\infty$.

Нужно доказать, что существует функция $F_0 \in S_\alpha^\infty$, такая что $F_0(\alpha_k) = c_k^{(0)}$, $k = 1, 2, ...$ и $\rho_{S_\alpha^\infty}(F_0, 0) \le L$.

Из неравенства (2.6) следует, что для любого $m = 1, 2, ...$

$$\ln^+ |F_m(re^{i\theta})| \le \frac{C(L)}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

то есть последовательность $\{F_m(z)\}_{m=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена в любом круге $D_R = \{z : |z| \le R < 1\}$.

По теореме Монтеля из последовательности $\{F_m(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{F_{m_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся к функции F_0 на компактных подмножествах единичного круга. Покажем, что $F_0 \in S_\alpha^\infty$. Действительно, из оценки (2.6) имеем:

$$\sup_{0<r\le R<1} \left\{ (1-r)^\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1+|F_{m_k}(re^{i\theta})|)d\theta \right\} \le L.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to +\infty$, будем иметь:

$$\sup_{0<r\le R<1} \left\{ (1-r)^\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1+|F_0(re^{i\theta})|)d\theta \right\} \le L,$$

откуда устремив $R \to 1-0$, получим:

$$\rho_{S_\alpha^\infty}(F_0, 0) \le L. \tag{2.7}$$

Значит, $F_0 \in S_\alpha^\infty$.

Поскольку $F_{m_k}(z) \to F_0(z)$, $k \to +\infty$ при всех $z \in D$, то $c_n^{(m_k)} = F_{m_k}(\alpha_n) \to F_0(\alpha_n) = c_n^{(0)}$, $k \to +\infty$ при всех $|\alpha_n| < 1$, $n = 1, 2, ...$ Учитывая теперь оценку (2.7), заключаем: $c^{(0)} = \{c_n^{(0)}\}_{n=1}^{+\infty} \in S_L$. Таким образом, доказано, что множество S_L замкнуто и при этом $l_\alpha = \cup_{L=1}^{+\infty} S_L$.

По теореме Бэра существует номер L_0, такой что множество S_{L_0} содержит шар с центром в одной из своих внутренних точек, например,

$$\begin{aligned} &B(F_0(\alpha_n), d) := \\ &\{c = \{c_k\} : \rho_{l_\alpha}(c, F_0(\alpha_n)) = \sup_{k\ge1} (1-|\alpha_k|)^{\alpha+1} \ln(1+|c_k - F_0(\alpha_k)|) < d\}, \end{aligned}$$

где последовательность $\{F_0(\alpha_n)\} = \{c_n^{(0)}\}$ - центр шара, $d > 0$ - его радиус.

Это означает, что для произвольной последовательности $c = \{c_k\} \in B$ существует функция $F \in S_\alpha^\infty$, такая что $\rho_{S_\alpha^\infty}(F, 0) \le L_0$ и $F(\alpha_k) = c_k$, $k = 1, 2, ...$

Значит, если $\rho_{l_\alpha}(\gamma, 0) \le d$ для некоторой последовательности $\gamma = \{\gamma_k\}$, то найдется функция $g \in S_\alpha^\infty$, такая что $\rho_{S_\alpha^\infty}(g,0) \leq 2L_0$ и $g(\alpha_k) = \gamma_k$ при всех k. Для этого достаточно положить $\gamma_k = c_k - F_0(\alpha_k)$, $k = 1,2,...$, $g(z) = F(z) - F_0(z)$, где F - функция с вышеуказанными свойствами.

Пусть $\gamma^{(n)} = \{\gamma_k^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\gamma_k^{(n)} = c_k^{(n)} - F_0(\alpha_k)$, $k = 1,2,...$, $c_k^{(n)} \in B$. Тогда $\rho_{l_\alpha}(\gamma^{(n)},0) \leq d$. Положим теперь $c_k^{(n)} = F_0(\alpha_k)$ при $k \neq n$, $c_k^{(n)} = F_0(\alpha_k) + \exp\frac{\varepsilon}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}$ при $k = n$. Рассуждая, как выше, получим, что существует функция $g_n(z) = F_n(z) - F_0(z)$, такая что $\rho_{S_\alpha^\infty}(g_n,0) \leq 2L_0$ и $g_n(\alpha_k) = \gamma_k^{(n)} = 0$ при $k \neq n$, $g_n(\alpha_k) = \gamma_k^{(n)} = \exp\frac{\varepsilon}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}$ при $k = n$. Лемма 2.1 доказана с константой $C = 2L_0$.

Замечание 2.1. Метод доказательства леммы 2.1 заимствован у П. Кусиса (см. [15, с. 242]), впервые применившего его при решении интерполяционной задачи в классе ограниченных аналитических функций.

Лемма 2.2. *(см. [34]) Если точки последовательности* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *находятся в конечном числе углов Штольца, то есть* $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ *для некоторого* $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+1}$, *то для любой функции* $g = \prod\limits_{s=1}^{n} \exp\frac{C}{(1-ze^{-i\theta_s})^{\alpha+1}}$, $z \in D$, $\alpha > -1$ *справедлива оценка*

$$|g(\alpha_s)| \geq c_0 \exp\frac{C}{(1-|\alpha_s|)^{\alpha+1}}, s = 1,2,...,n, \tag{2.8}$$

где c_0, C *- некоторые положительные постоянные.*

Доказательство теоремы 2.1.

Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).

Предположим, что $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty} \in D$ является интерполяционной последовательностью в классе S_α^∞, $\alpha > 0$, то есть для любой последовательности $\{\gamma_k\} \in l_\alpha$ существует функция $f \in S_\alpha^\infty$, такая что $f(\alpha_k) = \gamma_k$, $k = 1,2,....$

Рассмотрим последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = ... = 0$. Очевидно, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} \in l_\alpha$. Так как $\{\alpha_k\}_{k=2}^{+\infty}$ - последовательность нулей функции $f \in S_\alpha^\infty$, $\alpha > 0$, то из теоремы A следует оценка (2.3):

$$n(r) \leq \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}}.$$

Для того чтобы установить (2.4), зафиксируем номер $n \in \mathbb{N}$, и построим последовательность $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^{+\infty}$ следующим образом: $\gamma_k^{(n)} = 0$, $k \neq n$, $\gamma_k^{(n)} = \exp \frac{\varepsilon}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}$, $k = n$, где ε — достаточно маленькое положительное число.. Согласно лемме 2.1, найдется функция $g_n \in S_\alpha^\infty$, такая что $\rho_{S_\alpha^\infty}(g_n, 0) \leq C$ и $g_n(\alpha_k) = \gamma_k^{(n)}$ при всех $k = 1, 2, ...$, где константа $C > 0$ не зависит от номера n. В частности, $g_n(\alpha_n) = \gamma_n^{(n)}$. По теореме A всякая функция $g_n \in S_\alpha^\infty$, $\alpha > 0$ может быть представлена в виде:

$$g_n(z) = c_{\lambda_n} z^{\lambda_n} \pi_{\beta,n}(z, \alpha_k) \exp\{h_n(z)\}, z \in D,$$

где $h_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi_n(e^{i\theta})}{(1-ze^{-i\theta})^{\beta+2}} d\theta$, $\beta > \alpha - 1$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $g_n(0) \neq 0$.

Значит,

$$g_n(\alpha_n) = \gamma_n^{(n)} = \exp \frac{\varepsilon}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}} = c_0 \pi_{\beta,n}(\alpha_n, \alpha_k) \cdot \exp\{h_n(\alpha_n)\}.$$

Покажем, что

$$\left|\exp\{h_n(re^{i\theta})\}\right| \leq \frac{C_1}{(1-r)^{\alpha+1}}, \tag{2.9}$$

где C_1 не зависит от n.

Имеем:

$$|\exp\{h_n(z)\}| = \frac{|g_n(z)|}{|\pi_{\beta,n}(z, \alpha_k)|},$$

откуда

$$T(r, \exp(h_n)) \leq T(r, g_n) + T\left(r, \frac{1}{\pi_{\beta,n}}\right).$$

По лемме 2.1 $\rho_{S_\alpha^\infty}(g_n, 0) \leq C$, где C не зависит от n. Это означает, что при всех n выполняется оценка:

$$T(r, g_n) \leq \frac{C}{(1-r)^\alpha}.$$

Далее, из равенства равновесия (см. [17, с. 173]) и теоремы A

$$T(r, \pi_{\beta,n}) = T\left(r, \frac{1}{\pi_{\beta,n}}\right) + const \leq \frac{C_2}{(1-r)^{\alpha+1}}, \tag{2.10}$$

где C_2 не зависит от n.

Объединяя последние два неравенства, получаем:

$$T(r, \exp(h_n)) \leq \frac{C_1}{(1-r)^\alpha}.$$

Используя теперь оценку (см., например, [22, с. 84]):

$$\ln M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f),\ 0 < r < R < 1,$$

получаем требуемую оценку (2.9).

С учетом (2.9) будем иметь:

$$|g_n(\alpha_n)| = \exp \frac{\varepsilon}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}} \leq c_0 |\pi_{\beta,n}(\alpha_n, \alpha_k)| \exp \frac{C_1}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}}.$$

Из последнего неравенства получаем:

$$|\pi_{\beta,n}(\alpha_n, \alpha_k)| \geq \exp \frac{-M_1}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}},\ M_1 > 0. \tag{2.11}$$

Покажем, что (2.11)⇒(2.4). Действительно, продифференцировав функцию π_β (см. (0.3)), получим:

$$\pi'_\beta(z, \alpha_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\alpha_j} \exp(-U_\beta(z, \alpha_j)) - \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) \exp(-U_\beta(z, \alpha_j)) U'_\beta(z, \alpha_j) \right) \times$$
$$\times \pi_{\beta,j}(z, \alpha_k),$$

где $U_\beta(z, \alpha_j)$ определяется равенством (0.4).

Поскольку

$$\pi_{\beta,j}(\alpha_n, \alpha_k) = \prod_{k=1, k\neq j}^{+\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\right) \exp(-U_\beta(\alpha_n, \alpha_k)) = 0$$

для всех $j = 1, 2, ..., j \neq n$, будем иметь:

$$|\pi'_\beta(\alpha_n, \alpha_k)| = \frac{1}{|\alpha_n|} |\exp(-U_\beta(\alpha_n, \alpha_n))| |\pi_{\beta,n}(\alpha_n, \alpha_k)|. \tag{2.12}$$

Используя (0.4), нетрудно получить представление (см., например, [41, с. 71]):

$$U_\beta(z,\zeta) = 4(\beta+1)\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\beta \ln\frac{\rho}{|\zeta|}\rho d\rho -$$

$$-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(\beta+n+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)}\frac{z^n}{n}\left\{\zeta^{-n}\int\limits_{0}^{|\zeta|}(1-\rho^2)^\beta\rho^{2n+1}d\rho + \overline{\zeta}^n\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\beta\rho d\rho\right\}.$$

Пусть теперь $\zeta = z$, тогда

$$-U_\beta(z,\zeta) = -4(\beta+1)\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\beta \ln\frac{\rho}{|\zeta|}\rho d\rho +$$

$$+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(\beta+n+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)}\frac{|z|^n}{n}\left\{\int\limits_{0}^{|\zeta|}(1-\rho^2)^\beta\rho^{n+1}d\rho + \int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\beta\rho^{n+1}d\rho\right\}. \tag{2.13}$$

Используя равенство

$$\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+2)}{\Gamma(\beta+n+3)} = \int\limits_{0}^{1}(1-\rho^2)^\beta\rho^{n+1}d\rho,$$

из (2.13) заключаем, что

$$\frac{1}{|\alpha_n|}|\exp(-U_\beta(\alpha_n,\alpha_n))| \geq \exp\left\{\ln\frac{1}{|\alpha_n|}(1+o(1)) + \ln\frac{1}{(1-|\alpha_n|)^{2/\beta}}\right\},$$

$n \to +\infty$.

То есть

$$\frac{1}{|\alpha_n|}|\exp(-U_\beta(\alpha_n,\alpha_n))| \geq \frac{c_\beta}{|\alpha_n|}\cdot\frac{1}{(1-|\alpha_n|)^{2/\beta}}.$$

С учетом последнего замечания, из оценок (2.11) и (2.12) заключаем:

$$|\pi'_\beta(\alpha_n,\alpha_k)| \geq \exp\frac{-M}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, (2.11)⇒(2.4). Импликация 1) ⇒ (2) доказана.

Теперь докажем, что 2) ⇒ 1). Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - произвольная последовательность комплексных чисел из D, расположенных в конечном числе углов Штольца, и справедливы оценки (2.3), (2.4). Покажем, что существует функция $\Psi \in S_\alpha^\infty$, такая что $\Psi(\alpha_k) = \gamma_k$, $k = 1, 2, ...$, для произвольной последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} \in l_\alpha$.

Функцию $\Psi(z)$ будем строить в виде:

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \cdot \left(\frac{1-|\alpha_k|}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^m \cdot \frac{\pi_\beta(z,\alpha_j)}{(z-\alpha_k)} \cdot \frac{1}{\pi'_\beta(\alpha_k,\alpha_j)} \cdot \frac{f(z)}{f(\alpha_k)}, \tag{2.14}$$

где $\beta > \alpha - 1$, $m > \alpha + 1$,

$$f(z) = \prod_{s=1}^{n} \exp \frac{C}{(1-ze^{-i\theta_s})^{\alpha+1}}, z \in D. \tag{2.15}$$

Очевидно, что $\Psi(\alpha_n) = \gamma_n$, $n = 1, 2, ...$

Покажем, что $\Psi \in S_\alpha^\infty$. Из условия (2.3) заключаем:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|\alpha_k|)^m < +\infty \tag{2.16}$$

при всех $m > \alpha + 1$.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|\alpha_k|)^m = \int_0^1 (1-t)^m dn(t).$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|\alpha_k|)^m = m \int_0^1 (1-t)^{m-1} n(t) dt.$$

Но по условию $n(t) \le \frac{c}{(1-t)^{\alpha+1}}$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|)^m \leq c_3\int\limits_0^1(1-t)^{m-\alpha-2}dt < +\infty$$

при всех $m > \alpha + 1$.

Ввиду сходимости ряда (2.16) и леммы 2.2, бесконечное прозведение $\pi_\beta(z, \alpha_j)$ и ряд (2.14) абсолютно и равномерно сходятся внутри D.

Оценим $|\Psi(z)|$ сверху. Учитывая, что $\{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} \in l_\alpha$ и условие (2.4) теоремы, получим:

$$|\Psi(z)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}|\gamma_k|\left(\frac{1-|\alpha_k|}{|1-\overline{\alpha_k}z|}\right)^m \frac{|\pi_\beta(z,\alpha_j)|}{|z-\alpha_k|}\frac{1}{|\pi'_\beta(\alpha_k,\alpha_j)|}\frac{|f(z)|}{|f(\alpha_k)|} \leq$$

$$\leq c\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\frac{\lambda}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}\left(\frac{1-|\alpha_k|}{|1-\overline{\alpha_k}z|}\right)^m \frac{|\pi_\beta(z,\alpha_j)|}{|z-\alpha_k|}\exp\frac{M}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}\frac{|f(z)|}{|f(\alpha_k)|}.$$

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. Оценим фактор $\frac{|\pi_\beta(z,\alpha_j)|}{|z-\alpha_k|}$:

$$\frac{|\pi_\beta(z,\alpha_j)|}{|z-\alpha_k|} = \frac{|\pi_{\beta,k}(z,\alpha_j)|}{|z-\alpha_k|}\cdot|A_\beta(z,\alpha_k)|,$$

где

$$|A_\beta(z,\alpha_k)| = \frac{|\alpha_k - z|}{|\alpha_k|}|\exp\left(-U_\beta(z,\alpha_k)\right)|.$$

Используем известную оценку фактора $A_\beta(z,\alpha_k)$ из произведения Джрбашяна (см., например, [41, с. 80]):

$$|A_\beta(z,\alpha_k)| \leq \exp\left(c_\beta\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\overline{\alpha}_k z|}\right)^{\beta+2}\right). \tag{2.17}$$

Из (2.17) следует, что $|A_\beta(z,\alpha_k)| \leq \widetilde{c}_\beta$, где $\tilde{c}_\beta = \exp\left(c_\beta 2^{\beta+2}\right)$. Введем функцию $\tilde{A}_\beta(z,\alpha_k) = \frac{A_\beta(z,\alpha_k)}{\tilde{c}_\beta}$. Очевидно, что $|\tilde{A}| \leq 1$. По лемме Шварца (см. [5, с. 12])

$$|\tilde{A}_\beta(z,\alpha_k)| \leq \left|\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right|.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|\alpha_k|}|\exp\left(-U_\beta(z,\alpha_k)\right)| \leq C_\beta \frac{1}{|1-\bar{\alpha}_k z|},\ z \in D.$$

Таким образом,

$$\frac{|\pi_\beta(z,\alpha_j)|}{|z-\alpha_k|} \leq \tilde{c}_\beta \frac{|\pi_{\beta,k}(z,\alpha_j)|}{|1-\overline{\alpha}_k z|}.$$

Вновь используя оценку (2.17), получаем:

$$\frac{|\pi_{\beta,k}(z,\alpha_j)|}{|1-\overline{\alpha}_k z|} \leq \frac{\tilde{c}_\beta}{|1-\overline{\alpha}_k z|}\exp\left(c_\beta \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|\alpha_n|}{|1-\overline{\alpha}_n z|}\right)^{\beta+2}\right).$$

Поэтому

$$|\Psi(z)| \leq \exp\left(c_\beta \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|\alpha_n|}{|1-\overline{\alpha}_n z|}\right)^{\beta+2}\right) \times |f(z)| \times$$

$$\widetilde{c}_\beta \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\frac{\lambda+M}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{|f(\alpha_k)|}\frac{(1-|\alpha_k|)^m}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+1}}.$$

Рассмотрим последний фактор в произведении:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\frac{\lambda+M}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{|f(\alpha_k)|}\frac{(1-|\alpha_k|)^m}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+1}}.$$

Разобьем сумму на n частей:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha_k\in\Gamma_\delta(\theta_s)} \exp\frac{\lambda+M}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{|f(\alpha_k)|}\frac{(1-|\alpha_k|)^m}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+1}}.$$

Поскольку $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{n}\Gamma_\delta(\theta_s)$ при некотором $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+1}$, то применяя к каждой части лемму 2.2, будем иметь:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha_k\in\Gamma_\delta(\theta_s)} \exp\frac{\lambda+M-C}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}} \cdot \frac{(1-|\alpha_k|)^m}{|1-\overline{\alpha_k}z|^{m+1}}.$$

Выбирая положительную константу C таким образом, чтобы $\lambda+M-C<0$, получаем следующую оценку:

$$\exp \frac{\lambda + M - C}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}} \leq 1,$$

при всех $k = 1, 2, ...$

Таким образом, имеем:

$$|\Psi(z)| \leq \exp\left(c_\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|\alpha_n|}{|1-\overline{\alpha}_n z|}\right)^{\beta+2}\right) \times |f(z)| \times \widetilde{c}_\beta \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-|\alpha_k|)^m}{|1-\overline{\alpha_k} z|^{m+1}}.$$

Принимая во внимание сходимость ряда (2.16), получаем:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-|\alpha_k|)^m}{|1-\overline{\alpha_k} z|^{m+1}} \leq \frac{c}{(1-|z|)^{m+1}} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-|\alpha_k|)^m \leq \frac{c_1}{(1-|z|)^{m+1}}$$

при всех $m > \alpha + 1$.

Оценка функции $|\Psi(z)|$ принимает вид:

$$|\Psi(z)| \leq \exp\left(c_\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|\alpha_n|}{|1-\overline{\alpha}_n z|}\right)^{\beta+2}\right) \times |f(z)| \times \frac{c_2}{(1-|z|)^{m+1}}. \tag{2.18}$$

Используя эту оценку, докажем, что $\Psi(z) \in S_\alpha^\infty$, то есть

$$T(r, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |\Psi(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{C}{(1-r)^\alpha},$$

где $\alpha > 0$, $C > 0$.

Из неравенства (2.18) следует, что

$$T(r, \Psi) \leq \tilde{C} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-|\alpha_n|}{|1-\overline{\alpha}_n re^{i\theta}|}\right)^{\beta+2} d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + 2\pi \ln \frac{c}{(1-r)^{m+1}}.$$

Оценим каждое слагаемое в этой сумме отдельно. Как установлено в [57],

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-|\alpha_n|}{|1-\overline{\alpha}_n re^{i\theta}|}\right)^{\beta+2} d\theta \leq \frac{c}{(1-r)^\alpha}, \tag{2.19}$$

при всех $\beta > \alpha - 1$.

Далее из (2.15) имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{C}{|1 - re^{i(\theta-\theta_s)}|^{\alpha+1}}.$$

Применяя элементарную оценку (1.3), получаем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{c_3}{(1-r)^{\alpha}}. \tag{2.20}$$

Из (2.19), (2.20) заключаем, что функция $\Psi(z)$ принадлежит классу S_{α}^{∞}. Теорема 2.1 доказана полностью.

Замечание 2.2. Если $\alpha = 0$, то условие принадлежности узлов интерполяции углам Штольца является также необходимым, как установлено в работе [16]. Отметим также работу В.А. Беднаж [1] об интерполяции в классе S_{α}^{∞}.

2.2 L^p-оценки в классах аналитических в круге функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны

Пусть Ω – множество всех измеримых положительных функций на $(0,1]$, для которых существуют числа m_ω, q_ω из $(0,1]$, M_ω такие что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega,\ r \in (0,1],\ \lambda \in [q_\omega, 1]. \tag{2.21}$$

Для всех $0 < p < +\infty$ и $\omega \in \Omega$ введем в рассмотрение следующие весовые классы функций (см. [37], [41]):

$$A^p(\omega) = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \right)^p dr < +\infty \right\},$$

$$S^p_\omega = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr < +\infty \right\}.$$

Во многих задачах комплексного анализа часто возникает вопрос вложения одного класса аналитических функций в другой (см. [43]). Например, при решении интерполяционных задач в классах S^p_ω естественным образом возникает задача следующего типа:

Пусть μ - неотрицательная борелевская мера в D. Каким условиям должна удовлетворять мера μ, чтобы для всех $f \in S^p_\omega$

$$\int\limits_D \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) < +\infty?$$

В этом параграфе получена полная характеризация мер μ, для которых справедлива указанная оценка.

Справедлива

Теорема 2.2. *Пусть μ - конечная неотрицательная борелевская мера, заданная на подмножествах единичного круга D, $1 \le p < +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $$\int\limits_D \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \le C \int\limits_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr < +\infty,\ f \in S^p_\omega, \qquad (2.22)$$

2. $\mu(\Delta_l(\theta)) \le C_1 \cdot \omega(l) \cdot l^{p+1}$, *при всех* $\theta \in [-\pi, \pi]$, $l \in (0,1)$. (2.23)

Здесь $\Delta_l(\theta)$ — разбиение (0.12) единичного круга.

При $0 < p < 1$ характеризация мер имеет другой вид:

Теорема 2.3. *Пусть μ - конечная неотрицательная борелевская мера, заданная на подмножествах единичного круга D, $0 < p < 1$, $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, 2...$ Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $$\int\limits_D \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \le C \int\limits_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr < +\infty,\ f \in S^p_\omega, \qquad (2.24)$$

$$\textit{2.}\ \sum_{s=-2^k}^{2^k-1}(\mu(\Delta_{k,s}))^{\frac{1}{1-p}} \le c(1-r_k)^{\frac{1+p}{1-p}}(\omega(1-r_k))^{\frac{1}{1-p}}. \tag{2.25}$$

Здесь $\Delta_{k,s}$ — диадическое разбиение (0.13) единичного круга.

Для доказательства теорем нам потребуется следующая лемма (см., например, [41]).

Лемма 2.3. *При всех $s>1$ справедлива следующая оценка:*

$$\int_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-\rho r)^s}dr \le c\frac{\omega(1-\rho)}{(1-\rho)^{s-1}}, \tag{2.26}$$

где ω – функция с вышеописанными свойствами.

Доказательство теоремы 2.2. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть $g\in A^p(\omega)$, $g(z)=u(z)+iv(z)$, тогда очевидно $\exp\{\pm g(z)\}\in S^p_\omega$. Введем также стандартные обозначения: $u^+(z) = \max(0,u(z))$, $u^-(z) = \max(0,-u(z))$. Ясно, что $u^+(z)+u^-(z) = |u(z)|$. Из оценки (2.22) следует, что

$$\int_D \left(u^+(\zeta)\right)^p d\mu(\zeta) \le C\int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})|d\theta\right)^p dr. \tag{2.27}$$

Действительно, положив $f(z)=\exp(g(z))$, получим:

$$\int_D \left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) = \int_D\{(\Re g(\zeta))^+\}^p d\mu(\zeta) = \int_D (u^+(\zeta))^p d\mu(\zeta) \le$$

$$\le \int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr = \int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}u^+(re^{i\theta})d\theta\right)^p dr \le$$

$$\le \int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})|d\theta\right)^p dr \le \int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|d\theta\right)^p dr < +\infty.$$

Из тех же соображений, положив $f(z) = \exp(-g(z))$, имеем:

$$\int\limits_D \left(u^-(\zeta)\right)^p d\mu(\zeta) \leq \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr. \tag{2.28}$$

Складывая неравенства (2.27) и (2.28), получаем:

$$\int\limits_D \{\left(u^+(\zeta)\right)^p + \left(u^-(\zeta)\right)^p\} d\mu(\zeta) \leq 2 \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr.$$

Учитывая теперь неравенство $(|a| + |b|)^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right)$, справедливое для всех a, $b \in \mathbb{C}$, $0 < p < +\infty$, получаем:

$$\int\limits_D |u(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \leq c(p) \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr. \tag{2.29}$$

Далее, так как $g \in A^p(\omega)$, $g(z) = u(z) + iv(z)$, то $\exp\{\pm ig(z)\} \in S^p_\omega$. Очевидно, что $v(z) = -\Re(ig(z))$. Рассуждая, как выше, получим:

$$\int\limits_D |v(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \leq c(p) \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr. \tag{2.30}$$

Объединим теперь оценки (2.29), (2.30):

$$\int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \leq \int\limits_D |u(\zeta) + iv(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \leq$$

$$\leq 2^p \left(\int\limits_D |u(\zeta)|^p d\mu(\zeta) + \int\limits_D |v(\zeta)|^p d\mu(\zeta)\right) \leq$$

$$\leq c_1(p) \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr + c_1(p) \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr \leq$$

$$\leq c_2(p) \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr.$$

Таким образом, в условиях теоремы для любой функции $g \in A^p(\omega)$ справедлива оценка:

$$\int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \le c_2(p) \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta \right)^p dr. \qquad (2.31)$$

Возьмем в качестве g функцию $\frac{(1-a^2)^\beta}{(1-az)^{2\beta}}$, где $0 < a < 1$, β - достаточно большое положительное число. Подставим в неравенство (2.31):

$$\int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \le c_2(p) \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-a^2)^\beta}{(1-are^{i\theta})^{2\beta}} d\theta \right)^p dr \le$$

$$\le c_2(p)(1-a^2)^{\beta p} \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-ar)^{(2\beta-1)p}} dr.$$

Применяя теперь оценку (2.26), получаем:

$$\int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \le c_3(p) \frac{\omega(1-a)}{(1-a)^{p(\beta-1)-1}}.$$

Полагая $l = 1-a$, будем иметь:

$$\int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \le c_3(p) \frac{\omega(l)}{l^{p(\beta-1)-1}}.$$

Оценим теперь вышеуказанный интеграл снизу. Сначала заметим, что при всех $z = re^{i\theta} \in \Delta_l(\theta)$ справедливо

$$|1-az|^2 = ((1-a) + a(1-r))^2 + 4ar \sin^2 \frac{\theta}{2} \ge (1-a)^2.$$

Поэтому

$$\int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta) = \int\limits_D \frac{(1-a^2)^{\beta p}}{(1-a\zeta)^{2\beta p}} d\mu(\zeta) \ge \frac{(1-a^2)^{\beta o}}{(1-a)^{2\beta p}} \int\limits_{\Delta_l} d\mu(\zeta) \ge \frac{\mu(\Delta_l)}{l^{\beta p}}.$$

Объединяя верхнюю и нижнюю оценки для интеграла $\int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta)$, полу-

чаем:
$$\frac{\mu(\Delta_l)}{l^{\beta p}} \leq \int\limits_D |g(\zeta)|^p d\mu(\zeta) \leq c_3(p)\frac{\omega(l)}{l^{p(\beta-1)-1}},$$
откуда непосредственно следует оценка (2.23) теоремы. Импликация 1)$\Rightarrow$ 2) установлена.

Докажем теперь, что 2) $\Rightarrow$ 1). Зададим разбиение $\Delta_{k,s}$ круга D и оценим сверху интеграл $\int\limits_D \left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta)$ с учетом неравенства (2.23):

$$\int\limits_D \left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p \mu(\Delta_{k,s}) \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p \omega(s_k)s_k^{p+1},$$

где $\zeta_{k,s} \in \Delta_{k,s}$, $s_k = r_{k+1} - r_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Продолжим оценку:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p \omega(r_{k+1}-r_k)(r_{k+1}-r_k)^{p+1} \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\omega(1-r_k)(1-r_k)\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p (1-r_k)^p.$$

Учитывая, что $0 < \frac{1}{p} \leq 1$, получаем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\omega(1-r_k)(1-r_k)\left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p (1-r_k)^p\right)^{\frac{p}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\omega(1-r_k)(1-r_k)\left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \ln^+|f(\zeta_{k,s})|(1-r_k)\right)^p.$$

Рассмотрим круг $K_\rho(\zeta_{k,s}) = \{\zeta : |\zeta - \zeta_{k,s}| < \rho(1-|\zeta_{k,s}|)\}$, где $\zeta_{k,s} \in \Delta_{k,s}$, $-2^k \leq s \leq 2^k - 1$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, и субгармоническую функцию $\ln^+|f(\zeta)|$ в нем.

Имеем:

$$\ln^+|f(\zeta_{k,s})| \leq \frac{1}{\pi\rho^2(1-|\zeta_{k,s}|)^2} \int\limits_{K_\rho(\zeta_{k,s})} \ln^+|f(\zeta)|dm_2(\zeta),$$

откуда

$$\sum_{s=-2^k}^{2^k-1}(1-r_k)\ln^+|f(\zeta_{k,s})| \leq \sum_{s=-2^k}^{2^k-1}\frac{1}{(1-r_k)}\int\limits_{K_\rho(\zeta_{k,s})} \ln^+|f(\zeta)|dm_2(\zeta).$$

Очевидно, что $\cup_{s=-2^k}^{2^k-1}K_\rho(\zeta_{k,s}) \subset \Pi_k$, где $\Pi_k = \left\{\zeta:\ 1-\frac{1}{2^{k-1}} < |\zeta| < 1-\frac{1}{2^{k+2}}\right\}$, поэтому:

$$\sum_{s=-2^k}^{2^k-1}\frac{1}{(1-r_k)}\int\limits_{K_\rho(\zeta_{k,s})} \ln^+|f(\zeta)|dm_2(\zeta) \leq \frac{1}{(1-r_k)}\int\limits_{\Pi_k}\ln^+|f(\zeta)|dm_2(\zeta) \leq$$

$$\frac{1-r_{k+2}}{(1-r_k)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(r_{k+2}e^{i\theta})|d\theta \leq c\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(r_{k+2}e^{i\theta})|d\theta.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что функция $\rho \to \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta$ монотонно возрастает (см., например, [30, с. 27]). Значит,

$$\int\limits_D \left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \leq C(p)\sum_{k=0}^{+\infty}\omega(1-r_k)(1-r_k)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(r_{k+2}e^{i\theta})|d\theta\right)^p.$$

Принимая во внимание оценку (2.21), заключаем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\omega(1-r_k)(1-r_k)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(r_{k+2}e^{i\theta})|d\theta\right)^p \leq$$

$$c\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta\right)^p dr.$$

Таким образом, установлено, что 2) $\Rightarrow$ 1). Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3.

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Зададим разбиение $\Delta_{k,s}$ круга D и оценим сверху интеграл $\int\limits_D \left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta)$:

$$\int\limits_D \left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \le \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{s=-2^k}^{2^k-1}\left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p \mu(\Delta_{k,s}), \tag{2.32}$$

где $\zeta_{k,s}$ - точка максимума функции $\ln^+|f(\zeta)|$ в $\Delta_{k,s}$. Будем предполагать, что $\ln^+|f(\zeta_{k,s})| > 0$ (в противном случае, соответствующие оценки тривиальны). Учитывая субгармоничность функции $\ln^+|f(\zeta)|$ и теорему Харди-Литтлвуда (см. [5, с. 195]), получаем:

$$\left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p \le \frac{c}{|\Delta_{k,s}|}\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}\int\limits_{\alpha_{k,s}}^{\alpha_{k,s+1}}(\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|)^p d\theta\rho d\rho, \tag{2.33}$$

где $r_k = 1-\frac{1}{2^k}$, $\alpha_{k,s} = \frac{\pi s}{2^k}$.

Применив в (2.33) к внутреннему интегралу неравенство Гёльдера с показателями $q=\frac{1}{p}$, $q'=\frac{1}{1-p}$, приходим к неравенству:

$$\left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p \le \frac{c}{|\Delta_{k,s}|}\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}\left(\int\limits_{\alpha_{k,s}}^{\alpha_{k,s+1}}\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|d\theta\right)^p(\alpha_{k,s+1}-\alpha_{k,s})^{1-p}\rho d\rho.$$

Подставляя полученную оценку в (2.32), получаем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{s=-2^k}^{2^k-1}\left(\ln^+|f(\zeta_{k,s})|\right)^p\mu(\Delta_{k,s}) \le$$
$$c\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{|\Delta_{k,s}|}\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}\left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1}\left(\int\limits_{\alpha_{k,s}}^{\alpha_{k,s+1}}\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|d\theta\right)^p\mu(\Delta_{k,s})(\alpha_{k,s+1}-\alpha_{k,s})^{1-p}\right)\rho d\rho. \tag{2.34}$$

Снова применим в (2.34) к внутренней сумме неравенство Гёльдера с показателями $q = \frac{1}{p}$, $q' = \frac{1}{1-p}$, в результате получим:

$$\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \int\limits_{\alpha_{k,s}}^{\alpha_{k,s+1}} \ln^+ |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \right)^p \times \left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} (\mu(\Delta_{k,s}))^{\frac{1}{1-p}} (\alpha_{k,s+1} - \alpha_{k,s}) \right)^{1-p} \right) d\rho$$
$$\leq \int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \right)^p \times \left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} (\mu(\Delta_{k,s}))^{\frac{1}{1-p}} (\alpha_{k,s+1} - \alpha_{k,s}) \right)^{1-p} \right) d\rho. \tag{2.35}$$

Объединяя оценки (2.34), (2.35), получаем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \left(\ln^+ |f(\zeta_{k,s})| \right)^p \mu(\Delta_{k,s}) \leq$$
$$c \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{|\Delta_{k,s}|} \int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \right)^p \times \left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} (\mu(\Delta_{k,s}))^{\frac{1}{1-p}} (\alpha_{k,s+1} - \alpha_{k,s}) \right)^{1-p} d\rho. \tag{2.36}$$

Следовательно, если

$$\frac{(1-r_k)^{1-p}}{|\Delta_{k,s}|} \left(\sum_{s=-2^k}^{2^k-1} (\mu(\Delta_{k,s}))^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} \leq c\omega(1-r_k),$$

то есть выполняется условие (2.25) теоремы, то

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{s=-2^k}^{2^k-1} \left(\ln^+ |f(\zeta_{k,s})| \right)^p \mu(\Delta_{k,s}) \leq$$
$$C \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right)^p dr. \tag{2.37}$$

Объединяя оценки (2.33) и (2.37), получим (2.24).

Итак, мы доказали, что 2)$\Rightarrow$ 1)

Докажем теперь обратную импликацию, то есть 1) $\Rightarrow$ 2).

Введем функцию

$$f(z,t)=\sum_{s=0}^{2^k-1}\frac{c_{k,s}\varphi_s(t)}{(1-\overline{z}_s z)^n},\ z\in D,\ t\in[0,1],$$

где $c_{k,s}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, $z_{k,s}$ – центр криволинейного прямоугольника $\Delta_{k,s}$, n – достаточно большое натуральное число, $\varphi_s(t)$ — функция Радемахера порядка s. Положим также $F(z,t)=\exp f(z,t)$. Очевидно, что для произвольного $t\in[0,1]$ функция $F\in S^p_\omega$. Поэтому если выполняется (2.24), то

$$\int\limits_D |f(z,t)|^p d\mu(z)\le\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta},t)|d\theta\right)^p dr.$$

Проинтегрируем это неравенство по $t\in[0,1]$. Меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\int\limits_D\left(\int\limits_0^1|f(z,t)|^p dt\right)d\mu(z)\le\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta},t)|d\theta\right)^p dt\right)dr.$$

Используя известное свойство системы Радемахера (см. [13, с. 341]), получаем:

$$\int\limits_D\left(\sum_{s=0}^{2^k-1}\frac{|c_{k,s}|^2}{|1-\overline{z}_s z|^{2n}}\right)^{\frac{p}{2}}d\mu(z)\le c\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{s=0}^{2^k-1}\frac{|c_{k,s}|}{|1-\overline{z}_s z|^n}d\theta\right)^p dr,$$

откуда

$$\sum_{s=0}^{2^k-1}|c_{k,s}|^p\mu(\Delta_{k,s})\le c(1-r_k)^{pn}\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\sum_{s=0}^{2^k-1}\frac{|c_{k,s}|}{(1-r_k r)^{n-1}}\right)^p dr\le$$

$$c(1-r_k)^{pn}\int\limits_0^1\frac{\omega(1-r)}{(1-r_k r)^{(n-1)p}}dr\times\left(\sum_{s=0}^{2^k-1}|c_{k,s}|\right)^p.$$

Снова применяя оценку (2.26), получаем:

$$\sum_{s=0}^{2^k-1} |c_{k,s}|^p \mu(\Delta_{k,s}) \le c\omega(1-r_k)(1-r_k)^{p+1} \times \left(\sum_{s=0}^{2^k-1} |c_{k,s}|\right)^p,$$

Обозначим теперь $|c_{k,s}| = |b_s|^{1/p}$. Тогда последнюю оценку можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{s=0}^{2^k-1} |b_s| \mu(\Delta_{k,s}) \le c\omega(1-r_k)(1-r_k)^{p+1} \times \left(\sum_{s=0}^{2^k-1} |b_s|^{\frac{1}{p}}\right)^p,$$

По теореме Хана-Банаха:

$$\sup_{\|b\|_{l^{\frac{1}{p}}} \le 1} \sum_{s=0}^{2^k-1} |b_s| \mu(\Delta_{k,s}) = \left(\sum_{s=0}^{2^k-1} (\mu(\Delta_{k,s}))^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \le$$
$$\le c \cdot \omega(1-r_k)(1-r_k)^{p+1}.$$

После возведения последнего неравенства в степень $\frac{1}{1-p}$ получим оценку (2.25).

Таким же образом устанавливается аналогичная оценка для суммы по отрицательным значениям параметра $s = \overline{-2^k, -1}$. Теорема 2.3 доказана.

Замечание 2.3. Характеризация соответствующих мер в классах Харди и Бергмана не зависит от параметра p (см. [19, 32, 33]), а в классах S^p_ω, как видно из теорем 2.2, 2.3 зависимость существенная. Отметим также, что при доказательстве теорем этого параграфа применялся метод, разработанный ранее в работах [32], [33].

2.3 О коэффициентных мультипликаторах из класса аналитических в круге функций с ограничением на характеристику Р. Неванлинны

Рассмотрим класс S_α^p, $\alpha > -1$, аналитических в D функций, таких что

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr < +\infty, \tag{2.38}$$

где $0 < p < +\infty$, $T(r,f)$ - характеристика Р. Неванлинны функции f.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 2.4. *Если $f \in S_\alpha^p$, то*

$$\ln^+ M(r,f) = o\left(\frac{1}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right), r \to 1-0, \tag{2.39}$$

где $M(r,f)$ - максимум модуля функции, т.е. $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$; оценка (2.39) неулучшаема, т.е. для любой положительной функции $\omega(r)$, $0 < r < 1$, такой что $\omega(r) = o(1)$, $r \to 1-0$, существует функция $f \in S_\alpha^p$, такая что

$$\ln^+ M(r,f) \neq O\left(\frac{\omega(r)}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right), r \to 1-0. \tag{2.40}$$

Теорема 2.5. *Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ -ряд Тейлора функции $f \in S_\alpha^p$, то*

$$\ln^+ |a_n| = o\left(n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right), n \to +\infty; \tag{2.41}$$

оценка (2.41) неулучшаема, т.е. для любой положительной последовательности $\{\delta_n\}$, $\delta_n = o(1)$, существует функция $f \in S_\alpha^p$, такая что

$$\ln^+ |a_n| \neq O\left(\delta_n n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right), n \to +\infty. \tag{2.42}$$

Для доказательства теоремы 2.5 нам потребуется следующее известное неравенство (см. [28, с. 178]):

Лемма 2.4. (Неравенство Минковского). *Пусть* $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– последовательность неотрицательных функций. При всех* $1 \le p < +\infty$ *справедливо неравенство:*

$$\left[\int \left\{\sum_k f_k(x)\right\}^p dx\right]^{1/p} < \sum_k \left\{\int f_k^p(x)dx\right\}^{1/p}. \tag{2.43}$$

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $f \in S^p_\alpha$. При всех $0 \le r < R < 1$ справедлива оценка (см., например, [22, с. 84])

$$\ln^+ M(r,f) \le \frac{R+r}{R-r} \cdot T(R,f),$$

откуда

$$(R-r)\ln^+ M(r,f) \le 2T(R,f). \tag{2.44}$$

Возведем обе части неравенства (2.44) в степень p, $0 < p < +\infty$, затем умножим на $(1-R)^\alpha$ и проинтегрируем по $R \in (0,1)$. В результате получим:

$$\int\limits_0^1 (1-R)^\alpha (R-r)^p (\ln^+ M(r,f))^p dr \le 2^p \int\limits_0^1 (1-R)^\alpha T^p(R,f)dR. \tag{2.45}$$

Но интеграл в правой части неравенства (2.45) сходится ввиду того, что $f \in S^p_\alpha$, поэтому, полагая $R = \frac{1+r}{2}$, будем иметь:

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{\alpha+p}(\ln^+ M(r,f))^p dr \le c.$$

Пусть теперь $0 < R < 1$. Обозначим

$$I_R = \int\limits_R^1 (1-r)^{\alpha+p}(\ln^+ M(r,f))^p dr.$$

Очевидно,

$$\ln^+ M(R,f) \le c_p \frac{(I_R)^{\frac{1}{p}}}{(1-R)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}.$$

Поскольку $I_R \to 0$ при $R \to 1-0$, то из последнего неравенства получим

(2.39).

Теперь докажем точность оценки (2.39). Для любой положительной функции $\omega(r) = o(1)$, $r \to 1-0$, выберем точки $r_k \in (0,1)$, $r_k \to 1$, таким образом, чтобы

$$\omega(r_k) < \frac{1}{k^{s+1}}, k = 1, 2, ..., \tag{2.46}$$

где $s > 1$ при $p > 1$, $s > \frac{1}{p}$ при $0 < p \leq 1$.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \exp \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \frac{(1-r_k^2)^\beta}{(1-r_k z)^{\beta + \frac{\alpha+1}{p} + 1}}, \ z \in D$$

где $r_k \in (0,1)$, $s > 1$ при $p > 1$, $s > \frac{1}{p}$ при $0 < p \leq 1$, $\beta > \alpha$.

Покажем, что $f \in S_\alpha^p$ при всех $0 < p < +\infty$.

Действительно, принимая во внимание оценку (1.3), будем иметь:

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr \leq \int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k^s} \frac{(1-r_k^2)^\beta}{|1-r_k r e^{i\varphi}|^{\beta + \frac{\alpha+1}{p} + 1}} d\varphi \right)^p dr$$

$$\leq \int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \frac{(1-r_k^2)^\beta}{(1-r_k r)^{\beta + \frac{\alpha+1}{p}}} \right)^p dr = I.$$

Рассмотрим сначала случай $0 < p \leq 1$. Воспользуемся теперь оценкой (1.4):

$$I \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{sp}} (1-r_k^2)^{\beta p} \int_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{(1-r_k r)^{\beta p + \alpha + 1}} dr \leq c \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{sp}} < +\infty,$$

так как $s > \frac{1}{p}$ при $0 < p \leq 1$.

Рассмотрим теперь случай $p > 1$. Для оценки интеграла I воспользуемся неравенством Минковского (2.43) и оценкой (1.4):

$$I \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{k^{sp}} \frac{(1-r)^\alpha (1-r_k^2)^{\beta p}}{(1-r_k r)^{\beta p + \alpha + 1}} dr \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \leq \left(c \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \right)^p < +\infty,$$

так как $s > 1$ при $p > 1$.

Таким образом доказано, что $f \in S_\alpha^p$ при всех $0 < p < +\infty$.

Оценим теперь $\ln^+ |f(r_k)|$ с учетом (2.46):

$$\ln^+ |f(r_k)| = \frac{1}{k^s}(1-r_k^2)^{-\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)} > k\omega(r_k)(1-r_k^2)^{-\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)},$$

то есть выполняется условие (2.40) теоремы 2.4. Теорема 2.4 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2.5. Из неравенства Коши и оценки (2.39) теоремы 2.4 следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $r_\varepsilon \in (0,1)$, такое что

$$|a_n| \le r^{-n} \exp\left\{\varepsilon(1-r)^{-\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)}\right\},\ r_\varepsilon < r < 1,\ n = 0, 1, ... \tag{2.47}$$

В качестве r возьмем $r_n = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^{\frac{p}{\alpha+2p+1}}$. Очевидно, что $r_n \in (r_\varepsilon, 1)$ при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Оценка (2.47) примет вид:

$$|a_n| \le \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^{\frac{p}{\alpha+2p+1}}\right)^{-n} \cdot \exp\left(\varepsilon^{\frac{p}{\alpha+2p+1}} n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right) \le \exp\left(2\varepsilon^{\frac{p}{\alpha+2p+1}} n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right),$$

откуда получаем оценку (2.41) теоремы 2.4.

Теперь докажем точность оценки (2.41) методом от противного. Предположим, что $\exists\{\delta_n\}$, $\delta_n = o(1)$, $n \to +\infty$, такая что для любой функции $f \in S_\alpha^p$ справедливо неравенство

$$\ln^+ |a_n| \le C_f \delta_n n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}, n = 1, 2, ...,$$

где $C_f > 0$. Тогда

$$M(r,f) \le |a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(C_f \delta_n n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right) r^n,\ 0 < r < 1.$$

Определим целочисленную функцию $m(r) \to +\infty$, $r \to 1-0$ следующим образом:

$$m(r) = \max\left\{n :\ n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}} + \frac{n}{2}\ln r \ge 0\right\},\ 0 < r < 1. \tag{2.48}$$

Из (2.48) следует, что

$$r^{\frac{n}{2}} \geq \exp\left(-n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right), \tag{2.49}$$

при $n \leq m(r)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$n^{-\frac{p}{\alpha+2p+1}} \leq \delta_n \leq 1. \tag{2.50}$$

С учетом (2.49), (2.50) оценка максимума модуля функции примет вид:

$$M(r,f) \leq |a_0| + \sum_{n=1}^{m(r)} \exp\left(C_f \delta_n n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right) + \sum_{n=m(r)+1}^{+\infty} r^{\frac{n}{2}} <$$
$$< (m(r)+1)\exp\left(C_f \delta_{k(r)} (k(r))^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right) + \frac{1}{1-\sqrt{r}},$$

где $k(r)$ - номер макимального элемента среди $\delta_n n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}$, $n = 1, 2, ...m(r)$. Ввиду (2.50), $k(r) \to +\infty$ при $r \to 1-0$. Из (2.48) с учетом элементарных неравенств

$$(1-r) < \ln\frac{1}{r} < \frac{1-r}{r}, \quad 0 < r < 1,$$

следуют неравенства

$$(m(r))^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}} \leq \left(\frac{2}{1-r}\right)^{\frac{\alpha+p+1}{p}},$$

$$m(r) + 1 > \left(\frac{2r}{1-r}\right)^{\frac{\alpha+2p+1}{p}}.$$

С учетом этих неравенств оценка максимума модуля функции примет вид:

$$M(r,f) \leq \exp\left\{C_f \delta_{k(r)} (m(r))^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}} + \ln(m(r)+1)\right\} + \frac{(m(r)+1)^{\frac{p}{\alpha+2p+1}}}{r} <$$
$$< \exp\left\{\widetilde{C}_f \delta_{k(r)} (1-r)^{-\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)}\right\}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\ln^+ M(r,f) = O\left(\omega(r) \cdot (1-r)^{-\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)}\right), \tag{2.51}$$

где $\omega(r) \equiv \delta_{k(r)} = o(1)$, $r \to 1-0$.

Но (2.51) противоречит второй части теоремы 2.5. Значит, сделанное предположение неверно, и для любой положительной последовательности $\{\delta_n\}$, $\delta_n = o(1)$, существует функция $f(z) \in S_\alpha^p$, такая что

$$\ln^+ |a_n| \neq O\left(\delta_n n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right), n \to +\infty.$$

Теорема 2.4 доказана полностью.

Для формулировки следующего результата введем дополнительные определения и обозначения. Пусть X - некоторый класс аналитических в единичном круге D функций.

Определение 2.3. Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем коэффициентным *мультипликатором* из класса S_α^p в класс X, если для произвольной функции $f \in S_\alpha^p$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция $\Lambda(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in X$.

Описанию мультипликаторов в различных классах голоморфных функций посвящены работы отечественных и зарубежных ученых (см. [11, 38, 43, 60]). Нами установлено следующее утверждение:

Теорема 2.6. *Пусть X совпадает с одним из следующих классов: S_β^p, $(-1 < \beta < \alpha)$ или $H^p\,(0 < p \leq \infty)$. Тогда для того чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ являлась мультипликатором из класса S_α^p в класс X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right),\ c > 0,\ k \to +\infty. \tag{2.52}$$

Доказательство этой теоремы основывается на вспомогательных утверждениях. Для формулировки следующей леммы введем в классе S_α^p метрику по правилу:

$$\rho(f,g) = \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr \text{ при } 0 < p \leq 1, \tag{2.53}$$

$$\rho(f,g)=\left(\int\limits_0^1(1-r)^\alpha\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1+|f(re^{i\theta})-g(re^{i\theta})|\right)d\theta\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } p>1. \tag{2.54}$$

для любых f, $g\in S^p_\alpha$.

Лемма 2.5. *Относительно введенной метрики S^p_α образует F-пространство.*

Доказательство данного утверждения эквивалентно установлению следующих свойств метрики (см. [23]):
а) $\rho(f,g)=\rho(f-g,0)$ - очевидно;
б) Если f, $f_n\in S^p_\alpha$ и $\rho(f_n,f)\to 0$, $n\to+\infty$, то для любого $\beta\in\mathbb{C}$ $\rho(\beta f_n,\beta f)\to 0$, $n\to+\infty$;
в) Если β_n, $\beta\in\mathbb{C}$ и $\beta_n\to\beta$, то $\rho(\beta_n f,\beta f)\to 0$, $n\to+\infty$ для любой функции $f\in S^p_\alpha$;
г) S^p_α – полное метрическое пространство.

Доказательство свойств б) - г) проведем для случая $0<p\le 1$. Случай $p>1$ рассматривается аналогично.

Докажем сначала полноту пространства S^p_α. Пусть $\{f_n\}$ - произвольная фундаментальная последовательность из класса S^p_α, то есть $\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon)>0:\quad\forall n,m>N\Rightarrow\rho(f_n,f_m)<\varepsilon$. Покажем, что она сходится к некоторой функции $f\in S^p_\alpha$. Сначала докажем, что из фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ в S^p_α следует ее равномерная сходимость внутри круга D. Пусть $0<r<R<1$. Ввиду субгармоничности функции $u(z)=\ln(1+|f_n(z)-f_m(z)|)$ в D, имеем:

$$\ln^p(1+|f_n(Re^{i\theta})-f_m(Re^{i\theta})|)\le$$

$$\frac{\alpha+1}{(2\pi)^p(1-R)^{\alpha+1}}\int\limits_R^1(1-r)^\alpha\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1+|f_n(re^{i\theta})-f_m(re^{i\theta})|\right)d\theta\right)^p dr\le$$

$$\le\frac{\alpha+1}{(2\pi)^p(1-R)^{\alpha+1}}\rho(f_n,f_m),$$

откуда

$$|f_n(re^{i\theta})-f_m(re^{i\theta})|\to 0,\ n,m\to+\infty,$$

при всех $0<r<R<1$, $\theta\in[-\pi,\pi]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри круга D к некоторой функции $f \in H(D)$. Докажем, что $f \in S^p_\alpha$. Фиксируем число $0 < R < 1$. Используя неравенство $(a+b)^p \le 2^p(a^p + b^p)$, справедливое при всех положительных значениях параметров a, b, p, получаем:

$$\int\limits_0^R (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr \le \int\limits_0^R (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |f(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr \le$$

$$\le 2^p \Big(\int\limits_0^R (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr +$$

$$+ \int\limits_0^R (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |f_n(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr \Big).$$

Фиксируем теперь $N \in \mathbb{N}$. Для любого $n > N$ справедливо

$$\rho(f_n, 0) = \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |f(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr \le$$

$$\le 2^p \Big(\int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |f_n(re^{i\theta}) - f_{N+1}(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr +$$

$$\int\limits_0^R (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |f_{N+1}(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr \Big),$$

то есть $\rho(f_n, 0) \le \rho(f_n, f_{N+1}) + \rho(f_{N+1}, 0) < \varepsilon + c_N = c_1$.

Поэтому

$$\int\limits_0^R (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr \le \rho(f_n, f) + \rho(f_n, 0) < \varepsilon + c_1 = c_2.$$

Устремляя R к 1, получим, что $f \in S^p_\alpha$. Таким образом, пространство S^p_α является полным.

Перейдем к доказательству свойства б). При $|\beta| < 1$ свойство сразу следует. Предположим, что $|\beta| > 1$. Можно считать, что $\beta > 1$. Так как последовательность $\{f_n\}$ сходится, то она фундаментальная. Но из фундаментальности, как установлено выше, следует равномерная сходимость указанной последовательности внутри D.

Поскольку для любого $\beta \geq 1$ и $x \geq 0$ справедлива оценка $(1+\beta x) \leq (1+x)^\beta$, то

$$\rho(\beta f_n, \beta f) = \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1+\beta|f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|) d\theta \right)^p dr \leq$$

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1+|f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|)^\beta d\theta \right)^p dr \leq$$

$$\beta^p \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1+|f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|) d\theta \right)^p dr = \beta^p \rho(f_n, f),$$

откуда следует свойство б).

Докажем теперь справедливость свойства в). Пусть $f \in S^p_\alpha$ и $\beta_n \to \beta$, $n \to +\infty$. Оценим

$$\rho(\beta_n f, \beta f) = \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1+|\beta_n f(re^{i\theta}) - \beta f(re^{i\theta})|) d\theta \right)^p dr =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1+|f(re^{i\theta})||\beta_n - \beta|) d\theta \right)^p dr = \int\limits_0^{r_0} ... + \int\limits_{r_0}^1 ... = J_1 + J_2.$$

Выберем $0 < r_0 < 1$ так, чтобы $J_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно маленькое число. Оценим J_1:

$$J_1 = \int\limits_0^{r_0} (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+|\beta_n - \beta| \cdot |f(re^{i\theta})|\right) d\theta \right)^p dr \leq$$

$$(2\pi)^p \ln^p \left(1+|\beta_n - \beta| \cdot |f(r_0 e^{i\theta})|\right) \int\limits_0^{r_0} (1-r)^\alpha dr$$

Используя теорему 2.4, получаем:

$$J_1 \le (2\pi)^p \ln^p \left(1 + |\beta_n - \beta| \exp \frac{\delta}{(1-r_0)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right) \cdot \frac{1-(1-r_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

где $\delta > 0$ — сколь угодно маленькое число.

Поскольку $|\beta_n - \beta| \to 0$, $n \to +\infty$, то $J_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N(\varepsilon)$. Таким образом, в) установлено. Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c_k \cdot k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right),\ c > 0,\ k \to +\infty \tag{2.55}$$

для произвольной положительной последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $c_k \downarrow 0$, $k \to +\infty$. *Тогда найдется число* $c > 0$, *такое что для всех* $k \in \mathbb{N}$ *будет выполняться условие* (2.52).

Доказательство леммы 2.6 повторяет рассуждения, проведенные в работе [60] (см. лемму 1) с показателем степени $\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}$. Для полноты изложения приведем его.

Из оценки (2.55), очевидно, следует, что $|\lambda_k| \to 0$, $k \to +\infty$ и

$$L(k) = \varlimsup_{k\to+\infty} k^{-\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}} \ln|\lambda_k| \le 0.$$

Для того чтобы доказать справедливость оценки (2.52), достаточно показать, что $L(k) < 0$.

Предположим, что $L(k) = 0$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что

$$b_k = -k^{-\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}} \ln|\lambda_k| \downarrow 0,\ k \to +\infty.$$

Из (2.55) следует, что существует константа $A = A_{\{c_k\}}$, зависящая от последовательности $\{c_k\}$, такая что

$$|\lambda_k| \le A \exp\left(-c_k \cdot k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right),$$

откуда

$$(c_k - b_k) k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}} \le \ln A. \tag{2.56}$$

Положим $c_k^* = \max(2b_k, k^{-\frac{\alpha+p+1}{2(\alpha+2p+1)}})$, $c_k^* \downarrow 0$. Подставляя в неравенство (2.56)

c_k^* вместо c_k, $A^* = A_{\{c_k^*\}}$ вместо A, получим:

$$\frac{1}{2}k^{\frac{\alpha+p+1}{2(\alpha+2p+1)}} \le \ln A^*$$

при всех $k = 1, 2, ...$, что противоречиво. Полученное противоречие доказывает лемму 2.6.

Лемма 2.7. *Пусть*

$$g(z) = \exp\frac{c}{(1-z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}, \tag{2.57}$$

где $0 < c < \frac{\alpha+1}{p} + 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(c) z^n$ *- ряд Тейлора функции* g. *Тогда справедлива оценка:*

$$|a_n(c)| \ge \exp(c^{\frac{p}{\alpha+2p+1}} \cdot n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}). \tag{2.58}$$

Метод доказательства леммы 2.7 восходит к Мергеляну С.Н. (см. [22]).

Доказательство.

Положим для краткости $\beta = \frac{\alpha+1}{p} + 1$. Разложим функцию $g(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(c) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\beta k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta k)} c^k z^n,$$

где Γ - функция Эйлера. Фиксируем n – достаточно большое натуральное число. Обозначим $\gamma_{n,k} = \frac{\Gamma(n+\beta k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta k)} c^k$. Очевидно, что $\gamma_{n,k} > 0$ при всех n и k. Поэтому если

$$\gamma_{n,k_n} \ge \exp(c^{\frac{p}{\alpha+2p+1}} \cdot n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}), \tag{2.59}$$

где k_n – некоторый положительный номер, зависящий только от n, то для $a_n(c) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \gamma_{n,k} > \gamma_{n,k_n}$ тем более будет выполняться требуемая оценка (2.58).

Пусть $k_n = \left[\frac{1}{\beta}\left(c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} + 1\right)\right]$, где $[a]$ – целая часть $a > 0$. Докажем справедливость (2.59). Воспользуемся формулой Стирлинга: $\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s$, $s > 0$. Имеем:

$$\gamma_{n,k_n} = \frac{\Gamma(n+\beta k_n)}{\Gamma(k_n+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta k_n)} c^{k_n}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \frac{(n+\beta k_n - 1)^{n+\beta k_n - 1}\sqrt{n+\beta k_n - 1} e^{k_n} c^{k_n}}{n^n \sqrt{n} \cdot k_n^{k_n}\sqrt{k_n} \cdot (\beta k_n - 1)^{\beta k_n - 1}\sqrt{\beta k_n - 1}} = \frac{1}{2\pi}\frac{N_\gamma}{D_\gamma}.$$

Подставим теперь вместо k_n его значение и рассмотрим числитель N_γ вышеуказанной дроби.

$$N_\gamma = n^n \cdot n^{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \cdot n^{1/2} \cdot e^{k_n} \cdot c^{k_n} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}}{n}\right)^{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \cdot \left(1 + \frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}}{n}\right)^{1/2}$$

После элементарных преобразований получим:

$$N_\gamma = n^{n+1/2} \cdot n^{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \cdot e^{k_n} \cdot c^{k_n} \times$$
$$\times \exp\left(c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right) \cdot \exp\left(c^{\frac{2}{\beta+1}} n^{\frac{\beta-1}{\beta+1}}\right) \cdot (1+o(1)),\ n \to +\infty,$$

откуда

$$N_\gamma = n^{n+1/2} \cdot n^{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \cdot e^{k_n} \cdot c^{k_n} \times$$
$$\times \exp\left(c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right) \cdot (1+o(1)),\ n \to +\infty.$$

Рассмотрим теперь знаменатель D_γ:

$$D_\gamma = n^{n+1/2} \cdot \left(\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} + 1}{\beta}\right)^{\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} + 1}{\beta} + \frac{1}{2}} \times \left(c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right)^{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} + \frac{1}{2}}.$$

Преобразуем второй множитель:

$$\left(\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} + 1}{\beta}\right)^{\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} + 1}{\beta} + \frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}}{\beta}\right)^{\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}+1}{\beta}+\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}}\right)^{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}\left(\frac{1}{\beta}+o(1)\right)} =$$

$$= \left(\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}}{\beta}\right)^{\frac{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}+1}{\beta}+\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{\beta}},\ n \to +\infty.$$

Вычисляя непосредственно степени переменной n, постоянных c, β, получим:

$$D_\gamma = n^{n+1/2} \cdot n^{c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \cdot c^{\frac{1}{\beta}\left(c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}+1\right)} \cdot \beta^{-\frac{1}{\beta}\left(c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}+1\right)-\frac{1}{2}}.$$

С учетом вполненных преобразований γ_{n,k_n} примет вид:

$$\gamma_{n,k_n} = \frac{1}{2\pi}\frac{N_\gamma}{D_\gamma} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{\beta+1}{\beta} c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right) \cdot \left(\frac{\beta}{c}\right)^{\frac{1}{\beta}\left(c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{n}.$$

Логарифмируя, получим:

$$\ln\gamma_{n,k_n} = c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\ln\frac{\beta}{c}\right) + \ln\frac{\beta}{2\pi} - \ln n,$$

то есть

$$\ln\gamma_{n,k_n} = c^{\frac{1}{\beta+1}} n^{\frac{\beta}{\beta+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\ln\frac{\beta}{c} - o(1)\right)\right),\ n \to +\infty.$$

Таким образом, оценка (2.59) выполняется, а значит, справедлива и оценка (2.58). Лемма 2.7 доказана.

Как показано выше, из сходимости $\rho(f_n, f) \to 0$, $n \to +\infty$ следует равномерная сходимость последовательности функций $f_n(z)$ к функции $f(z)$ в D. Следовательно, если $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k^{(n)} z^k$ и $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, то $a_k^{(n)} \to a_k$, $n \to +\infty$.

Пусть X – F-пространство, состоящее из комплексных последовательностей $\{b_k\}_k$, таких что сходимость последовательности $\beta^{(n)} = \{b_k^{(n)}\}$ к $\beta = \{b_k\}$ при $n \to +\infty$ предполагает покоординатную сходимость $b_k^{(n)} \to b_k$, $n \to +\infty$, $k = 0, 1, 2, ...$

Рассмотрим коэффициентный мультипликатор $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ из класса S_α^p в класс X. Λ - замкнутый оператор, следовательно, по теореме о замкнутом графике (см. [23]) Λ - непрерывный оператор, и отображает ограниченные в классе S_α^p множества в ограниченные в классе X множества.

Доказательство теоремы 2.6.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - мультипликатор из класса S_α^p в класс X. Докажем, что существует $c > 0$, такое что выполняется оценка (2.52), то есть

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right),\ c > 0,\ k \to +\infty.$$

Согласно лемме 2.6, нам достаточно показать, что последовательность Λ удовлетворяет условию (2.55) для некоторой положительной бесконечно малой последовательности $\{c_k\}$. Последовательность $\{c_k\}$ выберем таким образом, чтобы выполнялись следующие оценки:

$$c_k = O\left(k^{-\frac{(\alpha-\beta)}{(\beta+2p+1)}}\right),\ k \to +\infty, \quad \text{если} \quad X = S_\beta^p(-1 < \beta < \alpha), \tag{2.60}$$

$$k^{-\gamma} \le c_k \le \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad X = H^p(0 < p \le \infty), \tag{2.61}$$

где $\gamma = \frac{\alpha+p+1}{2p}$.

Рассмотрим в классе S_α^p последовательность функций

$$f_k(z) = g(r_k z) = \exp\frac{c_k}{(1-r_k z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}},\ k = 1, 2, ..., \tag{2.62}$$

удовлетворяющих условиям леммы 2.7. Если $0 < p \le 1$, то последовательность $\{r_k\}$ выберем таким образом, чтобы:

$$1 - \frac{1}{k} \le r_k < 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\gamma_k}{c_k}\right)^p\right\}, \tag{2.63}$$

где $\gamma_k \downarrow 0,\ k \to +\infty$, такая что $c_k = o(\gamma_k)$. Ясно, что $r_k \uparrow 1 - 0,\ k \to +\infty$.

Поскольку из (2.63) следует, что

$$c_k^p \ln\frac{1}{1-r_k} < \gamma_k^p$$

при всех k, то функции последовательности $\{f_k\}$ принадлежат классу S_α^p при всех натуральных k.

Если $p > 1$, то последовательность $\{r_k\}$ следует выбрать так, чтобы:

$$1 - \frac{1}{k} \le r_k < 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_k}{c_k}\right).$$

Покажем, что $\{f_k\}$ - ограниченная последовательность в классе S^p_α, то есть докажем, что существует такое действительное число $0 < \lambda < 1$, что при всех натуральных k выполняется неравенство $\rho(\lambda f_k, 0) < \eta$, где η - фиксированное положительное число (см. [23, с. 31]).

Пусть $\{\delta_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ – бесконечно малые последовательности положительных вещественных чисел, $\varepsilon_k = (1-r_k)^{\alpha+1}$, $k = 1, 2, ...$ Обозначим k_0 – номер, начиная с которого выполняется оценка

$$\gamma_k^p + \frac{(2\pi)^p}{\alpha+1}\left(\ln^p(1+\delta_k) + (\ln^p(1+\lambda) + \ln^p 2)\cdot\varepsilon_k\right) < \eta, \tag{2.64}$$

если $0 < p \le 1$, и

$$2\gamma_k + \frac{4\pi}{(\alpha+1)^{1/p}}\left(\ln(1+\delta_k) + (\ln(1+\lambda) + \ln 2)\cdot\varepsilon_k^{1/p}\right) < \eta,$$

если $p > 1$.

Число $\lambda \in (0, 1)$ выберем так, чтобы

$$\lambda \cdot \exp\frac{1}{(1-r_{k_0})^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \le \delta_{k_0}. \tag{2.65}$$

Из (2.65) при всех $k \le k_0$ следует оценка $|\lambda f_k| \le \delta_{k_0}$, откуда получаем

$$\rho(\lambda f_k, 0) \le \frac{(2\pi)^p}{(\alpha+1)}\ln^p(1+\delta_{k_0}) \text{ при } 0 < p \le 1,$$

$$\rho(\lambda f_k, 0) \le \frac{2\pi}{(\alpha+1)^{1/p}}\ln(1+\delta_{k_0}) \text{ при } p > 1.$$

Пусть теперь $k > k_0$, тогда при $0 < p \le 1$

$$\rho(\lambda f_k, 0) = \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |\lambda f_k(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr = \int\limits_0^{r_{k_0}} ... + \int\limits_{r_{k_0}}^1 ... = I_1 + I_2,$$

Оценим отдельно каждый из интегралов I_1 и I_2.

$$I_1 \leq (2\pi)^p \ln^p \left(1 + \lambda \exp \frac{c_k}{(1 - r_k r_{k_0})^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right) \cdot \frac{1 - \varepsilon_{k_0}}{\alpha + 1}.$$

Но $c_k \leq 1$ при всех $k = 1, 2, ...$, поэтому

$$\lambda \exp \frac{c_k}{(1 - r_k r_{k_0})^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \leq \lambda \exp \frac{1}{(1 - r_{k_0})^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \leq \delta_{k_0}.$$

Значит,

$$I_1 \leq (2\pi)^p \ln^p (1 + \delta_{k_0}) \cdot \frac{1 - \varepsilon_{k_0}}{\alpha + 1}. \tag{2.66}$$

Перейдем к оценке I_2:

$$I_2 = \int_{r_{k_0}}^{1} (1 - r)^\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + |\lambda f_k(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^p dr \leq$$

$$\int_{r_{k_0}}^{1} (1 - r)^\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + \lambda) d\theta\right)^p dr + \int_{r_{k_0}}^{1} (1 - r)^\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + |f_k(re^{i\theta})|) d\theta\right)^p dr \leq$$

$$\leq \frac{(2\pi)^p \ln^p (1 + \lambda)}{\alpha + 1} \varepsilon_{k_0} + \int_{r_{k_0}}^{1} (1 - r)^\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f_k(re^{i\theta})| + \ln 2) d\theta\right)^p dr.$$

Но

$$\int_{r_{k_0}}^{1} (1 - r)^\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f_k(re^{i\theta})| + \ln 2) d\theta\right)^p dr \leq \frac{(2\pi)^p \ln^p 2}{\alpha + 1} \varepsilon_{k_0} + \gamma_k^p,$$

поэтому окончательно получаем:

$$I_2 \leq \frac{(2\pi)^p (\ln^p 2 + \ln^p (1 + \lambda))}{\alpha + 1} \varepsilon_{k_0} + \gamma_k^p. \tag{2.67}$$

Складывая неравенства (2.66) и (2.67), приходим к оценке (2.64). Значит, $\rho(\lambda f_k, 0) < \eta$ при $0 < p \leq 1$. Аналогично доказывается для случая $p > 1$.

Итак, мы показали, что при всех натуральных k последовательность функций $\{f_k\}$ ограничена в S^p_α, значит и мультипликатор $\Lambda(f_k)$ ограничен в классе X.

Пусть $X = H^p \, (0 < p \leq \infty)$. Имеем:

$$\|\Lambda(f_k)\|_{H^p} \leq C,\, C > 0.$$

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$.

Если $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n \in S_\alpha^p$, то $\Lambda(f_k)(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n a_n^{(k)} z^n \in X$, а значит, (см. [49, с. 98])

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leq c_p \|\Lambda(f_k)\|_{H^p} \cdot n^{\frac{1}{p}-1}, \text{ если } \quad 0 < p < 1,$$

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leq c_p \|\Lambda(f_k)\|_{H^p}, \text{ если } \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

откуда

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leq C \cdot c_p \cdot n^{\frac{1}{p}-1}, \text{ если } 0 < p < 1, \tag{2.68}$$

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leq C \cdot c_p, \text{ если } 1 \leq p \leq \infty, \tag{2.69}$$

где c_p — положительная константа, зависящая от параметра p.

Так как $f_k(z) = g(r_k z)$, то $a_n^{(k)} = a_n(c_k) r_k^n$. Согласно лемме 2.7,

$$|a_n^{(k)}| \geq r_k^n \exp \widetilde{c}_k n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}},$$

где $\widetilde{c}_k = c_k^{\frac{p}{\alpha+2p+1}}$. Учитывая неравенство (2.63), получим:

$$|a_k^{(k)}| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \exp \widetilde{c}_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}. \tag{2.70}$$

Из (2.68), (2.70) заключаем:

$$|\lambda_k| \leq C \cdot c'_p \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-k} \cdot k^{\frac{1}{p}-1} \cdot \exp\left(-\widetilde{c}_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right),$$

откуда с учетом оценки (2.61) будем иметь:

$$|\lambda_k| \leq C \cdot c'_p \cdot \exp\left(-\widetilde{c}_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}} \cdot (1 - o(1)\right),\, k \to +\infty,$$

поэтому заключаем:

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-\widetilde{c}_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right),\ k \to +\infty,$$

где $\tilde{c}_k = c_k^{\overline{\frac{p}{\alpha+2p+1}}}$. Аналогично при $1 \le p < +\infty$ из (2.69), (2.70) получаем такую же оценку.

Пусть теперь $X = S_\beta^p$, где $-1 < \beta < \alpha$. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. Если $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n \in S_\alpha^p$, то $\Lambda(f_k)(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n a_n^{(k)} z^n \in X$, значит, по теореме 2.5

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| = o\left(\exp n^{\frac{\beta+p+1}{\beta+2p+1}}\right),\ n \to +\infty.$$

То есть

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \le \exp \varepsilon_n n^{\frac{\beta+p+1}{\beta+2p+1}}, \tag{2.71}$$

где $\varepsilon_n = o(1)$, $n \to +\infty$.

Так как $f_k(z) = g(r_k z)$, то $a_n^{(k)} = a_n(c_k) r_k^n$. Из оценок (2.58), (2.71), получаем:

$$|\lambda_k| \le \exp\left(-\tilde{c}_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right) \times \exp\left(\varepsilon_k k^{\frac{\beta+p+1}{\beta+2p+1}}\right),$$

где $\tilde{c}_k = c_k^{\overline{\frac{p}{\alpha+2p+1}}}$. Далее,

$$|\lambda_k| \le \exp\left(\left(-\widetilde{c}_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{\widetilde{c}_k} k^{-\frac{(\alpha-\beta)p}{(\alpha+2p+1)(\beta+2p+1)}}\right)\right). \tag{2.72}$$

Из условия (2.60) следует, что

$$\frac{\varepsilon_k}{\widetilde{c}_k} k^{-\frac{(\alpha-\beta)p}{(\alpha+2p+1)(\beta+2p+1)}} \sim \varepsilon_k \to 0,\ k \to +\infty.$$

Таким образом, из (2.72) заключаем:

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-\widetilde{c}_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right),\ k \to +\infty.$$

Докажем обратное утверждение теоремы 2.6. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет условию (2.52) теоремы и $f \in S_\alpha^p$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$. Из теоремы 2.5 следует, что

$$|a_k| \le C_1 \exp\left(\varepsilon_k k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right),\ \varepsilon_k \downarrow 0.$$

Подбирая номер k_0 таким образом, чтобы $\varepsilon_k < \frac{c}{2}$ при всех $k \geq k_0$, получим:

$$|\lambda_k a_k| \leq C_2 \exp\left(-\frac{c}{2} k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right).$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{c}{2} k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)$ сходится, то $\Lambda(f)(z) \in X$ при любом указанном выборе класса X. Теорема 2.6 доказана.

Замечание 2.4. Метод доказательства теорем 2.4, 2.5 основывается на работе [44] Шведенко С. В., теоремы 2.6 — на работе [60] Н. Янагиара.

Список литературы

1. Беднаж, В. А. О характеризации главных частей функций, принадлежащих классу N_α^∞ / В. А. Беднаж // Вестник Брянского государственного университета: естественные и точные науки — Брянск: Изд. БГУ. — 2005. — №4. — С. 153–159.

2. Быков, С. В. О нулях целых функций с мажорантой бесконечного порядка / С. В. Быков, Ф. А. Шамоян // Алгебра и анализ. — 2009. —Т. 21. — №6.— С. 66–79

3. Быков, С. В. Факторизационные представления и свойства корневых множеств весовых классов аналитических функций: диссертация ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Быков Сергей Валентинович. — Брянск. — 2010. — 130 с.

4. Виноградов, С. А. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций / С. А. Виноградов, В. П. Хавин // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1974. —Т. 47. — С. 15–54.

5. Гарнетт, Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт / Пер. с англ./ В. П. Хавин (ред.); Е. М. Данькина (пер.) — М.: Мир, 1984. — 469 с.

6. Говоров, Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н. В. Говоров. — М.: Наука, ГИТТЛ, 1986. — 240 с.

7. Джрбашян, М. М. К проблеме представимости аналитических функций / М. М. Джрбашян // Сообщ. Института матем. и механики АН Арм. ССР. — 1948. —Т. 2. —С. 3-–40.

8. Джрбашян, М. М. О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге / М. М. Джрбашян // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157.—№ 5. —С. 1024–1027.

9. Джрбашян, М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян.—М.: Наука, ГИТТЛ, 1966. — 671 с.

10. Джрбашян, М. М. Теория факторизации функций, мероморфных в круге / М. М. Джрбашян // Матем. сб. — 1969. — Т. 79(121). — № 4(8). — С. 517–615.

11. Евграфов, М. А. Поведение степенного ряда для функций класса H_δ на границе круга сходимости / М. А. Евграфов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1952 —Т. 16. — № 5. — С. 481–492.

12. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1968. — 472 с.

13. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд / Пер. с англ./ Н. К. Бари (ред.); О. С. Ивашева-Мусатова (пер.) — М.: Мир, 1965. – 615 с.

14. Кудашева, Е. Г. Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций / Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин // Матем. сб. — 2009. — Т. 200. — №9. — С. 95–126.

15. Кусис, П. Введение в теорию пространств H^p / П. Кусис / Пер. с англ./ В. П. Хавин (ред.); В. В. Пеллер, А. Г. Тумаркин (пер.) — М: Мир, 1984. – 364 с.

16. Нафталевич, А. Г. Об интерполировании функций ограниченного вида / А. Г. Нафталевич // Vilniaus Valst. Univ. Mokslu Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslu Ser. — 1956. —Т. 5. —С. 5–27.

17. Неванлинна, Р. Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна / Пер. с нем./ М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев (ред. и доп.); В. И. Волковыский (пер.) — М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

18. Никольский, Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа / Н. К. Никольский. // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова.— Л.: Наука, 1974.—т. 120.—272 с.

19. Олейник, В. Л. Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций / В. Л. Олейник // Зап. научн. сем. ЛОМИ,

Исследования по линейным операторам и теории функций. — 1974. — Т. 47. — С. 120-137.

20. Олейник, В. Л. Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций / В. Л. Олейник, Б. С. Павлов // Зап. научн. сем. ЛОМИ, Исследования по линейным операторам и теории функций. —1971. — Т. 22. — С. 94–102.

21. Привалов, И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций / И. И. Привалов. — М.: Изд. МГУ, 1941. —206 с.

22. Привалов, И. И. Граничные свойства аналитических функций / И. И. Привалов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — 336 с.

23. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин / Пер. с англ./ Е. А. Горин (ред.); В. Я. Лин (пер.) — М.: Мир, 1975. — 443 р.

24. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн / Пер. с англ./ В. И. Буренкова (ред.); В. И. Буренкова, Э. Э. Пейсахович (пер.)— М.: Мир, 1973. — 342 с.

25. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш / Пер. с англ. / В. А. Рохлин (пер.) — М.: Наука, 1980. — 468 с.

26. Хабибуллин, Б. Н. Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I / Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — №1. — С. 146–189.

27. Хабибуллин, Б. Н. Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II / Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — №1. — С. 190–236.

28. Харди, Г. Неравенства / Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа / Пер. с англ. / С. Б. Стечкин (ред.); В. И. Левин (пер.) —М.: Гос. изд. иностр. лит., 1948. — 456 с.

29. Хачатарян, И. О. Представление мероморфных функций бесконечного порядка в полуплоскости / И. О. Хачатарян // Изв. АН АрмССР. — 1965. — Т. 18. —№ 2. — С. 15–24.

30. Хейман, У. К. Мероморфные функции / У. К. Хейман / Пер. с англ. / А. А. Гольдберг (пер.) — М.: Мир, 1966. – 447 с.

31. Хейфиц, А. И. Представление аналитических в открытой полуплоскости функций бесконечного порядка / Хейфиц, А. И. // Изв. АН АрмССР. — 1971. — Т. 6. —№ 6. — С 472–476.

32. Шамоян, Ф. А. Теорема вложения в пространствах n-гармонических функций и некоторые приложения / Ф. А. Шамоян // ДАН АрмССР. — 1976. — Т. 62 —№ 1. —С. 10–14.

33. Шамоян, Ф. А. Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$ / Ф. А. Шамоян // Матем. сб. — 1978. — Т. 107(149). — №3(11). —С. 446–462.

34. Шамоян, Ф. А. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста / Ф. А. Шамоян // Изв. АН Арм. ССР, Математика. — 1978. — Т. 13. — № 5-6. — С. 405–422.

35. Шамоян, Ф. А. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи его границы / Ф. А. Шамоян // Изв. АН АрмССР, Сер. Математика. — 1983. — Т. 18. —№ 1. —С. 215–228.

36. Шамоян, Ф. А. Несколько замечаний к параметрическому представлению классов Неванлинны–Джрбашяна /Ф. А. Шамоян // Матем. заметки. —1992. —Т. 52. — № 1. —С. 128—140.

37. Шамоян, Ф. А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций / Ф. А. Шамоян // Сиб. мат. журн. — 1999. —Т. 40. — № 6. —С. 1422–1440.

38. Шамоян, Ф. А. Об одном классе голоморфных в круге функций / Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко // Зап. научн. сем. ПОМИ, Исследования

по линейным операторам и теории функций. — 2001. —Т. 282. — С. 244–255.

39. Шамоян, Ф. А. О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций / Ф. А. Шамоян, В. А. Беднаж, О. В. Приходько // Вестник Брянского государственного университета: естественные и точные науки. — 2008. —№ 4. — С. 85–92.

40. Шамоян, Ф. А. О нулях аналитических в круге функций с заданной мажорантой вблизи его границы / Ф. А. Шамоян // Матем. заметки. — 2009. —Т. 85, — № 2. —С. 300-–312.

41. Шамоян, Ф. А. Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций / Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко. — Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009. – 152 с.

42. Шамоян, Ф. А. Вещественные корни для некоторых классов аналитических функций с мажорантой бесконечного порядка / Ф. А. Шамоян // Зап. научн. сем. ПОМИ, Исследования по линейным операторам и теории функций. — 2010. — Т. 376. — С. 176–180.

43. Шведенко, С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре / С. В. Шведенко // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1985. —Т. 23. —С. 3-–124.

44. Шведенко, С. В. О скорости роста и коэффициентах Тейлора функций класса Неванлинны **N** по площади / С. В. Шведенко // Изв. вузов. Матем. — 1986. — №6. — С. 40–43.

45. Borichev, A. A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices / A. Borichev, L. Golinskii, S. Kupin // Bulletin of the London Mathematical Society. — 2009. —V. 41 —P. 117–123.

46. Carleson, L. An interpolation problem for bounded analytic functions / L. Carleson // Amer. J. Math. — 1958. — V. 80. —C. 921–930.

47. Clunie, J. On the integral functions having prescribed asymptotic growth. / J. Clunie // Canad. J. Math. — 1965. — T. 17. — C. 396–404.

48. Djrbashian, A. E. Topics in the Theory of A^p_α Spaces / A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan — Leipzig: Teubner, Teubner-Texte Zur Math., 1988. – 200 p.

49. Duren, P. L. Theory of H^p spaces / P. L. Duren. — Pure and Appl. Math., V. 38, Academic Press, NY, 1970. — 272 p.

50. Hartmann, A. Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorants / A. Hartmann, X. Massaneda, A. Nicolau, P. Thomas // J. Funct. Anal. — 2004. —T. 217 — P. 1–37.

51. Hayman, W. K. A critical growth rate for functions regular in a disk / W. K. Hayman, B. Korenblum // Michigan Math. J. — 1980. — V. 27. — P. 21–30.

52. Golinskii, L. A Blaschke-type condition for analytic functions on finitely connected domains / L. Golinskii, S. Kupin // J. Math. Anal. Appl., Applications to complex perturbations of a finite-band selfadjoint operator. — 2012. —V. 389. — № 2. —P. 705-–712.

53. Favorov, S. Blaschke-Type Conditions for Analytic and Subharmonic Functions in the Unit Disk: Local Analogs and Inverse Problems / S. Favorov, L. Golinskii // Computational Methods and Func. Theory. —2012. — V. 12. — P. 151–166.

54. Favorov, S. On Analytic and Subharmonic Functions in Unit Disc Growing Near a Part of the Boundary / S. Favorov, L. Radchenko // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. — 2013. —V.9. — № 3. —P. 304—315.

55. Seip, K. Interpolating and sampling in spaces of analytic functions / K. Seip.— University Lecture Series 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. – 183 c.

56. Shamoyan, F. A. On some properties of zerosets of analytic functions with given majorant / F. A. Shamoyan // Theory functions and applications. Collections of works dedicates to the memory of M. M. Djrbashian, Yerevan: Luys Publishing House. — 1995. — P. 169-172.

57. Shamoyan, F A. Parametrical representations of some classes of holomorphic functions in the disk / F A. Shamoyan, E. N. Shubabko // Operator Theory:

Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel. — 2000. —V. 113. — P. 331–338.

58. Shapiro, H. S. On some interpolation problems for analytic functions / H. S. Shapiro, A. L. Shields // Amer. J. Math. — 1961. — V. 83. — P. 513–532.

59. Shapiro, H. S. On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces / H. S. Shapiro, A. L. Shields // Math. Z. — 1962. — V. 80. —P. 217-229.

60. Yanagihara, N. Multipliers and linear functionals for the class N^+ / N. Yanagihara // Transactions of the Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 180. — P. 449–461.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

61. Родикова, Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств аналитических в верхней полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка / Е.Г. Родикова // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2011. — №4. — С. 36–44.

62. Родикова, Е.Г. О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2012. — №4. — С. 61–69.

63. Родикова, Е.Г. L^p-оценки в классах аналитических в круге функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны / Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2012. — №4. — С. 80-86.

64. Родикова, Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций [Электронный

ресурс] / Е.Г. Родикова // Сибирские электронные математические известия. — 2014. — С. 52-63. — Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru

65. Rodikova, E.G. On interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic / F.A. Shamoyan, E.G. Rodikova // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Матем. и физ. — Красноярск: Изд. СФУ— 2014. — Т. 7. —Вып. 2 —С. 235–243.

Статьи в других научных изданиях

66. Родикова, Е.Г. Вещественные корни для класса аналитических в правой полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка / Е.Г. Родикова // Материалы XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2011. — Вып. 12 — С. 250-252.

67. Родикова, Е.Г. О нулях аналитических классов И.И. Привалова / Е.Г. Родикова // Материалы Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» — Саратов: изд-во «Научная книга». — 2012. — С. 141-142.

68. Родикова, Е.Г. Свободная интерполяция в классах аналитических в круге функций с ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны / Е.Г. Родикова, Ф.А. Шамоян // Материалы Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» — Саратов: изд-во «Научная книга». — 2012. — С. 139-141.

69. Родикова, Е.Г. Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения» — Петрозаводск: ПетрГУ. — 2012. — С. 64-69.

70. Родикова, Е.Г. L^p-оценки в классах аналитических в круге функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны / Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» — Воронеж: ВГУ. — 2013. — С. 280-281.

71. Родикова, Е.Г. О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» — Воронеж: ВГУ. — 2013. — С. 205.

72. Родикова, Е.Г. О нулях одного весового класса аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы международной XI Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» — Казань: Казан. ун-т. — 2013. — С. 385-387.

73. Родикова, Е.Г. Условие типа Бляшке для одного класса аналитических в круге функций / Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова // Материалы 17-й международной Саратовской зимней математической школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова — Саратов: изд-во «Научная книга». — 2014. — С. 295-296.

74. Родикова, Е.Г. Факторизационное представление класса аналитических в круге функций с α - характеристикой из L^p - пространств / Е.Г. Родикова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXV» —Воронеж: изд. центр «Научная книга». — 2014. — С. 146-147.