*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

На правах рукописи

Рощупкин
Сергей Александрович

# *СИНГУЛЯРНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА $B$-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА*

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

**Диссертация**
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ляхов Л.Н.

Воронеж — 2014

# Оглавление

# Введение

**Актуальность темы диссертации.** Псевдодифференциальные операторы или сингулярные интегродифференциальные операторы, впервые появились в работах С.Г. Михлина, А.Р. Кальдерона, А. Зигмунда, Р. Сили и др., как синтез сингулярных интегральных и дифференциальных операторов (сокращенно — СИД-операторы). Распространение эллиптической теории на эти операторы и их применение для изучения индекса принадлежит А.С. Дынину (1961 г.). М.С. Агранович (1965 г.) исследовал эллиптические СИД-операторы на многообразиях, использовал технику СИД-операторов для вычислении индекса эллиптических граничных задач. По видимому, А.С. Дынину принадлежит идея создания алгебры СИД-операторов. Дж. Кон и Л. Ниренберг в работе «Алгебра псевдодифференциальных операторов» (1965 г.) подошли к этим операторам с единой точки зрения, используя только технику преобразования Фурье. Именно эта работа и дала современное название теории СИД-операторов, построенных на основе интегралов Фурье. Дальнейшее развитие теории псевдодифференциальных операторов (п.д.о.) осуществлено многими математиками, в первую очередь Л. Хермандером. Отметим также работы советских математиков В.В. Грушина, Ю.В. Егорова, М.И. Вишика, Л.Р. Волевича, В.П. Маслова, Б.П. Панеях, Г.И. Эскина, М.А. Шубина и многих других. Интерес к теории п.д.операторов связан с тем, что в ее рамках решение линейного дифференциального уравнения сводится к проблеме деления образа Фурье распределения на полином, что является задачей классического операционного исчисления, поэтому решение практически всех задач линейных дифференциальных уравнений оказываются в рамках применения интегралов Фурье. Но для исследования задач дифференциальных уравнений, содержащих элементы сферической симметрии, преобразование Фурье ограничено тем, что не может учесть эту симметрию. Такую роль могло бы выполнить преобразование, полученное из преобразования Фурье сферическим преобразованием координат. Этим преобразованием является частный случай преобразования Ганкеля, ядром которого является $j$-функция Бесселя $j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t) = C(\nu)\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$, отвечающая целому-полуцелому порядку $\nu > -1/2$. Преобразование, основанное на $j$-функциях Бесселя любого (т.е. не обязательно целого-полуцелого) порядка $\nu > -1/2$, введено в 1951 г. Б.М. Левитаном, который назвал его «преобразованием Фурье-Ганкеля». Первое применение этого преобразования к исследованию сингулярных дифференциальных уравнений осуществлено Я.И. Житомирским (1955), который ввел преобразование Фурье-Бесселя, ядро которого состояло из произведений $j$-функций Бесселя одного порядка. И.А. Киприянов (1967) применил смешанное преобразование Фурье-Бесселя для описания весовых функциональных классов Соболева и для доказательств соответствующих теорем вложения.

В 70-х годах по инициативе И.А. Киприянова сделана попытка создания теории сингулярных п.д.операторов (с.п.д.о.) на базе смешанного преобразования Фурье-Бесселя. Как оказалось такие операторы не обладают в полной мере свойствами обычных п.д.операторов. В частности не удалось построить алгебру по модулю операторов истинного порядка $-\infty$. Причина заключалась в том, что п.д.операторы, построены по классической схеме на базе смешанного преобразования Фурье-Бесселя не содержат дифференциальные операторы нечетного порядка (например первую производную). И.А. Киприянов и В.В. Катрахов в этой связи предприняли модернизацию преобразования Фурье-Бесселя, включив в ядро преобразования нечетную $j$-функцию Бесселя (равную производной от четной $j$-функции Бесселя). Такой подход позволил воспользоваться теорией операторов преобразования, сведя проблему построения алгебры с.п.д.операторов к существующей алгебре классических п.д.операторов. Как выяснилось, методика операторов преобразования хорошо срабатывала только для одномерных с.п.д.операторов. Поэтому, существенно сужалась область применения новой теории к исследованию сингулярных дифференциальных уравнений. В 2012 г. В.В. Катрахов и Л.Н. Ляхов построили алгебру многомерных сингулярных п.д.операторов по классической схеме Кона-Ниренберга. Эта работа открыла путь для исследования сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя, их степени и первую производную от степеней операторов Бесселя ($\partial_B$-операторы Бесселя).

Применение теории п.д.о. для изучения эллиптических граничных задач для вырождающихся и сингулярных дифференциальных операторов, удовлетворяющих условию Я.Б. Лопатинского, было проведено в ряде работ, среди которых отметим работы воронежских математиков В.П. Глушко, И.А. Киприянова, Л.А. Иванова, В.В. Катрахова, М.И. Ключанцева, Л.Н. Ляхова и др. Постановка граничных задач для рассмотренных ими уравнений восходит к известной работе М.В. Келдыша и играет важную роль в задачах с осевой симметрией механики сплошной среды, в теории малых изгибаний поверхностей вращения, газовой динамики и т.д. Естественный интерес представляет применение многомерных псевдодифференциальных операторов Киприянова-Катрахова для построения современной эллиптической теории для рассматриваемых сингулярных и вырождающихся уравнений. Поэтому исследуемая тема, несомненно, актуальна.

**Цель работы.** Целью работы является:

1. Изучение классов основных функций и введения пространств функций и распределений наиболее приспособленных для работы с многомерным интегральным преобразованием Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова ( $\mathcal{F}_B$ -преобразования).

2. Представления действия линейного сингулярного дифференциального оператора с $\partial_B$ -оператором Бесселя и сопряженного ему в весовом скалярном произведении функций в образах прямого и обратного $\mathcal{F}_B$ -преобразований.

3. Ввести класс функций типа весового функционального пространства Соболева-Киприянова $H^s_\gamma(\mathbb{R}^+_N)$ на основе частных $\partial_B$ -производных и с помощью $\mathcal{F}_B$ -преобразования. Доказательство теоремы об эквивалентности норм при целых $s$ .

4. Ввести класс многомерных сингулярных псевдодифференциальных (с.п.д.) операторов Киприянова-Катрахова с однородными символами $a(x;\xi)$ , определенными в $\mathbb{R}_N \times \{\mathbb{R}_N \backslash \{\xi{=}0\}\}$ , которые представляют собой гладкие функции, быстро убывающие при $|x| \to \infty$ при фиксированных $\xi,\ |\xi| = 1$ и обладающими непрерывными первыми производными по $\xi\,(\neq 0)$ при фиксированном $x$ .

5. Изучение $B$ -эллиптического $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.оператора с символом из $\Xi^m_q$ и возможности существования априорной оценки решения $B$ -эллиптического $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. уравнения в $\mathbb{R}_N$ и построение квазирегуляризатора этого оператора.

**Научная новизна.** Следующие результаты работы являются новыми.

1. Введено пространство основных функций $S^+$ представляющее собой подпространство пространства основных функций Шварца, наделенное топологией, порождаемой системой норм

$$|\langle\varphi\rangle|_k{=}\max\left(\sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}}\left|x^\alpha\, D^\beta_{B_\gamma}\,\varphi(x)\right|,\ \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}}\left|\,D^\beta_{B_\gamma}\,(x^\alpha\varphi(x))\right|\right),$$

$k = 0,1,2,\ldots$, при этом выполнено условие одинаковой четности: $\alpha_i+\beta_i{=}2\ell_i,\ \ \ell_i=0,1,2,\,\ldots\,,\quad i=1,\ldots,n,\, n\leq N$. Доказано, что $S^+$ инвариантно относительно $\mathcal{F}_B$ -преобразования. На основе $S^+$ вводятся пространства функций, исчезающих на сингулярных гиперплоскостях оператора Бесселя (типа пространства Лизоркина) и подклассы функций из $S^+$, представленных в виде сумм четных и первых производных от четных функций по переменным $x'=(x_1,\ldots,x_n)$, $n\leq N$.

2. Введены функциональные классы Соболева-Киприянова построенные на основе $D_B$ -дифференцирования, и на основе $\mathcal{F}_B$ -преобразования Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова. Доказана эквивалентность норм в этих пространствах, если показатель гладкости функций $s$ — целое число.

3. Рассмотрен класс символов $\Xi^m_q$, построенный по аналогии с символами М.С. Аграновича. Для $a(x;\xi)\in\Xi^m_q$ при $q>\frac{N+|\gamma|}{2}{+}1$ доказаны основные теоремы теории многомерных (смешанного типа) сингулярных псевдодифференциальных операторов Киприянова-Катрахова ( $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.операторов): теорема о норме, теорема о сопряженном операторе, теорема о произведении $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.о. в шкале весовых пространств Соболева-Киприянова $H^s_\gamma$.

4. Получены априорные оценки $B$-эллиптических $\mathcal{F}_B$-с.п.д. уравнений. Построены квазирегуляризаторы (левый, правый) $B$-эллиптических $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов в евклидовом пространстве и полупространстве.

**Методы исследования.** В работе используются методы теории функций, функционального анализа, а также методы, развитые в работах научной школы И.А. Киприянова при исследовании весовых функциональных пространств и сингулярных дифференциальных уравнений.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер и дает конструкции квазирегуляризатора $B$-эллиптического $\mathcal{F}_B$-с.п.д.оператора. Доказаны априорные оценки решений $\mathcal{F}_B$-с.п.д.уравнений из соответствующих функциональных классов. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении задач математической физики с центральной и осевыми симметриями, в задачах теории функций и функционального анализа.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались в Воронежской зимней математической школе в 2014 г., в школе молодых ученых Липецкой области «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания» в 2012 — 2013 гг., на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» в г. Белгород в 2013 г., на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» Республика Башкортостан, г. Стерлитамак в 2013 г., на Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики и анализа» в г. Новосибирск в 2012 г., на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздале в 2012 г. и 2014 г..

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [1] — [11]. В совместно опубликованных работах [1] – [5] Л.Н. Ляхову принадлежит постановка задач. Доказательства всех результатов получены лично автором.

Работы [1], [2] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, включающего 46 наименования. Общий объем диссертации 102 стр.

**Краткое содержание диссертации.**

Во **введении** обосновывается актуальность темы, приводится методика исследования и дан краткий обзор содержания диссертации по главам.

Нумерация приводимых ниже определений и утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

**В первой главе** содержатся 3 пункта.

В первом пункте первой главы дается определение многомерного смешанного интегрального преобразования Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова.

Вводятся евклидовы пространства точек
$x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_{N-n}$, $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, а $x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_{N-n}$ или в его части $\mathbb{R}^+_N = \mathbb{R}^+_n \times \mathbb{R}_{N-n}$, определенную неравенствами $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. При этом числа $n$ и $N$ предполагаются фиксированными, $1 \leq n \leq N$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. Каждому индексу $\gamma_i$ ставим в соответствие оператор Бесселя $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i > 0.$

Многомерный смешанный обобщенный сдвиг $T_x^y$, $x=(x',y')$, $y=(y',y'')\in\mathbb{R}_n^+\times\mathbb{R}_{N-n}$ определяется в виде суперпозиции одномерных обобщенных и обычных сдвигов. По определению полагаем

$$T_x^y : f(x)\to T_x^y f(x)=$$
$$=\left(\prod_{i=1}^n T_{x_i}\right) f(x',x''-y'')=C(\gamma)\int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi f(x' \overset{\beta}{\to} y'\,,\, x''-y'')\times$$
$$\times\prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1}\beta_i\, d\beta_1\dots d\beta_n,$$
$$x' \overset{\beta'}{\to} y' = \left(x_1 \overset{\beta_1}{\to} y_1,\dots,x_n \overset{\beta_n}{\to} y_n\right)\,,$$

$$x_i \overset{\beta_i}{\to} y_i=\sqrt{x_i^2-2x_iy_i\cos\beta_i+y_i^2}\,,\quad C(\gamma)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\,.$$

Пусть $\alpha'$ и $\alpha''$ — целочисленные мультииндексы размерности $n$ и $N-n$ соответственно. Через $D_B^\alpha=\partial_{B_{x'}}^{\alpha'}\,\partial_{x''}^{\alpha''}=\partial_{B_{\gamma_1}}^{\alpha_1}\,\dots\,\partial_{B_{\gamma_n}}^{\alpha_n}\,\partial_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}\,\dots\,\partial_{x_N}^{\alpha_N}$ обозначим сингулярный дифференциальный оператор порядка $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_N$, составляющие которого определены следующим образом: $\partial_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad 1\leqslant i\leqslant N$,

$$\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i}=\begin{cases} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i=2k, \quad 1\leqslant i\leqslant n,\\ \partial_{x_i}B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}, & \alpha_i=2k+1, \quad k=0,1,2,\,\dots, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

где $B_{\gamma_i}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя.

Одномерные $F_B$-преобразования Киприянова-Катрахова строятся на основе ядра $j_\nu(t\tau)-i\,\frac{t\tau}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t\tau)$, $\quad \nu>-\frac{1}{2}$, где $j_\nu(t)$, так называемая, $j$-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода $J_\nu$ равенством $j_\nu(t)=\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\,J_\nu(t)$.

Введем обозначение

$$\Lambda_\gamma^{\pm}(x',\xi')=\prod_{j=1}^{n}\left[j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j)\mp i\,\frac{x_j\xi_j}{\gamma+1}\,j_{\frac{\gamma_j+1}{2}}(x_j\xi_j)\right],\quad \gamma_j>0.$$

**Определение 1.1.1** *Смешанным прямым и обратным преобразованиями Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова* ( $\mathcal{F}_B$ -преобразованиями) функции $U$ назовем соответственно выражения

$$\mathcal{F}_B[u](\xi)=\widehat{u}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Lambda_\gamma^{+}(x',\xi')\,e^{-i(x'',\xi'')}\,u(x)\,(x_1^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\,dx\,,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[u](x)=C(\gamma)\mathcal{F}_{\mathcal{B}}[u](-x)=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Lambda_\gamma^{-}(x',\xi')\,e^{i(x'',\,\xi'')}u(\xi)\;(\xi_1^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\,d\xi\,,$$

$$C(\gamma)=\frac{(2\pi)^{1-n}}{2^{2(\nu+1)}\,\Gamma^2(\nu+1)}.$$

Как обычно, интегралы в этих выражениях понимаются в смысле главных значений. Интересно отметить, что поскольку функция $j_\nu(t)$ — четная при любом $\nu$, то функция $\frac{t}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t)$ — нечетная и, следовательно, как и ядро классического преобразования Фурье, ядро $\mathcal{F}_B$ -преобразования состоит из четного и нечетного слагаемых. Несмотря на аналогию с классическим преобразованием Фурье, $\mathcal{F}_B$ -преобразование дифференциальных операций приспособлено только для четных функций. При этом для любой быстро убывающей, бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x',x'')$, четной по каждой координате вектора $x'$ и для любого целочисленного мультииндекса $\alpha=(\alpha',\alpha'')=(\alpha_1,\,\dots\,,\alpha_N)$, справедливы формулы

$$\mathcal{F}_B\left[\partial^{\alpha'}_{B_{x'}}\,\partial^{\alpha''}_{x''}\varphi\right](\xi)=(i\xi)^\alpha\;\mathcal{F}_B[\varphi](\xi),\tag{1.1.14}$$

$$D^{\alpha'}_{B_{\xi'}}\,\partial^{\alpha''}_{\xi''}\mathcal{F}_B\,[\varphi]\,(\xi)=\mathcal{F}_B[(ix)^\alpha\varphi](\xi)\,.\tag{1.1.15}$$

Через $S(\mathbb{R}_N)$ будем обозначать пространство Шварца основных функций, а через $S_{ev}(\mathbb{R}_N)$ его подпространство состоящее из функций, четных по каждой из переменных $x' = (x_1, \ldots, x_n)$. Далее под $(x')^\gamma$ понимается функция $(x')^\gamma = \prod\limits_{j=1}^{n} (x_j^2)^{\gamma/2}$ — четная по каждому из своих аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Множество функций для которых конечна норма $\|f\|_{L_2^\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_N} |f(x)|^2 \, (x')^\gamma \, dx\right)^{1/2}$ будем обозначать $L_2^\gamma(\mathbb{R}_N)$ или $L_{2,\,ev}^\gamma(\mathbb{R}_N)$, если функции $f$ предполагаются четными по каждой координате $n$-мерного вектора $x'$. Рассмотренное выше $\mathcal{F}_B$-преобразования являются взаимно обратными в $S(\mathbb{R}_N)$ (Катрахов, Ляхов) и в $L_2(\mathbb{R}_N)$ (Ляхов, Райхельгауз).

Пространство основных функций, рассмотренных в работе обозначается $S_{ev}^+$ представляющее собой подпространство пространства основных функций $S_{ev}$, наделенное топологией, порождаемой системой норм

$$|\langle\varphi\rangle|_k = \max\left(\sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}} \left|x^\alpha \, D_{B_\gamma}^\beta \, \varphi(x)\right|, \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}} \left| D_{B_\gamma}^\beta \, (x^\alpha \varphi(x))\right|\right), \tag{1.2.4}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, при этом выполнено условие *одинаковой четности*:

$$\alpha_i + \beta_i = 2\ell_i, \quad \ell_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n \le N. \tag{1.2.5}$$

**Теорема 1.2.1.** *При выполнении условия (1.2.5) $\mathcal{F}_B$-преобразование осуществляет непрерывный (в обе стороны) изоморфизм пространства $S_{ev}^+$, т.е. для любого неотрицательного целого числа $k$*

$$|\langle\mathcal{F}_B[\,\varphi]\,\rangle|_k \leqslant |\langle\varphi\rangle|_{k_1}.$$

Рассмотрим классы функций

$$\boldsymbol{\Psi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+) = \{\psi : \ \psi \in S_{ev}^+(\mathbb{R}_N^+), \ \partial^\beta \psi(0) = 0, \ \forall \ \beta \in Z^+\},$$

$$\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+) = \{\varphi : \ \varphi = \mathcal{F}_B[\psi] \, , \ \psi \in \mathbf{\Psi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+)\} \, .$$

**Теорема 1.2.2** *Класс* $\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+)$ *состоит из тех и только тех функций* $\varphi(x){\in}S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ , *которые ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам:*

$$\varphi(x){\in}S_{ev}(\mathbb{R}_N^+) \, , \quad \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} x^m \varphi(x) \, (x')^\gamma \, dx' dx''{=}0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi{\in}\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+), \tag{1.2.6}$$

*Для четного преобразования Фурье-Бесселя функции* $\varphi \in \mathbf{\Phi}_\gamma$ *ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам, четным по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_n$ .

$$\varphi(x){\in}S_{ev}(\mathbb{R}_N^+) \, , \quad \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (x')^{2m} \varphi(x) \, x^\gamma \, dx{=}0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi{\in}\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+), \tag{1.2.7}$$

В **третьем пункте первой главы** рассматривается линейный сингулярный дифференциальный оператор с $\partial_B$ -оператором Бесселя

$$L(x; D_B) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \, D_B^\alpha, \tag{1.3.1}$$

где $D_B^\alpha = \partial^{\alpha'}_{B_{x'}} \, \partial^{\alpha''}_{x''} = \partial^{\alpha_1}_{B_{\gamma_1}} \, \ldots \, \partial^{\alpha_n}_{B_{\gamma_n}} \, \partial^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}} \, \ldots \, \partial^{\alpha_N}_{x_N}$ — сингулярный дифференциальный оператор порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ , составляющие которого $\partial_{B_{\gamma_i}}$ определены в (1.1.5).

**Теорема 1.2.1**. *Пусть функция* $\varphi \in S^+_{ev}(\mathbb{R}_n)$ . *Действие сингулярного дифференциального оператора* $L(x, D_B)\varphi(x)$ *в образах* $\mathcal{F}_B$ *-преобразования имеет вид*

$$L(x, D_B)\varphi(x) = \mathcal{F}_B[\, a(x, i\xi)\widehat{\varphi} \,](x), \tag{1.3.2}$$

*где* $a(x, i\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) \ (i\xi)^\alpha$ .

Функцию $a(x,\xi)$ будем называть *символом* сингулярного дифференциального оператора $L(x,D_B)$ в образах $\mathcal{F}_B$-преобразования.

Скалярное произведение функций задается весовой линейной формой

$$(u\ v)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N} u(x)\ \overline{v(x)}\ (x')^\gamma\, dx.$$

Оператор $L^*(x;D_B)$, сопряженный оператору $L(x;D_B)$ имеет вид

$$L^*(x;D_B) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} (\partial^{\alpha'}_{B_\gamma})^*_{x'} \partial^{\alpha''}_{x''} \left( \overline{a_\alpha(x)}\ \cdot \right),$$

где

$$(\partial^{\alpha'}_{B_\gamma})^*_{x'} = \prod_{i=1}^n (\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}})^*_{x_i},$$

$$(\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}})^*_{x_i} = \begin{cases} B^{\alpha_i/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k, \\ -B^{(\alpha_i)/2}_{\gamma_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k+1, \end{cases} \qquad i{=}\overline{1,n},\ k{=}0,1,2,\ldots.$$

В образах $\mathcal{F}_B$-преобразования этот оператор записывается в виде

$$L^*(x;D_B) = \mathcal{F}_B^{-1}\, \mathcal{F}_B[a^*(x,-i\xi)\, u(x)]\,.$$

**Во второй главе** мы рассматриваем с.п.д.операторы Киприянова-Катрахова, ( $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторы).

Функциональные классы Соболева-Киприянова вводятся в **первом пункте второй главы** на основе скалярного произведения

$$(u,v)_\gamma = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\Omega_s} D^\alpha_B u(x)\ D^\alpha_B v(x)\ x^\gamma\ dx\,, \tag{2.1.4}$$

которое порождает норму в пространстве $H^m_\gamma(\Omega_s)$:

$$|||u|||_{H^m_\gamma(\Omega_s)} = \left( \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\Omega_s} |D^\alpha_B u(x)|^2\ (x')^\gamma\ dx \right)^{1/2}. \tag{2.1.3}$$

**Лемма 2.1.1** *Пространство* $H^m_\gamma(\Omega_s)$ *, со скалярным произведением (2.1.4) является гильбертовым относительно нормы (2.1.3).*

Введем также норму

$$\|f\|^2_{H^s_\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_N} (1+|\xi|^2)^s \, |\widehat{f}(\xi)|^2 \, (\xi')^\gamma \, d\xi. \tag{2.1.5}$$

**Теорема 2.1.1** *Пространство* $H^m_\gamma(\mathbb{R}_N)$ *можно определить либо с помощью соотношения (2.1.2), либо посредством равенства*

$$H^m_\gamma(\mathbb{R}_N) = \Big\{ u \, : \, u \in S'_{ev} \, , \; (1+|\xi|^2)^{m/2} \; \widehat{u} \in L^\gamma_2(\mathbb{R}_N) \Big\} \, ,$$

*при этом норма (2.1.5) эквивалентна норме (2.1.3), т.е.*

$$C_1 \|u\|_{H^m_\gamma(\mathbb{R}_N)} \leqslant |||u|||_{H^m_\gamma(\mathbb{R}_N)} \leqslant C_2 \|u\|_{H^m_\gamma(\mathbb{R}_N)}.$$

В **пункте 2.2** мы вводим *класс символов* $\Xi^m_q$ , состоящий из функций $a(x;\xi)$ , бесконечно дифференцируемых по $x$ , определенных при всех $x$ и $\xi$, $\xi \neq 0$ , удовлетворяющих оценке $|a(x;\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2}$ равномерно по $x$ и следующим условиям:

для любого фиксированного $x$ функция $a(x;\xi)$ по $\xi$ принадлежит пространству $H^q_\gamma(S_1(N))$ см. [13]), где $S_1(N)$ — единичная сфера $|\xi| = 1$, $q > \frac{N+|\gamma|}{2} + 1$ , при этом

$$\max_{x\in\mathbb{R}_N} \|a(x;\cdot)\|_{H^q_\gamma(S_1(N))} < \infty;$$

на сфере $S_1(N)$ функция $a(x;\xi)$ имеет предел $a(\xi)$ , когда $x \to \infty$ , такой, что функция

$$a_*(x;\xi) = a(x;\xi) - a_\infty(\xi) \tag{2.2.1}$$

и ее производная по $\xi$ , как функции $x$ принадлежит пространству $S^+_{ev}(\mathbb{R}_N)$ равномерно по $\xi$ .

Кроме того, выполняется условие "одинаковой четности"по каждой паре переменных $(x_i,\xi_i)$, $i=1,\dots,n$ : функция $a(x;\xi)$

или (i) четная и тогда $\partial^k_{x_i}a(x;\xi)\big|_{x_i=0}=0\,,\ \ |k|\geqslant 1;$

или (ii) нечетная и тогда $\partial^k_{x_i}a(x,\xi)\big|_{x_i=0}=0\,,\ \ k\geqslant 0.$

**Теорема 2.2.1** *При $s>\frac{n+|\gamma|}{2}+k$ , где $k$ — целое положительное число, пространство $H^s_\gamma$ непрерывно вложено в пространство $C^k_B$ функций непрерывных вместе с $D^\alpha_B$ -производными порядка $|\alpha|<k$ .*

**Определение 2.2.1** *Сингулярным псевдодифференциальным оператором Киприянова-Катрахова (далее, наряду с этим названием, используем сокращение — $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор) $A=a(x;D_B)$ с символом $a(x;\xi)\in\Xi^m_q$ назовем оператор, действующий на функции класса $S^+_{ev}(\mathbb{R}_N)$ по формуле*

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Lambda^+_\gamma(x,\xi)\ a(x;\xi)u(x)(x')^\gamma dx, \tag{2.2.2}$$

*где под $(x')^\gamma$ понимается функция $(x')^\gamma=\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^2)^{\gamma/2}$ — четная по каждому из своих аргументов $x_1,\dots,x_n$ .*

В равной степени полезным является $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор заданный в виде

$$\mathcal{A}u(x)=\mathcal{F}_B^{-1}\left[a(x;\xi)\ \mathcal{F}_B[u](\xi)\right](x). \tag{2.2.3}$$

Далее для класса символов $a(x;\xi)$ и класса отвечающих этим символам операторов $A$ или $\mathcal{A}$ будем использовать одно и тоже обозначение — $\Xi^m_q$ .

В **третьем пункте гл.II** мы доказываем теоремы о порядке $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. операторов в шкале пространств $H^s_\gamma$ .

**Теорема 2.3.1** *Пусть $a(x;\xi)\in\Xi^m_q$, тогда отвечающий этому символу по формуле (2.2.2) или (2.2.3) сингулярный псевдодифференциальный оператор $A$ или $\mathcal{A}$ имеет порядок, равный $m$ .*

**Теорема 2.3.2** *Пусть* $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$, *и* $A$ , *и* $\mathcal{A}$ *отвечающие этому символу по формуле (2.2.2) и (2.2.3) соответственно* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д. операторы. Тогда оператор* $A - \mathcal{A}$ *имеет порядок* $m-1$ *в шкале пространств* $H_\gamma^s$ .

**Лемма 2.3.2** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ . *Для любой функции* $u \in H_\gamma^s$ *имеет место неравенство*

$$|(Au, u)_\gamma| = |(u, \mathcal{A}u)_\gamma| \leqslant const \cdot \|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}. \tag{2.3.3}$$

*с константой, независящей от функции* $u$ .

В **пункте 2.4** мы рассматриваем произведения и коммутаторы с.п.д. операторов Киприянова-Катрахова.

**Теорема 2.4.1** *Пусть* $a_1(x;\xi) \in \Xi_q^{m_1}$ , $a_2(x;\xi) \in \Xi_q^{m_2}$ *и* $A_1$ *и* $A_2$ *— соответствующие этим символам* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова.Тогда оператор* $A_1 A_2 - A_1 \circ A_2$ *имеет порядок* $m_1 + m_2 - 1$ *в шкале пространств* $H_\gamma^s(\mathbb{R}_N^+)$ .

**Следствие 2.4.1** *Пусть* $a_1(x;\xi) \in \Xi_q^{m_1}$ , $a_2(x;\xi) \in \Xi_q^{m_2}$ *и* $A_1$ *и* $A_2$ *— соответствующие этим символам* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова. Тогда их коммутатор* $[A_1 A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$ *имеет порядок* $m_1 + m_2 - 1$ *в шкале пространств* $H_\gamma^s$ .

**Следствие 2.4.2** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ *и* $\varphi(x)$ *— бесконечно дифференцируемая функция, четная по каждой координате вектора* $x'$ . *Тогда оператор* $\varphi A - A\varphi$ *имеет порядок, равный* $m-1$ *в* $H_\gamma^s$ .

**Следствие 2.4.3** *Пусть* $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ , $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *— бесконечно дифференцируемые функции, четные по* $x'$ , *с не пересекающимися носителями. Тогда оператор* $\varphi A \psi$ *имеет порядок, равный* $m-1$ *в* $H_\gamma^s$ .

**Следствие 2.4.4** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ . *Его коммутатор с оператором* $(1-\Delta_B)^{k/2}$ *имеет порядок* $m+k-1$ .

**В третьей главе** мы строим квазирегуляризаторы $B$-эллиптических $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов.

**В пункте 3.1** мы рассматриваем конструкцию квазирегуляризаторов для $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов, которая дается в следующей теореме.

**Теорема 3.1.1** *$\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор $R$ с символом*

$$r(x;\xi) = |\xi|^m(1+|\xi|^m)^{-1}a^{-1}(x;\xi) \tag{3.1.1}$$

*является (левым и правым) квазирегуляризатором для $B$-эллиптического в $\mathbb{R}_N$ $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператора $A$ с символом $a(x;\xi)\in \Xi^m_q$.*

**Теорема 3.2.1** *Пусть $A\in\Xi^m_q$ и пусть на единичной сфере $S_1=\{\xi : |\xi|=1\}$ символ $Re\ a(x;\xi)$ ограничен с низу некоторой константой $c$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует константа $c'=c'(\varepsilon)$ такая, что для всех функций $u\in S_{ev}(\mathbb{R}^+_N)$*

$$Re(Au,u)_\gamma + c'\|u\|^2_{\frac{m-1}{2},\gamma} \geqslant (c-\varepsilon)\|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}. \tag{3.2.1}$$

**Теорема 3.3.1** . *Пусть $A\in\Xi^m_q$. Предположим, что $|a(x^0;\xi^0)| = c_0\neq 0$. Тогда для любой окрестности $\Omega$ точки $x^0$ и для любых вещественных чисел $s,l<m$ и $\varepsilon>0$ найдется бесконечно дифференцируемая функция $u_\varepsilon(x)$ вида*

$$u_\varepsilon(x) = \mathbf{j}_\gamma(x',\lambda\xi'^0)\, e^{i\langle x'',\lambda\xi''^0\rangle}\ \varphi(x), \quad \xi^0=(\xi'^0,\xi''^0),\ |\xi^0|=1, \tag{3.3.10}$$

*где $\lambda=\lambda_\varepsilon$ — достаточно большое положительное число, а $\varphi$ четная по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$, $n\leqslant N$, функция с носителем, содержащимся в $\Omega$, такая, что для нее выполнены неравенства*

$$\|u_\varepsilon\|_{H^{s-m+l}_\gamma} \leqslant \varepsilon\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H^s_\gamma}, \tag{3.3.11}$$

$$\left|\|Au_\varepsilon\|_{H^{s-m}_\gamma} - C_0\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H^s_\gamma}\right| \leqslant \varepsilon\,\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H^s_\gamma}, \tag{3.3.12}$$

*в которых*

$$\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H^s_\gamma} = \max\left(\sqrt{\int (1+|\xi|^2)^s \left(T^{\lambda\xi'^0}_{\xi'}\, |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\right) (\xi')^\gamma\, d\xi}\ \ ,\ \|u_\varepsilon\|_{H^s_\gamma}\right).$$

**Теорема 3.4.1** *Пусть* $A \in \Xi^m_q$ *. Предположим, что*

$$\max_{x,\xi\in\Sigma^+_n} |a(x,\xi)| = K \tag{3.4.1}$$

$K < \infty$ *. Тогда имеет место равенство*

$$K = \inf_T \|A + T\|_{s,\gamma}, \tag{3.4.2}$$

*где справа* $\|\cdot\|_{s,\gamma}$ *— норма операторов в шкале* $H^s_\gamma$ *и нижняя грань берется по всем операторам порядка* $m-1$ *.*

**Теорема 3.4.2** *Пусть* $A \in \Xi^m_q$ *. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*I. Символ оператора* $A$ *тождественно равен нулю.*

*II.* $A = 0$ *.*

*III. Для некоторого* $l < m$ *оператор* $A$ *имеет порядок* $l$ *.*

**Теорема 3.5.1** *Пусть* $A$ *—* $\mathcal{F}_B$*-с.п.д. оператор в* $\mathbb{R}_N$ *с символом* $a(x;\xi) \in \Xi^m_q$ *. Для того, чтобы оператор* $A$ *был* $B$*-эллиптическим в* $\mathbb{R}_N$ *, необходимо и достаточно, чтобы для всех* $u \in H^s_\gamma(\mathbb{R}_N)$ *выполнялось неравенство*

$$\|u\|_{s,\gamma} \leqslant c(\|Au\|_{s-m,\gamma} + \|u\|_{s-1,\gamma}) \tag{3.5.1}$$

*с константой* $c$ *, не зависящей от функции* $u$ *.*

**Теорема 3.5.2** *Следующие утверждения эквивалентны*

*1.* $A$ *—* $\mathcal{F}_B$*-с.п.д.о.* $B$*-эллиптического типа с символом* $a(x;\xi) \in \Xi^m_q$ *.*

*2. Существует квазирегуляризатор оператора* $A$ *.*

*3. Для функции* $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ *имеет место априорная оценка* $\|u\|_{s,\gamma} \leqslant c(\|Au\|_{s-m,\gamma} + \|u\|_{s-1,\gamma})$.

**Теорема 3.5.3** *Пусть* $A$ *—* $B$*-эллиптический* $\mathcal{F}_B$*-с.п.д. оператор с символом* $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$. *Тогда, если* $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ *является решением уравнения* $Au = f$, *где* $f \in H_\gamma^{S-m+\alpha}(\mathbb{R}_N)$, *то* $u \in H_\gamma^{s+\alpha}(\mathbb{R}_N)$.

# Глава 1

# Полное преобразование Фурье-Бесселя и многомерные п.д.операторы Киприянова-Катрахова

## 1.1 Основные положения анализа Фурье-Бесселя

Обозначим евклидово пространство

$$\mathbb{R}_N = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_{N-n}, \quad \mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}.$$

Пусть натуральные числа $n$ и $N$ фиксированы и связаны условием $n \leq N$. Положим

$$x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_{N-n},$$

где

$$x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n \text{ , а } x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_{N-n} \,.$$

И.А. Киприянов изучал краевые задачи для уравнений содержащих следующий сингулярный дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta_B = \left( \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=n+1}^{N} \partial_{x_i} \right), \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i > 0.$$

Этот оператор коммутирует с обобщенным сдвигом следующего вида:

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} f(\, x \overset{\beta}{\to} y) \, \sin^{\gamma-1}\beta \, d\beta \,,$$

где

$$x \overset{\beta}{\to} y = \sqrt{x^2 - 2xy\cos\beta + y^2} \,.$$

Смешанный обобщенный сдвиг порождает соответствующую *обобщенную* (термин И.А. Киприянова, [12]) свертку функций

$$(u \, * \, v)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_{x'}^{y'} u(x', x'' - y'') \; v(y', y'') \, (y')^\gamma \, dy \,. \tag{1.1.1}$$

### 1.1.1 Многомерный смешанный обобщенный сдвиг и его свойства

Одномерный обобщенный сдвиг $T_{x_i}^{y_i}$ уже введен ранее. В этих исследованиях он действует по каждой из весовых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Многомерный смешанный обобщенный сдвиг $T_x^y$, $x = (x', y')$, $y = (y', y'') \in \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$ определяется в виде суперпозиции одномерных обобщенных и обычных сдвигов. По определению полагаем

$$T_x^y\ :\ f(x)\to T_x^y f(x)=\left(\prod_{i=1}^{n} T_{x_i}\right) f(x',x''-y'')=$$

$$=C(\gamma)\int\limits_0^{\pi}...\int\limits_0^{\pi} f(x'\overset{\beta}{\to}y'\,,\,x''-y'')\,\prod_{i=1}^{n}\sin^{\gamma_i-1}\beta_i\,d\beta_1\ldots d\beta,\quad (1.1.2)$$

$$x'\overset{\beta'}{\to}y'=\left(x_1\overset{\beta_1}{\to}y_1,\ldots,x_n\overset{\beta_n}{\to}y_n\right)\,,\quad x_i\overset{\beta_i}{\to}y_i=\sqrt{x_i^2-2x_iy_i\cos\beta_i+y_i^2}\,,$$

$$C(\gamma)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\,.$$

**Свойства смешанного обобщенного сдвига** порождены свойствами одномерных сдвигов (обобщенных и обычных, свойства которых совпадают). Для одномерных обобщенных сдвигов свойства (a) — (e) доказаны в [24] (см. также книгу [25]); свойство ограниченности в весовых лебеговских классах функций доказано в работе [16]. Приведем эти свойства.

(a) линейность и однородность:

$T_x^y(a\,u(x)+b\,v(x))=a\,T_x^y u(x)+bT_x^y\,v(x);$

(b) $T_x^y(1)=1;$

(c) перестановочность аргумента и шага:

$T_x^y u(x)=T_y^x u(y);$

(d) самосопряженность смешанного обобщенного сдвига $T_x^y$ : если $f(x)$ — непрерывная функция, для которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}|f(x)|(x')^{\gamma}dx<\infty$$

и $g(x)$ — непрерывная, ограниченная функция для всех $x\in\overline{\mathbb{R}_N^+}$ функция, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}T_x^y f(x)\ g(x)\ x^{2\gamma}dx=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}f(x)T_x^y\ g(x)\ x^{2\gamma}dx;$$

(e) переместительность смешанного обобщенного сдвига $T_x^y$ : для каждой непрерывной функции $f(x)$ и любых точек $y,\,z\in\overline{\mathbb{R}_N^+}$ имеет место равенство

$$T_x^y T_x^z f(x)=T_x^z T_x^y f(x);$$

(f) ограниченность смешанного обобщенного сдвига $T_x^y$ в весовых лебеговских классах функций: для всех $p \geq 1$

$$\|T^y f\|_{L_p^\gamma} = \left( \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |T^y f(x)|^p \, (x')^\gamma \, dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left( \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T^y |f(x)|^p \, (x')^\gamma \, dx \right)^{1/p} \leqslant \left( \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p \, (x')^\gamma \, dx \right)^{1/p} = \|f\|_{L_p^\gamma}.$$

Неравенство

$$\|T^y f\|_{L_p^\gamma} \leqslant \|f\|_{L_p^\gamma} \tag{1.1.3}$$

обычно называют *неравенством Киприянова-Ключанцева.*

Пусть мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел. Введем обозначение

$$\Lambda_\gamma^{\pm}(x', \xi') = \prod_{j=1}^n \left[ j_{\frac{\gamma_j - 1}{2}}(x_j \xi_j) \mp i \, \frac{x_j \xi_j}{\gamma + 1} \, j_{\frac{\gamma_j + 1}{2}}(x_j \xi_j) \right].$$

Через $S(\mathbb{R}_N)$ будем обозначать пространство Шварца основных функций, а через $S_{ev}^+(\mathbb{R}_N)$ его подпространство состоящее из функций, четных по каждой из переменных $x' = (x_1, \ldots, x_n)$. Множество функций для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_2^\gamma} = \left( \int\limits_{\mathbb{R}_N} |f(x)|^2 \, (x')^\gamma \, dx \right)^{1/2}$$

будем обозначать соответственно $L_2^\gamma(\mathbb{R}_N)$ и $L_{2,\,ev}^\gamma(\mathbb{R}_N)$. Здесь под $(x')^\gamma$ понимается функция $(x')^\gamma = \prod\limits_{j=1}^n (x_j^2)^{\gamma/2}$ — четная по каждому из своих аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть $\alpha'$ и $\alpha''$ — целочисленные мультииндексы размерности $n$ и $N - n$ соответственно. Введем обозначения

$$D_B^\alpha = \partial_{B_{x'}}^{\alpha'} \, \partial_{x''}^{\alpha''} = \partial_{B_{\gamma_1}}^{\alpha_1} \ldots \partial_{B_{\gamma_n}}^{\alpha_n} \, \partial_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N} \tag{1.1.4}$$

— сингулярный дифференциальный оператор порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + +\alpha_N$ , составляющие которого определены следующим образом

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

$$\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}} = \begin{cases} B^{\alpha_i/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \partial_{x_i} B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

где $B_{\gamma_i}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя.

### 1.1.2 $j$-Функции Бесселя

Одномерные $\mathcal{F}_B$-преобразования строятся на основе ядра

$$j_\nu(t\tau) - i\,\frac{t\tau}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t\tau),$$

где $j_\nu(t)$ — так называемая $j$-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода $J_\nu$ равенством

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\,J_\nu(t).$$

$j$-Функция Бесселя удовлетворяет сингулярному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$B_\gamma j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\tau) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\,\frac{d}{dt}\right) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\tau) = -\tau^2 j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\tau) \tag{1.1.6}$$

и условиям

$$j_\nu(0) = 1, \;\; j\,'_\nu(0) = 0\,, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}. \tag{1.1.7}$$

При этом мы полагаем, что $\gamma > 0$ или, что тоже самое, $\nu > -\frac{1}{2}$ .

Отметим так же, что $j$-функция Бесселя удовлетворяет следующему рекурентному соотношению

$$(j_\nu(t))' = -\frac{t}{\gamma+1}\;j_{\nu+1}(t)\,. \tag{1.1.8}$$

Еще отметим, что $j$-функции Бесселя удовлетворяют следующей теореме сложения (Б.М. Левитан)

$$j_\nu(x\xi)\,j_\nu(y\xi) = T^y_x j_\nu(x\xi)\,, \tag{1.1.9}$$

где $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$ , $T^y_x$ — обобщенный сдвиг.

### 1.1.3 Многомерное смешанное преобразование Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова

**Определение 1.1.1** *Смешанным прямым и обратным преобразованиями Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова ( $\mathcal{F}_B$ -преобразованиями) функции $U$ назовем соответственно выражения*

$$\mathcal{F}_B[U](\xi)=\widehat{U}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Lambda^+_\gamma(x',\xi')\,e^{-i(x'',\xi'')}\,U(x)\,(x_1^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\,dx\,,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[U](x)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}\;2^{2(\nu+1)}\;\Gamma^2(\nu+1)}\mathcal{F}_{\mathcal{B}}[U](-x)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}\;2^{2(\nu+1)}\;\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Lambda^-_\gamma(x',\xi')\,e^{i(x'',\,\xi'')}U(\xi)\;(\xi_1^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\,d\xi\,.$$

Как обычно, интегралы в этих выражениях понимаются в смысле главных значений. Интересно отметить, что поскольку функция $j_\nu(t)$ — четная при любом $\nu$, то функция $\frac{t}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t)$ — нечетная и, следовательно, как и ядро классического преобразования Фурье, ядро $\mathcal{F}_B$ -преобразования состоит из четного и нечетного слагаемых. Это позволяет выделить четное и нечетное $\mathcal{F}_B$ -преобразование, которые будем обозначать $\mathcal{F}_{B,\,ev}$ и $\mathcal{F}_{B,\,od}$ и полагать

$$\mathcal{F}_B=\mathcal{F}_{B,\,ev}-i\mathcal{F}_{B,\,od},\quad \mathcal{F}_B^{-1}=\mathcal{F}_{B,\,ev}^{-1}+i\mathcal{F}_{B,\,od}^{-1}.$$

Несмотря на аналогию с классическим преобразованием Фурье, $\mathcal{F}_B$ -преобразование дифференциальных операций приспособлено только для четных функций[1]. По-видимому, это связано с тем, что оператор Бесселя $B_{\gamma_i}$ хорошо определен именно в классах функций $\{\varphi\}$, удовлетворяющих условию $\varphi'(x_i,\mathbf{x^i})\Big|_{x_i=0}=0$ (для удобства обозначений мы положили $x=(x_i,\mathbf{x^i})$ ), что, при соответствующем условии гладкости, приводит к равенству

$$B_{\gamma_i}\varphi'(x_i,\mathbf{x^i})\Big|_{x_i=0}=(\gamma_i+1)\frac{\partial^2\varphi(0,\mathbf{x^i})}{\partial x_i^2}\,.$$

[1]Как увидим далее, символы соответствующих сингулярных операторов вычисляются только на четных функциях.

Отметим, что условие $\varphi'(x_i,\mathbf{x}^\mathbf{i})\Big|_{x_i=0}=0$ есть условие четности функций, определенных в полупространстве (см. определение четной функции в монографии И.А. Киприянова [12]).

В [39] (Теорема 1.1.1) показано, что на функциях $\varphi$, принадлежащих пространству Шварца основных функций $S(\mathbb{R}_n)$ (не обязательно четных!), преобразования $\mathcal{F}_B$ и $\mathcal{F}_B^{-1}$ взаимнообратны:

$$\mathcal{F}_B^{-1}[\mathcal{F}_B\,\varphi]=\mathcal{F}_B[\mathcal{F}_B^{-1}\,\varphi]=\varphi.$$

Обращение $\mathcal{F}_B$-преобразований распространено на функции из $L_\gamma^2$ (опять же не обязательно четных), при этом сходимость соответствующих интегральных выражений понимается как сходимость в среднем с весом $(x')^\gamma$ и имеют место формулы Планшереля и Парсеваля, соответственно

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N} f(x)\,\overline{g(x)}\,(x')^\gamma dx=\int\limits_{\mathbb{R}_N}\widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,(\xi')^\gamma d\xi, \tag{1.1.10}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N}|f(x)|^2\,(x')^\gamma dx=\int\limits_{\mathbb{R}_N}|\widehat{f}(\xi)|^2(\xi')^\gamma d\xi. \tag{1.1.11}$$

Через $F_B$ будем обозначать *четное* преобразование Фурье-Бесселя, построенное на основе четной $j$-функции Бесселя $j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$:

$$F_B[f](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\;e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}f(x)\,(x')^\gamma\,dx\,,$$

$$\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')=\prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\,.$$

Легко видеть, что для функции $f$, четной по каждой из координат вектора $x'$ имеет место равенство

$$\mathcal{F}_B[f](\xi)=\mathcal{F}_{B,\,ev}[f](\xi)=2^n\,F_B[f](\xi).$$

Четное преобразование Фурье-Бесселя порождает обобщенную свертку функций (1.1.1), имеет место формула (см. [12], [5])

$$F_B[u\,v](\xi)=(\widehat{u}\,*\,\widehat{v})_\gamma(\xi)\,. \tag{1.1.12}$$

### 1.1.4 $D_B$-оператор Бесселя и его символ в образах $\mathcal{F}_B$-преобразования

Пусть $\alpha'$ и $\alpha''$ — целочисленные мультииндексы размерности $n$ и $N-n$ соответственно. И пусть

$$D_B^\alpha = \partial_{B_{x'}}^{\alpha'}\,\partial_{x''}^{\alpha''} = \partial_{B_{\gamma_1}}^{\alpha_1}\,\ldots\,\partial_{B_{\gamma_n}}^{\alpha_n}\;\partial_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}\,\ldots\,\partial_{x_N}^{\alpha_N} \tag{1.1.13}$$

— сингулярный дифференциальный оператор порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$, составляющие которого определены следующим образом

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad \partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i} = \begin{cases} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i = 2k, \\ \partial_{x_i} B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}, & \alpha_i = 2k+1, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$B_{\gamma_i}{=}\partial^2_{x_i^2}{+}\frac{\gamma_i}{x_i}\;\partial x_i = x_i^{-\gamma_i}\partial_{x_i}\,x_i^{\gamma_i}\,\partial_{x_i}.$$

Если $\varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_N)$ и $\alpha = (\alpha', \alpha'') = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, то справедливы формулы

$$\mathcal{F}_B\left[\partial_{B_{x'}}^{\alpha'}\,\partial_{x''}^{\alpha''}\varphi\right](\xi) = (i\xi)^\alpha\;\mathcal{F}_B[\varphi](\xi), \tag{1.1.14}$$

$$D_{B_{\xi'}}^{\alpha'}\,\partial_{\xi''}^{\alpha''}\mathcal{F}_B\left[\varphi\right](\xi) = \mathcal{F}_B[(ix)^\alpha\varphi](\xi)\,. \tag{1.1.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о формулы (1.1.14). Для обычных производных $\partial_{x''}^{\alpha''}$ и преобразования (обычного) Фурье (напомним, что по переменным $x''$ действует только преобразование Фурье) эта формула хорошо известна. Поэтому ее будем доказывать для $\partial_B$-производных, действующих по первой группе переменных $x'$. Выделим одну из весовых переменных $x_i$ и положим $x = (x_i, \mathbf{x}^i)$. $\mathcal{F}_B$-преобразование по этой переменной обозначим $\mathcal{F}_B^i$. Здесь надо рассмотреть два случая, когда число $\alpha$ четное и когда нечетное.

1. Пусть $\alpha_i = 2k$ — четное положительное число. Тогда $\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i} = B^k$ и учитывая, что $B_{\gamma_i}\varphi$ — четная функция по переменной $x_i$, получим

$$\mathcal{F}_{B_{\gamma_i}}^i[\varphi](\xi) = 2\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\;B^k\varphi(x_i, \mathbf{x}^i)\;x_i^{\gamma_i}\,dx_i.$$

Теперь, интегрируя по частям и воспользовавшись равенствами (1.1.6) и (1.1.7), имеем

$$\mathcal{F}^i_{B_{\gamma_i}}[B^k_{\gamma_i}\varphi](\xi)=2(i\xi)^{2k}\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\ \varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}\,dx_i=(i\xi)^{2k}\mathcal{F}^i_{B_{\gamma_i}}[\varphi](\xi)\,. \tag{1.1.16}$$

Отсюда следует равенство (1.1.14) для четного $\alpha_i$ .

2. Пусть $\alpha_i=2k+1$ — нечетное число. Тогда $\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}}=\partial_{x_i}B^k_{\gamma_i}$ , учитывая, что $\partial_{x_i}B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)$ — нечетная функция по переменной $x_i$ , получим

$$\mathcal{F}^i_{B_{\gamma_i}}[\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}}\varphi](\xi)=-2i\int\limits_0^\infty \frac{x_i\,\xi_i}{\gamma_i+1}j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i\xi_i)\ \partial_{x_i}B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}\,dx_i=$$

$$=\frac{2i}{\xi_i}\int\limits_0^\infty \frac{x_i\,\xi_i^2}{\gamma_i+1}j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i\xi_i)\ \partial_{x_i}B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}\,dx_i.$$

Согласно (1.1.8), имеем

$$\mathcal{F}^i_{B_{\gamma_i}}[\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}}\varphi](\xi)=-\frac{2i}{\xi_i}\int\limits_0^\infty \partial_{x_i}\left(j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\right)\ \partial_{x_i}B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}\,dx_i.$$

Теперь, интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{F}^i_{B_{\gamma_i}}[\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}}\varphi](\xi)=2i\ \partial_{x_i}\left(j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\right)\ B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}\Big|_{x_i=0}^{\infty}-$$

$$-\frac{2i}{\xi_i}\int\limits_0^\infty \partial_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\partial_{x_i}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\right)\ B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ dx_i=$$

$$=-\frac{2i}{\xi_i}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\partial_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\partial_{x_i}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\right)\ B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}dx_i=$$

$$=-\frac{2i}{\xi_i}\int\limits_0^\infty B_{\gamma_i}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\ B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}dx_i=$$

$$=2i\ \xi_i\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\ B^k_{\gamma_i}\varphi(x_i,\mathbf{x}^i)\ x_i^{\gamma_i}dx_i\,.$$

В последнем равенстве мы применили формулу (1.1.6). Остается воспользоваться равенством (1.1.16) и мы получим

$$\mathcal{F}_B^i[\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i}\varphi](\xi)=(i\xi_i)^{2k+1}\mathcal{F}_B^i[\varphi](\xi).$$

Тем самым формула (1.1.14) доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о формулы (1.1.15). Для обычных производных, действующих по переменным $\xi''$ эта формула известна. Поэтому достаточно рассмотреть $\partial_B$ -производные по переменным $\xi'$ . Как и раньше, выделим одно из направлений $\xi_j,\ j=1,2,\ldots,n$ и положим $\xi=(\xi_j,\xi^{\mathbf{j}})$ . Опять возможны два случая.

1. Число $\alpha_j=2k$ — четное. В этом случае

$$\partial_{B_{\gamma_j}}^{\alpha_j}\mathcal{F}_B^j[\varphi](\xi_j,x^j)=B_{\gamma_j}^k\mathcal{F}_{B,\,ev}^j[\varphi](\xi)=$$

$$=2\int\limits_0^\infty\left[(B_{\gamma_j}^k)_{\xi_j}\ j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j)\right]\ \varphi(x_j,x^j)\ x_j^{\gamma_j}\,dx_j.$$

Здесь $B$ -дифференцирование под знаком интеграла правомерно ввиду того, что $\varphi\in S_{ev}^+$ . Как видим формула (1.1.15) является простым следствием формулы (1.1.6) (где надо вместо $-\xi_j^2$ писать $(i\xi_j)^2$ ).

2. Пусть $\alpha_j=2k+1$ — нечетное. Учитывая четность функции $\varphi(x)$ по переменной $x_j$ , запишем

$$\partial_{B_{\gamma_j}}^{\alpha_j}\mathcal{F}_B^j[\varphi](\xi)=\partial_{B_{\gamma_j}}^{\alpha_j}\mathcal{F}_{B,\,ev}^j[\varphi](\xi)=$$

$$=2\partial_{\xi_j}B_{\gamma_j}^k\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j)\ \varphi(\xi)\ (\xi')^{\gamma_j}\,d\xi_j.$$

Здесь, учитывая, что функция $\varphi\in S_{ev}^+(\mathbb{R}_N)$ , дифференцирование и $B$ -дифференцирование можно осуществить под знаком интеграла. Применим формулу (1.1.6), затем (1.1.8). В результате получим

$$D_{B_{\gamma_j}}^{\alpha_j}\mathcal{F}_B^j[\varphi](x)=2\int\limits_0^\infty\left(i^2\ \frac{x_j^2\xi_j}{\gamma_j+1}\right)(ix_j)^{2k}\,j_{\frac{\gamma_j+1}{2}}(x_j\xi_j)\ \varphi(x)\ (x')^{\gamma_j}\,dx_j=$$

$$= 2i \int\limits_0^\infty \frac{x_j \xi_j}{\gamma_j + 1}\ (ix_j)^{2k+1}\, j_{\frac{\gamma_j+1}{2}}(x_j \xi_j)\ \varphi(x)\ (x')^{\gamma_j}\, dx_j =$$

$$= i\ \mathcal{F}^j_{B,\,od}[(ix)^{2k+1}\,\varphi](\xi) = \mathcal{F}^j_B[(ix)^{2k+1}\,\varphi](\xi),$$

Последнее равенство связано с распространением интегрирования на всю действительную ось и справедливо, поскольку под знаком $\mathcal{F}^i_B$ -преобразования стоит нечетная функция. Таким образом формула (1.1.15) справедлива и в случае нечетного $\alpha_j$ .

**Замечание 1.1.1** *Если рассмотреть класс функций*

$$\mathbf{\Psi}_\gamma(\mathbb{R}^+_N) = \{\psi:\ \psi \in S(\mathbb{R}^+_N),\ \partial^\beta \psi(0) = 0,\ \forall\ \beta \in Z^+\}\,.$$

*то формулы (1.1.14), и (1.1.15) легко распространить на эти функции произвольной четности. Это связано во первых с тем, что применение сингулярных операторов Бесселя и* $\partial_B$ *-производных не приводит к функциям с особенностью в нуле, а во вторых с тем, что несобственный интеграл по оси* $(-\infty, +\infty)$ *в смысле главного значения от функции произвольной четности всегда можно представить, как интеграл от четной функции:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\, f_{ev}(x) + f_{od}(x)\,]dx = 2\int\limits_0^\infty f_{ev}(x)\, dx,$$

*где* $f_{ev} = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_{od} = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ . *При этом* $f_{ev}$ *не является четным продолжением функции* $f$ *с полуоси* $(0, +\infty)$ . *А если ядро интегрального преобразования* $\Phi(x,y) = \Phi_{ev}(x,y)$ *— четная по* $x$ *функция, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ev}(x,y)\ f(x)dx = 2\int\limits_0^\infty \Phi_{ev}(x,y)\ f_{ev}(x)\, dx,$$

*а если это ядро* $\Phi(x,y) = \Phi_{od}(x,y)$ *— нечетная по* $x$ *функция, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{od}(x,y)\ f(x)\, dx = 2\int\limits_0^\infty \Phi_{od}(x,y)\ f_{od}(x)\, dx\,.$$

## 1.2 Основные пространства функций

Мы используем пространство Л. Шварца основных функций $S(\mathbb{R}_n)$, заданных в $\mathbb{R}_n$ и достаточно быстро убывающих. Но работа с сингулярным оператором Бесселя требует рассматривать подмножество этого пространства, состоящее из четных функций. Это связано с ограниченностью $B\varphi$ в классе четных гладких функций[2], но не только с этим. Существенно и то, что на произвольных (по четности) функциях символ $\partial_B^\alpha$ уже не равен $(i\xi)^\alpha$, как это в формулах (1.1.6), (1.1.7).

**Замечание 1.2.1** *В этом важно убедиться, поэтому рассмотрим простой пример, когда требуется найти образ* $\mathcal{F}_B$ *-преобразования четной функции равной производной от нечетной функции. Имеем*

$$I_1 = \mathcal{F}_B[\psi'_{od}](\xi) = \mathcal{F}_{B,ev}[\psi'_{od}](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} j_\nu(x\xi)\ \psi'_{od}(x)\ (x^2)^{\gamma/2}\,dx.$$

*Интегрируя по частям, получим*

$$I = \left( j_\nu(x\xi)\ \psi(x)\ x^\gamma \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,(x^\gamma\, j_\nu(x\xi))}{dx}\ \psi_{od}(x)\ dx \right) =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{x}\, j_\nu(x\xi) + \frac{d}{dx} j_\nu(x\xi) \right)\ \psi_{od}(x)\, x^\gamma\, dx = I_1 + I_2\,.$$

*Здесь только второе слагаемое обладает нужным (в смысле равенства (1.1.6)) свойством:*

$$I_2 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{dx} j_\nu(x\xi) \right)\ \psi_{od}(x)\, x^\gamma\ dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(i\xi)^2}{\gamma+1} j_{\nu+1}(x\xi)\, \psi_{od}(x)\, x^\gamma\ dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(i\xi)^2}{\gamma+1} j_{\nu+1}(x\xi)\ \psi_{od}(x)\, x^\gamma\ dx = -i^2\xi \mathcal{F}_{B,od}[\psi_{od}]\,.$$

*Первое же слагаемое имеет ядром интегрального преобразования функцию* $\frac{\gamma}{x}\, j_\nu(x\xi)$, *которая не может рассматриваться в качестве ядра изучаемого здесь* $\mathcal{F}_B$ *-преобразования.*

[2] $B\varphi \to (1{+}\gamma)\varphi''(0)$ при $t \to 0$

Однако, основное пространство, состоящее только из четных пробных функций может оказаться слишком узким. Например, если число $\alpha$ — нечетное, то в классах четных функций получили бы совсем неконструктивное равенство $(\partial_B^\alpha f\,,\,\varphi)_\gamma = 0$ . В этом случае в качестве основных удобно рассматривать функции вида "четная производная от четной". Тогда (для простоты полагаем аргумент $x \in \mathbb{R}_1$ )

$$(\partial_B^\alpha f\,,\,\varphi)_\gamma = (\partial_B^\alpha f\,,\,\varphi_{ev} + \psi'_{ev})_\gamma = -(f\,,\,B^{\frac{\alpha+1}{2}}\psi_{ev})_\gamma\,.$$

В общем случае эти рассуждения приводят к классу основных функций, представленных в виде суммы четной и производной по одному или нескольким переменным $x_i$ $(i = 1,\ldots,n,\;\; n \le N)$ от четной функции

$$\varphi(x) = \varphi_{ev}(x) + \varphi_{od}(x), \quad \varphi_{od}(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^{\alpha_i}\psi_{ev}(x), \tag{1.2.1}$$

где $\alpha_i$ принимает значение или 0 или 1, $\varphi_{ev},\;\psi_{ev} \in S_{ev}$ — четные функции, а суммирование идет по тем индексам $i$ для которых $\alpha_i \ne 0$ . Для функций (1.2.1) имеет место формула

$$\mathcal{F}_B[\varphi](\xi) = 2^n\widehat{\varphi}(\xi) + 2i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}B_{\gamma_i}^{\alpha_i}\mathcal{F}_{od^i}\widehat{\psi}^{\;i}(\xi)\,, \tag{1.2.2}$$

где знак $\widehat{\cdot}$ означает применение четного преобразования Фурье-Бесселя, $\widehat{\cdot}^{\,i}$ — одномерное четное преобразование Фурье-Бесселя по переменной $x_i$ и, наконец, $\mathcal{F}_{od^i}$ — нечетное преобразование Фурье-Бесселя по всем переменным, кроме $x_i$ . Действительно, полагая $x \in \mathbb{R}_1$ $\varphi = \varphi_{ev} + \psi'_{ev}$ , получим

$$\mathcal{F}_B[\varphi] = \mathcal{F}_{ev}\varphi_{ev}(\xi) - i\mathcal{F}_{od}[\partial_x\psi_{ev}](\xi) =$$

$$= 2\,\widehat{\varphi_{ev}}(\xi) + 2i\int\limits_{\mathbb{R}_1^+}\frac{1}{\xi_i}\;\partial_{x_i}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;\partial_x\psi_{ev}(x)\;x^\gamma\,dx\,.$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_B[\varphi] = 2\,\widehat{\varphi_{ev}}(\xi) + 2i\int\limits_0^\infty\frac{1}{\xi_i}\;\partial_x j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\;\partial_x\psi_{ev}(x)\;x^{\gamma_i}\,dx$$

Теперь формула (1.2.2) получается интегрированием по частям.

Обычно в пространстве Шварца вводится система норм вида

$$|\langle\varphi\rangle|_k = \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_n}} \left| x^\alpha\, D_i^\beta \varphi(x) \right|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Такая система норм превращает пространство Шварца в пространство Фреше и позволяет доказать непрерывный изоморфизм основного пространства при его преобразовании Фурье. Нашей задачей в этом пункте является введение аналога подобных пространств и соответствующих норм для $\mathcal{F}_B$-преобразования.

Доказательства фактов (классических) такого рода используют формулу Лейбница для производных от произведения. Нетрудно видеть, что четные $B$-производные от произведения не могут быть представлены в виде суммы $B$-производных сомножителей. Например, легко проверить, что

$$B(f_1\, f_2) = Bf_1 + 2Df_1\, Df_2 + f_1\, Bf_1,$$

а отсюда ясно, что соответствующая формула Лейбница для целых степеней оператора Бесселя включает в себя и четные и нечетные порядки производных. Четное преобразование Фурье-Бесселя $F_B$ приспособлено исключительно для работы с операторами $B^m$ четного порядка $2m$. Теперь отметим, что формулу Лейбница для $B^m(f_1\, f_2)$ можно записать используя только операторы $B^m$ и $\partial_B^m$ (см. [8], [9], [46]) в виде

$$B_\gamma^s(f_1\, f_2) = \sum C_{\gamma,j_1,j_2}^{s,i_1,j_1} x_1^{-l} D_{x_1}^{i_1} B_{x_1}^{j_1} f_1 \cdot D_{x_1}^{i_2} B_{x_1}^{j_2} f_2, \tag{1.2.3}$$

где $C_{\nu,i_2,j_2}^{s,i_1,j_1}$ — определенные постоянные, причем

$$C_{\nu,i_2,j_2}^{s,0,0} = \begin{cases} 1, & j_2 = s, \\ 0, & j_2 < s \end{cases}$$

и суммирование в (1.2.3) ведется по индексам $l + 2j_1 + 2j_2 + i_1 + i_2 = s$, $i_1 \leqslant 1,\ i_2 \leqslant 1,\ l \leqslant 2s-1$. При $\nu = \frac{1}{2}$ постоянные $C_{\nu,i_2,j_2}^{s,i_1,j_1}$ есть обычные биномиальные коэффициенты.

Формула (1.2.3) показывает, что переход в формуле Лейбница к операторам типа $\partial_B^\alpha$ приводит к операторам с особенностью на гиперплоскостях

$x_i = 0$ , а это вызывает существенные трудности при определении принадлежности произведений функций к соответствующим основным классам.

Например. Пусть в $S^+_{ev}(\mathbb{R}_1)$ задана система норм вида

$$|\langle\varphi\rangle|'_k = \sup_{\substack{2p+m\leq k,\\ x\in\mathbb{R}_1}} \left|x^{2p}\,(B^m_\gamma)_x\varphi(x)\right|\,, \quad k=0,1,2,\ldots\,.$$

Рассмотрим четное преобразование Фурье-Бесселя $F_B$ и покажем что в этой системе норм оно непрерывно действует из $S_{ev}$ в $S_{ev}$ . Имеем

$$|\langle\widehat{\varphi}\rangle|'_k = \sup_{\substack{2p+m\leq k,\\ \xi\in\mathbb{R}_1}} \left|\xi^{2p}\,B^m_\gamma\widehat{\varphi}(\xi)\right| =$$

$$= \sup_{\substack{2p+m\leq k,\\ \xi\in\mathbb{R}_1}} \left|F_B[\,B^p_\gamma(x^{2m}\varphi(x))\,]\right|.$$

Теперь, чтобы оценить это выражение $|\langle\varphi\rangle|'_k$ -нормами, необходимо воспользоваться формулой (1.2.3), затем выделить окрестность нуля и внешность этой окрестности. Наибольшую трудность имеет оценивание через $|\langle\widehat{\varphi}\rangle|'_k$ -норму функции в окрестности нуля, хотя это так на самом деле (надо отказаться от формулы (1.2.3), записав ее в виде действия операторов типа $\partial^{m_1}B^{m_2}_\gamma\partial^{m_3}\ldots$ и воспользоваться методом математической индукции).

Но можно упростить эту задачу, введя следующую систему норм в основном пространстве $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n)$

$$|\langle\varphi\rangle|_k = \max\left(\sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_n}}\left|x^\alpha\,D^\beta_{B_\gamma}\,\varphi(x)\right|\,,\ \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_n}}\left|\,D^\beta_{B_\gamma}\,(x^\alpha\varphi(x))\right|\right), \quad (1.2.4)$$

$$k=0,1,2,\ldots\ .$$

Кроме того, необходимо потребовать, чтобы в (1.2.4) всегда выполнялось условие

$$\alpha_i+\beta_i = 2k_i, \quad k_i = 0,1,2,\,\ldots\,, \quad i=1,\ldots,n\,, \qquad (1.2.5)$$

т.е. числа $\alpha_i$ и $\beta_i$ , отвечающие одному и тому же индексу $i$ должны быть одинаковой четности.

Нормы (1.2.4) определяют топологию в $S_{ev}^{+}$. В частности, последовательность функций $u_m$ сходится к $u$ в $S_{ev}^{+}$, если она сходится по каждой из этих норм, когда индекс $k$ пробегает все неотрицательные числа.

**Теорема 1.2.1** *При выполнении условия (1.2.5) $\mathcal{F}_B$-преобразование осуществляет непрерывный (в обе стороны) изоморфизм пространства $S_{ev}^{+}$, т.е. для любого неотрицательного целого числа $k$ выполняется неравенство*

$$|\langle \mathcal{F}_B[\,\varphi]\,\rangle|_k \leqslant |\langle\varphi\rangle|_{k_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in S_{ev}^{+}$ и мультииндексы $\alpha$ и $\beta$ состоят из произвольных целых неотрицательных чисел одинаковой четности по каждому номеру $i$. По формулам (1.2.4), (1.2.5), имеем

$$|\xi^\alpha\, \partial_B^\beta\, \mathcal{F}_B[\varphi](\xi)| = |\xi^\alpha\, \mathcal{F}_B[(ix)^\beta\, \varphi](\xi)| = |\mathcal{F}_B\left[D_B^\alpha\left((ix)^\beta\,\varphi(x)\right)\right](\xi)|\,.$$

Далее, упрощая, рассматриваем наиболее принципиальный для нас случай $n = N = 1$.

Случай 1. Предположим, что число $\beta$ четное равное $2m$. Тогда (при этом $\alpha$ тоже четное)

$$(ix)^\beta\,\varphi = \psi(x) \in S_{ev}^{+}$$

и

$$|\xi^\alpha\, \partial_B^\beta\, \mathcal{F}_B[\varphi](\xi)| = |\xi^\alpha\, \mathcal{F}_B[\psi](\xi)| = 2|F_B[B^k\psi]| < \infty\,.$$

При выполнении условия (1.2.5) функция $D_B^\alpha\left((ix)^\beta\,\varphi(x)\right) = B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\,\varphi(x)\right)$ четная, поэтому

$$\mathcal{F}_B\left[\partial_B^\alpha\left((ix)^\beta\,\varphi(x)\right)\right](\xi) = 2F_B\left[B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\,\varphi(x)\right)\right](\xi) =$$

$$= 2\int\limits_{R_N} \Lambda^{+}(x',\xi')\, e^{-i\langle x'',\,\xi''\rangle}\, B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\,\varphi(x)\right)\,(x')^\gamma\, dx\,.$$

Ясно, что для любого натурального числа $p$ функция

$$\psi(x) = (1+|x|^{2p})B^{\alpha/2}\left((ix)^{2m}\,\varphi(x)\right) \in S_{ev}(\mathbb{R}_N),$$

поэтому в рассматриваемом случае

$$|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)| =$$
$$=2\left|\int\limits_{\mathbb{R}_N}\frac{\Lambda^+(x',\xi')e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}}{1+|x|^{2p}}(1+|x|^{2p})D_B^\alpha\left((ix)^\beta\,\varphi(x)\right)(x')^\gamma\,dx\right|\leqslant C|\langle\varphi\rangle|_{k_1}.$$

Случай 2. Предположим теперь, что число $\beta$ нечетное равное $2m_1{+}1$ (при этом $\alpha$ тоже нечетное, положим $\alpha = 2m_2{+}1$ ). Из определения пространства $S_{ev}$ следует, что $\psi(x) = x^{2m}\varphi$ — четная функция. Тогда $x^\beta\,\varphi = x\,x^{2m}\varphi = x\,\psi(x)\in S,\ \psi\in S_{ev}$ . В этом случае

$$\left|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)\right| = 2\left|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,F_B[\varphi](\xi)\right| =$$
$$= 2\left|\xi^\alpha\int\limits_0^\infty\frac{x\xi}{\gamma+1}\,j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi)\;x\psi(x)\;x^\gamma\,dx\right| =$$
$$= 2\left|\xi^{\alpha-1}\int\limits_{\mathbb{R}_1^+}\frac{x\xi^2}{\gamma+1}\,j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi)\;x\psi(x)\;x^\gamma\,dx\right| =$$
$$= \left|\xi^{2k}\int\limits_{\mathbb{R}_1}\partial_x j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;x\psi(x)\;x^\gamma\,dx\right| =$$
$$= \left|\xi^{2k}\int\limits_{\mathbb{R}_1}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;\frac{1}{x^\gamma}\partial_x\left(x^{\gamma+1}\psi(x)\right)\;x^\gamma\,dx\right|.$$

Функция
$$\psi_1 = \frac{1}{x^\gamma}\partial_x\left(x^{\gamma+1}\psi(x)\right) = (\gamma+1)\psi(x) + x\,\psi'(x)$$
четная ( $x^\gamma$ рассматривается здесь как четная $=(x^2)^{\gamma/2}$ , следовательно $x^{\gamma+1}\psi(x)$ — нечетная, а производная нечетной функции — четная функция) гладкая и легко проверить, что $\psi_1 = O(x^{2m})$ , $x\to 0$ . Поэтому

$$\left|\xi^\alpha\,\partial_B^\beta\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}_n}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;B^k\psi_1\;x^\gamma\,dx\right| < \infty.$$

Воспользовавшись формулой Лейбница, так же как и в первом случае, получим

$$\left|\xi^{\alpha}\,\partial_B^{\beta}\,\mathcal{F}_B[\varphi](\xi)\right| \leqslant C\,|\langle\varphi\rangle|_{k_1}\,.$$

Доказательство закончено.

Результат применения оператора Бесселя $B_{\gamma_i}$ к функции четной по $i$-ой переменной снова функция четная по $i$-ой переменной (для всех $i=1,\ldots,n$). Далее функции четные по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$ будем называть просто четными.

Формула (1.2.2) показывает, что применение $\mathcal{F}_B$-преобразования к $\partial_B$-производным приведет к функциям с особенностью в начале координат и на весовых координатных гиперплоскостях. Естественно ввести класс функций, $\mathcal{F}_B$-преобразование которых равно нулю в начале координат и на весовых координатных гиперплоскостях вместе со всеми производными и $\partial_B$-производными. Такие классы основных функций для обслуживания преобразования Фурье вводились П.И. Лизоркиным. Для четного преобразования Фурье-Бесселя — Л.Н. Ляховым в [30]. Такие классы, следуя [30], вводятся следующим образом. Положим

$$\mathbf{\Psi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^+)=\{\psi:\ \psi\in S_{ev},\ \partial_{B_i}^{\beta}\psi(0)=0,\ \forall\beta\in Z^+\}\,,\ i=1,\ldots,n\,,\ \ n\leq N\,.$$

Тогда

$$\mathbf{\Phi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^+)=\{\varphi:\ \varphi=\mathcal{F}_B[\psi]\,,\ \psi\in\mathbf{\Psi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^+)\}\,,$$

**Теорема 1.2.2** *Класс* $\mathbf{\Phi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^+)$ *состоит из тех и только тех функций* $\varphi(x){\in}S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ *, которые ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам:*

$$\varphi(x){\in}S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)\,,\quad \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} x^m\varphi(x)\,(x')^{\gamma}\,dx'dx''{=}0,\qquad\Longleftrightarrow\qquad \varphi{\in}\mathbf{\Phi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^+),\qquad(1.2.6)$$

*Для четного преобразования Фурье-Бесселя [30] функции* $\varphi\in\mathbf{\Phi}_{\gamma}$ *ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам,* *четным по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_n$ .

$$\varphi(x) \in S_{ev}^{+}(\mathbb{R}_N^{+}), \quad \int\limits_{\mathbb{R}_N^{+}} (x')^{2m} \varphi(x)\, x^{\gamma}\, dx = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \mathbf{\Phi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^{+}), \qquad (1.2.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in \mathbf{\Phi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^{+})$ и $\psi = \mathcal{F}_B[\varphi]$ . Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^{+}} x^{\alpha}\, \varphi(x)\, x^{\gamma}\, dx = \frac{C(\gamma)}{C(\gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}_N^{+}} \Lambda_{\gamma}^{-}(x,0) x^{\alpha}\, \varphi(x)\, x^{\gamma}\, dx =$$

$$= C^{-1}(\gamma) \frac{1}{i^{\alpha}} \mathcal{F}_B^{-1}[x^{\alpha} \varphi(x)](\xi) \Big|_{\xi=0} = C^{-1}(\gamma) \frac{1}{i^{\alpha}} \partial_B^{\alpha} \psi(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0\,.$$

Ясно, что эти рассуждения, проведенные в обратном порядке, доказывают обратное утверждение. Доказательство (1.2.7) приведено в [30].

Доказательство закончено.

Интегралы вида $\int\limits_{\mathbb{R}_N^{+}} (x')^{\alpha}\, \varphi(x)\, (x')^{\gamma}\, dx$ называются весовыми моментами функции $\varphi(x)$ порядка $\alpha$ . Таким образом, пространство $\mathbf{\Phi}_{\gamma}(\mathbb{R}_N^{+})$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(x) \in S_{ev}^{+}(\mathbb{R}_N^{+})$ , для которых все весовые моменты равны нулю.

## 1.3 Символ линейного сингулярного дифференциального оператора $L(x, D_B)$ с $\partial_B$-оператором Бесселя

Оператор Бесселя возникает во многих задачах дифференциальных уравнений, порожденных симметриями. Но в ряде задач, например в задачах движения жидкостей, приходится исследовать такие задачи в купе с градиентами, включающие производные по направлению радиуса. Это непосредственно приводит к $\partial_B$ -производным.

Рассмотрим следующий сингулярный линейный дифференциальный оператор порядка $m$ с комплекснозначными коэффициентами

$$L(x, D_B) = \sum_{|\alpha| < m} a_{\alpha}(x)\ D_{B_x}^{\alpha} = \sum_{|\alpha| < m} a_{\alpha}(x) (\partial_{B_{x'}}^{\alpha'}, \partial_{x''}^{\alpha''}). \qquad (1.3.1)$$

При этом будем предполагать, что выполнено *условие одинаковой четности*, т.е. если $\alpha_i$ — четное число, то функция $a_\alpha(x_i, \mathbf{x^i})$ — четная по $x_i$ .

### 1.3.1 Символ $L(x, D_B)$

**Теорема 1.3.1** *Пусть функция* $\varphi \in S^+_{ev}(\mathbb{R}_n)$ *. Действие сингулярного дифференциального оператора* $L(x, D_B)\varphi(x)$ *в образах* $\mathcal{F}_B$ *-преобразования имеет вид*

$$L(x, D_B)\varphi(x) = \mathcal{F}_B[\, a(x, i\xi)\widehat{\varphi}\,](x), \tag{1.3.2}$$

*где* $a(x, i\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\ (i\xi)^\alpha$ .

Функцию $a(x, \xi)$ будем называть *символом* сингулярного дифференциального оператора $L(x, D_B)$ в образах $\mathcal{F}_B$ -преобразования.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $\varphi$ — четная, то $\mathcal{F}_B\varphi = \mathcal{F}_{B\,,\,ev}\varphi = \widehat{\varphi}$ тоже четная функция и для нее справедливо представление в виде интеграла Фурье по четным функциям Фурье-Бесселя

$$\varphi(x) = \mathcal{F}_B^{-1}\mathcal{F}_B[\,\varphi\,](x) = \mathcal{F}_{B,ev}^{-1}[\,\widehat{\varphi}\,](x) =$$

$$= C(N, \gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_N} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi')\, e^{i\langle x'',\ \xi''\rangle}\ \widehat{\varphi}(\xi)\ (\xi')^\gamma\, d\xi,$$

где $C(N, \gamma)$ — константа, нормирующая обратное преобразование Фурье-Бесселя, $\mathbf{j}_\gamma(x', \xi') = \prod\limits_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i\xi_i)$ . Следовательно

$$L(x, D_B)\varphi(x) = L(x, D_B)C(N, \gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_N} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi')\, e^{i\langle x'',\ \xi''\rangle}\ \widehat{\varphi}(\xi)\ (\xi')^\gamma\, d\xi =$$

$$= C(N, \gamma)\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)(\partial^{\alpha'}_{B_{x'}}\, \partial^{\alpha''}_{x''})\int\limits_{\mathbb{R}_N} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi')\, e^{i\langle x'',\ \xi''\rangle}\ \widehat{\varphi}(\xi)\ (\xi')^\gamma\, d\xi\,.$$

По определению обратного $\mathcal{F}_B$ -преобразования

$$\mathcal{F}_B^{-1}[\varphi](x) = \mathcal{F}_{B,ev}^{-1}[\varphi](x) = C(\gamma)\mathcal{F}_{B,ev}[\varphi](-x) = C(\gamma)\mathcal{F}_{B,ev}[\varphi](x', -x'').$$

Следовательно можем воспользоваться формулами (1.1.14)-(1.1.15). Имеем

$$L(x, D_B)\varphi(x) =$$

$$=C(N,\gamma) \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) \int\limits_{\mathbb{R}_N} \Lambda^-_\gamma(x',\xi')\, e^{i\langle x'',\ \xi''\rangle}\ (i\xi)^\alpha\ \widehat{\varphi}(\xi)\ (\xi')^\gamma\, d\xi=$$

$$= C(N,\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_N} \Lambda^-_\gamma(x',\xi')\, e^{i\langle x'',\ \xi''\rangle}\ a(x,i\xi)\ \widehat{\varphi}(\xi)\ (\xi')^\gamma\, d\xi\,,$$

где $a(x,i\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\ (i\xi)^\alpha$ . Тем самым формула (1.3.2) доказана.

### 1.3.2 Оператор $L^*(x;D_B)$, сопряженный оператору $L(x;D_B)$ и его символ

Скалярное произведение функций задается весовой линейной формой

$$(u\ v)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N} u(x)\ \overline{v(x)}\ (x')^\gamma\, dx.$$

Пусть $A$ и $A^*$ — операторы, действующие в пространстве $S_{ev}$ . Оператор $A^*$ называется формально[3] сопряженным к оператору $A$ , если

$$(Au,v)_\gamma = (u,A^*v)_\gamma \qquad (u,\ v\in S_{ev}(\mathbb{R}_N))\,. \tag{1.3.3}$$

Вначале найдем вид оператора $L^*(x;D_B)$ сопряженного к $L(x;D_B)$ , а затем выражение сопряженного оператора в образах $\mathcal{F}_B$ -преобразования.

Выделим переменную $x_j$ и положим $x=(x_j\,,\,\mathbf{x^j})$ , $j=\overline{1,n}$ . Рассмотрим дифференцирование по переменной $j\leqslant n$ . Вначале предположим, что это оператор четного порядка ( $\alpha_j=2k$ ). Имеем

$$(a_\alpha(x)D^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}}u\,,\,v)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N} a_\alpha(x_i,\mathbf{x^i})B^k_{\gamma_i}u(x_i,\mathbf{x^i})\ \overline{v(x_i,\mathbf{x^i})}\ (x')^\gamma\, dx =$$

$$= 2\int\limits_{\mathbb{R}_{N-1}}\ \int\limits_0^\infty a_\alpha(x_i,\mathbf{x^i})B^k_{\gamma_i}u(x_i,\mathbf{x^i})\ \overline{v(x_i,\mathbf{x^i})}\ x_i^{\gamma_i}\, dx_i\ (\mathbf{x^i}')^{\gamma^\mathbf{i}}\, d\mathbf{x^i}, \tag{1.3.4}$$

[3] Слово формально здесь подчеркивает то обстоятельство, что операторы $A$ и $A^*$ не рассматриваются, как операторы в $L_2^\gamma$ (ограниченные или неограниченные).

где $(\mathbf{x^{i}}')^{\gamma^{\mathbf{i}}} = \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^{\gamma_j}$ . Нам достаточно рассмотреть только внутренний интеграл. Используя дивергентную форму оператора Бесселя

$$B_{\gamma_i} = x_i^{-\gamma_i} \partial x_i x_i^{\gamma_i} \partial x_i$$

этот интеграл преобразуем следующим образом

$$I_1(\mathbf{x^i}) = \int\limits_0^\infty a_\alpha(x_i, \mathbf{x^i}) B_{\gamma_i}^k u(x_i, \mathbf{x^i}) \, \overline{v(x_i, \mathbf{x^i})} \, x_i^{\gamma_i} \, dx_i =$$

$$= \int\limits_0^\infty a_\alpha(x) \, x_i^{-\gamma_i} \partial_{x_i} x_i^{\gamma_i} \partial_{x_i} \, B_{\gamma_i}^{(k-1)} u(x) \, \overline{v(x)} \, x_i^{\gamma_i} \, dx_i =$$

$$= \int\limits_0^\infty a_\alpha(x) \, \partial_{x_i} \, x_i^{\gamma_i} \partial_{x_i} \, B_{\gamma_i}^{(k-1)} u(x) \, \overline{v(x)} \, dx_i.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I(\mathbf{x^i}) = \, a_\alpha(x) \, x_i^{\gamma_i} \partial_{x_i} \, B_{\gamma_i}^{(k-1)} \, u(x) \, \overline{v(x)} \Big|_{x_i=0}^{x_i=\infty} -$$

$$- \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} [\overline{\overline{a_\alpha(x)} \; v(x)}] \; x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \, B_{\gamma_i}^{(k-1)} \overline{v(x)} \; dx_i. \tag{1.3.5}$$

Рассмотрим полученный внеинтегральный член. Нас интересуют условия, при которых он будет равен нулю. Как видим, если функция $u(x_i, \mathbf{x^i})$ — четная по $x_i$ , то

$$B_{\gamma_i} u(x) \Big|_{x_j=0} = (\gamma+1) \, u''_{x_j}(0, \mathbf{x^i})$$

и тогда

$$B_{\gamma_i}^k u(x) \Big|_{x_j=0} = (\gamma+1)^k \, u_{x_j}^{2k''}(0, \mathbf{x^i})$$

т.е. соответствующая степень ее $B$ -производной от функции $u$ ограничена в нуле. Таким образом достаточно предположить, что входящие во внеинтегральный член выражения (1.3.5) функция четная и ограниченная, и тогда этот член равен нулю. Следовательно

$$I(\mathbf{x^i}) = - \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} [\overline{\overline{a_\alpha(x)} \; v(x)}] \; x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \, B_{\gamma_i}^{(k-1)} \, u(x) \; dx_i.$$

Снова интегрируем по частям. При этом предполагаем, что выполнены все установленные выше условия четности. Тогда снова внеинтегральный член исчезнет и мы имеем следующий результат

$$I(\mathbf{x^i})=\int\limits_0^\infty B_{\gamma_i}[\overline{\overline{a_\alpha(x)}\ v(x)}]\ B_{\gamma_i}^{(k-1)}u(x)\ x_i^{\gamma_i}\,dx_i.$$

Повторяя этот процесс $k-1$ раз, получим

$$I(\mathbf{x^i})=\int\limits_0^\infty B_{\gamma_i}^{(k-1)}[\overline{\overline{a_\alpha(x)}\ v(x)}]\ u(x)\ x_i^{\gamma_i}\,dx_i.$$

Теперь вернемся к равенству (1.3.6). Подставляя в него найденный нами внутренний интеграл, приходим к формуле

$$\Big(a_\alpha(x)B_{\gamma_i}^k u\,,v\Big)_\gamma=\Big(u\,,B_{\gamma_i}^k[\ \overline{a_\alpha(x)}\ \ v\,]\Big)_\gamma\ . \tag{1.3.6}$$

Рассмотрим $\partial_B$-производную нечетного порядка, входящую в оператор $L(x,D_B)$. Как и раньше, выделим переменную $x_i$, положив $x=(x_i\,,\mathbf{x^i})$, $i=\overline{1,n}$. Пусть $\alpha_i=2k+1$ — нечетное натуральное число, коэффициент $a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x_i,\mathbf{x^i})$ — нечетная функция по переменной $x_i$ (это условие одинаковой четности) и одна из нечетных составляющих оператора $L(x,D_B)$ задана выражением

$$a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x_i,\mathbf{x^i})\ \partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i}=a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x_i,\mathbf{x^i})\ \partial_{x_i}B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}.$$

Имеем

$$\Big(a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x)\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i}u\,,\,v\Big)_\gamma=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_N}a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x)\ \partial_{x_i}B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}u(x_i,\mathbf{x^i})\ \overline{v(x_i,\mathbf{x^i})}\ (x')^\gamma\,dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_{N-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x_i,\mathbf{x^i})\,\partial_{x_i}B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}u(x_i,\mathbf{x^i})\,\cdot$$

$$\cdot\ \overline{v(x_i,\mathbf{x^i})}\ (x_i^2)^{\gamma_i/2}\,dx_i\ (\mathbf{x^i}')^{\gamma^\mathbf{i}}\,d\mathbf{x^i}.$$

Нетрудно видеть, что под внутренним интегралом по переменной $x_i$ находится четная функция (от нечетной функции он бы равнялся нулю). Поэтому

$$(u, a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x) D^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}} v)_\gamma =$$

$$= 2 \int\limits_{\mathbb{R}_{N-1}} \int\limits_0^\infty a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i, \mathbf{x^i}) \partial_{x_i} B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i} u(x_i, \mathbf{x^i})\ \overline{v(x_i, \mathbf{x^i})}\ x_i^{\gamma_i}\, dx_i\ (\mathbf{x^{i}}')^{\gamma^{\mathbf{i}}}\, d\mathbf{x^i}\,. \tag{1.3.7}$$

Здесь рассмотрим внутренний интеграл. Имеем

$$I_2(\mathbf{x^i}) = \int\limits_0^\infty a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i, \mathbf{x^i}) \partial_{x_i} B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i} u(x_i, \mathbf{x^i})\ \overline{v(x_i, \mathbf{x^i})}\ x_i^{\gamma_i}\, dx_i =$$

$$= \int\limits_0^\infty\ \partial_{x_i} B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i} u(x_i, \mathbf{x^i})\ \overline{\overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i, \mathbf{x^i})}\ v(x_i, \mathbf{x^i})}\ x_i^{\gamma_i}\, dx_i\,.$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим

$$I_2(\mathbf{x^i}) = a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i, \mathbf{x^i})\ B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i} u(x_i, \mathbf{x^i})\ \overline{v(x_i, \mathbf{x^i})}\ x_i^{\gamma_i}\Big|_{x_i=0}^{x_i=\infty} -$$

$$- \int\limits_0^\infty B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i} u(x_i, \mathbf{x^i})\ \partial_{x_i} \left( x_i^{\gamma_i} \overline{\overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i, \mathbf{x^i})}\ v(x_i, \mathbf{x^i})} \right)\ dx_i. \tag{1.3.8}$$

Выражение $B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i} u(x_i, \mathbf{x^i})$, входящее в внеинтегральный член (1.3.8) ограничено в точке $x_i = 0$. Поэтому он (внеинтегральный член) равен нулю.

Но важно отметить, следующее. Оператор Бесселя является самосопряженным только при наличии веса в соответствующем интегральном выражении. Поэтому в (1.3.7) нельзя воспользоваться свойством самосопряженности непосредственно. Конечно вес можно легко вернуть на свое место. Выясним какие условия при этом должны быть выполнены. Имеем

$$I_2(\mathbf{x^i}) = -\int\limits_0^\infty B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i} u(x_i, \mathbf{x^i}) \cdot \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \cdot \partial_{x_i} \left( x_i^{\gamma_i} \overline{\overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i, \mathbf{x^i})}\ v(x_i, \mathbf{x^i})} \right)\ x_i^{\gamma_i}\, dx_i.$$

Напомним, что $x_i^{\gamma_i} = (x_i^2)^{\gamma_i/2}$ — четная функция.

**Замечание 1.3.1** *Здесь функция* $\overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i,\mathbf{x^i})}$ *непрерывна и являясь нечетной необходимо равна нулю при* $x_i=0$ *. Но ее производная уже не обязана обладать таким свойством. Поэтому подинтегральная функция*

$$\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\partial_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\ \overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i,\mathbf{x^i})}\ v(x_i,\mathbf{x^i})\right)$$

*может иметь особенность. Чтобы дальнейшее интегрирование по частям было законно мы должны предположить, что или*

*1) функция* $a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x)$ *и ее производные равны нулю при* $x_i=0$ *или*

*2) основная функция* $v$ *и все ее производные вырождаются на гиперплоскости* $x_i=0$ *.*

*Основные функции, удовлетворяющие условию 2) используются при построении основного класса функций типа класса П.И. Лизоркина, см. [30], стр. 67, обозначения (2.3.9-2.3.10).*

Оператор Бесселя используем в виде $B_{\gamma_i}=x_i^{-\gamma_i}\partial x_i x_i^{\gamma_i}\partial x_i$ Следующее интегрирование по частям приводит к выражению

$$I_2(\mathbf{x^i}){=}-\int\limits_0^\infty B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}u(x_i,\mathbf{x^i})\cdot\frac{1}{x_j^{\gamma_i}}\cdot\partial_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\overline{\overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i,\mathbf{x^i})}\,v(x_i,\mathbf{x^i})}\right)x_i^{\gamma_i}\,dx_i{=}$$

$$=x_i^{\gamma_i}\partial_{x_i}B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-3)/2}u(x_i,\mathbf{x^i})\ \cdot\ \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\ \cdot\partial_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\overline{\overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i,\mathbf{x^i})}\ v(x_i,\mathbf{x^i})}\right)\Bigg|_{x_i=0}^{x_i=\infty}+$$

$$+\int\limits_0^\infty\partial_{x_i}B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-3)/2}u(x_i,\mathbf{x^i})\cdot\partial_{x_i}\left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\cdot\partial_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\overline{\overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i,\mathbf{x^i})}v(x_i,\mathbf{x^i})}\right)\right)x_i^{\gamma_i}dx_i.$$

Как видим, выполнение условий 1) или 2) приведет к исчезновению внеинтегрального члена для всех $\gamma_i>0$ :

$$\partial_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\ \overline{a_{\alpha_i,\alpha^{\mathbf{i}}}(x_i,\mathbf{x^i})}\ u(x_i,\mathbf{x^i})\right)B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-3)/2}\overline{v(x_i,\mathbf{x^i})}\Big|_{x_i=0}=0.$$

Теперь ясно, что при выполнении условия 1) или 2) можно воспользоваться самосопряженностью оператора Бесселя. Поэтому, возвращаясь к (1.3.7) и предполагая выполненным хотя бы одно из этих условий, получаем

$$I_2(\mathbf{x^i}) = -\int\limits_0^\infty u(x_i, \mathbf{x^i}) \, \cdot \, B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2} \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \, \partial_{x_i} \, \left( x_i^{\gamma_i} \overline{\overline{a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x_i, \mathbf{x^i})} \; v(x_i, \mathbf{x^i})} \right) \right) x_i^{\gamma_i} \; dx_i. \quad (1.3.9)$$

Таким образом, нечетная составляющая оператора $L(x; D_B)$ имеет следующее сопряжение оператору $\partial_{x_i}^{\alpha_i}$ (в весовом скалярном произведении) при нечетном $\alpha_i$

$$(\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^* \; (\cdot) = -B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2} \left( \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \partial_{x_i} \left( x_i^{\gamma_i} \; \overline{a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x_i, \mathbf{x^i})} \; \cdot \right) \right).$$

Для $\alpha_i = 1$ подобная формула изучалась в [39].

Возвращаясь теперь к формуле (1.3.6), получаем

$$(a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x) \partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i} u \, , \, v)_\gamma = \left( u \, , \, -B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2} \left( \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \partial_{x_i} \left( x_i^{\gamma_i} \; \overline{a_\alpha(x_i, \mathbf{x^i})} \; v \right) \right) \right)_\gamma .$$

Объединяя этот результат с "четной" формулой (1.3.4), находим, что оператор $L^*(x; D_B)$, сопряженный оператору $L(x; D_B)$ имеет вид

$$L^*(x; D_B) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} (\partial_{B_\gamma}^{\alpha'})^*_{x'} \partial_{x''}^{\alpha''} \left( a_{\alpha_i,\alpha^\mathbf{i}}(x) \; \cdot \; \right) , \quad (1.3.10)$$

где

$$(\partial_{B_\gamma}^{\alpha'})^*_{x'} = \prod_{i=1}^n (D_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^*_{x_i},$$

$$(\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^*_{x_i} = \begin{cases} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i = 2k, \\ -B_{\gamma_i}^{(\alpha_i)/2} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k+1, \end{cases} ,$$

$$B_{\gamma_i} = \frac{d^2}{dx_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \; \frac{d}{dx_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$k = 0, 1, 2, \, \ldots, \quad D_{x_i} = \frac{d}{dx_i}, \quad i = n+1, \; \ldots \; N.$$

Ясно, что дифференцирование произведения $a(x) \; u(x)$ по переменной $x_i$ в образах $\mathcal{F}_B^i$ -преобразования примет вид

$$(\partial_B^*)_{x'}^{\alpha'} \, \partial_{x''}^{\alpha''} [\, a(x) \, u(x) \,] = \mathcal{F}_B^{-1} \mathcal{F}_B [(-i\xi)^\alpha \; a(x) u(x)]. \quad (1.3.11)$$

**Правило действия $\mathcal{F}_B$ -преобразования от многочлена.** *Здесь, если функция $a(x_i, \mathbf{x}^i)$ — четная по переменной $x_i$, то в (1.3.11) по этому направлению применяется только четное (прямое и обратное) $\mathcal{F}^i_{B,ev}$ -преобразование, поскольку интеграл от нечетной функции, понимаемый в смысле главного значения, необходимо равен нулю.*

*Наоборот, если функция $a(x_i, \mathbf{x}^i)$ — нечетная по переменной $x_i$, то в (1.3.11) по этому направлению вначале применяется только нечетное $\mathcal{F}_B$ -преобразование, по той же причине — применение четного $\mathcal{F}_{B,ev}$ -преобразования приведет к несобственному интегралу от нечетной функции, а такой интеграл, понимаемый в смысле главного значения, необходимо равен нулю. Интерес представляет избирательность действия $\mathcal{F}_B$ -преобразования — сначала оно воспроизводит действие только первой производной, делая из нечетной функции четную, затем, уже на четную функцию действуют (четные) $B$ -производные. И этот порядок порождает порядок действия $\mathcal{F}_B$ -преобразований по этому направлению — сначала действуют нечетные $\mathcal{F}_{B,od}$ -преобразования, переводя нечетную функцию в четную, затем снова четные $\mathcal{F}_{B,ev}$ -преобразования. Другой порядок действия привел бы к аннигиляции всей конструкции, т.к. содержал бы интегралы по всей оси от нечетных функций.*

Теперь, согласно (1.3.11), можем записать действие оператора $L^*(x; D_B)$ в виде

$$L^*(x; D_B) = \mathcal{F}_B^{-1}\, \mathcal{F}_B[a^*(x, -i\xi)\, u(x)]\,. \tag{1.3.12}$$

Отметим так же, что это выражение можно было бы получить меняя порядок интегрирования в выражении $(L(x, D_B)\, u\,,\, v)_\gamma$ , именно

$$(Lu, v)_\gamma = C_\gamma \left( \int\limits_\xi \Lambda^-(x', \xi') e^{i\langle x'', \xi''\rangle} a(x, \xi) \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_y \Lambda^+(y', \xi') e^{-i\langle y', \xi''\rangle} u(y) (y')^\gamma dy (\xi')^\gamma d\xi, v \right)_\gamma =$$

$$= C_\gamma \int\limits_y u(y)\,(y')^\gamma\,dy \int\limits_\xi \int\limits_x \Lambda^{-1}(x'\xi')\Lambda^+(y',\xi')e^{-i\langle y''-x'',\xi''\rangle} \times$$

$$\times\ a(x,\xi)\overline{v(x)}(x')^\gamma dx(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_\gamma \int\limits_y u(y)(y')^\gamma\ dy\ \times$$

$$\times \int\limits_\xi \int\limits_x \overline{\Lambda^+(x'\xi')\Lambda^-(y',\xi')e^{i\langle y''-x'',\xi''\rangle}\overline{a(x,\xi)}v(x)}(x')^\gamma dx(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Следовательно

$$L^*v = \int\int \Lambda^+(x'\xi')\Lambda^-(y',\xi')e^{i\langle y''-x'',\,\xi''\rangle}\overline{a(x,\xi)}\cdot v(x)(x')^\gamma dx(\xi')^\gamma d\xi, \quad (1.3.13)$$

что подтверждает формулу (1.3.12).

# Глава 2

# Многомерные сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова-Катрахова

## 2.1 Весовые классы функций Соболева-Киприянова $H_\gamma^m$, порожденные $\mathcal{F}_B$-преобразованием

Условие четности функций в $\mathbb{R}_N$ приводит к симметричной относительно гиперплоскостей $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, x_n$ области их определения. Для таких областей используем обозначение $\Omega_s$ (область симметричная относительно весовых координатных гиперплоскостей).

Через $D_{ev}(\Omega_s)$ будем обозначать подпространство основного пространства $D(\Omega_s)$, состоящее из четных функций и через $D_{ev^+}(\Omega_s)$ — функций вида (1.2.1).

Весовое скалярное произведение функций

$$(u\,,\,v)_\gamma=\int\limits_{\Omega_s}u(x)\;\overline{v(x)}\;(x')^\gamma\,dx \tag{2.1.1}$$

порождает норму

$$\|u\|_{L_2^\gamma}=\int\limits_{\Omega_s}|u(x)|^2\,(x')^\gamma\,dx<\infty$$

и пространство $L_2^\gamma=L_2^\gamma(\Omega_s)$ функций $u$ для которых $\|u\|_{L_2^\gamma}<\infty$. Хорошо известно, что множество четных функций с конечной $L_2^\gamma$-нормой — гильбертово пространство со скалярным произведением (2.1.1). По замечанию 1.3.2 это свойство легко переносится на произвольные интегрируемые с весом $(x')^\gamma$ функции, поскольку интеграл по области $\Omega_s$, учитывая ее симметрию, всегда представляется в виде суммы интегралов по областям $\Omega^+,\ (x_i>0)$ и $\Omega^-,\ (x_i<0)$, в каждой из которых интегрируемая функция может быть представлена в виде четной по соответствующим переменным и, при этом, $\Omega_s=\Omega^+\cup\Omega^-$.

Пусть $m$ — натуральное число и $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ — целочисленный мультииндекс. Пространством Соболева-Киприянова будем называть следующий класс функций

$$H_\gamma^m(\Omega)=\{u\,:\;D_B^\alpha u\in L_2^\gamma(\Omega_s)\,,\forall\alpha,\ |\alpha|\leqslant m\}\,,\quad|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n\,, \tag{2.1.2}$$

где $D_B^\alpha$ — сингулярный дифференциальный оператор (1.1.4). Норма элементов $u\in H_\gamma^m(\Omega_s)$ определяется равенством

$$|||u|||_{H_\gamma^m(\Omega_s)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\;\int\limits_{\Omega_s}|D_B^\alpha u(x)|^2\;(x')^\gamma\;dx\right)^{1/2}. \tag{2.1.3}$$

Здесь $D_B$ производные берутся в смысле весовых обобщенных функций. Сопряженная $D_B$-производная вводится по формулам:

— при четном $\alpha_i$

$$(D_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^* = B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2};$$

— при нечетном $\alpha_i$

$$(D_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^* = -B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}\left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}} D_{x_i}\left(x_i^{\gamma_i}\ \cdot\right)\right).$$

Если сопряженная $D_B^*$ -производная нечетного порядка применяется к функции $\varphi = \partial_{x_i}\psi_{ev}(x),\ i = 1,\ldots,n$ , то

$$(D_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^*\varphi(x) = -B_{\gamma_i}^{(\alpha_i+1)/2}\psi(x).$$

В $H_\gamma^m(\Omega_s)$ можно ввести скалярное произведение

$$(u,v)_\gamma = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{\Omega_s} D_B^\alpha u(x)\ D_B^\alpha v(x)\ x^\gamma\ dx. \tag{2.1.4}$$

**Лемма 2.1.1** *Пространство $H_\gamma^m(\Omega_s)$ , со скалярным произведением (2.1.4) является гильбертовым относительно нормы (2.1.3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы исходим из того известного факта, что весовое пространство $L_2^\gamma(\Omega_s)$ — полное. Пусть $u_k$ последовательность, фундаментальная относительно нормы (2.1.3). Но тогда, для каждого $\alpha$ последовательность $D_B^\alpha u_k$ — фундаментальная в $L_2^\gamma(\Omega_s)$ для всех $\alpha$ , $|\alpha|\leqslant m$ . И ввиду полноты $L_2^\gamma$ имеем $D_B^\alpha u_k \to v_\alpha\ \forall\alpha$ , $|\alpha|\leqslant m$ . Положим $v_0 = u$ ; т.к. $u_k\to u$ по норме $L_2^\gamma$ , то, в частности, $u_k\to u$ в смысле сходимости в $D'_{ev+}(\Omega_s)$ и т.к. $D_B$ -дифференцирование есть непрерывная операция в пространстве обобщенных функций $D'_{ev+}(\Omega_s)$ , то $D_B^\alpha u_k \to D_B^\alpha u$ в $D'_{ev+}(\Omega_s)$ , следовательно $v_\alpha = D_B^\alpha u \in L_2^\gamma(\Omega_s)$ , но тогда и $u\in H_\gamma^m(\Omega_s)$ .

Доказательство закончено. Отметим справедливость вложений

$$H_\gamma^{m_1}(\Omega_s)\subset H_\gamma^{m_2}(\Omega_s)\subset L_2^\gamma(\Omega_s) = H_\gamma^0(\Omega_s).$$

при условии, что $m_1 > m_2 > 0$ .

Теперь рассмотрим случай, когда $\Omega_s = \mathbb{R}_N$ . В этом случае в качестве основного пространства удобнее использовать соответствующее подпространство Л. Шварца быстро убывающих функций. Пусть $S_{ev}^+ = S_{ev}^+(\mathbb{R}_N)$

подпространство пространства Шварца $S(\mathbb{R}_N)$, состоящее из функций четных по каждой из переменных $x_1, \dots, x_n$ и пусть $S_{ev}^{+} = S_{ev}^{+}(\mathbb{R}_N)$ множество функций вида (1.2.1).

Пространство $S_{ev}^{+}$, снабженное системой полунорм

$$|\langle u\rangle|_{\alpha,\beta} = \left\| x^{\alpha}\, D_B^{\beta} u \right\|_{L_2^{\gamma}}$$

является пространством Фреше и для любого его элемента выполняются равенства (1.1.14) и (1.1.15). Отсюда легко получить, что $\mathcal{F}_B$-преобразование осуществляет изоморфизм пространства $S_{ev}^{+}$ на себя.

Пространство $S'_{ev}$ определим как двойственное к $S_{ev}$, снабженное сильной двойственной топологией. Для $u \in S'_{ev}$ прямое и обратное $\mathcal{F}_B$-преобразование определим по формулам

$$(\mathcal{F}_B^{\pm}[u]\,,\,\varphi)_{\gamma} = (u\,,\,\mathcal{F}_B^{\pm}[\varphi]\,)_{\gamma}$$

Для любого вещественного числа $s$ через $H_{\gamma}^{s} = W_{2,\gamma}^{s}(\mathbb{R}_N)$ будем обозначать пополнение пространства $S_{ev}$ по норме

$$\|f\|_{H_{\gamma}^{s}}^{2} = \int\limits_{\mathbb{R}_N} (1+|\xi|^2)^{s}\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, (\xi')^{\gamma}\, d\xi. \tag{2.1.5}$$

**Теорема 2.1.1** *Пространство $H_{\gamma}^{m}(\mathbb{R}_N)$ можно определить либо с помощью соотношения (2.1.2), либо с посредством равенства*

$$H_{\gamma}^{m}(\mathbb{R}_N) = \left\{ u\, :\, u \in S'_{ev}\,,\;\; (1+|\xi|^2)^{m/2}\;\, \widehat{u} \in L_2^{\gamma}(\mathbb{R}_N) \right\},$$

*при этом норма (2.1.5) эквивалентна норме (2.1.3), т.е.*

$$C_1 \|u\|_{H_{\gamma}^{m}(\mathbb{R}_N)} \leqslant |||u|||_{H_{\gamma}^{m}(\mathbb{R}_N)} \leqslant C_2 \|u\|_{H_{\gamma}^{m}(\mathbb{R}_N)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно равенству Парсеваля (1.1.11), имеем

$$\|D_B^{\alpha} u\|_{L_2^{\gamma}(\mathbb{R}_N)} = \|\mathcal{F}_B[D_B^{\alpha} u]\|_{L_2^{\gamma}(\mathbb{R}_N)}\,.$$

Применяя здесь в выражении справа формулу (1.1.14), получим

$$\|D_B^{\alpha} u\|_{L_2^{\gamma}(\mathbb{R}_N)} = \|(i\xi)^{\alpha}\;\widehat{u}\;\|_{L_2^{\gamma}(\mathbb{R}_N)}\,.$$

Таким образом в рамках $\mathcal{F}_B$ -преобразования имеем следующее представление нормы (2.1.3)

$$|||u|||_{H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)} = \int\limits_{\mathbb{R}_N} \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} \xi^{2\alpha} \right) |\widehat{u}(\xi)|^2 \; \xi^\gamma \, d\xi \,.$$

Теперь воспользуемся элементарным неравенством

$$C\,(1+|\xi|^2)^m \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \xi^{2\alpha} \leqslant (1+|\xi|^2)^m$$

с соответствующей константой $C$. Тогда, исходя из определения нормы (2.1.3), получим неравенство

$$C\;\|u\|_{H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)} \leqslant |||u|||_{H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)} \leqslant \|u\|_{H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)}\,,$$

что доказывает эквивалентность норм (2.1.3) и (2.1.5).

Доказательство закончено.

## 2.2 $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова с символами из $\Xi_q^m$

Впервые подобные символы и операторы рассматривались в работах [22], [27], [28], [29] для четного преобразования Фурье-Бесселя. Для преобразования Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова в [9]. Здесь обобщаются некоторые результаты исследований с.п.д. операторов, полученных И. А. Киприяновым, В. В. Катраховым, Л. Н. Ляховым.

### 2.2.1 Класс символов $\Xi_q^m$

Введем *класс символов* $\Xi_q^m$, состоящий из функций $a(x;\xi)$, бесконечно дифференцируемых по $x$, определенных при всех $x$ и $\xi$, $\xi \neq 0$, удовлетворяющих оценке $|a(x;\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2}$ равномерно по $x$ и следующим условиям:

для любого фиксированного $x$ функция $a(x;\xi)$ по $\xi$ принадлежит пространству $H^q_\gamma(S_1(N))$ см. [13]), где $S_1(N)$ — единичная сфера $|\xi|=1,\ q>\frac{N+|\gamma|}{2}+1$, при этом

$$\max_{x\in\mathbb{R}_N}\|a(x;\cdot)\|_{H^q_\gamma(S_1(N))}<\infty;$$

на сфере $S_1(N)$ функция $a(x;\xi)$ имеет предел $a(\xi)$, когда $x\to\infty$, такой, что функция

$$a_*(x;\xi)=a(x;\xi)-a_\infty(\xi) \tag{2.2.1}$$

и ее производная по $\xi$, как функции $x$ принадлежит пространству $S^+_{ev}(\mathbb{R}_N)$ равномерно по $\xi$.

Кроме того, выполняется условие "одинаковой четности" по каждой паре переменных $(x_i,\xi_i),\ i=1,\ldots,n$: функция $a(x;\xi)$

или (i) четная и тогда $\partial^k_{x_i}a(x;\xi)\big|_{x_i=0}=0$, $k\geqslant 1;$

или (ii) нечетная и тогда $\partial^k_{x_i}a(x,\xi)\big|_{x_i=0}=0$, $k\geqslant 0.$

**Замечание 2.2.1** *Условия четности и нечетности в (i) и (ii) по смыслу рассматриваемых в работе задач порождены условием "одинаковой четности"(1.2.5) в системе норм (1.2.4).*

Еще одна особенность рассматриваемых символов заключается в условии принадлежности функциональному классу $H^q_\gamma(S_1(N))$. Известно (и это просто показать), что если $u\in H^q_\gamma(\mathbb{R}_N)$ при $q>\frac{N+|\gamma|}{2}$, то $u$ — непрерывная функция. Сфера $S_1(N)$ представляет собой многообразие размерности $N-1$, поэтому требование $q>\frac{N+|\gamma|}{2}+k$ приведет к тому, что пространство окажется вложенным в пространство $k$-раз непрерывно дифференцируемых функций. Именно, имеет место теорема.

**Теорема 2.2.1** *При $s>\frac{n+|\gamma|}{2}+k$, где $k$ — целое положительное число, пространство $H^s_\gamma$ непрерывно вложено в пространство $C^k_B$ функций непрерывных вместе с $D^\alpha_B$-производными порядка $|\alpha|<k$.*

В этой теореме вложение подразумевается алгебраическое и топологическое. Далее нас интересует лишь алгебраическое вложение. Доказательство этой теоремы опирается на хорошо известный факт, что преобразование Фурье-Бесселя и $\mathcal{F}_B$ -преобразования функций из пространства Лебега $L^\gamma$ есть непрерывная функция (для классического преобразования Фурье этот факт описан в ([2]), для преобразования Фурье-Бесселя в [7], для $\mathcal{F}_B$ -преобразования в [39]). Доказательство же того, что $\xi^\alpha \widehat{u} \in L_1^\gamma$ , при условии, что $u \in H_\gamma^s$ при $s > \frac{n+|\gamma|}{2} + k$ , стандартно и не представляет большой сложности, поэтому мы его не приводим (см. также исследования И.А.Киприянова и Б.М.Богачова [13], [14]).

Классические символы (т.е. для п.д.операторов, построенных на базе преобразования Фурье) такого рода изучались М.С. Анрановичем в работе [1]. Он показал, что если такой символ непрерывно дифференцируем по переменной $\xi_i$ до порядка $m+1$ , то «допустимый» символ представляет собой полином на границе $x_N = 0$ полупространства. И наоборот, класс допустимых символов, принадлежащих по переменным $\xi$ $H_q(S_1)$ достаточно широк и позволяет в коэффициенты оператора включить сингулярные интегралы (типа СИ Михлина, Кальдерона-Зигмунда). Ясно, что тоже самое справедливо для символов из $\Xi_q^m$ .

Для дальнейших целей достаточно рассмотреть $k = 1$ , что отражено в определении класса символов (и операторов) $\Xi_q^m$ .

### 2.2.2 Класс сингулярных псевдодифференциальных операторов $\Xi_q^m$

**Определение 2.2.1** *Сингулярным псевдодифференциальным оператором Киприянова-Катрахова (далее, наряду с этим названием, используем сокращение — $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор) $A = a(x; D_B)$ с символом $a(x;\xi)$ назовем оператор, действующий на функции класса $S_{ev}^+(\mathbb{R}_N)$ по формуле*

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \Lambda_\gamma^+(x,\xi)\ a(x;\xi)u(x)(x')^\gamma dx, \tag{2.2.2}$$

*где под* $(x')^\gamma$ *понимается функция* $(x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\gamma/2}$ *— четная по каждому из своих аргументов* $x_1, \ldots, x_n$ .

Часто используем символическую запись формулы (2.2.2):

$$Au(x) = \mathcal{F}_B^{-1}[\mathcal{F}_B[a(x;\xi)]u(x)]] \,.$$

Класс этих операторов с символами из $\Xi_q^m$ будем обозначать также, как класс символов: $\Xi_q^m$ .

Если $a(x,\xi) = \sum\limits_{|k|=m} a_k(x)\xi^k,$ то этот оператор представляет собой линейный сингулярный дифференциальный оператор $L^*(x;D_B)$ , см. формулы (1.3.12) и (1.3.13).

В равной степени полезным является $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор заданный в виде

$$\mathcal{A}u(x) = \mathcal{F}_B^{-1}\ [a(x;\xi)\ \mathcal{F}_B[u](\xi)]\,(x) \tag{2.2.3}$$

см. (1.3.1) и (1.3.2).

Отметим, что $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.операторы порядка ноль исследованы в [17], [18], [19], [30] и представляют собой сингулярные интегралы, порожденные обобщенным сдвигом, которые построены по классическим схемам СИ операторов Михлина [37] Кальдерона-Зигмунда [6] (см. также [45]).

Одномерные $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. операторы типа (2.2.2) и (2.2.3) изучены в работе И.А.Киприянова и В.В.Катрахова в [15].

**Лемма 2.2.1**. *Пусть* ${}^t A$ *оператор сопряженный* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д.оператору* $A$ *в смысле весового скалярного произведения функций. Тогда* $\mathcal{A} = {}^t\overline{A}$ *, где* $\overline{A}$ *—* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д.о. с комплексно сопряженным символом* $\overline{a(x;\xi)}$ .

Действительно

$$(Au,v)_\gamma = \int Au(x)\overline{v(x)}(x')^\gamma dx = \int \mathcal{F}_B^{-1}\left[\mathcal{F}_B[a(x;\xi)u(x)]\right]\overline{v(x)}(x')^\gamma dx$$

$$= \int \mathcal{F}_B[a(x;\xi)u(x)](\xi)\,\mathcal{F}_B^{-1}[\overline{v}](\xi)(\xi')^\gamma d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}_{N,\xi}} \mathcal{F}_B[a(x;\xi)u(x)](\xi)C(N,\gamma)\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_{N,\,x}} \prod_{i=1}^{n} \overline{\left[j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_i\,\xi_i) - i\frac{x_i\,\xi_i}{\gamma+1} j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x_i\,\xi_i)\right] \cdot e^{-i\langle x'',\xi''\rangle} v(x)}(x')^\gamma dx(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_{N,\xi}} \mathcal{F}_B[a(x;\xi)u(x)](\xi)C(N,\gamma)\,\overline{\mathcal{F}_B[v]}(\xi)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_{N,\xi}} \int\limits_{\mathbb{R}_{N,x}} \Lambda^+(x',\xi')e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}\, a(x;\xi)\, u(x)(x')^\gamma dx\, C(N,\gamma)\overline{\widehat{v}(\xi)}(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_{N,\,x}} u(x)(x')^\gamma dx \overline{\int\limits_{\mathbb{R}_{N,\,\xi}} \Lambda^-(x',\xi')e^{i\langle x'',\xi''\rangle}\,\overline{a(x;\xi)}\,\widehat{v}(\xi)(\xi')^\gamma d\xi} = (u,\, {}^t\!Av)\,.$$

Откуда следует равенство ${}^t\!A = \overline{\mathcal{A}}$ и, следовательно, утверждение леммы.

Отметим также, что в случае действительного символа $a(x;\xi)$ операторы ${}^t\!A$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

## 2.3 Порядок $\mathcal{F}_B$-сингулярного псевдодифференциального оператора в шкале пространств $H^s_\gamma$

Введем следующее определение. Будем говорить, что линейный оператор $A : S_{ev} \to S_{ev}$ имеет порядок равный $m$, если для любого вещественного числа $s$ найдется константа $C_s$ такая, что

$$\|Af\|_{H^s_\gamma(\mathbb{R}^+_N)} \leqslant C_s\, \|f\|_{H^{s+m}_\gamma(\mathbb{R}^+_N)}, \tag{2.3.1}$$

для всех $f \in S_{ev}$.

$\mathcal{F}_B$ сингулярный псевдодифференциальный оператор, построенный по символу $a(x;\xi) = |\xi|^2$ четный по каждой переменной, есть сингулярный дифференциальный оператор $-\Delta_B = -\left(\sum\limits_{i=1}^n B_{\gamma_i} + \Delta_{N-n}\right)$. Он представляется в образах четного смешанного преобразования Фурье-Бесселя $F_B$. При этом, если $a(x;\xi) = (1+|\xi|^2)^\alpha$, то этот оператор представляет собой лиувилевское дробное $B$-дифференцирование при $\alpha \geqslant 0$ и $B$-потенциал Бесселя при $\alpha < 0$ (см. [30]). По символу оператора $(1-\Delta_B)^{\alpha/2}$ ясно, что он имеет порядок равный $\alpha$. Справедливо более общее утверждение, сформулированное в следующей лемме.

**Лемма 2.3.1** *Линейный сингулярный дифференциальный оператор $L(x;D_B)$ порядка $m$ вида (1.3.1) имеет порядок равный $m$ в шкале пространств $H^s_\gamma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из того, что норма, записанная в образах Фурье приведет к умножению на символ, представляющий многочлен порядка $m$, а для многочлена с ограниченными коэффициентами справедливо неравенство

$$\left|\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha\right| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2},$$

откуда и следует

$$\|L(x;D_B)f\|_{H^s_\gamma(\mathbb{R}^+_N)} \leqslant C_s\ \|f\|_{H^{s+m}_\gamma(\mathbb{R}^+_N)}.$$

Доказательство закончено.

**Теорема 2.3.1** *Пусть $a(x;\xi)\in\Xi^m_q$, тогда отвечающий этому символу по формуле (2.2.2) или (2.2.3) сингулярный псевдодифференциальный оператор $A$ или $\mathcal{A}$ имеет порядок, равный $m$.*

Д о к а з т е л ь с т в о. Теорему достаточно доказать для оператора $A$ (далее мы увидим, что операторы $A$ и $\mathcal{A}$ совпадают с точностью до оператора низшего порядка). В дальнейшем $\mathcal{F}_B$-преобразование по первой совокупности переменных $x$, и по второй совокупности переменных $\xi$, будем обозначать соответственно, $\widehat{a}^1(\cdot,\cdot)$ и $\widehat{a}^2(\cdot,\cdot)$. Сначала предположим, что символ $a(x;\xi)$ оператора $A$ удовлетворяет условию (i). В этом случае $\mathcal{F}_B[a(x;\xi)f](\xi)=F_B[a(x;\xi)f](\xi)$ — четная функция. Поэтому

$$Af(x)=\mathcal{F}_B^{-1}\mathcal{F}_B[a(y;\xi)f(y)](x)=2^{2n}\,F_B^{-1}\left[F_B[a(y;\xi)\,f(y)]\right](x)=$$

$$=2^{2n}\,F_B^{-1}\left[\left(\widehat{a}^1(\cdot\,;\xi)\,*\,\widehat{f}(\cdot)\right)_\gamma\right](x)=2^n\,\mathcal{F}_B^{-1}\left[\left(\widehat{a}^1(\cdot\,;\xi)\,*\,\widehat{f}(\cdot)\right)_\gamma\right](x).$$

Учитывая равенство $a(x;\xi)=a_\infty(\xi)+a_*(x,\xi)$, имеем

$$\mathcal{F}_B[Af](\xi)=2^n\ \left(a(\xi)\,\widehat{f}(\xi)+\left(\widehat{a_*}^1(\cdot\,;\xi)\,*\,\widehat{f}(\cdot)\right)_\gamma\right) \tag{2.3.2}$$

Мы воспользовались тем, что преобразование Фурье-Бесселя $F_B$ (четное) произведения функций (четных по соответствующим переменным) равно обобщенной свертке их образов (см. равенство (1.1.12)). Если предположить, что в (2.3.2) символ $a_*(x,\xi)=0$, то неравенство (2.3.1) вытекает из условия однородности (порядка $m$) символа:

$$\frac{1}{2^n}Af(x)=F_B^{-1}[F_B[a(x,\xi)f(x)]]=F_B^{-1}[F_B[a_\infty(\xi)+a_*(x,\xi)f(x)]]=$$

$$=F_B^{-1}[F_B[a_\infty(\xi)f(x)]],$$

$$\|A_\infty f\|^2_{H^s_\gamma(\mathbb{R}_N)}=\int(1+|\xi|^2)^s|\widehat{A_\infty f}(\xi)|^2(\xi')^\gamma d\xi=$$

$$=\int(1+|\xi|^2)^s|F_B[a_\infty(\xi)f(x)]|^2(\xi')^\gamma d\xi=\int(1+|\xi|^2)^s a^2_\infty(\xi)|\widehat{f}(\xi)|^2(\xi')^\gamma d\xi.$$

Учитывая, что

$$a^2_\infty(\xi)=a^2\left(|\xi|\cdot\frac{\xi}{|\xi|}\right)=|\xi|^{2m}a\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\leqslant(1+|\xi|^2)^m,$$

получим

$$\|A_\infty f\|^2_{H^s_\gamma(\mathbb{R}_N)}<C\int(1+|\xi|^2)^{s+m}|\widehat{f}(\xi)|^2(\xi')^\gamma d\xi=\|f\|_{H^{s+m}_\gamma(\mathbb{R}_N)}.$$

Поэтому, далее предполагаем, что $a_\infty(\xi)=0$ и, тогда $a(x;\xi)=a_*(x;\xi)\in S_{ev}(\mathbb{R}_N)_x$ для любого фиксированного $\xi$. Таким образом мы получили формулу

$$\mathcal{F}_B[Af](\xi)=2^n\,F_B[Af](\xi)=2^n\,\left(\widehat{a}^1_*(\cdot\,;\xi)\,*\,\widehat{f}(\cdot)\right)_\gamma(\xi)=$$

$$=2^n\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}T^{\xi'}_{\eta'}\widehat{a_*}(\eta',\xi''-\eta'';\xi)\;\widehat{f}(\eta)\,(\eta')^\gamma\,d\eta\,.$$

По определению нормы в $H^{s-m}_\gamma$, имеем

$$\|Af\|_{H^{s-m}_\gamma}=C\left[\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}(1+|\xi|^2)^{s-m}\;|\widehat{Af}(\xi)|^2\,(\xi')^\gamma\;d\xi\right]^{1/2}=$$

$$=C\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}(1+|\xi|^2)^{s-m}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}|T^\xi_\eta\,\widehat{a}^1_*(\eta;\xi)\;\widehat{f}(\eta)|\,(\eta')^\gamma\,d\eta\right]^2(\xi')^\gamma\;d\xi\right\}^{1/2},$$

где $C$ не зависит от функции $f$ и символа $a(x,\xi)$. Применяя обобщенное неравенство Минковского и обозначая через $C$ различные константы, получим

$$\|Af\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (1+|\xi|^2)^{s-m} |T_\eta^\xi \widehat{a_*^1}(\eta;\xi)|^2 (\xi')^\gamma \, d\xi \right]^{1/2} |\widehat{f}(\eta)| \, (\eta')^\gamma \, d\eta.$$

Учитывая определение символа заключаем, что для любого положительного числа $p$ существует постоянная $C_p$ такая, что

$$|\widehat{a_*^1}(\eta;\xi)| \leqslant C_p \, (1+|\xi|^2)^{m/2} \, (1+|\eta|^2)^{-p}.$$

А поскольку обобщенный сдвиг по части переменных представляет собой интегральный оператор, то он ограничен, следовательно

$$|T_\xi^\eta \widehat{a_*^1}(\xi;\eta)| \leqslant C_p \, (1+|\eta|^2)^{m/2} \, T_\xi^\eta (1+|\xi|^2)^{-p}.$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\|Af\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \frac{(1+|\xi|^2)^{s-m}}{(1+|\eta|^2)^m} \, T_\xi^\eta (1+|\xi|^2)^{-p} \, (\xi')^\gamma \, d\xi \right]^{1/2} \widehat{f}(\eta) \, (\eta')^\gamma \, d\eta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left( \frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2} \right)^{s-m} T_\xi^\eta (1+|\xi|^2)^{-p} \, (\xi')^\gamma \, d\xi \right]^{1/2} \times$$

$$\times \, (1+|\eta|^2)^{s/2} \, \widehat{f}(\eta) \, (\eta')^\gamma \, d\eta \, .$$

Применив неравенство Коши-Буняковского (к внешнему интегралу), получим

$$\|Af\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left( \frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2} \right)^{s-m} T_\xi^\eta (1+|\xi|^2)^{-p} \, (\xi')^\gamma \, d\xi \right]^{1/2} \|f\|_{H_s^\gamma}.$$

Остается оценить интегральный множитель соответствующей константой. Для этого воспользуемся неравенством[1]

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{\pm 1} \leqslant 1+|\xi-\eta|^2\,. \tag{2.3.3}$$

Нетрудно видеть, что $|x_i - y_i| \leqslant x_i \overset{\beta_i}{\to} y_i = \sqrt{x_i^2 - 2x_iy_i\cos\beta_i + y_i^2}$, $\forall\beta_i \in [0,\pi]$, тогда

$$|\eta-\tau| \leqslant \left|(\eta' \overset{\beta'}{\to} \tau'\,,\, \eta''-\tau'')\right| = \left|(\eta_1 \overset{\beta_1}{\to} \tau_1, \ldots, \eta_n \overset{\beta_n}{\to} \tau_n\,,\, \eta''-\tau'')\right|\,. \tag{2.3.4}$$

Отсюда следуют неравенства

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|}\right)^{k} \leqslant C\ T_\xi^\eta \left(1+|\xi|^2\right)^{|k|}\,, \tag{2.3.5}$$

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{k} T_\xi^\eta(1+|\xi|^2)^{-p} \leqslant C\ T_\xi^\eta \left(1+|\xi|^2\right)^{|k|-p}\,. \tag{2.3.6}$$

В результате применения (2.3.6), получим

$$\|Af\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta(1+|\xi|)^{|s+m|-p}\ \|f\|_{H_s^\gamma}\ (\xi')^\gamma\,d\xi\,.$$

Полученный интеграл сходится при достаточно большом $p$, поэтому

$$\|Af\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant C\ \|f\|_{H_s^\gamma}. \tag{2.3.7}$$

Пусть теперь для символа $a(x;\xi)$ по переменной $x_i$ выполняется условие (ii). Тогда из определения символа учитывая, что интегралы в определениях $\mathcal{F}_B$ -преобразований берутся в смысле главных значений, имеем

$$\widehat{Au}(\xi) = -i\int\limits_{\mathbb{R}_N}\prod_{i=1}^n \frac{x_i\,\xi_i}{\gamma_i{+}1}\,j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i\xi_i)\ e^{-i(x'',\xi'')}\,a(x;\xi)\,u(x)\,(x'^2)^{\gamma/2}\,dx.$$

Учитывая рекуррентное соотношение (1.3.3), имеем

$$\widehat{Au}(\xi) = -i\int\limits_{\mathbb{R}_N}\prod_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i}\ \partial_{x_i} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\ e^{-i(x'',\ \xi'')}\,a(x;\xi)\,u(x)\,(x'^2)^{\gamma/2}\,dx =$$

[1]Неравенство (2.3.3) практически очевидно: $1+|\xi|^2 = 1+|\xi-\eta+\eta|^2 \leqslant (1+|\eta-\xi|^2)(1+|\eta|^2)$ и наоборот $1+|\eta|^2 = 1+|\eta-\xi+\xi| \leqslant (1+|\eta-\xi|^2)(1+|\xi|^2)$ . Наверное впервые применялось в работе Питре [38]

$$
= -i\, 2^n \int\limits_{\mathbb{R}_{N-n}} e^{-i(x'',\ \xi'')}\, dx'' \times
$$

$$
\times \int\limits_{\mathbb{R}_{N-1}} \int\limits_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i}\, \partial_{x_i} j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i \xi_i)\, x_i^{\gamma_i}\ a(x;\xi)\, u(x)\ dx_i\, d\mathbf{x_i}\, .
$$

Интегрируя по частям, получим

$$
\widehat{Au}(\xi) = i\, 2^n \left( \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N-1}} \int\limits_0^\infty \mathbf{j}_\gamma(x', \xi')\, e^{-i(x',\ \xi')}\, (x')^{-\gamma} \times \right.
$$

$$
\times \prod_{i=1}^n \xi_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (x_i)^{\gamma_i}\, a(x;\xi) \right]\ (x')^\gamma\, u(x)\, dx +
$$

$$
\left. + \int\limits_{\mathbb{R}^+_N} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi')\ e^{-i(x'',\ \xi'')}\, a(x;\xi)\ \prod_{i=1}^n \xi_i^{-1}\ \partial_{x_i} u(x)\ (x')^\gamma\, dx \right) = I_1 + I_2. \tag{2.3.8}
$$

Рассмотрим сначала интеграл $I_1$. Нетрудно видеть, что функция

$$
\prod_{i=1}^n (x_i)^{-\gamma_i}\ \xi_i^{-1}\ \partial_{x_i} \left[ (x_i)^\gamma\, a(x;\xi) \right]
$$

четная по каждой из переменных, составляющих векторы $x'$ и $\xi'$ и однородна по $\xi$ степени $m-n$, тем самым удовлетворяет условию (i). Следовательно можем воспользоваться этой теоремой для "четного" символа:

$$
\|I_1\|_{H^s_\gamma} \leqslant C\ \|u\|_{H^{s+m-n}_\gamma}\, . \tag{2.3.9}
$$

Оценим теперь интеграл $I_2$. Его особенность в том, что он, представляя $\mathcal{F}_B$-преобразование, применяется к нечетной функции и поэтому не входит в класс рассматриваемых в этой работе с.п.д. операторов. Обращаем внимание на следующее. В $I_2$ входит нечетный символ. Чтобы воспользоваться первой частью доказываемой теоремы нам надо заменить его подходящим четным символом. Но и функция тоже нечетная, поэтому достаточно найти нечетную функцию $\omega(x)$, на которую достаточно умножить и поделить. При этом новый символ $\frac{a}{\omega}$ и функция $\omega\, u$ окажутся четными (по соответствующим переменным). Но должно сохраниться свойство символа, прописанные в пункте (i). Построение функции $\omega$ оказывается возможным. Мы воспользуемся методикой построения такой функции при $n=1$ из работы [9]. Именно, из условия (ii) на символ $a(x,\xi)$ следует, что существует функция $\omega(x)\in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ вырождающаяся на сингулярных гиперплоскостях $x_i=0, i=1,2,\ldots,n$ вместе со всеми производными $\partial_{x_i}^k\omega(x)\big|_{x_i=0}=0$ порядков $k=0,1,2,\ldots$, такая, что

$$\left(\prod_{i=1}^n \xi_i^{-1}\right) a(x;\xi)=\omega(x)\,\left(\prod_{i=1}^n \xi_i^{-1}\right)\,a_1(x;\xi),$$

где функция

$$\widetilde{a}(x;\xi)=\left(\prod_{i=1}^n \xi_i^{-1}\right) a_1(x;\xi)$$

удовлетворяет определению символа, являясь однородной по $\xi$ степени $m-n$ и удовлетворяет условию (i), т.е. $\widetilde{a}(x;\xi)$ принадлежит пространству символов $\Xi^{m-n}$, удовлетворяющих условию (i). Следовательно, выражение $I_2$ примет вид четного $\mathcal{F}_B$-преобразования

$$I_2=\int\limits_{\mathbb{R}_n}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\;e^{-i(x'',\xi'')}\,\widetilde{a}(x;\xi)\;\omega(x)\,\prod_{i=1}^n\partial_{x_i}u(x)\;(x')^\gamma\,dx\,,$$

от функции $\omega(x)\prod\limits_{i=1}^n\partial_{x_i}u(x)$, которая, как видим, четная по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$. Согласно (2.3.8)

$$\|I_2\|_{H^s_\gamma}\leqslant C\;\|\omega(x_1)\,D_B^n u\|_{H_\gamma^{s+m-n}}\,,$$

где $D_B^n=\partial^1_{B_1}\ldots\partial^1_{B_n}$. По лемме 2.3.1 оператор $\omega(x_1)\,D_B^n$ имеет порядок равный $n$, следовательно

$$\|I_2\|_{H^s_\gamma}\leqslant C\;\|u\|_{s+m,\nu}\,. \tag{2.3.10}$$

Возвращаясь к (2.3.8) из неравенств (2.3.9) и (2.3.10) получаем

$$\|Af\|_{H_\gamma^{s-m}}\leqslant C\;\|f\|_{H_s^\gamma}.$$

для многомерного с.п.д. оператора Киприянова-Катрахова с символом $a\in\Xi_q^m$, удовлетворяющим условию (ii).

Доказательство закончено.

**Теорема 2.3.2** *Пусть $a(x;\xi)\in\Xi_q^m$, и $A$ и $\mathcal{A}$ отвечающий этому символу по формуле (2.2.2) и (2.2.3) соответственно $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор. Тогда оператор $A-\mathcal{A}$ имеет порядок $m-1$ в шкале пространств $H_\gamma^s$ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы представляет упрощенный вариант доказательства теоремы о произведении $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. операторов (см. далее п. 2.4) и мы ее не приводим.

**Лемма 2.3.2** *Пусть $A\in\Xi_q^m$ . Для любой функции $u\in H_\gamma^s$ имеет место неравенство*

$$|(Au,u)_\gamma|=|(u,\mathcal{A}u)_\gamma|\leqslant const\cdot\|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}. \qquad (2.3.11)$$

*с константой, независящей от функции $u$ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощая доказательство, положим $a_\infty(\xi)=0$ . Применяя формулу Планшереля (1.1.10), запишем

$$|(Au,u)_\gamma|=|\operatorname{Re}(\widehat{Au}\,,\,\widehat{u})_\gamma|=\int\limits_{\mathbb{R}_N}\widehat{u}(\xi)\int\limits_{\mathbb{R}_N}T_\eta^\xi\widehat{\widehat{a}}^1(\eta\,;\,\xi)\,\widehat{u}(\eta)\,(\eta')^\gamma\,d\eta\,(\xi')^\gamma d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}_N}\int\limits_{\mathbb{R}_N}\widehat{u}(\xi)\,\sqrt{T_\eta^\xi\widehat{\widehat{a}}^1(\eta\,;\,\xi)}\,\sqrt{T_\eta^\xi\widehat{\widehat{a}}^1(\eta\,;\,\xi)}\,\widehat{u}(\eta)\,(\eta')^\gamma\,d\eta\,(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского, тогда

$$|\operatorname{Re}(Au,u)_\gamma|\leqslant\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}_N}\int\limits_{\mathbb{R}_N}|\widehat{u}(\xi)|^2\;T_\eta^\xi\widehat{\widehat{a}}^1(\eta\,;\,\xi)\;(\eta')^\gamma\,d\eta\,(\xi')^\gamma d\xi}\;\times$$

$$\times\;\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}_N}\int\limits_{\mathbb{R}_N}|\widehat{u}(\eta)|^2\;T_\eta^\xi\widehat{\widehat{a}}^1(\eta\,;\,\xi)\;(\eta')^\gamma\,d\eta\,(\xi')^\gamma d\xi}\,.$$

По определению символа класс $\Xi_q^m$ по переменной $x$ есть функция пространства Л. Шварца. Тогда ее $\mathcal{F}_B$ -преобразование по первой группе переменных есть быстро убывающая функция. Т.е. можем записать

$$T_\eta^\xi\widehat{\widehat{a}}^1(\eta\,;\,\xi)\leqslant c\;T_\eta^\xi(1+|\eta|^2)^{-2p}\;(1+|\xi|^2)^{m/2},$$

где $p$ произвольное достаточно большое число. Следовательно

$$|\operatorname{Re}(Au,u)_\gamma|\leqslant c\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}_N}(1+|\xi|^2)^{m/2}\ |\widehat{u}(\xi)|^2\,(\xi')^\gamma d\xi\int\limits_{\mathbb{R}_N}T_\eta^\xi(1+|\eta|^2)^{-2p}\,(\eta')^\gamma\,d\eta}\ \times$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}_N}(1+|\eta|^2)^{m/2}\,|\widehat{u}(\eta)|^2\,(\eta')^\gamma\,d\eta\int\limits_{\mathbb{R}_N}\ T_\eta^\xi(1+|\eta|^2)^{-p}\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{m/2}\ (\xi')^\gamma d\xi}\,.$$

Теперь, обозначая

$$K_1=\int\limits_{\mathbb{R}_N}T^\eta(1+|\xi|^2)^{-p}\ (\eta')^\gamma\,d\eta\,,$$

$$K_2=\int\limits_{\mathbb{R}_N}\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{-p}T^\eta(1+|\xi|^2)^{-p}\ (\xi')^\gamma\,d\xi$$

(то, что это константы доказывается так же как в предыдущей теореме — первое по неравенству Киприянова-Ключанцева, второе — так же, но с предварительным применением неравенства (2.3.6) и применяя теорему 2.3.1 с показателем $s=0$, получим

$$|\operatorname{Re}(Au,u)_\gamma|\leqslant c\sqrt{K_1\,K_2}\ \|u\|_{H_\gamma^{m/2}}\ \|u\|_{H_\gamma^{m/2}}=C\ \|u\|^2_{H_\gamma^{m/2}}\,.$$

Доказательство закончено.

## 2.4 Произведения и коммутаторы с.п.д. операторов Киприянова-Катрахова

Определение символа мы можем несколько ослабить. Именно, будем предполагать следующее.

Пусть $a(x,\xi)$ бесконечно дифференцируема по $x\in\mathbb{R}_N^+$, определена при всех $x$ и $\xi$, четная по каждой из переменных $x_i$, $\xi_i$, $i=1,\ldots,n$ и удовлетворяет следующим условиям.

1) Существует положительная константа $C$ такая, что

$$|(D_B^\alpha)_\xi a(x,\xi)|\leqslant C\,(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}\ a_\xi^\alpha\left(x,\frac{\xi}{|\xi|}\right)\qquad(2.4.1)$$

(примером такой функции является функция положительно однородная по $\xi$ порядка $m$ ).

2) Пусть $S_N^+$ часть единичной сферы в $\mathbb{R}_N^+$ с центром в начале координат. Для всех $\xi \in \overline{S_N^+}$ выполнено условие $\max\limits_x |a(x;\xi)| < \infty$ .

3) Функция $a_*(x;\xi) \in S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ имеет предел $a(\infty,\xi) = a(\xi)$ при $x \to \infty$ , такой, что функция $a_*(x;\xi) = a(x;\xi) - a_\infty(\xi)$ и ее производная по $\xi$ , как функция $x$ принадлежит пространству основных функций $S_{ev}$ равномерно по $\xi$ .

Как и раньше множество функций удовлетворяющих этим свойствам и свойствам (i) или (ii) будем обозначать $\Xi_q^m$ .

Отметим, что переходя к пределу в (2.4.1) при $x \to \infty$ , получим неравенство

$$|a(\xi)| \leqslant C\,(1+|\xi|^2)^{m/2}\; a\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right). \tag{2.4.2}$$

**Замечание 2.4.1** *В доказательстве этой теоремы обратим внимание на следующее. Символы дифференциальных операторов вычисляются только при условии четности функций. Как мы видели в доказательстве второй части теоремы, условия (ii) на символ, связанные с требованием вырождения символов на сингулярных гиперплоскостях оператора, дают возможность сводить рассуждения к новым символам вида* $\frac{1}{\xi_i}\partial_{x_i} a(x;\xi)$ *, которые оказываются четными по* $x_i$ *и по* $\xi_i$ *, удовлетворяющими условию (i) и к функциям* $\omega(x)\,\partial_{x_i}\,u(x)$ *, которые оказываются четными по* $x_i$ *(как произведения нечетных функций) и при этом не меняются порядки соответствующих операторов.*

### 2.4.1 Произведение $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов и $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор с символом, равным произведению символов сомножителей

Пусть $a_1(x;\xi) \in \Xi^{m_1}$ , $a_2(x;\xi) \in \Xi^{m_2}$ и $A_1$ и $A_2$ - соответствующие этим символам $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. операторы (2.2.2). Из теоремы 2.3.1 следует, что $A_1A_2$ — оператор порядка $m_1+m_2$ в шкале пространств $H_\gamma^s(\mathbb{R}_N^+)$ . Аналогичное утверждение справедливо для сингулярного псевдодифференциального оператора с символом, равным произведению символов операторов $A_1$ и $A_2$. Этот оператор будем обозначать $A_1 \circ A_2$.

**Теорема 2.4.1** *Пусть* $a_1(x;\xi) \in \Xi_q^{m_1}$, $a_2(x;\xi) \in \Xi_q^{m_2}$ *и* $A_1$ *и* $A_2$ *— соответствующие этим символам* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова.Тогда оператор* $A_1 A_2 - A_1 \circ A_2$ *имеет порядок* $m_1 + m_2 - 1$ *в шкале пространств* $H^s_\gamma(\mathbb{R}^+_N)$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись замечанием 2.4.1, доказательство проведем для символов $a_1$ и $a_2$, удовлетворяющих условию (i). В [9] доказательство подобной теоремы выполнено другими средствами и с более жесткими условиями на символ.

Ясно, что если для любого фиксированного $x$ функция $a(x;\xi)$ имеет ограниченный носитель по $\xi$, то для любого числа $m \in (-\infty;\infty)$ справедливо неравенство

$$a(x;\xi) = O\left(\frac{1}{1+|\xi|^2)^m}\right), \quad |\xi| \to \infty.$$

Поэтому $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор с таким символом имеет истинный порядок $-\infty$. Поскольку (для любой функции $\zeta(\xi)$ )

$$a(x;\xi) = (\zeta(\xi) + 1 - \zeta(\xi))\, a(x;\xi) = \zeta(\xi)\ a(x;\xi) + (1-\zeta(\xi))\ a(x;\xi)\,,$$

то теорему достаточно доказать для операторов с символом гладким в начале координат

$$b(x;\xi) = a(x;\xi)\zeta(\xi),$$

поскольку за $\zeta$ можно взять бесконечно дифференцируемую функцию, равную $1$ при $|\xi| > 1$ и нулю при $|\xi| < \frac{1}{2}$. Положим

$$b_1(x;\xi) = a_1(x;\xi)\zeta(\xi), \qquad b_2(x;\xi) = a_2(x;\xi)\zeta(\xi).$$

Еще отметим, что доказываемая теорема для символов, не зависящих от $x$, принимает более простой и просто доказываемый вид :

$$a_1(D_B)\, a_2(D_B)u = A_0 u,$$

где $\mathcal{F}_B$ -оператор $A_0$ имеет символ равный произведению символов операторов $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$ . Поэтому и для простоты обозначений, положим

$$\lim_{x\to\infty} a_1(x;\xi) = a_1(\xi) = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} a_2(x;\xi) = a_2(\xi) = 0\,.$$

Из определения $\mathcal{F}_B$ -оператора (2.2.2) вытекает, что если его символ удовлетворяет условию (i), то этот с.п.д. оператор представляется в виде $F_B$ -с.п.д. оператора (для $n=1$ введенных в [22]):

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \Lambda_\gamma^+(x;\xi)\ a(x;\xi)u(x)(x'^2)^{\gamma/2}dx =$$

$$= 2^n \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathbf{j}_\gamma(x;\xi)\ a(x;\xi)u(x)(x'^2)^{\gamma/2}dx. \tag{2.4.3}$$

По формуле (2.4.3) и воспользовавшись формулой для $F_B$ -преобразования произведения (1.1.12), получим

$$\frac{1}{2^n}\,\widehat{A_1A_2}f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\eta)\widehat{A_2 f}(\eta)(\eta')^\gamma d\eta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\eta) T_\eta^\tau \widehat{b_2}^{\,1}(\eta;\tau)\widehat{f}(\tau)(\tau')^\gamma d\tau(\eta')^\gamma d\eta. \tag{2.4.4}$$

Точно также, для $F_B$ -оператора с символом, равным произведению символов $b_1(x;\xi)\,b_2(x,\xi)$ , получим:

$$\frac{1}{2^{2n}}\,\widehat{A_1\circ A_2}f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\tau) T_\eta^\tau \widehat{b_2}^{\,2}(\eta;\tau)\widehat{f}(\tau)(\tau')^\gamma d\tau(\eta')^\gamma d\eta. \tag{2.4.5}$$

Из (2.4.4) и (2.4.5) имеем:

$$\frac{1}{2^{2n}}\,F_B\left[A_1A_2 - A_1\circ A_2 f\right](\xi) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta \left[\widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\eta) - \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\tau)\right] T_\eta^\tau \widehat{b_2}(\eta;\tau)\widehat{f}(\tau)(\tau')^\gamma d\tau(\eta')^\gamma d\eta\,. \tag{2.4.6}$$

К разности в скобках (2.4.6) применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$I = \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\eta) - \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\tau) = \sum_{i=1}^N (\eta_i - \tau_i)\,\partial_{\widetilde{\xi_i}}\widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\widetilde{\xi_i})\Bigg|_{\widetilde{\xi_i}=\eta_i+\Theta(\tau_i-\eta_i)}\,,$$

$$0 < \Theta < 1\,.$$

Выражение $\eta_i + \Theta(\tau_i - \eta_i)$ линейно по $\Theta$, поэтому принимает максимальное и минимальное значение в концах интервала $\Theta = 0$ и $\Theta = 1$, т.е. значения $\eta_i$ или $\tau_i$. Однородная функция тоже примет наибольшее или наименьшее значение в наибольших или наименьших значениях аргумента. Поэтому

$$|I| \leqslant |\eta - \tau| \sum_{i=1}^{N} \left| \partial_{\eta_i} \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\eta) + \partial_{\tau_i} \widehat{b_1}^{\,1}(\xi;\tau) \right|.$$

Воспользовавшись неравенством (2.4.1), получаем

$$|I| \leqslant C\,|\eta - \tau| \left[ \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{m_1-1}{2}} + \left(1 + |\tau|^2\right)^{\frac{m_1-1}{2}} \right] T_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p}\,, \qquad (2.4.7)$$

где $p$ — произвольное положительное число. Кроме того,

$$\left| T_\eta^\tau \widehat{b_2}(\eta;\tau) \right| \leqslant \left(1 + |\tau|^2\right)^{\frac{m_2}{2}} T_\eta^\tau \left(1 + |\eta|^2\right)^{-q}\,, \qquad (2.4.8)$$

где $q$ — произвольное положительное число. Таким образом, возвращаясь к (2.4.6) и учитывая (2.4.7) и (2.4.8), имеем неравенство

$$|F_B\left[A_1 A_2 - A_1 \circ A_2 f\right](\xi)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left[ \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{m_1-1}{2}} + \left(1 + |\tau|^2\right)^{\frac{m_1-1}{2}} \right] \times$$

$$\times |\eta - \tau| T_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \left(1 + |\tau|^2\right)^{\frac{m_2}{2}} T_\eta^\tau \left(1 + |\eta|^2\right)^{-q} \times$$

$$\times\ |\widehat{f}(\tau)|\,(\tau')^\gamma d\tau (\eta')^\gamma d\eta\,.$$

Здесь можно воспользоваться неравенством (2.3.4). Это дает возможность внести множитель $|\eta - \tau|$ под знак соответствующего смешанного обобщенного сдвига. Поэтому (напомним, что число $q$ произвольное, поэтому число $-q+1$ мы заменим числом $-q$)

$$|F_B\left[A_1 A_2 - A_1 \circ A_2 f\right](\xi)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left[ \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{m_1-1}{2}} + \left(1 + |\tau|^2\right)^{\frac{m_1-1}{2}} \right] \times$$

$$\times\ T_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} |\widehat{f}(\tau)| \left(1 + |\tau|^2\right)^{\frac{m_2}{2}} T_\eta^\tau \left(1 + |\eta|^2\right)^{-q} (\tau')^\gamma d\tau (\eta')^\gamma d\eta\,.$$

Теперь переходим к оценке нормы. Имеем

$$\|(A_1 A_2 - A_1 \circ A_2) f(\xi)\|^2_{H_\gamma^{s-m_1-m_2+1}} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_1-m_2+1} |F_B[(A_1A_2 - A_1\circ A_2)f\,](\xi)|^2\,(\xi')^\gamma d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{\frac{s-m_1-m_2+1}{2}} T_\xi^\eta(1+|\xi|^2)^{-p}\, T_\eta^\tau \left(1+|\eta|^2\right)^{-q} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\tau|^2}\right)^{\frac{s-m_2}{2}} + \left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\tau|^2}\right)^{\frac{s-m_1-m_2+1}{2}}\right] \times$$

$$\times\, (1+|\tau|^2)^{\frac{s}{2}}\,\, |\widehat{f}(\tau)|\,(\tau')^\gamma d\tau(\eta')^\gamma d\eta\Bigg]^2\,(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Известно (см. (2.3.6)), что

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^k T_\xi^\eta(1+|\xi|^2)^{-p} \leqslant C\; T_\xi^\eta \left(1+|\xi|^2\right)^{|k|-p}\,.$$

Используя это неравенство, получим

$$\|(A_1A_2 - A_1\circ A_2)\,f(\xi)\|^2_{H_\gamma^{s-m_1-m_2+1}} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(\xi'\right)^\gamma d\xi\, \times$$

$$\times \left[\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta(1+|\xi|^2)^{-k_1} T_\eta^\tau(1+|\eta|^2)^{-k_2}\,(\eta')^\gamma d\eta\,(1+|\tau|^2)^{s/2}\,|\widehat{f}(\tau)|\,(\tau')^\gamma d\tau\right]^2,$$

где введены обозначения

$$\frac{s-m_1-m_2+1}{2} - p = -k_1\,, \qquad \min\left(\left|\frac{s-m_2+1}{2} - q\right|, \frac{s-m_1-m_2+1}{2} - q\right) = k_2\,.$$

Также положим

$$\left(1+|\tau|^2\right)^{\frac{s}{2}}\ \left|\widehat{f}\,(\tau)\right| = u(\tau)\,.$$

Для произвольных и достаточно больших $k_1$ и $k_2$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta(1+|\xi|^2)^{-k_1} T_\eta^\tau(1+|\eta|^2)^{-k_2}\,(\eta')^\gamma d\eta \le C\; T_\tau^\xi(1+|\xi|^2)^{-k}\,, \tag{2.4.9}$$

где $k$, вообще говоря, произвольное достаточно большое число (доказательство смотрите в конце этого пункта). Применяя неравенство (2.4.9), имеем

$$I = \|(A_1A_2 - A_1\circ A_2)\,f(\xi)\|_{H_\gamma^{s-m_1-m_2+1}} \leqslant$$

$$
\leqslant C \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\tau^\xi \left(1+|\tau|^2\right)^{-k_1} |u(\tau)|(\tau')^\gamma d\tau \right]^2 (\xi')^\gamma d\xi \right]^{1/2} =
$$

$$
= C \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\tau^\xi (1+|\tau|^2)^{\frac{-k_1}{2}} \, T_\tau^\xi (1+|\tau|^2)^{\frac{-k_1}{2}} |u(\tau)|(\tau')^\gamma d\tau \right]^2 (\xi')^\gamma d\xi \right]^{1/2} .
$$

Здесь во внутреннем интеграле применим неравенство Коши-Буняковского, тогда

$$
I \leqslant C \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\tau^\xi (1+|\tau|^2)^{-k_1} (\tau')^\gamma d\tau \, \times \right.
$$

$$
\left. \times \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\tau^\xi (1+|\tau|^2)^{-k_1} \, (|u(\tau)|)^2 (\tau')^\gamma d\tau \, (\xi')^\gamma d\xi \right]^{1/2} .
$$

В первом из внутренних интегралов, воспользовавшись неравенством Киприянова-Ключанцева (1.1.3) об ограниченности обобщенного сдвига, видим, что этот интеграл равен константе. Поэтому

$$
I \leqslant C \left[ \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |u(\tau)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\tau (1+|\xi|^2)^{-k_1} \, (\xi')^\gamma d\xi \; (\tau')^\gamma \, d\tau \right]^{1/2} .
$$

Во внутреннем интеграле, снова применяя неравенство Киприянова-Ключанцева, видим, что он равен константе. Таким образом

$$
I \leqslant \left( \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |u(\tau)|^2 (\xi')^\gamma d\tau \right) = \left( \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (1+|\tau|^2)^s \, \widehat{f}(\tau) \; (\tau')^\gamma d\tau \right) = \|f\|^2_{H_\gamma^s} .
$$

Доказательство закончено.

Из теоремы вытекают следующие следствия.

**Следствие 2.4.1** *Пусть* $a_1(x;\xi) \in \Xi_q^{m_1}$, $a_2(x;\xi) \in \Xi_q^{m_2}$ *и* $A_1$ *и* $A_2$ *— соответствующие этим символам* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова. Тогда их коммутатор*

$$[A_1 A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$$

*имеет порядок* $m_1 + m_2 - 1$ *в шкале пространств* $H_\gamma^s$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2.4.1 имеем

$$A_1 A_2 = A_1 \circ A_2 + T_1\,, \quad A_2 A_1 = A_1 \circ A_2 + T_2,$$

где $T_1$ и $T_2$ — операторы порядков $m_1 + m_2 - 1$ . Тогда коммутатор

$$[A_1 A_2] = T_1 - T_2, \quad ord(T_1 - T_2) = m_1 + m_2 - 1\,.$$

Доказательство закончено.

**Следствие 2.4.2** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ *и* $\varphi(x)$ *— бесконечно дифференцируемая функция, четная по каждой координате вектора* $x'$ . *Тогда оператор* $\varphi A - A\varphi$ *имеет порядок, равный* $m-1$ *в* $H_\gamma^s$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор умножения на функцию из $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ можно рассматривать как сингулярный псевдодифференциальный оператор. Поэтому справедливость данного утверждения вытекает из следствия 2.4.1.

Доказательство закончено.

**Следствие 2.4.3** *Пусть* $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ , $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *— бесконечно дифференцируемые функции, четные по* $x'$ , *с не пересекающимися носителями. Тогда оператор* $\varphi A \psi$ *имеет порядок, равный* $m-1$ *в* $H_\gamma^s$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varphi \cdot \psi = 0$ , то

$$\varphi A \psi = \varphi A \psi - \varphi \psi A.$$

Утверждение следствия 2.4.3 следует из следствия 2.4.2.

Доказательство закончено.

**Следствие 2.4.4** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ . *Его коммутатор с оператором* $(1-\Delta_B)^{k/2}$ *имеет порядок* $m+k-1$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из следствия 2.4.1, поскольку оператор $(1-\Delta_B)^{k/2} \in \Xi_q^k$ .

Д о k а з а т е л ь с т в о неравенства (2.4.9). Левую часть этого неравенства преобразуем следующим образом (объяснения ниже)

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta (1+|\xi|^2)^{-k_1} T_\eta^\tau (1+|\eta|^2)^{-k_2} \, (\eta')^\gamma d\eta = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\eta^\tau \, T_\xi^\eta (1+|\xi|^2)^{-k_1} \times$$

$$\times \, (1+|\eta|^2)^{-k_2} \, (\eta')^\gamma d\eta = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\eta^\tau \, T_\eta^\xi (1+|\eta|^2)^{-k_1} (1+|\eta|^2)^{-k_2} \, (\eta')^\gamma d\eta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\eta^\xi \, T_\eta^\tau (1+|\eta|^2)^{-k_1} (1+|\eta|^2)^{-k_2} \, (\eta')^\gamma d\eta = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\tau^\xi \, T_\eta^\tau (1+|\eta|^2)^{-k_1} \times$$

$$\times \, (1+|\eta|^2)^{-k_2} \, (\eta')^\gamma d\eta = T_\tau^\xi \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\eta^\tau (1+|\eta|^2)^{-k_1} (1+|\eta|^2)^{-k_2} \, (\eta')^\gamma d\eta \, .$$

Здесь в первом равенстве использовано свойство самосопряженности смешанного обобщенного сдвига; во втором — симметрией обобщенного сдвига относительно своих аргументов; в третьем — перестановочностью обобщенных сдвигов между собой; в четвертом — ассоциативностью; в пятом — просто вынесли сдвиг по не интегрируемым аргументам за знак интеграла, что возможно ввиду абсолютной интегрируемости подынтегральной функции.

Согласно (2.3.5) получим (напомним, что $p>0$ )

$$\left(\frac{1+|\tau|^2}{1+|\eta|^2}\right)^p \leqslant T_\eta^\tau (1+|\eta|^2)^p \, .$$

Следовательно

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_\xi^\eta (1+|\xi|^2)^{-k_1} \, (1+|\eta|^2)^{-k_2} \, (\eta')^\gamma d\eta \leqslant$$

$$\leqslant T_\tau^\xi \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \frac{(1+|\eta|^2)^{k_1}}{(1+|\tau|^2)^{k_1}} \, \frac{1}{(1+|\eta|^2)^{k_2}} \, (\eta')^\gamma d\eta =$$

$$= T_\tau^\xi \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \frac{(1+|\eta|^2)^{k_1}}{(1+|\tau|^2)^{k_1}} \frac{1}{(1+|\eta|^2)^{k_2}} (\eta')^\gamma d\eta =$$

$$= T_\tau^\xi (1+|\tau|^2)^{k_1} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \frac{(\eta')^\gamma d\eta}{(1+|\eta|^2)^{k_2-k_1}} \, .$$

Как видим, если $k_2 > k_1$ , то полученный интеграл сходится и мы получаем требуемое неравенство (2.4.9).

Доказательство закончено.

# Глава 3

# Квазирегуляризаторы $B$-эллиптических $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов. Априорная оценка

Термин " $B$ -эллиптичность" заимствован из [21] и обусловлен тем, что сингулярному дифференциальному оператору

$$\Delta_B = B_{\gamma_1} + \ldots + B_{\gamma_n} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}\,,$$

на который с точки зрения классической теории надо смотреть как на оператор с переменными коэффициентами, ставится в соответствие символ $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \xi_i^2$ (он же отвечающий оператору Лапласа в классической теории) не зависящий от первичной переменной (как и оператору с постоянными коэффициентами). Теория $B$ -эллиптических уравнений развита в работах И.А. Киприянова (см. [11], [12], [20], [21].). Обобщения, отвечающие данной работе, связаны с рассмотрением $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. уравнений, содержащими (наравне с операторами Бесселя) $D_B$ -оператор Бесселя.

В этой главе рассматриваются сингулярные эллиптические уравнения, поэтому символ $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.о. будем предполагать однородным: $a(x;\xi) = |\xi|^m a\left(x; \frac{\xi}{\xi}\right)$ . Соответствующие операторы будем называть *однородными* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д.операторами.*

## 3.1 $B$-эллиптические $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова и квазирегуляризаторы

Пусть $A$ — сингулярный псевдодифференциальный оператор с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ . Оператор $A$ назовем $B$ -эллиптическим в точке $x \in \mathbb{R}_N$ если

$$a(x;\xi) \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0 \tag{3.1.1}$$

и $B$ -эллиптическим в $\mathbb{R}_N$ , если он $B$ -эллиптичен в каждой точке $x \in \mathbb{R}_N$ . Символ $B$ -эллиптического оператора (в точке $x$ или в $\mathbb{R}_N$ ) назовем $B$ -эллиптическим символом (соответственно в точке $x$ или в $\mathbb{R}_N$ ).

Ограниченные операторы $R_1$ и $R_2$ , действующие из пространства $H_\gamma^{s-m}$ в $H_\gamma^s$ назовем соответственно левым и правым квазирегуляризатором оператора $A$ , если

$$R_1 A = I + T_1, \qquad A_2 R_2 = I + T_2\,, \tag{3.1.2}$$

где $T_1$ — ограниченный оператор из $H_\gamma^{s-1}$ в $H_\gamma^s$ , а $T_2$ — ограниченный оператор из $H_\gamma^{s-m}$ в $H_\gamma^{s-m+1}$ .

**Замечание 3.1.1** *Регуляризаторы эллиптических операторов определяются как обращающие с точностью до вполне непрерывного оператора. Квазирегуляризаторы (3.1.2) не являются регуляризаторами из-за некомпактности* $\mathbb{R}_N$ *.*

Конструкция квазирегуляризаторов для $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. операторов дается в следующей теореме.

**Теорема 3.1.1** *$\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор $R$ с символом*

$$r(x;\xi) = |\xi|^m (1 + |\xi|^m)^{-1} a^{-1}(x;\xi) \tag{3.1.3}$$

*является (левым и правым) квазирегуляризатором для $B$ -эллиптического в $\mathbb{R}_N$ $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператора $A$ с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим вначале, что из условия (3.1.1) следует, что символ (3.1.3) определяет $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор $R$ порядка $-m$ . Применяя к произведению $RA$ теорему 3.1.1 будем иметь

$$RA = R \circ A + T$$

где $R \circ A$ — сингулярный псевдодифференциальный оператор с символом

$$|\xi|^m (1 + |\xi|^m)^{-1} = 1 - (1 + |\xi|^m)^{-1},$$

а $T$ — оператор порядка $-1$ . Поскольку сингулярный псевдодифференциальный оператор с символом $(1 + |\xi|^m)^{-1}$ имеет порядок $-m$ , то

$$RA = I + T,$$

где $T$ — ограниченный оператор из $H_\gamma^{s-1}(\mathbb{R}_N)$ в $H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ . Аналогично, применяя оператор $R$ к оператору $A$ справа, получим

$$AR = I + T$$

где $T$ — ограниченный оператор из $H_\gamma^{s-m}(\mathbb{R}_N)$ в $H_\gamma^{s-m+1}(\mathbb{R}_N)$ .

Доказательство теоремы закончено.

Заметим, что в случае $m = 0$ сингулярный псевдодифференциальный оператор $R$ с символом $a^{-1}(\xi)$ является обратным к сингулярному псевдодифференциальному оператору $A$ с символом $a(\xi)$ , не зависящим от $x$ .

## 3.2 Неравенство типа неравенства Гординга

Неравенство Л. Гординга (см. [3]) является важным средством исследования уравнений в частных производных. Мы докажем следующую форму неравенства Гординга (для классических псевдодифференциальных операторов это неравенство получено в [45], см. так же [23]).

**Теорема 3.2.1** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ *и пусть на единичной сфере* $S_1 = \{\xi : |\xi| = 1\}$ *символ* $Re\ a(x;\xi)$ *ограничен с низу некоторой константой* $c$ *. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует константа* $c' = c'(\varepsilon)$ *такая, что для всех функций* $u \in S_{ev}^{+}(\mathbb{R}_N^{+})$

$$Re(Au,u)_\gamma + c'\|u\|^2_{\frac{m-1}{2},\gamma} \geqslant (c-\varepsilon)\|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}\,. \qquad (3.2.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что неравенство (3.2.1) достаточно доказать для действительного символа $a(x;\xi)$ . Действительно, если $A'$ — $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор вида (2.2.2) с символом $i \cdot \mathrm{Im}\ a(x;\xi)$ , то поскольку

$$\overline{(A'u,u)_\gamma} = \overline{\int A'u(x)\,\overline{u(x)}\ (x')\gamma\ dx} = \int u(x)\,\overline{A'u(x)}\ (x')\gamma\ dx = (u,A'u)_\gamma\,,$$

то

$$\mathrm{Re}(A'u,u)_\gamma = \frac{1}{2}\left[(A'u,u)_\gamma + \overline{(A'u,u)_\gamma}\right] = \frac{1}{2}\left[(A'u,u) + (u,A'u)_\gamma\right]\,.$$

С другой стороны, если $\overline{A}$ — оператор с комплексно сопряженным символом $\overline{a(x,\xi)}$ , то $A' = 1/2(A-\overline{A})$ . Поэтому

$$\mathrm{Re}(A'u,u)_\gamma = \frac{1}{4}\left[((A-\overline{A})u,u)_\gamma + (u,A-\overline{A})u)_\gamma\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[((A-{}^t\,\overline{A})u,u)_\gamma + (({}^tA-\overline{A})u,u)_\gamma\right].$$

Но по лемме 2.2.1 ${}^t\overline{A} = \mathcal{A}$ и ${}^tA = \overline{\mathcal{A}}$. Теперь, согласно теореме 2.3.2 и неравенства 2.3.11, имеем

$$|\,\mathrm{Re}(A'u,u)_\gamma| \leqslant C_1\|u\|_{\frac{m-1}{2},\gamma},$$

или

$$\mathrm{Re}(A'u,u)_\gamma \geq -C_1\|u\|_{\frac{m-1}{2}}.$$

Учитывая, что $\mathrm{Re}(Au,u)_\gamma = \mathrm{Re}\left[(A''u,u)_\gamma + (A'u,u)_\gamma\right]$, где $A''$ — сингулярный псевдодифференциальный оператор, соответствующий символу $\mathrm{Re}\, a(x;\xi)$, получаем

$$\mathrm{Re}(Au,u)_\gamma + C_1\|u\|_{\frac{m-1}{2},\gamma} \geqslant \mathrm{Re}(A''u,u)_\gamma.$$

Таким образом, эту лемму достаточно доказать для $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператора $A''$ с действительным символом, что и будем предполагать в дальнейшем.

Рассмотрим однородный степени нуль символ

$$\frac{1}{|\xi|^m} a(x;\xi) - C + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0.$$

Извлекая из него квадратный корень и продолжая полученную функцию до однородной по $\xi$ степени $m/2$ функции получим символ $q(x;\xi)$ такой, что

$$q^2(x,\xi) = a(x,\xi) - (C-\varepsilon)(|\xi'|^2 + |\xi''|^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Пусть $Q$ и ${}^tQ$ — $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторы, соответствующие символу $q(x,\xi)$ в виде (2.2.2) и (2.2.3) соответственно, и $Q\circ Q$ — $\mathcal{F}_B$-с.п.д.оператор (2.2.2) соответствующий символу $q^2(x;\xi)$. Тогда

$$Q\circ Q = A - (C-\varepsilon)(\Delta_B)^{\frac{m}{2}}.$$

По теореме 2.4.1 имеем $Q\circ Q = Q^2 + T$, где $T$ — оператор порядка $m-1$. Таким образом, оператор

$$G = Q\circ Q - {}^tQ\cdot Q = Q^2 - {}^tQ\cdot Q + T = (Q - {}^tQ)Q + T$$

имеет порядок $m-1$, т.е. имеет место неравенство

$$|(Gu,u)_\gamma| \leqslant C'\|u\|_{\frac{m-1}{2},\gamma},$$

которое можно записать в виде

$$(Au,u)_\gamma - (C-\varepsilon)\|u\|_{\frac{m}{2},\gamma} - ({}^tQQu,u)_\gamma \geqslant -C'\|u\|_{\frac{m-1}{2},\gamma}.$$

Так как $({}^tQQu,u)_\gamma = \|Qu\|^2_{0,\gamma} \geqslant 0$ , то

$$(Au,u)_\gamma + C'\|u\|_{\frac{m-1}{2},\gamma} \geqslant (C-\varepsilon)\|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}. \tag{3.2.2}$$

Вследствии теоремы 2.3.2, неравество вида 3.2.2 справедливо и для оператора ${}^tA$ вида (2.2.3) с действительным символом $a(x;\xi) \in \Xi^m_q(q)$ , т.е. справедлива оценка

$$({}^tAu,u)_\gamma + C'\|u\|_{\frac{m-1}{2},\gamma} \geqslant (C-\varepsilon)\|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}. \tag{3.2.3}$$

Учитывая, что

$$\mathrm{Re}(Au,u)_\gamma = \frac{1}{2}\left[(Au,u)_\gamma + ({}^tAu,u)_\gamma\right].$$

Из (3.2.2) и (3.2.3) получаем (3.2.1).

Доказательство закончено.

Неравенство (3.2.1) является одной из форм неравенства Гординга, полученного И.А. Кипрояновым для вырождающихся дифференциальных уравнений в работе [10].

## 3.3 Некоторые неравенства. Вариант теоремы Гохберга о норме многомерного с.п.д. оператора Киприянова-Катрахова

Введем обозначение

$$K = \max_{x\in\mathbb{R}_N,\, \xi\in S_1} |a(x;\xi)|, \tag{3.3.1}$$

где $S_1$ — единичная сфера в $\mathbb{R}_N$ с центром в начале координат. Ясно, что для символа $a(x;\xi) \in \Xi^m_q$ эта величина ограничена.

**Лемма 3.3.1** *Пусть $A$ — однородный $\mathcal{F}_B$-с.п.д.о. с символом $a(x;\xi) \in \Xi^m_q$. Тогда для любого действительного числа $s$ и любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C = C(s,\varepsilon)$ такая, что*

$$\|Au\|_{s-m,\gamma} \leqslant (K+\varepsilon)\|u\|_{s,\gamma} + C\|u\|_{s-1/2,\gamma}, \tag{3.3.2}$$

*где число $K$ определено равенством (3.3.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A_0$ — однородный $\mathcal{F}_B$-с.п.д.о. порядка 0, отвечающий символу

$$a_0(x;\xi) = a(x;\xi/|\xi|).$$

Неравенство (3.3.2) докажем для оператора вида

$$\widetilde{A} = (1-\Delta_B)^{\frac{m}{2}} A_0. \tag{3.3.3}$$

При этом, так как

$$A-\widetilde{A} = \left[(\Delta_B)^{\frac{m}{2}} - (1-\Delta_B)^{\frac{m}{2}}\right] A_0$$

— оператор порядка $m-1$, то утверждение леммы будет следовать из неравенства (3.3.2) для оператора (3.3.3). Действительно, полагая $A=\widetilde{A}+T$, где $T$ — оператор порядка $m-1$, и предполагая, что неравенство (3.3.2) справедливо для оператора (3.3.3), получаем неравенство (3.3.2) для оператора $A$:

$$\|Au\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \|\widetilde{A}u\|_{H_\gamma^{s-m}} + \|Tu\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant$$
$$\leqslant \|\widetilde{A}u\|_{H_\gamma^{s-m}} + C\|u\|_{H_\gamma^{s-1}} \leqslant (K+\varepsilon)\|u\|_{H_\gamma^s} + C\|u\|_{H_\gamma^{s-1/2}}.$$

Так как

$$\|(1+|D_{x'}|^2+B_{x_{n+1}})^{m/2}A_0u\|_{H_\gamma^{s-m}} = \|A_0u\|_{H_\gamma^s},$$

то достаточно рассмотреть случай $m=0$. Более того, в силу следствия 2.4.2

$$\|A_0u\|_{H_\gamma^s} = \|(1+|D_{x'}|^2+B_{x_{n+1}})^{s/2}A_0u\|_{H_\gamma^0} =$$

$$= \|A_0(1+|D_{x'}|^2+B_{x_{n+1}})^{s/2}u\|_{H_\gamma^0} + O(\|u\|_{s-1,\gamma}).$$

А по скольку $\|u\|_{H_\gamma^s} = \|(1+|D_{x'}|^2+B_{x_{n+1}})^{s/2}u\|_{H_\gamma^0}$, мы видим, что достаточно рассмотреть случай $s=0$. Итак, будем предполагать, что $m=s=0$.

Для доказательства (3.3.2) рассмотрим символ

$$q(x;\xi) = \overline{a}(x;\xi)a(x;\xi).$$

Пусть $Q$ — соответствующий этому символу $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор вида (2.2.2). Тогда $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.оператор $Q - {}^tAA$ имеет порядок $-1$ . Действительно, из теоремы 2.4.1 имеем

$$O - {}^t\overline{A}A = A\overline{A} - {}^t\overline{A}A + T = (\overline{A}_0 - {}^t\overline{A}_0)A + T, \tag{3.3.4}$$

где $T$ — оператор порядка $-1$ . Оператор $\overline{A} - {}^t\overline{A}$ согласно теоремы 2.3.2, также имеет порядок $-1$ . Следовательно и оператор (3.3.4) имеет порядок $-1$ .

Применяя неравенство (2.3.11), получаем

$$|((Q -^t AA)u, u)_\gamma| \leqslant C\|u\|^2_{H_\gamma^{-1/2}}.$$

Поскольку оператор ${}^t\overline{A}$ является формально сопряженным в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ к оператору $A$ , то $({}^t\overline{A}Au, u)_\gamma = \|Au\|_{H_\gamma^0}$ . Откуда

$$|((Q -^t AA)u, u)_\gamma| = \left|(Qu, u) - \|Au\|^2_{H_\gamma^0}\right| \leqslant C\|u\|_{-1/2,r},$$

или, что то же самое,

$$\|Au\|^2_{H_\gamma^o} \leqslant (Qu, u)_\gamma + C\|u\|_{H_\gamma^{-1/2}}. \tag{3.3.5}$$

С другой стороны, из условия (3.3.1) вытекает $K^2 - \overline{a}a \geqslant 0.$ Применяя к $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператору с символом

$$K^2 - \overline{a}(x;\xi)a(x;\xi)$$

теорему 3.2.1 с константой $C = 0$ , находим, что

$$K^2\|u\|^2_{H_\gamma^o} - (Ou, u)_\gamma + C'\|u\|_{H_\gamma^{-1/2}} \geqslant -\varepsilon'\|u\|_{H_\gamma^o}.$$

Откуда

$$(Qu, u)_\gamma \leqslant (K^2 + \varepsilon')\|u\|^2_{H_\gamma^o} + C\|u\|_{H_\gamma^{-1/2}}. \tag{3.3.6}$$

Объединяя (3.3.5) и (3.3.6), получаем

$$\|Au\|^2_{H_\gamma^o} \leqslant (K^2 + \varepsilon')\|u\|^2_{H_\gamma^o} + C\|u\|_{H_\gamma^{-1/2}}.$$

Возвращаясь к оператору $A$ и учитывая замечания, сделанные в начале доказательства, получим требуемое утверждение.

Доказательство закончено.

**Лемма 3.3.2** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ *. Для любой точки* $x^0$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность* $\Omega$ *точки* $x^0$ *и константа* $C(s,\varepsilon) = C$ *, что для всех* $u(x) \in C_{ev}^\infty(\mathbb{R}_N)$ *с носителем в* $\Omega$

$$\|Au - A(x^0)u\|_{s-m,\gamma} \leqslant \varepsilon\|u\|_{s,\gamma} + C\|u\|_{(s-1)/2,\gamma}, \tag{3.3.7}$$

*где* $A(x^0)$ *—* $\mathcal{F}_B$ *-с.п.д.о., отвечающий символу* $a(x^0;\xi)$ *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число и $\Omega$ — окресность точки $x^0$ такая, что

$$|a(x;\xi) - a(x^0;\xi)| < \varepsilon/2,\ x \in \Omega^+. \tag{3.3.8}$$

Рассмотрим $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.о. $P$ с символом $p(x;\xi) = a(x;\xi) - a(x^0;\xi)$ вида (2.2.2) и ${}^tP$ — оператор вида (см. (2.2.3)):

$$\widehat{{}^tPu}(\xi) = C_{n,\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^+_{n+1}} e^{i(x';\xi')} j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})[a(x;\xi) - a(x^0;\xi)]u(x)x_{n+1}^{2\gamma}dx. \tag{3.3.9}$$

Если $\sup\ u(x) \in \Omega$ , то функция $\widehat{{}^tPu}(\xi)$ не изменится, если символ $p(x;\xi)$ умножить на бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ четную по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n,\ n \leqslant N$ , равную единице в $\Omega$ и нулю вне несколько большей окрестности. Из (3.3.8) получаем

$$\max_{x,\xi\in\sum_n^+} \varphi(x)|a(x;\xi) - a(x^0;\xi)| < \varepsilon/2.$$

Откуда, с учетом леммы 3.3.2 (полагая $\varepsilon/2$ вместо $\varepsilon$ ), получаем

$$\|{}^tPu\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \varepsilon\|u\|_{H_\gamma^s} + C\|u\|_{H_\gamma^{s-1/2}}$$

Следовательно, лемма справедлива для оператора ${}^tA$ вида (2.2.3). Учитывая, что $P = {}^tP + T$ (см. теорему 2.3.2), где $T$ — оператор порядка $m-1$ , получаем

$$\|Pu\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \|{}^tPu\|_{H_\gamma^{s-m}} + \|Tu\|_{H_\gamma^{s-m}} \leqslant \varepsilon\|u\|_{H^s+\gamma} + C\|u\|_{H_\gamma^{s-1/2}}.$$

Заменяя оператор $P$ оператором $A - A(x^0)$ , получаем утверждение леммы.

Доказательство закончено.

Следующее утверждение в классическом случае получено И.Ц. Гохбергом в [4] (см. также работу Р. Сили [45], Дж. Кона и Л. Ниренберга [23]).

**Теорема 3.3.1** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ . *Предположим, что* $|a(x^0;\xi^0)| = c_0 \neq 0$ . *Тогда для любой окрестности* $\Omega$ *точки* $x^0$ *и для любых вещественных чисел* $s, l < m$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется бесконечно дифференцируемая функция* $u_\varepsilon(x)$ *вида*

$$u_\varepsilon(x) = \mathbf{j}_\gamma(x', \lambda\xi'^0)\, e^{i\langle x'', \lambda\xi''^0\rangle}\ \varphi(x), \quad \xi^0 = (\xi'^0, \xi''^0),\ |\xi^0| = 1, \tag{3.3.10}$$

*где* $\lambda = \lambda_\varepsilon$ *— достаточно большое положительное число, а* $\varphi$ *четная по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_n$, $n \leqslant N$ *, функция с носителем, содержащимся в* $\Omega$ *, такая, что для нее выполнены неравенства*

$$\|u_\varepsilon\|_{H_\gamma^{s-m+l}} \leqslant \varepsilon \overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s}, \tag{3.3.11}$$

$$\left| \|Au_\varepsilon\|_{H_\gamma^{s-m}} - C_0 \overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s} \right| \leqslant \varepsilon\, \overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s}\ , \tag{3.3.12}$$

*в которых*

$$\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s} = \max\left( \sqrt{\int (1+|\xi|^2)^s \left( T_{\xi'}^{\lambda\xi'^0}\, |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \right) (\xi')^\gamma\, d\xi}\ \ ,\ \|u_\varepsilon\|_{H_\gamma^s} \right)$$

.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с простого замечания. Если $\varphi(x)$ неотрицательная функция, четная по каждой из координат вектора $x'$ , с носителем в некотором конечном множестве $\Omega$ , то

$$\max_\xi |\mathcal{F}_B[\widehat{\varphi}(\xi)| = 2^n \max_\xi |F_B[\widehat{\varphi}](\xi)| = 2^n\, |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_N} \left| \mathbf{j}_\gamma(x', \xi')\ e^{i\langle x'', \xi''\rangle} \right| \ \times$$

$$\times\ \varphi(x)\, (x')^\gamma dx \leq 2^n \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \varphi(x)\, (x')^\gamma dx = 2^n \widehat{\varphi}(\xi) \Bigg|_{\xi=0} .$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем область $\Omega$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|a(x;\xi) - a(x^0;\xi)\right| < \varepsilon/2, \qquad \xi \in S_1(n). \tag{3.3.13}$$

и выберем неотрицательную четную по каждой из координат вектора $x'$ функцию $\varphi(x)$ с малым носителем, содержащимся в $\Omega$. В качестве $u_\varepsilon(x)$ выберем функцию (3.3.10). Преобразование Фурье-Бесселя функции $u_\varepsilon(x)$ будет иметь вид смешанного обобщенного сдвига функции $\widehat{\varphi}$:

$$\widehat{u_\varepsilon}(\xi) = T^{\lambda\xi^0}\widehat{\varphi}(\xi).$$

По сделанному в начале доказательства замечания 3.1.1, максимальные значения функции $\widehat{u_\varepsilon}(\xi)$ лежат в окрестности точек $(\lambda\xi^0)$.

Пусть $\omega^+$ — произвольный прямой сферический полуконус в $\mathbb{R}_N^+$, выходящий из начала координат, с центральной осью, проходящей через точку $(\lambda\xi^0)$. Выберем число $\lambda$ настолько большим, что для данного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N \setminus\, \omega} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\omega^+} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi. \tag{3.3.14}$$

Тогда, полагая $m - l = \delta$, будем иметь

$$\|u_\varepsilon\|^2_{s-\delta,\gamma} = \int\limits_{\omega} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}_N \setminus\, \omega^+} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\omega^+} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi + \frac{\varepsilon}{2}\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}. \tag{3.3.15}$$

Остается рассмотреть интеграл по внутренности конуса. Имеем

$$\int\limits_{\omega} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi = \int\limits_{\omega} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} |T^{\lambda\xi^0}\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi =$$

$$= C(\gamma) \int\limits_{\omega} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} \left| \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \widehat{\varphi}(\xi' \overset{\alpha}{\to} \lambda\xi'^0, \xi'' - \lambda\xi''^0) \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i \, d\alpha_i \right|^2 \times$$

$$\times\ \xi_i^{\gamma_i} d\xi\,,$$

где $C(\gamma)$ — константа нормирующая обобщенный сдвиг. К внутренним интегралам применим неравенство Коши-Буняковского, тогда

$$\left|\int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \widehat{\varphi}(\xi' \overset{\alpha}{\to} \lambda\xi'^0, \xi'' - \lambda\xi''^0) \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i \, d\alpha_i\right|^2 =$$

$$= \left|\int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \widehat{\varphi}(\xi' \overset{\alpha}{\to} \lambda\xi'^0, \xi'' - \lambda\xi''^0) \sqrt{\prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i} \times \sqrt{\prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i}\ d\alpha_i\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \left|\widehat{\varphi}(\xi' \overset{\alpha}{\to} \lambda\xi'^0, \xi'' - \lambda\xi''^0)\right|^2 \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i\ d\alpha_i\ \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i\ d\alpha_i.$$

Как известно $C(\gamma) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \prod\limits_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i\ d\alpha_i = 1$ . Поэтому

$$\int\limits_\omega (1 + |\xi|^2)^{s-\delta} |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\omega (1 + |\xi|^2)^{s-\delta} \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \left|\widehat{\varphi}(\xi' \overset{\alpha}{\to} \lambda\xi'^0, \xi'' - \lambda\xi''^0)\right|^2 \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i\, d\alpha_i\ \times$$

$$\times\ (\xi')^\gamma\ d\xi\,.$$

Здесь, следуя [30], проведем процедуру вращений, переводящих обобщенный сдвиг в обычный для новой функции $\widetilde{\widehat{\varphi}}$, полагая для каждой пары $(\xi_i, \alpha_i),\ i = 1, \ldots, n$

$$0 \le \alpha_i \le \pi\,, \quad \left.\begin{array}{l} z_{2i-1} = \xi_i \cos\alpha_i, \\ z_{2i} = \xi_i \sin\alpha_i, \end{array}\right| \Longrightarrow \quad z_{2i-1} \in (-\infty, \infty),\ \ z_{2i} \in [0, \infty)\,.$$

Через $\omega(N+n)$ обозначим область в $\mathbb{R}^+_{N+n} = \{\widetilde{\xi} = (z, \xi''),\ z_{2i} > 0\}$ , которая получилась из области $\omega$ в результате этих преобразований. Имеем

$$\int\limits_\omega (1 + |\xi|^2)^{s-\delta} |\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\omega(N+n)} \left(1+|\widetilde{\xi}|^2\right)^{s-\delta} \left|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\widetilde{\xi}-\lambda\widetilde{\xi^0})\right|^2 \prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}\, d\widetilde{\xi},$$

где $\widetilde{\xi^0} = (\xi_1, 0, \xi_2, 0, \ldots, \xi_{2n-1}, 0, \xi''^0) \in \overline{\mathbb{R}^+}_{N+n}$. Как видим, в полученном выражении сдвиг не затрагивает весовые переменные. Это позволяет далее пользоваться обычной схемой доказательства теоремы Гохберга. Имеено, сначала сдвиг переносится на первый сомножитель при этом очевидно, что

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n}\left[|z'_{2i-1}+\lambda\xi_i^0|^2+z_i^2\right]+|\xi''+\xi''^0|^2\right)^{-\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\sum_{i=1}^{n}|z'_{2i-1}+\lambda\xi_i^0|^2+|\xi''+\xi''^0|^2\right)^{-\delta} \leqslant \left(|1+|\lambda\xi_k^0|^2\right)^{-\delta}.$$

Здесь во втором неравенстве мы воспользовались тем, что, поскольку $\omega^+$ — прямой сферический полуконус, то хотя бы для одного $k$ $(k=1,\ldots,n)$ имеет место равенство $\operatorname{sign}\xi_{\mathrm{k}} = \operatorname{sign}\,\xi_{\mathrm{k}}^0$. Следовательно

$$\int\limits_{\omega}(1+|\xi|^2)^{s-\delta}|\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2\xi_{n+1}^{2\gamma}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(1+|\lambda\xi_i^0|^2)^\delta}\int\limits_{\omega(N+n)} \left(1+|\widetilde{\xi}|^2\right)^{s} \left|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\widetilde{\xi}-\lambda\widetilde{\xi^0})\right|^2 \prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}\, d\widetilde{\xi},$$

Выбирая число $\lambda$ достаточно большим, и произведя полярные преобразования координат $z_{2i-1}=\xi_i\cos\alpha_i$, $z_{2i}=\xi_i\sin\alpha_i$, получим

$$\int\limits_{\omega}(1+|\xi|^2)^{s-\delta}|\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2\xi_{n+1}^{2\gamma}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\omega}\left(1+|\xi|^2\right)^s T^{\lambda\xi'^0}\left|\widehat{\varphi}(\xi',\xi''-\xi''^0)\right|^2(\xi')^\gamma\, d\xi\,,$$

Отсюда и из (3.3.15) получаем (3.3.10).

**Замечание 3.3.1** *Исходя из четности функции* $\varphi$ *и соответственно* $\widehat{\varphi}$ *по переменным* $\xi'$, *можно потребовать чтобы ее наибольшие значения сосредотачивались на гипероси* $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\xi_i=0\}$. *Тогда в последнем неравенстве положим* $\xi'^0 = (0,\ldots,0$ *и мы имели бы*

$$\int\limits_{\omega}(1+|\xi|^2)^{s-\delta}|\widehat{u_\varepsilon}(\xi)|^2\xi_{n+1}^{2\gamma}d\xi \leqslant \|u_\varepsilon\|_{H_\gamma^s}.$$

*откуда вытекает результат более напоминающий классический:* $\|u_\varepsilon\|_{H_\gamma^{s-m+l}} \leqslant \varepsilon\|u_\varepsilon\|_{H_\gamma^s}$. *Но в нашем случае это исключает ситуацию* $n = N$.

Перейдем теперь к доказательству неравенства (3.3.12).

Пусть $\Psi(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция, четная по каждой из координат $\xi'$, определенная на единичной сфере $|\xi| = 1$ и продолженная как однородная функция степени нуль, которая равна единице на конусе $\omega$ и нулю вне несколько большего конуса $\omega'$. Конус $\omega'$ (и следовательно, $\omega^+$) должен быть настолько узким, чтобы на пересечении $\omega'$ с единичной сферой $|\xi| = 1$ выполнялось неравенство

$$|a(x^0;\xi^0) - a(x^0;\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3.16}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$A_1 = a(x^0;\xi^0)(\Delta_B)^{m/2}.$$

Положим $A_2 = A - A_1$. Обозначая через $\Psi(D_B)$ с.п.д. оператор с символом $\varphi(\xi)$, будем иметь

$$(A_1+A_2)u_\varepsilon = A_1u_\varepsilon+A_2\Psi(D,B)u_\varepsilon+A_2(I-\Psi(D,B))u_\varepsilon = J_1+J_2+J_3. \tag{3.3.17}$$

Нетрудно видеть, что

$$|\|J_1\|_{s-m,\gamma} - C_0\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}| \leqslant C\|u_\varepsilon\|_{s-1,\gamma},$$

где $C$ — независящая от функции $u_\varepsilon$ константа. Применяя к правой части этого неравенства неравенство (3.3.10), получаем

$$|\|J_1\|_{s-m,\gamma} - C_0\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s}. \tag{3.3.18}$$

Рассмотрим теперь функцию $J_3$. Так как $A_2$ — оператор порядка $m$, то

$$\|J_3\|_{s-m,\gamma} = \|A_2(I-\Psi(D,B))u_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} \leqslant C\|(I-\Psi(D,B))u_\varepsilon\|_{s,\gamma}.$$

Преобразование Фурье-Бесселя функции $(I-\Psi(D,B))u_\varepsilon$ равно $(1-\Psi(\xi))\widehat{u_\varepsilon}(\xi)$. Поэтому

$$\|(I-\Psi(D,B))u_\varepsilon\|^2_{s,\gamma}=\int\limits_{\mathbb{R}^+_{n+1}}(1+|\xi|^2)^s|(1+\Psi(\xi))|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\xi^{2\gamma}_{n+1}d\xi.$$

Так как функция $1-\Psi(\xi)$ равна нулю в $\omega^+$ и равна единице вне $\omega'^+$, то

$$\|(I-\Psi(D,B))u_\varepsilon\|^2_{s,\gamma}\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}_N\setminus\omega}(1+|\xi|^2)^s|(1-\Psi(\xi))|^2\ |\widehat{u_\varepsilon}|\,(\xi')^\gamma d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}_N\setminus\omega}(1+|\xi|^2)^s\,|\widehat{u_\varepsilon}|\,(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Из неравенства (3.3.14) получаем

$$\|(I-\Psi(D,B))u_\varepsilon\|_{s,\gamma}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}\,.$$

Таким образом, опять применяя (3.3.10), имеем

$$\|J_3\|_{s-m,\gamma}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\,\overline{\|u_\varepsilon\|}_{s,\gamma}. \tag{3.3.19}$$

Рассмотрим, наконец, функцию $J_2=A_2\Psi(D_B)u_\varepsilon$. Поскольку символ оператора $\Psi(D_B)$ не зависит от $x$, то $b(x;\xi)$ — символ произведения операторов $A_2$ и $\Psi(D,B)$ равен произведению их символов:

$$b(x;\xi)=[a(x;\xi)-a(x^0;\xi^0)]\Psi(\xi)\,.$$

Из неравенств (3.3.13) и (3.3.16) получаем

$$|b(x;\xi)|\leqslant[|a(x;\xi)-a(x^0;\xi)|+|a(x^0;\xi)-a(x^0;\xi^0)|]\Psi(\xi)\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\ x\in\Omega,\ |\xi|=1.$$

Перейдем от оператора $A_2\Psi(D_B)$ к оператору ${}^t(A_2\Psi(D_B))$. При этом, так же, как и при доказательстве леммы 3.3.2, можно считать, что символ $b(x;\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$|b(x;\xi)|<\frac{\varepsilon}{3},\ x\in\mathbb{R}_N,\quad|\xi|=1\,.$$

Тогда, учитывая, что $A_2\Psi(D_B) = {}^t(A_2\Psi(D_B)) + T$ , где $T$ — оператор порядка $m-1$ , и неравенство (3.3.2), получим

$$\|A_2\Psi(D_B)u_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} \leqslant \|{}^t(A_2\Psi(D_B))u_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} + \|Tu_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant \|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} + C\|u_\varepsilon\|_{s-1,\gamma}$$

Применяя неравенство (3.3.14), получаем

$$\|A_2\Psi(D_B)u_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} = \|J_2\|_{s-m,\gamma} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} \tag{3.3.20}$$

Таким образом,

$$|\,\|Au_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} - C_0\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}| = |\,\|J_1 + J_2 + J_3\|_{s-m,\gamma} - C_0\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}| \leqslant$$

$$\leqslant |\,\|J_1\|_{s-m,\gamma} - C_0\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}| + \|J_2\|_{s-m,\gamma} + \|J_3\|_{s-m,\gamma}.$$

Из неравенств (3.3.18), (3.3.19) и (3.3.20) получаем (3.3.11).

Доказательство закончено.

## 3.4 Теорема о норме $\mathcal{F}_B$-с.п.д.оператора

### Теорема типа теоремы Сили о норме оператора

Норма интегро-дифференциальных операторов (п.д.операторов) в шкале пространств Соболева исследовалась в работе Р. Т. Сили [45]. В этих исследованиях подобная теорема доказывается для с.п.д.операторов Киприянова-Катрахова. Мы следуем методам и подходам работы Дж. Кона и Л. Ниренберга [23].

**Теорема 3.4.1** *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ *. Предположим, что*

$$\max_{x,\xi\in\Sigma_n^+} |a(x,\xi)| = K \tag{3.4.1}$$

$K < \infty$ *. Тогда имеет место равенство*

$$K = \inf_T \|A + T\|_{s,\gamma}, \tag{3.4.2}$$

*где справа* $\|\|_{s,\gamma}$ *— норма операторов в шкале* $H_\gamma^s$ *и нижняя грань берется по всем операторам порядка* $m-1$ *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для доказательства теоремы надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой оператор $T$ порядка $m-1$, что

$$\|(A+T)u\|_{s-m,\gamma} \leqslant (K+\varepsilon)\|u\|_{s,\gamma}\,, \tag{3.4.3}$$

причем число $K$ является наименьшим числом, обладающим этим свойством.

Пусть $\varphi(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция, четная по каждой из координат вектора $\xi'$, равная единице в большом полушаре $|\xi| \leqslant R$ и равна нулю при $|\xi| \geqslant 2R$. На основе этой функции, как на символе построим $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор $\varphi(D_B)$. Ясно, любое число $m$ является его порядком, поэтому истинный порядок этого оператора (наименьшее из таких чисел) равен $-\infty$. Следовательно, можем считать, что порядок оператора $T = A\varphi(D_B)$ равен $m-1$. Имеем

$$A - T = A(I - \varphi(D_B))$$

Откуда, учитывая лемму 3.3.1 (неравенство (3.3.2)), имеем

$$\|(A-T)u\|_{s-m,\gamma} = \|A(I-\varphi(D_B))u\|_{s-m,\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant (K+\varepsilon)\|(I-\varphi(D_B))u\|_{s,\gamma} + C\|(I-\varphi(D_B))u\|_{s-1,\gamma}. \tag{3.4.4}$$

Так как $|1-\varphi(\xi)| \leqslant 1$, то

$$\|(I-\varphi(D_B))u\|_{s,\gamma} \leqslant \|u\|_{s,\gamma} \tag{3.4.5}$$

Рассмотрим второе слагаемое в формуле (3.4.4). Имеем

$$\|(I-\varphi(D_B))u\|_{s-1,\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (1+|\xi|^2)^{s-1}|1-\varphi(\xi)|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\xi_{n+1}^{2\gamma}d\xi.$$

Поскольку $1-\varphi(\xi) = 0$ при $|\xi| \leqslant R$, то

$$\|(I-\varphi(D_B))u\|_{s-1,\gamma} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_{n+1}^+\{|\xi|\leqslant R,\ \xi_{n+1}\geqslant 0\}} (1+|\xi|^2)^{s-1}|1-\varphi(\xi)||\widehat{u}(\xi)|^2\xi_{n+1}^{2\gamma}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1+R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^+_{n+1}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi \leqslant \frac{1}{1+R^2} \|u\|_{s,\gamma}. \tag{3.4.6}$$

Выбирая достаточно большое число $R$ и подставляя (3.4.5) и (3.4.6) в (3.4.4), получим (3.4.3).

Покажем теперь, что число $K$ , определенное равенством (3.4.1), является наименьшей константой, обладающей свойством (3.4.3). Предположим. что существует такой оператор $T$ порядка $m-1$ , что для всех $u \in H^s_\gamma$ имеет место неравенство

$$\|(A+T)u\|_{s-m,\gamma} \leqslant (k+\varepsilon)\|u\|_{s,\gamma},$$

где $k < K$ . Пусть $u_\varepsilon(x)$ — функция, построенная в теореме 3.3.1. Из неравенства (3.3.12) следует $(C_0-\varepsilon_0)\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H^s_\gamma} \geqslant \|Au\|_{H^{s-m}_\gamma}$ . С другой стороны

$$\|Au_\varepsilon\|_{H^{s-m}_\gamma} \leqslant \|(A+T)u_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} + \|Tu_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant k\|u_\varepsilon\| + C\|u_\varepsilon\|_{s-1,\gamma} \leqslant (k+\varepsilon)\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}.$$

Последнее же невозможно, если $\varepsilon$ мало.

Доказательство закончено.

Из теоремы 3.3.1 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 3.4.2** *Пусть* $A \in \Xi^m_q$ . *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*I. Символ оператора* $A$ *тождественно равен нулю.*

*II.* $A=0$ .

*III. Для некоторого* $l<m$ *оператор* $A$ *имеет порядок* $l$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что из I следует II, а из II следует III. Докажем, что из III следует I. Допустим противное, т.е. справедливо утверждение III, но существует такая точка $(x^0;\xi^0)$ , что $a(x^0;\xi^0)=c_0\neq 0$ . Пусть $u_\varepsilon$ — функция, построенная в теореме 3.3.1 с достаточно малым $\varepsilon$ . Из неравенства (3.3.11) имеем

$$(c_0-\varepsilon)\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} \leqslant \|Au_\varepsilon\|_{s-m,\gamma}.$$

С другой стороны, так как число $l < m$ является порядком оператора $A$, то из неравенства (3.3.10) будем иметь

$$\|Au_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} \leqslant C\|u_\varepsilon\|_{s-m+l,\gamma} \leqslant \varepsilon'\|u\|_{s,\gamma},$$

где $\varepsilon'$ — произвольно малое положительное число. Из последнего и предыдущего неравенств следует, что

$$(c_0 - \varepsilon)\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} \leqslant \varepsilon'\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}.$$

Последнего быть не может, если $\varepsilon$ достаточно мало, а $c_0 \neq 0$.

Доказательство закончено.

Из теоремы 3.4.2 вытекает, в частности, что число $m$ является истинным порядком оператора $A$ с ненулевым символом $a(x;\xi) \in S_q^m$.

## 3.5 Априорная оценка

Следующая теорема устанавливает связь между $B$ — эллиптичностью и наличием априорной оценки.

**Теорема 3.5.1** *Пусть $A$ — $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор в $\mathbb{R}_N$ с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$. Для того, чтобы оператор $A$ был $B$-эллиптическим в $\mathbb{R}_N$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ выполнялось неравенство*

$$\|u\|_{s,\gamma} \leqslant c(\|Au\|_{s-m,\gamma} + \|u\|_{s-1,\gamma}) \tag{3.5.1}$$

*с константой $c$, не зависящей от функции $u$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть оценка (3.5.1) выполнена. Предположим, что существует точка $x^0$, такая, что для некоторого единичного вектора $\xi^0$

$$a(x^0, \xi^0) = 0. \tag{3.5.2}$$

Пусть $\Omega^+$ — некоторая окрестность точки $x^0$. Поскольку оценка (3.5.1) выполняется для всех бесконечно дифференцируемых функций четных по каждой из переменных $x_i,\ 1 \leq n$ с носителем в $\Omega^+$, то она выполнена и для функций $u_\varepsilon$ , построенных в лемме 3.3.2

$$\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} \leqslant c'\|Au_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} + \|u_\varepsilon\|_{s-1,\gamma}.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством (3.3.7) с $l-m=-1$ , получаем

$$(1-\varepsilon c')\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} \leqslant c'\|Au\|_{s-m,\gamma}.$$

Считая $\varepsilon$ достаточно малым числом, будем иметь

$$\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} \leqslant c\|Au_\varepsilon\|_{s-m,\gamma}.$$

С другой стороны, из неравенства (3.3.8) ввиду (3.5.2) следует, что

$$\|Au_\varepsilon\|_{s-m,\gamma} \leqslant \varepsilon\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}.$$

Из неравенств полученных выше получаем

$$\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma} \leq \varepsilon\|u_\varepsilon\|_{s,\gamma}.$$

Поскольку константа $c$ не зависит от $u_\varepsilon$ , то последняя заведомо не верно $(u_\varepsilon \not\equiv 0)$ . Следовательно, не верно предположение (3.5.2).

Предположим теперь, что $A$ — сингулярный псевдодифференциальный оператор $B$ -эллиптического типа в $\overline{\mathbb{R}_N}(q)$ . По теореме 3.1.1 существует регуляризатор $R$ порядка $m$ , что для любой функции $u \in H^s_\gamma(\mathbb{R}_N)$ имеем

$$u = RAu + Tu,$$

где $T$ — оператор порядка $-1$ . Тогда

$$\|u\|_{s,\gamma} \leqslant \|RAu\|_{s,\gamma} + \|Tu\|_{s,\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant c'\|Au\|_{s-m,\gamma} + c''\|u\|_{s-1,\gamma}.$$

Теорема доказана.

Из теорем 3.1.1 и 3.5.1 вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.5.2** *Следующие утверждения эквивалентны*

*1. $A$ — $\mathcal{F}_B$ -с.п.д.о. $B$ -эллиптического типа с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ .*

*2. Существует квазирегуляризатор оператора $A$ .*

*3. Для функции $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ имеет место априорная оценка*

$$\|u\|_{s,\gamma} \leqslant c(\|Au\|_{s-m,\gamma} + \|u\|_{s-1,\gamma}).$$

В заключении этого параграфа докажем следующую теорему (о гладкости решения).

**Теорема 3.5.3** *Пусть $A$ — $B$ -эллиптический $\mathcal{F}_B$ -с.п.д. оператор с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ . Тогда, если $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ является решением уравнения $Au = f$ , где $f \in H_\gamma^{S-m+\alpha}(\mathbb{R}_N)$ , то $u \in H_\gamma^{s+\alpha}(\mathbb{R}_N)$ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. К уравнению $Au = f$ применим левый регуляризатор, построенный в теореме 3.1.1. Тогда имеем

$$u = Rf + Tu, \tag{3.5.3}$$

где $T$ — оператор порядка -1. Имеем $Rf \in H_\gamma^{s+\alpha}(\mathbb{R}_N), Tu \in H_\gamma^{s+1}(\mathbb{R}_N)$ . Если $\alpha = 0$ , то утверждение теоремы следует из (3.5.1). Пусть $\alpha < 1$ , тогда $H_\gamma^{s-1}$ , откуда и из (3.5.3) получаем утверждение теоремы. Пусть $\alpha > 1$ , тогда из (3.5.3) можно лишь утверждать,что $u \in H_\gamma^{s+1}$ . Следовательно. утверждение теоремы переходит в этом случае в утверждение: Если $u \in H_\gamma^{s-1}(\mathbb{R}_N)$ и $Au = f \in H_\gamma^{s-m+\alpha})$ , то $u \in H_\gamma^{s+\alpha}(\mathbb{R}_N)$ . Теперь в равенстве (3.5.3) мы имеем $Rf \in H_\gamma^{s+\alpha}, Tu \in H_\gamma^{s+2}$ . Если $\alpha = 2$ , то теорема доказана. Если $\alpha > 2$ , то $u \in H_\gamma^{s+\alpha}$ утверждение теоремы следует из (3.5.3). Если $\alpha > 2$ , то $u \in H_\gamma^{s+2}$ и мы переходим к утверждению: Если $u \in H_\gamma^{s+2}(\mathbb{R}_N)$ и $Au = f \in H_\gamma^{s+\alpha}(\mathbb{R}_N)$ , то $u \in H_\gamma^{s+\alpha}(\mathbb{R}_N)$ .

Через конечное число шагов мы получим требуемый результат. Доказательство теоремы закончено.

# Литература


[1] Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы // УМН. — 1965. — Т. 20. — С. 3 — 120.

[2] Бремернам Г. Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье. — М.: Мир. — 1968. С. 276.

[3] Garding L. Dirichlet's problem for elliptic partial differential equations // Math.Scand.1. — 1953. — P. 53 — 72.

[4] Гохберг И.Ц. К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР. — 1960. — Т. 136. № 3. — С. 1279 — 1282.

[5] Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Матем. сб. — 1955. — Т. 36(78). — № 2. — С. 299 — 310.

[6] Calderon A.P., Zygmund A. Singular integral operators and differential equations // Amer. J. Math. — 1957. — T.79. — C. 901 — 921.

[7] Катрахов В.В. Задачи на собственные значения сингулярных эллиптических операторов // ДАН СССР. — 1972. — Т. 207. № 2. — С. 284 — 287.

[8] Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // Сибирский математ. журнал. — 1980. — Т. XXI. № 1. — С. 87 — 97.

[9] Катрахов В.В., Ляхов Л.Н. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференц. Уравнен. — 2011, Т. 47. № 5. — С. 681 — 695.

[10] Киприянов И.А. О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов и его приложениях // Тр. МИАН СССР. — 1969. Т. 105. — С. 77 — 88.

[11] Киприянов И.А. Об одном классе сингулярных эллиптических операторов 1 // Диф. ур. Т. 7. — 1971. — С. 2065 — 2077.

[12] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, — 1997. — С. 199.

[13] Киприянов И.А., Богачев Б.М. О следах функции из весового пространства // ДАН СССР. — 1975. Т. 225, №4 — С. 756 — 758.

[14] Киприянов И.А., Богачов Б.М. О нормальной разрешимости некоторых сингулярных и вырождающихся уравнений // Сб. Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск. — 1978. — С. 104 — 110.

[15] Киприянов И.А., Катрахов В.В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Математ. сборн., 104, № 1, — 1977.

[16] Киприянов И.А., Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига // Сиб.мат.журн. — 1970.— Т.11, № 5. — С. 1060 — 1082.

[17] Киприянов И.А., Ключанцев М.И. Об ограниченности одного класса сингулярных интегральных операторов // ДАН. — 1969.— Т. 186. — № 6.— С. 740 — 743.

[18] Киприянов И.А., Ключанцев М.И. Оценки поверхностных потенциалов, порожденных обобщенным сдвигом // ДАН. — 1969. — Т. 188. — № 5. — С. 115 — 118.

[19] Киприянов И.А., Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига // Сиб. мат. журн.— 1970.— Т. 11. — № 5.— С. 1060 — 1082.

[20] Киприянов И.А., Кононенко В.И. О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5. — № 8. — С. 1470 — 1483.

[21] Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения $B$-эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3. — № 1.— С. 114 — 129.

[22] Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218, № 2. — С. 278 — 280.

[23] Кон Дж., Ниренберг А. Алгебра псевдодифференциальных операторов // Сб. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир. — 1967.

[24] Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // УМН. — 1951, Т. 6, — С. 102 — 143.

[25] Левитан Б.М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их приложения // М: ГИФМЛ. — 1962. — С. 323.

[26] Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложения классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН. — 1969. — Т. 105. — С. 89 — 167.

[27] Ляхов Л.Н. О нормальной разрешимости некоторых сингулярных псевдодифференциальных уравнений // Труды конференции «Дифференциальные уравнения и вычислительная математика». Новосибирск. — 1980. — С. 41 — 44.

[28] Ляхов Л.Н. Об априорной оценке одного класса эллиптических псевдодифференциальных уравнений // Сборник научн. работ «Корректные задачи для неклассических уравнений математической физики». Новосибирск. — 1980.

[29] Ляхов Л.Н. Однородные сингулярные псевдодифференциальные операторы // Сборник научн. работ «Математические исследования». АН Молд.СССР. — 1980. — С. 111 — 123.

[30] Ляхов Л.Н. $B$-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с $B$-потенциальными ядрами // Липецк: ЛГПУ. — 2007. — С. 232

[31] Ляхов Л.Н. О радиальных функциях и классических стационарных уравнениях в евклидовых пространствах дробной размерности // Минск. 2012. издательский центр БГУ. Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений AMADE-2011. — С. 115 — 126.

[32] Lyakhov L.N., Roschupkin S.A. A Priori Estimates for Solutions of Singular $B$-Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel $\partial_B$-Operators // Jornal Of Mathematical Sciences Volume 196, Number 4 January 28, — 2014. — С. 563 — 571.

[33] Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А. Об априорной оценке решений сингулярных $B$-эллиптических псевдодифференциальных уравнений с $\partial_B$ оператором Бесселя // Проблемы математ. анализа, — Т. 74, декабрь 2013. — С. 109 — 116.

[34] Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А. Полное преобразование Фурье-Бесселя некоторых основных функциональных классов // Журнал «НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ» Белгородского государственного университета № 11 (154) 2013. Выпуск 31. Математика Физика. — С. 85 — 92.

[35] Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А. Априорная оценка решений одного класса $B$-эллиптических уравнений // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль: М.: МИАН. — 2012. — С. 109 — 110.

[36] Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А. Сингулярные псевдодифференциальные операторы Фурье-Бесселя в весовых классах Соболева-Киприянова в $H_\gamma^s$ // Обратные и некорректные задачи математической физики и анализа:

Тез. докл. научн. конф., Новосибирск, 5 — 12 августа 2012 г. — Новосибирск. — 2012. — С. 391.

[37] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения // М.: ГИФМЛ. — 1962. С. 255.

[38] Pitre J. Elliptic partial differential equations of higer order // Lecture notes № 40. Univ. of Maryland, Inst. for Flide. Dinamics, — 1962.

[39] Райхельгауз Л.Б. Полное преобразование Фурье-Бесселя и сингулярные дифференциальные операторы с $D_B$ -оператором Бесселя // Диссерт. канд. физ.-мат. наук. Воронеж, ВГУ. — 2011. — С. 110.

[40] Рощупкин С.А. Представление сингулярных линейных $D_B$ -операторов в образах полного преобразования Фурье-Бесселя // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания: материалы восьмой школы молодых ученых Липецкой области. Ц Липецк: ЛГПУ. — 2012. — С. 127 — 139.

[41] Рощупкин С.А. Об одном неравенстве для свертки, порожденной смешанным обобщенным сдвигом функций вида $|1+|x|^2|^k$ // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавание. Школа молодых ученых Липецкой области. — Липецк: ЛГПУ. Выпуск 1(4). — 2013. — С. 18 — 22.

[42] Рощупкин С.А. Классы основных функций для полного преобразования Фурье-Бесселя // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 26 — 31 мая 2013 г.). — Белгород: ИПК НИУ «БелГУ». — 2013. — С. 162 — 163.

[43] Рощупкин С.А. О сингулярных $F_B$ -псевдодифференциальных операторах в полупространстве // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: сб. материалов Международной научной конференции (Республика Башкортостан, Стерлитамак, 26 — 30 июня 2013 г.). Ц Стерлитамак: УФА РИЦ БашГУ. — 2013. — Т. 1. — С. 86 — 90.

[44] Рощупкин С.А. О многомерных псевдодифференциальных операторах Киприянова-Катрахова // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ — 2014», 26 — 31 января 2014 г. Научная книга. Воронеж. — 2014. — С. 266 — 272.

[45] Сили Р.Т. Интегро-дифференциальные операторы на векторных расслоениях // Сб. Математика. — 1967. — С. 57 — 97.

[46] Чернышев Г.Л. О задаче Коши с сингулярным гиперболическим оператором // Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Воронеж. — 1973. — С. 11.