ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Дикарев
Егор Евгеньевич

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель
доктор физико–математических наук
профессор Баскаков А. Г.

Воронеж – 2015

Содержание

Список обозначений

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел;

$\mathbb{R}$ — поле вещественных (действительных) чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{J}$ — один из промежутков $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$;

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел;

$\mathbb{T}$ — группа комплексных чисел, модуль которых равен единице (единичная окружность);

$A \times B$ — декартово произведение множеств A и B;

$\varphi * \psi$ — свёртка функций φ и ψ;

$\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство;

$\mathrm{C_b}$ — пространство непрерывных ограниченных функций;

$\mathrm{C_{bu}}$ — пространство непрерывных равномерно ограниченных функций;

$\mathrm{C_0}$ — пространство исчезающих на бесконечности функций;

$\mathrm{L^p}$ — пространства Лебега суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ функций;

L_α — банахова алгебра комплекснозначных функций, суммируемых с весом α, со свёрткой функций в качестве умножения;

L^1 — банахова алгебра всех суммируемых функций со свёрткой функций в качестве умножения;

$\mathcal{F}$ — однородное пространство функций;

$S(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — изометрическая группа операторов сдвигов;

$\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f;

$\Lambda(x)$ — спектр Бёрлинга вектора x;

$\Lambda(X)$ — спектр Бёрлинга оператора X;

$\operatorname{supp}\varphi$ — носитель функции φ;

I — тождественный оператор в любом из рассматриваемых пространств;

$\mathrm{D}(A)$ — область определения оператора A;

$\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A;

$\sigma(A)$ — спектр оператора A;

$\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ — комплексный спектр оператора A;

R_A — резольвента оператора A;

$\mathrm{r}(x)$, $\mathrm{r}_{\mathrm{B}}(x)$ — спектральный радиус вектора x;

$\mathcal{X}(\Delta)$ — спектральный подмодуль, где Δ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$;

$\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на $\mathscr{X}_1$ со значениями в $\mathscr{X}_2$;

$\operatorname{End}\mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$;

T, $\mathcal{T}$, $\widetilde{T}$ — (полу)группа линейных операторов;

$\mathrm{ad}_{\mathrm{AB}}$ — оператор коммутирования операторов A и B;

Введение

Одно из основных направлений развития теории операторов связано с изучением аксиоматически выделяемых классов линейных операторов, допускающих определённые аналоги спектральных разложений самосопряжённых и нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Определяющим является требование наличия у вводимого класса операторов инвариантных подпространств таких, что спектры сужения оператора на эти подпространства лежат в наперёд заданных компактах и порождающих в том или ином смысле исходное пространство. На таком подходе основано определение и изучение классов нормальных, самосопряжённых, спектральных (по Данфорду), обобщённых спектральных, разложимых (по Фойашу), неквазианалитических (по Любичу – Мацаеву) и многих других классов линейных операторов.

Данная диссертация посвящена изучению некоторых классов линейных операторов, действующих в банаховых пространствах. Основными методами исследования являются методы гармонического анализа, которые используются благодаря наличию достаточно обширного функционального исчисления для рассматриваемых классов операторов. Спектральный анализ достаточно широких классов операторов, находящих применение при изучении дифференциальных и разностных уравнений, в данной диссертации делает задачу их изучения актуальной.

Цель работы состоит в развитии методов гармонического анализа линейных операторов, обобщении неравенств Бернштейна и Бора–Фавара на более широкий класс операторов, получении приложений указанных неравенств, в частности, к методу подобных операторов.

Методы исследования. Основными методами исследования являются методы гармонического анализа, спектральной теории операторов, теории функций, теории представлений групп и полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах.

Научная новизна. В диссертации получен ряд новых результатов.

1. Доказано существование нетривиальных инвариантных подпространств для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

2. Получен абстрактный аналог неравенства Бернштейна для векторов и некоторых классов операторов.

3. Получены приложения неравенства Бернштейна к оценкам норм производных функций из однородных пространств, целых на бесконечности функций, оценкам норм операторов коммутирования.

4. Получен абстрактный аналог неравенства Бора – Фавара для векторов и некоторых классов операторов.

5. Получены оценки проекторов на спектральное подпространство.

6. Получены приложения неравенства Бора – Фавара к методу подобных операторов (*теорема о расщеплении*), оценке интеграла от функций из однородных пространств.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы для дальнейшего развития методов гармонического анализа, получения приложений к спектральной теории операторов, в частности, оценок типа Бернштейна и Бора – Фавара. Также результаты могут использоваться при чтении спецкурсов в университетах для студентов математических специальностей и применяться специалистами в области гармонического и функционального анализа при исследовании вопросов, связанных с тематикой диссертации.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность основных результатов, полученных в диссертации, обеспечена математической строгостью их изложения в виде теорем с подробными доказательствами и адекватным использованием общеизвестных положений и методов гармонического и функционального анализа, в частности, спектральной теории линейных операторов и теории полугрупп линейных операторов.

Основные результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С. Г. Крейна (2013, 2014 гг.), на Крымских осенних математических школах (Украина, г. Севастополь, 2010, 2011, 2012 г.), на Крымской международной математической конференции (Украина, г. Судак, 2013 г.), на математическом интернет-семинаре ISEM-2014 (Германия, г. Блаубойрен, 2014 г.), на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана (г. Москва, 2014 г.), на семинарах А. Г. Баскакова и научных сессиях Воронежского государственного университета.

Публикации автора по теме диссертации. Основные результаты диссертации содержатся в работах [24–32]. Работы [30–32] опубликованы в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Личный вклад автора. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Из совместных публикаций [31, 32] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, и библиографии, включающей 72 наименования.

Основные результаты содержатся во 2, 3 и 4 главах. Общий объем диссертации составляет 101 страницу.

Глава 1 содержит сводку широко используемых в диссертации определений и результатов из спектральной теории замкнутых операторов, теории топологических групп, банаховых алгебр, банаховых модулей, представлений групп и полугрупп линейных операторов.

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\operatorname{End}\mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$, G — локально компактная абелева группа, $\widehat{G}$ — локально компактная группа непрерывных унитарных характеров группы G. Пусть $T\colon G \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ — сильно непрерывное представление, $\alpha(g) = \|T(-g)\|$, $g \in G$, — весовая функция, удовлетворяющая условию *неквазианалитичности*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha(gn)}{1+n^2} < \infty$$

для любого $g \in G$. Символом $\mathrm{L}_\alpha(G)$ будем обозначать банахову алгебру комплекснозначных функций, суммируемых с весом α, со свёрткой функций в качестве умножения. Банахово пространство $\mathscr{X}$ наделяется структурой банахова $\mathrm{L}_\alpha(G)$ – модуля. Модульная структура строится по представлению T:

$$fx = \int\limits_G f(g)\mathcal{T}(-g)x\,\mathrm{d}g,\ f \in \mathrm{L}_\alpha(G), \quad x \in \mathcal{X},$$

Символом $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ обозначим преобразование Фурье функции $f \in \mathrm{L}_\alpha(G)$.

Определение 2.1. *Спектром Бёрлинга* вектора x из комплексного банахова $\mathrm{L}_\alpha(G)$ – модуля $(\mathscr{X}, T)$ будем называть множество

$$\Lambda(x) = \big\{\chi \in \widehat{G} \mid fx \neq 0, \ \text{ для любой } \ f \in \mathrm{L}_\alpha(G) \ \text{ со свойством } \ \widehat{f}(\chi) \neq 0\big\}.$$

Глава 2 содержит результаты по спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах. В большинстве известных монографий, в которых подробно излагается либо существенно используется спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах, их авторы, как правило, предполагают, что эти пространства являются комплексными либо указывают на возможность комплексификации вещественного банахова пространства. Тем не менее, при построении спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах иногда необходимо подробно отслеживать переход в комплексификацию пространства и обратный переход.

Для неквазианалитического оператора в вещественном банаховом пространстве получены результаты о существовании нетривиального инвариантного подпространства.

Пусть X — вещественное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Если $A \in \operatorname{End} X$, то спектр оператора A может быть пустым множеством. Тем самым, возникает проблема построения по спектру инвариантных подпространств для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

При изучении оператора A обычно осуществляется комплексификация банахова пространства X, т. е. рассматривается банахово пространство $\mathbf{X}$, состоящее из векторов вида $x_1 + \mathrm{i}x_2$, где $x_1, x_2 \in X$.

Оператор A расширяется на $\mathbf{X}$ до оператора $\mathbf{A} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$. Определённые свойства оператора A (например, неквазианалитичность) индуцируют аналогичные свойства для оператора $\mathbf{A}$. Проводится исследование оператора $\mathbf{A}$ методами гармонического анализа. Затем, следуя подходу, разработанному в [4], свойства оператора $\mathbf{A}$ распространяются для исследования оператора A. Таким способом получены условия разложимости по Фойашу, а также устанавливается существование нетривиальных инвариантных подпространств для оператора A.

Используя полученные результаты для $\mathbf{A}$, соответствующее свойство переносится на оператор $A \in \operatorname{End} X$.

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Подмножество $\Delta \in \mathbb{C}$ будем называть *симметричным*, если для любых $\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2 \in \Delta$ $\lambda_1 - \mathrm{i}\lambda_2 \in \Delta$.

Пусть $A \in \operatorname{End} X$ и $\mathbf{A} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$ — комплексификация оператора A, т. е. оператор $\mathbf{A}$ определяется на любом векторе $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$ равенством $\mathbf{A}x = Ax_1 + \mathrm{i}Ax_2$. Спектр оператора $\mathbf{A}$ называется *комплексным спектром* оператора A и обозначается $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$.

Определение 2.8. Вещественное линейное пространство $X^2 = X \times X$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел с законом внешней композиции $(\alpha + \mathrm{i}\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in X^2$, называется *комплексификацией* вещественного линейного пространства X и обозначается через $\mathbf{X}$.

Элементы из $\mathbf{X}$ удобно записывать в виде $x + \mathrm{i}y$, где $x, y \in X$. При этом X будем рассматривать в качестве подпространства $\mathbf{X}$. Норму в $\mathbf{X}$, где X — банахово пространство, определим равенством

$$\|(x, y)\| = \max_{\psi \in [0, 2\pi]} \big\|(\cos\psi)x + (\sin\psi)y\big\|, \quad x, y \in X.$$

Символом $\mathbf{J}$ обозначим отображение $\mathbf{J}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $\mathbf{J}(x + \mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y$, $x, y \in X$, которое будет аддитивным, но не однородным. Ясно, что $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$.

Определение 2.11. Оператор $A \in \operatorname{End} X$ называется *симметрично суперразложимым*, если для любого конечного открытого покрытия $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ симметричными множествами $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, комплексного спектра $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ оператора A существуют операторы $R_1, \dots, R_n \in \operatorname{End} X$ со свойствами:

1) $I = R_1 + \dots + R_n$;

2) операторы $R_k,\ k = 1, \dots, n$, перестановочны между собой, с оператором A и оператором $\mathbf{J}$;

3) $\sigma_{\mathbb{C}}\big(A|\overline{\operatorname{Im} R_k}\big) = \sigma_k \subset U_k,\ k = 1, \dots, n$, где $\operatorname{Im} R_k$ — образ оператора R_k.

Одними из основных результатов главы являются следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T\colon G \to \operatorname{End} X$ — неквазианалитическое сильно непрерывное представление. Тогда опе-*

раторы $T(g)$, $g \in G$, $T(f)$, $f \in \mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{R})$, *где оператор* $T(f)$ *определён формулой*

$$T(f)x = \int\limits_G f(g)T(-g), \mathrm{d}g, \quad x \in \mathscr{X},$$

симметрично суперразложимы.

Теорема 2.2. *Пусть* $T \in \operatorname{End} X$ — *обратимый оператор, для которого* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|T^n\|}{1+n^2} < \infty$. *Тогда оператор* T *является симметрично суперразложимым. Если* $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ *содержит более двух точек, то оператор* T *имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Пусть $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ — сильно непрерывная группа операторов, удовлетворяющая условию неквазианалитичности $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\ln\|T(t)\|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \infty$, с генератором $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$. Тогда имеет место

Теорема 2.3. *Для любого числа* $0 \neq a \in \mathbb{R}$ *оператор* $(A - aI)^{-1} \in \operatorname{End} X$, *где* A — *генератор группы* $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, *является симметрично суперразложимым. Если множество* $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ *содержит более двух точек, то оператор* A *имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Глава 3 содержит результаты, связанные с получением неравенств типа Бернштейна, связывающих норму оператора (вектора) с его спектральным радиусом.

В статье [58] С. Н. Бернштейном было получено неравенство

$$\|x'\|_\infty \leqslant 2n \cdot \|x\|_\infty$$

для любого тригонометрического многочлена

$$x(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad |\alpha_{-n}| + |\alpha_n| > 0,$$

из пространства $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) = \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Практически сразу оно было уточнено Э. Ландау:

$$\|x'\|_\infty \leqslant n \cdot \|x\|_\infty.$$

Константа n является точной.

В 1914 году М. Рисс [70], используя интерполяционную формулу, обобщил неравенство на случай произвольного тригонометрического полинома с комплексными коэффициентами.

Затем С. Н. Бернштейном [59] было получено неравенство

$$\|x'\|_\infty \leqslant \sigma \cdot \|x\|_\infty \tag{3.3}$$

для целой функции x экспоненциального типа $\sigma > 0$, принадлежащей пространству $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$. Отметим статьи [34, 48], где аналоги неравенства Бернштейна были получены в других функциональных пространствах.

В 70-х годах прошлого столетия многие авторы стали получать аналоги неравенства Бернштейна для специальных классов линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве. В статье [50] неравенство Бернштейна для операторов было получено с использованием оценки (3.3) для функций. В статье [8] неравенство для оценки нормы оператора было получено на основе аналога интерполяционной формулы Боаса [1], полученной для оцениваемого оператора. Это представление использовалось в статье [30] для оценки нормы векторов из банахова пространства. Сразу отметим, что, хотя полученные здесь оценки для векторов и операторов, действующих в комплексных банаховых пространствах, с помощью комплексификации банахова пространства и результатов статей [4, 31, 49], они распространяются и для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

Пусть $\mathrm{i}A$ — генератор изометрической группы операторов $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Отметим, что оператор A может являться неограниченным.

Определение 3.1. *Спектром Бёрлинга вектора* x из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$. Если множество $\Lambda(x)$ компактно, то через $\mathrm{r_B}(x)$ обозначим число $\mathrm{r_B}(x) = \max\limits_{\lambda\in\Lambda(x)} |\lambda|$, называемое *спектральным радиусом* вектора $x \in \mathscr{X}$.

Теорема 3.1. *Если вектор x из $\mathscr{X}$ имеет компактный спектр Бёрлинга, то $x \in \mathrm{D}(A^m)$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$ и справедливы оценки*

$$\|A^m x\| \leqslant \mathrm{r_B}(x)^m \cdot \|x\|$$

при $m \geqslant 1$.

Через $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем обозначать банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определённых на вещественной оси со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathscr{X}$, с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big\|x(t)\big\|$, $x \in \mathrm{C_b}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$. Символом $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем обозначать подпространство равномерно непрерывных функций из $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$. Также рассматривается подпространство $\mathrm{C_0}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ функций, исчезающих на бесконечности, а именно, $x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, если $\lim\limits_{|t|\to\infty} \big\|x(t)\big\| = 0$.

Определение 3.5. Функцию $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем называть *целой на бесконечности* функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_0 \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции $\widetilde{x_0}\colon \mathbb{C} \to \mathscr{X}$ экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$ такая, что $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$.

Теорема 3.2. *Пусть функция $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такая целая функция x_0 экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$ и функция $y_0 \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ такие, что $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и имеет место оценка*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \big\|x_0'(t)\big\| \leqslant (\sigma + \varepsilon) \lim_{\alpha\to\infty} \sup_{|t|>\alpha} \big\|x(t)\big\|.$$

Пусть $\mathscr{X}_1,\ \mathscr{X}_2$ — банаховы пространства. Через $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов (*гомоморфизмов*), действующих из $\mathscr{X}_1$ в $\mathscr{X}_2$.

Пусть $\mathrm{i}A_1,\ \mathrm{i}A_2,\ A_k \in \mathrm{End}\,\mathscr{X}_k,\ k = 1, 2,$ — генераторы изометрических групп $T_1 \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_1$ и $T_2 \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_2$ соответственно.

Банахово пространство $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ наделяется структурой банахова модуля по представлению $T \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ вида $T(t)X = T_2(t)XT_1(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$.

В следующей теореме символом $\Lambda(X) = \Lambda(X, T)$ будем обозначать *спектром Бёрлинга оператора* $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$, где оператор X рассматривается как элемент банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$. В статье [57] спектр Бёрлинга оператора назвался *памятью оператора*.

Обозначим символом ad_{A_1,A_2} оператор вида $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = A_2X - XA_1$. В случае, когда $A_1 = A_2 = A$, $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = \mathrm{ad}_A X = AX - XA$ — коммутатор.

Оператор X принадлежит $\mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$, если $X\mathrm{D}(A_1) \subset \mathrm{D}(A_2)$ и оператор $A_2X - XA_1$ допускает ограниченное расширение на $\mathscr{X}_1$. В дальнейшем это расширение будет обозначаться тем же символом $A_2X - XA_1$.

Теорема 3.3. *Если спектр Бёрлинга* $\Lambda(X, T)$ *оператора* $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ *является компактным множеством, то справедливо следующее неравенство:*

$$\left\|\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X\right\| \leqslant \mathrm{r_B}(X) \cdot \|X\|,$$

где $\mathrm{r_B}(X) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda(X)} |\lambda|$.

Далее символом $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем обозначать пространство локально суммируемых функций, определённых на вещественной оси, со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathscr{X}$.

Пространством Степанова $\mathcal{S}^{\mathrm{p}}$, $\mathrm{p} \in [0, \infty)$, будем называть совокупность локально суммируемых функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|x\|_{\mathcal{S}^{\mathrm{p}}} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big(\int\limits_0^1 \big\|x(s+t)\big\|^{\mathrm{p}} \, \mathrm{d}s \Big)^{1/\mathrm{p}} < \infty.$$

Функциональное банахово пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем называть *однородным*, если оно обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{F}$ непрерывно вложено в пространство Степанова $\mathcal{S}^1$;

2) для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{F}$ имеет место $S(t)x \in \mathcal{F}$, где оператор сдвига $\big(S(t)x\big)(s) = x(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{F}$, является изометрией из $\operatorname{End} \mathcal{F}$;

3) для $x \in \mathscr{X}$ и $C \in \operatorname{End} \mathscr{X}$ функция $y(t) = Cx(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|y\| \leqslant \|C\| \cdot \|x\|$;

4) для любых функций $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}$ их свёртка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)x(t-s) \, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|f * x\| \leqslant \|f\|_1 \|x\|$;

5) если Функция $x \in \mathcal{F}$ такова, что $f * x = 0$ для всех $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, то $x = 0$ (*свойство невырожденности*).

Непосредственно из определения однородного пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ является банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модулем, структура которого определяется представлением $S\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$.

Теорема 3.4. *Если спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ функции $x \in \mathcal{F}$ является компактным множеством, то x допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа $\sigma = \mathrm{r_B}(x)$ и для производной $x^{(k)}$, $k \geqslant 1$, имеют место оценки*

$$\big\|x^{(k)}\big\|_{\mathcal{F}} \leqslant \sigma^k \|x\|_{\mathcal{F}}, \quad k \geqslant 1.$$

Рассматривается группа операторов (представление) $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, допускающих оценку

$$\|T(-t)\| \leqslant \alpha(t) = \mathrm{c}_1(1 + \mathrm{c}_2|t|)^\gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

где $\mathrm{c}_1 \geqslant 1$, $\mathrm{c}_2 \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$. Ясно, что условие (3.8) влечёт неквазианалитичность веса α. Таким образом, если $\gamma = 0$ и $\mathrm{c}_1 = 1$, то T — группа изометрий.

Основные результаты главы получены с использованием следующих величин:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}(a) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left(\frac{k\pi-\pi}{a}\right)}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}, \quad a > 0,$$

в предположении, что выполнено условие (3.8) на вес α (отметим, что $\mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}(a) = a$ в случае $\alpha = 1$);

$$\mathrm{C}_\mathrm{B} = \inf\left\{\|f\|_\alpha \;\middle|\; f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}),\ \widehat{f}(\lambda) = \lambda \text{ в окрестности } [-1, 1]\right\},$$

а также

$$\mathrm{C}_\mathrm{B}(a) = a \sup_{\tau>0} \frac{\alpha(\tau/a)}{\alpha(\tau)} \mathrm{C}_\mathrm{B}.$$

Отметим, что в случае веса α, удовлетворяющего условию (3.8), величина

$$\mathrm{C}_\mathrm{B}(a) = a \sup_{\tau>0} \left(\frac{1 + \frac{\mathrm{c}_1}{a}\tau}{1 + \mathrm{c}_1\tau}\right)^\gamma \mathrm{C}_\mathrm{B}$$

в зависимости от a и γ принимает следующие значения: $\mathrm{C}_\mathrm{B}(a) = a \cdot \mathrm{C}_\mathrm{B}$ при $a \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$ и $\mathrm{C}_\mathrm{B}(a) = a^{1-\gamma} \cdot \mathrm{C}_\mathrm{B}$ при $0 < a < 1$, $0 \leqslant \gamma < 1$. В случае $0 < a < 1$, $\gamma \geqslant 1$, не существует константы, связывающей норму вектора с его спектральным радиусом в классе растущих полугрупп операторов (например, для нильпотентных операторов).

Теорема 3.5. *Пусть вес $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию (3.8) с $0 < \gamma < 1$. Тогда любой вектор $x \in \mathcal{X}$ с компактным спектром Бёрлинга $\Lambda(x)$*

принадлежит области определения оператора A. Имеет место представление

$$Ax = \mathrm{r_B}(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\right)x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}$$

и оценка

$$\|Ax\| \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}\big(\mathrm{r_B}(x)\big) \cdot \|x\|, \quad n \geqslant 1.$$

Отметим, что теорема 3.1 является непосредственным следствием теоремы 3.4. А именно, если $\mathrm{c}_1 = 1$ и $\gamma = 0$, то $x \in \mathrm{D}(A^n)$, и имеют место оценки

$$\left\|A^n x\right\| \leqslant \mathrm{r_B}(x)^n \|x\|$$

для любого вектора x с компактным спектром Бёрлинга.

Теорема 3.6. *Пусть $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, — весовая функция, удовлетворяющая условию (3.10), и вектор $x \in X$ имеет компактный спектр Бёрлинга. Тогда $x \in \mathrm{D}(A)$ и имеет место оценка*

$$\|Ax\| \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r_B}(x)\big) \cdot \mathrm{r_B}(x).$$

В частности, если A — ограниченный оператор, то $\|A\| \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r}(A)\big) \cdot \mathrm{r}(A)$, где $\mathrm{r}(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ — спектральный радиус оператора A.

Глава 4 содержит результаты, касающиеся неравенств Бора–Фавара для операторов. Для генераторов изометрических групп операторов и групп операторов полиномиального роста получены оценки нормы обратного оператора через его спектральный радиус. Полученные оценки находят применение в теории приближений функций и в исследованиях, где применяется метод подобных операторов.

В 1935 году Х. Бором [60] было доказано неравенство (оценка нормы интегрального оператора)

$$\|Jx\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2n}\|x\|_\infty = \frac{\pi}{2n} \max_{t\in[0,2\pi]} \big|x(t)\big|$$

для любой непрерывной 2π–периодической функции с рядом Фурье вида $x(t) \sim \sum\limits_{|k|\geqslant n} a_n e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}$, и интеграла $Jx = J_n x = \sum\limits_{|k|\geqslant n} \frac{1}{ik} a_n e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}$. Таким образом, получена оценка нормы $\|J_n\|$ оператора интегрирования в подпространстве $C_{2\pi,n}(\mathbb{R})$ банахова пространства $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ периодических периода 2π функций, спектр которых лежит вне интервала $(-n, n)$. Полученная оценка является точной, т. е. $\|J_n\| = \frac{\pi}{2n}$. Затем эта оценка была распространена Ж. Фаваром [66] и Б. М. Левитаном [38] на почти периодические функции.

Рассматривается сильно непрерывное представление $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство, с генератором $iA\colon D(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Банахово пространство $\mathscr{X}$ Наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$ – модуля по представлению T.

Одним из основных результатов главы является

Теорема 4.1. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(\mathscr{X})$ банахова $L^1(\mathbb{R})$ – модуля $(\mathscr{X}, T)$ представим в виде*

$$\Lambda(\mathscr{X}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$$

непересекающихся замкнутых множеств σ_0 и σ_1, где σ_0 — компактное множество. Тогда $\mathscr{X}$ представимо в виде

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}(\sigma_0) \oplus \mathscr{X}(\sigma_1).$$

Это разложение осуществляют проекторы P_0, $P_1 = I - P_0$ (т. е. $\operatorname{Im} P_k = \mathscr{X}(\sigma_k)$, $k = 0, 1$), где проектор P_0 определяется формулой

$$P_0 x = f_0 x, \quad x \in \mathscr{X},$$

т. е. $P_0 = T(f_0)$, где f_0 — любая функция из $L^1(\mathbb{R})$ со свойством: $\widehat{f_0} = 1$ в некоторой окрестности σ_0 и $\widehat{f_0} = 0$ в некоторой окрестности σ_1, причём $\|P_0\| \leqslant \inf\limits_f \|f\|$, где инфимум берётся по всем функциям f с указанным свойством для f_0.

Теорема 4.2. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(y)$ вектора y из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля (X, T) не содержит нуля. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathrm{D}(A)$ такой, что*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$*;*

2) $x \in \mathrm{D}(A)$*;*

3) $Ax = y$*;*

4) $\|x\| \leqslant \dfrac{\pi}{2\,\mathrm{dist}\big(0, \Lambda(y)\big)}\|y\|$.

Символом $T\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}$ будем обозначать представление алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ операторами из алгебры $\mathrm{End}\,\mathscr{X}$, определяемое равенствами

$$T(f)x = fx, \quad x \in \mathscr{X}, \ \ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}).$$

Отметим, что представление T является гомоморфизмом алгебр, т. е. $T(f_1 * f_2) = T(f_1)T(f_2)$. Для каждой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ оператор $T(f)$ является линейным ограниченным оператором и имеет место оценка $\big\|T(f)\big\| \leqslant \|f\|_1$.

Теорема 4.3. *Пусть $\sigma_0 = [-a, a]$, $\sigma_1 = \mathbb{R} \setminus (-b, b)$, где $0 \leqslant a < b$. Тогда $\mathscr{X} = \mathscr{X}(\sigma_0) \oplus \mathscr{X}(\sigma_1)$ и норма проектора P_0 допускает оценку вида*

$$\|P_0\| \leqslant \|P_0\| \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}.$$

Теорема 4.4. *Пусть вектор $y \in \mathscr{X}$ представим в виде $y = y_0 + y_1$, где $\Lambda(y_0) \subset [-a, a]$ и $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b, b)$, где $0 \leqslant a < b$. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathscr{X}$ со свойствами*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y_1) \subset (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$*;*

2) $x \in \mathrm{D}(A)$*;*

3) $Ax = y_1 = y - y_0$*;*

4) $\|x\| \leqslant \frac{\pi}{2b}\Big(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}\Big)\|y\|$.

Пусть $A\colon \mathrm{D}(A)\subset \mathscr{X}_1\to\mathscr{X}_1$, $B\colon \mathrm{D}(B)\subset\mathscr{X}_2\to\mathscr{X}_2$ — замкнутые линейные операторы, $C\in\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_2,\mathscr{X}_1)$, $D\in\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$, и имеет место условие *равномерной отделимости спектров*

$$\mathrm{d}=\mathrm{dist}\,\big(\sigma(A),\sigma(B)\big)=\inf_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ \mu\in\sigma(B)}}|\lambda-\mu|>0 \tag{4.9}$$

$\sigma(A)$, $\sigma(B)$ операторов A, B.

Рассмотрим линейный оператор

$$\mathbb{A}\colon \mathrm{D}(A)\times\mathrm{D}(B)\subset\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\to\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2,$$

заданный операторной матрицей $\left(\begin{smallmatrix}A & C\\ D & B\end{smallmatrix}\right)$, т. е.

$$\mathbb{A}(x_1,x_2)=(Ax_1+Cx_2, Dx_1+Bx_2)$$

для любой упорядоченной пары $(x_1,x_2)\in\mathrm{D}(A)\times\mathrm{D}(B)$.

Оператор $\mathbb{A}$ представим в виде $\mathbb{A}=\mathcal{A}-\mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A}\colon\mathrm{D}(A)\times\mathrm{D}(B)\subset\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\to\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2$ задаётся матрицей $\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{smallmatrix}\right)$, а оператор $\mathcal{B}\in\mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2)$ определяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix}0 & -C\\ -D & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Рассмотрим канонические проекторы

$$P_1x=(x_1,0),\ P_2x=(0,x_2),\quad x=(x_1,x_2)\in\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2.$$

Для любого оператора $X\in\mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2)$ рассмотрим операторы $P_iXP_j\in\mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2)$, $i,j\in\{1,2\}$. Таким образом, любой оператор $X\in\mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2)$ задаётся матрицей

$$X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix},$$

где операторы $X_{ij}\in\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_j,\mathscr{X}_i)$, $i,j\in\{1,2\}$ — сужение оператора P_iXP_j на $\mathscr{X}_j$ с областью значений $\mathscr{X}_i$.

Символом $\mathfrak{U}$ обозначим пространство $\mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$, которое в дальнейшем будем называть *пространством допустимых возмущений*. Символами $\mathfrak{U}_{ij}$ будем обозначать банаховы пространства $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_j, \mathscr{X}_i)$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Будем считать, что операторы $\mathrm{i}A$ и $\mathrm{i}B$ являются генераторами сильно непрерывных групп изометрий $T_A \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_1$ и $T_B \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_2$ соответственно.

Трансформатор $\mathrm{J} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}$ (оператор блочной диагонализации) определим формулой $\mathrm{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$, $(\mathrm{J}X)x = (P_1XP_1 + P_2XP_2)(x_1, x_2) = (X_{11}x_1, 0) + (0, X_{22}x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$, $X \in \mathfrak{U}$, $X_{ii} \in \mathfrak{U}_{ii}$, $i \in \{1, 2\}$.

Рассмотрим трансформаторы

$$\mathrm{ad}_{AB} \colon \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{AB}) \subset \mathfrak{U}_{21} \to \mathfrak{U}_{21}, \quad \mathrm{ad}_{AB}X = AX - XB, \;\; X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{AB}),$$

$$\mathrm{ad}_{BA} \colon \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{BA}) \subset \mathfrak{U}_{12} \to \mathfrak{U}_{12}, \quad \mathrm{ad}_{BA}X = BX - XA, \;\; X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{BA}),$$

которые являются генераторами групп изометрий

$$T_{AB} \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{21}, \quad T_{AB}(t)X = T_A(t)XT_B(-t), \;\; t \in \mathbb{R}, \; X \in \mathfrak{U}_{21},$$

$$T_{BA} \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{12}, \quad T_{BA}(t)X = T_B(t)XT_A(-t), \;\; t \in \mathbb{R}, \; X \in \mathfrak{U}_{12},$$

соответственно.

Трансформаторы ad_{AB} и ad_{BA} обратимы. Обратные к ним операторы обозначим соответственно $\Gamma_{12} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{12}$ и $\Gamma_{21} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{21}$. Операторы $\Gamma_{12}X_{12}$ и $\Gamma_{21}X_{21}$ являются решениями нелинейных уравнений $\mathbb{A}Y - Y\mathbb{A} = X - \mathrm{J}X$, где $Y \in \mathfrak{U}$ обладает свойством $\mathrm{J}Y = 0$. Применяя проекторы P_1, P_2 к последнему уравнению, получаем следующую эквивалентную систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} A\Gamma_{12} - \Gamma_{12}B = X_{12}, \\ B\Gamma_{21} - \Gamma_{21}A = -X_{21}, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $\Gamma_{12} \in \mathfrak{U}_{12}$, $\Gamma_{21} \in \mathfrak{U}_{21}$. В случае, когда оператор A или оператор B ограничен, из результатов работ [13, 14] следует, что система уравнений (4.11) разрешима.

Трансформатор $\Gamma \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}$ определим следующим образом:

$$(\Gamma X)x = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}X_{12} \\ \Gamma_{21}X_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_{12}X_{12})x_2 \\ (\Gamma_{21}X_{21})x_1 \end{pmatrix},$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ и $\Gamma_{12} \in \operatorname{End}\mathfrak{U}_{12}$, $\Gamma_{21} \in \operatorname{End}\mathfrak{U}_{21}$.

Непосредственно из определения трансформаторов J и Γ следует, что имеет место равенство

$$\mathbb{A}(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(\mathcal{A} - \mathrm{J}X), \tag{4.14}$$

проверяемое для матриц указанных операторов.

Уравнение (4.14) эквивалентно выполнению условий

$$\begin{cases} X_{11} = C\Gamma_{21}X_{21}, \\ X_{12} = -(\Gamma_{12}X_{12})D\Gamma_{12}X_{12} + C, \\ X_{21} = -(\Gamma_{21}X_{21})C\Gamma_{21}X_{21} + D, \\ X_{22} = D\Gamma_{21}X_{12}, \end{cases} \tag{4.15}$$

где второе и третье уравнения рассматриваются в пространствах $\mathfrak{U}_{12}$ и $\mathfrak{U}_{21}$ соответственно.

Символом γ будем обозначать величину $\frac{\pi}{2\mathrm{d}}$, участвующую в оценке (4.9).

Теорема 4.5. *При условии*

$$2\gamma\sqrt{\|C\| \cdot \|D\|} = \frac{\pi}{\mathrm{d}}\sqrt{\|C\| \cdot \|D\|} < 1 \tag{4.16}$$

система (4.15) разрешима, причём решения $X_{12}^{(0)}$, $X_{21}^{(0)}$ могут быть найдены методом последовательных приближений с начальными значениями $X_{12}^{(1)} = X_{21}^{(1)} = 0$. При этом имеют место оценки

$$\|X_{12}^{(0)}\| \leqslant \frac{2\|C\|}{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}}, \qquad \|X_{21}^{(0)}\| \leqslant \frac{2\|D\|}{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}}.$$

Определение 1.20. Два линейных оператора $A_i \colon \mathrm{D}(A_i) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $i \in \{1, 2\}$, будем называть *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ такой, что $U\mathrm{D}(A_2) = \mathrm{D}(A_1)$ и имеет место равенство $A_1Ux = UA_2x$ для всех $x \in \mathrm{D}(A_2)$. При этом оператор U будем называть *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Одним из основных результатов параграфа 2 является следующая

Теорема 4.6. *При условии* $\pi\sqrt{\|C\|\cdot\|D\|} < 1$ *операторы* $\mathbb{A}$ *и* $\mathcal{A} - \mathrm{J}X^{(0)}$ *подобны, где* $X^{(0)} = -$ *единственное решение системы (4.15) и*

$$\mathrm{J}X^{(0)} = \begin{pmatrix} X_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & X_{22}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$, заданный операторной матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ D & B \end{smallmatrix}\right)$, подобен оператору $\mathcal{A} - \mathrm{J}X$, заданному операторной матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A-X_{11} & 0 \\ 0 & B-X_{22} \end{smallmatrix}\right)$.

Опишем приложения полученных в теоремах 4.5 и 4.6 результатов к оценкам интеграла от функций из однородных пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$.

Теорема 4.7. *Пусть спектр Бёрлинга* $\Lambda(y)$ *функции* y *из однородного пространства функций* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *не содержит нуля. Тогда существует единственная функция* $x \in \mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *такая, что*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$*;*

2) $x' = y$*;*

3) $\|x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \dfrac{\pi}{2\operatorname{dist}\big(0, \Lambda(y)\big)}\|y\|_{\mathcal{F}}$.

Теорема 4.8. *Пусть функция* y *принадлежит однородному пространству функций* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *и допускает представление вида* $y = y_0 + y_1$*, где* $\Lambda(y_0) \subset [-a, a]$ *и* $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b, b)$*, где* $0 \leqslant a < b$*. Тогда существует единственная функция* $x \in \mathcal{F}^{(1)}$ *со свойствами*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y_1)$*;*

2) $x' = y_1 = y - y_0$*;*

3) $\|x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \frac{\pi}{2b}\Big(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}\Big)\|y\|_{\mathcal{F}}$.

Глава 1

Элементы спектральной теории линейных операторов и полугрупп линейных операторов

В данной главе содержатся основные определения и результаты, используемые в диссертации. Большая часть из них содержится в книгах и статьях [17, 18, 21, 37, 41, 45–47, 52, 54, 62, 64, 67, 71, 72]

Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — поля вещественных и комплексных чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, $\mathbb{T}$ — группа комплексных чисел, равных по модулю единице.

Символами $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ будем обозначать банаховы пространства, рассматриваемые над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Всюду в диссертации через $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов (*гомоморфизмов*), действующих из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, и через $\mathrm{End}\,\mathscr{X}$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих на $\mathscr{X}$ (*эндоморфизмов*). Таким образом, $\mathrm{End}\,\mathscr{X} = \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}, \mathscr{X})$.

Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор, определенный на некотором подпространстве $D(A)$ пространства X.

Определение 1.1. Линейный оператор $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, определённый на подпространстве $\mathrm{D}(A)$ пространства $\mathscr{X}$, будем называть *замкнутым*, если его *график*

$$\Gamma(A) := \big\{(x, Ax) \;\big|\; x \in \mathrm{D}(A)\big\} \subset \mathscr{X} \times \mathscr{X}$$

является замкнутым подмножеством в пространстве$\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ с нормой

$$\big\|(x_1, x_2)\big\|_{\mathscr{X} \times \mathscr{X}} = \max\big\{\|x_1\|, \|x_2\|\big\},$$

т. е. из условий $\{x_n\} \subset \mathrm{D}(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $x \in \mathrm{D}(A)$ и $Ax = y$.

Определение 1.2. Пусть $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — замкнутый линейный оператор. Комплексное число λ будем называть *регулярной точкой* оператора A, если оператор $A - \lambda I\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ обратим, и *точкой спектра* этого оператора в противном случае. Множество $\rho(A)$ регулярных точек оператора A будем называть *резольвентным множеством* оператора A, а множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — *спектром* оператора A.

Для всякого замкнутого оператора A множество $\rho(A)$ открыто, а $\sigma(A)$ — замкнуто.

Определение 1.3. *Резольвентой* оператора $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ будем называть операторнозначную функцию $\mathrm{R}_A\colon \rho(A) \to \operatorname{End}\mathscr{X}$, определяемую формулой

$$\mathrm{R}_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Резольвента замкнутого оператора A резольвента R_A является аналитической функцией на $\rho(A)$.

Определение 1.4. Группу G будем называть *топологической*, если в ней определена топология τ, относительно которой групповые операции $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ и $g \mapsto g^{-1}$ непрерывны, т. е. отображение

$$f\colon G \times G \to G, \quad f(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}, \quad (g_1, g_2) \in G \times G,$$

непрерывно. По умолчанию имеется в виду, что декартово произведение $G \times G$ наделяется топологией произведения.

Определение 1.5. Топологическую группу G будем называть *локально компактной*, если единица группы имеет компактную окрестность.

Определение 1.6. *Левой* (соответственно, *правой*) *мерой Хаара* на группе будем называть любую левоинвариантную (соответственно, правоинвариантную) регулярную борелевскую меру на этой группе.

На любой локально компактной абелевой группе можно задать меру Хаара, единственную с точностью до умножения на положительное вещественное число (теорема А. Вейля, см. [33]).

Определение 1.7. Пусть G — локально компактная абелева группа. Функцию $\alpha\colon G \to \mathbb{R}$ будем называть *весовой* (*весом*), если выполнены следующие условия:

1) α измерима;

2) $\alpha(g) \geqslant 1$, $g \in G$;

3) $\alpha(g_1 + g_2) \leqslant \alpha(g_1)\alpha(g_2),\ \ g_1, g_2 \in G$.

Определение 1.8. Вес $\alpha\colon G \to \mathbb{R}$ будем называть *неквазианалитическим*, если для любого элемента $x \in G$ выполнено условие

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln \alpha(gn)}{1 + n^2} < \infty, \quad g \in G. \tag{1.1}$$

В случае $G = \mathbb{R}^n$ условие (1.1) эквивалентно *условию Бёрлинга – Домара* для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\ln \alpha(tx)}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t < \infty.$$

Определение 1.9. Отображение $T\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ будем называть *однопараметрической группой операторов* в случае $\mathbb{J} = \mathbb{R}$ или *однопараметрической* *полугруппой операторов* в случае $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$, если $T(0) = I$ и имеет место *групповое* (*полугрупповое*) *свойство* $T(s+t) = T(s)T(t)$, $s, t \in \mathbb{J}$.

Определение 1.10. Группу (полугруппу) $T\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ операторов будем называть *равномерно непрерывной*, если отображение $t \mapsto T(t)\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ непрерывно в *равномерной операторной топологии*, и *сильно непрерывной* (или *класса* $\mathcal{C}_0$), если отображение $t \mapsto T(t)x\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ непрерывно для всех $x \in \mathscr{X}$.

Определение 1.11. *Генератором* или *инфинитезимальным производящим оператором* $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ сильно непрерывной группы (полугруппы) $T\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ операторов будем называть оператор

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t},$$

где

$$\mathrm{D}(A) := \left\{x \in \mathscr{X} \;\middle|\; \text{существует } \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}\right\}.$$

Пусть $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ — сильно непрерывная группа операторов с генератором A. Для $t \geqslant 0$ могут быть определены операторные функции $T_+, T_-\colon [0, \infty) \to \mathscr{X}$, задаваемые следующим образом: $T_+(t) := T(t)$, $T_-(t) := T(-t)$. В этом случае T_+ и T_- — сильно непрерывные полугруппы операторов из $\operatorname{End}\mathscr{X}$ с генераторами A и $-A$ соответственно.

Определение 1.12. Комплексное банахово пространство $\mathscr{X}$ будем называть *банаховой алгеброй*, если оно является алгеброй и для любых векторов $x_1,\ x_2 \in \mathscr{X}$ имеет место оценка $\|x_1 x_2\| \leqslant \|x_1\| \cdot \|x_2\|$. В случае, если $x_1 x_2 = x_2 x_1$ для всех $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$, банахову алгебру X будем называть *коммутативной*. Банахову алгебру, содержащую единицу, будем называть *банаховой алгеброй с единицей*.

Определение 1.13. Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство, $\mathscr{B}$ — коммутативная банахова алгебра, рассматриваемая над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. *Банаховым модулем* ($\mathscr{B}$ – *модулем*) будем называть пространство $\mathscr{X}$ вместе с отображением $(a, x) \mapsto ax \colon \mathscr{B} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, обладающим следующими свойствами:

1) $(a+b)x = ax + bx$ и $a(x+y) = ax + ay$;

2) $(\alpha a)x = a(\alpha x) = \alpha(ax)$;

3) $(ab)x = a(bx)$;

4) $\mathrm{e}x = x$, если $\mathscr{B}$ содержит единицу e;

5) $\|ax\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|$,

для всех $a, b \in \mathscr{B}$, $x, y \in \mathscr{X}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Определение 1.14. Линейный оператор $\varphi \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ между двумя алгебрами будем называть *гомоморфизмом*, если $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$ для всех $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$.

Определение 1.15. Гомоморфизм из алгебры в поле комплексных чисел будем называть *характером* этой алгебры.

Определение 1.16. *Представлением алгебры $\mathscr{A}$ в банаховом пространстве $\mathscr{X}$* будем называть гомоморфизм из $\mathscr{A}$ в $\operatorname{End} \mathscr{X}$.

Определение 1.17. *Пространством Степанова* $\mathcal{S}^{\mathrm{p}}$, $\mathrm{p} \in [0, \infty)$, будем называть совокупность локально суммируемых функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|x\|_{\mathcal{S}^{\mathrm{p}}} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big(\int_0^1 \big\|x(s+t)\big\|^{\mathrm{p}} \, \mathrm{d}s \Big)^{1/\mathrm{p}} < \infty.$$

Определение 1.18. Функциональное банахово пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем называть *однородным*, если оно обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{F}$ непрерывно вложено в пространство Степанова $\mathcal{S}^1$;

2) для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{F}$ имеет место $S(t)x \in \mathcal{F}$, где оператор сдвига $\big(S(t)x\big)(s) = x(s+t)$ является изометрией из $\operatorname{End}\mathcal{F}$;

3) для $x \in \mathscr{X}$ и $C \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ функция $y(t) = Cx(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|y\| \leqslant \|C\| \cdot \|x\|$;

4) для $x \in \mathcal{F}$ и $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ свёртка

$$(g * x)(t) \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)x(t-s)\,\mathrm{d}s$$

принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|g * x\| \leqslant \|g\|_1\|x\|$;

5) если $x \in \mathcal{F}$ таков, что $f * x = 0$ для всех $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, то $x = 0$ (*свойство невырожденности*).

Отметим, что приведённое выше определение однородного пространства отличается от определения, данного в статье [10], которое является более узким. В частности, отсутствует требование $\mathrm{C}_{\mathrm{bu}} \subset \mathscr{F}$, что позволяет расширить класс однородных пространств на важные подпространства пространства C_{bu}, в частности, на периодические, почти периодические и медленно меняющиеся на бесконечности функции.

Непосредственно из определения следует, что любое однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ является банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модулем со свёрткой функций в качестве умножения.

Приведём примеры однородных пространств (см. [56]).

1) Пространства $\mathrm{L}^\mathrm{p} = \mathrm{L}^\mathrm{p}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|x\|_{\mathrm{L}^\mathrm{p}} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \big\|x(s)\big\|^\mathrm{p}\,\mathrm{d}s\Big)^{1/\mathrm{p}} < \infty, \quad \mathrm{p} \in [1, \infty),$$

или $\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} \big\|x(t)\big\|_{\mathscr{X}} < \infty$;

2) Пространства Степанова $\mathcal{S}^\mathrm{p} = \mathcal{S}^\mathrm{p}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, $\mathrm{p} \in [0, \infty)$;

3) Винеровская амальгама $\mathrm{L}^{\mathrm{p,q}} = (\mathrm{L}^{\mathrm{p}}, \ell^{\mathrm{q}}) = \mathrm{L}^{\mathrm{p,q}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in [0, \infty)$, функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p,q}}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\int\limits_0^1 \big\|x(s+k)\big\|^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}s \Big)^{\mathrm{q}/\mathrm{p}} \right)^{1/\mathrm{q}} < \infty, \quad \mathrm{p}, \mathrm{q} \in [1, \infty);$$

4) Пространство $\mathrm{C_b} = \mathrm{C_b}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ непрерывных ограниченных функций с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \big\|x(t)\big\|_{\mathscr{X}}, \quad x \in \mathrm{C_b};$$

5) Подпространство $\mathrm{C_{bu}} = \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_b}$ равномерно непрерывных функций;

6) Подпространство $\mathrm{C_0} = \mathrm{C_0}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_{bu}}$ непрерывных функций, исчезающих на бесконечности: $x \in \mathrm{C_0}$, если $\lim\limits_{|t| \to \infty} \big\|x(t)\big\| = 0$;

7) Подпространство $\mathrm{C_{sl,\infty}} = \mathrm{C_{sl,\infty}}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_{bu}}$ медленно меняющихся на бесконечности функций: $x \in \mathrm{C_{sl,\infty}}$ если $\lim\limits_{|s| \to \infty} \big\|x(s+t) - x(s)\big\| = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (см. [5]);

8) Подпространство $\mathrm{C}_\omega = \mathrm{C}_\omega(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_{bu}}$ всех ω – периодических функций, $\omega \in \mathbb{R}$;

9) Подпространство $\mathrm{AP} = \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_{bu}}$ почти периодических (по Бору) функций (см. [55], [38]);

10) Подпространство $\mathrm{AP}_\infty = \mathrm{AP}_\infty(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_{bu}}$ почти периодических на бесконечности функций (см. [10]), определяемых следующим образом:

$$\mathrm{AP}_\infty := \overline{\mathrm{span}} \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} x \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathrm{C_{sl,\infty}} \right\};$$

11) Пространства $\mathrm{C^k} = \mathrm{C^k}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, $k \in \mathbb{N}$, k раз непрерывно дифференцируемых функций, имеющих ограниченную k - ю производную, с нормой

$$\|x\|_{(\mathrm{k})} = \|x\|_\infty + \big\|x^{(k)}\big\|_\infty < \infty;$$

12) Пространства Гёльдера $\mathrm{C}^{\mathrm{k},\alpha} = \mathrm{C}^{\mathrm{k},\alpha}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1]$, определяемое как

$$\mathrm{C}^{\mathrm{k},\alpha} := \Big\{ x \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}} \;\Big|\; \big\| x^{(k)} \big\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}} := \sup_{t \neq s \in \mathbb{R}} \frac{\big|x(t) - x(s)\big|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty \Big\},$$

с нормой

$$\|x\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}} = \|x\|_{\mathrm{C}^{\mathrm{k}}} + \big\| x^{(k)} \big\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}}.$$

Отметим, что на винеровской амальгаме $\mathrm{L}^{\mathrm{p,q}}$ можно ввести эквивалентную норму следующим образом:

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p,q}}} = \sup_{\tau \in [0,1]} \Bigg(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\int\limits_0^1 \big\| x(s+k+\tau) \big\|^{\mathrm{p}} \, \mathrm{d}s \Big)^{\mathrm{q/p}} \Bigg)^{1/\mathrm{q}} < \infty, \quad \mathrm{p}, \mathrm{q} \in [1, \infty).$$

Важным свойством этой нормы является то, что

$$\big\| S(t) x \big\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p,q}}} = \|x\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p,q}}}, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathrm{L}^{\mathrm{p,q}}.$$

Определение 1.19. *Спектром Бёрлинга* вектора x из комплексного банахова $\mathrm{L}_\alpha(G)$ – модуля $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ будем называть множество

$$\Lambda(x) = \big\{ \chi \in \widehat{G} \;\big|\; \quad fx \neq 0, \ \text{для любой } \ f \in \mathrm{L}_\alpha(G) \ \text{ со свойством } \ \widehat{f}(\chi) \neq 0 \big\}.$$

Лемма 1.1. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{T}) - \mathrm{L}_\alpha(G)$-модуль. Тогда*

а) Для любого подмножества $M \subset \mathcal{X}$ множество $\Lambda(M)$ замкнуто в спектре $\operatorname{Sp} \mathrm{L}_\alpha(G)$ алгебры $\mathrm{L}_\alpha(G)$ и пусто тогда и только тогда, когда $M = \{0\}$.

б) $\Lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \subset \Lambda(x_1) \cup \Lambda(x_2)$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ и $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

в) $\Lambda(Ux) \subset \Lambda(x)$ для каждого $U \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ такого, что $Uax = aUx$, $a \in \mathrm{L}_\alpha(G)$, $x \in \mathcal{X}$.

г) $\Lambda(ax) \subset \Lambda(x) \cap \operatorname{supp} \widehat{a}$ для любых $a \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ и $x \in \mathcal{X}$, где $\widehat{a} \colon \operatorname{Sp} \mathrm{L}_\alpha(G) \to \mathbb{C}$ — преобразование Фурье элемента $\widehat{a} \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ и $\operatorname{supp} \widehat{a}$ — носитель функции $\widehat{a}$.

д) $ax = 0$ *(*$a \in \mathrm{L}_\alpha(G), x \in \mathcal{X}$*), если* $\operatorname{supp}\widehat{a} \cap \Lambda(x) = \varnothing$ *и* $ax = x$*, если множество* $\Lambda(x)$ *компактно и* $\widehat{a} = 1$ *в некоторой окрестности множества* $\Lambda(x)$.

е) $\Lambda(x)$ *совпадает с замыканием множества* $\bigcup\limits_{x \in M} \Lambda(x)$*, если* M *плотно в* $\mathcal{X}$.

ж) $\Lambda(a) = \operatorname{supp}\widehat{a}$ *для каждого* $a \in \mathrm{L}_\alpha(G)$*, если* $\mathrm{L}_\alpha(G)$ *рассматривать в качестве* $\mathrm{L}_\alpha(G)$*-модуля.*

Определение 1.20. Два линейных оператора $A_i\colon \mathrm{D}(A_i) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $i \in \{1, 2\}$, будем называть *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ такой, что $U\mathrm{D}(A_2) = \mathrm{D}(A_1)$ и имеет место равенство $A_1 U x = U A_2 x$ для всех $x \in \mathrm{D}(A_2)$. При этом оператор U будем называть *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Будем говорить, что оператор $B\colon \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ *подчинён* оператору $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, если $\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(B)$ и конечна величина

$$\|B\|_A = \inf\big\{C > 0 \;\big|\; \|Bx\| \leqslant \big(\|Ax\| + \|x\|\big),\ x \in \mathrm{D}(A)\big\}. \tag{1.2}$$

Символом $\mathbf{L}_A(\mathscr{X})$ будем обозначать банахово пространство операторов, действующих в $\mathscr{X}$ и подчинённых оператору A, с нормой (1.2).

Следуя М. Г. Крейну, будем называть *трансформаторами* линейные операторы, действующие в пространствах линейных операторов.

Определим трансформатор $\mathrm{ad}_A\colon \mathrm{D}(\mathrm{ad}_A) \subset \operatorname{End}\mathscr{X} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ следующим образом: $\mathrm{ad}_A X = AX - XA$, где $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_A)$. Область определения $\mathrm{D}(\mathrm{ad}_A)$ трансформатора ad_A состоит из таких операторов $X \in \operatorname{End}\mathscr{X}$, что $X\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$ и оператор $AX - XA\colon \mathrm{D}(A) \to \mathscr{X}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathscr{X}$. При этом будем полагать $Y = \mathrm{ad}_A X$.

Наиболее важным понятием *метода подобных операторов* является понятие *допустимой тройки*.

Определение 1.21. Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство из $\mathbf{L}_A(\mathscr{X})$ и определены два трансформатора $\mathrm{J}\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $\Gamma\colon \mathfrak{U} \to \operatorname{End}\mathfrak{U}$. Упорядоченную тройку $(\mathfrak{U}, \mathrm{J}, \Gamma)$ будем называть *допустимой тройкой* для невозмущённого оператора A, а $\mathfrak{U}$ — *пространством допустимых возмущений*, если имеют место следующие условия:

1) нормированное банахово пространство $\mathfrak{U}$ с нормой $\|\cdot\|_*$ непрерывно вложено в пространство $\mathbf{L}_A(\mathscr{X})$ (т. е. найдётся константа $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leqslant C\|X\|_*$ для всех $X \in \mathfrak{U}$;

2) трансформаторы J и Γ непрерывны, причём J является проектором;

3) имеет место включение $(\Gamma X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$ и $\Gamma X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_A)$, причём $\mathrm{ad}_A \Gamma X = A\Gamma X - (X\Gamma)A = X - \mathrm{J}X$ для всех $X \in \mathfrak{U}$, кроме того, $\Gamma X \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ — единственное решение уравнения $\mathrm{ad}_A Y = AY - YA = X - \mathrm{J}X$, удовлетворяющее условию $\mathrm{J}Y = 0$;

4) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$ и найдётся константа $\gamma > 0$ такая, что $\|\Gamma\| < \gamma$ и $\max\big\{\|X\Gamma Y\|_*, \big\|(\Gamma X)Y\big\|_*\big\} \leqslant \gamma\|X\|_*\|Y\|_*$;

5) для всех $X \in \mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$ найдётся число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\big\{X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\big\} < \varepsilon$.

Глава 2

Гармонический анализ линейных операторов в вещественных банаховых пространствах

Рассматривается обратимый оператор $T \in \operatorname{End} X$, где X — вещественное банахово пространство, удовлетворяющий условию неквазианалитичности

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2} < \infty. \tag{2.1}$$

Такой оператор будем называть *неквазианалитическим*. При изучении оператора T обычно осуществляется комплексификация банахова пространства X, т. е. рассматривается банахово пространство $\mathbf{X}$, состоящее из векторов вида $x_1 + \mathrm{i}x_2$, где $x_1, x_2 \in X$. Оператор T расширяется на $\mathbf{X}$ до оператора $\mathbf{T} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$. Свойство (2.1) оператора T индуцирует аналогичные свойства для оператора $\mathbf{T}$. Проводится исследование оператора $\mathbf{T}$ методами гармонического анализа. Затем, следуя подходу, разработанному в [4], свойства оператора $\mathbf{T}$ распространяются для исследования оператора T. Таким способом получены условия разложимости по Фойашу, а также устанавливается существование нетривиальных инвариантных подпространств для оператора T.

Пусть X — вещественное банахово пространство и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Если $A \in \operatorname{End} X$, то спектр оператора A может быть пустым множеством. Тем самым, возникает проблема построения по спектру инвариантных подпространств для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

При изучении оператора A обычно осуществляется комплексификация банахова пространства X, т. е. рассматривается банахово пространство $\mathbf{X}$, состоящее из векторов вида $x_1 + \mathrm{i}x_2$, где $x_1, x_2 \in X$.

Оператор A расширяется на $\mathbf{X}$ до оператора $\mathbf{A} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$. Определённые свойства оператора A (например, неквазианалитичность) индуцируют аналогичные свойства для оператора $\mathbf{A}$. Проводится исследование оператора $\mathbf{A}$ методами гармонического анализа. Затем, следуя подходу, разработанному в [4], свойства оператора $\mathbf{A}$ распространяются для исследования оператора A. Таким способом получены условия разложимости по Фойашу, а также устанавливается существование нетривиальных инвариантных подпространств для оператора A.

Используя полученные результаты для $\mathbf{A}$, соответствующее свойство переносится на оператор $A \in \operatorname{End} X$.

2.1 Основные определения и результаты

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\operatorname{End} \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Через G обозначим локально компактную абелеву группу.

Рассмотрим сначала частный случай. Пусть $G = \mathbb{Z}$ — группа целых чисел с мерой Хаара μ ($\mu(E)$ — число точек в E).

Символом $\alpha\colon \mathbb{Z} \to [1, +\infty)$ обозначим *весовую* функцию (*вес*) вида $\alpha(n) = \|T^n\|$, $n \in \mathbb{Z}$. Через $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ обозначим банахову алгебру двусторонних последовательностей, суммируемых с весом α, со свёрткой функций в качестве умножения:

$$(f_1 * f_2)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(n-m) f_2(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \ \ f_1, f_2 \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K}),$$

с нормой $\|f\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| \alpha(-n), \ f \in L_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то алгебру $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ будем обозначать через $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z})$.

Пусть $\mathbb{T} = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \ \big| \ |\lambda| = 1\big\}$ – единичная окружность, которая является абелевой группой. Символом $\widehat{f}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ обозначим преобразование Фурье $\widehat{f}(\gamma) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\gamma^{-n}$, $\gamma \in \mathbb{T}$, функции f из алгебры $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z})$.

Банахово пространство $\mathcal{X}$ наделяется структурой банахова $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ – модуля с помощью формулы

$$fx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) T^{-n} x, \ \ f \in L_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K}), \ x \in \mathcal{X}, \tag{2.2}$$

т. е. $\mathcal{X}$ – банахово пространство, являющееся левым $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ – модулем в алгебраическом смысле, и для любых $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ и $x \in \mathcal{X}$ имеют место оценки

$$\|fx\| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f(n) T^{-n} x\| \leqslant \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| \cdot \alpha(-n) \Big) \cdot \|x\| = \|f\| \cdot \|x\|. \tag{2.3}$$

Рассмотрим представление

$$\mathcal{T}\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} \mathcal{X}, \quad \mathcal{T}(n) = T^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Такое представление, ввиду условия (2.1), называется *неквазианалитическим* (см. [69] – [6]). Учитывая, что модульная структура на $\mathcal{X}$ задается формулой (2.4) с помощью этого представления, банахов модуль $\mathcal{X}$ будет обозначаться символом $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Отметим, что если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то представление $\mathcal{T}$ будет обозначаться символом $\mathcal{T}_\mathbb{R}$, а если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то – $\mathcal{T}_\mathbb{C}$.

Далее символом $\mathcal{T}(f)$ обозначается линейный ограниченный оператор

$$x \mapsto fx\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Тем же символом $\mathcal{T}$ будет обозначаться гомоморфизм алгебр

$$\mathcal{T}\colon L_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \to \operatorname{End}\ \mathcal{X}, \ \ \mathcal{T}(f)x = fx, \ \ f \in L_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{K}), \ \ x \in \mathcal{X}.$$

Для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ этот гомоморфизм будет обозначаться символом $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, а если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то — $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Отметим, что из (2.5) следует оценка $\|\mathcal{T}(f)\| \leqslant \|f\|$.

Все последующие рассуждения производятся для случая произвольной локально компактной абелевой группы G.

Функция $\alpha\colon G \to \mathbb{R}_+$ называется *весовой* (*весом*), если:

1) α измерима;

2) $\alpha(g) \geqslant 1$, $g \in G$;

3) $\alpha(g_1 + g_2) \leqslant \alpha(g_1)\alpha(g_2),\ \ g_1, g_2 \in G$.

Символом $\mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{K})$ обозначим банахову алгебру комплекснозначных функций суммируемых с весом α со свёрткой функций в качестве умножения:

$$(f_1 * f_2)(g) = \int\limits_G f_1(g - s) f_2(s)\, \mathrm{d}s, \quad g \in G, \ \ f_1, f_2 \in \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{K}).$$

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то алгебру $\mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{C})$ будем обозначать через $\mathrm{L}_\alpha(G)$.

Пусть $\widehat{G}$ — локально компактная группа непрерывных унитарных характеров группы G. Непрерывная функция $\chi\colon G \to \mathbb{T} = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \bigm| |\lambda| = 1\big\}$ называется *характером*, если $\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$. На группе $\mathbb{R}$ вещественных чисел все непрерывные характеры имеют вид $\chi_\lambda(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и тем самым группу $\widehat{\mathbb{R}}$ можно отождествить с $\mathbb{R}$. Символом $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\widehat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(g)\gamma(-g)\, \mathrm{d}g,\ \gamma \in \widehat{G}$, функции f из алгебры $\mathrm{L}_\alpha(G)$.

Пусть $\mathcal{T}\colon G \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ — сильно непрерывное представление, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha(n g_0)}{1 + n^2} < \infty, \quad g_0 \in G,$$

где $\alpha(g) = \|\mathcal{T}(-g)\|,\ g \in G$. Отметим, что функция $\alpha\colon G \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям 1) – 3) на вес. В дальнейшем такие представления будем называть *неквазианалитическими* (см. [6, 44]). Банахово пространство $\mathcal{X}$ наделяется структурой банахова $\mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{K})$-модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_G f(g)\mathcal{T}(-g)x\,\mathrm{d}g,\ f \in L_\alpha(G,\mathbb{K}),\ x \in \mathcal{X}, \tag{2.4}$$

т. е. $\mathcal{X}$ — банахово пространство, являющееся левым $\mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{K})$-модулем в алгебраическом смысле, и для любых $f \in \mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{K})$ и $x \in \mathcal{X}$ имеют место оценки

$$\|fx\| \leqslant \int\limits_G \|f(g)\mathcal{T}(-g)x\|\mathrm{d}g \leqslant \Big(\int\limits_G |f(g)| \cdot \alpha(g)\,\mathrm{d}g\Big) \cdot \|x\| = \|f\| \cdot \|x\|. \tag{2.5}$$

Учитывая, что модульная структура строится по представлению $\mathcal{T}$, банахов модуль $\mathcal{X}$ будет обозначаться символом $(\mathcal{X},\mathcal{T})$. Отображение $x \mapsto fx\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ является линейным ограниченным оператором и обозначается символом $\mathcal{T}(f)$. Отметим, что из (2.5) следует оценка $\|\mathcal{T}(f)\| \leqslant \|f\|$.

Определение 2.1. *Спектром Бёрлинга* вектора x из комплексного банахова $\mathrm{L}_\alpha(G)$ – модуля $(\mathcal{X},\mathcal{T})$ будем называть множество

$$\Lambda(x) = \big\{\chi \in \widehat{G}\ \big|\quad fx \neq 0,\ \text{ для любой }\ f \in \mathrm{L}_\alpha(G)\ \text{ со свойством }\ \widehat{f}(\chi) \neq 0\big\}.$$

Пусть $(\mathcal{X},\mathcal{T})$ — банахов $\mathrm{L}_\alpha(G)$-модуль и σ — подмножество из $\widehat{G}$. Символом $\mathcal{X}(\sigma)$ обозначим подмножество вида $\big\{x \in \mathcal{X}\ \big|\ \Lambda(x) \subset \sigma\big\}$.

Определение 2.2. Подмножество $\sigma \subset \widehat{G}$ называется *симметричным*, если вместе с каждым характером $\gamma \in \sigma$ оно содержит также и характер $\gamma^{-1} \in \sigma$.

Приведём несколько используемых определений из [6, 23, 63] для линейного оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство.

Определение 2.3. Будем говорить, что оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ обладает *свойством однозначного распространения*, если из равенства $(\mathcal{A} - \lambda I)f(\lambda) = 0$, где $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathcal{X}$ — определённая на открытом множестве U аналитическая функция, следует, что $f = 0$.

Также отметим, что оператор $\mathcal{A}$ обладает свойством однозначного распространения, если $\overline{\rho(\mathcal{A})} = \mathbb{C}$, где $\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$. Далее символом $\sigma(\mathcal{A})$ будем обозначать спектр оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Определение 2.4. Пусть оператор $\mathcal{A}$ обладает свойством однозначного распространения. Множество тех точек $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, для которых существует открытая окрестность $U_0 = U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f\colon U_0 \to \mathcal{X}$, такая, что выполняются равенства $(\mathcal{A} - \lambda I)f(\lambda) = x$, $\lambda \in U_0$, называется *локальным резольвентным множеством* вектора x относительно оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\rho_{\mathcal{A}}(x)$. *Локальный спектр* вектора $x \in \mathcal{X}$ относительно оператора $\mathcal{A}$ есть множество $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathcal{A}}(x)$.

Заметим, что множество $\rho_{\mathcal{A}}(x)$ открыто, а множество $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ замкнуто.

Если E — инвариантное подпространство для оператора $\mathcal{A}$, то через $\mathcal{A}|E$ будем обозначать сужение $\mathcal{A}$ на E.

Определение 2.5. (см. [6, 23]) Замкнутое линейное подпространство $F \subset \mathcal{X}$, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, называется *максимальным спектральным подпространством* относительно оператора $\mathcal{A}$, если из условия $\sigma(\mathcal{A}|E) \subset \sigma(\mathcal{A}|F)$ для замкнутого инвариантного подпространства $E \subset \mathcal{X}$ следует, что $E \subset F$.

Определение 2.6. Оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется *разложимым* (*по Фойашу*) (см. [6,23,61]), если для любого конечного открытого покрытия $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ спектра $\sigma(A)$ оператора A существуют спектральные подпространства $\mathcal{X}(\sigma_i)$, где $\sigma_i \subset U_i$, $i = \overline{1, n}$, со свойством

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(\sigma_1) + \mathcal{X}(\sigma_2) + \cdots + \mathcal{X}(\sigma_n).$$

Отметим, что каждый разложимый по Фойашу оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ обладает свойством однозначного распространения и каждое максимальное спектральное подпространство E совпадает со множеством $\mathcal{X}(\Delta) = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\Delta) = \big\{x \in \mathcal{X} \mid \sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \Delta\big\}$, где $\Delta = \sigma(\mathcal{A}|E)$.

Определение 2.7. (см. [63]) Оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется *суперразложимым*, если для любого конечного открытого покрытия $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ ограниченными множествами $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, спектра $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ существуют операторы $R_1, \dots, R_n \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ со свойствами:

1) $I = R_1 + \dots + R_n$;

2) операторы $R_k,\ k = 1, \dots, n$, перестановочны между собой и с оператором $\mathcal{A}$;

3) $\sigma\big(\mathcal{A}|\overline{\operatorname{Im} R_k}\big) = \sigma_k \subset U_k,\ k = 1, \dots, n$, где $\operatorname{Im} R_k$ — образ оператора R_k.

Отметим, что каждый суперразложимый оператор является разложимым по Фойашу.

Далее (до конца этого раздела) символом X обозначается вещественное банахово пространство.

Определение 2.8. Вещественное линейное пространство $X^2 = X \times X$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел с законом внешней композиции $(\alpha + \mathrm{i}\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in X^2$, называется *комплексификацией* вещественного линейного пространства X и обозначается через $\mathbf{X}$.

Элементы из $\mathbf{X}$ удобно записывать в виде $x + \mathrm{i}y$, где $x, y \in X$. При этом X будем рассматривать в качестве подпространства $\mathbf{X}$. Норму в $\mathbf{X}$, где X — банахово пространство, определим равенством

$$\|(x, y)\| = \max_{\psi \in [0, 2\pi]} \big\|(\cos\psi)x + (\sin\psi)y\big\|, \quad x, y \in X.$$

Символом $\mathbf{J}$ обозначим отображение $\mathbf{J}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $\mathbf{J}(x + \mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y$, $x, y \in X$, которое будет аддитивным, но не однородным. Ясно, что $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$.

Далее будем использовать следующие три леммы из [4].

Лемма 2.1. *Для каждого линейного подпространства* $\mathbf{X}_0$ *из* $\mathbf{X}$ *его образ при отображении* $\mathbf{J}$ *является линейным подпространством в* $\mathbf{X}$.

Определение 2.9. Подпространство $\mathbf{X}_0$ из комплексификации $\mathbf{X}$ пространства X назовем *симметричным*, если выполнено условие $\mathbf{J}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0$, или, что эквивалентно, для любого вектора $x+\mathrm{i}y$ из $\mathbf{X}_0$ подпространству $\mathbf{X}_0$ принадлежит вектор $x - \mathrm{i}y$.

Лемма 2.2. *Линейное подпространство* $\mathbf{X}_0$ *из* $\mathbf{X}$ *является комплексификацией некоторого подпространства* X_0 *из* X *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{X}_0$ *— симметричное подпространство из* $\mathbf{X}$.

Далее предполагается, что X — вещественное банахово пространство, $A \in \operatorname{End} X$ и $\mathbf{A} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$ — комплексификация оператора A, т. е. оператор $\mathbf{A}$ определяется на любом векторе $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$ равенством $\mathbf{A}x = Ax_1 + \mathrm{i}Ax_2$. Спектр оператора $\mathbf{A}$ называется *комплексным спектром* оператора A и обозначается $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$.

Лемма 2.3. *Линейный оператор* $\mathbf{A}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *является комплексификацией некоторого оператора* $A\colon X \to X$ *тогда и только тогда, когда он перестановочен с отображением* $\mathbf{J}$ *или, что эквивалентно, выполняется равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{JAJ}.$$

Далее будем предполагать, что комплексификация $\mathbf{A}$ оператора A является разложимым по Фойашу оператором. Для любого множества $\sigma \subset \mathbb{C}$ через $X(\sigma)$ будет обозначаться подпространство

$$X(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma_{\mathbf{A}}(x) \subset \sigma\}.$$

В этом определении спектр $\sigma_{\mathbf{A}}(x)$ рассматривается как спектр вектора x из комплексификации $\mathbf{X}$.

Определение 2.10. Оператор $A \in \operatorname{End} X$ называется *симметрично разложимым*, если для любого конечного открытого покрытия $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ множества $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$

симметричными открытыми множествами $U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, существуют спектральные подпространства $X(\sigma_i)$, где $\sigma_i \subset U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, — симметричные множества, со свойством

$$X = X(\sigma_1) + X(\sigma_2) + \cdots + X(\sigma_n).$$

Определение 2.11. Оператор $A \in \operatorname{End} X$ называется *симметрично суперразложимым*, если для любого конечного открытого покрытия $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ симметричными множествами $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, спектра $\sigma(A)$ оператора A существуют операторы $R_1, \ldots, R_n \in \operatorname{End} X$ со свойствами:

1) $I = R_1 + \cdots + R_n$;

2) операторы $R_k,\ k = 1, \ldots, n$, перестановочны между собой и с оператором A; $k = 1, \ldots, n$, перестановочны с оператором $\mathbf{J}$;

3) $\sigma_{\mathbb{C}}\big(A|\overline{\operatorname{Im} R_k}\big) = \sigma_k \subset U_k,\ k = 1, \ldots, n$, где $\operatorname{Im} R_k$ — образ оператора R_k.

Отметим, что подпространства $\overline{\operatorname{Im} R_k},\ 1 \leqslant k \leqslant n$, инвариантны относительно оператора A, что следует из перестановочности операторов $R_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, с A, а также любой симметрично суперразложимый оператор является симметрично разложимым.

Основные результаты главы содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 2.1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T\colon G \to \operatorname{End} X$ — неквазианалитическое сильно непрерывное представление. Тогда операторы $T(g)$, $g \in G$, $T(f)$, $f \in \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{R})$, где оператор $T(f)$ определён формулой*

$$T(f)x = \int\limits_G f(g)T(-g), \mathrm{d}g, \quad x \in \mathscr{X},$$

симметрично суперразложимы.

Теорема 2.2. *Пусть $T \in \operatorname{End} X$ — обратимый оператор, для которого $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2} < \infty$. Тогда оператор T является симметрично суперразложимым.*

Если $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ содержит более двух точек, то оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство.

Пусть $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ — сильно непрерывная группа операторов, удовлетворяющая условию неквазианалитичности $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\ln \|T(t)\|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \infty$, с генератором $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$. Тогда имеет место

Теорема 2.3. *Для любого числа $0 \neq a \in \mathbb{R}$ оператор $(A - aI)^{-1} \in \operatorname{End} X$, где A — генератор группы $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, является симметрично суперразложимым. Если множество $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ содержит более двух точек, то оператор A имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

2.2 О спектре и спектральных подпространствах банаховых модулей

Определение и дальнейшие свойства спектра Бёрлинга рассматриваются в банаховом $\mathrm{L}_\alpha(G)$-модуле над полем комплексных чисел. Отметим следующие свойства спектра Бёрлинга (см. [6, 8, 11]).

Лемма 2.4. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ — $\mathrm{L}_\alpha(G)$-модуль. Тогда*

а) Для любого подмножества $M \subset \mathcal{X}$ множество $\Lambda(M)$ замкнуто в спектре $\operatorname{Sp}\mathrm{L}_\alpha(G)$ алгебры $\mathrm{L}_\alpha(G)$ и пусто тогда и только тогда, когда $M = \{0\}$.

б) $\Lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \subset \Lambda(x_1) \cup \Lambda(x_2)$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ и $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

в) $\Lambda(Ux) \subset \Lambda(x)$ для каждого $U \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ такого, что $Uax = aUx$, $a \in \mathrm{L}_\alpha(G)$, $x \in \mathcal{X}$.

г) $\Lambda(ax) \subset \operatorname{supp}\widehat{a} \cap \Lambda(x)$ для любых $a \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ и $x \in \mathcal{X}$, где $\widehat{a}\colon \operatorname{Sp}\mathrm{L}_\alpha(G) \to \mathbb{C}$ — преобразование Фурье элемента $\widehat{a} \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ и $\operatorname{supp}\widehat{a}$ — носитель функции $\widehat{a}$.

д) $ax = 0$ $(a \in \mathrm{L}_\alpha(G), x \in \mathcal{X})$*, если* $\operatorname{supp}\widehat{a} \cap \Lambda(x)$ *не более чем счётно и на этом множестве* $\widehat{a}$ *обращается в нуль, и* $ax = x$*, если множество* $\Lambda(x)$ *компактно и* $\widehat{a} = 1$ *в некоторой окрестности множества* $\Lambda(x)$*.*

е) $\Lambda(x)$ *совпадает с замыканием множества* $\bigcup\limits_{x \in M} \Lambda(x)$*, если* M *плотно в* $\mathcal{X}$*.*

ж) $\Lambda(a) = \operatorname{supp}\widehat{a}$ *для каждого* $a \in \mathrm{L}_\alpha(G)$*, если* $\mathrm{L}_\alpha(G)$ *рассматривать в качестве* $\mathrm{L}_\alpha(G)$*-модуля.*

Лемма 2.5. *Пусть* σ *— замкнутое подмножество из* $\widehat{G}$*. Тогда* $\mathcal{X}(\sigma)$ *— линейное замкнутое подпространство из* $\mathcal{X}$*, являющееся замкнутым подмодулем из* $\mathcal{X}$*. В частности, оно является инвариантным относительно операторов* $\mathcal{T}(f)$*,* $f \in \mathrm{L}_\alpha(G)$*, и* $\mathcal{T}(g)$*,* $g \in G$*.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{X}(\sigma)$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Тогда из свойства б) леммы 2.4 следует, что $\Lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \subset \Lambda(x_1) \cup \Lambda(x_2) \subset \sigma$, т. е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{X}(\sigma)$. Итак, $\mathcal{X}(\sigma)$ — линейное подпространство. Докажем замкнутость $\mathcal{X}(\sigma)$. Пусть (x_n) — сходящаяся к вектору x_0 последовательность векторов из $\mathcal{X}(\sigma)$ и $\gamma_0 \notin \sigma$. Поскольку алгебра $\mathrm{L}_\alpha(G)$ регулярна (см. [53]), то существует функция $f \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ со свойством $\widehat{f}(\gamma_0) \neq 0$ и $\widehat{f} = 0$ в некоторой окрестности множества σ. Тогда $\Lambda(fx_n) \subset \operatorname{supp}\widehat{f} \cap \Lambda(x_n) = \operatorname{supp}\widehat{f} \cap \sigma = \varnothing$ в силу свойства г) леммы 2.4. Тогда из свойства а) леммы 2.4 следует, что $fx_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Следовательно, $fx_0 = \lim\limits_{n \to \infty} fx_n = 0$, т. е. $fx_0 = 0$. Поэтому $\gamma_0 \notin \Lambda(x_0)$. Таким образом, $\Lambda(x_0) \subset \sigma$, т. е. $x_0 \in \mathcal{X}(\sigma)$.

Докажем инвариантность $\mathcal{X}(\sigma)$ относительно операторов $\mathcal{T}(f)$, $f \in \mathrm{L}_\alpha(G)$, и $\mathcal{T}(g)$, $g \in G$. Из равенства (2.4) вытекает перестановочность операторов $\mathcal{T}(f)$, $f \in \mathrm{L}_\alpha(G)$, и $\mathcal{T}(g)$, $g \in G$. Таким образом, $\mathcal{X}(\sigma)$ является подмодулем.

Определение 2.12. Если σ — замкнутое подмножество из $\widehat{G}$, то $\mathcal{X}(\sigma)$ называется *спектральным подмодулем.*

Пусть X — вещественное банахово пространство, $T\colon G \to \operatorname{End} X$ — неквазианалитическое представление. Следовательно, X является банаховым $\mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{R})$-модулем.

Рассмотрим комплексификацию $\mathbf{X}$ пространства X. Наряду с представлением T рассмотрим представление $\mathbf{T}\colon G \to \operatorname{End} \mathbf{X}$, определённое формулой

$$\mathbf{T}(g)(x_1 + \mathrm{i}x_2) = T(g)x_1 + \mathrm{i}T(g)x_2, \quad g \in G, \ \ x_1, x_2 \in X.$$

Отметим, что $\|\mathbf{T}(g)\| = \|T(g)\| = \alpha(g)$. Представление $\mathbf{T}$ будем называть *комплексификацией представления* T.

Структура банахова $\mathrm{L}_\alpha(G) = \mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{C})$-модуля на $\mathbf{X}$ определяется с помощью формулы

$$\begin{aligned}(f_1 + \mathrm{i}f_2)(x_1 + \mathrm{i}x_2) = f_1x_1 - f_2x_2 + \mathrm{i}(f_2x_1 + f_1x_2) = \\ = \int\limits_G f_1(g)T(-g)x_1\,\mathrm{d}g - \int\limits_G f_2(g)T(-g)x_2\,\mathrm{d}g + \\ + \mathrm{i}\int\limits_G f_2(g)T(-g)x_1\,\mathrm{d}g + \mathrm{i}\int\limits_G f_1(g)T(-g)x_2\,\mathrm{d}g\end{aligned}$$

для любых $f = f_1 + \mathrm{i}f_2 \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ и $x = x_1 + \mathrm{i}x_2 \in \mathbf{X}$.

Определение 2.13. *Комплексным спектром Бёрлинга* вектора x из вещественного банахова $\mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{R})$-модуля (X,T) называется множество

$$\Lambda_{\mathbb{C}}(x) = \bigl\{\gamma_0 \in \widehat{G} \mid fx \neq 0 \ \text{ для любой } \ f \in \mathrm{L}_\alpha(G) \text{ со свойством } \ \widehat{f}(\gamma_0) \neq 0\bigr\}.$$

Лемма 2.6. *Комплексный спектр Бёрлинга $\Lambda_{\mathbb{C}}(x)$ вектора $x \in X$ есть симметричное множество.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $\gamma_0 \in \Lambda_{\mathbb{C}}(x)$. Докажем, что $\gamma_0^{-1} \in \Lambda_{\mathbb{C}}(x)$. Рассмотрим $f \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ со свойством $\widehat{f}(\gamma_0^{-1}) \neq 0$ и покажем, что $fx \neq 0$. Имеют место равенства:

$$fx = \int\limits_G f(g)\mathbf{T}(-g)x\,\mathrm{d}g = \int\limits_G f(g)T(-g)x\,\mathrm{d}g = \mathbf{J}\int\limits_G \mathbf{J}f(g)T(-g)x\,\mathrm{d}g =$$
$$= \mathbf{J}\int\limits_G \mathbf{J}(f_1+\mathrm{i}f_2)(g)T(-g)x\,\mathrm{d}g = \mathbf{J}\int\limits_G \mathbf{J}\big(f_1(g)T(-g)x+\mathrm{i}f_2(g)T(-g)x\big)\,\mathrm{d}g =$$
$$= \mathbf{J}\int\limits_G \big(f_1(g)T(-g)x-\mathrm{i}f_2(g)T(-g)x\big)\,\mathrm{d}g = \mathbf{J}\int\limits_G (f_1-\mathrm{i}f_2)(g)T(-g)x\,\mathrm{d}g = \mathbf{J}(\overline{f}x),$$

где $\overline{f}$ — функция, комплексно сопряжённая к f.

Рассмотрим преобразование Фурье функции $\overline{f}$ в точке γ_0. Имеем

$$\widehat{\overline{f}}(\gamma_0) = \int\limits_G \overline{f}(g)\gamma_0(-g)\,\mathrm{d}g = \int\limits_G \overline{f(g)\gamma_0(g)}\,\mathrm{d}g = \overline{\int\limits_G f(g)\gamma_0^{-1}(-g)\,\mathrm{d}g} = \overline{\widehat{f}(\gamma_0^{-1})} \neq 0.$$

Таким образом, $\mathbf{J}(\overline{f}x) \neq 0$ и, следовательно, $\overline{f}x \neq 0$. Из установленных выше равенств следует, что $fx \neq 0$, значит, $\gamma_0^{-1} \in \Lambda_{\mathbb{C}}(x)$. Лемма доказана.

Дадим ещё одно определение комплексного спектра Бёрлинга из вещественного банахова пространства X.

Определение 2.14. *Комплексным спектром Бёрлинга* вектора $x \in X$ называется множество

$$\widetilde{\Lambda_{\mathbb{C}}}(x) = \big\{\gamma_0 \in \widehat{G} \mid fx \neq 0 \text{ для любой } f \in \mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{R}) \\ \text{со свойством } \widehat{f}(\gamma_0) \neq 0\big\}.$$

Имеет место следующая

Лемма 2.7. *Оба определения 2.13 и 2.14 комплексного спектра Бёрлинга эквивалентны.*

Доказательство. Непосредственно из определений следует, что $\Lambda_{\mathbb{C}}(x) \subset \widetilde{\Lambda_{\mathbb{C}}}(x)$. Докажем обратное включение. Пусть $\gamma_0 \in \widetilde{\Lambda_{\mathbb{C}}}(x)$. Рассмотрим функцию $f \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ со свойством $\widehat{f}(\gamma_0) \neq 0$. Тогда

$$fx = \int\limits_G f(g)\mathbf{T}(-g)x\,\mathrm{d}g = \int\limits_G (f_1+\mathrm{i}f_2)(g)T(-g)x\,\mathrm{d}g = f_1x + \mathrm{i}f_2x.$$

В силу леммы 2.6 и определения симметричного подмножества имеем $\gamma_0^{-1} \in \Lambda_{\mathbb{C}}(x)$. Следовательно, справедливы следующие равенства:

$$\widehat{f}_1(\gamma_0) = \int\limits_G \frac{f(g) + \overline{f}(g)}{2}\gamma_0(-g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{2}\int\limits_G f(g)\gamma_0(-g)\,\mathrm{d}g + \frac{1}{2}\int\limits_G \overline{f}(g)\gamma_0(-g)\,\mathrm{d}g =$$
$$= \frac{1}{2}\widehat{f}(\gamma_0) + \frac{1}{2}\int\limits_G \overline{f(g)\gamma_0^{-1}(-g)}\,\mathrm{d}g = \frac{1}{2}\big(\widehat{f}(\gamma_0) + \overline{\widehat{f}(\gamma_0^{-1})}\big).$$

Аналогично рассуждая, получим $\widehat{f}_2(\gamma_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\widehat{f}(\gamma_0) - \overline{\widehat{f}(\gamma_0^{-1})}\big)$. Из полученных представлений и определения 2.13 видно, что $\widehat{f}_1(\gamma_0)$ и $\widehat{f}_2(\gamma_0)$ не обращаются в нуль одновременно. Пусть для определённости $\widehat{f}_1(\gamma_0) \neq 0$. Тогда $f_1 x \neq 0$ и, следовательно, $fx \neq 0$. Таким образом, доказано включение $\widetilde{\Lambda_{\mathbb{C}}}(x) \subset \Lambda_{\mathbb{C}}(x)$. Лемма доказана.

2.3 Доказательство основных результатов

Отметим используемые далее свойства локального спектра из комплексного банахова пространства $\mathcal{X}$.

Лемма 2.8. *Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — ограниченный линейный оператор, обладающий свойством однозначного распространения. Имеют место следующие свойства локального спектра векторов из $\mathcal{X}$.*

а) $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ — замкнутое множество из $\mathbb{C}$ и $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

б) $\sigma_{\mathcal{A}}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x_1) \cup \sigma_{\mathcal{A}}(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

в) $\sigma_{\mathcal{A}}(Bx) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, если оператор $B \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ перестановочен с $\mathcal{A}$.

г) Если спектр $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ представим в виде $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x_1) \cup \sigma_{\mathcal{A}}(x_2)$, где $\sigma_{\mathcal{A}}(x_1)$, $\sigma_{\mathcal{A}}(x_2)$ — замкнутые взаимно непересекающиеся множества, то x представим в виде $x = x_1 + x_2$, где x_1, $x_2 \in \mathcal{X}$.

Далее X — вещественное банахово пространство.

Определение 2.15. Будем говорить, что оператор $A \in \operatorname{End} X$ *обладает свойством однозначного распространения*, если его комплексификация $\mathbf{A}$ обладает свойством однозначного распространения.

Определение 2.16. Пусть σ — замкнутое симметричное множество в $\mathbb{C}$. Символом $X_A(\sigma)$ обозначим линейное замкнутое подпространство из X вида

$$X_A(\sigma) = \big\{x \in X \mid \sigma_{\mathbb{C}}(x) \subset \sigma\big\}.$$

Такое подпространство назовём *максимальным спектральным подпространством* оператора $A \in \operatorname{End} X$.

Лемма 2.9. *Если* $f \in \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{R})$*, то* $\mathbf{T}(f) = \mathbf{J}\mathbf{T}(f)\mathbf{J}$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{R})$. Имеют место равенства

$$f\mathbf{J}x = \int\limits_G f(g)\mathbf{T}(-g)\mathbf{J}x\,\mathrm{d}g = \int\limits_G f(g)\mathbf{T}(-g)\mathbf{J}(x_1 + \mathrm{i}x_2)\,\mathrm{d}g =$$
$$= \int\limits_G f(g)\mathbf{T}(-g)(x_1 - \mathrm{i}x_2)\,\mathrm{d}g = \int\limits_G f(g)T(-g)x_1\,\mathrm{d}g - \mathrm{i}\int\limits_G f(g)T(-g)x_2\,\mathrm{d}g =$$
$$= fx_1 - \mathrm{i}fx_2 = \mathbf{J}(fx_1 + \mathrm{i}fx_2) = \mathbf{J}fx.$$

Таким образом, $\mathbf{J}$ перестановочен с $\mathbf{T}(f)$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если $f \in \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{R})$, то оператор $\mathbf{T}(f)$ является комплексификацией оператора $T(f)$.

Замечание 2.1. Непосредственно из определения комплексификации оператора следует, что образ $\operatorname{Im}\mathbf{T}(f)$ является комплексификацией образа $\operatorname{Im} T(f)$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольное симметричное открытое покрытие $V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n$ спектра $\sigma_{\mathbb{C}}\big(T(f)\big)$ оператора $T(f)$, где V_0 — окрестность нуля, если $0 \in \sigma_{\mathbb{C}}\big(T(f)\big)$, и $\overline{V}_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, — компактные множества. Далее для определённости будем считать, что $0 \in \sigma_{\mathbb{C}}\big(T(f)\big)$. Таким образом, $\sigma_{\mathbb{C}}\big(T(f)\big) \subset V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \notin V_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, так как можно перейти к симметричному подпокрытию. Поскольку $\sigma_{\mathbb{C}}(T(f)) = \widehat{f}(\Lambda(X))$ (см. [6]), и функция $\widehat{f}$ непрерывна, то $U_i = \widehat{f}^{-1}(V_i), 1 \leqslant i \leqslant n,\ U_{\infty} = \widehat{f}^{-1}(V_0)$, — симметричное открытое покрытие спектра $\Lambda(X)$ банахова $L_\alpha(G)$ – модуля. Симметричность покрытия следует из равенства $\widehat{f}(\gamma) = \overline{\widehat{f}(\gamma^{-1})}$.

Алгебра $\mathrm{L}_\alpha(G) = \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{C})$ является регулярной банаховой алгеброй (см. [68], [69]) (без единицы, если $\widehat{G}$ — некомпактная абелева группа). Следовательно, для рассматриваемого открытого покрытия замкнутого множества $\Lambda(X)$ симметричными множествами $U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ U_{\infty}$, где $\overline{U_i},\ 1 \leqslant i \leqslant n$, — компактные множества ($U_{\infty} = \varnothing$, если $\widehat{G}$ — компактная группа или если $0 \notin \sigma\big(T(f)\big)$), существуют функции $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{L}_\alpha(G)$ со свойствами:

1) $\operatorname{supp} \widehat{f_i} \subset U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$;

2) $\operatorname{supp}\big(\mathbf{1} - \widehat{f_1} - \dots - \widehat{f_n}\big) \subset U_{\infty}$, (для компактной группы $\mathbf{1} = \widehat{f_1} + \dots + \widehat{f_n}$ — разложение единицы на $\Lambda(X)$, где $\mathbf{1}(\gamma) = \gamma$, $\gamma \in \Lambda(X)$, в окрестности $\Lambda(X)$).

Поскольку функции $\varphi_i = \frac{f_i + \overline{f_i}}{2},\ 1 \leqslant i \leqslant n$, вещественны и обладают всеми свойствами функций из определения симметричной суперразложимости, то без ограничения общности можно считать функции $f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, вещественными.

Докажем, что для любого вектора $x \in X$ и рассматриваемой функции $f \in \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{R})$ выполняется $T(f)\Big(x - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k x\Big) = 0$, т. е. $T(f)x = \sum\limits_{k=1}^{n} (f * f_k)x$ (пространство X вкладывается в $\mathbf{X}$). Имеют место равенства:

$$T(f)x = fx = \sum_{k=1}^{n} (f * f_k)x + \Big(f - \sum_{k=1}^{n} f * f_k\Big)x = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_\infty, \tag{2.6}$$

где $x_k = (f * f_k)x \in X \subset \mathbf{X}$ и $x_{\infty} = \Big(f - \sum\limits_{k=1}^{n} f * f_k\Big)x \in X \subset \mathbf{X}$.

Из леммы 2.4 следует, что $\sigma_k = \Lambda(x_k) \subset \operatorname{supp}(\widehat{f}\widehat{f_k}) \subset U_k,\ \sigma_{\infty} = \Lambda(x_{\infty}) \subset U_{\infty}$. Таким образом, $T(f)x = fx = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + x_{\infty} \in \mathbf{X}(\sigma_1) + \dots + \mathbf{X}(\sigma_n) + \mathbf{X}(\sigma_{\infty})$. Все подпространства $\mathbf{X}(\sigma_k),\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ \mathbf{X}(\sigma_\infty)$, инвариантны относительно оператора $T(f)$. Отметим также, что $\sigma_{\mathbb{C}}\big(T(f)\big|\mathbf{X}(\sigma)\big) \subset \widehat{f}(\sigma)$ (см. [6, 12]). Поскольку $\Lambda(\mathbf{X}(\sigma)) \subset \sigma$, то $\widehat{f}\big(\Lambda_{\mathbb{C}}(X(\sigma))\big) \subset \widehat{f}(\sigma)$.

Положим $R_k = T(f_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда суперразложимость оператора $T(f)$ следует из доказанного равенства (2.6).

Докажем суперразложимость оператора $T(g)$, $g \in G$. Наделим группу G дискретной топологией и обозначим её символом G_{d}. Двойственной к ней является компактная группа $\widehat{G_{\mathrm{d}}}$, называемая *компактом Бора*. Тогда из [8] следует, что $\sigma\big(T(g)\big) = \overline{\big\{\lambda \in \mathbb{C} \bigm| \lambda = \gamma(g), \lambda \in \Lambda(X)\big\}}$, где замыкание берётся в группе $\widehat{G_{\mathrm{d}}}$.

Рассмотрим представление $T_{\mathrm{d}}\colon G_{\mathrm{d}} \to \operatorname{End} X$, $T_{\mathrm{d}}(g) = T(g)$, $g \in G_{\mathrm{d}}$. Оператор $T(g)$ представим в виде $T(g) = \mathcal{T}_{\mathrm{d}}(f)$, $f \in \mathrm{L}_\alpha(G_{\mathrm{d}})$, где $f(g) = -1$ и $f(s) = 0$, $s \neq g$. Таким образом, утверждение о спектре оператора $T(g)$ следует из доказанного выше. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $T \in \operatorname{End} X$ — обратимый (т. е. T — биективный оператор) и выполнено условие (неквазианалитичности) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|T^n\|}{1+n^2} < \infty$. Спектр $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ оператора T содержится в $\mathbb{T}$. Рассмотрим представление $\mathcal{T}\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$, $\mathcal{T}(n) = T^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть функция $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z})$ имеет вид: $f(n) = 0$, $n \neq -1$, $f(-1) = 1$. Тогда $\mathcal{T}(f) = T$. Поэтому непосредственно из теоремы 2.1 следует теорема 2.

Пусть множество $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ содержит более двух точек. Поскольку $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ — симметричное множество из $\mathbb{T}$, которое отождествляется со спектром алгебры $\mathrm{L}_\alpha(G)$, то существуют симметричные открытые множества U_1, $U_2 \subset \mathbb{T}$ со свойствами: $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $\sigma_1 = \sigma_{\mathbb{C}}(T) \cap U_1 \neq \varnothing$, $\sigma_2 = \sigma_{\mathbb{C}}(T) \cap U_2 \neq \varnothing$.

Существуют функции $f_1, f_2 \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ такие, что $\operatorname{supp} \widehat{f_i} \subset U_i$, $i = 1, 2$, $\widehat{f_1}(\gamma_1) \neq \varnothing$, $\widehat{f_2}(\gamma_2) \neq \varnothing$, для некоторых $\gamma_1 \in U_1$, $\gamma_2 \in U_2$. Тогда операторы $T(f_1)$, $T(f_2) \in \operatorname{End} X$ обладают свойствами: $T(f_1)T(f_2) = T(f_2)T(f_1) = 0$, $T(f_1) \neq \varnothing$, $T(f_2) \neq \varnothing$ и $\sigma(\mathcal{T}(f_1)) \subset \sigma_1$, $\sigma(\mathcal{T}(f_2)) \subset \sigma_2$. Следовательно, подпространства

$\overline{\operatorname{Im} \mathcal{T}(f_k)}$, $k = 1, 2$, являются ненулевыми нетривиальными инвариантными подпространствами из X.

Следствие 2.2. (см. [49]) Пусть $T \in \operatorname{End} X$ — обратимый оператор и $\dim X > 2$, для которого $\|T^n\| \leqslant c(1 + |n|)^q$, $n \in \mathbb{Z}$, для некоторых $c \geqslant 1$, $q \geqslant 0$. Тогда оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство.

Доказательство. Если множество $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ содержит более двух точек, то существование нетривиального подпространства вытекает из теоремы 2.2. Если $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ состоит из двух точек, то следует провести рассуждения из [49].

Пусть $G = \mathbb{R}$, $T \colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ — неквазианалитическое представление, и $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$. Символом $\mathbf{A} \colon \mathrm{D}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ обозначим генератор группы операторов $\mathbf{T} \colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathbf{X}$, где $\mathbf{T}$ — комплексификация оператора T. Тогда из [43] следует, что спектр $\sigma(-\mathrm{i}\mathbf{A})$ не пуст и является вещественным, т. е. $\sigma(-\mathrm{i}\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 3. Для определенности будем считать, что $a > 0$. Пусть функция $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет вид: $f(t) = -\mathrm{e}^{at}$, при $t \leqslant 0$, и $f(t) = 0$, при $t > 0$. Тогда оператор $(A - aI)^{-1} = T(f)$. Следовательно, утверждения теоремы 2.3 следуют из теоремы 2.2, если учесть равенства $\Lambda(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = \sigma(\mathbf{A})$ (см. [6, 43]). Теорема доказана.

Глава 3

Неравенства Бернштейна для векторов и операторов

Пусть $\mathrm{C_b} = \mathrm{C_b}(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определённых на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X $\big($если $X = \mathbb{C}$, то используется обозначение $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})\big)$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$. Символом $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство 2π – периодических функций.

В статье [58] С. Н. Бернштейном было получено неравенство

$$\|x'\|_\infty \leqslant 2n \cdot \|x\|_\infty$$

для любого тригонометрического многочлена

$$x(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad |\alpha_{-n}| + |\alpha_n| > 0, \tag{3.1}$$

из пространства $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) = \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Практически сразу оно было уточнено Э. Ландау:

$$\|x'\|_\infty \leqslant n \cdot \|x\|_\infty. \tag{3.2}$$

Константа n является точной.

В 1914 году М. Рисс [70], используя интерполяционную формулу, обобщил неравенство на случай произвольного тригонометрического полинома с комплексными коэффициентами.

Затем С.Н. Бернштейном [59] было получено неравенство

$$\|x'\|_\infty \leqslant \sigma \cdot \|x\|_\infty \tag{3.3}$$

для целой функции x экспоненциального типа $\sigma > 0$, принадлежащей пространству $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$. Отметим статьи [34, 48], где аналоги неравенства Бернштейна были получены в других функциональных пространствах.

В 70-х годах прошлого столетия многие авторы стали получать аналоги неравенства Бернштейна для специальных классов линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве. В статье [50] неравенство Бернштейна для операторов было получено с использованием оценки (3.3) для функций. В статье [8] неравенство для оценки нормы оператора было получено на основе аналога интерполяционной формулы Боаса [1], полученной для оцениваемого оператора. Это представление использовалось в статье [30] для оценки нормы векторов из банахова пространства. Сразу отметим, что, хотя полученные здесь оценки для векторов и операторов, действующих в комплексных банаховых пространствах, с помощью комплексификации банахова пространства и результатов статей [4, 31, 49], они распространяются и для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Через $\operatorname{End}\mathscr{X}$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$.

Замкнутый линейный оператор $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ назовём *корректным* (см. [42]) (или *самосопряжённым* [6, 7]), если оператор $\mathrm{i}A$ является генератором (производящим оператором) сильно непрерывной группы изометрических операторов $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$.

В частности, в классической теореме Бернштейна оператор A определяется следующим образом: $A = \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, действует в пространстве равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ и является генератором группы сдвигов. Заметим, что спектр оператора $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (см. [6]). В статье А. Г. Баскакова [8] для ограниченного корректного оператора в банаховом пространстве доказано, что $\|A\| = r(A)$, где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

В данной главе неравенство Бернштейна получено для векторов банахова пространства, где действует изометрическая группа операторов с генератором $\mathrm{i}A$, который может являться неограниченным оператором. Получены приложения неравенства Бернштейна для функций экспоненциального типа на бесконечности и для оценки оператора коммутирования. В статье для такого оператора получена оценка

$$\|Ax\| \leqslant \mathrm{r}(x) \cdot \|x\|, \qquad x \in \mathscr{X}, \tag{3.4}$$

где $\mathrm{r}(x)$ — спектральный радиус вектора x, который определяется ниже.

В частности, для $x \in \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, являющегося тригонометрическим многочленом вида (3.1), $r(x) = n$. Таким образом, оценка (3.4) является непосредственным обобщением неравенства Бернштейна.

3.1 Неравенство Бернштейна для векторов

Пусть $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ (где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство) — сильно непрерывное изометрическое представление. Тогда $\mathscr{X}$ наделяется структурой $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),\ \ x \in \mathscr{X}. \tag{3.5}$$

Модульная структура на $\mathrm{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ определяется формулой (3.5) с помощью представления $\big(T(t)\varphi\big)(s) = \varphi(s+t),\ \varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R}),\ t, s \in \mathbb{R}$, т.е. с помощью обычной операции свертки функций. С учётом формулы (3.5) банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуль $\mathscr{X}$ иногда будет обозначаться через $(\mathscr{X}, T)$.

Напомним определение спектра Бёрлинга вектора и дадим соответствующее определение для $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$.

Определение 3.1 (См. [6–8]). *Спектром Бёрлинга вектора* x из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$.

Пример 3.1. Спектром Бёрлинга тригонометрического многочлена вида (3.1) является множество тех k, для которых $\alpha_k \neq 0$.

Определение 3.2. Пусть M — произвольное подмножество из банахова модуля $\mathscr{X}$. *Спектром Бёрлинга множества* M называется множество $\Lambda(M)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0$ для всех $x \in M\}$.

Нам удобно ещё раз сформулировать основные используемые в этой главе свойства спектра Бёрлинга и связанные с ним понятия.

Лемма 3.1. *Имеют место следующие свойства спектра Бёрлинга векторов из банахова* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — *модуля* $(\mathscr{X}, T)$:

1) $\Lambda(x)$ — *замкнутое подмножество из* $\mathbb{R}$ *и* $\Lambda(x) = \varnothing \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\Lambda(fx) \subset \left(\operatorname{supp}\widehat{f}\right) \cap \Lambda(x)$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), x \in \mathscr{X}$. *В частности, если* x *имеет компактный спектр Бёрлинга, то вектор* fx *также имеет компактный спектр Бёрлинга;*

3) $fx = 0$, *если* $\widehat{f} = 0$ *на множестве* $\Lambda(x)$ *и* $\left(\operatorname{supp}\widehat{f}\right) \cap \Lambda(x)$ *не более чем счётно;*

4) $fx = x$, *если множество* $\Lambda(x)$ *компактно и* $\widehat{f} \equiv 1$ *в некоторой окрестности множества* $\Lambda(x)$.

Замечание 3.1 (См. [6]). Из свойства $fx = 0$ для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$.

Определение 3.3. Линейное подпространство E из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $(\mathscr{X}, T)$ называется *подмодулем*, если оно инвариантно относительно всех операторов вида $T(t),\ t \in \mathbb{R}$, и $T(f),\ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Пусть Δ — замкнутое множество из $\mathbb{R}$. Подмодуль

$$\mathscr{X}(\Delta) = \bigl\{x \in \mathscr{X} \mid \Lambda(x) \subset \Delta\bigr\}$$

называется *спектральным подмодулем*.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathscr{X}$ — банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуль, Δ — замкнутое множество из $\mathbb{R}$. Тогда $\mathscr{X}(\Delta)$ — замкнутый подмодуль, и $\Lambda\bigl(\mathscr{X}(\Delta)\bigr) \subset \Delta$.*

Следующая лемма непосредственно следует из определения обратного преобразования Фурье.

Лемма 3.3. *Пусть $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp} \widehat{f}$ — компакт, и $[-a, a]$, $a > 0$ — наименьший отрезок, содержащий $\operatorname{supp} \widehat{f}$. Тогда f бесконечно дифференцируема. Более того, она допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции $\widetilde{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа $\leqslant a$, т. е. справедлива оценка*

$$\bigl|\widetilde{f}(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi} \max \bigl|\widehat{f}(\lambda)\bigr| \cdot \mathrm{e}^{a|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 3.4. *Пусть $\widehat{f} \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, где x — элемент банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$. Тогда верны следующие равенства:*

$$T(t)x = T(t)(fx) = f_t x, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ где}$$
$$f_t(s) = \bigl(S(t)f\bigr)(s) = f(t+s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathscr{X}.$$

Доказательство. Первое равенство следует из свойства 4 леммы 3.1. Далее,

$$T(t)(fx) = T(t)\int_{\mathbb{R}} f(\tau)T(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)T(t)T(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)T(t-\tau)x\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} \bigl(S(t)f\bigr)(s)T(-s)x\,\mathrm{d}s = f_t x.$$

□

Далее используются степени $A^n\colon \mathrm{D}(A^n) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ оператора A, которые определим согласно книге [22].

Определение 3.4. Для $n = 0, 1, \dots$ оператор A^n определяется по индукции соотношениями $A^0 = I$, $A^1 = A$ и

$$\mathrm{D}(A^n) = \left\{x \in \mathscr{X} \,\middle|\, x \in \mathrm{D}(A^{n-1}),\ \ A^{n-1}x \in \mathrm{D}(A)\right\},$$
$$A^n x = A(A^{n-1}x),\ \ x \in \mathrm{D}(A^n).$$

Лемма 3.5. *Пусть вектор x из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $(\mathscr{X}, T)$ имеет компактный спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ и функция $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности U множества $\Lambda(x)$. Тогда $x \in \mathrm{D}(A^n)$ при любом $n \geqslant 1$ и $fx = \ Ax$.*

Доказательство. Выберем функцию$\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{\varphi} \equiv 1$ в окрестности V множества $\Lambda(x)$ и $\operatorname{supp} \widehat{\varphi}$ — компактное множество. В силу леммы 3.1, $\varphi x = x$. Кроме того, φ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства: φ — бесконечно дифференцируема, $\varphi' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и $\widehat{\varphi'}(\lambda) = \mathrm{i}\lambda\widehat{\varphi}(\lambda)$. Рассмотрим функцию $\psi = -\mathrm{i}\varphi$, $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Следовательно, $\widehat{\psi}'(\lambda) = \lambda\widehat{\varphi}'(\lambda)$. Кроме того, $f - \psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и $\widehat{f} - \widehat{\psi}' = 0$ в окрестности $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ множества $\Lambda(x)$. Следовательно, по свойству 2 леммы 3.1, $(f - \psi')x = 0$, откуда $fx = \psi' x$. Таким образом, утверждение леммы достаточно доказать для функции ψ'.

Поскольку функция φ удовлетворяет условиям леммы 3.4, то имеют место равенства

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)(\varphi x) - \varphi x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t x - \varphi x}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t - \varphi)x}{t} = \varphi' x = \mathrm{i}\psi' x = \mathrm{i}Ax.$$

Таким образом, $x \in \mathrm{D}(A)$. Кроме того, из равенства $\varphi' x = \mathrm{i}Ax$ следует, что $\psi' x = Ax$, или $fx = Ax$. □

Из полученного представления $Ax = fx$ и свойства 2 леммы 3.1 следует, что вектор fx имеет компактный спектр Бёрлинга, и поэтому по доказанному

$fx = Ax \in \mathrm{D}(A)$, причём $A^2x = fAx$. Из определения оператора A^n следует, что $x \in \mathrm{D}(A^n)$ при любом $n \geqslant 1$.

Теорема 3.1. *Если вектор x из $\mathscr{X}$ имеет компактный спектр Бёрлинга, то $x \in \mathrm{D}(A^m)$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$ и справедливы оценки*

$$\|A^m x\| \leqslant r(x)^m \cdot \|x\|$$

при $m \geqslant 1$.

Доказательство. Тот факт что $x \in \mathrm{D}(A^m)$ следует из леммы 3.5.

Покажем, что $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$. Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Тогда по определению существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0$. Тогда $f_0(Ax) = Af_0 x = 0$, откуда

$$\Lambda(Ax) \subset \Lambda(x), \qquad \Lambda(A^n x) \subset \Lambda(x). \tag{3.6}$$

Рассмотрим вектор y вида

$$y = r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi - \pi}{r(x)}\right) x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}. \tag{3.7}$$

Пусть функция $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{\psi}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$. Тогда в силу леммы 3.5 выполнено равенство $Ax = \psi x$. Для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ из леммы 3.4 получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} f(y - Ax) = f(y - \psi x) = \\ = r(x) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_{\frac{k\pi - \pi}{r(x)}}}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \right) x - (\psi * f)x = gx - (\psi * f)x = \varphi x, \end{aligned}$$

где $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ имеет преобразование Фурье вида

$$\widehat{g}(\lambda) = r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{i \frac{k\pi - \pi}{r(x)} \lambda}}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}, \quad g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),$$

и $\varphi = g - \psi * f$. Поскольку x имеет компактный спектр Бёрлинга, то $r(x) < \infty$. Ряд в правой части равенства (3.23) сходится абсолютно. Функция φ удовлетворяет условиям свойства 3 леммы 3.1. Таким образом, $f(y - Ax) = 0$ для каждой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и поэтому $y - Ax = 0$ в силу замечания 3.1. Имеют место оценки

$$\|Ax\| = r(x) \cdot \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi - \pi}{r(x)}\right)x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \right\| \leqslant r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \cdot \|x\| = r(x) \cdot \|x\|.$$

Из включения (3.6) и доказанного получаем, что

$$\left\|A^n x\right\| = \left\|A^{n-1}Ax\right\| \leqslant r(x)^n \|x\|, \qquad n \geqslant 2.$$

□

3.2 Некоторые приложения неравенств Бернштейна

Как и ранее, символ $\mathrm{C}_{\mathrm{bu}}(\mathbb{R})$ используется для обозначения замкнутого подпространства равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций из $\mathrm{C}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$. Через $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ обозначим замкнутое подпространство $\left\{x \in \mathrm{C}_{\mathrm{bu}}(\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{|t|\to\infty} \left|x(t)\right| = 0\right\}$.

Определение 3.5. Функцию $x \in \mathrm{C}_{\mathrm{bu}}(\mathbb{R})$ будем называть *целой на бесконечности* функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_0 \in \mathrm{C}_{\mathrm{bu}}(\mathbb{R})$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции $\widetilde{x_0}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$ такая, что $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$.

Лемма 3.6. *Любая функция $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством $\operatorname{supp} \widehat{f} \in [-\sigma, \sigma]$ допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа a. Более того, функция $f_z(s) = f(s + z)$, $s \in \mathbb{R}$, для каждого $z \in \mathbb{C}$ принадлежит алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и функция $F\colon \mathbb{C} \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $F(z) = f_z$ является целой функцией экспоненциального типа σ.*

Доказательство. Покажем, что f допускает расширение до функции экспоненциального типа σ. Запишем функцию f в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, \mathrm{d}\lambda,$$

и положим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}\lambda,\qquad z\in\mathbb{C}.$$

Справедлива оценка

$$\bigl|f(z)\bigr|\leqslant\frac{1}{2\pi}2\sigma\cdot\max_{\lambda\in[-\sigma,\sigma]}\bigl|\widehat{f}(\lambda)\bigr|\cdot\mathrm{e}^{\sigma|z|}.$$

Таким образом, получено расширение функции f на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа σ.

Поскольку $\left(\frac{\mathrm{d}f_z}{\mathrm{d}z}\right)(s)=\frac{\mathrm{d}f(z-s)}{\mathrm{d}z},\quad z\in\mathbb{C},\ s\in\mathbb{R}$, то функция F является целой функцией экспоненциального типа σ. □

Лемма 3.7. *Функция $x\in\mathrm{C}_{\mathrm{bu}}(\mathbb{R})$ допускает расширение до функции экспоненциального типа σ тогда и только тогда, когда $\Lambda(x)\subset[-\sigma,\sigma]$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть найдётся $\lambda_0>\sigma+\delta$ для некоторого $\delta>0$. Выберем $f_0\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ так, чтобы $\widehat{f_0}(\lambda_0)\neq0$, и пусть $x_0=f_0*x$, тогда $\Lambda(x_0)\subset[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$. Рассмотрим функцию $y_0(t)=(f_0*x)(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 t}$, $\Lambda(y_0)\subset[-\delta,\delta]$. Таким образом, построена функция $(f_0*x)(z)=y_0(z)\mathrm{e}^{i\lambda_0 z}$ экспоненциального типа $\geqslant\sigma+\delta$. *Достаточность.* Пусть $\Lambda(x)\subset[-\sigma,\sigma]$. Выберем $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f}=1$ в окрестности спектра, и $\mathrm{supp}\widehat{f}\subset[-\sigma-\varepsilon,\sigma+\varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon>0$. Тогда $f*x=x$, f — целая функция со свойствами из леммы 3.6. Тем же символом x будем обозначать продолжение x на $\mathbb{C}$. Положим $x(z)=\int\limits_{\mathbb{R}}f(z-s)x(s)\,\mathrm{d}s$. Имеет место оценка

$$x(z)\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}|f(z-s)|x(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\|f_z\|_1\cdot\|x\|,\qquad z\in\mathbb{C},\ \ s\in\mathbb{R}.$$

Поскольку $\|f_z\|_1\leqslant\mathrm{Const}\cdot\mathrm{e}^{(\sigma+\varepsilon)|z|},\ \ z\in\mathbb{C}\ s\in\mathbb{R}$, то x — функция экспоненциального типа $\leqslant\sigma+\varepsilon$. Ввиду произвольности выбора $\varepsilon>0$ получаем, что x — функция экспоненциального типа σ. □

Лемма 3.8. *Функция $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $(x - f * x) \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ для каждой суммируемой функции f со свойством $\widehat{f} \equiv 1$ на $[-\sigma, \sigma]$.*

Определение 3.6. Функцию $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ назовём *медленно меняющейся на бесконечности* функцией, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено свойство $S(\alpha)x - x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ или, другими словами, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{|t|\to\infty} \big|x(t+\alpha) - x(t)\big| = 0.$$

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ будем обозначать через $\mathrm{C_{sl}}(\mathbb{R})$.

Отметим, что каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция эквивалентна целой функции на бесконечности экспоненциального типа 0 (см. [36]).

Рассмотрим сильно непрерывную группу сдвигов $S\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$, действующую по правилу: $\big(S(t)x\big)(s) = x(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Через $\widetilde{S}\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\ \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})/\mathrm{C_0}$ обозначим представление, определённое по правилу: $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x}$. Модульная структура определяется формулой

$$f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{S}(-t)\widetilde{x}\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L^1}(\mathbb{R}),\ \widetilde{x} \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}).$$

Пусть $x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$, и $y \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ — представитель класса $\widetilde{y}$. Введём норму класса $\widetilde{y}$ по правилу:

$$\big\|\widetilde{y}\big\| = \inf_{x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})} \|y + x\|.$$

Теорема 3.2. *Пусть функция $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такая целая функция x_0 экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$ и функция $y_0 \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ такие, что $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и имеет место оценка*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \big|x_0'(t)\big| \leqslant (\sigma + \varepsilon) \lim_{\alpha\to\infty} \sup_{|t|>\alpha} \big|x(t)\big|.$$

Доказательство следует из приведённых выше результатов и теоремы 3.1.

Здесь используется терминология и результаты из статей [2, 3, 5]. Пусть $\mathscr{X}_1,\ \mathscr{X}_2$ — банаховы пространства и пусть $\mathrm{i}A_1,\ \mathrm{i}A_2,\ A_k \in \operatorname{End}\mathscr{X}_k,\ k = 1, 2$ — генераторы изометрических групп $T_1(t)$ и $T_2(t)$ соответственно:

$$T_1\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_1, \qquad T_2\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_2.$$

Банахово пространство $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ наделяется структурой банахова модуля по представлению $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ вида $T(t)X = T_2(t)XT_1(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$. Модульная структура определяется с помощью формулы

$$(fX)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\big(T(t)X\big)x\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\big(T_2(t)XT_1(-t)\big)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Отметим, что представление T является непрерывным в сильной операторной топологии.

Обозначим символом $\mathrm{ad}_{A_1A_2}$ оператор вида $\mathrm{ad}_{A_1A_2}X = A_2X - XA_1$. В случае, когда $A_1 = A_2 = A$, $\mathrm{ad}_{A_1A_2}X = \mathrm{ad}_A X = AX - XA$ — коммутатор.

Оператор X принадлежит $\mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1A_2})$, если $X\mathrm{D}(A_1) \subset \mathrm{D}(A_2)$ и оператор $A_2X - XA_1$ допускает ограниченное расширение на $\mathscr{X}_1$. В дальнейшем это расширение будет обозначаться тем же символом $A_2X - XA_1$. Отметим, что спектром оператора $\mathrm{ad}_{A_1A_2}$ является множество

$$\sigma(\mathrm{ad}_{A_1A_2}) = \overline{\big\{\lambda_2 - \lambda_1\colon \lambda_1 \in \sigma(A_1), \lambda_2 \in \sigma(A_2)\big\}},$$

где $\sigma(A_1),\ \sigma(A_2)$ — соответственно спектры операторов $A_1,\ A_2$.

Лемма 3.9. *Если $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ имеет компактный спектр Бёрлинга $\Lambda(X) = \Lambda(X, T)$, то $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1A_2})$ $\big($т.е. корректно определен оператор $A_2X - XA_1 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)\big)$.*

В статьях [3, 57] спектр Бёрлинга $\Lambda(X)$ оператора $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ назывался *памятью* оператора.

Теорема 3.3. *Если спектр Бёрлинга* $\Lambda(X,T)$ *оператора* $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ *является компактным множеством, то справедливо следующее неравенство:*

$$\left\|\mathrm{ad}_{A_1A_2}X\right\| \leqslant \mathrm{r}(X)\cdot\|X\|,$$

где $\mathrm{r}(X) = \max\limits_{\lambda\in\Lambda(X)}|\lambda|$ *— спектральный радиус оператора* X*, рассматриваемого как вектора из банахова* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *— модуля* $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$.

Доказательство следует из теоремы 3.1 и приведённых выше результатов.

□

Пусть $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ — сепарабельные бесконечномерные банаховы пространства с безусловными базисами $\left(e_k^{'}\right)$ и $\left(e_k^{''}\right)$ соответственно. Матрица (x_{mn}) оператора $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ определяется из равенств

$$Xe_n^{'} = \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}e_m^{''}.$$

Пусть определены сильно непрерывные изометрические представления $T_k\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_k$, $k = 1, 2$, определённые равенствами:

$$T_1(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\alpha_n e_n^{'}, \qquad T_2(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\beta_n e_n^{''}.$$

Рассмотрим ограниченное представление

$$T\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathrm{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2), \qquad T(t)X = T_2(t)XT_1(-t),$$

где $x \in \mathscr{X}_1,\ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R},\ X \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$, и оператор вида

$$(fX)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)XT_1(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

При $x = e_n^{'}$ получаем равенства:

$$(fX)e_n^{'} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)XT_1(-\tau)e_n^{'}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}e_n^{'}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}Xe_n^{'}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}e_m^{''}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\tau}x_{mn}e_m^{''}\,\mathrm{d}\tau = \sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}(n-m)x_{mn}e_m^{''}.$$

Таким образом, матрица оператора X имеет вид $\big(\widehat{f}(n-m)x_{mn}\big)$. Следовательно, $fX = 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{f}(n-m) = 0, \quad m,n \in \mathbb{N}$, для которых $x_{mn} \neq 0$, то есть спектр Бёрлинга оператора X имеет вид:

$$\Lambda(X) = \big\{m,n \in \mathbb{N} \mid \text{существует } f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \text{ такая,} \\ \text{что } \widehat{f}(n-m) = 0 \text{ и } x_{mn} \neq 0\big\}.$$

3.3 Неравенство Бернштейна в весовых пространствах

В данном параграфе получены аналоги неравенства Бернштейна для операторов и векторов из банахова пространства, в котором действует группа операторов полиномиального роста. Аналогами неравенства Бернштейна здесь являются неравенства, связывающие норму оператора, вектора с их спектральным радиусом. Доказательство приводимых результатов, используемый понятийный аппарат существенно использует теорию представлений однопараметрических групп операторов и спектральную теорию в банаховых модулях над групповыми алгебрами.

Введём в рассмотрение основные понятия и приведём основные результаты. Напомним некоторые основные используемые в этом параграфе понятия и результаты из теории функций и представлений.

Измеримая функция $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ называется *весовой* (*весом*), если $\alpha(t) \geqslant 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\alpha(t_1 + t_2) \leqslant \alpha(t_1) \cdot \alpha(t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Вес α называется *неквазианалитическим*, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\ln|\alpha(t)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Банахова алгебра $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ суммируемых с весом $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функций с нормой

$$\|f\|_\alpha = \int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(t)\big|\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

является регулярной банаховой алгеброй со свёрткой функций в качестве умножения:

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}).$$

В случае $\alpha = 1$ алгебра обозначается символом $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Символом $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначим преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

функции $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$.

Пусть X — комплексное банахово пространство. Рассматривается сильно непрерывная группа операторов (представление) $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, допускающих оценку

$$\|T(-t)\| \leqslant \alpha(t) = \mathrm{c}_1(1 + \mathrm{c}_2|t|)^\gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

где $\mathrm{c}_1 \geqslant 1$, $\mathrm{c}_2 \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$. Ясно, что условие (3.8) влечёт неквазианалитичность веса α. Таким образом, если $\gamma = 0$ и $\mathrm{c}_1 = 1$, то T — группа изометрий.

Пусть $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — генератор группы операторов T [51]. Отметим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественный [43].

Основные используемые далее результаты и понятия из спектральной теории банаховых модулей можно найти в работах [6–8, 11, 15].

Банахово пространство X наделяется структурой банахова $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ – модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,\mathrm{d}t, \quad f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}),\ x \in X. \tag{3.9}$$

Из этой формулы следуют оценки

$$\|fx\| \leqslant \|f\|_\alpha \|x\|, \quad f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}),\ x \in X, \tag{3.10}$$

постоянно используемые в данной статье. Отметим также важное свойство невырожденности $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ – модуля X: из условия $fx = 0$ для любой $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$

следует, что $x = 0$. Будем говорить, что банахов модуль X *ассоциирован с представлением* T, если имеют место равенства

$$fT(t)x = T(t)fx = \big(S(t)f\big)x, \quad t \in \mathbb{R}, \;\; x \in X, \;\; f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}), \tag{3.11}$$

где S — оператор сдвига в $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$, определённый формулой $\big(S(t)f\big)(s) = f(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Докажем, что с каждым невырожденным банаховым $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ – модулем ассоциировано единственное представление. Рассмотрим банахов $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ – модуль X и ассоциированные с ним представления $T_1, T_2 \colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$. Для произвольных $x \in X$ и $t \in \mathbb{R}$ в силу (4.3) выполнены следующие равенства:

$$fT_1(t)x = \big(S(t)f\big)x = fT_2(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \;\; x \in X, \;\; f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}),$$

т. е. $f\big(T_1(t)x - T_2(t)x\big) = 0$. Из невырожденности модуля X следует, что $T_1(t)x = T_2(t)x$. Единственность представления доказана.

Символом $\widetilde{T}(f)$ для $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ обозначим оператор из $\operatorname{End} X$ вида

$$\widetilde{T}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,\mathrm{d}t = fx, \quad x \in X. \tag{3.12}$$

Определение 3.7. *Пространством Степанова* S^p, $p \in [0, \infty)$, будем называть совокупность локально суммируемых функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|x\|_{\mathrm{S}^p} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big(\int\limits_0^1 \big\|x(s+t)\big\|^p \,\mathrm{d}s \Big)^{1/p} < \infty. \tag{3.13}$$

Определение 3.8. Функциональное банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ будем называть *однородным*, если оно обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{F}$ непрерывно вложено в пространство Степанова $\mathcal{S}^1$;

2. для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{F}$ имеет место $S(t)x \in \mathcal{F}$, где оператор сдвига $\big(S(t)x\big)(s) = x(s+t)$ является изометрией из $\operatorname{End} \mathcal{F}$;

3. для $x \in \mathcal{X}$ и $C \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ функция $y(t) = C\big(x(t)\big)$ принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|y\| \leqslant \|C\| \cdot \|x\|$;

4. для $x \in \mathcal{F}$ и $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ свёртка

$$(g * x)(t) \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)x(t-s)\,\mathrm{d}s$$

   принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|g * x\| \leqslant \|g\|_1 \|x\|$;

5. если $x \in \mathcal{F}$ таков, что $f * x = 0$ для всех $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, то $x = 0$;

6. для $x \in \mathcal{F}$ и $\varphi \in \mathrm{C}_{\mathrm{bu}}$ имеет место $\varphi x \in \mathcal{F}$. Кроме того, $\|\varphi x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \sup \varphi \cdot \|x\|$.

Непосредственно из определения следует, что любое однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ является банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модулем со свёрткой функций в качестве умножения.

Имеет место следующая

Теорема 3.4. *Если спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ функции $x \in \mathfrak{F}$ является компактным множеством, то x допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа $\sigma = \mathrm{r}_{\mathrm{B}}(x)$ и для производной $x^{(k)}$, $k \geqslant 1$, имеют место оценки*

$$\big\|x^{(k)}\big\|_{\mathfrak{F}} \leqslant \sigma^k \|x\|_{\mathfrak{F}}.$$

Рассмотрим функцию $f_z \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \neq 0$, определённую равенствами

$$f_z(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{zt}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \tag{3.14}$$

при $\operatorname{Re} z < 0$ и

$$f_z(t) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{zt}, & t < 0, \\ 0, & t \geqslant 0; \end{cases} \tag{3.15}$$

при $\operatorname{Re} z > 0$.

Рассмотрим функцию $R\colon \mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$, $R(z)x = f_z x$, $x \in X$, $z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$. Отметим, что $\|R(z)x\| \leqslant \|f_z\|_1 = \frac{1}{|\operatorname{Re} z|}$. Покажем, что функция R является резольвентой некоторого линейного оператора. Из равенств

$$\widehat{f_{z_1}} - \widehat{f_{z_2}} = \frac{1}{\lambda - z_1} - \frac{1}{\lambda - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)} = (z_1 - z_2)\widehat{f_{z_1}}\widehat{f_{z_2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R},$$

следует, что

$$\big(R(z_1) - R(z_2)\big)x = (f_{z_1} - f_{z_2})x = (z_1 - z_2)R(z_1)R(z_2)x, \quad x \in X. \tag{3.16}$$

Таким образом, доказано, что R является псевдорезольвентой [35] на открытом множестве $\mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$. Докажем, что R является резольвентой. Поскольку $\ker R(z_1) = \ker R(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$, то достаточно установить равенство $\ker R(1) = \{0\}$. Пусть $x_0 \in \ker R(1)$. Тогда $f_1 x_0 = 0$. Из равенства $\widehat{f_1}(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda - 1}$ и свойства $\widehat{f_1}(\lambda_1) \neq \widehat{f_1}(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ получаем, что наименьший замкнутый идеал, содержащий функцию f_1, совпадает со всей алгеброй $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Следовательно, $f x_0 = 0$ для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Из свойства невырожденности $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля X следует, что $x_0 = 0$. Положим $\mathrm{i}A = R^{-1}(z) + zI$, $z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$. Оператор A называют генератором модуля. Отметим, что определение корректно, то есть не зависит от выбора $z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Итак, (X, T) — банахов $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ – модуль, следовательно, имеют место определяемые в лемме 3.1 свойства спектра Бёрлинга векторов из $\mathscr{X}$.

Лемма 3.10. *Пусть вектор x из $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ — модуля имеет компактный спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ и функция $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности U множества $\Lambda(x)$. Тогда $x \in \mathrm{D}(A^n)$ при любом $n \geqslant 1$ и $fx = Ax$.*

Доказательство. Выберем функцию $\varphi \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{\varphi} = 1$ в окрестности V множества $\Lambda(x)$ и $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}$ — компактное множество. В силу леммы 3.1, $\varphi x = x$. Кроме того, φ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства: φ — бесконечно дифференцируема, $\varphi' \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$, и $\widehat{\varphi'}(\lambda) = \mathrm{i}\lambda\widehat{\varphi}(\lambda)$. Рассмотрим функцию $\psi = -\mathrm{i}\varphi$, $\psi \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$. Следовательно, $\widehat{\psi}'(\lambda) = \lambda\widehat{\varphi}'(\lambda)$. Кроме того, $f-\psi \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$, и $\widehat{f}-\widehat{\psi}' = 0$ в окрестности $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}$ множества $\Lambda(x)$. Следовательно, по свойству 2 леммы 3.1, $(f-\psi')x = 0$, откуда $fx = \psi' x$. Таким образом, утверждение леммы достаточно доказать для функции ψ'.

Имеют место равенства

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)(\varphi x)-\varphi x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t x-\varphi x}{t} = \\ = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t-\varphi)x}{t} = \varphi' x = \mathrm{i}\psi' x = \mathrm{i}Ax.$$

Таким образом, $x \in \mathrm{D}(A)$ согласно определению генератора. Кроме того, из равенства $\varphi' x = \mathrm{i}Ax$ следует, что $\psi' x = Ax$, или $fx = Ax$.

Из полученного представления $Ax = fx$ и свойства 2 леммы 3.1 следует, что вектор fx имеет компактный спектр Бёрлинга, и поэтому по доказанному $fx = Ax \in \mathrm{D}(A)$, причём $A^2x = fAx$. Из определения оператора A^n следует, что $x \in \mathrm{D}(A^n)$ при любом $n \geqslant 1$. □

Определение 3.9. Пусть x — вектор с компактным спектром Бёрлинга из $\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ – модуля X. Величина

$$\mathrm{r_B}(x) = \max_{\lambda\in\Lambda(x)}|\lambda| < \infty, \tag{3.17}$$

называется *спектральным радиусом* вектора $x \in X$.

Основные результаты статьи получены с использованием следующих величин:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}(a) = a\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\left(\frac{k\pi-\pi}{a}\right)}{\left(\pi/2-k\pi\right)^2}, \quad a>0. \tag{3.18}$$

в предположении, что выполнено условие (3.8) на вес α (отметим, что $\mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}(a) = a$ в случае $\alpha = 1$);

$$\mathrm{C_B} = \inf\left\{\|f\|_\alpha \;\middle|\; f\in\mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}),\ \widehat{f}(\lambda)=\lambda \text{ в окрестности } [-1,1]\right\}, \tag{3.19}$$

а также

$$\mathrm{C_B}(a) = a \sup_{\tau>0} \frac{\alpha\big(\tau/a\big)}{\alpha(\tau)} \mathrm{C_B}. \tag{3.20}$$

Отметим, что в случае веса α, удовлетворяющего условию (3.8), величина

$$\mathrm{C_B}(a) = a \sup_{\tau>0} \left(\frac{1+\frac{\mathrm{c}_1}{a}\tau}{1+\mathrm{c}_1\tau} \right)^{\gamma} \mathrm{C_B}$$

в зависимости от a и γ принимает следующие значения: $\mathrm{C_B}(a) = a \cdot \mathrm{C_B}$ при $a \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$ и $\mathrm{C_B}(a) = a^{1-\gamma} \cdot \mathrm{C_B}$ при $0 < a < 1$, $0 \leqslant \gamma < 1$. В случае $0 < a < 1$, $\gamma \geqslant 1$, не существует константы, связывающей норму вектора с его спектральным радиусом в классе растущих полугрупп операторов (например, для нильпотентных операторов).

Следующие две теоремы являются одними из основных результатов данной главы.

Теорема 3.5. *Пусть вес $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию (3.8) с $0 < \gamma < 1$. Тогда любой вектор $x \in \mathcal{X}$ с компактным спектром Бёрлинга $\Lambda(x)$ принадлежит области определения оператора A. Имеет место представление*

$$Ax = r_{\mathrm{B}}(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\right)x}{\big(\pi/2-k\pi\big)^2} \tag{3.21}$$

и оценка

$$\|Ax\| \leqslant \mathrm{C_{B,\alpha}}\big(\mathrm{r_B}(x)\big) \cdot \|x\|, \quad n \geqslant 1.$$

Следствие 3.1. Если $\mathrm{c}_1 = 1$ и $\gamma = 0$, то

$$\big\|A^n x\big\| \leqslant \mathrm{r_B}(x)^n \tag{3.22}$$

для любого вектора x с компактным спектром Бёрлинга.

Теорема 3.6. *Пусть $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, — весовая функция, удовлетворяющая условию (3.8), и вектор $x \in X$ имеет компактный спектр Бёрлинга. Тогда*

$x \in \mathrm{D}(A)$ *и имеет место оценка*

$$\|Ax\| \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r_B}(x)\big) \cdot \mathrm{r_B}(x).$$

В частности, если A — ограниченный оператор, то $\|A\| \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r}(A)\big) \cdot \mathrm{r}(A)$.

Отметим, что в случае $\alpha = 1$ в предыдущем была получена оценка $\big\|A^n x\big\| \leqslant \mathrm{r}_\mathrm{B}^n(x) \cdot \|x\|$, $n \geqslant 1$, для вектора x с компактным спектром Бёрлинга $\Lambda(x)$.

Доказательство теоремы 3.5. Для любого числа $\varepsilon \in (0, 1)$ рассмотрим вектор $y \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ вида

$$y = \big(r(x) + \varepsilon\big) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi - \pi}{r(x)+\varepsilon}\right) x}{\big(\pi/2 - k\pi\big)^2}. \tag{3.23}$$

Пусть функция $\psi \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{\psi}(\lambda) = \lambda$ на отрезке $\big[-\mathrm{r}(x) - \varepsilon, \mathrm{r}(x) + \varepsilon\big]$. Тогда в силу свойства 6 леммы 3.1 выполнено равенство $Ax = \psi x$. Для любой функции $f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f} = 1$ на отрезке $\big[-\mathrm{r}(x) - \varepsilon, \mathrm{r}(x) + \varepsilon\big]$ получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} &f(y - Ax) = f(y - \psi x) = \\ &\qquad = \big(r(x) + \varepsilon\big) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{S\big(\frac{k\pi - \pi}{r(x)+\varepsilon}\big) f}{\big(\pi/2 - k\pi\big)^2}\right) x - (\psi * f)x = gx - (\psi * f)x = \varphi x. \end{aligned}$$

В этих равенствах $S \colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ — группа операторов сдвигов, определяемых равенствами

$$\big(S(t)f\big)(s) = f(s + t), \quad g \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}),$$

а функция $g \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$ имеет преобразование Фурье вида

$$\widehat{g}(\lambda) = r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{i \frac{k\pi - \pi}{r(x)} \lambda}}{\big(\pi/2 - k\pi\big)^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

и $\varphi = g - \psi * f$. Поскольку x имеет компактный спектр Бёрлинга, то $r(x) < \infty$. Ряд в правой части равенства (3.23) сходится абсолютно. Функция φ удовлетворяет условиям леммы 3.10. Таким образом, $f(y - Ax) = 0$ для каждой функции

$f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R})$, и поэтому $y - Ax = 0$. Имеют место оценки

$$\|Ax\| = \big(\mathrm{r}(x)+\varepsilon\big) \cdot \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi-\pi}{r(x)+\varepsilon}\right)x}{\big(\pi/2 - k\pi\big)^2} \right\| \leqslant \big(\mathrm{r}(x)+\varepsilon\big) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left(\frac{k\pi-\pi}{\mathrm{r}(x)+\varepsilon}\right)}{\big(\pi/2 - k\pi\big)^2} \cdot \|x\|. \tag{3.24}$$

Ввиду произвольности выбора $\varepsilon \in (0,1)$ из (3.24) следует доказываемая оценка (3.21). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.6. Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ в окрестности отрезка $[-1,1]$ и семейство $\big(f_æ\big)$, $æ > 0$, из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, для которого $\widehat{f_æ}(\lambda) = æ\widehat{f}(æ^{-1}\lambda)$, $æ > 0$. Имеют место равенства

$$f_æ(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f_æ}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} æ\widehat{f}(æ^{-1}\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= æ^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}æ\tau t}\,\mathrm{d}\tau = æ^2 f(æt).$$

Из полученных соотношений следуют оценки:

$$\|f_æ\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} æ^2|f(æt)|\alpha(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} æ|f(\tau)|\alpha(æ^{-1}\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} æ|f(\tau)|\frac{\alpha(æ^{-1}\tau)}{\alpha(\tau)}\alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$\leqslant æ \cdot \sup_{\tau\in\mathbb{R}_+} \frac{\alpha(æ^{-1}\tau)}{\alpha(\tau)} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(\tau)\big|\alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{C_B}(æ)\|f\|_\alpha,\ æ > 0.$$

Теорема доказана.

3.4 Приложения полученных результатов в весовых пространствах

Полученные в теоремах 3.5, 3.6 оценки естественным образом распространяются на векторы из вещественных банаховых пространств. В определении спектрального радиуса вектора (оператора) выступает спектр Бёрлинга вектора как элемента комплексификации рассматриваемого пространства. Соответствующая техника исследований развита в статьях [4, 31, 32, 49].

Полученные результаты могут быть использованы для оценок производной от функций из банахова пространства $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, которое строится по однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ следующим образом. Функцию $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ отнесём к $\mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, если $y = \frac{x}{\alpha} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ с нормой $\|x\| = \|y\|_{\mathcal{F}}$ и функция $t \mapsto S(t)x \colon \mathbb{R} \to \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ непрерывна. Далее считается, что весовая функция α удовлетворяет условию (3.8). Тогда группа операторов $S(t) \in \operatorname{End} \mathcal{F}_\alpha,\ t \in \mathbb{R}$, сильно непрерывна и удовлетворяет оценке

$$\big\|S(t)\big\| \leqslant \alpha(t) = \mathrm{c}_1(1 + \mathrm{c}_2|t|)^\gamma, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Её генератором является оператор дифференцирования

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \colon \mathcal{F}_\alpha^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \subset \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}_\alpha,$$

где $\mathcal{F}_\alpha^{(1)} = \mathcal{F}_\alpha^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) = \big\{x \in \mathcal{F}_\alpha \;\big|\; \dot{x} \in \mathcal{F}_\alpha\big\}$.

Докажем непрерывность оператора сдвига $S \colon \mathrm{C}_{\mathrm{b}\alpha}(\mathbb{R}, X) \to \mathrm{C}_{\mathrm{b}\alpha}(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что пространство $\mathrm{C}_{\mathrm{b}\alpha}$ является подпространством из C_{bu}. Пусть $x \in \mathrm{C}_{\mathrm{b}\alpha}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{\big(S(t)x\big)(s)}{\alpha(s)} = \frac{x(s+t)}{\alpha(s+t)} \cdot \frac{\alpha(s+t)}{\alpha(s)} \leqslant \frac{\alpha(s+t)}{\alpha(s)}\|x\|_{\mathrm{C_b}} \leqslant \alpha(t)\|x\|_{\mathrm{C_b}}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\sup_{s\in\mathbb{R}}\Big\| \frac{x(s+t)\alpha(s+t) - x(s)\alpha(s)}{\alpha(s)} \Big\| &= \\
= \lim_{t\to 0}\sup_{s\in\mathbb{R}}\Big\| \big(x(s+t) - x(s)\big)\frac{\alpha(s+t)}{\alpha(s)} + x(s)\Big(\frac{\alpha(s+t)}{\alpha(s)} - 1\Big) \Big\| &\leqslant \\
\leqslant \lim_{t\to 0}\sup_{s\in\mathbb{R}}\Big\| \big(x(s+t) - x(s)\big)\alpha(t) \Big\| + \lim_{t\to 0}\sup_{s\in\mathbb{R}}\Big\| x(s)\big(\alpha(t) - 1\big) \Big\| &= 0.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве первое слагаемое обращается в ноль из-за равномерной ограниченности x, а второе — в силу определения веса α. Таким образом, непрерывность оператора сдвига в пространстве $\mathrm{C}_{\mathrm{b}\alpha}$ доказана.

Имеет место следующая

Теорема 3.7. *Пусть $x \in \mathcal{F}_\alpha$ имеет компактный спектр Бёрлинга. Тогда имеет место оценка*

$$\|x'\|_{\mathcal{F}} \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r}(x)\big) \cdot \mathrm{r}(x).$$

В частности, если x — функция экспоненциального типа $\sigma > 0$, ограниченная на вещественной оси, то имеет место оценка $\|x'\| \leqslant \sigma \|x\|_{\mathcal{F}}$.

Пусть $\mathscr{X}_1,\ \mathscr{X}_2$ — банаховы пространства и пусть $\mathrm{i}A_1,\ \mathrm{i}A_2,\ A_k \in \operatorname{End}\mathscr{X}_k,\ k = 1, 2$ — генераторы групп $T_1(t)$ и $T_2(t)$ соответственно:

$$T_1\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_1, \qquad T_2\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_2.$$

Будем считать, что представления T_1 и T_2 допускают оценки

$$\|T_1(-t)\| \leqslant \alpha_1(t) = \mathrm{c}_{11}(1 + \mathrm{c}_{12}|t|)^{\gamma_1},$$
$$\|T_2(-t)\| \leqslant \alpha_2(t) = \mathrm{c}_{21}(1 + \mathrm{c}_{22}|t|)^{\gamma_2},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{c}_{11}, \mathrm{c}_{21} \geqslant 1$, $\mathrm{c}_{12}, \mathrm{c}_{22} \geqslant 0$ и $\gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0$.

Банахово пространство $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ наделяется структурой банахова модуля по представлению $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ вида $T(t)X = T_2(t)XT_1(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$. Представление T допускает оценку вида

$$\|T(-t)\| \leqslant \alpha(t) = \alpha_1(t)\alpha_2(t) \leqslant \mathrm{c}_1\big(1 + \mathrm{c}_2|t|\big)^{\gamma}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.25}$$

где $\mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_{11}\mathrm{c}_{21} \geqslant 1$, $\mathrm{c}_2 = \max\big\{\mathrm{c}_{12}, \mathrm{c}_{22}\big\} \geqslant 0$ и $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \geqslant 0$.

Модульная структура определяется с помощью формулы

$$(fX)x = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\big(T(t)X\big)x\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\big(T_2(t)XT_1(-t)\big)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Отметим, что представление T является непрерывным в сильной операторной топологии.

Обозначим символом ad_{A_1,A_2} оператор вида $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = A_2X - XA_1$. В случае, когда $A_1 = A_2 = A$, $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = \mathrm{ad}_A X = AX - XA$ — коммутатор.
Оператор X принадлежит $\mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$, если $X\mathrm{D}(A_1) \subset \mathrm{D}(A_2)$ и оператор

$A_2X - XA_1$ допускает ограниченное расширение на $\mathscr{X}_1$. В дальнейшем это расширение будет обозначаться тем же символом $A_2X - XA_1$. Отметим, что спектром оператора ad_{A_1,A_2} является множество

$$\sigma(\mathrm{ad}_{A_1,A_2}) = \overline{\big\{\lambda_2 - \lambda_1 \colon \lambda_1 \in \sigma(A_1), \lambda_2 \in \sigma(A_2)\big\}},$$

где $\sigma(A_1),\ \sigma(A_2)$ — соответственно спектры операторов $A_1,\ A_2$.

Лемма 3.11. *Если* $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ *имеет компактный спектр Бёрлинга, то* $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$ $\big($*т.е. корректно определен оператор* $A_2X - XA_1 \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)\big)$.

Теорема 3.8. *Пусть* $\alpha_T(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, *— весовая функция, удовлетворяющая условию (3.25), и спектр Бёрлинга* $\Lambda(X)$ *оператора* $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ *является компактным множеством. Тогда* $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$ *и имеет место оценка*

$$\big\|A_2X - XA_1\big\| \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r}(X)\big) \cdot \mathrm{r}(X).$$

Множество $\Lambda(X)$ в статье [57] называлось памятью оператора.

Глава 4

Неравенства Бора – Фавара и метод подобных операторов

4.1 Неравенства Бора–Фавара для операторов

В 1935 году Х. Бором [60] было доказано неравенство (оценка нормы интегрального оператора)

$$\|Jx\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2n}\|x\|_\infty = \frac{\pi}{2n}\max_{t\in[0,2\pi]}\bigl|x(t)\bigr| \tag{4.1}$$

для любой непрерывной 2π–периодической функции с рядом Фурье вида $x(t) \sim \sum\limits_{|k|\geqslant n} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t \in \mathbb{R}$, и интеграла $Jx = J_n x = \sum\limits_{|k|\geqslant n} \frac{1}{\mathrm{i}k} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, получена оценка нормы $\|J_n\|$ оператора интегрирования в подпространстве $\mathrm{C}_{2\pi,n}(\mathbb{R})$ банахова пространства $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ периодических периода 2π функций, спектр которых лежит вне интервала $(-n, n)$. Полученная оценка является точной, т. е. $\|J_n\| = \frac{\pi}{2n}$. Затем эта оценка была распространена Ж. Фаваром [66] и Б. М. Левитаном [40] на почти периодические функции. Необходимость распространения неравенств Бора–Фавара на более широкий класс функций привела к следующей постановке задачи.

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End}\mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$, и $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление (изометрическая группа операторов). Пусть $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — её генератор. Тогда спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественный, и поэтому его резольвентное множество $\rho(A)$ содержит $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В частности, если $\mathscr{X} = \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ — банахово пространство комплекснозначных равномерно непрерывных ограниченных на вещественной оси функций, то группа операторов $S(t),\ \ t \in \mathbb{R},\ \ \big(S(t)x\big)(s) = x(s+t),\ \ t, s \in \mathbb{R}$, сдвигов функций сильно непрерывна и изометрична, а её генератором является оператор $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Следовательно, $\sigma(D) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Поскольку $D\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} = \mathrm{i}\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$, $t, \lambda \in \mathbb{R}$, то $\sigma(A) = \mathbb{R}$, где $A = -\mathrm{i}D$. При сужении группы операторов S на инвариантные подпространства спектр сужения A_0 оператора A может уже не заполнять $\mathbb{R}$ и, в частности, может случиться так, что $0 \notin \sigma(A_0)$. Так обстоит дело с подпространством $\mathscr{X}_0 = \mathrm{C}_{2\pi,0}$ непрерывных 2π–периодических функций, имеющих нулевое среднее, т. е. в этом случае $0 \notin \sigma(A|\mathscr{X}_0)$, где $A|\mathscr{X}_0$ — сужение оператора A на $\mathscr{X}_0$. Следовательно, оператор $A|\mathscr{X}_0$ обратим, и обратный является оператором интегрирования периодических функций. Значит, классические оценки Ж. Фавара можно интерпретировать как оценку нормы оператора $(A|\mathscr{X}_0)^{-1}$ на подпространстве $\mathscr{X}_n$ периодических функций, имеющих ряд Фурье вида $x(t) = \sum\limits_{|k| \geqslant n} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $x \in \mathscr{X}_n$.

Таким образом, более общей постановкой задачи является оценка величины $\|A^{-1}\|$ для генератора $\mathrm{i}A$ произвольной изометрической группы операторов $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ при условии, что $0 \in \rho(A)$.

В работе [9] была получена оценка

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\pi}{2 \operatorname{dist}\big(0, \sigma(A)\big)}, \tag{4.2}$$

которая является неулучшаемой в классе всех сильно непрерывных изометрических представлений.

Если оператор $A = -\mathrm{i}D = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ рассматривается в банаховом пространстве $\mathscr{X} = \mathrm{C_b}(\mathbb{R})$ непрерывных ограниченных комплекснозначных функций, определённых на вещественной оси, то он имеет неплотную в $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$ область определения. Таким образом, он не является генератором сильно непрерывной группы операторов. В данном случае роль группы изометрий играет группа операторов сдвигов функций $S(t),\ \ t \in \mathbb{R},\ \ \big(S(t)x\big)(s) = x(s+t),\ \ t, s \in \mathbb{R}$. Следовательно, не вполне подходит описанный выше приём использования сильно непрерывной группы операторов. Другой пример связан с рассмотрением полугруппы операторов, которая не являются сильно непрерывной.

В силу отмеченного, рассматривается комплексное банахово пространство $\mathscr{X}$, где действует не обязательно сильно непрерывная группа изометрий $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$. Дополнительно будем требовать, чтобы банахово пространство $\mathscr{X}$ являлось банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модулем, структура которого согласована с представлением T, т. е. имеют место равенства

$$fT(t)x = T(t)fx = \big(S(t)f\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ \ x \in X,\ \ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \tag{4.3}$$

где $S\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — группа операторов сдвига в $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, определённых формулой $\big(S(t)f\big)(s) = f(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. В этом случае часто используется запись $(\mathscr{X}, T)$ для банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля, модульная структура которого согласована с представлением T.

В частности, если T — сильно непрерывное представление, то структура банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля на $\mathscr{X}$ задаётся с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,\mathrm{d}t, \quad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),\ x \in X. \tag{4.4}$$

Напомним, что с каждым невырожденным банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модулем ассоциировано единственное представление.

Важную роль в проводимых исследованиях играет понятие генератора банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля $(\mathscr{X}, T)$, который, будучи умноженным на мнимую единицу i, совпадает с генератором изометрической группы операторов T, если эта группа сильно непрерывна.

Всюду далее предполагается, что $\mathscr{X}$ является банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модулем, модульная структура которого согласована с изометрическим представлением $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, которое не обязательно сильно непрерывно.

Символом $\widetilde{T}\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ будем обозначать представление алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ операторами из алгебры $\operatorname{End} \mathscr{X}$, определяемое равенствами

$$\widetilde{T}(f)x = fx, \quad x \in \mathscr{X}, \ \ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}).$$

Отметим, что представление $\widetilde{T}$ является гомоморфизмом алгебр, т. е. $\widetilde{T}(f_1 * f_2) = \widetilde{T}(f_1)\widetilde{T}(f_2)$. Для каждой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ $\widetilde{T}(f)$ является линейным ограниченным оператором и имеет место оценка $\|\widetilde{T}(f)\| \leqslant \|f\|_1$.

Для определения генератора банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля рассмотрим семейство функций $f_z \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \neq 0$, определённую равенствами

$$f_z(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{zt}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \tag{4.5}$$

при $\operatorname{Re} z < 0$ и

$$f_z(t) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{zt}, & t < 0, \\ 0, & t \geqslant 0; \end{cases} \tag{4.6}$$

при $\operatorname{Re} z > 0$.

Рассмотрим операторнозначную функцию $R\colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, определяемую равенствами $R(z)x = f_z x$, $x \in X$. Отметим, что $\|R(z)\| \leqslant \|f_z\|_1 = \frac{1}{|\operatorname{Re} z|}$. Покажем, что функция $R\colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является резольвентой некоторого линейного оператора. Далее символом $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ будем обозначать преобразование Фурье функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, т. е. $\widehat{f} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Из равенств

$$\big(\mathrm{i}\widehat{f_{z_1}} - \widehat{f_{z_2}}\big)(\mathrm{i}\lambda) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda - z_1} - \frac{1}{\mathrm{i}\lambda - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)} = (z_1 - z_2)\big(\widehat{f_{z_1}}\widehat{f_{z_2}}\big)(\lambda),$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, следует, что

$$\big(R(z_1) - R(z_2)\big)x = (f_{z_1} - f_{z_2})x = (z_1 - z_2)R(z_1)R(z_2)x, \quad x \in X. \tag{4.7}$$

Таким образом, доказано, что R является псевдорезольвентой на открытом множестве $\mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$. Докажем, что R является резольвентой некоторого линейного оператора. Поскольку $\ker R(z_1) = \ker R(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$, то достаточно установить равенство $\ker R(1) = \{0\}$. Пусть $x_0 \in \ker R(1)$. Тогда $f_1 x_0 = 0$. Из равенства $\widehat{f_1}(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda - 1}$ и свойства $\widehat{f_1}(\lambda_1) \neq \widehat{f_1}(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ получаем, что наименьший замкнутый идеал, содержащий функцию f_1, совпадает со всей алгеброй $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [19]. Следовательно, $f x_0 = 0$ для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Из свойства невырожденности $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля X следует, что $x_0 = 0$.

Определение 4.1. Положим $\mathrm{i}A = R^{-1}(z) + zI$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$. Оператор A называют *генератором* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – *модуля*. Отметим, что определение корректно, то есть не зависит от выбора $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Далее рассматривается банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуль $(\mathscr{X}, T)$ и её генератор $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$.

Если $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление и $\mathrm{i}A$ — генератор группы T, то A является генератором $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля.

Всюду далее играет важную роль понятие спектра Бёрлинга векторов из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля.

Лемма 4.1. *Спектральное подпространство $\mathscr{X}(\Delta)$ для любого замкнутого множества Δ является инвариантным подпространством в $\mathscr{X}$ и спектр $\sigma\big(A|\mathscr{X}(\Delta)\big)$ сужения оператора A на подпространство $\mathscr{X}(\Delta)$ содержится во множестве Δ.*

В условиях следующей теоремы вектор $y \in \mathscr{X}$ будет удовлетворять условию

$$\Lambda(y) \subset (-\infty, -b] \cup [-a, a] \cup [b, +\infty), \quad 0 < a < b. \tag{4.8}$$

Такой вектор y однозначно представим в виде $y = y_0 + y_1$, где $\Lambda(y_0) \subset [-a, a]$ и $\Lambda(y_1) \subset (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$.

Теорема 4.1. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(\mathscr{X})$ банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля $(\mathscr{X}, T)$ представим в виде*

$$\Lambda(\mathscr{X}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$$

непересекающихся замкнутых множеств σ_0 и σ_1, где σ_0 — компактное множество. Тогда $\mathscr{X}$ представимо в виде

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}(\sigma_0) \oplus \mathscr{X}(\sigma_1).$$

Это разложение осуществляют проекторы P_0, $P_1 = I - P_0$ (т. е. $\operatorname{Im} P_k = \mathscr{X}(\sigma_k)$, $k = 0, 1$), где проектор P_0 определяется формулой

$$P_0 x = f_0 x, \quad x \in \mathscr{X},$$

т. е. $P_0 = \widetilde{T}(f_0)$, где f_0 — любая функция из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством: $\widehat{f_0} = 1$ в некоторой окрестности σ_0 и $\widehat{f_0} = 0$ в некоторой окрестности σ_1, причём $\|P_0\| \leqslant \inf\limits_f \|f\|$, где инфимум берётся по всем функциям f с указанным свойством для f_0.

Доказательство. Пусть f_0 — любая функция из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойствами, указанными в теореме 4.1. Из пункта 2 леммы 3.1 следует, что $\Lambda(f_0 x) \subset \Lambda(x) \cap \operatorname{supp} \widehat{f_0} \subset \sigma_0$. Таким образом, $f_0 x \in \mathscr{X}(\sigma_0)$. Поскольку $\widehat{f_0} = 1$ в окрестности множества σ_0, то из свойства 4 леммы 3.1 следует, что $f_0(f_0 x) = f_0 x$. Таким образом, установлено, что оператор $P_0 = \widetilde{T}(f_0)$ является проектором. Непосредственно из его определения следует, что $\|P_0\| \leqslant \|f\|_1$. Докажем корректность определения, т. е. докажем, что $\widetilde{T}(f_0) = \widetilde{T}(f)$ для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойствами Функции f_0, а именно, $\widehat{f} = 1$ в некоторой окрестности множества σ_0 и $\widehat{f} = 0$ в некоторой окрестности множества σ_1. Для любой функции $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ имеют место равенства $\big(\varphi * (f - f_0)\big)x = gx$, где $g = \varphi * (f - f_0) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Из отмеченных свойств функций f и f_0 и равенства $\widehat{g}(\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda)\big(\widehat{f}(\lambda) - \widehat{f}_0(\lambda)\big)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, следует, что функция g обращается в ноль в некоторой окрестности спектра $\Lambda(x)$

вектора x. Поэтому из свойства 3 леммы 3.1 получаем, что $gx = \varphi(fx - f_0x) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Из невырожденности $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля $\mathscr{X}$ следует, что $fx = f_0x$. Из доказанного получаем оценку $\|f_0\| \leqslant \inf\limits_f \|f\|_1$, где инфимум берётся по всем функциям f, обладающими указанными свойствами. Из свойства 2 леммы 3.1 следует, что $\Lambda(P_0x) = \Lambda(f_0x) \subset \Lambda(x) \cap \operatorname{supp} \widehat{f_0} \subset \sigma_0$. Таким образом, $\operatorname{Im} P_0 \subset \mathscr{X}(\sigma_0)$. Докажем, что $\operatorname{Im} P_1 \subset \mathscr{X}(\sigma_1)$ для дополнительного к P_0 проектора P_1, что завершит доказательство теоремы. Для любого вектора x вектор P_1x представим в виде $f_1x = x - f_0x$. Пусть $\lambda_0 \notin \sigma_1$. Рассмотрим функцию $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $\sigma_0 \cap \operatorname{supp} \widehat{f} = \varnothing$. Тогда $fP_1x = f(x - f_0x) = (f - f * f_0)x = g_0x$, где $g_0 = f - f * f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Поскольку $\widehat{g_0}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\big(1 - \widehat{f_0}(\lambda)\big)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\widehat{g_0} = 0$ в некоторой окрестности спектра $\Lambda(x) \subset \sigma_0 \cup \sigma_1$. Из свойства 3 леммы 3.1 следует, что $\lambda_0 \notin \Lambda(P_1x)$. Таким образом, $\Lambda(P_1x) \subset \sigma_1$. Следовательно, $\operatorname{Im} P_1 \subset \mathscr{X}(\sigma_1)$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(y)$ вектора y из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля (X, T) не содержит нуля. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathrm{D}(A)$ такой, что*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$;

2) $x \in \mathrm{D}(A)$;

3) $Ax = y$;

4) $\|x\| \leqslant \dfrac{\pi}{2 \operatorname{dist}\big(0, \Lambda(y)\big)} \|y\|$.

Доказательство. Первое свойство непосредственно следует из пункта 2 леммы 3.1. Далее, рассмотрим вектор $x = fy$, где функция f из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ имеет преобразование Фурье вида $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ в окрестности множества $\Lambda(y)$. Докажем, что вектор x входит в область определения оператора A и $Ax = y$. Для этого достаточно установить равенство $x = (\mathrm{i}A - \lambda_0 I)^{-1}(\mathrm{i}y - \lambda_0 x)$, где

$\lambda_0 \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$. Действительно, если имеет место указанное равенство, то $x \in \mathrm{D}(A)$ и $(\mathrm{i}A - \lambda_0 I)x = \mathrm{i}y - \lambda_0 x$, откуда $Ax = y$. В свою очередь, для доказательства этого равенства воспользуемся представлением обратного оператора $(\mathrm{i}A - \lambda_0 I)^{-1}$ в виде f_{λ_0}, где $f_{\lambda_0} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ имеет преобразование Фурье вида $\widehat{f_{\lambda_0}}(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda - \lambda_0}$. Тогда $fy = f_{\lambda_0}(\mathrm{i} - \lambda_0 f)y$ или $\big(f - \mathrm{i}f_{\lambda_0} + \lambda_0 f_{\lambda_0} * f\big)y = 0$. Применим преобразование Фурье к последнему равенству. Осталось показать, что $\widehat{f} - \mathrm{i}\widehat{f_{\lambda_0}} + \lambda_0\widehat{f_{\lambda_0}}\widehat{f} = 0$. Действительно,

$$\big(\widehat{f} - \mathrm{i}\widehat{f_{\lambda_0}} + \lambda_0\widehat{f_{\lambda_0}}\widehat{f}\big)(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\lambda - \lambda_0} + \frac{\lambda_0}{\mathrm{i}\lambda - \lambda_0} \cdot \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Из приведённых равенств и свойства д) леммы 2.4 следует, что $x \in \mathrm{D}(A)$ и $Ax = y$.

Оценка $\|x\| \leqslant \dfrac{\pi}{2\,\mathrm{dist}\big(0, \Lambda(y)\big)}\|y\|$ непосредственно следует из теоремы 4.1. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть* $\sigma_0 = [-a, a]$, $\sigma_1 = \mathbb{R} \diagdown (-b, b)$, *где* $0 \leqslant a < b$. *Тогда* $\mathscr{X} = \mathscr{X}(\sigma_0) \oplus \mathscr{X}(\sigma_1)$ *и норма проектора* P_0 *допускает оценку вида*

$$\|P_0\| \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию f из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, имеющую преобразование Фурье вида

$$\widehat{f}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\lambda| \leqslant 1, \\ \frac{1}{b-a}\big(b - |\lambda|\big), & \text{если } a < |\lambda| < b, \\ 0, & \text{если } |\lambda| \geqslant b. \end{cases}$$

В этом случае

$$f(t) = \frac{2\sin\frac{b-a}{2}t\,\sin\frac{b+a}{2}t}{\pi(b-a)t^2}.$$

Согласно [39], функция f допускает оценку $\|f\|_1 \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}$. $\square$

Теорема 4.4. *Пусть вектор $y \in \mathscr{X}$ представим в виде $y = y_0 + y_1$, где $\Lambda(y_0) \subset [-a, a]$ и $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b, b)$, где $0 \leqslant a < b$. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathscr{X}$ со свойствами*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y_1) \subset (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$;

2) $x \in \mathrm{D}(A)$;

3) $Ax = y_1 = y - y_0$;

4) $\|x\| \leqslant \frac{\pi}{2b}\Big(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{b+a}{b-a}\Big)\|y\|$.

Доказательство. Поскольку $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b, b)$, то для вектора y_1 выполнены условия теоремы 4.2. Как и в теореме 4.1, положим $x = f y_1$, где f — функция, построенная при доказательстве теоремы 4.2. Тогда, согласно этой теореме, $x \in \mathrm{D}(A)$ и $Ax = y_1 = y - y_0$. Положим $y_0 = P_0 y = f_0 y$, где $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — Функция, построенная при доказательстве теоремы 4.3. Тогда, согласно теореме 4.2, имеет место оценка

$$\|x\| \leqslant \frac{\pi}{2\,\mathrm{dist}\big(0, \Lambda(y)\big)}\|y_1\| \leqslant \frac{\pi}{2b}\big(\|y\| + \|y_0\|\big) \leqslant \frac{\pi}{2b}\big(1 + \|P_0\|\big)\|y\|.$$

Используя теорему 4.3 для оценки нормы проектора P_0, получим доказываемую оценку. □

4.2 Приложения к методу подобных операторов

Пусть $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_1$, $B\colon \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_2$ — замкнутые линейные операторы. Всюду далее считается выполненным

Предположение 4.1. Имеет место условие *равномерной отделимости спектров*

$$\mathrm{d} = \mathrm{dist}\,\big(\sigma(A), \sigma(B)\big) = \inf_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ \mu \in \sigma(B)}} |\lambda - \mu| > 0 \tag{4.9}$$

$\sigma(A)$, $\sigma(B)$ операторов A, B.

Символом $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ будем обозначать банахово пространство линейных ограниченных операторов (*гомоморфизмов)*, определённых на банаховом пространстве $\mathscr{X}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathscr{Y}$.

Пусть $C \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_2, \mathscr{X}_1)$, $D \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$. Рассмотрим линейный оператор

$$\mathbb{A}\colon \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2,$$

заданный операторной матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ D & B \end{smallmatrix}\right)$, т. е.

$$\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 + Cx_2, Dx_1 + Bx_2)$$

для любой упорядоченной пары $(x_1, x_2) \in \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(B)$.

Оператор $\mathbb{A}$ представим в виде $\mathbb{A} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A}\colon \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ задаётся матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, а оператор $\mathcal{B} \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$ определяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -C \\ -D & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

В декартовом произведении $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ введём норму по правилу: $\big\|(x_1, x_2)\big\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$. Отметим, что если $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$ — гильбертовы пространства, то скалярное произведение в $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ вводится следующим образом: $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

Рассмотрим канонические проекторы

$$P_1 x = (x_1, 0),\ P_2 x = (0, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2.$$

Для любого оператора $X \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$ рассмотрим операторы $P_i X P_j \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$, $i, j \in \{1, 2\}$. Таким образом, оператор X задаётся матрицей

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где операторы $X_{ij} \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_j, \mathscr{X}_i)$, $i, j \in \{1, 2\}$ — сужение оператора $P_i X P_j$ на $\mathscr{X}_j$ с областью значений $\mathscr{X}_i$.

Всюду далее символом $\mathfrak{U}$ обозначим пространство $\mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$, которое в дальнейшем будем называть *пространством допустимых возмущений*. Символами $\mathfrak{U}_{ij}$ будем обозначать банаховы пространства $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_j, \mathscr{X}_i)$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Наряду с предположением 4.1 сделаем

Предположение 4.2. Операторы $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_1$ и $B\colon \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_2$ обладают следующим свойством: операторы $\mathrm{i}A$ и $\mathrm{i}B$ являются генераторами сильно непрерывных групп изометрий $T_A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_1$ и $T_B\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_2$ соответственно.

Определим *трансформатор* (согласно терминологии М. Г. Крейна), т. е. линейный оператор в пространстве операторов. Трансформатор $\mathrm{J} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}$ (оператор блочной диагонализации) определяется формулой $\mathrm{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$, $(\mathrm{J}X)x = (P_1XP_1 + P_2XP_2)(x_1, x_2) = (X_{11}x_1, 0) + (0, X_{22}x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$, $X \in \mathfrak{U}$, $X_{ii} \in \mathfrak{U}_{ii}$, $i \in \{1, 2\}$.

Рассмотрим трансформаторы

$$\mathrm{ad}_{AB}\colon \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{AB}) \subset \mathfrak{U}_{21} \to \mathfrak{U}_{21}, \quad \mathrm{ad}_{AB}X = AX - XB, \;\; X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{AB}),$$
$$\mathrm{ad}_{BA}\colon \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{BA}) \subset \mathfrak{U}_{12} \to \mathfrak{U}_{12}, \quad \mathrm{ad}_{BA}X = BX - XA, \;\; X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{BA}),$$

которые являются генераторами групп изометрий

$$\begin{aligned} &T_{AB}\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{21}, \quad T_{AB}(t)X = T_A(t)XT_B(-t), \;\; t \in \mathbb{R}, \; X \in \mathfrak{U}_{21}, \\ &T_{BA}\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{12}, \quad T_{BA}(t)X = T_B(t)XT_A(-t), \;\; t \in \mathbb{R}, \; X \in \mathfrak{U}_{12}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

соответственно.

Имеет место следующий результат:

Лемма 4.2 (см. [7]). *Спектры трансформаторов* ad_{AB} *и* ad_{BA} *имеют следующий вид:*

$$\sigma(\mathrm{ad}_{AB}) = \overline{\sigma(A) - \sigma(B)} = \overline{\big\{\alpha - \beta \;\big|\; \alpha \in \sigma(A), \;\; \beta \in \sigma(B)\big\}},$$
$$\sigma(\mathrm{ad}_{BA}) = \overline{\sigma(B) - \sigma(A)} = \overline{\big\{\beta - \alpha \;\big|\; \alpha \in \sigma(A), \;\; \beta \in \sigma(B)\big\}}.$$

Отметим, что, в силу предположения 4.1, имеет место включение

$$\sigma(\mathrm{ad}_{AB}) \cup \sigma(\mathrm{ad}_{BA}) \subset \mathbb{R} \setminus (-\mathrm{d}, \mathrm{d}).$$

Таким образом, трансформаторы ad_{AB} и ad_{BA} обратимы. Обратные к ним операторы обозначим соответственно $\Gamma_{12} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{12}$ и $\Gamma_{21} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{21}$. Операторы $\Gamma_{12}X_{12}$ и $\Gamma_{21}X_{21}$ являются решениями нелинейных уравнений $\mathbb{A}Y - Y\mathbb{A} = X - \mathrm{J}X$, где $Y \in \mathfrak{U}$ обладает свойством $\mathrm{J}Y = 0$. Применяя проекторы P_1, P_2 к последнему уравнению, получаем следующую эквивалентную систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} A\Gamma_{12} - \Gamma_{12}B = X_{12}, \\ B\Gamma_{21} - \Gamma_{21}A = -X_{21}, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $\Gamma_{12} \in \mathfrak{U}_{12}$, $\Gamma_{21} \in \mathfrak{U}_{21}$. В случае, когда оператор A или оператор B ограничен, из результатов работ [13, 14] следует, что система уравнений (4.11) разрешима.

Трансформатор $\Gamma \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}$ определяется следующим образом:

$$(\Gamma X)x = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}X_{12} \\ \Gamma_{21}X_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_{12}X_{12})x_2 \\ (\Gamma_{21}X_{21})x_1 \end{pmatrix},$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ и $\Gamma_{12} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{12}$, $\Gamma_{21} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}_{21}$.

Отметим, что указанные представления (4.10) не обязаны являться непрерывными в равномерной операторной топологии, однако, они оба являются непрерывными в сильной операторной топологии, что позволяет определить структуры банаховых $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модулей при помощи формул

$$\begin{aligned} (fX_{12})x &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\big(T_{BA}(-t)X_{12}\big)x\,\mathrm{d}t, \quad X_{12} \in \mathfrak{U}_{12},\ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \\ (fX_{21})x &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\big(T_{AB}(-t)X_{21}\big)x\,\mathrm{d}t, \quad X_{21} \in \mathfrak{U}_{21},\ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Если $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$ — гильбертовы пространства и операторы A, B являются самосопряжёнными операторами в этих пространствах соответственно, то условия предположения 4.2 выполняются в силу теоремы Стоуна.

Лемма 4.3. *Пусть преобразование Фурье функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ имеет вид*

$$\widehat{f}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}, & |\lambda| > \mathrm{d}; \\ \frac{\lambda}{\mathrm{i}\mathrm{d}^2}, & |\lambda| \leqslant \mathrm{d}, \end{cases}$$

где d *— константа, определяемая формулой (4.9). Тогда трансформаторы* Γ_{12}*,* Γ_{21} *определяются формулами (4.12), т. е.* $\Gamma_{12} = fX_{12}$ *и* $\Gamma_{21} = fX_{21}$*. Введённые в рассмотрение трансформаторы* Γ_{12} *и* Γ_{21} *являются операторами, обратными к трансформаторам* ad_{AB} *и* ad_{BA} *соответственно. Кроме того, имеют место оценки* $\|\Gamma_{12}\| \leqslant \|f\|_1 = \frac{\pi}{2\mathrm{d}}$, $\|\Gamma_{21}\| \leqslant \|f\|_1 = \frac{\pi}{2\mathrm{d}}$.

Лемма 4.4. *Трансформатор* $\Gamma \in \mathrm{End}\,\mathfrak{U}$ *допускает оценку*

$$\|\Gamma\| \leqslant \frac{\pi}{2\mathrm{d}}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Для любого оператора $X \in \mathfrak{U}$ и любого вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \big\|(\Gamma X)x\big\|^2 &= \big\|(\Gamma_{12}X_{12})x_2\big\|^2 + \big\|(\Gamma_{21}X_{21})x_1\big\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|\Gamma_{12}X_{12}\|^2 \cdot \|x_2\|^2 + \|\Gamma_{21}X_{21}\|^2 \cdot \|x_1\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \max\left\{\|\Gamma_{12}X_{12}\|^2, \|\Gamma_{21}X_{21}\|^2\right\}\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{\pi}{2\mathrm{d}}\right)^2 \|X\|^2 \cdot \|x\|^2. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует доказываемое неравенство (4.13). □

Непосредственно из определения трансформаторов J и Γ следует, что имеет место равенство

$$\mathbb{A}(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(\mathcal{A} - \mathrm{J}X), \tag{4.14}$$

проверяемое для матриц указанных операторов. В матричном виде уравнение (4.14) имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_{12}X_{12} \\ -\Gamma_{21}X_{21} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\Gamma_{12}X_{12} \\ -\Gamma_{21}X_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - X_{11} & 0 \\ 0 & B - X_{22} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} X_{11} = C\Gamma_{21}X_{21}, \\ X_{12} = -(\Gamma_{12}X_{12})D\Gamma_{12}X_{12} + C, \\ X_{21} = -(\Gamma_{21}X_{21})C\Gamma_{21}X_{21} + D, \\ X_{22} = D\Gamma_{21}X_{12}, \end{cases} \tag{4.15}$$

где второе и третье уравнения рассматриваются в пространствах $\mathfrak{U}_{12}$ и $\mathfrak{U}_{21}$ соответственно.

Символом γ будем обозначать величину $\frac{\pi}{2\mathrm{d}}$, участвующую в оценке (4.9).

Теорема 4.5. *При условии*

$$2\gamma\sqrt{\|C\| \cdot \|D\|} = \frac{\pi}{\mathrm{d}}\sqrt{\|C\| \cdot \|D\|} < 1 \tag{4.16}$$

система (4.15) разрешима, причём решения $X_{12}^{(0)}$, $X_{21}^{(0)}$ могут быть найдены методом последовательных приближений с начальными значениями $X_{12}^{(1)} = X_{21}^{(1)} = 0$. При этом имеют место оценки

$$\bigl\|X_{12}^{(0)}\bigr\| \leqslant \frac{2\|C\|}{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}}, \qquad \bigl\|X_{21}^{(0)}\bigr\| \leqslant \frac{2\|D\|}{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}}.$$

Доказательство. Рассмотрим второе уравнение системы (4.15). Запишем его в виде $X_{12} = \Phi_{12}(X_{12})$, где нелинейный оператор $\Phi_{12}\colon \mathfrak{U}_{12} \to \mathfrak{U}_{12}$ определяется формулой $\Phi_{12}(X_{12}) = -(\Gamma_{12}X_{12})D\Gamma_{12}X_{12} + C$. Найдём радиус $\rho_{12}\|C\| > 0$ замкнутого шара $\overline{\mathcal{B}}\bigl(0, \rho_{12}\|C\|\bigr)$ такой, что $\Phi_{12}\bigl(\overline{\mathcal{B}}\bigl(0, \rho_{12}\|C\|\bigr)\bigr) \subset \overline{\mathcal{B}}\bigl(0, \rho_{12}\|C\|\bigr)$. Это условие эквивалентно выполнению условия

$$\bigl\|\Phi_{12}(X_{12})\bigr\| \leqslant \rho_{12}\|C\|, \tag{4.17}$$

если $\|X_{12}\| \leqslant \rho_{12}\|C\|$. Имеют место оценки

$$\begin{aligned}\big\|\Phi_{12}(X_{12})\big\| &= \big\| -(\Gamma_{12}X_{12})D\Gamma_{12}X_{12} + C\big\| \leqslant \\ &\leqslant \|\Gamma_{12}X_{12}\| \cdot \|D\| \cdot \|\Gamma_{12}X_{12}\| + \|C\| \leqslant \\ &\leqslant \gamma^2\|X_{12}\|^2 \cdot \|D\| + \|C\| \leqslant \\ &\leqslant \gamma^2\rho_{12}^2\|C\|^2 \cdot \|D\| + \|C\| \leqslant \\ &\leqslant \rho_{12}\|C\|,\end{aligned}$$

откуда $\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|\rho_{12}^2 - \rho_{12} + 1 \leqslant 0$ и

$$\rho_{12} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}}{2\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}} \leqslant 2. \tag{4.18}$$

Из следующих равенств о оценок

$$\begin{aligned}&\big\|\Phi_{12}(X_{12}^{(1)}) - \Phi_{12}(X_{12}^{(2)})\big\| = \\ &\qquad = \big\|(\Gamma_{12}X_{12}^{(1)})D\Gamma_{12}X_{12}^{(1)} - (\Gamma_{12}X_{12}^{(2)})D\Gamma_{12}X_{12}^{(2)}\big\| = \\ &\qquad = \big\|(\Gamma_{12}X_{12}^{(1)})D\Gamma_{12}X_{12}^{(1)} - (\Gamma_{12}X_{12}^{(2)})D\Gamma_{12}X_{12}^{(1)} + \\ &\qquad\quad + (\Gamma_{12}X_{12}^{(2)})D\Gamma_{12}X_{12}^{(1)} - (\Gamma_{12}X_{12}^{(1)})D\Gamma_{12}X_{12}^{(1)}\big\| = \\ &\qquad = \big\|\big(\Gamma_{12}(X_{12}^{(1)} - X_{12}^{(2)})\big)D\Gamma_{12}X_{12}^{(1)} + (\Gamma_{12}X_{12}^{(2)})D\Gamma_{12}(X_{12}^{(1)} - X_{12}^{(2)})\big\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2\gamma^2\rho_{12}\|C\| \cdot \|D\| \cdot \big\|X_{12}^{(1)} - X_{12}^{(2)}\big\|,\end{aligned}$$

следует, что отображение Φ_{12} является сжимающим в шаре $\overline{\mathcal{B}}\big(0, \rho_{12}\|C\|\big)$ при условии

$$2\gamma^2\rho_{12}\|C\| \cdot \|D\| = \frac{4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2\|C\| \cdot \|D\|}} < 1.$$

Используя оценку (4.18), получим окончательное условие $2\gamma\sqrt{\|C\| \cdot \|D\|} < 1$.

Рассмотрим теперь третье уравнение системы (4.15) и проведём аналогичные рассуждения, замечая лишь, что отображение Φ_{21} является сжимающим в шаре $\overline{\mathcal{B}}\big(0, \rho_{21}\|D\|\big)$, где ρ_{21} удовлетворяет оценке (4.18). Тогда в шаре $\overline{\mathcal{B}}\big(0, \min\big\{\rho_{12}\|C\|, \rho_{21}\|D\|\big\}\big)$ оба отображения Φ_{12}, Φ_{21} являются сжимающими. $\square$

Напомним, что два линейных оператора $A_i\colon \mathrm{D}(A_i) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $i \in \{1, 2\}$, называют *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ такой, что $U\mathrm{D}(A_2) = \mathrm{D}(A_1)$ и имеет место равенство $A_1Ux = UA_2x$ для всех $x \in \mathrm{D}(A_2)$. При этом оператор U называют *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Одним из основных результатов данного параграфа является следующая

Теорема 4.6. *При условии* $\pi\sqrt{\|C\| \cdot \|D\|} < 1$ *операторы* $\mathbb{A}$ *и* $\mathcal{A} - \mathrm{J}X^{(0)}$ *подобны, где* $X^{(0)} =$ *— единственное решение системы (4.15) и*

$$\mathrm{J}X^{(0)} = \begin{pmatrix} X_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & X_{22}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. При выполнении указанного условия из теоремы 4.5 следует разрешимость системы уравнений (4.15) и оценка $\left\|\Gamma X^{(0)}\right\| < 1$. Это условие обеспечивает обратимость оператора $I + \Gamma X^{(0)}$, следовательно, из равенств (4.14) вытекает подобие оператора $\mathbb{A}$ оператору $\mathcal{A} - \mathrm{J}X^{(0)}$. □

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$, заданный операторной матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ D & B \end{smallmatrix}\right)$, подобен оператору $\mathcal{A} - \mathrm{J}X$, заданному операторной матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A - X_{11} & 0 \\ 0 & B - X_{22} \end{smallmatrix}\right)$.

Опишем теперь применения полученных в теоремах 4.5 и 4.6 результатов к оценкам интеграла от функций из однородных пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$.

Через $\mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ обозначим подпространство однородного пространства функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, состоящее из абсолютно непрерывных функций, производная которых принадлежит $\mathcal{F}$, т. е.

$$\mathcal{F}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) = \left\{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \;\middle|\; x \text{ абсолютно непрерывна и } x' \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})\right\}.$$

Теорема 4.7. *Пусть спектр Бёрлинга* $\Lambda(y)$ *функции* y *из однородного пространства функций* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *не содержит нуля. Тогда существует единственная функция* $x \in \mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *такая, что*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$*;*

2) $x' = y$*;*

3) $\|x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \dfrac{\pi}{2\operatorname{dist}\bigl(0, \Lambda(y)\bigr)} \|y\|_{\mathcal{F}}$.

Доказательство. Отметим, что оператор дифференцирования $Dx = x'$ является генератором группы сдвигов $S\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{F}$ в однородном пространстве $\mathcal{F}$ (см. [10]). Таким образом, утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы 4.2. $\square$

Теорема 4.8. *Пусть функция* y *принадлежит однородному пространству функций* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *и допускает представление вида* $y = y_0 + y_1$*, где* $\Lambda(y_0) \subset [-a, a]$ *и* $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b, b)$*, где* $0 \leqslant a < b$*. Тогда существует единственная функция* $x \in \mathcal{F}^{(1)}$ *со свойствами*

1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y_1)$*;*

2) $x' = y_1 = y - y_0$*;*

3) $\|x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \frac{\pi}{2b}\Bigl(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}\Bigr)\|y\|_{\mathcal{F}}$.

Доказательство. Утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы 4.4. $\square$

Литература

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

2. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58. – № 4. – С. 3–32.

3. Баскаков А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. – 2005. – Т. 69. – № 3. – С. 3–54.

4. Баскаков А. Г. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах / А. Г. Баскаков, А. С. Загорский // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81. – № 1. – С. 17-31.

5. Баскаков А. Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92. – № 5. – С. 643–661.

6. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // СМФН. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151.

7. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. – Воронеж: ВГУ, 1987. – 165 с.

8. Баскаков А. Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе / А. Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. – 1979. – Т. 20. – № 5. – С. 942–952.

9. Баскаков А. Г. О неравенствах Бора-–Фавара для операторов / А. Г. Баскаков, К. А. Синтяева // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 12. – С. 14–21.

10. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. – 2013. – Т. 68. – № 1. – С. 77–128.

11. Баскаков А. Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А. Г. Баскаков // Матем. сб. – 1984. – Т. 124(166). – № 1(5). – С. 68–95.

12. Баскаков А. Г. О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. – 1983. – Т. 34. – № 4. – С. 573–585.

13. Баскаков А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50. – № 4. – С. 435-457.

14. Баскаков А. Г. Расщепление возмущённого дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков // Фундамент. и прикл. матем.. – 2002. – Т. 8. – № 1. – С. 1-16.

15. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом

пространстве / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97. – № 2. – С. 174–190.

16. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербакова // Известия РАН, Серия математическая. – 2011. – Т. 75. – № 3. – С. 3–28.

17. Браттели У. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика / У. Браттели, Д. Робинсон. – М. : Мир, 1982. – 512 с.

18. Бурбаки Н. Спектральная теория / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1972. – 317 с.

19. Гельфанд И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. – М.:Физматлит, 2011. – 260 с.

20. Горин Е. А. Неравенства Бернштейна с точки зрения операторов / Е. А. Горин // Вестн. Харьковск. ун-та. – 1980. – Т. 45. – С. 77–105.

21. Горин Е. А. Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии / Е. А. Горин // УМН. – 1978. – Т. 33. – № 4. – С. 169–188.

22. Данфорд Н. Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М: Едиториал УРСС, 2010. – 896 с.

23. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральные операторы / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: Мир, 1974. – 660 с.

24. Дикарев Е. Е. Исследование спектра одного класса дифференциального оператора 4 – го порядка / Т. Л. Джонга, Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Сб. тезисов Междунар. конф. «Крымская Осенняя Математическая Школа —

Симпозиум» (Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17 — 29 сентября 2010г.). — Украина, Семфирополь: КНЦ НАНУ, 2010. — С. 38.

25. Дикарев Е. Е. Неравенства бернштейновского типа для операторов / Е. Е. Дикарев // Сб. тезисов Междунар. конф. «Крымская Осенняя Математическая Школа — Симпозиум» (Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17 — 29 сентября 2011г.). — Украина, Семфирополь: КНЦ НАНУ, 2011. — С. 18.

26. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Spectral and Evolution Problems. — 2012. — V. 22. — P. 58-61.

27. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Сб. тезисов Междунар. конф. «Крымская Осенняя Математическая Школа — Симпозиум» (Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17 — 29 сентября 2012г.). — Украина, Симферополь: КНЦ НАНУ, 2012. — С. 21.

28. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Материалы Воронежской змней математической школы (Воронеж, 27 января — 2 февраля 2013г.). — Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — С. 83.

29. Дикарев Е. Е. Об инвариантных подпространствах неквазианалитических операторов в вещественном банаховом пространстве / Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Материалы Воронежской змней математической школы С. Г. Крейна – 2014 — Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014. — С. 18-19.

30. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Уфимск. матем. журн. – 2013. – Т. 5. – № 4. – С. 77–83.

31. Дикарев Е. Е. Гармонический анализ неквазианалитических операторов в вещественном банаховом пространстве / Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2014. – Т. 14. – № 3. – С. 19-28.

32. Дикарев Е. Е. Гармонический анализ некоторых классов линейных операторов в вещественном банаховом пространстве / Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97. – № 5. – С. 670-680.

33. Желобенко Д. П. Основные структуры и методы теории представлений / Д. П. Желобенко. – М.: Изд-во МЦНМО, 2004. – 488 с.

34. Иванов В. И. Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках / В. И. Иванов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18. – № 4. – С. 489-498.

35. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. — 624 с.

36. Калужина Н. С. Медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции и их свойства / Н. С. Калужина // Воронеж, Вестник ВГУ, серия физика, математика. – 2010. – № 2. – С. 97–102.

37. Купцов Н. П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов / Н. П. Купцов // УМН. – 1968. – Т. 23. – № 4(142). – С. 117–178.

38. Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 205 с.

39. Левитан Б. М. Почти-периодические функции / Б. М. Левитан. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953. – 396 с.

40. Левитан Б. М. Об одном обобщении неравенств Бернштейна и Bohr'а / Б. М. Левитан // ДАН СССР. – 1937. – Т. XV. – № 4. – С. 169-172.

41. Любич Ю. И. Об одном классе операторов в банаховом пространстве / Ю. И. Любич // УМН. – 1965. – Т. 20. – № 6. – С. 131–133.

42. Любич Ю. И. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора / Ю. И. Любич // УМН. – 1963. – Т. 18. – № 1(109). – С. 165–171.

43. Любич Ю. И. Об операторах с отделимым спектром / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев // Матем. сборник. – 1962. – Т. 56. – № 4. – С. 433–468.

44. Любич Ю. И. О представлениях с отделимым спектром / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман // Функц. анализ и его прил. – 1973. – Т. 7. – № 2. – С. 52-61.

45. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ / Л. Люмис. – М.: Иностранная литература, 1956. – 251 с.

46. Наймарк М. А. Нормированные кольца / М. А. Наймарк // М.: Наука, – 1968. – 664 с.

47. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975. – 449 с.

48. Стороженко Э. А. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $\mathrm{L}^p,\ 0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд // Матем. сб. – 1975. – Т. 98. – № 140. – С. 395-415.

49. Сторожук К. В. Симметричные инвариантные подпространства у комплексификаций линейных операторов / К. В. Сторожук // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – № 4. – С. 938-940.

50. Терёхин А. П. Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение / А. П. Терёхин // Саратов, изд-во Саратовск. ун-та. Дифферен. ур. и выч. матем. – 1975. – Вып. 3. – С. 3-28.

51. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.

52. Росс К. Абстрактный гармонический анализ / К. Росс, Э. Хьюитт. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – 899 с.

53. Шилов Г. Е. О регулярных нормированных кольцах / Г. Е. Шилов // М.–Л., изд-во АН СССР, тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1947. – Т. 21. – С. 3–118.

54. Arendt W. Spectral mapping theorems for compact and locally compact Abelian groups of operators / W. Arendt // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1981. – V. 29. – № 1. – P. 105–106.

55. Balan R. An almost periodic noncommutative Wiener's Lemma / R. Balan, I. Krishtal // J. Math. Anal. Appl. – 2010. – V. 370. – № 2. – P. 339–349.

56. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces / A. G. Baskakov, I. A. Krishtal // http://arxiv.org/abs/1501.04958.

57. A. G. Baskakov. Memory estimation of inverse operators / A. G. Baskakov, I. A. Krishtal // Journal of Functional Analysis. – 2014. – V. 267. – № 8. – P. 2551-3104.

58. Bernstein S. N. Sur l’ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes / S. N. Bernstein // Academie Royale de Belgique, Classe des Sciences, Memores Collection in 4., ser. II, 1922. – V. 4. – 577 p.

59. Bernstein S. N. Sur une propriete des fonctions entieres / S. N. Bernstein // C. R. Acad. Sci. – 1923. – V. 176. – P. 1603-1605.

60. Bohr H. Ein allgemeinerung Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynomials / H. Bohr // Prace Math. Fiz. – 1935. – V. 43. – P. 273–288.

61. Colojara I. Theory of generalized spectral operators / I. Colojoara, C. Foias. – NY: Gordon and Breach, 1968.

62. Crabb B. J. Some inequalities for norm unitaries in Banach algebras / B. J. Crabb, J. Duncan // Proc. Edinburgh. Math. Soc. – 1978. – V. 21. – P. 17–23.

63. Garth Dales H. Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis / H. Garth Dales, , P. Aiena, J. Eschmeier, K. Laursen, G. A. Willis. – London: Cambridge University Press, 2003.

64. Domar Y. Harmonic analysis based in certain commutative Banach algebras / Y. Domar // Acta Math. – 1956. – V. 96. – P. 1–66.

65. Domar Y. Three spectral notions for representations of commutative Banach algebras / Y. Domar, L.-A. Lindahl // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1975. – V. 25. – № 2(xi). – P. 1–32.

66. Favard J. Application de la formule sommatoire d’Euler á la démonsration de quclques propertietés extrémales des intégrales des fonctions péeriodiques on presque-périodiques / J. Favard // Mat. Tidskr. – 1936. – P. 81-95.

67. Herz C. S. The spectral theory of bounded functionen / C. S. Herz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 94. – P. 181–232.

68. Kaniuth E. A Course in commutative banach algebras / E. Kaniuth. – NY: Springer, 2008.

69. Lyubich Yu. I. Introduction to the theory of Banach representations of groups / Yu. I. Lyubich // Basel: Birkhäuser Verlag, 1988.

70. Riesz M. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome / M. Riesz // Deutch Mat. Ver. – 1914. – V. 23. – P. 354-368.

71. Rudin W. Fourier analysis on groups / W. Rudin. – NY: Int. Publ., 1962.

72. Zsido L. On spectral subspaces associated to locally compact abelian group of operators / L. Zsido // Adv. Math. – 1980. – V. 36. – P. 213–276.