На правах рукописи

Машков Евгений Юрьевич

Дифференциальные уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Курском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
профессор **Гликлих Юрий Евгеньевич**.

Официальные оппоненты: **Келлер Алевтина Викторовна**, доктор физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет (НИУ), кафедра математического моделирования, профессор

Турбин Михаил Вячеславович, кандидат физико–математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, научно-исследовательский институт математики, ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация: **Самарский государственный аэрокосмический университет**

Защита диссертации состоится «29» марта 2016 г. в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» по адресу 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2844

Автореферат разослан «   » января 2016 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Гликлих Ю. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Под дифференциальным уравнением леонтьевского типа понимается класс дифференциально-алгебраических уравнений в R^n вида

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t),$$

где $x(t)$ и $f(t)$ – n-мерные вектора, L и M – постоянные $n \times n$-матрицы, причем L вырождена, а M – невырождена. Такое определение для данного класса уравнений ввел Г.А. Свиридюк. Название обусловлено тем обстоятельством, что при некоторых дополнительных предположениях система моделирует межотраслевую экономику "затраты-выпуск" Леонтьева с учетом запасов. На языке этих уравнений в работах А.Л. Шестакова, Г.А. Свиридюка и А.В. Келлер изучается динамическое искаженние сигналов в радиоустройствах. В работах Л.А. Власенко, А.Г. Руткаса, М.С. Филипковской, а также O. Schein, G. Denk, T. Sickenberger, R. Winkler рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей. Дифференциальные уравнения леонтьевского типа возникают в работах Л.А. Власенко, Ю.Г. Лысенко, А.Г. Руткаса при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. В работе А.В. Келлер, Т.А. Шишкина с применением систем леонтьевского типа описана методика построения динамической и статистической балансовых моделей на уровне предприятия, а в работе А.В. Келлер, С.И. Эбель системы леонтьевского типа находят приложение в биологии при описании дискретной балансовой динамической модели клеточного цикла. Отметим также работы Ю.Е. Бояринцева и В.Ф. Чистякова, Г.В. Демиденко, А.В. Келлер и М.А. Сагадеевой, С.М. Чуйко, A. Alabert, S.L. Campbell, в которых очень обстоятельно изучены дифференциальные уравнения леонтьевского типа.

Особую важность для приложений представляет случай, когда в правой части дифференцильного уравнения леонтьевского типа присутствуют помехи, т.е. случайные возмущения типа белого шума $\dot{w}(t)$, т.е. оно имеет вид

$$L\dot{\xi}(t) = M\xi(t) + f(t) + \dot{w}(t),$$

где $f(t)$ – входящий сигнал в устройство, описываемое операторами L и M, а $\xi(t)$ – это то, что мы получаем на выходе из устройства.

Для изучения дифференциального уравнения леонтьевского типа требуется рассмотрение производных достаточно высоких порядков от свободных членов – в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса или белого шума. Как известно, производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает исследование уравнения сложным. В связи с этим отметим работу Л.А. Власенко, С.И. Ляшко и А.Г. Руткаса по дифференциальным уравнениям со случайными возмущениями и импульсными воздействиями в правой часcти, в которой на коэффициенты уравнения вводятся ограничения, позволяющие не применять "производные" винеровского процесса.

Предлагаемый в работе метод исследования дифференциального уравнения леонтьевского типа основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не используются обобщенные функции. Отметим, что понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. При этом, отпадает необходимость во введении ограничений на коэффициенты уравнения, следуя которым не приходится использовать "производные" винеровского процесса для изучения уравнения.

Альтернативный метод исследования дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями, также основанный на использовании производных в среднем, разработан А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком.

Цель работы. Целью данной работы является исследование дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями, а также со случайными возмущениями и импульсными воздействиями в правой части с различными типами матриц коэффициентов с использованием производных в среднем случайных процессов. Введение в рассмотрение и исследование нового класса уравнений – дифференциальных уравнений леонтьевского типа в текущих скоростях.

Методы исследования. Используются методы стохастического анализа и теории дифференциально-алгебраических систем первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Научная новизна.
Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Наиболее значимые из них перечислены в следующем ниже списке:

1. Получены формулы для вычисления симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса.

2. Получены утверждения о приведении к каноническому виду дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями.

3. Получены аналитические формулы для решений дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями, а также со случайными возмущениями и импульсными воздействиями в правой части с регулярным и сингулярным пучками постоянных матриц коэффициентов в терминах симметрических производных в среднем винеровского процесса.

4. Получены аналитические формулы для решений дифференциального уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями с прямоугольными матрицами коэффициентов, зависящими от времени в терминах псевдообратных матриц. А для уравнений с достаточно гладкими квадратными матрицами коэффициентов, зависящими от времени, получены аналитические формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса.

5. Определены дифференциальные уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях, а также получены утверждения о существовании решений этих уравнений.

Практическая и теоретическая значимость.
Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями.

Апробация результатов диссертации.
Результаты работы докладывались на международной научно-практической конференции "Измерения: состояние, перспективы развития"(Челябинск, 2012), на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 2014), на Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения": "Современные методы теории краевых задач"(Воронеж, 2014, 2015), на Крымской международной осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Судак, Россия 2014).

Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержана грантом Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект №15-01-00620).

Публикации.
Результаты диссертации опубликованы в пятнадцати работах [1] – [15]. Из совместных работ [1], [2], [10] и [14] в диссертацию вошли лишь результаты, полученные лично автором диссертации. Работы [2], [5], [8], [14] и [15] опубли-

кованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 13 параграфов, и списка литературы. Объем диссертации — 119 страниц. Библиография содержит 62 наименования. Нумерация приводимых в автореферате определений, предложений, лемм, теорем, следствий и формул совпадает с нумерацией, принятой в диссертационной работе.

Содержание диссертации.

Во *введении* приводятся соображения, которые послужили отправной точкой для данной работы, а также излагается краткое содержание диссертации.

В §1.1 *первой главы* приводятся вспомогательные сведения из теории производных в среднем. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в R^n (где мы фиксируем σ-алгебру борелевских множеств), заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной при всех t. Введем в рассмотрение σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств при отображении $\xi(t) : \Omega \to R^n$, которая, согласно Э. Нельсону, называется "настоящее" и обозначается $\mathcal{N}_t^\xi$. Обозначим через E_t^ξ условное математическое ожидание относительно "настоящего" $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$. Следуя Э. Нельсону введем следующие

Определение 1.1.1 *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\right),$$

где условия и обозначения такие же, как в (i).

Известно, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей $Y^0(t,x)$ и $Y^0_*(t,x)$ соответственно на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y^0_*(t, \xi(t))$.

Определение 1.1.2 *Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Введем в рассмотрение векторные поля $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y^0_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y^0_*(t,x))$.

Определение 1.1.3 *$v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

Введем, следуя Ю.Е. Гликлиху, дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1-случайный процесс $\xi(t)$ по правилу

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t} \right),$$

где $(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец в R^n, а $(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^*$ – это сопряженный вектор-строка, а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Определение 1.1.4 *D_2 называется квадратичной производной в среднем.*

В §1.2 приводятся необходимые сведения из теории матриц. В частности, следуя работам В.Ф. Чистякова и др., приводятся

Теорема 1.2.5 *Пусть:*
(i) $A(t)$ и $B(t)$ – C^∞-гладкие $n \times n$-матрицы и $t \in [0,T]$;
(ii) многочлен $\xi(t,\lambda) = det(\lambda A(t) + B(t)) = a_d(t)\lambda^d + \ldots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$ удовлетворяет критерию "ранг-степень" для любого $t \in [0,T]$ и его старший коэффициент не имеет нулей на $[0,T]$.
Тогда
(i) $rank A(t) = const = d$ для $t \in [0,T]$;
(ii) существуют неособенные для любого $t \in [0,T]$ C^∞-гладкие $(n \times n)$-матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ такие, что

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}. \qquad (1.2.2)$$

Теорема 1.2.6 *Пусть:*
(i) $A(t)$ и $B(t)$ – вещественно-аналитические $n \times n$-матрицы и $t \in [0,T]$;
(ii) старший коэффициент многочлена $\xi(t,\lambda) = det(\lambda A(t) + B(t)) = a_d(t)\lambda^d + \ldots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$ не обращается в нуль на $[0,T]$.
Тогда существуют неособенные для любого $t \in [0,T]$ вещественно-аналитические $(n \times n)$-матрицы $P(t), Q(t)$ и выполнено равенство

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}, \qquad (1.2.3)$$

где $N(t)$ – верхнетреугольная матрица с нулевой диагональю, $N^k(t) \equiv 0$ на $[0,T]$, $J(t)$ некоторый $d \times d$-блок.

В §2.1 доказывается утверждение вычислении симметрических производных в среднем (текущих скоростей) высших порядков от винеровского процесса $w(t)$, которые используются для исследования дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями. Известно, что $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$. Имеет место

Лемма 2.1.4 *При целом* $k \geq 2 \quad D_S^k w(t) = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k} \frac{w(t)}{t^k}$.

В §2.2 доказываются утверждения о приведении к каноническому виду дифференциальных уравнений леонтьевского типа со случайными возмущениями. Рассматривается уравнение в R^n

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M} \int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + B\tilde{w}(t), \ \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.2.1}$$

где $\xi(t)$ случайный, а $f(t)$ неслучайный (детерминированный) n-мерные векторы, $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ и B – $n \times n$-матрицы, причем $\tilde{L}$ вырождена (имеет нулевой определитель), а B и $\tilde{M}$ – невырождены, вектор-функция $f(t)$ предполагается достаточно гладкой, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс. Пусть пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ регулярен. Для регулярного пучка матриц имеется преобразование Кронекера-Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) $A = (a_j^i)$ и A_R), при котором матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ приводятся к квазидиагональному виду. Тогда уравнение преобразуется следующим образом $L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + C\tilde{w}(t)$, где $C = AB$, $\eta(t) = A_R^{-1}\xi(t)$. Обозначим через C^* оператор, сопряженный с C, а $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в R^n. Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой

$$\langle X, Y\rangle = ((CC^*)^{-1}X, Y). \tag{2.2.2}$$

Тогда имеют место

Теорема 2.2.1 *(i) Для любых векторов X и Y из R^n выполняется тождество $\langle CX, CY\rangle = (X, Y)$. (ii) Процесс $w(t) = C\tilde{w}(t)$ является винеровским в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Пусть e_1, e_2,..., e_n – естественный ортонормированный базис в R^n с $(\cdot,\cdot)$. Тогда имеют место

Следствие 2.2.1 *Векторы Ce_1, ..., Ce_n образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 2.2.2 *В пространстве R^n с $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в разложении по ортонормированному базису Ce_1, Ce_2,..., Ce_n дифференциальное уравнение леонтьевского типа имеет вид*

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t Af(s)ds + w(t). \tag{2.2.3}$$

Лемма 2.2.1 *$d\langle x,x\rangle = d(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2(C^*)^{-1}C^{-1}x$, где d – внешний дифференциал.*

Лемма 2.2.2 *$Grad\langle x,x\rangle = Grad(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2x$.*

Следовательно, при отображении в R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулы для текущих скоростей винеровского процесса сохраняют свой вид.

Замечание 2.2.1 *Дифференциальное уравнение леонтьевского типа вида (2.2.1), но с сингулярным пучком матриц $\tilde M + \lambda\tilde L$ размера $n\times m$ приводится к каноническому виду аналогично. Разница в преобразовании уравнений состоит лишь в том, что преобразование Кронекера-Вейерштрасса сингулярного пучка матриц к квазидиагональному виду описывается парой невырожденных матриц P_L и P_R размеров $n\times n$ и $m\times m$ соответственно.*

В §2.3 рассматривается дифференциальное уравнение леонтьевского типа вида (2.2.1), в котором обозначения те же, что и в (2.2.1). Подчеркнем, что при замене белого шума $\dot w(t)$ на текущую скорость винеровского процесса, получаем формулы для решений уравнения, которые определены на открытом промежутке $(0,T)$. Для того, чтобы получить процесс, удовлетворяющий нулевым начальным условиям при $t=0$, зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0\in(0,T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0\le t\le t_0; \\ t, \text{ если } t_0\le t. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Тогда согласно результатам предыдущего параграфа имеет место

Теорема 2.3.1 *Пусть $\lambda\tilde L + \tilde M$ – регулярный пучок $n\times n$-матриц, а $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0\le t\le T$; пусть A и A_R – невырожденные матрицы размера $n\times n$, приводящие пучок $\lambda\tilde L + \tilde M$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т.е. к квазидиагональному виду), $L = A\tilde L A_R$ и $M = A\tilde M A_R$. Тогда: 1) уравнение (2.2.1) трансформируется в уравнение (2.2.3), которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистемы, соответствующей единичной матрице в L и невырожденной матрице K в M, имеет место аналитическая формула для решений вида*

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}Af(\tau)d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau);$$

3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1)\times(p+1)$ с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в M, при $0<t<T$ имеют место формулы для решений вида

$$\eta^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1}f^j - D_S w^{p+1}(t) = -\sum_{j=1}^n a_j^{p+1}f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t},$$

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{k-i+1}f^j}{dt^{k-i+1}}\right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j +$$
$$+\sum_{k=i+1}^{p+1}\left((-1)^{k-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}}\frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}}\right) - \frac{w^j(t)}{2t},\ \ 1 \le i \le p;$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях полученных в пункте 3) процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \le t < T$.

В §2.4 изучается сингулярное дифференциальное уравнение леонтьевского типа

$$\tilde{L}\xi(t) = \int_0^t \tilde{M}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{2.4.1}$$

где $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция. Согласно результатам §2.2, с применением преобразования Кронекера-Вейерштрасса для сингулярного пучка матриц и замены метрики пространства R^n данное уравнение приводится к каноническому уравнению

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t), \tag{2.4.2}$$

где матрица $M+\lambda L$ – квазидиагональна. Для уравнения (2.4.2) при $0 < t < T$ получены условия разрешимости и аналитические формулы для описания решений в терминах текущих скоростей винеровского процесса. Зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях найденных процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, которые при $t = 0$ принимают нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \le t < T$.

В §2.5 приведен подход к изучению системы с регулярным пучком матриц коэффициентов и единичной диффузией, основанный на применении преобразования матриц коэффициентов к канонической форме Шура. С применением этого подхода не требуется прибегать к замене метрики пространства, а формулы для решений тоже получаются в терминах симметрических производных в среднем винеровского процесса.

В §3.1 рассматривается дифференциальное уравнение леонтьевского типа с нулевыми начальными условиями и импульсными воздействиями в правой части вида $\frac{d\zeta(t)}{dt}$, где $\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^{N}\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k)$, $0 \le t \le T$,

$0 < t_1 < \cdots < t_N < T$, χ – функция Хевисайда, $\tilde{\zeta}_k(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n. Для данного уравнения при $0 < t < T$ получены аналитические формулы для решений в терминах текущих скоростей винеровского процесса. Зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях найденных процессов заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, принимающие при $t = 0$ нулевые значения, но являющиеся решениями только при $t_0 \le t < T$.

В §3.2 изучается сингулярное дифференциальное уравнение леонтьевского типа с импульсными воздействиями и с невырожденным нееденичным коэффициентом диффузии с применением результатов §2.1, §2.2.

В §4.1 сначала изучается диффереенциальное уравнение, пучок матриц которого удовлетворяет Теореме 1.2.6 и уже приведен к виду (1.2.3). Доказана

Теорема 4.1.2 *Пусть имеются вещественно-аналитические невырожденная $d \times d$-матрица $J(t)$, верхнетреугольная $(n-d)\times(n-d)$-матрица $N(t)$ с нулями по главной диагонали ($N^k(t) \equiv 0$ на $[0,T]$), невырожденная $n \times n$ – матрица $P(t)$, пусть $P_1(t)$ – матрица из первых d строк матрицы $P(t)$, E – единичная матрица и $t \in [0,T]$. Тогда: 1) для достаточно гладкой вектор функции $f(t)$ уравнение*

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s)ds +$$
$$+ \int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s)$$

распадается на две независимые подсистемы; 2) для подсистемы, соответствующей матрицам E_d и J имеет место аналитическая формула для решений

$$\eta(t) = \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)f(\tau)d\tau + \Theta(t)\int_0^t \Theta^{-1}(\tau)P_1(\tau)dw(\tau),$$

где матричная функция $\Theta(t)$ удовлетворяет задаче Коши $\dot{\Theta}(t) = J(t)\Theta(t)$, $\Theta(0) = E_d$; 3) для подсистемы, соответствующей матрицам $N(t)$ и E_{n-d}, при $0 < t < T$ имеют место рекурентные формулы для вычисления решений

$$\eta^n = -\sum_{j=1}^n P_j^n f^j - \sum_{j=1}^n P_j^n \frac{w^j}{2t},$$
$$D_S \sum_{j=i+1}^n N_j^i \eta^j = \eta^i + \sum_{j=1}^n P_j^i f^j + \sum_{j=1}^n P_j^i \frac{w^j}{2t};$$

4) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пункте 3) рекурентным *соотношениям, заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (2.3.9) и получаем процессы, удовлетворяющие нулевым начальным условиям, но являющиеся решениями только при $t_0 \le t < T$.*

Далее в этом параграфе изучается уравнение с пучком C^∞-гладких матриц, удовлетворяющих Теореме 1.2.5 и уже приведенных к виду (1.2.2).

В §4.2 изучается дифференциальное уравнение леонтьевского типа

$$dL(t)\xi(t) = M(t)\xi(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),\ S\xi(0) = a,\ 0 \le t \le T, \quad (4.2.1)$$

где $\xi(t) \in R^n$ – искомый случайный процесс, $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$ – вещественные непрерывные $m\times n$-матрицы, причем в случае с квадратными матрицами (когда $m = n$) $L(t)$ вырождена ($detL(t) \equiv 0$ на промежутке $[0,T]$), S – постоянная $m\times n$-матрица, $f(t) \in R^m$ – интегрируемая вектор-функция, $w(t) \in R^n$ – винеровский процесс, $a \in R^m$ – постоянный вектор.

Введем в рассмотрение следующие матрицы: $P_0 = E - L^+L$, $P_1 = P_0(MP_0)^+MP_0$, $Q_1 = P_0(SP_0)^+SP_0$, $P_2 = P_0 - P_1$, $Q_2 = P_0 - Q_1$, $P_3 = P_2(SP_2)^+SP_2$, $Q_3 = Q_2(MQ_2)^+MQ_2$, $P_4 = P_2 - P_3$, $Q_4 = Q_2 - Q_3$,

$$\Xi = \begin{pmatrix} E - SP_2(SP_2)^+ & 0 \\ 0 & E - MQ_2(MQ_2)^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & -S \\ M & -M \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \\ 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+M & 0 \end{pmatrix}(E - \Xi^+\Xi), \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & P_0(SP_0)^+S \end{pmatrix}(E - \Xi^+\Xi)$$

$$\Lambda = SL^+(0)X(0),\ \ G = \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)ds,$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = M(t)L^+(t)X(t),\ \ X(0) = E.$$

Тогда имеют место

Теорема 4.2.1 *Пусть в задаче (4.2.1) для матриц $L(t)$, $M(t)$, S выполняются тождества*

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)X^{-1}(s)M(s)\Phi_1(s) = 0, \quad (4.2.47)$$

$$[E - (\Lambda - \Lambda G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+]S\Phi_2(t) = 0,\ \ t, s \in [0,T]. \quad (4.2.48)$$

Тогда для того, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно выполнения условий

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]z(s)ds +$$

$$+ \int_0^T X^*(s)[E - L(t)L^+(t)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\} =$$

$$= [E - L(t)L^+(t)]\{z(t) + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N(s)dw(s)\}, \qquad (4.2.49)$$

$$[E - (\Lambda - \Lambda G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+]\{a+$$
$$+\Lambda G^+[\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$
$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds]\} = 0, \qquad (4.2.50)$$

где $z(s)$ является решением следующей задачи Коши:

$$dz(t) = M(t)L^+(t)z(t)dt + f(t)dt, \;\; z(0) = 0.$$

Теорема 4.2.2 *Если матрицы $L(t)$, $M(t)$, S в задаче (4.2.1) удовлетворяют равенствам (4.2.47), (4.2.48) и задача имеет решение, то ее общее решение записывается двумя способами:*

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_1(t)r(t) + P_4(t)r_0(t),$$
$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_2(t)r(t) + Q_4(t)r_0(t),$$

где матрицы $H_1(t)$, $H_2(t)$ вычисляются по формулам

$$H_1 = [E - P_2(SP_2)^+S]\Phi_1 + P_2(SP_2)^+S\Phi_2,$$
$$H_2 = [E - Q_2(MQ_2)^+M]\Phi_2 + Q_2(MQ_2)^+M\Phi_1,$$

$r(t)$, $r_0(t)$ – произвольные непрерывные векторы, а $\eta(t)$ является решением уравнения Ито

$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t)$$

с начальным условием

$$\eta(0) = -[E - (E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+\Lambda]\cdot$$
$$\cdot G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]\theta(s)ds+$$
$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\}+$$
$$+(E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+ \cdot \{a - S\Phi_2(0)r(0)\} + \alpha,$$

где α является решением системы $\Lambda\alpha = 0$, $G\alpha = 0$, а вектор $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$d\theta(t) = M(t)L^+(t)\theta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt, \;\; \theta(0) = 0.$$

Теорема 4.2.3 *Решение задачи (4.2.1) (если оно существует) единственно тогда и только тогда, когда система* $\Lambda\alpha = 0, G\alpha = 0$ *имеет лишь нулевое решение* $\alpha = 0$ *и верны равенства*

$$
\begin{aligned}
&P_4(t) = Q_4(t) = 0, \ \ 0 \leq t \leq T, \\
&\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = 0, \ \ 0 \leq t \leq T.
\end{aligned} \tag{4.2.51}
$$

В §5.1 вводятся и изучаются дифференциальные уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях. Доказана

Теорема 5.1.1 *Пусть* $\tilde{L}$ *и* $\tilde{M}$ *– вырожденная* ($d = rank\tilde{L}$) *и невырожденная соответственно* $n \times n$*-матрицы, образующие регулярный пучок* $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ *и выполняется критерий "ранг-степень"* $rank\tilde{L} = deg[det(\lambda\tilde{L}+\tilde{M})]$; *пусть* P *и* Q *–* $n \times n$*-матрицы, приводящие пучок* $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ *к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса,* $L = P\tilde{L}Q$ *и* $M = P\tilde{M}Q$; *пусть* $\bar{L} = QLQ^*$ *и* $t \in [0, T]$. *Тогда для* C^∞*-гладкой* n*-мерной вектор-функции* $\tilde{f}(t)$ *уравнение* $\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{L}, \end{cases}$ *преобразованное к* $\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = L, \end{cases}$ *где* $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$, $f(t) = P\tilde{f}(t)$, *с начальными условиями* $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$ *в* R^{n-d} *и случайной величиной с плотностью* ρ_0 *нигде не равной нулю в* R^d, *имеет решение.*

В §5.2 изучается уравнение более общего вида, чем в §5.1. Доказан аналог Теоремы 5.1.1 с матрицей диффузии более общего вида.

Публикации автора по теме диссертации

1. Машков, Е.Ю. О приведении стохастических уравнений леонтьевского типа к каноническому виду / Ю.Е. Гликлих, Е.Ю. Машков // Измерения: состояние, перспективы развития. Материалы международной научно-практической конференции. Челябинск 25-27 сентября 2012 г. Том 1. Челябинск. Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — С. 73-75.

2. Mashkov, E.Yu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. — 2013. — Vol.6. — Issue 2. — P. 25-39.

3. Машков, Е.Ю. Каноническая форма Шура и стохастические уравнения леонтьевского типа / Е.Ю. Машков // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2014". Воронеж, 26-31 января 2014 г. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" 2014, С. 215-218.

4. Машков, Е.Ю. Об одном уравнении леонтьевского типа с белым шумом / Е.Ю. Машков // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XXV". Воронеж, 3 мая – 9 мая 2014 г. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" 2014, С. 118-122.

5. Машков, Е.Ю. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов / Е.Ю. Машков // Научные Ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика и Физика. — №5(176) 2014. Выпуск 34. С. 49-60.

6. Mashkov, E.Yu. On the stochastic systems of differential-algebraic type / E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2014, Vol. 1, No. 1, P. 34-45.

7. Машков, Е.Ю. О разрешимости стохастических систем дифференциально-алгебраического типа / Е.Ю. Машков // Крымская международная осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник тезисов. – Судак, Российская федерация, 21 сентября — 30 сентября, 2014 г. Симферополь: Издательство Таврического национального университета им. В.И. Вернадского 2014, С. 34-35.

8. Машков, Е.Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа / Е.Ю. Машков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика и Математика. — 2014, №3. — С. 121-128.

9. Машков, Е.Ю. О разрешимости одной стохастической системы дифференциально-алгебраического типа / Е.Ю. Машков // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К. Иванова. Челябинск, 10 – 14 ноября 2014 года. - С. 208-209.

10. Mashkov, E.Yu. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2014, Vol. 1, No. 2, P. 45-51.

11. Машков, Е.Ю. Некоторые теоремы о разрешимости стохастических систем дифференциально-алгебраического типа / Е.Ю. Машков // Auditorium: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2014. №4. URL: http://auditorium.kursksu.ru/ pdf/004-003.pdf С. 15 - 18.

12. Машков, Е.Ю. Об одном стохастическом уравнении леонтьевского типа с импульсными воздействиями / Е.Ю. Машков // Вестник факультета прикладной математики и механики ВГУ. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, — 2015. — Выпуск 10, Часть 1 — С. 169-183.

13. Машков, Е.Ю. Сингулярные стохастические уравнения дифференциально-алгебраического типа с импульсными воздействиями / Е.Ю. Машков // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXVI". Воронеж, 3 мая – 9 мая 2015 г. Воронеж: Издательский дом ВГУ 2015, С. 140-142.

14. Mashkov, E.Yu. Stochastic Leontieff type equation with non-constant coefficients / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Applicable Analysis: An International Journal. — Taylor and Francis. — 2015. — Volume 94, Issue 8. — P. 1614-1623.

15. Машков, Е.Ю. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа с импульсными воздействиями / Е.Ю. Машков // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – – №2(15) 2015. С.26-35.

Работы [2], [5], [8], [14] и [15] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.