Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Воронежский государственный университет»

На правах рукописи

Струков Виктор Евгеньевич

Методы гармонического анализа в спектральной теории операторов

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф.
Баскаков Анатолий Григорьевич

Воронеж – 2016

Оглавление

Обозначения 4

Введение 6

Глава 1. О спектральной теории операторов и банаховых модулях 25

1.1. Некоторые сведения из теории топологических групп, банаховых алгебр и банаховых модулей 25

1.2. Некоторые определения, обозначения, результаты и примеры из теории банаховых пространств 33

1.3. Основы спектральной теории линейных отношений и линейных операторов 35

1.4. Базовые понятия и факты из теории представлений, групп и полугрупп операторов 37

Глава 2. Гармонический анализ векторов из банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$. 41

2.1. Банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули. Однородные пространства функций . . 41

2.2. Спектр Бёрлинга вектора 51

2.3. Спектр Карлемана вектора 57

2.4. Локальный спектр вектора 62

2.5. Сравнение спектров 65

Глава 3. Оценки элементов матриц обратных операторов 74

3.1. Теорема Винера и наполненность подалгебр 74

3.2. Матрицы и ряды Фурье операторов 75

3.3. Теорема Бохнера-Филлипса 83

3.4. Оценки элементов матриц и рядов Фурье обратных операторов . 86

3.5. О наполненности некоторых алгебр операторов 92

Список литературы 106

Обозначения

$\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ — кольцо положительных вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел;

$\mathbb{T} = \{\theta \in \mathbb{C} : |\theta| = 1\}$ — группа комплексных чисел, по модулю равных единице;

$\mathbb{G}$ — произвольная локально компактная абелева группа;

X, Y — банаховы пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$;

$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ — шар радиуса r и с центром в точке x_0;

∂M — граница множества M из банахова пространства X;

$\mathrm{Hom}(X, Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y;

$\mathrm{End}\, X = \mathrm{Hom}(X, X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X;

I — тождественный оператор в любом из рассматриваемых банаховых пространств;

$\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ — ядро линейного отношения (линейного оператора) $\mathcal{A}$;

$\mathrm{Im}\mathcal{A}$ — образ линейного отношения (линейного оператора) $\mathcal{A}$;

$\mathrm{D}(\mathcal{A})$ — область определения линейного отношения (линейного оператора) $\mathcal{A}$;

$\rho(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}$ — резольвентное множество линейного отношения (линейного оператора) $\mathcal{A}$;

$\lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : \rho(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C} \to \mathrm{End}\, X$ — резольвента линейного отношения (линейного оператора) $\mathcal{A}$;

$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \backslash \rho(\mathcal{A})$ — спектр линейного отношения (линейного оператора) $\mathcal{A}$;

$C_b(\Omega, X)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных функций $f : \Omega \to X$, определённых на локально компактном линейном пространстве Ω со значениями в банаховом пространстве X и нормой $\|f\|_{C_b} = \sup\limits_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|_X$;

$C_b(\Omega) = C_b(\Omega, \mathbb{C})$ — банахова алгебра комплекснозначных непрерывных и ограниченных функций с поточечным умножением;

$L^p(\mathbb{G}, X)$, $p \in [1, \infty]$,— банахово пространство измеримых относительно меры Хаара суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (существенно ограниченных сильно измеримых в случае $p = \infty$) на локально компактной абелевой группе $\mathbb{G}$ (классов) функций со значениями в банаховом пространстве X, относительно нормы

$$\|f\|_p = \left| \int\limits_{\mathbb{G}} \|f(g)\|^p dg \right|^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{g \in \mathbb{G}} \|f(t)\|;$$

$L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p \in [1, \infty]$;

$L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра измеримых суммируемых на $\mathbb{R}$ (классов) комплекснозначных функций со сверткой в качестве умножения, определяемой по формуле $(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds = \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)f(t-s)ds, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}$;

$l^p(\mathbb{Z})$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство двусторонних суммируемых со степенью p последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|^p \right)^{1/p} < \infty$;

$l^\infty(\mathbb{Z})$ — банахово пространство ограниченных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)| < \infty$;

$L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ — линейное пространство локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций $x : \mathbb{R} \to X$, т.е. для любой функции $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ и любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}$ конечна величина $\int\limits_K \|x(t)\| dt$;

$S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство Степанова функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \|x(t+s)\|^p ds \right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$;

$\operatorname{supp} f = \overline{\{\lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda) \neq 0\}}$ — носитель функции $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Введение

Настоящая диссертация посвящена применению методов гармонического анализа в банаховых модулях для исследования различных спектров функций, векторов, а также для получения оценок элементов матриц обратных линейных ограниченных операторов, действующих в банаховых пространствах. В работе рассмотрены спектры Бёрлинга, Карлемана и локальный спектр.

В вопросах спектрального анализа линейных операторов важную роль играет спектральная теория банаховых модулей, особенно банаховых модулей над групповыми алгебрами. Классическая спектральная теория ограниченных функций, имеющая давнюю историю (начиная с работ Н. Винера), относится к спектральной теории в банаховом пространстве непрерывных ограниченных комплекснозначных функций $C_b(\mathbb{R})$, рассматриваемых как банахов модуль над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ суммируемых на вещественной прямой $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций (модульная структура на $C_b(\mathbb{R})$ определяется свёрткой функций из $L^1(\mathbb{R})$ и $C_b(\mathbb{R})$). Впервые понятие спектра функции было введено Н. Винером в монографии, изданной в 1933 году. Введённое понятие он объяснял аналогичным термином, используемым в физике. Определение спектра функции, существенно ограниченной на вещественной прямой $\mathbb{R}$, было дано А. Бёрлингом в статье 1945 года как совокупность вещественных точек $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых функция $t \mapsto e^{i\lambda t} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит $L^1(\mathbb{R})$-замыканию линейных комбинаций сдвигов рассматриваемой функции. Затем, с использованием преобразования Лапласа, Карлеманом было дано определение спектра функции. Доказательство совпадения спектров Бёрлинга и Карлемана комплекснозначных функций на компактной абелевой группе представлено в монографии Н. Данфорда и Дж.Т. Шварца. В своей монографии В. Арендт, Ч.Дж.К. Бэтти, М. Гибер и Ф. Нойбрандер проводят сравнение локального спектра, спектра Карлемана и носителя преобразования Фурье (по сути - частного случая спектра Бёрлинга) для равномерно непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве.

К настоящему времени имеется несколько определений спектров функций и векторов из банаховых модулей (несколько способов определения "гармоник"исследуемых объектов). Возникает проблема сравнения нескольких широко используемых спектров. Отметим, что столь общее определение спектров позволяет рассматривать соответствующие спектры для широкого класса функций (например, для функций из однородных пространств).

Классическая теорема Н. Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье и её различные обобщения обладают множеством применений в численном анализе, теории вейвлетов, фреймов и сигнальных отсчётов, частотно-временном анализе, в пространствах полиномиальных сплайнов и инвариантных относительно сдвига по дискретной решётке функций и распределений. Например, классический результат Н. Винера и его весовые аналоги были использованы для получения свойства убывания на бесконечности для двойственных генераторов пространств функций, инвариантных относительно сдвига по дискретной решётке. Теорема Н. Винера для матричных пространств с операцией свёртки с вращением использовалась при изучении характера убывания двойственных фреймов Габора в пространстве L^2. Теорема П. Жаффара для бесконечномерных матриц с полиномиальным убыванием использовалась в теории сигнальных отсчётов, численном, частотно-временном и вейвлет-анализе. Теорема Й. Сёстранда для конечных матриц использовалась при изучении псевдодифференциальных операторов и фреймов Габора.

В 90-х годах прошлого столетия началось активное развитие теории линейных операторов, тесно связанной с обобщением и дальнейшим развитием теоремы Н. Винера о периодических функциях с абсолютно сходящимся рядом Фурье. По счётной системе проекторов, действующих в банаховом пространстве и образующих разложение единицы, для заданного линейного ограниченного оператора строится матрица оператора и определяется двусторонняя последовательность чисел, характеризующая убывание внедиагональных элементов матрицы оператора. Вводятся в рассмотрение несколько алгебр линейных операторов в зависимости от характера убывания внедиагональных элементов матрицы изучаемого оператора (операторы с суммируемыми диагоналями; диагоналями, суммируемыми с некоторым весом; двух- и трёхдиагональные и т.д.). В выделенном пространстве операторов вводится в рассмотрение периодическое представление группы вещественных чисел, определяется ряд Фурье оператора. Использование вводимых в рассмотрение спектров приводит к понятию памяти оператора и развитию определённых аналогов матричного исчисления линейных ограниченных операторов, действующих в банаховых пространствах. Для широкого класса линейных ограниченных операторов А.Г. Баскаковым, И.А. Кришталом [8] с помощью спектра Бёрлинга операторов было введено понятие памяти оператора и были получены оценки памяти обратных операторов. Использование методов гармонического анализа позволяет получить конкретные оценки элементов матриц обратных операторов, доказать наполненность соответствующих подалгебр операторов. Естественным образом возникает вопрос об уточнении известных к настоящему времени оценок элементов матриц обратных операторов, приложении полученных результатов к конкретным классам линейных операторов (в частности, к интегральным, дифференциальным и т.д.). Современные исследования по такой тематике проводились А.Г. Баскаковым, В.Г. Курбатовым, И.А. Кришталом, А. Альдруби, И.А. Блатовым.

Из изложенного следует актуальность темы диссертации.

Цели и задачи диссертационной работы:

1. Доказательство теоремы о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей над групповыми алгебрами.

2. Доказательство теоремы о генераторе невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

3. Доказательство теоремы о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и

локального для функций из однородных пространств.

4. Получение оценок элементов матриц для обратных линейных ограниченных операторов.

5. Доказательство наполненности алгебры, порождённой интегральными операторами.

Методология и методы исследования. Основными методами исследования являются методы гармонического и функционального анализа, спектральной теории операторов и теории изометрических представлений.

Научная новизна. В настоящей диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказана теорема о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов из банаховых модулей над групповыми алгебрами.

2. Доказана теорема о генераторе невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

3. Доказана теорема о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и локального для функций из однородных пространств.

4. Получены оценки элементов матриц для обратных линейных ограниченных операторов.

5. Доказана наполненность алгебры, порождённой интегральными операторами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы для дальнейшего развития методов гармонического анализа, расширения сферы их применения в спектральной теории операторов, исследования методов решений некоторых классов интегральных, разностных и дифференциальных уравнений. Также они могут быть использованы при чтении спецкурсов в университетах для студентов математических специальностей и применяться специалистами в области гармонического и функционального анализа при исследовании вопросов, связанных с тематикой диссертации.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность основных результатов, полученных в диссертации, обеспечена математической строгостью их изложения в виде теорем с подробными доказательствами и адекватным использованием общеизвестных положений и методов гармонического и функционального анализа.

Основные результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С.Г. Крейна 2010, 2012, 2013, 2014, 2016, на Крымских осенних математических школах 2010, 2011, 2012 (Украина, Севастополь), на XV Летней диффеотопической школе 2012 (Польша, Гдыня), на Крымской международной математической конференции 2013 (Украина, Судак), на математическом интернет-семинаре ISEM-2013 (Германия, Блаубойрен), на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Левитана 2014 (Москва), на семинарах А.Г. Баскакова, а также на научных сессиях Воронежского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в работах [26–37, 48–50]. Работы [26–28] опубликованы в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместной работы [49] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Личный вклад автора. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня обозначений, введения, 3 глав и библиографии. Общий объем диссертации 110 страниц.

Перейдём к более подробному изложению результатов диссертации.

В первой главе диссертации излагается ряд известных и широко используемых в диссертации понятий и некоторых результатов из теории банаховых пространств, алгебр и модулей, некоторые определения и результаты из спектральной теории линейных операторов и линейных отношений, а также из теории представлений, групп и полугрупп линейных операторов.

Во второй главе диссертации приведены определение и некоторые свойства банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, понятие его генератора. Для иллюстрации данных определений приводится ряд примеров однородных пространств функций (непрерывных, суммирумых, локально суммируемых и т.д.).Вводятся определения и доказываются некоторые свойства спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов. Основные результаты данной главы связаны с доказательством совпадения рассматриваемых спектров векторов и функций (локальный спектр взят относительно генератора банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля).

Пусть X – бесконечномерное комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X. Пусть $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ – банахова алгебра измеримых суммируемых на $\mathbb{R}$ (классов) комплекснозначных функций со сверткой в качестве умножения, определяемой по формуле

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

Пусть $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L^1(\mathbb{R})$ - изометрическая группа операторов сдвига вида

$$(S(t)x)(s) = x(t+s). \tag{2.2}$$

Пусть банахово пространство X является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, то есть для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in X$ определено задающее модульную структуру билинейное отображение $(f, x) \mapsto fx : L^1(\mathbb{R}) \times X \to X$ и справедливо соотношение

$$\|fx\| \le \|f\|_1 \|x\|,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in X. \qquad (2.3$$

Определение 2.1.1. Банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль X назовём *невырожденным*, если равенство $fx = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ означает, что $x = 0$.

Будем говорить, что структура банахова $L^1(\mathbb{R})$–модуля X *ассоциирована* с ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, и использовать для X обозначение (X, T), если для всех $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо равенство $T(t)(fx) = (S(t)f)x = f(T(t)x)$.

Определение 2.1.2. Вектор $x \in X$ будем называть *непрерывным относительно представления* T или T*–непрерывным*, если функция $x_T : \mathbb{R} \to X$, $x_T(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна. Замкнутое подпространство T-непрерывных векторов из X обозначим символом X_c.

Все рассматриваемые в диссертации банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули являются невырожденными банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями со структурой, ассоциированной с некоторым ограниченным изометрическим представлением.

Определение 2.1.3. Рассмотрим семейство функций $\{f_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, из алгебры функций $L^1(\mathbb{R})$, определенное равенствами

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & t \le 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases} \quad \text{если } Re\, \lambda > 0,$$

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -e^{\lambda t}, & t \ge 0, \end{cases} \quad \text{если } Re\, \lambda < 0.$$

Введём в рассмотрение семейство линейных ограниченных операторов $R_\lambda \in \operatorname{End} X$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, вида $R_\lambda x = f_\lambda x$, $x \in X$. Это семейство операторов удовлетворяет резольвентному тождеству Гильберта $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$.

Введём понятие генератора банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

Определение 2.1.4. *Генератором банахова* $L^1(\mathbb{R})$*-модуля* (X, T) будем называть оператор $A = i^{-1}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ – замкнутый оператор, резольвентой которого является функция $\lambda \mapsto R_\lambda = T(f_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$.

Лемма 2.1.10. *Для генератора* $A : \mathrm{D}(A) \subseteq X \to X$ *банахова* $L^1(\mathbb{R})$*-модуля* (X, T) *имеет место включение* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Лемма 2.1.11. *Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ – сильно непрерывное изометрическое представление, ассоциированное со структурой невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T). Тогда генератор $\mathcal{A}$ группы операторов T совпадает с оператором iA, где A – генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T), и для всех $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ справедливо следующее представление резольвенты*

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = f_\lambda x.$$

В качестве примеров банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей рассматриваются однородные пространства функций, удовлетворяющих следующему определению:

Определение 2.1.5. Банахово пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется *однородным,* если выполнены следующие условия:

1) пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве функций Степанова $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

2) в $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций $(S(t)x)(s) = x(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$;

3) для любой функции $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и любого $C \in \operatorname{End} X$ функция $y(t) = (Cx)(t)$ принадлежит $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и $\|y\| \le \|C\|\|x\|$;

4) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \ t \in \mathbb{R},$$

принадлежит $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и выполнено неравенство $\|f * x\| \le \|f\|_1\|x\|$;

5) для $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ из равенства $f * x = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$.

Для элементов рассматриваемых банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей введены следующие определения спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов, а также приведены некоторые их свойства.

Определение 2.2.2. *Спектром Бёрлинга* вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T) называется множество

$$\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для всех } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ таких, что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0\},$$

являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ существует } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ со свойством } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \text{ такая, что } fx = 0\}.$$

Определение 2.3.2. *Спектром Карлемана вектора $x \in X$* будем называть множество $\Lambda_C(x)$ таких чисел $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что функция

$$R_x : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to X, \quad R_x(\lambda) = f_\lambda x, \quad x \in X,$$

не имеет голоморфного продолжения в некоторую окрестность точки $i\lambda_0 \in i\mathbb{R}$. Семейство функций f_λ взято из определения 2.1.3.

Определение 2.3.3. Множество $\Lambda_C(X) = \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \Lambda_C(x)}$ будем называть *спектром Карлемана банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T)*.

Определение 2.4.1. Будем говорить, что замкнутый оператор $B : \mathrm{D}(B) \subseteq Y \to Y$ *обладает свойством однозначного распространения,* если для любой голоморфной функции $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathrm{D}(B) \subseteq Y$ из равенства $(B - \lambda I)f(\lambda) = 0$, $\lambda \in U$, следует, что $f \equiv 0$.

Пусть оператор $B : \mathrm{D}(B) \subseteq Y \to Y$ обладает свойством однозначного распространения. Множество точек $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, для которых существует открытая окрестность $U_0 = U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U_0 \to \mathrm{D}(B) \subseteq Y$ такая, что $f(\lambda) \in \mathrm{D}(B) \subseteq Y$, и выполнено равенство $(B - \lambda I)f(\lambda) = y$, $y \in Y$, для всех $\lambda \in U_0$, называется *локальным резольвентным множеством вектора $y \in Y$* и обозначается $\rho_B(y)$. Функцию f будем называть *локальной резольвентой вектора y* относительно оператора B в окрестности точки λ_0.

Локальный спектр вектора $y \in Y$ относительно оператора B - это множество $\sigma_B(y) = \mathbb{C} \backslash \rho_B(y)$.

С учётом следующей леммы возможно построение локального спектра вектора относительно генератора рассматриваемого банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

Лемма 2.4.2. *Генератор A банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) обладает свойством однозначного распространения.*

С использованием данных определений спектров и, в частности, определения 2.3.3 имеет место следующая

Теорема 2.5.1. *Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ – изометрическое представление, ассоциированное со структурой невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T). Тогда генератор $\mathcal{A}$ сильно непрерывного сужения $T|_{X_c}$ группы операторов T является сужением оператора iA, где A – генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T), и резольвента $\lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A}) : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X_c$ допускает расширение до резольвенты $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C} \backslash i\Lambda_C(X) \to \operatorname{End} X$ оператора iA.*

Основным результатом второй главы диссертации является следующая

Теорема 2.5.2. *Для любого вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) имеют место равенства $\Lambda(x) = \Lambda_C(x) = \sigma_A(x)$.*

С учётом определения 2.1.4 и того факта, что генератором группы операторов сдвига в однородном пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ является оператор дифференцирования, то оператор дифференцирования $-i\frac{d}{dt} = D : \mathrm{D}(D) \subseteq \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ является генератором $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{F}, S)$. Таким образом, следствием теоремы 2.5.2 в случае однородных функциональных пространств (удовлетворяющих определению 2.1.5) является следующая

Теорема 2.5.3. *Пусть $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$– однородное пространство функций. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathscr{F}$ справедливы равенства $\Lambda(\varphi) = \Lambda_C(\varphi) = \sigma_D(\varphi)$.*

В <u>третьей главе</u> диссертации вводятся понятия наполненности, матрицы и ряда Фурье линейного ограниченного оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y. Приведены следствия из теоремы Бохнера-Филлипса о наполненности некоторых подалгебр алгебры линейных ограниченных операторов. Проводится систематический анализ результатов статьи А.Г. Баскакова [5], и получены теоремы, уточняющие результаты данной статьи. Результаты о наполненности подалгебр и об оценках матричных элементов обратных операторов применяются в основной теореме третьей главы о наполненности подалгебр алгебры операторов, порождённых интегральными операторами и действующих на пространстве непрерывных 2π-периодических комплекснозначных функций $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Приведём ниже основные результаты третьей главы.

Пусть X, Y – бесконечномерные банаховы пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Символом $\mathrm{Hom}(X,Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, отображающих X на Y, а символом $\mathrm{End}\,X = \mathrm{Hom}(X,X)$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве X. Символом $\mathrm{Inv}(X,Y)$ обозначим множество непрерывно обратимых операторов из $\mathrm{Hom}(X,Y)$, а группу обратимых операторов из банаховой алгебры $\mathrm{End}\,X$ обозначим символом $\mathrm{Inv}\,X = \mathrm{Inv}(X,X)$. Пусть $\mathbb{G}$ – счетная дискретная абелева группа с аддитивной формой записи операции на группе, а $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{G}$ – некоторое её подмножество.

Определение 1.1.7. Подалгебра $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ называется *наполненной* в алгебре $\mathbb{B}$, если каждый элемент $a \in \mathbb{A}$, обратимый в алгебре $\mathbb{B}$, обратим также в подалгебре $\mathbb{A}$.

Определение 3.2.1. Проекторнозначную функцию $P : \mathbb{G} \to \mathrm{End}\,X$, задающую индексированное элементами группы $\mathbb{G}$ множество проекторов $\{P_g = P(g)\}_{g\in\mathbb{G}}$, где $P_g = 0$ для всех $g \in \mathbb{G}\backslash\mathbb{S}$, будем называть *дизъюнктной*, если для любой пары $i, j \in \mathbb{S}$, $i \neq j$, выполняется равенство $P_iP_j = 0$.

Определение 3.2.2. Дизъюнктную проекторнозначную функцию $P : \mathbb{G} \to \mathrm{End}\,X$ будем называть *разложением единицы* на пространстве X, если для каждого $x \in X$ безусловно сходится ряд $\sum_{g\in\mathbb{S}} P_g x = x$ и конечна величина

$$C(P) = \sup_{\{\alpha_g\}\subset\mathbb{T}} \left\| \sum_{g\in\mathbb{S}} \alpha_g P_g \right\| \geq 1.$$

В пространствах X и Y рассмотрим разложения единицы $P : \mathbb{G} \to \operatorname{End} X$ и $Q : \mathbb{G} \to \operatorname{End} Y$ соответственно.

Замечание 3.2.6. Далее предполагается, что для разложений единицы P и Q выполнено одно из следующих условий:

1) В случае, когда $X = Y$ и $P = Q$, существует такая постоянная $M(P) > 0$, что для любых g из множества $G \subseteq \mathbb{S}$ и оператора $A \in \operatorname{End} X$ имеет место оценка $\| \sum\limits_{j\in G} P_{j+g} A P_j \| \leq M(P) \max\limits_{j\in G} \|P_{j+g} A Pj\|$.

2) Для любых конечных множеств $\sigma_1, \sigma_2, \Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{S}$ таких, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, имеет место равенство

$$\|(\sum_{i\in\sigma_1} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_1} P_j) + (\sum_{i\in\sigma_2} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_2} P_j)\| =$$

$$\max\{\|(\sum_{i\in\sigma_1} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_1} P_j)\|, \|(\sum_{i\in\sigma_2} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_2} P_j)\|\}.$$

Определение 3.2.3. Каждому оператору $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ поставим в соответствие *матрицу оператора* $\mathcal{A} = (A_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$, элементы которой имеют вид $A_{ij} = Q_i A P_j \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, $i, j \in \mathbb{S}$.

Диагональю матрицы оператора $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ будем называть операторы $\mathcal{A}_g \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ (с учётом замечания 3.2.6), $g \in \mathbb{G}$, вида

$$\mathcal{A}_g = \sum_{\substack{i-j=g \\ i,j\in\mathbb{S}}} Q_i A P_j,$$

где $\mathcal{A}_g = 0$, если $g \in \mathbb{G}$ не представима в виде $i - j$ для любых $i, j \in \mathbb{S}$.

Определение 3.2.4. Каждому оператору $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ с матрицей $\mathcal{A} = (A_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$ поставим в соответствие функцию $d_A : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ вида

$d_A(g) = \sup\limits_{i-j=g} \|A_{ij}\|$, $g \in \mathbb{G}$, $i, j \in \mathbb{S}$. Величину $d_A(g)$, $g \in \mathbb{G}$, будем называть *нормой* g*-ой диагонали* матрицы $\mathcal{A}$ оператора A.

На основе понятия нормы диагонали матрицы оператора из $\mathrm{Hom}(X, Y)$ введём классификацию операторов. Для этого введём следующие весовые функции.

Определение 3.2.5. Пусть функция $\alpha : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\alpha(g) \geq 1$ для всех $g \in \mathbb{G}$,

2) $\alpha(g_1 + g_2) \leq \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$,

3) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \alpha(ng) = 0$ для всех $g \in \mathbb{G}$.

Определение 3.2.6. Пусть $\beta : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ – функция, для которой выполнены свойства

1) $\sum_{g\in\mathbb{G}} \beta(g)^{-1} < \infty$,

2) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \beta(ng) = 0$,

3) существует постоянная $C(\beta) > 0$ такая, что для всех $g \in \mathbb{G}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{j\in\mathbb{G}} (\beta(g-j)\beta(j))^{-1} \leq C(\beta)/\beta(g)$.

Определение 3.2.7. Под *характеристикой убывания норм диагоналей* (матрицы $\mathcal{A}$) оператора $A \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ будем понимать правило, описывающее стремление к нулю величин $d_A(kg)$ при $k \to \infty$, $g \in \mathbb{G}$. Выделим следующие характеристики убывания норм диагоналей:

1) $\sum\limits_{g\in\mathbb{G}} d_A(g) < \infty$;

2) $\sum\limits_{g\in\mathbb{G}} d_A(g)\alpha(g) < \infty$, где функция α дана в определении 3.2.5;

3) $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ g\in\mathbb{G}}} d_A(kg)\beta(kg) = 0$, где функция β дана в определении 3.2.6;

4) $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ \mathbb{Z}^n}} d_A(k)(1+\|k\|)^q = 0$, для некоторого $q > n$ (при этом оператор A удовлетворяет условию 3) данного определения, если функция $\beta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}_+$ имеет вид $\beta(k) = (1+\|k\|)^q$, $\|k\| = \max\limits_{1\le i\le n} |k_i|$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$);

5) $d_A(k) \le M\gamma^{\|k\|}$, $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $(\mathbb{G} = \mathbb{Z})$ для некоторых постоянных $M = M(A) > 0$ и $\gamma = \gamma(A) \in (0,1)$;

6) $d_A(k) = 0$ при $|k| > 1$, $k \in \mathbb{Z}$, (трёхдиагональные);

7) $d_A(k) = 0$ при $k \ne 0, 1$ либо при $k \ne 0, -1$, $k \in \mathbb{Z}$, (двухдиагональные).

Определение 3.2.8. Операторы, удовлетворяющие любому из условий определения 3.2.7, образуют линейные подпространства из пространства $\mathrm{Hom}(X,Y)$, которые будем обозначать $\mathrm{Hom}_1(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_\alpha(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_\beta(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_q(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_\gamma(X,Y)$, соответственно, для операторов, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3), 4) и 5). Для подпространств операторов, удовлетворяющих условиям 1) – 4) определения 3.2.7, введём следующие нормы

$$\|A\|_\alpha = \sum_{g\in\mathbb{G}} \alpha(g) d_A(g), \quad \|A\|_\beta = C(\beta) \sup_{g\in\mathbb{G}} \beta(g) d_A(g),$$
$$\|A\|_1 = \sum_{g\in\mathbb{G}} d_A(g), \qquad \|A\|_q = C(q) \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+\|k\|)^q d_A(k),$$

где $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ принадлежит соответствующему подпространству. Относительно введённых норм указанные подпространства полны. Отметим, что $\mathrm{Hom}_\alpha(X,Y) = \mathrm{Hom}_1(X,Y)$ при $\alpha \equiv 1$, а $\mathrm{Hom}_\beta(X,Y) = \mathrm{Hom}_q(X,Y)$ при $\beta(k) = (1+\|k\|)^q$, $k \in \mathbb{Z}^n$. В случае, когда $X = Y$ и рассматривается одно и то-же разложение единицы $P : \mathbb{G} \to \mathrm{End}\, X$ для областей определения и значений операторов, то подпространства операторов, удовлетворяющих условиям 1)–5), будем обозначать, соответственно, $\mathrm{End}_1 X$, $\mathrm{End}_\alpha X$, $\mathrm{End}_\beta X$, $\mathrm{End}_q X$, $\mathrm{End}_\gamma X$.

Определение 3.2.9. Пусть $\widehat{P} : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathrm{End}\, X$, $\widehat{Q} : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathrm{End}\, Y$ – сильно непрерывные изометрические представления (группы операторов), определённые формулами $\widehat{P}(\gamma)x = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}} \gamma(g) P_g x$, $x \in X$, $\widehat{Q}(\gamma)x = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}} \gamma(g) Q_g y$, $y \in Y$, где P, Q –

разложения единицы согласно определению 3.2.2, соответственно, в банаховых алгебрах операторов $\operatorname{End} X$ и $\operatorname{End} Y$, $\gamma \in \widehat{\mathbb{G}}$ – унитарные характеры группы $\mathbb{G}$.

Определение 3.2.10. Каждому оператору $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ поставим в соответствие сильно непрерывную функцию $\Phi_A : \widehat{\mathbb{G}} \to \operatorname{Hom}(X, Y)$, определяемую равенством

$$\Phi_A(\gamma) = \widehat{Q}(\gamma) A \widehat{P}(-\gamma), \quad \gamma \in \widehat{\mathbb{G}}.$$

Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$\Phi_A(\gamma) \sim \sum_{g \in \mathbb{G}} \gamma(g) A_g, \quad \gamma \in \widehat{\mathbb{G}},$$

где

$$A_g = \int\limits_{\widehat{\mathbb{G}}} \Phi_A(\gamma) \gamma(-g) \mu(d\gamma), \quad g \in \mathbb{G}, \tag{3.1}$$

а μ – мера Хаара на компактной группе $\widehat{\mathbb{G}}$, $\mu(\widehat{\mathbb{G}}) = 1$.

Ряд $\sum\limits_{g \in \mathbb{G}} A_g$ будем называть *рядом Фурье оператора* A, а операторы A_g, $g \in \mathbb{G}$, – *коэффициентами Фурье* этого оператора (относительно пары представлений $(\widehat{P}, \widehat{Q})$).

С учётом введённой терминологии в диссертации доказан следующий результат.

Теорема 3.4.1. *Пусть для непрерывно обратимого оператора* $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ *относительно некоторой пары представлений* $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ *имеет две ненулевые диагонали (нулевая и первая), т.е. функция* $\Phi_A : \mathbb{T} \to \operatorname{Hom}(X, Y)$ *имеет вид*

$$\Phi_A(\theta) = A_0 + A_1 \theta, \ \theta \in \mathbb{T}. \tag{3.2}$$

Обозначим $a_1 = \|A^{-1}\| d_A(1)$. *Тогда для коэффициентов Фурье оператора* $B = A^{-1}$ *справедливы следующие оценки:*

$$d_B(k) \le \begin{cases} \frac{\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k \le \frac{e\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k, & k \ge a_1 \\ \|A^{-1}\|, & 0 < k < a_1; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$d_B(-k) \le \begin{cases} \frac{\|A^{-1}\|}{a_1} k \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1} \le \frac{e\|A^{-1}\|}{a_1} k \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1}, & 1 < a_1 < k \\ \|A^{-1}\|, & 1 < k < a_1 \\ 0, & a_1 \le 1 < k; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$d_B(-1) \le \begin{cases} \|A^{-1}\|, & a_1 \ge 1 \\ 0, & a_1 < 1; \end{cases}$$

$$d_B(0) \le \|A^{-1}\|.$$

При этом

$$\|B\|_1 \le \begin{cases} (2a_1+1)\|A^{-1}\| + 2e\|A^{-1}\| \left((a_1+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^{a_1} + a_1 \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{a_1-1}\right), \\ \text{\textit{если} } a_1 > 1; \\ (2e+3)\|A^{-1}\|, \\ \text{\textit{если} } a_1 = 1; \\ e\|A^{-1}\| \frac{a_1(a_1+2)}{a_1+1} + \|A^{-1}\|, \\ \text{\textit{если} } a_1 < 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Полученный в теореме 3.4.1 результат уточняет результаты А.Г. Баскакова из [5, теорема 3].

Теперь введём необходимые определения и сформулируем основной результат третьей главы диссертации.

Определение 3.5.1. Символом $\operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ обозначим подпространство операторов $A \in \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ вида

$$A = aI + K, \quad a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}, \tag{3.11}$$

где K - интегральный оператор, действующий в банаховом пространстве $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ вида

$$(Kx)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau, u) x(u) du,$$

с ядром $\mathcal{K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{K}(\tau+2\pi, u+2\pi) = \mathcal{K}(\tau, u)$ для всех $\tau, u \in \mathbb{R}$;

2) $\kappa(\tau) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, где $(\kappa(\tau))(u) = \mathcal{K}(\tau, u),\ u \in \mathbb{R}$;

3) $\kappa \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ (функция κ непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

Замечание 3.5.1. Рассматриваемый оператор K определен корректно, т.е. $Kx \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для любого $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Подпространство $\operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ является банаховой подалгеброй в алгебре $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

В качестве изометрического представления группы $\mathbb{R}$ в пространстве $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ возьмём группу сдвигов $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, определенную формулой $(S(t)x)(\tau) = x(\tau+t)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$. В этом случае функция $\Phi_K : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, определённая формулой $\Phi_K(t) = S(t)KS(-t)$, имеет вид

$$(\Phi_K(t)x)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau+t, v+t)x(v)dv, \quad x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \tag{3.12}$$

Коэффициенты Фурье оператора K из определения 3.5.1 имеют вид:

$$(K_n x)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_n(\tau, v)x(v)e^{inv}dv,$$

где

$$\mathcal{K}_n(\tau, v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau+t, v+t)e^{-in(t+v)}dt.$$

Коэффициенты Фурье оператора A совпадают с коэффициентами оператора K за исключением нулевого коэффициента, имеющего вид $A_0 = aI + K_0$.

Используя замену переменных в формуле $\mathcal{K}_n$ получаем, что $\mathcal{K}_n(\tau+u, v+u) = \mathcal{K}_n(\tau, v)$ для всех $u, \tau, v \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $\mathcal{K}_n(\tau, v) = \mathcal{K}_n(\tau - v, 0) = \mathcal{K}^0_n(\tau - v)$, то есть функция $\mathcal{K}_n$ зависит, в действительности, от разности аргументов.

Определение 3.5.2. Пусть оператор $A \in \operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ удовлетворяет одному из условий 1)–7) убывания норм диагоналей из определения 3.2.7. Для совокупностей операторов из $\operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, удовлетворяющих таким условиям, введём обозначения по аналогии с определением 3.2.8 о подпространствах операторов абстрактного пространства $\operatorname{Hom}(X, Y)$. То есть, будем пользоваться символами $\operatorname{Gio}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\beta C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_q C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для операторов, удовлетворяющих, соответственно, условиям 1)–5).

Из теорем 2,3 статьи [5] для рассматриваемых операторов из $\operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ вытекают следующие результаты.

Теорема 3.5.2. *Пусть непрерывно обратим оператор* $A = aI + K \in \operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *т.е. для его коэффициентов Фурье* $A_n = K_n$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $A_0 = aI + K_0$ *выполняется условие* $\|K_n\| \leq M\gamma^{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Положим* $\widetilde{\varkappa}(A) = M\gamma\|A^{-1}\|$. *Тогда оператор* $B = A^{-1} \in \operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *и для него справедливы оценки вида*

$$d_B(k) \leq \left(2 - \frac{2(1-\gamma^2)}{8\widetilde{\varkappa}(A) + 3(1-\gamma^2)}\right) \|A^{-1}\| \left(1 - \frac{(1-\gamma)^2}{1-\gamma+4\widetilde{\varkappa}(A)}\right)^{|k|},$$

если $k \neq 0$, *и*

$$d_B(0) \leq \|A^{-1}\|.$$

В частности,

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \leq \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} - 1 + \frac{6+8\gamma+2\gamma^2}{8\widetilde{\varkappa}(A)+3(1-\gamma^2)}\right) \|A^{-1}\|,$$

причем

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \leq \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} + \frac{-5+8\gamma+5\gamma^2}{8+3(1-\gamma^2)}\right) \|A^{-1}\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} + 1\right) \|A^{-1}\|,$$

если $\widetilde{\varkappa}(A) \geq 1$.

Теорема 3.5.3. *Пусть непрерывно обратимый оператор* $A = aI + K \in \operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *удовлетворяет условию 6) из определения 3.2.7, т.е. для его* *коэффициентов Фурье* $A_n = K_n$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $A_0 = aI + K_0$ *выполняется условие* $K_n = 0$ *при* $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,0,1\}$. *Обозначим величину* $\bar{\varkappa}(A) = \max\{\|A_{-1}\|, \|A_1\|\}\|A^{-1}\| \le \varkappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. *тогда для оператора* $B = A^{-1}$ *справедливы следующие оценки*

$$d_B(k) \le \left(\frac{16\bar{\varkappa}(A)+4}{8\bar{\varkappa}(A)+3}\right)\|A^{-1}\|\left(\frac{4\bar{\varkappa}(A)}{1+4\bar{\varkappa}(A)}\right)^{|k|} \le 2\|A^{-1}\|\left(\frac{4\bar{\varkappa}(A)}{1+4\bar{\varkappa}(A)}\right)^{|k|},$$

$$d_B(0) \le \|A^{-1}\|,$$

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \le \left(16\bar{\varkappa}(A) + \frac{3-8\bar{\varkappa}(A)}{3+8\bar{\varkappa}(A)}\right)\|A^{-1}\| \le 16\bar{\varkappa}(A)\|A^{-1}\|.$$

Основным результатом третьей главы диссертации является следующая

Теорема 3.5.4. *Пусть оператор* $A \in \operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *непрерывно обратим и удовлетворяет одному из свойств 1)–7) определения 3.2.7, тогда обратный оператор* $B = A^{-1} \in \operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *лежит в той же алгебре и*

1) *принадлежит подалгебре операторов, удовлетворяющих соответствующему условию определения 3.2.7 (для условий 1)–5));*

2) *для норм его диагоналей справедливы оценки теорем 3.5.2, 3.5.3 или 3.4.1, если оператор* A *удовлетворяет, соответственно, условиям 5), 6) или 7) определения 3.2.7.*

В терминах наполненности пункт 1 теоремы 3.5.4 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 3.5.5. *Подалгебры* $\operatorname{Gio}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\beta C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_q C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *и* $\operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *наполнены в алгебре* $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Глава 1

О спектральной теории операторов и банаховых модулях

1.1. Некоторые сведения из теории топологических групп, банаховых алгебр и банаховых модулей

В данном параграфе приведены общеизвестные определения и некоторые факты из теории алгебраических структур, которые, хотя и не являются первоочередными объектами изучения в рамках данной диссертации, однако, периодически встречаются на страницах данной работы и использованы в каркасе основного исследования. Были использованы книги и работы М.А. Наймарка [21], А.И. Кострикина[18], Н. Бурбаки [11], С. Морриса [20], А.Г. Баскакова [3, 7, 10], Д.П. Желобенко [16], М. Атья, И. Макдональда [1] и И.М. Гельфанда, Д.А. Райкова, Г.Е. Шилова [12].

Определение 1.1.1 ([21, стр. 418],[18, стр. 156])**.** Множество $\mathbb{G}$ называется *полугруппой*, если на нём задано отображение $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, являющееся *ассоциативным*, т.е. $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ для любых $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{G}$. Полугруппа $\mathbb{G}$ называется *полугруппой с единицей* или *моноидом*, если существует *единица* или *единичный элемент* $e \in \mathbb{G}$, т.е. $ge = eg = g$ для любого $g \in \mathbb{G}$. Моноид $\mathbb{G}$ называется *группой*, если на нём задано отображение $g \mapsto g^{-1} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, которое для каждого $g \in \mathbb{G}$ ставит в соответствие единственный *обратный* элемент g^{-1} такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ (т.е. все элементы из группы $\mathbb{G}$ *обратимы*).

Группа (полугруппа) $\mathbb{G}$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для любых $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$. При этом зачастую используется аддитивная форма записи: $g_1 + g_2$ вместо $g_1 g_2$, $-g$ вместо g^{-1}, нулевой элемент 0 вместо единичного e, где $g, g_1, g_2 \in \mathbb{G}$.

Отображение $g \mapsto g' : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ из (полу)группы $\mathbb{G}$ в (полу)группу $\mathbb{G}'$ называется *гомоморфизмом*, если $(g_1 g_2)' = g_1' g_2'$ для всех $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$.

Множество всех элементов $g \in \mathbb{G}$, отображаемых некоторым гомоморфизмом в единичный элемент (для групп и полугрупп с единицей), называется *ядром* этого гомоморфизма. Гомоморфизм (полу)групп является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его ядро состоит только из единицы.

Определение 1.1.2 ([10, § 7],[18, стр. 176]). Множество $\mathbb{A}$ называется *кольцом*, если на нём заданы два отображения: $(a, b) \mapsto a + b : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, называемое *сложением*, и $(a, b) \mapsto ab : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, называемое *умножением*, причём выполнены следующие свойства

1) $\mathbb{A}$ – абелева группа относительно сложения (единица абелевой группы называется *нулём кольца* и обозначается символом 0);

2) $\mathbb{A}$ – полугруппа относительно умножения;

3) умножение дистрибутивно по сложению, т.е. $(a + b)c = ac + bc$, $c(a + b) = ca + cb$ для любых $a, b, c \in \mathbb{A}$.

Кольцо $\mathbb{A}$ называется *кольцом с единицей*, если $\mathbb{A}$ является моноидом относительно умножения и $0 \neq e$, $0, e \in \mathbb{A}$. Кольцо *коммутативно*, если умножение в нём коммутативно. Кольцо с единицей, в котором все ненулевые элементы обратимы (относительно умножения), называется *телом*. Коммутативное (по умножению) тело называется *полем*, его элементы – *числами*, единица обозначается символом 1, а числа вида ab^{-1} – символом a/b. Поля вещественных и комплексных чисел обозначим по традиции, соответственно, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Определение 1.1.3 ([10, § 7]). Абелева группа (кольцо) $\mathbb{A}$ называется *линейным* или *векторным пространством* (*алгеброй*) над полем $\mathbb{K}$, если задано отображение $(\alpha, a) \mapsto \alpha a : \mathbb{K} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, причём для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{A}$ имеют место равенства $(\alpha+\beta)a = \alpha a+\beta b$, $\alpha(a+b) = \alpha a+\alpha b$, $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) = \beta(\alpha a)$, $1a = a$ (и $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ в случае кольца). Если вместо кольца в определении алгебры используется коммутативное кольцо (кольцо с единицей или коммутативное кольцо с единицей), то алгебра называется *коммутативной* (соответственно, *алгеброй с единицей* или *коммутативной алгеброй с единицей*).

Определение 1.1.4 ([21, стр. 162-163,177], [10, § 7,определение 12])**.** Подмножество $\mathbb{S}$ из группы (кольца, алгебры и т.д.) $\mathbb{A}$ называется *подгруппой* (соответственно, *подкольцом*, *подалгеброй* и т.д.), если отображения, введённые на группе (кольце, алгебре и т.д.) не выводят за пределы $\mathbb{S}$.

Определение 1.1.5 ([21, стр. 189])**.** *Центром* кольца (алгебры) $\mathbb{A}$ называется подмножество элементов $Z(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$, умножение которых с любым другим элементом из $\mathbb{A}$ коммутативно.

Определение 1.1.6 ([10, § 7, определение 4])**.** Элемент a из кольца (алгебры) $\mathbb{A}$ с единицей называется *обратимым*, если существует $b \in \mathbb{A}$ такой, что $ab = ba = e$. Элемент b называется *обратным* к a и обозначается символом a^{-1}.

Определение 1.1.7 ([11, стр. 11])**.** Подалгебра $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ называется *наполненной* в алгебре $\mathbb{B}$, если каждый элемент $a \in \mathbb{A}$, обратимый в алгебре $\mathbb{B}$, обратим также в подалгебре $\mathbb{A}$.

Определение 1.1.8 ([3, определение 3.1],[1, стр. 10])**.** Подгруппа по сложению $\mathbb{I}$ из кольца (алгебры) $\mathbb{B}$ называется *идеалом*, если $ab \in \mathbb{I}$ для любых $a \in \mathbb{I}$, $b \in \mathbb{B}$. Если $\mathbb{I} \neq \mathbb{B}$, то $\mathbb{I}$ называется *собственным идеалом. Максимальным идеалом* называется собственный идеал, который не содержится ни в каком большем собственном идеале.

Определение 1.1.9 ([3, определение 3.4])**.** *Радикалом* алгебры $\mathbb{A}$ называется пересечение всех максимальных идеалов этой алгебры. Если радикал алгебры нулевой, то алгебра $\mathbb{A}$ называется *полупростой.*

Определение 1.1.10 ([10, § 7, определение 5]). Пусть $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ – кольца. Отображение $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется *гомоморфизмом колец*, если для любых $a, b \in \mathbb{A}$ выполнены условия

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

2) $f(ab) = f(a)f(b)$,

3) $f(e_{\mathbb{A}}) = e_{\mathbb{B}}$, если $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ - кольца с единицами $e_{\mathbb{A}}$ и $e_{\mathbb{B}}$ соответственно.

Определение 1.1.11 ([10, § 7, определение 10]). Пусть $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ – алгебры над полем $\mathbb{K}$. Отображение $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется *гомоморфизмом алгебр*, если f – гомоморфизм колец $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ и $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ для любых $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{A}$.

Определение 1.1.12 ([18, стр. 182]). *Ядром* $\mathrm{Ker}\chi$ гомоморфизма $\chi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ колец (алгебр) $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ называется множество элементов кольца (алгебры) $\mathbb{A}$, переходящих при гомоморфизме в нулевой элемент кольца (алгебры) $\mathbb{B}$.

Определение 1.1.13 ([10, § 7, определение 11]). Взаино-однозначный гомоморфизм групп (алгебр, колец) будем называть *изоморфизмом групп (алгебр, колец)*, а сами группы (алгебры, кольца) при этом – *изоморфными.*

Определение 1.1.14. Множества гомоморфизмов групп (колец, алгебр и т.д.) $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ будем обозначать символом $\mathrm{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

В анализе одними из фундаментальных понятий являются понятия непрерывности, сходимости и предела. Для того, чтобы использовать введённые выше алгебраические структуры, дополним их определения с помощью топологии и нормы (см., например, [22, гл. III,IV]).

Определение 1.1.15 ([20, стр. 7],[16, стр. 113], [39, определение 8.2.1]). Полугруппа (группа) $\mathbb{G}$ называется *топологической полугруппой (группой)*, если

1) она является топологическим пространством,

2) отображение $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ непрерывно отображает прямое произведение $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ (с топологией произведения) на $\mathbb{G}$,

3) в случае группы отображение $g \mapsto g^{-1} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ непрерывно.

Непрерывность отображений на (полу)группе обеспечивается, например, в хаусдорфовом топологическом пространстве.

Топологическая группа называется *локально компактной*, если локально компактно топологическое пространство, которым она является, т.е. каждая точка обладает окрестностью с компактным замыканием.

Отметим, что на любой локально-компактной абелевой группе существует единственная (с точностью до константы) мера Хаара (см. [38, гл. XI]).

Определение 1.1.16 ([20, стр. 42])**.** Пусть $\mathbb{G}$ – абелева топологическая группа, непрерывный комплексный гомоморфизм $\gamma : \mathbb{G} \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ называется *характером* группы $\mathbb{G}$. Множество всех характеров группы $\mathbb{G}$ называется *группой характеров* или *двойственной группой группы* $\mathbb{G}$ и обозначается символом $\widehat{\mathbb{G}}$. Двойственная группа $\widehat{\mathbb{G}}$ становится абелевой, если для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{\mathbb{G}}$ определить $(\gamma_1\gamma_2)(g) = \gamma_1(g)\gamma_2(g)$ для всех $g \in \mathbb{G}$.

Определение 1.1.17 ([3, определение 1.1])**.** Множество $\mathbb{B}$ называется *банаховой алгеброй*, если оно является алгеброй и одновременно банаховым пространством (см., например, [22, гл. III]) и справедлива оценка $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ для любых $a, b \in \mathbb{B}$. Если алгебра $\mathbb{B}$ является алгеброй с единицей $e \in \mathbb{B}$ и $\|e\| = 1$, то $\mathbb{B}$ называется *банаховой алгеброй с единицей* и *коммутативной банаховой алгеброй*, если алгебра $\mathbb{B}$ коммутативна.

Определение 1.1.18 ([3, определение 2.2])**.** *Спектром* $\sigma(a)$ элемента a из банаховой алгебры $\mathbb{A}$ с единицей e называется множество таких комплексных чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, что элемент $\lambda e - a$ не имеет обратного (в смысле определения 1.1.6 обратного элемента алгебры). Множество $\rho(a) = \mathbb{C} \backslash \sigma(a)$ называется *резольвентным* *множеством* элемента a, т.е. в $\rho(a)$ содержатся такие $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых в алгебре $\mathbb{A}$ обратим элемент $\lambda e - a$.

Определение 1.1.19. Символом $\mathrm{Hom}(X, Y)$ обозначим банахово пространство гомоморфизмов банаховых пространств X и Y, т.е. линейных непрерывных операторов, определённых на X со значениями в Y.

Банахово пространство $\mathrm{End}\, X = \mathrm{Hom}(X, X)$ становится банаховой алгеброй, если определить операцию умножения операторов формулой $ABx = A(Bx)$ для любых $A, B \in \mathrm{End}\, X$, $x \in X$.

Определение 1.1.20. Отображение, действующее между банаховыми алгебрами, называется *гомоморфизмом банаховых алгебр*, если оно является гомоморфизмом банаховых пространств и гомоморфизмом алгебр. Ненулевые комплексные гомоморфизмы из пространства $\mathrm{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{C})$ называются *характерами* банаховой алгебры $\mathbb{A}$, а их множество обозначается символом $\mathrm{Spec}\, \mathbb{A}$ и называется *спектром алгебры* $\mathbb{A}$.

Отметим, что в определении 1.1.8 идеала, в случае банаховых алгебр, подгруппа по сложению становится линейным подпространством. Определение радикала алгебры при этом не меняется, а для введения полупростоты алгебры можно использовать не только язык идеалов, но и преобразование Гельфанда.

Определение 1.1.21 ([3, определение 3.3])**.** Отображение $\widehat{a}(\chi) \mapsto \chi(a) : \mathrm{Spec}\, \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ называется *преобразованием Гельфанда* элемента a из банаховой алгебры $\mathbb{A}$. Символом $\widehat{\mathbb{A}}$ обозначим множество преобразований Гельфанда $\widehat{a}$ для $a \in \mathbb{A}$.

Имеют место следующие теоремы о свойствах спектра банаховой алгебры, её идеалах, характерах и их преобразовании Гельфанда.

Теорема 1.1.1 ([3, теорема 3.3])**.** *Для банаховой алгебры* $\mathbb{A}$ *имеют место свойства:*

1) *каждый максимальный идеал алгебры $\mathbb{A}$ есть ядро некоторого характера алгебры $\mathbb{A}$, а ядро каждого характера из $\operatorname{Spec}\mathbb{A}$ является максимальным идеалом в алгебре $\mathbb{A}$;*

2) *элемент $a \in \mathbb{A}$ обратим в $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда он не содержится ни в одном собственном идеале алгебры $\mathbb{A}$;*

3) $\sigma(a) = \{\chi(a) : \chi \in \operatorname{Spec}\mathbb{A}\}$ *для любого $a \in \mathbb{A}$.*

Определение 1.1.22. Символом $C_b(X)$ обозначим банахову алгебру непрерывных и ограниченных комплекснозначных функций, действующих на банаховом пространстве X, с поточечным умножением и нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in X} |f(x)|$.

Теорема 1.1.2 ([3, теорема 3.4])**.** *Пусть $\mathbb{A}$ – банахова алгебра.*

1) $\operatorname{Spec}\mathbb{A}$ – *компактное пространство.*

2) *Преобразование Гельфанда определяет гомоморфизм банховых алгебр $a \mapsto \widehat{a} : \mathbb{A} \to C_b(\operatorname{Spec}\mathbb{A})$, ядро которого совпадает с радикалом алгебры $\mathbb{A}$ и тогда и только тогда являтеся изоморфизмом, когда $\mathbb{A}$ – полупростая алгебра.*

3) $\max\limits_{\chi\in\operatorname{Spec}\mathbb{A}} |\widehat{a}(\chi)| \le \|a\|$ *для всех $a \in \mathbb{A}$ и элемент $a \in \mathbb{A}$ принадлежит радикалу алгебры $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда $\sigma(a) = 0$.*

Определение 1.1.23 ([3, определение 11.6])**.** Банахова алгебра $\mathbb{A}$ называется *полупростой регулярной алгеброй*, если она полупроста как алгебра и для любого замкнутого множества $\Delta \subset \operatorname{Spec}\mathbb{A}$ и произвольного характера $\chi_0 \in \operatorname{Spec}\mathbb{A}\backslash\Delta$ существует такой элемент $a \in \mathbb{A}$, что $\widehat{a}(\chi_0) \ne 0$ и $(\operatorname{supp}\widehat{a}) \cap \Delta = \emptyset$.

Определение 1.1.24 ([3, определение 11.7])**.** Ограниченная последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из полупростой регулярной алгебры $\mathbb{A}$ называется *ограниченной аппроксимативной единицей*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n a = a$ для любого $a \in \mathbb{A}$ и для любого компакта $\Delta \subset \operatorname{Spec}\mathbb{A}$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\widehat{a_n} = 1$ в некоторой окрестности Δ для всех $n \ge n_0$.

Определение 1.1.25 ([7, §1.1, стр. 6])**.** Пусть $\mathbb{B}$ – банахова алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. *Левым банаховым модулем над* $\mathbb{B}$ или *левым* $\mathbb{B}$*-модулем* называется комплексное банахово пространство X, если задано отображение $(a, x) \mapsto ax : \mathbb{B} \times X \to X$, обладающее свойствами:

1) $(a + b)x = ax + bx$, $a(x + y) = ax + ay$;

2) $(\alpha a)x = a(\alpha x) = \alpha(ax)$;

3) $(ab)x = a(bx)$;

4) $\|ax\| \leq Const\|a\|\|x\|$;

5) $1x = x$, если алгебра $\mathbb{B}$ содержит единицу 1;

для любых $\alpha \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{B}$ и $x, y \in X$. Правый $\mathbb{B}$-модуль определяется аналогично с использованием правой формы записи и заменой свойства 3 на свойство 3'. $x(ab) = (xa)b$. В условии 4 константа часто заменяется единицей, а в случае банаховой алгебры $\mathbb{B}$ с единицей это достигается эквивалентной перенормировкой. В данной работе рассматриваются только левые банаховы модули над коммутативными банаховыми алгебрами $\mathbb{B}$, поэтому их будем называть просто банаховыми $\mathbb{B}$-модулями.

Определение 1.1.26 ([3, определение 11.5])**.** Пусть M – произвольное подмножество из $\mathbb{B}$-модуля X. *Спектром Бёрлинга* множества M называется подмножество $\Lambda(M) \subset \operatorname{Spec}\mathbb{B}$ тех характеров χ, ядро которых содержит идеал $I(M) = \{a \in \mathbb{B} : ax = 0 \text{ для всех } x \in M\}$. Таким образом, спектр Бёрлинга множества M является дополнением к множеству

$$\{\chi \in \operatorname{Spec}\mathbb{B} : \text{ найдётся } a \in \mathbb{B},\, \widehat{a}(\chi) \neq 0 \text{ и } ax = 0 \text{ для всех } x \in M.\}$$

1.2. Некоторые определения, обозначения, результаты и примеры из теории банаховых пространств

В данном параграфе приведены некоторые обозначения, определения, результаты и примеры, относящиеся к теории банаховых пространств.

Определение 1.2.1. *Банаховым пространством* называется полное линейное нормированное пространство.

Следующие определения и результаты приведены для банаховых пространств X и Y, но, вообще говоря, они имеют место для топологических пространств, для которых и приведены в книге [25].

Определение 1.2.2. *Внутренность множества* $E \subset X$, т.е. объединение всех открытых подмножеств данного множества, будем обозначать символом $\operatorname{Int} E$. *Замыканием* $\overline{E}$ множества E называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество. Множество называется *нигде не плотным*, если его замыкание имеет пустую внутренность. Счётные объединения нигде не плотных множеств называются *множествами первой категории* или *тощими (худыми)*. Множества, не относящиеся к множествам первой категории, называются *множествами второй категории* или *нетощими (нехудыми)*.

Определение 1.2.3 ([25, гл. 2, определение 2.3])**.** Пусть X, Y – банаховы пространства, $\mathbf{S}$ – некоторое семейство линейных отображений из X в Y. Семейство $\mathbf{S}$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любой окрестности нуля W в Y найдётся такая окрестность нуля V в X, что $A(V) \subset W$ для всех $A \in \mathbf{S}$, причём $\mathbf{S} \subset \operatorname{Hom}(X, Y)$.

Теорема 1.2.1 ([25, гл. 2, теорема 2.4])**.** *Пусть X, Y – банаховы пространства, $\mathbf{S}$ – равностепенно непрерывное семейство линейных операторов из $\operatorname{Hom}(X, Y)$, E – ограниченное множество из X. Тогда в Y существует такое ограниченное подмножество F, что $A(E) \subset F$ для любого $A \in \mathbf{S}$.*

Следующую теорему называют принципом равномерной ограниченности или теоремой Банаха-Штейнгауза.

Теорема 1.2.2 ([25, гл. 2, теорема 2.5]). *Пусть X, Y – топологические векторные пространства,* $\mathbf{S}$ *– некоторое семейство линейных ограниченных операторов из* $\mathrm{Hom}(X, Y)$, *V – множество точек из X, орбиты которых* $\mathbf{S}(x) = \{Ax : A \in \mathbf{S}\}$ *ограничены в Y. Если множество V – второй категории в X, то $V = X$ и семейство* $\mathbf{S}$ *равностепенно непрерывно.*

Определение 1.2.4. Пусть X – банахово пространство. Символом $B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ для произвольных $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}_+$ будем обозначать *открытый шар* радиуса r и с центром в точке x_0.

Символом ∂M будем обозначать *границу* множества M из X.

Определение 1.2.5 ([22, гл. 2,§ 6.5]). Множество M из банахова пространства X называется *предкомпактным*, если его замыкание в X компактно.

Определение 1.2.6 ([22, гл. 2,§ 7.1]). Множество M элементов банахова пространства X называется *вполне ограниченным*, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть (то есть, множество K_ε таких элементов $x \in X$, что для любого $x \in M$ существует $x_0 \in K_\varepsilon$, что $x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$).

Теорема 1.2.3 ([22, гл. 2,§ 7.3,теорема 3]). *Множество M из банахова пространства X предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Определение 1.2.7 ([22, § VI.5]). Пусть X, Y – банаховы пространства. Оператор $A \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ называется *компактным* (или *вполне непрерывным*), если он переводит ограниченные множества из X в предкомпактные множества в Y. Эквивалентно, A компактен тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ из X последовательность $\{Ax_n\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся в Y.

1.3. Основы спектральной теории линейных отношений и линейных операторов

В данном параграфе приведены некоторые обозначения и результаты из спектральной теории линейных отношений между банаховыми пространствами. Также показана связь теории линейных отношений и линейных операторов, действующих в банаховых пространствах. Использованы работы [6, 7, 9, 42].

Определение 1.3.1. Пусть X, Y – комплексные банаховы пространства. Всякое линейное подпространство $\mathcal{A} \subseteq X \times Y$ называется *линейным отношением* между банаховыми пространствами X и Y. Если оно замкнуто в $X \times Y$ (например, относительно нормы $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$, $(x,y) \in \mathcal{A}$), то называется *замкнутым* линейным отношением.

Областью определения линейного отношения $\mathcal{A} \subseteq X \times Y$ называется множество $\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \{x \in X : \text{ существует такой } y \in Y, \text{ что } (x,y) \in \mathcal{A}\}$. *Областью значений* линейного отношения $\mathcal{A} \subseteq X \times Y$ называется множество $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in Y : \text{ существует такой } x \in X, \text{ что } (x,y) \in \mathcal{A}\}$. Символом $\mathcal{A}x$, $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, обозначим множество $\{y \in Y : (x,y) \in \mathcal{A}\}$. Множество $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}) : (x,0) \in \mathcal{A}\}$ называется *ядром отношения* $\mathcal{A}$. Отметим, что $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$ для любого $y \in \mathcal{A}x$, $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$.

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A} \subseteq X \times Y$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in \mathcal{A}\}$.

Определение 1.3.2. Множество замкнутых линейных отношений из $X \times Y$ обозначим символом $\mathrm{LR}(X,Y)$, $\mathrm{LR}(X) = \mathrm{LR}(X,X)$.

Если $\mathcal{A}0 = \{0\}$ для $\mathcal{A} \in \mathrm{LR}(X,Y)$, то такое отношение является *замкнутым линейным оператором* (при отождествлении оператора со своим *графиком* $\Gamma(\mathcal{A}) = \{(x, \mathcal{A}x) \in X \times Y\}$). Обозначим символом $\mathrm{LO}\,(X,Y)$ множество замкнутых линейных операторов, действующих из X в Y. Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{D}(A) \subset X \to Y$ будем записывать в виде пары $(\mathcal{A}, \mathrm{D}(A))$. Если $\mathcal{A}0 = \{0\}$

и $\mathrm{D}(\mathcal{A}) = X$ для $\mathcal{A} \in \mathrm{LR}(X,Y)$, то $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, т.е. является линейным ограниченным оператором, действующим из X в Y.

Отношение $\mathcal{A} \in \mathrm{LR}(X,Y)$ называется *инъективным*, если $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$, и *сюръективным*, если $\mathrm{Im}\mathcal{A} = Y$. Инъективное и сюръективное линейное отношение называется непрерывно обратимым, тогда $\mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{Hom}(X,Y)$.

Определение 1.3.3. *Резольвентным множеством отношения* $\mathcal{A} \in \mathrm{LR}(X,Y)$ называется (открытое) множество $\rho(\mathcal{A})$, состоящее из таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. *Спектром отношения* $\mathcal{A} \in \mathrm{LR}(X,Y)$ называется (замкнутое) множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$. Отображение $R(\cdot,\mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}(X,Y)$, $R(\lambda,\mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ называется *резольвентой отношения* $\mathcal{A}$.

Резольвента отношения есть псевдорезольвента в общепринятом смысле.

Определение 1.3.4. Функция $\mathcal{R} : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathrm{End}\, X$ называется *псевдорезольвентой*, если для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ выполняется равенство (*тождество Гильберта*)

$$\mathcal{R}(\lambda_1) - \mathcal{R}(\lambda_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)\mathcal{R}(\lambda_1)\mathcal{R}(\lambda_2).$$

Замечание 1.3.1. Данное определение соответствует резольвенте вида $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ для замкнутого оператора $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$.

Следующая теорема устанавливает взаимно-однозначное соответствие между псевдорезольвентами со значениями в $\mathrm{End}\, X$ и резольвентами линейного отношения

Теорема 1.3.1 ([9, теорема 1]). *Каждая псевдорезольвента* $\mathcal{R} : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathrm{End}\, X$ *является резольвентной некоторого замкнутого линейного отношения* $\mathcal{A} \in \mathrm{LR}(X)$, *причём* $\Omega \subset \rho(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{A}0 = \mathrm{Ker}\mathcal{R} = \bigcap_{\lambda\in\Omega} \mathrm{Ker}\mathcal{R}(\lambda) = \mathrm{Ker}R(\cdot,\mathcal{A}),$$

$\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}R(\cdot,\mathcal{A})$ *и отношение* $\mathcal{A}$ *определяется равенством* $\mathcal{A} = \lambda I - (\mathcal{R}(\lambda))^{-1}$, *которое не зависит от выбора* $\lambda \in \Omega$.

Определение 1.3.5 ([23, стр. 318]). Два линейных оператора считаются *равными*, если их области определения совпадают и значения самих операторов всюду равны. Если область определения $\mathrm{D}(A)$ оператора $A : \mathrm{D}(A) \subseteq X \to Y$ содержит область определения $\mathrm{D}(B)$ оператора $B : \mathrm{D}(B) \subseteq XtoY$, то оператор A называется *расширением* оператора B, а оператор B называется *сужением* оператора A.

Определение 1.3.6 ([23, гл. III,§ 318]). Линейное отношение $\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathrm{D}(A)\}$ из декартова произведения $X \times Y$ называется *графиком* линейного оператора $A : \mathrm{D}(A) \subseteq X \to Y$, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y.

1.4. Базовые понятия и факты из теории представлений, групп и полугрупп операторов

В данном параграфе приведены некоторые базовые определения и результаты теории сильно непрерывных групп и полугрупп операторов, а также демонстрируется их связь с теорией представлений. На основе [39, определения 8.3.1-8.3.3] и [16, III,§ 16] введём следующее определение.

Определение 1.4.1. *Представлением* (полу)группы $\mathbb{G}$ будем называть гомоморфизм (полу)группы $\mathbb{G}$ и (полу)группы $\mathbf{T}$ операторов из $\mathrm{End}\, X$. Если $\|A\| = 1$ для любого $A \in \mathbf{T}$, то представление называется *изометрическим.*

Отметим, что представление (полу)группы $\mathbb{G}$ в указанном смысле в [39] отождествляется с соответствующей (полу)группой операторов $\mathbf{T}$ из $\mathrm{End}\, X$.

Определение 1.4.2 ([39, § 10.1], [47, гл. 1, определение 3.2], [13, гл. VIII.1, определение 1]). *(Однопараметрической) полугруппой* линейных ограниченных операторов на банаховом пространстве X называется множество операторов $\mathbf{T} = \{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}} \subset \mathrm{End}\, X$, если $T(t+s) = T(t)T(s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и $T(0) = I$.

Если отображение $t \mapsto T(t)x : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to X$ непрерывно для любого $x \in X$, то полугруппа называется *сильно непрерывной* или полугруппой класса C_0.

Если отображение $t \mapsto T(t) : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \operatorname{End} X$ непрерывно, то полугруппа называется *непрерывной в равномерной операторной топологии.*

Если $\|T(t)\| \leq 1$ ($\|T(t)\| = 1$) для всех $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, то полугруппа операторов называется *изометрической* (*сжимающей*).

Данное определение становится определением *группы операторов*, если всюду в нём заменить множество $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ на множество $\mathbb{R}$.

Отметим, что для сильной непрерывности однопараметрической группы при $t > 0$ достаточно её измеримости (см. [39, § 10.2]).

Определение 1.4.3 ([39, § 10.1])**.** *Инфинитезимальным оператором* или *генератором* (полу)группы $\mathbf{T}$ называется линейный оператор $A : X \to X$ вида $Ax = \lim\limits_{t\to 0+} t^{-1}(T(t) - I)x$, определённый для тех $x \in X$, для которых данный предел существует (множество таких $x \in X$ составляет *область определения* $\mathrm{D}(A)$ генератора A).

Следующая теорема описывает связь полугруппы линейных ограниченных операторов и резольвенты её генератора с помощью преобразования Лапласа.

Теорема 1.4.1 ([47, гл. 2, теорема 1.10])**.** *Пусть* $\mathbf{T}$ *– сильно непрерывная полугруппа операторов на банаховом пространстве* X *и пусть для постоянных* $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ *при* $t \geq 0$ *имеет место оценка* $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. *Для генератора* $(A, \mathrm{D}(A))$ *полугруппы* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *справедливы следующие утверждения.*

1) Если интеграл

$$R(\lambda)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \tag{1.1}$$

существует для всех $x \in X$ *при некотором* $\lambda \in \mathbb{C}$, *тогда такое* $\lambda \in \rho(A)$ *и* $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.

2) *Если* $Re\,\lambda > w$*, тогда* $\lambda \in \rho(A)$ *и резольвента в этой точке определяется формулой 1.1 интегрального представления резольвенты.*

3) $\|R(\lambda, A)\| \leq M(Re\,\lambda - \alpha)^{-1}$ *для всех* $Re\,\lambda > w$*.*

Одним из основных результатов, описывающих базовые свойства сильно непрерывных полугрупп операторов, является следующая теорема, доказанная в случае изометрических полугрупп Е. Хилле и К. Иосидой в 1948 году, а в общем случае Р.С. Филлипсом, И. Миядерой и У. Феллером в 1952 году.

Теорема 1.4.2 ([47, гл. 2, теорема 3.8])**.** *Пусть* $(A, \mathrm{D}(A))$ *- линейный оператор на банаховом пространстве* X*,* $a \in \mathbb{R}$*,* $M \geq 1$ *- постоянные. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Оператор* $(A, \mathrm{D}(A))$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $\mathbf{T}$*, для которой справедлива оценка* $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$*,* $t \geq 0$*.*

2) *Оператор* $(A, \mathrm{D}(A)) \in \mathrm{LO}\,(X)$*,* $\overline{\mathrm{D}(A)} = X$ *и* $\lambda \in \rho(A)$ *для любого* $\lambda > w$*, причём справедлива оценка* $\|[(\lambda - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*.*

3) *Оператор* $(A, \mathrm{D}(A)) \in \mathrm{LO}\,(X)$*,* $\overline{\mathrm{D}(A)} = X$ *и* $\lambda \in \rho(A)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $Re\,\lambda > w$*, причём для всех* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка* $\|R(\lambda, A)^n\| \leq M(Re\lambda - w)^{-n}$*.*

Не менее важны следующие спектральные результаты для полугрупп и их генераторов, используемые в данной работе.

Теорема 1.4.3 (о спектральном влючении, [51, теорема 2.1.1])**.** *Пусть* $\mathbf{T}$ *– сильно непрерывная полугруппа операторов на банаховом пространстве* X *с генератором* $(A, \mathrm{D}(A))$*. Тогда имеет место спектральное включение* $e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t))$*,* $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$*.*

Определение 1.4.4 ([51, § 2.4])**.** Измеримую, локально ограниченную функцию $\upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ будем называет *неквазианалитическим весом*, если $\upsilon(t) \geq 1$ и

$\upsilon(t+s) \leq \upsilon(t)\upsilon(s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и конечна величина

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\upsilon(t))}{1+t^2} dt < \infty.$$

Теорема 1.4.4 ([51, теорема 2.4.4]). *Пусть* $\mathbf{T}$ *– сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве* X *с генератором* $(A, \mathrm{D}(A))$*, удовлетворяющая оценке* $\|T(t)\| \leq \upsilon(t)$*,* $t \in \mathbb{R}$*. Тогда* $\sigma(T(t)) = \overline{\exp(t\sigma(A))}$*,* $t \in \mathbb{R}$*.*

Глава 2

Гармонический анализ векторов из банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$.

В данной главе диссертации приведены определение и некоторые свойства невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля со структурой, ассоциированной с произвольным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$. Вводится понятие генератора банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля и доказывается представление его резольвенты с помощью модульной структуры. В качестве примеров рассматриваемых банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей приводится ряд примеров однородных функциональных пространств, к которым, в частности, принадлежат пространства непрерывных, суммирумых и локально суммируемых функций. Роль генератора банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля в таких пространствах играет оператор дифференцирования. Вводятся определения спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов, для них доказываются некоторые свойства. Основные результаты главы связаны с доказательством теорем о совпадении рассмотренных спектров векторов и функций.

2.1. Банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули. Однородные пространства функций

Пусть X – бесконечномерное комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X. Пусть $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ – банахова алгебра измеримых суммируемых на $\mathbb{R}$ (классов) комплекснозначных функций со сверткой в качестве умножения, определяемой по формуле

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

Пусть $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L^1(\mathbb{R})$ - изометрическая группа операторов сдвига вида

$$(S(t)x)(s) = x(t+s). \tag{2.2}$$

Пусть банахово пространство X является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, то есть для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in X$ определено задающее модульную структуру билинейное отображение $(f, x) \mapsto fx : L^1(\mathbb{R}) \times X \to X$ и справедливо соотношение

$$\|fx\| \leq \|f\|_1 \|x\|,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in X. \tag{2.3}$$

Определение 2.1.1. Банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль X назовём *невырожденным*, если равенство $fx = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ означает, что $x = 0$.

Будем говорить, что структура банахова $L^1(\mathbb{R})$–модуля X *ассоциирована* с ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, и использовать для X обозначение (X, T), если для всех $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо равенство $T(t)(fx) = (S(t)f)x = f(T(t)x)$.

Для каждого $f \in L^1(\mathbb{R})$ введем в рассмотрение линейный оператор $T(f) : X \to X$, $T(f)x = fx$.

В дальнейшем будут рассматриваться только банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули, удовлетворяющие определению 2.1.1, то есть, невырожденные и со структурой, ассоциированной с ограниченным изометрическим представлением.

Лемма 2.1.1. *Представление, ассоциированное со структурой невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$–модуля, единственно.*

Доказательство. Пусть с невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$–модулем X ассоциированы представления $T_1, T_2 : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$. Для произвольных $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим векторы $x_1 = T_1(t)x$ и $x_2 = T_2(t)x$. Согласно определению ассоциированности справедливо равенство

$$fx_1 = f(T_1(t)x) = (S(t)f)x = f(T_2(t)x) = fx_2$$

для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$. Невырожденность модуля из равенства $f(x_1 - x_2) = 0$ дает совпадение представлений T_1, T_2 на всех $x \in X$ при любых $t \in \mathbb{R}$. Лемма доказана.

Поскольку в лемме 2.1.1 доказывается единственность представления, ассоциированного со структурой невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, то ассоциированное с его структурой представление может не конкретизироваться.

Определение 2.1.2. Вектор $x \in X$ будем называть *непрерывным относительно представления* T или T*–непрерывным*, если функция $x_T : \mathbb{R} \to X$, $x_T(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна. Замкнутое подпространство T-непрерывных векторов из X обозначим символом X_c.

Лемма 2.1.2. *Область значений* $\operatorname{Im} T(f)$ *оператора* $T(f)$ *лежит в замкнутом подпространстве* X_c *для любой функции* $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Фиксируем произвольный вектор x из (X, T) и пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$ и покажем, что функция $t \mapsto T(t)(fx) : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ непрерывна. Для этого достаточно показать её непрерывность в нуле. Согласно определению 2.1.1 ассоциированности структуры банахова модуля (X, T) с представлением T, справедливо равенство $T(t)(fx) - fx = (S(t)f - f)x$ при любых $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in X$. Из оценки (2.3) вытекает неравенство $\|T(t)fx - fx\| \le \|S(t)f - f\|_1 \|x\|$. Поскольку операторы сдвига в $L^1(\mathbb{R})$ образуют сильно непрерывную группу, то из отмеченного неравенства следует, что функция $t \mapsto T(t)(fx) : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ непрерывна и вектор $fx \in X_c$ для любых $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Лемма 2.1.3. *Для банахова* $L^1(\mathbb{R})$*–модуля* (X, T) *отображение* $f \mapsto T(f) : L^1(\mathbb{R}) \to \operatorname{End} X$ *является гомоморфизмом алгебр* $L^1(\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{End} X$, *причём* $\|T(f)\| \le \|f\|_1$.

Доказательство. Непосредственно из определения банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) следует, что для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in X$ имеет место оценка

$\|fx\| \le \|f\|_1\|x\|$. Поэтому $T(f)$ является линейным оператором из $\operatorname{End} X$, причём его норма не превосходит $\|f\|_1$.

Покажем, что $T(f*g) = T(f)T(g)$ для всех $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Для этого рассмотрим оператор $T(f*g)$ на некотором векторе $x \in X$, при этом учитывая, что $T(g)x \in X_c$ (см. лемму 2.1.6). Также учитывается лемма 2.1.2

$$T(f*g)x = (f*g)x = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)(S(-t)g)dt\right)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)(S(-t)g)xdt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)(gx)dt = T(f)(gx) = T(f)T(g)x.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.1.4. *Для невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$–модуля (X, T) подпространство T–непрерывных векторов $X_c \ne \{0\}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольный ненулевой вектор x из (X, T). Непосредственно из определения 2.1.1 невырожденности банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) следует, что для произвольного ненулевого вектора $x \ne 0$ найдётся такая функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $fx \ne 0$. Из леммы 2.1.2 вытекает, что $fx = T(f)x \in X_c$. Лемма доказана.

Лемма 2.1.5. *Подпространство T-непрерывных векторов X_c является замкнутым подпространством из банахова пространства X.*

Доказательство. Любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ векторов из X_c будет сходиться к некоторому вектору $x_0 \in X$. Непрерывность функции $t \mapsto T(t)x_0 : \mathbb{R} \to X$ достаточно проверить в точке $0 \in \mathbb{R}$ для произвольных $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\|T(t)x_0 - x_0\| \le \|T(t)(x_0 - x_n)\| + \|T(t)x_n - x_n\| + \|x_n - x_0\|.$$

Лемма доказана.

Следствием леммы 2.1.1 в свете определения 2.1.1 является следующая

Лемма 2.1.6. *Если представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ сильно непрерывно (т.е. $X = X_c$), то структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T), ассоциированная с представлением T, задаётся формулой*

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(-\tau)xd\tau, \tag{2.4}$$

для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in X$.

Доказательство. Непосредственно из формулы 2.4 следует равенство

$$T(t)(T(f)x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(t-\tau)xd\tau = f(T(t))x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s+t)T(s)xds = (S(t)f)x.$$

Лемма доказана.

Отметим, что представление, ассоциированное со структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, не обязательно сильно непрерывно, что подтверждает следующий

Пример 2.1.1. Рассмотрим банахово пространство $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, измеримых (по Бохнеру) суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (существенно ограниченных сильно измеримых в случае $p = \infty$) функций $f : \mathbb{R} \to X$ таких, что

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|f(s)\|^p ds \right)^{1/p} < \infty,\ p \in [1, \infty),$$

или $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty,\ p = \infty$. Модульная структура на $L^p(\mathbb{R}, X)$ при этом задаётся по формуле (2.4) с помощью представления $T(t)f = S(t)f$, $t \in \mathbb{R}$, определённого формулой (2.2), т.е с помощью представления группы сдвигов и операции свёртки. Хотя представление группы сдвигов $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L^\infty(\mathbb{R}, X)$ не является сильно непрерывным, модульная структура определена корректно. То же самое имеет место и для ограниченных непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to X$ из пространства $C_b(\mathbb{R}, X)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$, которые образуют подмодуль из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $L^\infty(\mathbb{R}, X)$). Рассматриваемое представление

$S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_b(\mathbb{R}, X)$ также не является сильно непрерывным, причём функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ является S-непрерывным вектором тогда и только тогда, когда функция x равномерно непрерывна (т.е. x принадлежит замкнутому подпространству $(C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{bu}(\mathbb{R}, X)$ равномерно непрерывных функций).

Определение 2.1.3. Рассмотрим семейство функций $\{f_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, из алгебры функций $L^1(\mathbb{R})$, определенное равенствами

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & t \leq 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases} \quad \text{если } Re\, \lambda > 0,$$

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -e^{\lambda t}, & t \geq 0, \end{cases} \quad \text{если } Re\, \lambda < 0.$$

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ введём в рассмотрение линейный ограниченный (согласно лемме 2.1.3) оператор $R_\lambda \in \operatorname{End} X$ вида $R_\lambda x = f_\lambda x,\ x \in X$.

Лемма 2.1.7. *Функция R вида $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ удовлетворяет определению 1.3.4 псевдорезольвенты.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$. Из определения оператора R_λ, а также в силу леммы 2.1.3 имеет место соотношение $R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} x = (f_{\lambda_1} * f_{\lambda_2}) x$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$. Преобразование Фурье функций f_λ, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, имеет вид $\widehat{f_\lambda}(z) = (\lambda - iz)^{-1}$. Тождество Гильберта для операторов R_λ, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, выполнено в силу единственности преобразования Фурье суммируемой функции и равенства

$$\widehat{f_{\lambda_1}} - \widehat{f_{\lambda_2}} = (\lambda_2 - \lambda_1) \widehat{f_{\lambda_1}} \widehat{f_{\lambda_2}}.$$

Таким образом, функция $R : \lambda \mapsto R_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, является псевдорезольвентой в смысле определения 1.3.4. Лемма доказана.

Лемма 2.1.8. *Для всякой псевдорезольвенты $\mathcal{R} : \Omega \subset \mathbb{C} \to \operatorname{End} X$ и для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ справедливо равенство $\operatorname{Im} \mathcal{R}_{\lambda_1} = \operatorname{Im} \mathcal{R}_{\lambda_2}$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 из [9] и с учетом замечания 1.3.1 псевдорезольвента является резольвентой некоторого линейного отношения $i\mathcal{A} = \lambda I - (\mathcal{R}_\lambda)^{-1}$, которое не зависит от $\lambda \in \Omega$ в силу тождества Гильберта.

$$\lambda_1 I - (\mathcal{R}_{\lambda_1})^{-1} = \lambda_2 I - (\mathcal{R}_{\lambda_2})^{-1}.$$

Зафиксируем произвольные $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$. Для каждого $y \in X$ найдётся единственный $x \in X$ такой, что $\mathcal{R}_{\lambda_2} y = x$. Но тогда из формулы $\mathcal{R}_{\lambda_1}(y + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathcal{R}_{\lambda_2} y) = \mathcal{R}_{\lambda_2} y$ следует, что $x \in \operatorname{Im} \mathcal{R}_{\lambda_1}$. Аналогично показывается, что если $x \in \mathcal{R}_{\lambda_1}$, то $x \in \operatorname{Im} \mathcal{R}_{\lambda_2}$. Лемма доказана.

Лемма 2.1.9. *Операторы $R_\lambda \in \operatorname{End} X$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, инъективны.*

Доказательство. Фиксируем $\lambda_0 \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$. Пусть $R_{\lambda_0} x_0 = f_{\lambda_0} x_0 = 0$ для некоторых $\lambda_0 \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ и $x_0 \in X$. Для всех линейных комбинаций сдвигов функции f_{λ_0}, порождающих в $L^1(\mathbb{R})$ подпространство $I_{f_{\lambda_0}}$ элементов из $L^1(\mathbb{R})$ и обнуляющих вектор x_0, справедливы равенства $(S(t) f_{\lambda_0})\, x_0 = T(t)(f_{\lambda_0} x_0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Из равенства $f(\psi x_0) = (f * \psi) x_0 = \psi(f x_0) = 0$ для произвольных $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ и $f \in I_{f_{\lambda_0}}$ вытекает, что $I_{f_{\lambda_0}}$ является идеалом в банаховой алгебре $L^1(\mathbb{R})$.

Поскольку $\widehat{f_{\lambda_0}}$ не обращается в нуль, то по теореме Винера об L^1- замкнутости (см. [14, гл. XI.4.7] или [2, гл. III.76]), замыкание идеала $I_{f_{\lambda_0}}$ совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$. Для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ выполнено равенство $f x_0 = 0$, и, вследствие свойства невырожденности $L^1(\mathbb{R})$-модуля X, согласно определению 2.1.1, $x_0 = 0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} R_\lambda = \{0\}$ и операторы R_λ инъективны при $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$. Лемма доказана.

Замечание 2.1.1. Из теоремы 1 из [9] и леммы 2.1.9 следует, что функция $\lambda \mapsto R_\lambda$ является резольвентой некоторого замкнутого оператора $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subseteq X \to X$, причём для его спектра имеет место включение $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq i\mathbb{R}$.

Определение 2.1.4. *Генератором банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля* (X, T) будем называть оператор $A = i^{-1}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ – замкнутый оператор, резольвентой которого является функция $\lambda \mapsto R_\lambda = T(f_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$.

Непосредственно из замечания 2.1.1 и определения 2.1.4 генератора модуля вытекает

Лемма 2.1.10. *Для генератора $A : \mathrm{D}(A) \subseteq X \to X$ банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) имеет место включение $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Замечание 2.1.2. Если ассоциированное со структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$- модуля (X, T) представление T сильно непрерывно, то оно обладает замкнутым генератором с плотной в X областью определения, см. [14, теорема 10.3.1].

Замечание 2.1.3. Если $X_c \neq X$, то, как отмечено в замечании 2.1.2, сужение представления $T|_{X_c}$ на X_c обладает замкнутым генератором с плотной в X_c областью определения.

Лемма 2.1.11. *Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ – сильно непрерывное изометрическое представление, ассоциированное со структурой невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T). Тогда генератор $\mathcal{A}$ группы операторов T совпадает с оператором iA, где A – генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T), и для всех $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ справедливо следующее представление резольвенты*

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = f_\lambda x.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.4.1 из [47, гл. 2, теорема 1.10] при $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\, \lambda > 0$, для всех $x \in X$ будет справедлива формула

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds = \int\limits_{-\infty}^0 e^{\lambda s} T(-s)x ds = f_\lambda x = R_\lambda x,$$

где R_λ, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ – семейство операторов из определения 2.1.3. Поскольку T является сильно непрерывным представлением, то, применяя теорему 1.10 из [47] для группы $T_1 : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, $T_1(s) = T(-s)$, $s \in \mathbb{R} \cup \{0\}$, с генератором $-iA$ и некоторого $x \in X$, получим равенство

$$R(\lambda, -\mathcal{A})x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} T_1(s)x ds = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} T(-s)x ds = f_\lambda x = R_\lambda x.$$

Из полученных равенств следует, что

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = R_\lambda,$$

где $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, т.е. резольвента $\mathcal{A}$ совпадает с резольвентой оператора iA (см. замечание 2.1.1). Таким образом, $\mathcal{A} = iA$. Лемма доказана.

Пусть $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ обозначает линейное пространство измеримых на $\mathbb{R}$ функций $x : \mathbb{R} \to X$ таких, что для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\int\limits_K \|x(t)\| dt < \infty;$$

Символом $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$ обозначается пространство Степанова таких функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, что конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \|x(t+s)\|^p ds \right)^{1/p}, \; p \in [1, \infty).$$

Определение 2.1.5. Банахово пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется *однородным,* если выполнены следующие условия:

1) пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве функций Степанова $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

2) в $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций $(S(t)x)(s) = x(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$;

3) для любой функции $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и любого $C \in \operatorname{End} X$ функция $y(t) = (Cx)(t)$ принадлежит $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и $\|y\| \le \|C\| \|x\|$;

4) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t) d\tau, \; t \in \mathbb{R},$$

принадлежит $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и выполнено неравенство $\|f * x\| \le \|f\|_1 \|x\|$;

5) для $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ из равенства $f * x = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$.

Непосредственно из определения однородного пространства следует, что оно является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, ассоциированным с представлением группы сдвигов $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$. Если $X = \mathbb{C}$, то вместо $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ будем писать $\mathscr{F}(\mathbb{R})$. Из свойства 5 следует невырожденность $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$.

Далее символом $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство.

Пример 2.1.2. Следующие банаховы пространства являются однородными:

1) пространство $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$ (см. пример 2.1.1);

2) пространство Степанова $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$;

3) простанство амальгам Винера $L^{p,q}(\mathbb{R}, X)$, $p, q \in [1, \infty)$, состоящее из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ таких, что

$$\|x\|_{L^{p,q}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int\limits_0^1 \|x(s+k)\|^p ds \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty,\ p, q \in [1, \infty),$$

$$\|x\|_{L^{p,q}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{s \in [0;1]} \|x(s+k)\| \right)^{q} \right)^{1/q} < \infty,\ p = \infty,\ q \in [1, \infty),$$

$$\|x\|_{L^{p,q}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int\limits_0^1 \|x(s+k)\|^p ds \right)^{1/p} < \infty,\ p \in [1, \infty),\ q = \infty,$$

и $\|x\|_{L^{\infty,\infty}} \equiv \|x\|_{L^\infty}$.

4) пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ (см. пример 2.1.1);

5) подпространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ равномерно непрерывных функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$;

6) подпространство $C_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ непрерывных стремящихся к 0 (исчезающих) на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$);

7) подпространство $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (т.е. функций из $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$, для которых выполняется условие $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} \|x(t+\tau) - x(\tau)\| = 0$, для любого $t \in \mathbb{R}$, т.е $S(t)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$);

8) подпространство $C_\omega(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ ω-периодических функций, $\omega \in \mathbb{R}_+$;

9) пространства $C_b^{(k)}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{N}$, k раз непрерывно дифференцируемых функций с ограниченной k-ой производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty < \infty$;

10) пространства Гёльдера $C_b^{(k),\alpha}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1]$,

$$C_b^{(k),\alpha} = \left\{ x \in C_b^{(k)}(\mathbb{R}, X) : \|x^{(k)}\|_{C_b^{(0),\alpha}} = \sup_{t\neq s\in\mathbb{R}} \frac{\|x(t) - x(s)\|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\},$$

$$\|x\|_{C_b^{(k),\alpha}} = \|x\|_{C_b^{(k)}} + \|x^{(k)}\|_{C_b^{(0),\alpha}}.$$

Любое однородное пространство $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем $(\mathscr{F}, S)$, ассоциированным с изометрическим представлением $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{F}$ вида (2.2). С учётом определения 2.1.4 и того факта, что генератором группы операторов сдвига является оператор дифференцирования, то оператор дифференцирования $-i\frac{d}{dt} = D : \mathrm{D}(D) \subseteq \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ является генератором $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{F}, S)$.

2.2. Спектр Бёрлинга вектора

Впервые определение спектра Бёрлинга функции из $L^\infty(\mathbb{R})$ с использованием $L^1(\mathbb{R})$-замкнутости, введено в [44]. Свойства спектра Бёрлинга рассматривались в [14, гл. XI.4].

Определение 2.2.1. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функций из $L^\infty(\mathbb{R})$ $L^1(\mathbb{R})$–сходится к $x_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, если для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ выполнено свойство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |(x_n(t) - x_0(t))f(t)|dt \to 0, \ n \to \infty.$$

Подпространство $L \subset L^\infty(\mathbb{R})$ будем называть $L^1(\mathbb{R})$–замкнутым в $L^\infty(\mathbb{R})$, если любая $L^1(\mathbb{R})$–сходящаяся последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из подпространства L имеет свой предел в подпространстве L. *Спектром Бёрлинга* (или *спектральным множеством*) функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ называется множество всех характеров группы $\mathbb{R}$ (функций $t \mapsto e^{it\lambda}$, $t, \lambda \in \mathbb{R}$), содержащихся в $L^1(\mathbb{R})$–замкнутом подпространстве пространства $L^\infty(\mathbb{R})$, порожденном сдвигами функции f.

Приведённому определению спектра Бёрлинга соответствует следующее более общее

Определение 2.2.2. *Спектром Бёрлинга* вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) называется множество

$$\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для всех } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ таких, что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0\},$$

являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ существует } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ со свойством } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \text{ такая, что } fx = 0\}.$$

Пример 2.2.1. Банахова алгебра $L^1(\mathbb{R})$ со свёрткой в качестве умножения является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, удовлетворяющим определению 2.1.1. Покажем, что спектр Бёрлинга $\Lambda(g)$ функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ совпадает с $\operatorname{supp} \widehat{g}$. Пусть $\lambda_0 \notin \operatorname{supp} \widehat{g}$. Поскольку $\operatorname{supp} \widehat{g}$ – замкнуто, то $\widehat{g}(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in U_1$, где U_1 – некоторая открытая окрестность точки λ_0. Тогда для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) = 0$ на множестве $\mathbb{R}\backslash U_1$ справедливо равенство $\widehat{f}\,\widehat{g} \equiv 0$. Следовательно, $f * g = 0$ почти всюду и точка $\lambda_0 \notin \Lambda(g)$. Пусть теперь $\lambda_0 \notin \Lambda(g)$, тогда выберем такую функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $f * g = 0$. Возьмём преобразование Фурье от обеих частей последнего равенства и получим $\widehat{f}\,\widehat{g}=0$. Поскольку $\widehat{f}\in C_0(\mathbb{R})$ для функции $f\in L^1(\mathbb{R})$, то в некоторой открытой окрестности $U_2\subset\mathbb{R}$ точки λ_0 функция $\widehat{f}$ отлична от нуля. Но тогда, в силу равенства нулю функции $\widehat{f}\,\widehat{g}$ в открытой окрестности U_2, число λ_0 не содержится в носителе $\operatorname{supp}\widehat{g}$ преобразования Фурье функции g. Таким образом, $\Lambda(g)=\operatorname{supp}\widehat{g}$.

Используемые далее результаты из спектральной теории банаховых модулей можно найти в [7, 8, 24, 43, 46].

Лемма 2.2.1. *Пусть (X,T) - банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль, удовлетворяющий условиям определения 2.1.1. Справедливы следующие утверждения:*

1) *спектр $\Lambda(x)$ замкнут для любого вектора $x\in X$ и $\Lambda(x)=\emptyset$ тогда и только тогда, когда $x=0$;*

2) *$\Lambda(Ax+By)\subseteq\Lambda(x)\cup\Lambda(y)$ для всех операторов $A,B\in\operatorname{End}X$, перестановочных с операторами $T(f)$, $f\in L^1(\mathbb{R})$;*

3) *$\Lambda(fx)\subseteq\operatorname{supp}\widehat{f}\cap\Lambda(x)$ для всех $x\in X$, $f\in L^1(\mathbb{R})$;*

4) *если функция $f\in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}=0$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx=0$;*

5) *если функция $f\in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}=1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx=x$.*

Доказательство. Докажем свойство 1). Покажем, что дополнение к спектру Бёрлинга $\Lambda(x)$ вектора $x\in X$ открыто. Пусть $\lambda_0\notin\Lambda(x)$, $x\in X$, тогда по определению 2.2.2 найдется $f\in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda_0)\neq 0$ такая, что справедливо равенство $fx=0$. Поскольку преобразование Фурье $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ функции f из $L^1(\mathbb{R})$ является непрерывной функцией, то функция f будет иметь отличное от нуля преобразование Фурье и в некоторой открытой окрестности

U точки λ_0, т.е. окрестность U входит в $\mathbb{R}\backslash\Lambda(x)$. Таким образом, множество $\mathbb{R}\backslash\Lambda(x)$ открыто, и поэтому $\Lambda(x)$ – замкнутое множество.

Пусть $\Lambda(x) = \emptyset$. Тогда для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует $f \in L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, а $fx = 0$. Рассмотрим линейную оболочку сдвигов таких функций и получим двусторонний идеал I_x функций, обнуляющих вектор x и таких, что не существует ни одной точки $\lambda \in \mathbb{R}$, в которой равняются нулю преобразования Фурье всех функций из I_x. Согласно теореме Винера об L^1-замкнутости ([2, гл. III.76]) идеал I_x совпадает со всем пространством $L^1(\mathbb{R})$. В силу невырожденности банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) получаем, что $x = 0$.

Обратно, если $x = 0$, то $fx = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, но при этом для $x = 0$ справедливо $fx = 0$. Таким образом, $\Lambda(x) = \emptyset$.

Докажем свойство 2). Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$, тогда существуют функции $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ такие, что справедливы равенства $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$, $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и $fx = 0$, $gy = 0$. Пусть функция $h = f * g$, тогда $\widehat{h}(\lambda_0) = \widehat{f}(\lambda_0)\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и справедливо равенство

$$h(Ax + By) = hAx + hBy = T(h)Ax + T(h)By =$$

$$= AT(h)x + BT(h)y = A(f * g)x + B(f * g)y = Ag(fx) + Bf(gy) = 0.$$

Таким образом, $\lambda_0 \notin \Lambda(Ax + By)$, и поэтому имеет место включение $\Lambda(Ax + By) \subseteq \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$.

Докажем свойство 3). Пусть $\lambda_0 \notin \operatorname{supp} \widehat{f}$, тогда найдётся такая открытая окрестность U точки λ_0, что $U \cap \operatorname{supp} \widehat{f} = \emptyset$. Рассмотрим функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\operatorname{supp} \widehat{g} \subset U$ и $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$. В силу того, что $\widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) = 0$, справедливо равенство $g(fx) = (f * g)x = 0$. Таким образом, $\lambda_0 \notin \Lambda(fx)$.

Пусть теперь $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Тогда, по определению 2.2.2, существует функция $g \in L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и $gx = 0$. Таким образом, получим $g(fx) = (f * g)x = f(gx) = 0$, т.е. $\lambda_0 \notin \Lambda(fx)$.

Доказательство свойства 4) вытекает из утверждения 3) данной леммы.

Докажем свойство 5). Фиксируем такую функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{f} = 1$ в некоторой окрестности U спектра Бёрлинга $\Lambda(x)$ вектора x. Поскольку для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ имеет место равенство $\widehat{g} - \widehat{f}\widehat{g} = 0$ в окрестности U спектра Бёрлинга $\Lambda(x)$ вектора x, то $g(x - fx) = (g - f * g)x = 0$ в силу свойства 4) данной леммы. Из невырожденности банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля следует равенство $fx = x$. Лемма доказана.

Определение 2.2.3. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ – замкнутое подмножество. Линейное подпространство $X(\Delta) = \{x \in X : \Lambda(x) \subseteq \Delta\}$ называется *спектральным подмодулем.*

Символом X_{comp} обозначим подмодуль из $L^1(\mathbb{R})$–модуля X, состоящий из всех векторов $x \in X$ с компактным спектром Бёрлинга.

Обозначим $X_\Phi = \{fx : x \in X, f \in L^1(\mathbb{R})\}$, т.е. подмодуль векторов, допускающих факторизацию.

Отметим, что спектральный подмодуль $X(\Delta)$ является замкнутым подмодулем из (X, T).

Определение 2.2.4. Ограниченная направленность $\{e_\alpha\} \subset L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \Omega$, где Ω – некоторое направленное множество, называется *ограниченной аппроксимативной единицей (о. а. е.)* алгебры $L^1(\mathbb{R})$, если выполнены следующие условия

1) $\widehat{e}_\alpha(0) = 1$ для всех $\alpha \in \Omega$;

2) $\lim\limits_{\alpha \in \Omega} e_\alpha * f = f$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Для дальнейших рассуждений потребуется доказанная в [8] следующая

Лемма 2.2.2. *Имеют место равенства*

$$X_c = X_\Phi = \overline{X_{comp}} = \{x \in X : \lim_{\alpha \in \Omega} e_\alpha x = x \text{ для любой о.а.е. } \{e_\alpha\} \text{ из } L^1(\mathbb{R})\}.$$

Лемма 2.2.3. *Пусть (X, T) - банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль, $A : \mathrm{D}(A) \subseteq X \to X$ – его генератор, $x \in X_{comp}$ – вектор с компактным спектром Бёрлинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $x \in \mathrm{D}(A)$ и если функция $h \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{h}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$ вектора $x \in X_{comp}$, тогда $hx = Ax$;

2) если функция $g_0 \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{g_0}(\lambda) = (z - i\lambda)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \backslash i\Lambda(x)$, в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$ вектора $x \in X_{comp}$, тогда $g_0 x = R(z, iA)x$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $\widehat{h}(\lambda) = \lambda$ на некоторой окрестности $U_0 \subset \mathbb{R}$ спектра Берлинга $\Lambda(x)$ вектора x. Рассмотрим бесконечно непрерывно дифференцируемую функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$, обладающую производной первого порядка из $L^1(\mathbb{R})$ и такую, что $\widehat{g} \equiv -i$ на U_0. При таких условиях, а также с учётом леммы 2.1.11 и того, что $igx = x$, будет иметь место равенство

$$\lim_{t \to \infty} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{T(t)(igx) - igx}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{S(t)ig - ig}{t} x = ig'x = iAx,$$

из которого следует, что $x \in \mathrm{D}(A)$.

Из равенства $\widehat{g}'(\lambda) = i\lambda\widehat{g}(\lambda) = \lambda$ в окрестности U_0, а также из равенства $g'x = Ax$ следует, что $hx = g'x = Ax$.

Докажем утверждение 2). Пусть $\widehat{g_0}(\lambda) = (z - i\lambda)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \backslash i\Lambda(x)$, в некоторой окрестности спектра Бёрлинга $\Lambda(x)$ вектора x. Рассмотрим функцию $h_0 \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{h_0}(\lambda) = z - i\lambda$ в некоторой окрестности спектра Берлинга $\Lambda(x)$, тогда согласно свойству 1) из леммы 2.2.3 и свойству 5) из леммы 2.2.1 справедливо равенство $h_0 x = (zI - iA)x$. Таким образом, $\widehat{g_0}\widehat{h_0} = 1$ в некоторой окрестности U спектра Бёрлинга $\Lambda(x)$ вектора x, а также имеет место равенство

$$h_0(g_0 x) = g_0(h_0 x) = T(g_0)(zI - iA)x = (zI - iA)T(g_0)x = x,$$

из которого следует, что $g_0 x = (zI - iA)^{-1}x$. Лемма доказана.

2.3. Спектр Карлемана вектора

Согласно книге [41, гл. 4.6, стр. 295], спектр Карлемана функции из $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$, где X – банахово пространство, даётся в виде определения 2.3.1, приведённого ниже для $L^\infty(\mathbb{R}, X) \supset C_{bu}(\mathbb{R}, X)$. Также в книге [41] рассматриваются некоторые свойства спектра Карлемана функций из $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$ и его приложения к теории сильно непрерывных полугрупп операторов.

Определение 2.3.1. Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$, функцию $\varphi_f : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to X$ определим формулой

$$\varphi_f(\lambda) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, & Re\,\lambda > 0; \\ -\int\limits_0^\infty e^{\lambda t} f(-t)dt, & Re\,\lambda < 0. \end{cases}$$

Функция φ_f голоморфна на $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$ и называется *преобразованием Карлемана* функции f. *Спектром Карлемана* функции f называется множество таких вещественных чисел $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, для которых не существует голоморфного продолжения функции φ_f в некоторую окрестности точки $i\lambda_0$.

В [14, гл. XI.4, теорема 24] доказано совпадение спектрального множества (см. определение 2.2.1), определённой на $\mathbb{R}$ комплекснозначной функции со спектром Карлемана данной функции, причём свойства спектра Карлемана функции даны на основе спектрального множества этой функции.

Всюду далее в диссертации используется следующее определение спектра Карлемана векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей.

Определение 2.3.2. Пусть (X, T) – банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль. *Спектром Карлемана вектора* $x \in X$ будем называть множество $\Lambda_C(x)$ таких чисел $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что функция

$$R_x : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to X, \quad R_x(\lambda) = f_\lambda x, \quad x \in X,$$

не имеет голоморфного продолжения в некоторую окрестность точки $i\lambda_0 \in i\mathbb{R}$. Семейство функций f_λ взято из определения 2.1.3.

Определение 2.3.3. Множество $\Lambda_C(X) = \overline{\bigcup_{x \in X} \Lambda_C(x)}$ будем называть *спектром Карлемана банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T).*

Совпадение определений 2.3.1 и 2.3.2 для функций из $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$ фактически доказано в монографии [41, лемма 4.6.8].

Лемма 2.3.1. *Для функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$ спектры Карлемана из определений 2.3.1 и 2.3.2 совпадают.*

Доказательство. Обратимся к доказательству леммы 4.6.8 из монографии [41], в которой утверждение данной леммы доказано для функции f, принадлежащей пространству $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$. Из анализа доказательства цитируемой леммы следует, что достаточно установить принадлежность функции $f_\lambda * f$ пространству $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$. Непосредственно из определения свёртки следует, что $f_\lambda * f$ является непрерывной ограниченной функцией, причём $\|f_\lambda * f\|_{C_{bu}} \leq \|f\|_\infty \|f_\lambda\|_1$. Равномерная непрерывность функции $f_\lambda * f$ непосредственно следует из сильной непрерывности оператора сдвига в банаховой алгебре $L^1(\mathbb{R})$. Действительно, это свойство вытекает из следующих равенств и оценки

$$\|S(t_1)(f_\lambda * f) - S(t_2)(f_\lambda * f)\|_{C_{bu}} \leq \|((S(t_1) - S(t_2))f_\lambda) * f\|_{C_{bu}} \leq$$

$$\leq \|(S(t_1) - (t_2))f_\lambda\|_1 \|f\|_\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3.1 могла быть доказана, используя лемму 4.7.9 из монографии [41]. При таком доказательстве используются те же замечания, что и при доказательстве леммы 2.3.1.

Таким образом, когда представление T сильно непрерывно, спектр Карлемана вектора $x \in X$ совпадает со спектром Карлемана функции x_T из определения 2.1.2.

Пример 2.3.1. Рассмотрим спектр Карлемана функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ как элемента банахова модуля $L^1(\mathbb{R})$ и покажем, что $\Lambda_C(g) = \operatorname{supp} \widehat{g}$. Рассмотрим функцию $z \mapsto f_z * g : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$. Для каждого $z \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $(f_z * g)\hat{}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)(z - i\lambda)^{-1}$, причём справедлива оценка $|(f_z * g)\hat{}(\lambda)| \leq \|f_z * g\|_1$. Если точка $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \operatorname{supp} \hat{g}$, то в некоторой её открытой окрестности $U_0 \subset \mathbb{R}$ выполнено равенство $\hat{g} \equiv 0$. Для произвольной точки $\lambda \in U_0$ имеет место равенство

$$\widehat{g}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt = 0,$$

из которого следует, что

$$\varphi_g(i\lambda) = \int\limits_{0}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt = - \int\limits_{-\infty}^{0} g(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

то есть функция φ_g непрерывна на множестве $iU_0 \subset i\mathbb{R}$. Применяя теорему Мореры [40, гл. II.5, теорема 3], получаем, что функция φ_g голоморфна в окрестности iU_0 точки $i\lambda_0$, и, с учётом леммы 2.3.1, справедливо $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \Lambda_C(x)$. С другой стороны, если $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \Lambda_C(g)$, то функция $z \mapsto f_z * g$ допускает голоморфное продолжение в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{C} \backslash i\Lambda_C(g)$ точки $i\lambda_0$ и на любом компакте $K \subset U$ ограничена в силу теоремы Вейерштрасса. Но из формулы преобразования Фурье функции f_z, а также оценки преобразования Фурье функции $f_z * g$ следует, что $\widehat{g} \equiv 0$ в некоторой окрестности $\mathbb{R} \cap i^{-1}U$ точки λ_0. Таким образом, $\operatorname{supp} \hat{g} \cap (\mathbb{R} \backslash \Lambda_C(g)) = \emptyset$ и $\operatorname{supp} \hat{g} = \Lambda_C(g)$.

Лемма 2.3.2. *Для спектра Карлемана вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) с генератором A справедливы следующие свойства*

1) *$\Lambda_C(x)$ - замкнутое подмножество из спектра $\sigma(A)$ генератора A банахова $L^1(\mathbb{R})$ - модуля (X, T) ;*

2) *$\Lambda_C(\alpha x + \beta y) \subset \Lambda_C(x) \cup \Lambda_C(y)$ для любых векторов $x, y \in X$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;*

3) $\Lambda_C(Bx) \subseteq \Lambda_C(x)$ *для любого вектора* $x \in X$ *и любого оператора* $B \in \mathrm{End}\, X$*, перестановочного с оператором* A *(т.е.* $B(\mathrm{D}(A)) \subset \mathrm{D}(A)$ *и* $ABx = BAx$ *для любого* $x \in \mathrm{D}(A)$*) ;*

4) $\Lambda_C(fx) \subseteq \mathrm{supp}\, \widehat{f} \cap \Lambda_C(x)$ *для любого вектора* $x \in X$ *и любой функции* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *;*

5) $\Lambda_C(x) = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0 \in X$ *.*

Доказательство. Докажем свойство 1). Поскольку каждая точка из дополнения $\mathbb{R}\backslash\Lambda_C(x)$ к спектру Карлемана входит в это дополнение вместе с некоторой окрестностью, то множество $\mathbb{R}\backslash\Lambda_C(x)$ открыто, а множество $\Lambda_C(x)$ - замкнуто.

Вложенность спектра Карлемана вектора $x \in X$ в спектр генератора A $L^1(\mathbb{R})$-модуля X следует из леммы 2.1.11 в силу голоморфности резольвенты $R(\lambda, iA)$ на резольвентном множестве $\rho(iA)$.

Докажем свойство 2). Согласно свойству линейности голоморфных функций и равенству $R_{(\alpha x+\beta y)} = \alpha R_x + \beta R_y$, в окрестности любой точки из множества $i\mathbb{R}\backslash(\Lambda_C(x) \cup \Lambda_C(y))$ функция $R_{(\alpha x+\beta y)}$ будет иметь голоморфное продолжение, таким образом, $\Lambda_C(\alpha x + \beta y) \subset \Lambda_C(x) \cup \Lambda_C(y)$.

Докажем свойство 3). Покажем, что группа T перестановочна с указанным оператором B. Для этого покажем, что резольвента генератора iA перестановочна с оператором B.

Для всякого $x \in X$ и $\lambda \in \rho(iA)$ будет справедливо равенство $(\lambda I - iA)R(\lambda, iA)x = x$. Применим к обеим частям равенства оператор $R(\lambda, iA)B$. Из равенства $R(\lambda, iA)B(\lambda I - iA)R(\lambda, iA)x = R(\lambda, iA)Bx$ и того, что оператор B перестановочен с генератором A, следует, что $BR(\lambda, iA)x = R(\lambda, iA)Bx$.

Данное равенство, в силу леммы 2.1.11, означает, что $R_{Bx} \equiv BR_x$ на $\mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(x)$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Поскольку $B \in \mathrm{End}\, X$ – ограниченный оператор, то функция BR_x голоморфна как минимум в тех же точках оси $i\mathbb{R}$, что и функция R_x. Таким образом, $\Lambda_C(Bx) \subset \Lambda_C(x)$.

Докажем свойство 4). Фиксируем произвольную функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ и пусть $\lambda_0 \notin \operatorname{supp} \widehat{f}$. Тогда $\lambda_0 \notin \Lambda_C(f)$ согласно примеру 2.3.1, т.е. функция $z \mapsto f_z * f : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$ допускает голоморфное расширение в некоторую окрестность $U(z_0)$ точки $z_0 = i\lambda_0$. В силу леммы 2.1.3 отображение $f \mapsto T(f) : L^1(\mathbb{R}) \to \operatorname{End} X$ является гомоморфизмом алгебр и $\|T(f)\| \leq \|f\|_1$. Поэтому композиция отображения $z \mapsto f_z * f$ и данного гомоморфизма алгебр даст отображение $z \mapsto T(f_\lambda * f) : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, которое будет иметь голоморфное продолжение в окрестности как минимум тех же точек, что и отображение $z \mapsto f_z * f$. Таким образом, из того, что $\lambda_0 \notin \operatorname{supp} \widehat{f} = \Lambda_C(f)$, будет следовать, что $\lambda_0 \notin \Lambda_C(fx)$ для любого $x \in X$, т.е. $\Lambda_C(fx) \subseteq \operatorname{supp} \widehat{f}$.

Включение $\Lambda_C(fx) \subseteq \Lambda_C(x)$ следует из утверждения 3 данной леммы, а также того факта, что $fx = T(f)x$, где $T(f) \in \operatorname{End} X$ для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ согласно лемме 2.1.3.

Докажем свойство 5). Если спектр Карлемана вектора $x \in X$ пуст, то функция R_x голоморфна при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $R_x(\lambda) = f_\lambda x$ и $\|f_\lambda x\| \leq \|f_\lambda\|_1 \|x\|$, а $\|f_\lambda\|_1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-|\lambda| t} dt = 1/|\lambda|$ при $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, то $\|R_x(\lambda)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. По теореме Лиувилля [13, глава III.14] для голоморфной на $\mathbb{C}$ функции R_x получаем, что $R_x \equiv 0$. Поскольку преобразование Фурье $\widehat{f_\lambda}(z) = (\lambda - iz)^{-1}$, $\lambda \neq 0$, не обращается в нуль, то по теореме Винера об L^1- замкнутости (см. [14, гл. XI.4.7] или [2, гл. III.76]) линейные комбинации сдвигов функции f_λ, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, плотны в $L^1(\mathbb{R})$ и для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ выполнено равенство $fx = 0$. Из невырожденности банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) следует, что $x = 0$.

Обратно, если $x = 0 \in X$, тогда функция R_x тождественно равна нулю и всюду для $Re\, \lambda = 0$ имеет голоморфное продолжение. Это означает, что $\Lambda_C(x) = \emptyset$.

2.4. Локальный спектр вектора

В третьем томе монографии Н. Данфорда и Дж.Т. Шварца [15, гл. XV.2] определено и подробно рассмотрено свойство однозначного распространения для ограниченных операторов, в частности, для спектральных операторов, необходимо обладающих этим свойством. С использованием этого свойства дано определение локального спектра вектора относительно ограниченного оператора. Также приведен критерий спектральности для ограниченного оператора в [15, гл. XVI.4.4] и пример Какутани неспектрального оператора, не обладающего свойством однозначного распространения, см. [15, гл. XV.2.6].

В [41, гл. 4.6] локальный спектр вектора $x \in X$ рассматривается как спектр генератора сужения сильно непрерывной группы операторов $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ на линейную оболочку векторов из множества $\{T(t)x, t \in \mathbb{R}\}$. Там же рассматривались вопросы сравнения спектра Карлемана функций из $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$ и их локального спектра как векторов относительно генератора группы сдвигов в $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 2.4.1. Будем говорить, что замкнутый оператор $B : \mathrm{D}(B) \subseteq Y \to Y$ *обладает свойством однозначного распространения,* если для любой голоморфной функции $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathrm{D}(B) \subseteq Y$ из равенства $(B - \lambda I)f(\lambda) = 0$, $\lambda \in U$, следует, что $f \equiv 0$.

Пусть оператор $B : \mathrm{D}(B) \subseteq Y \to Y$ обладает свойством однозначного распространения. Множество точек $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, для которых существует открытая окрестность $U_0 = U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U_0 \to \mathrm{D}(B) \subseteq Y$ такая, что $f(\lambda) \in \mathrm{D}(B) \subseteq Y$, и выполнено равенство $(B - \lambda I)f(\lambda) = y$, $y \in Y$, для всех $\lambda \in U_0$, называется *локальным резольвентным множеством вектора* $y \in Y$ и обозначается $\rho_B(y)$. Функцию f будем называть *локальной резольвентой вектора* y относительно оператора B в окрестности точки λ_0.

Локальный спектр вектора $y \in Y$ относительно оператора B - это множество $\sigma_B(y) = \mathbb{C} \backslash \rho_B(y)$.

Для ограниченных операторов свойство однозначного распространения определено и подробно рассмотрено в [15, гл. XV.2], на основе понятия спектральности оператора выделено достаточное условие для того, чтобы ограниченный оператор обладал свойством однозначного распространения, [15, гл. XV.3, п.2]. Также приведен критерий спектральности для ограниченного оператора в [15, гл. XVI.4, п.4] и пример Какутани неспектрального оператора, не обладающего свойством однозначного распространения, см. [15, гл. XV.2, п.6].

Лемма 2.4.1. *Справедливы следующие свойства локального спектра $\sigma_B(x)$ вектора $x \in X$ относительно замкнутого оператора $B : \mathrm{D}(B) \subseteq X \to X$:*

1) $\sigma_B(x)$ *- замкнутое подмножество из* $\sigma(B)$ *;*

2) *если* $B \in \mathrm{End}\, X$*, то* $\sigma_B(x) = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$ *;*

3) $\sigma_B(\alpha x + \beta y) \subset \sigma_B(x) \cup \sigma_B(y)$ *для любых векторов* $x, y \in X$ *и для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *;*

4) $\sigma_B(Cx) \subseteq \sigma_B(x)$ *для любого вектора* $x \in X$ *и любого оператора* $C \in \mathrm{End}\, X$*, перестановочного с* B *(т.е.* $C(\mathrm{D}(B)) \subset \mathrm{D}(B) \subseteq X$ *и* $BCx = CBx$ *для любого* $x \in \mathrm{D}(B) \subseteq X$ *) .*

Доказательство. Докажем свойство 1). Множество $\sigma_B(x)$ замкнуто по определению. Пусть $\lambda_0 \notin \sigma(B)$, тогда для всех $x \in X$ и для всех окрестностей $U(\lambda_0) \subset \rho(B)$ точки λ_0 найдется голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$, $f(\lambda) = -R(\lambda, B)x$. Для такой функции f будет справедливо равенство $(B - \lambda I)f(\lambda) = x$, то есть $\lambda_0 \notin \sigma_B(x)$. Следовательно, $\sigma_B(x) \subset \sigma(B)$.

Докажем свойство 2). Если $x = 0$, то, согласно свойству однозначного распространения, для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и голоморфной функции $f \equiv 0 \in X$ будет выполнено равенство $(B - \lambda I)f(\lambda) = 0 = x$, т.е. $\lambda \in \rho_B(x)$ и $\sigma_B(x) = \emptyset$.

Теперь, если $\sigma_B(x) = \emptyset$, то $\rho_B(x) = \mathbb{C}$. Для каждой $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ в этом случае возможно найти такие окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и такую функцию

$f : U(\lambda_0) \to \mathrm{D}(B)$, что $(B - \lambda I)f(\lambda) = x$. Поскольку на каждом пересечении окрестностей различных точек найденные функции будут совпадать в силу свойства однозначного распространения, то полученная функция единственна, голоморфна на $\mathbb{C}$ и $-R(\lambda, B)x = f(\lambda)$. Поскольку оператор $R(\lambda, B)$ является ограниченным на линейной оболочке вектора x, то имеет место равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|f(\lambda)\| = 0$. По теореме Лиувилля [13, глава III.14] для голоморфной на $\mathbb{C}$ функции f получаем, что $f \equiv 0$. Из этого следует, что $x = 0$.

Докажем свойство 3). Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash(\sigma_B(x) \cup \sigma_B(y))$, тогда существует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и найдутся такие функции $f : U(\lambda_0) \to \mathrm{D}(B)$ и $g : U(\lambda_0) \to \mathrm{D}(B)$, что $(B-\lambda I)f(\lambda) = x$, $(B-\lambda I)g(\lambda) = y$ для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$. Тогда для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ справедливо равенство $(B - \lambda I)(\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)) = \alpha x + \beta y$, то есть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_B(\alpha x + \beta y)$.

Докажем свойство 4). Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_B(x)$, тогда найдется некоторая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U(\lambda_0) \to \mathrm{D}(B) \subseteq X$ такая, что $(B - \lambda I)f(\lambda) = x$. Применим к обеим частям равенства оператор $C \in \operatorname{End} X$, перестановочный с оператором B в указанном выше смысле. $C(B - \lambda I)f(\lambda) = Cx$. В силу перестановочности оператора C с оператором B для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ получаем $(B - \lambda I)Cf(\lambda) = Cx$. Заметим, что функция $\lambda \mapsto Cf(\lambda)$ голоморфна в окрестности $U(\lambda_0)$, поэтому $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_B(Cx)$. Таким образом доказано, что $\sigma_B(Cx) \subset \sigma_B(x)$.

Лемма 2.4.2. *Генератор A банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) обладает свойством однозначного распространения.*

Доказательство. В силу леммы 2.1.10 справедливо включение $\rho(A) \supseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, поэтому для каждой голоморфной функции $f : \mathbb{C} \to \mathrm{D}(A)$ и каждого $\lambda \in \rho(A)$ из равенства $(A - \lambda I)f(\lambda) = 0$ следует, что $f(\lambda) = (A - \lambda I)0 = 0$. Поскольку $\overline{\rho(A)} = \mathbb{C}$, а функция f в том числе непрерывна, то $f \equiv 0$ и оператор A обладает свойством однозначного распространения. Лемма доказана.

2.5. Сравнение спектров

С учётом определения спектра Карлемана вектора 2.3.2 возможно сформулировать леммы 2.1.7, 2.1.9 и 2.1.11 в более точном варианте. В следующих утверждениях рассматривается семейство операторов $R_\lambda \in \operatorname{End} X$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$, введённое в определении 2.1.3.

Лемма 2.5.1. *Функция R вида $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ допускает голоморфное расширение до функции $R : \mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X) \to \operatorname{End} X$, обозначаемой далее тем же символом и удовлетворяющей определению 1.3.4 псевдорезольвенты.*

Доказательство. Свойство псевдорезольвенты функции R в точках $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$ следует из леммы 2.1.7.

Теперь зафиксируем точку $\lambda_0 \in i(\mathbb{R}\backslash\Lambda_C(X))$, и построим оператор $R_{\lambda_0} \in \operatorname{End} X$ следующим образом. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из множества $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$, такую, что $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$. Тогда, в силу голоморфности для каждого $x \in X$ функций

$$\lambda \mapsto R_\lambda x : \mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X) \to X,$$

последовательность $R_{\lambda_n}x \to R_{\lambda_0}x$ при $n \to \infty$. Из сильной сходимости последовательности линейных операторов $\{R_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ следует линейность предельного отображения R_{λ_0}. Поскольку последовательность $\{R_{\lambda_n}x\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится для любого $x \in X$, то она ограничена. Также при $Re\,\lambda_n \neq 0$ операторы R_{λ_n}, $n \in \mathbb{N}$, являются линейными и ограниченными, т.е. непрерывными. По теореме Банаха-Штейнгауза [25, гл. 2, теорема 2.5] последовательность $\{R_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно ограниченна в $\operatorname{End} X$. Следовательно, существует ограниченное множество V в пространстве X такое, что для шара единичного радиуса $B(0,1)$ из X справедливо включение $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} R_{\lambda_n}(B(0,1))} \subseteq V$. Поскольку для любого $x \in X$ последовательность $R_{\lambda_n}x \to R_{\lambda_0}x$, при $n \to \infty$, то для $x \in B(0,1)$ предельный элемент $R_{\lambda_0}x \in \overline{\{R_{\lambda_n}x\}} \subseteq V$. Таким образом, $R_{\lambda_0}(B(0,1)) \subseteq V$ и поэтому $R_{\lambda_0} \in \operatorname{End} X$. Это означает, что функция R допускает расширение на $i(\mathbb{R}\backslash\Lambda_C(x))$.

Выберем такую величину $r > 0$, что множество $B(\lambda_0, r) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda - \lambda_0| < r\}$ включено в область $\mathbb{C} \setminus i\Lambda_C(X)$, например, $r = \inf_{\lambda \in i\Lambda_C(X)} |\lambda - \lambda_0|$. Пусть ε – произвольное $\varepsilon \in (0, r)$. Так как функции $\lambda \mapsto R_\lambda x$, $x \in X$, голоморфны, то они непрерывны, а подмножество $\overline{B(\lambda_0, r-\varepsilon)}$ комплексной плоскости замкнуто и ограничено, т.е. компактно, то по теореме Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте каждая функция $\lambda \mapsto R_\lambda x$, $x \in X$, будет ограничена на $\overline{B(\lambda_0, r-\varepsilon)}$. Заметим, что для каждого $x \in X$ множество $\{R_\lambda x, \lambda \in \overline{B(\lambda_0, r-\varepsilon)}\}$ будет ограничено, поэтому к семейству линейных ограниченных операторов $\{R_\lambda, \lambda \in \overline{B(\lambda_0, r-\varepsilon)}\}$ также можно применить теорему Банаха-Штейнгауза [25, гл. 2, теорема 2.5]. Данное семейство операторов будет равностепенно непрерывно, а также равномерно ограничено на любом ограниченном множестве, в соответствии с теоремой [25, гл. 2, теорема 2.4]. Таким образом, существует константа $M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)} > 0$ такая, что для всех $\lambda \in \overline{B(\lambda_0, r-\varepsilon)}$ справедлива оценка $\|R_\lambda\| \leq M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)}$.

Покажем теперь голоморфность функции R в окрестности точки λ_0. Поскольку для всех $x \in X$ функции $\lambda \mapsto R_\lambda x$ голоморфны в области $B(\lambda_0, r)$, то для них в окрестности точки λ_0 имеет место разложение в ряд

$$R(\lambda)x = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n C_n x, \text{ где } C_n x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{R(z)x}{(z-\lambda_0)^{n+1}} dz,$$

причём $C_n x = R_x^{(n)}(\lambda_0)/n!$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\gamma \in B(\lambda_0, r)$ - кусочно-гладкий контур без самопересечений, ограничивающий область, содержащую в своей внутренности точку λ_0. Определим, при каких $\lambda \in B(\lambda_0, r)$ данный ряд сходится. Для этого оценим коэффициенты ряда.

Поскольку интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкому контуру, лежащему в области голоморфности функции, не зависит от выбора контура, то будем считать, что $\gamma = \partial B(\lambda_0, (r-\varepsilon))$, т.е. является границей круга

$\overline{B(\lambda_0,(r-\varepsilon))}$ для некоторого $\varepsilon \in (0,r)$. Тогда для каждого $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\|C_n x\| \leq \frac{\sup\limits_{\lambda \in B(\lambda_0,(r-\varepsilon))} \|R(\lambda)\|\|x\|}{(r-\varepsilon)^n}.$$

Как ранее было доказано, для всех $\lambda \in \overline{B(\lambda_0,(r-\varepsilon))}$ справедлива оценка $\|R_\lambda\| \leq M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)}$. Таким образом, $\|C_n x\| \leq M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)}\|x\|(r-\varepsilon)^{-n}$ и ряд сходится абсолютно и равномерно в каждом шаре $\overline{B(\lambda_0,r_1)}$, где $r_1 \in (0,r-\varepsilon)$. Из формулы для $C_n x$, линейности интеграла и операторов R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X)$, следует линейность отображений $C_n : X \to X$, а из оценки нормы $\|C_n x\|$ – их ограниченность.

Следовательно, при любом $\varepsilon \in (0,r)$ в окрестности $B(\lambda_0,(r-\varepsilon))$ точки λ_0 имеет место разложение операторнозначной функции $R : B(\lambda_0,r) \to \operatorname{End} X$ в абсолютно сходящийся ряд

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n C_n, \quad \lambda \in B(\lambda_0,(r-\varepsilon)), C_n \in \operatorname{End} X.$$

Функция R для каждого $\varepsilon \in (0,r)$ голоморфна в $B(\lambda_0,(r-\varepsilon))$, поэтому она будет голоморфна и в $B(\lambda_0,r)$.

В силу голоморфности функции R в области $B(\lambda_0,r)$, для любого $\varepsilon \in (0,r)$ найдётся такая константа $M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)} > 0$, что для всех $\lambda \in \overline{B(\lambda_0,r-\varepsilon)}$ будет справедлива оценка $\|R(\lambda)\| \leq M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,r)$ и рассмотрим величину $r_1 = r_1(\varepsilon) = \min\{(r-\varepsilon)/2, (M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)})^{-1}\}$. Зафиксируем произвольное $\delta \in (0, r_1/4)$ и рассмотрим произвольную точку $\lambda_1 \in \overline{B(\lambda_0, r_1-2\delta)} \subset \overline{B(\lambda_0,r-\varepsilon)}$. Поскольку $|\lambda_0-\lambda_1| + r_1 + \delta \leq 2r_1 - \delta \leq (r-\varepsilon)/2 - \delta$, то $\overline{B(\lambda_1,r_1)} \subset \overline{B(\lambda_1,r_1+\delta)} \subset \overline{B(\lambda_0,(r-\varepsilon))}$ и для любой точки из круга $\overline{B(\lambda_1,r_1)}$, в том числе $\lambda_0 \in \overline{B(\lambda_1,r_1)}$, будет иметь место абсолютная сходимость ряда

$$R(\lambda_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda_1)^n C_n(\lambda_1), \quad C_n(\lambda_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{R(z)}{(z-\lambda_1)^{n+1}}dz,$$

для контура $\gamma = \partial B(\lambda_1, r_1+\delta)$, лежащего в области, где функция R голоморфна и её норма ограничена в совокупности константой $M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)}$.

Для функции $R : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ выполняется резольвентное тождество Гильберта. Соответственно, оно имеет место и в точках $\lambda \in B(\lambda_1, r_1)\backslash i\mathbb{R}$, где $\lambda_1 \in \overline{B(\lambda_0, (r_1 - 2\delta))}\backslash i\mathbb{R}$, $\delta \in (0, r_1/4)$, $r_1 \le (M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)})^{-1}$ (определено выше). В указанных точках норма функции R равномерно ограничена константой $M_{\lambda_0,(r-\varepsilon)}$, поэтому для $\lambda \in B(\lambda_1, r_1)\backslash i\mathbb{R}$ справедлива формула, в правой части которой ряд сходится абсолютно

$$R(\lambda) = (I - (\lambda - \lambda_1)R(\lambda_1))^{-1}R(\lambda_1) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_1)^n (R(\lambda_1))^{n+1}.$$

В силу единственности разложения голоморфной функции получаем, что $C_n(\lambda_1) = (R(\lambda_1))^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и что данное разложение имеет место на множестве $B(\lambda_1, r_1) \ni \lambda_0$. Таким образом, в точке λ_0 справедливо равенство

$$R(\lambda_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda_1)^n (R(\lambda_1))^{n+1} = (I - (\lambda_0 - \lambda_1)R(\lambda_1))^{-1}R(\lambda_1),$$

которое и доказывает выполнение свойства псевдорезольвенты в точках множества $\mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X)$. Лемма доказана.

Лемма 2.5.2. *Операторы $R_\lambda \in \operatorname{End} X$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X)$, инъективны.*

Доказательство. В лемме 2.1.9 показано, что $\operatorname{Ker} R_\lambda = \{0\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$. Рассмотрим теперь $\lambda_0 \in i(\mathbb{R}\backslash\Lambda_C(X))$, $r(\lambda_0) = \inf\limits_{\lambda\in\Lambda_C(X)} |\lambda - \lambda_0|$, тогда $B(\lambda_0, r(\lambda_0)) \subset \mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X)$. Для любого $\varepsilon \in (0, r(\lambda_0))$ существует такая величина $M_{\lambda_0, r(\lambda_0)-\varepsilon} > 0$, что для всех $\lambda \in \overline{B(\lambda_0, r(\lambda_0) - \varepsilon)}$ выполнена оценка $\|R_\lambda\| \le M_{\lambda_0, r(\lambda_0)-\varepsilon}$. Пусть $\lambda_1 \in B(\lambda_0, \min\{(r(\lambda_0) - \varepsilon), (M_{\lambda_0,r(\lambda_0)-\varepsilon})^{-1}\})\backslash i\mathbb{R}$, тогда ограниченный оператор $I - (\lambda_0 - \lambda_1)R_{\lambda_1}$ будет непрерывно обратим и инъективен, то есть $\operatorname{Ker}(I - (\lambda_0 - \lambda_1)R_{\lambda_1}) = \{0\}$. Поскольку $\lambda_1 \notin i\mathbb{R}$, то, по доказанному ранее, $\operatorname{Ker} R_{\lambda_1} = \{0\}$, то есть для всех $x \in X$ из того, что $x \ne 0$, следует, что $R_{\lambda_1} \ne 0$. В точках $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X)$, таких, что $|\lambda_0 - \lambda_1| < (M_{\lambda_0,r(\lambda_0)-\varepsilon})^{-1} \le \|R_{\lambda_1}\|^{-1}$, справедливо резольвентное тождество Гильберта в виде

$$R_{\lambda_0} = (I - (\lambda_0 - \lambda_1)R_{\lambda_1})^{-1}R_{\lambda_1},$$

из которого следует, что для всех $x \in X$, $x \neq 0$, вектор $R_{\lambda_0}x \neq 0$, то есть $\operatorname{Ker} R_{\lambda_0} = \{0\}$. Лемма доказана.

Формулировка следующей теоремы отличается от леммы 2.1.11 тем, что представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ не обязательно сильно непрерывно и обосновано расширение до $\mathbb{C} \backslash i\Lambda_C(X)$ резольвентного множества генератора сужения представления T на X_c.

Теорема 2.5.1. *Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ – изометрическое представление, ассоциированное со структурой невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T). Тогда генератор $\mathcal{A}$ сильно непрерывного сужения $T|_{X_c}$ группы операторов T является сужением оператора iA, где A – генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T), и резольвента $\lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A}) : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X_c$ допускает расширение до резольвенты $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C} \backslash i\Lambda_C(X) \to \operatorname{End} X$ оператора iA.*

Доказательство. Покажем, что генератор $\mathcal{A}$ сильно непрерывного сужения $T|_{X_c}$ представления T является сужением оператора iA, где A – генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T). Для этого рассмотрим графики операторов $R(\lambda, \mathcal{A})$ и R_λ, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$. Для всех $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ согласно лемме 2.1.8 имеют место равенства $\operatorname{Im} R(\lambda, \mathcal{A}) = \mathrm{D}(\mathcal{A})$ и $\operatorname{Im} R_\lambda = \mathrm{D}(A)$, причём $\overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})} = \overline{\mathrm{D}(A)} = X_c$. Поскольку для любых $x \in X_c$ и $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ в силу леммы 2.1.11 справедливо представление $R(\lambda, \mathcal{A})x = R_\lambda x$, то $\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{D}(A)$ и выполнено соотношение

$$\{(x, R(\lambda, \mathcal{A})x) : \, x \in X_c\} = X_c \times \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subseteq \{(x, R_\lambda x) : \, x \in X\} = X \times \mathrm{D}(A).$$

Следовательно, имеет место включение графиков операторов $\Gamma(\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(iA)$ и оператор $\mathcal{A}$ является сужением оператора iA, а резольвента $\lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A}) : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X_c$ есть сужение резольвенты $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X$.

Из леммы 2.5.1 следует, что $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ допускает голоморфное расширение до инъективной ввиду леммы 2.5.2 резольвенты $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C} \backslash i\Lambda_C(X) \to \operatorname{End} X$ оператора iA. Теорема доказана.

Теорема 2.5.2. *Для любого вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) имеют место равенства $\Lambda(x) = \Lambda_C(x) = \sigma_A(x)$.*

Доказательство. Покажем, что $\Lambda_C(x) = \sigma_A(x)$.

Отметим, что в окрестности произвольной точки $\lambda_0 \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ функция $R_x : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to X$ голоморфна по определению. Также в некоторой окрестности $U(\lambda_0)$ точки λ_0 определена локальная резольвента $f : U(\lambda_0) \to \mathrm{D}(A)$ вектора x относительно генератора iA. В силу свойства однозначного распространения генератора A (согласно лемме 2.4.2) на каждом пересечении окрестностей точек из $\mathbb{C}\backslash\sigma_{iA}(x)$ локальные резольвенты вектора x совпадают, поэтому существует единственная голоморфная функция f, являющаяся локальной резольвентой вектора x относительно генератора iA и определённая на множестве $\rho_{iA}(x) \supseteq \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$.

Применяя лемму 2.1.11 в совокупности со свойством однозначного распространения генератора A, на множестве $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$ получим совпадение функций $f = -R_x$. Более того, распространяя равенство $f = -R_x$ на множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{iA}(x)$, получим голоморфное продолжение функции R_x в этих точках. Таким образом, $i\Lambda_C(x) \subseteq \sigma_{iA}(x)$.

Теперь, поскольку в окрестности каждой точки множества $\mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(x)$ функция R_x допускает голоморфное продолжение, а в окрестности каждой точки из множества $(\mathbb{C}\backslash i\sigma_{iA}(x)) \subseteq (\mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(x))$ совпадает с локальной резольвентой f вектора x, то в окрестности точек $\sigma_{iA}(x)\backslash\Lambda_C(x)$ функция f может быть голоморфным образом продолжена по формуле $f = -R_x$.

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\Lambda_C(x)$, тогда в любой непустой окрестности $U(i\lambda_0)\backslash i\mathbb{R}$ точки $i\lambda_0$ образ $R_x(U(i\lambda_0)\backslash i\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{D}(A)$ и функция $-R_x$ является локальной резольвентой вектора x, т.е. $(iA - \lambda I)(-R_x(\lambda)) = x$, $\lambda \in (U(i\lambda_0))\backslash i\mathbb{R}$. Функция R_x допускает голоморфное продолжение в окрестности точки $i\lambda_0 \in i(\mathbb{R}\backslash\Lambda_C(x))$, поэтому имеет место сходимость по норме пространства X следующих величин

$$\left.\begin{aligned} R_x(\lambda) \to & \ R_x(i\lambda_0), \\ iAR_x(\lambda) = -(x + \lambda R_x(\lambda)) \to & \ -(x + i\lambda_0 R_x(i\lambda_0)), \end{aligned}\right\} \ \lambda \to i\lambda_0.$$

В силу леммы 2.1.11 оператор iA и его график замкнуты, т.е. множество $\{(x, iAx) \in X \times X : x \in \mathrm{D}(A)\}$ замкнуто относительно нормы $\|(x, iAx)\| = \|x\| + \|iAx\|$. Поэтому предельная точка $(R_x(i\lambda_0), iAR_x(i\lambda_0)) = (R_x(i\lambda_0), -(x + i\lambda_0 R_x(i\lambda_0)))$ графика оператора iA также принадлежит графику, $R_x(i\lambda_0) \in \mathrm{D}(A)$ и справедливо равенство $(iA - i\lambda_0 I)(-R_x(i\lambda_0)) = x$. Таким образом, из того, что $\lambda_0 \notin \Lambda_C(x)$ следует, что $i\lambda_0 \notin \sigma_{iA}(x)$, то есть $\sigma_A(x) \subseteq \Lambda_C(x)$.

Докажем теперь, что $\sigma_A(x) = \Lambda(x)$.

Пусть вектор $x \in X$ имеет компактный спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$, тогда, согласно свойству 2 леммы 2.2.3, для произвольной точки $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\Lambda(x)$ и функции $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такой, что $\widehat{g}_\lambda(z) = (\lambda - iz)^{-1}$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, $z \in \mathbb{R}$, справедливо равенство $g_\lambda x = R(\lambda, iA)x$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\Lambda(x)$, где A - генератор модуля X. Отметим, что отображение $\lambda \mapsto (-g_\lambda x)$ является голоморфной функцией на множестве $\mathbb{C} \backslash i\Lambda(x)$ и для неё справедливо равенство

$$(iA - \lambda I)(-g_\lambda x) = x, \ \lambda \in \mathbb{C} \backslash i\Lambda(x).$$

В этом случае $\lambda \in \rho_{iA}(x) = \mathbb{C} \backslash i\sigma_A(x)$ и, таким образом, для векторов с компактным спектром Бёрлинга доказано, что $\sigma_A(x) \subseteq \Lambda(x)$.

Теперь рассмотрим произвольный вектор $x \in X$, а также аппроксимативную единицу $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subseteq L^1(\mathbb{R})$, Ω - некоторое направленное множество, такую, что для всех $\alpha \in \Omega$ множество $\operatorname{supp} \widehat{e}_\alpha$ является компактным. Тогда, в силу утверждения 3 леммы 2.2.1 векторы $e_\alpha x$, $\alpha \in \Omega$, обладают компактным спектром Бёрлинга $\Lambda(e_\alpha x)$, причём $\Lambda(e_\alpha x) \subseteq \Lambda(x)$ для всех $\alpha \in \Omega$.

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C} \backslash \Lambda(x)$ и $\widehat{g}_\lambda(z) = (\lambda - iz)^{-1}$ в некоторой окрестности $U(i\Lambda(x))$ такой, что для некоторой окрестности $U(i\lambda_0)$ точки $i\lambda_0$ справедливо равенство $\overline{U(i\Lambda(x))} \cap \overline{U(i\lambda_0)} = \emptyset$.

Поскольку $e_\alpha x$ имеют компактные спектры Бёрлинга, то для них справедливо включение $\sigma_A(e_\alpha x) \subseteq \Lambda(e_\alpha x)$, поэтому $i\lambda_0 \in \rho_{iA}(e_\alpha x)$ и $(iA - \lambda I)(-g_\lambda(e_\alpha x)) = e_\alpha x$, $\alpha \in \Omega$, $\lambda \in U(i\lambda_0)$. Преобразуя последнее равенство, получим, что для $\lambda \in U(i\lambda_0)$

$$\lim_{\alpha\in\Omega} iA(g_\lambda(e_\alpha x)) = \lim_{\alpha\in\Omega}(\lambda g_\lambda(e_\alpha x) - e_\alpha x) = \lambda g_\lambda x - x.$$

Учитывая замкнутость генератора A согласно лемме 2.1.11 и то, что $\lim\limits_{\alpha\in\Omega} g_\lambda(e_\alpha x) = g_\lambda x$, получаем, что для каждого $\lambda \in U(i\lambda_0)$ вектор $g_\lambda x \in \mathrm{D}(A)$ и справедливо равенство $(iA - \lambda I)(-g_\lambda x) = x$. Покажем теперь голоморфность функции $\lambda \mapsto g_\lambda x$. Поскольку векторы $g_\lambda(e_\alpha x)$, $\alpha \in \Omega$, $\lambda \in U(i\lambda_0)$, имеют компактные спектры Бёрлинга, а функция g_λ обладает преобразованием Фурье $\widehat{g}_\lambda(z) = (\lambda - iz)^{-1}$ в некоторой окрестности $U(i\Lambda(x)) \supseteq U(i\Lambda(e_\alpha x))$, то $g_\lambda(e_\alpha x) = R(\lambda, iA)(e_\alpha x)$. Поскольку направленность $g_\lambda(e_\alpha)x \to g_\lambda$, $\alpha \in \Omega$, и $\|g_\lambda e_\alpha x\| \leq \|g_\lambda x\|$, то направленность $\{g_\lambda e_\alpha x\}$ является равномерно ограниченной в окрестности точки $i\lambda_0$. В силу теоремы Вейерштрасса о сходимости [13, гл. III.14, стр. 249] предельная функция $\lambda \mapsto g_\lambda : \mathbb{C}\backslash i\Lambda(x) \to X$ также будет голоморфной в окрестности точки $i\lambda_0$, то есть $\lambda_0 \notin \sigma_A(x)$.

Теперь докажем, что $\Lambda(x) = \sigma_A(x)$. Предположим, что $\Lambda(x) \neq \sigma_A(x)$ и пусть $\lambda_0 \in \Lambda(x)\backslash\sigma_A(x)$. Рассмотрим функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем преобразования Фурье и такую, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и $\operatorname{supp}\widehat{g} \cap \sigma_A(x) = \emptyset$. Тогда $gx \neq 0$, поскольку функция g имеет ненулевое преобразование Фурье на спектре Берлинга вектора x. С другой стороны, из включения $\sigma_A(x) \subseteq \Lambda(x)$ и свойства 3 леммы 2.2.1 справедливо включение $\sigma_A(gx) \subset \Lambda(gx) \subset \operatorname{supp}\widehat{g}\cap\Lambda(x)$. Из условий на функцию g получаем, что $\sigma_A(gx) = \emptyset$. Согласно утверждению 2 леммы 2.4.1 получаем, что $gx = 0$ и $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$, что противоречит предположению. Следовательно, $\Lambda(x) = \sigma_A(x)$. Теорема доказана.

Следствием теоремы 2.5.2 в случае однородных функциональных пространств (удовлетворяющих определению 2.1.5) является

Теорема 2.5.3. *Пусть* $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ *– однородное пространство функций. Тогда для любой функции* $\varphi \in \mathscr{F}$ *справедливы равенства* $\Lambda(\varphi) = \Lambda_C(\varphi) = \sigma_D(\varphi)$.

Напомним, что спектр Карлемана $\Lambda_C(\varphi)$ функции $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ понимается в смысле определения 2.3.2, а оператор дифференцирования $-i\frac{d}{dt} = D : \mathrm{D}(D) \subseteq \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ является генератором $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{F}, S)$.

Глава 3

Оценки элементов матриц обратных операторов

В данной главе диссертации вводятся понятия наполненности, матрицы и ряда Фурье линейного ограниченного оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y. Приведены следствия из теоремы Бохнера-Филлипса о наполненности некоторых подалгебр алгебры линейных ограниченных операторов. Проводится систематический анализ результатов статьи А.Г. Баскакова [5] и получены теоремы, уточняющие результаты данной статьи. Результаты о наполненности подалгебр и об оценках матричных элементов обратных операторов применяются в основной теореме третьей главы о наполненности подалгебр алгебры операторов, порождённых интегральными операторами и действующих на пространстве функций $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3.1. Теорема Винера и наполненность подалгебр

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ - банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C(\mathbb{T})$ будем обозначать банахово пространство комплексных непрерывных функций, определенных на окружности $\mathbb{T} = \{\theta \in \mathbb{C} : |\theta| = 1\}$.

Будем говорить, что функция $f \in C(\mathbb{T})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда

$$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\theta^k,\ \theta \in \mathbb{T},$$

где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $\mathscr{A}(C(\mathbb{T}))$. Заметим, что $\mathscr{A}(C(\mathbb{T}))$ является банаховой алгеброй с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{\mathscr{A}(C(\mathbb{T}))} = \|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|.$$

В терминах введенных обозначений теорема Винера формулируется следующим образом.

Теорема 3.1.1. *Если функция* $f \in \mathscr{A}(C(\mathbb{T}))$ *и* $f(\theta) \neq 0$ *для всех* $\theta \in \mathbb{T}$, *то* $1/f \in \mathscr{A}(C(\mathbb{T}))$, *т.е.* $1/f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k)\theta^k$, *где* $b \in l^1(\mathbb{Z})$.

Согласно теории И.М. Гельфанда, теорему Винера можно рассматривать на языке пар алгебр как утверждение о том, что алгебры $\mathscr{A}(C(\mathbb{T}))$ и $C(\mathbb{T})$ образуют винеровскую пару [21].

Определение 3.1.1. Будем говорить, что алгебры A, B ($\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$) образуют *винеровскую пару*, если каждый элемент $a \in \mathsf{A}$, обратимый в алгебре B, обратим также в алгебре A.

В данной работе будет использоваться терминология Н. Бурбаки [11] (см. определение 1.1.7). В терминах наполненности теорема Винера принимает следующий вид.

Теорема 3.1.2. *Алгебра* $\mathscr{A}(C(\mathbb{T}))$ *наполнена в алгебре* $C(\mathbb{T})$.

Как будет показано в данной главе, наполненность некоторых подалгебр полезна при изучении свойств обратных элементов из данных подалгебр.

3.2. Матрицы и ряды Фурье операторов

Пусть X, Y – бесконечномерные банаховы пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Символом $\mathrm{Hom}(X, Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, отображающих X на Y, а символом $\mathrm{End}\, X = \mathrm{Hom}(X, X)$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве X. Символом $\mathrm{Inv}(X, Y)$ обозначим множество непрерывно обратимых операторов из $\mathrm{Hom}(X, Y)$, а группу обратимых операторов из банаховой алгебры $\mathrm{End}\, X$ обозначим символом $\mathrm{Inv}\, X = \mathrm{Inv}(X, X)$. Пусть $\mathbb{G}$ – счетная дискретная абелева группа с аддитивной формой записи операции на группе, а $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{G}$ – некоторое её подмножество. Ряд следующих определений и обозначений данного параграфа частично заимствован из статей [5] и [4].

Определение 3.2.1. Проекторнозначную функцию $P : \mathbb{G} \to \operatorname{End} X$, задающую индексированное элементами группы $\mathbb{G}$ множество проекторов $\{P_g = P(g)\}_{g\in\mathbb{G}}$, где $P_g = 0$ для всех $g \in \mathbb{G}\backslash\mathbb{S}$, будем называть *дизъюнктной*, если для любой пары $i, j \in \mathbb{S}$, $i \neq j$, выполняется равенство $P_iP_j = 0$.

Определение 3.2.2. Дизъюнктную проекторнозначную функцию $P : \mathbb{G} \to \operatorname{End} X$ будем называть *разложением единицы* на пространстве X, если для каждого $x \in X$ безусловно сходится ряд $\sum_{g\in\mathbb{S}} P_g x = x$ и конечна величина

$$C(P) = \sup_{\{\alpha_g\}\subset\mathbb{T}} \left\| \sum_{g\in\mathbb{S}} \alpha_g P_g \right\| \geq 1.$$

Замечание 3.2.1. Как справедливо отмечено в [5], введение в пространстве X новой эквивалентной нормы

$$\|x\|_* = \sup_{\{\alpha_g\}\subset\mathbb{T}} \left\| \sum_{g\in\mathbb{G}} \alpha_g P_g x \right\|, \quad x \in X,$$

приводит к тому, что $C(P) = 1$ относительно этой нормы. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $C(P) = 1$.

В пространствах X и Y рассмотрим разложения единицы $P : \mathbb{G} \to \operatorname{End} X$ и $Q : \mathbb{G} \to \operatorname{End} Y$ соответственно.

Замечание 3.2.2. Далее предполагается, что для разложений единицы P и Q выполнено одно из следующих условий:

1) В случае, когда $X = Y$ и $P = Q$, существует такая постоянная $M(P) > 0$, что для любых g из множества $G \subseteq \mathbb{S}$ и оператора $A \in \operatorname{End} X$ имеет место оценка $\| \sum\limits_{j\in G} P_{j+g} A P_j \| \leq M(P) \max\limits_{j\in G} \|P_{j+g} A P j\|$.

2) Для любых конечных множеств $\sigma_1, \sigma_2, \Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{S}$ таких, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, имеет место равенство

$$\|(\sum_{i\in\sigma_1} Q_i)A(\sum_{j\in\Delta_1} P_j) + (\sum_{i\in\sigma_2} Q_i)A(\sum_{j\in\Delta_2} P_j)\| =$$

$$\max\{\|(\sum_{i\in\sigma_1} Q_i)A(\sum_{j\in\Delta_1} P_j)\|, \|(\sum_{i\in\sigma_2} Q_i)A(\sum_{j\in\Delta_2} P_j)\|\}.$$

Определение 3.2.3. Каждому оператору $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ поставим в соответствие *матрицу оператора* $\mathcal{A} = (A_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$, элементы которой имеют вид $A_{ij} = Q_i A P_j \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, $i,j \in \mathbb{S}$.

Диагональю матрицы оператора $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ будем называть операторы $\mathcal{A}_g \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ (с учётом замечания 3.2.6), $g \in \mathbb{G}$, вида

$$\mathcal{A}_g = \sum_{\substack{i-j=g\\ i,j\in\mathbb{S}}} Q_i A P_j,$$

где $\mathcal{A}_g = 0$, если $g \in \mathbb{G}$ не представима в виде $i-j$ для любых $i,j \in \mathbb{S}$.

Определение 3.2.4. Каждому оператору $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ с матрицей $\mathcal{A} = (A_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$ поставим в соответствие функцию $d_A : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ вида $d_A(g) = \sup\limits_{i-j=g} \|A_{ij}\|$, $g \in \mathbb{G}$, $i,j \in \mathbb{S}$. Величину $d_A(g)$, $g \in \mathbb{G}$, будем называть *нормой g-ой диагонали* матрицы $\mathcal{A}$ оператора A.

Замечание 3.2.3. Условия в замечании 3.2.6 гарантируют эквивалентность операторной нормы и нормы диагонали матрицы оператора согласно определению 3.2.4.

На основе понятия нормы диагонали матрицы оператора из $\mathrm{Hom}(X,Y)$ введём классы операторов. Для этого введём следующие весовые функции.

Определение 3.2.5. Пусть функция $\alpha : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\alpha(g) \geq 1$ для всех $g \in \mathbb{G}$,

2) $\alpha(g_1+g_2)\le\alpha(g_1)\alpha(g_2)$ для всех $g_1,g_2\in\mathbb{G}$,

3) $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\alpha(ng)=0$ для всех $g\in\mathbb{G}$.

Определение 3.2.6. Пусть $\beta:\mathbb{G}\to\mathbb{R}_+$ – функция, для которой выполнены свойства

1) $\sum_{g\in\mathbb{G}}\beta(g)^{-1}<\infty$,

2) $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\beta(ng)=0$,

3) существует постоянная $C(\beta)>0$ такая, что для всех $g\in\mathbb{G}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{j\in\mathbb{G}}(\beta(g-j)\beta(j))^{-1}\le C(\beta)/\beta(g)$.

Определение 3.2.7. Под *характеристикой убывания норм диагоналей* (матрицы $\mathcal{A}$) оператора $A\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ будем понимать правило, описывающее стремление к нулю величин $d_A(kg)$ при $k\to\infty$, $g\in\mathbb{G}$. Выделим следующие характеристики убывания норм диагоналей:

1) $\sum\limits_{g\in\mathbb{G}} d_A(g)<\infty$;

2) $\sum\limits_{g\in\mathbb{G}} d_A(g)\alpha(g)<\infty$, где функция α дана в определении 3.2.5;

3) $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ g\in\mathbb{G}}} d_A(kg)\beta(kg)=0$, где функция β дана в определении 3.2.6;

4) $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ \mathbb{Z}^n}} d_A(k)(1+\|k\|)^q=0$, для некоторого $q>n$ (при этом оператор A удовлетворяет условию 3) данного определения, если функция $\beta:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{R}_+$ имеет вид $\beta(k)=(1+\|k\|)^q$, $\|k\|=\max\limits_{1\le i\le n}|k_i|$, $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$);

5) $d_A(k)\le M\gamma^{\|k\|}$, $k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$, ($\mathbb{G}=\mathbb{Z}$) для некоторых постоянных $M=M(A)>0$ и $\gamma=\gamma(A)\in(0,1)$;

6) $d_A(k)=0$ при $|k|>1$, $k\in\mathbb{Z}$, (трёхдиагональные);

7) $d_A(k)=0$ при $k\ne0,1$ либо при $k\ne0,-1$, $k\in\mathbb{Z}$, (двухдиагональные).

Замечание 3.2.4. В статье [5] на функцию $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ накладывается дополнительное требование $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_0(m) = 0$ где функция $\beta_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ определена формулой

$$\beta_0(m) = \sup_{|k|\geq 2} \sum_{|j|\leq m-1} \frac{\beta(k)}{\beta(mk+j)}, \quad m \geq 1.$$

В то же время, в указанной статье класс операторов, удовлетворяющих условию 3) определения 3.2.7, определяется формулой $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\beta(k) < \infty$.

Определение 3.2.8. Операторы, удовлетворяющие любому из условий определения 3.2.7, образуют линейные подпространства из пространства $\mathrm{Hom}(X, Y)$, которые будем обозначать $\mathrm{Hom}_1(X, Y)$, $\mathrm{Hom}_\alpha(X, Y)$, $\mathrm{Hom}_\beta(X, Y)$, $\mathrm{Hom}_q(X, Y)$, $\mathrm{Hom}_\gamma(X, Y)$, соответственно, для операторов, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3), 4) и 5). Для подпространств операторов, удовлетворяющих условиям 1) – 4) определения 3.2.7, введём следующие нормы

$$\begin{aligned} \|A\|_\alpha &= \sum_{g\in\mathbb{G}} \alpha(g) d_A(g), & \|A\|_\beta &= C(\beta) \sup_{g\in\mathbb{G}} \beta(g) d_A(g), \\ \|A\|_1 &= \sum_{g\in\mathbb{G}} d_A(g), & \|A\|_q &= C(q) \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+\|k\|)^q d_A(k), \end{aligned}$$

где $A \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ принадлежит соответствующему подпространству. Относительно введённых норм указанные подпространства полны. Отметим, что $\mathrm{Hom}_\alpha(X, Y) = \mathrm{Hom}_1(X, Y)$ при $\alpha \equiv 1$, а $\mathrm{Hom}_\beta(X, Y) = \mathrm{Hom}_q(X, Y)$ при $\beta(k) = (1+\|k\|)^q$, $k \in \mathbb{Z}^n$. В случае, когда $X = Y$ и рассматривается одно и то-же разложение единицы $P : \mathbb{G} \to \mathrm{End}\, X$ для областей определения и значений операторов, то подпространства операторов, удовлетворяющих условиям 1)–5), будем обозначать, соответственно, $\mathrm{End}_1 X$, $\mathrm{End}_\alpha X$, $\mathrm{End}_\beta X$, $\mathrm{End}_q X$, $\mathrm{End}_\gamma X$.

Замечание 3.2.5. Отметим, что каждый оператор, удовлетворяющий любому условию из определения 3.2.7, удовлетворяет и условию 1).

Определение 3.2.9. Пусть $\widehat{P} : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathrm{End}\, X$, $\widehat{Q} : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathrm{End}\, Y$ – сильно непрерывные изометрические представления (группы операторов), определённые формулами $\widehat{P}(\gamma)x = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}} \gamma(g) P_g x$, $x \in X$, $\widehat{Q}(\gamma)x = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}} \gamma(g) Q_g y$, $y \in Y$, где P, Q – разложения единицы согласно определению 3.2.2, соответственно, в банаховых алгебрах операторов $\operatorname{End} X$ и $\operatorname{End} Y$, $\gamma \in \widehat{\mathbb{G}}$ – унитарные характеры группы $\mathbb{G}$.

Определение 3.2.10. Каждому оператору $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ поставим в соответствие сильно непрерывную функцию $\Phi_A : \widehat{\mathbb{G}} \to \operatorname{Hom}(X, Y)$, определяемую равенством

$$\Phi_A(\gamma) = \widehat{Q}(\gamma) A \widehat{P}(-\gamma), \quad \gamma \in \widehat{\mathbb{G}}.$$

Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$\Phi_A(\gamma) \sim \sum_{g \in \mathbb{G}} \gamma(g) A_g, \quad \gamma \in \widehat{\mathbb{G}},$$

где

$$A_g = \int\limits_{\widehat{\mathbb{G}}} \Phi_A(\gamma)\gamma(-g)\mu(d\gamma), \quad g \in \mathbb{G}, \tag{3.1}$$

а μ – мера Хаара на компактной группе $\widehat{\mathbb{G}}$, $\mu(\widehat{\mathbb{G}}) = 1$.

Ряд $\sum\limits_{g \in \mathbb{G}} A_g$ будем называть *рядом Фурье оператора* A, а операторы A_g, $g \in \mathbb{G}$, – *коэффициентами Фурье* этого оператора (относительно пары представлений $(\widehat{P}, \widehat{Q})$).

Замечание 3.2.6. Функция Φ_A, определяемая с помощью представлений из определения 3.2.9, а также её коэффициенты Фурье будут ограничены по операторной норме при выполнении одного из условий замечания 3.2.6.

С учётом лемм 1 из [5] и [4], замечаний 3.2.1 и 3.2.6 (аналоги предположений 2 и 3, замечания 2 из [5] и 1 из [4]) справедлива следующа лемма.

Лемма 3.2.1 ([5], лемма 1 и [4], лемма 1.)**.** *Пусть в каждой из алгебр* $\operatorname{End} X$, $\operatorname{End} Y$*, соответственно, существуют в смысле определения 3.2.2 разложения единицы* P *и* Q*. Пусть на основе указанных разложений единицы построены согласно определению 3.2.10 соответствующие представления* $\widehat{P}$ *и* $\widehat{Q}$*. Если выполнено любое из условий замечания 3.2.6, то каждый коэффициент Фурье*

A_g, $g \in \mathbb{G}$, *оператора* $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ *допускает представление в виде сильно и безусловно сходящегося ряда вида*

$$A_g = \sum_{\substack{i-j=g \\ i,j \in \mathbb{S}}} Q_i A P_j,$$

и справедливы утверждения:

1) *в случае выполнения условия 1 замечания 3.2.6 существуют такие положительные константы* $M_1(P)$ *и* $M_2(P)$, *что*

$$M_1(P) d_A(g) \leq \|A_g\| \leq M_2(P) d_A(g), \quad g \in \mathbb{G};$$

2) *в случае выполнения условия 2 замечания 3.2.6 имеет место равенство*

$$\|A_g\| = \sup_{\substack{i-j=g, \\ i,j \in \mathbb{S}}} \|Q_i A P_j\| = d_A(g), \quad g \in \mathbb{G}.$$

Замечание 3.2.7. С учётом замечания 1 из [5] и леммы 3.2.1 величина нормы диагонали матрицы оператора $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, требующая, согласно определению 3.2.2, существования разложений единицы, действующих на пространствах X, Y, может быть заменена нормой соответствующего коэффициента Фурье оператора A. В этом случае для построения коэффициентов Фурье оператора $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ в смысле определения 3.2.10 в виде 3.1 достаточно существования сильно непрерывных изометрических представлений $\widehat{P} : \widehat{\mathbb{G}} \to \operatorname{End} X$, $\widehat{Q} : \widehat{\mathbb{G}} \to \operatorname{End} Y$, либо сильно непрерывной функции Φ_A. Линейное подпространство операторов из $\operatorname{Hom}(X, Y)$, обладающих относительно выбранных представлений сильно непрерывной функцией Φ_A, будем обозначать символом $\operatorname{Hom}(X, Y)$.

С другой стороны, отказ от разложений единицы в смысле определения 3.2.2 ограничивает применение метода получения явных оценок статьи [5]. Подобное ограничение ведёт к необходимости использования дополнительных результатов и теорий, например, теоремы Бохнера-Филлипса 3.3.1, как в [4], или теории спектра Бёрлинга, как в [43]. Следует также учесть, что теорема Бохнера-Филлипса в виде 3.3.1, как результат о наполенности алгебры, может дать только асимптотические оценки и применима только к алгебрам.

В связи с этим потребуются следующие результаты, приведённые в [5].

Лемма 3.2.2. *Пусть Z – банахово пространство наряду с пространствами X и Y, причём в Z действует сильно непрерывное изометрическое представление $\widehat{U} : \widehat{\mathbb{G}} \to \operatorname{End} Z$. Пусть $A \in \operatorname{Hom}_1(X,Y)$ и $B \in \operatorname{Hom}_1(Y,Z)$ (относительно пар представлений $(\widehat{P},\widehat{Q})$ и $(\widehat{Q},\widehat{U})$ соответственно, тогда $C = BA \in \operatorname{Hom}_1(X,Z)$, причём коэффициенты Фурье C_g, $g \in \mathbb{G}$, имеют вид*

$$C_g = \sum_{j\in\mathbb{G}} B_{g-j}A_j,$$

и справедлива оценка $\|C_g\| \le \sum\limits_{j\in\mathbb{G}} \|B_{g-j}\|\|A_j\|$.

Лемма 3.2.3. *Если $A \in \operatorname{Hom}_\alpha(X,Y)$, $B \in \operatorname{Hom}_\alpha(Y,Z)$ (соответственно, $A \in \operatorname{Hom}_\beta(X,Y)$, $B \in \operatorname{Hom}_\beta(Y,Z)$), то оператор $C = BA$ принадлежит подпространству $\operatorname{Hom}_\alpha(X,Z)$, причём $\|BA\|_\alpha \le \|B\|_\alpha\|A\|_\alpha$ (соответственно, $\|BA\|_\beta \le \|B\|_\beta\|A\|_\beta$). В частности, $\operatorname{End}_\alpha X$ и $\operatorname{End}_\beta X$ – банаховы алгебры.*

Замечание 3.2.8. Расширим определение 2.2.2 на случай банахова $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$-модуля над рассмотренной в данном параграфе компактной абелевой группой $\widehat{\mathbb{G}}$.

Спектром Бёрлинга вектора x из банахова $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$-модуля будем называть дополнение к подмножеству из двойственной группы $\mathbb{G}$ вида

$$\Big\{g \in \mathbb{G} : \text{ найдётся } f \in L^1(\widehat{\mathbb{G}}) \text{ со свойством } \widehat{f}(g) \neq 0 \text{ такая, что } fx = 0\Big\}$$

Банахово пространство операторов $\operatorname{Hom}(X,Y)$ наделим структурой банахова модуля по формуле

$$T(f)A = fA = \int\limits_{\widehat{\mathbb{G}}} f(\gamma)T(-\gamma)A d\mu(\gamma),$$

где представление $T : \widehat{\mathbb{G}} \to \operatorname{End}\operatorname{Hom}(X,Y)$ задано формулой $T(\gamma)A = \widehat{Q}(\gamma)A\widehat{P}(-\gamma)$, $\gamma \in \widehat{\mathbb{G}}$, $T(\gamma_1)T(\gamma_2)A = \widehat{Q}(\gamma_1)\widehat{Q}(\gamma_2)A\widehat{P}(-\gamma_2)\widehat{P}(-\gamma_1)$, $\gamma_1,\gamma_2 \in \widehat{\mathbb{G}}$. Таким образом, функция $T(\cdot)A$, $A \in \operatorname{Hom}(X,Y)$, совпадёт с сильно непрерывной функцией Φ_A оператора A, которой в определении 3.2.10 поставлен в соответствие ряд Фурье. Учитывая пример 2.2.1 и применяя приведённое выше определение спектра Бёрлинга, получаем, что спектром Бёрлинга оператора $A \in \operatorname{Hom}(X,Y)$ в условиях введённой модульной структуры является множество таких $g \in \mathbb{G}$, для которых соответствующий коэффициент Фурье оператора A отличен от нуля.

3.3. Теорема Бохнера-Филлипса

Для доказательства результатов для операторов из банаховых алгебр $\operatorname{End}_\alpha X$, $\operatorname{End}_\beta X$, в данной работе используется теорема Бохнера-Филлипса. Доказательства данной теоремы проведено в соответствии со статьёй [4]. Обозначим через $\mathbb{F}$ банахову алгебру с единицей. Определим два класса функций, определенных на счетной дискретной абелевой группе $\mathbb{G}$ с аддитивной формой записи групповой операции, и принимающих значения в $\mathbb{F}$.

Определение 3.3.1. Символом $L_\alpha(\mathbb{G},\mathbb{F})$ обозначим банахову алгебру функций $f : \mathbb{G} \to \mathbb{F}$, суммируемых относительно меры Хаара на группе $\mathbb{G}$ с весом α согласно определению 3.2.5. Норму в $L_\alpha(\mathbb{G},\mathbb{F})$ определим формулой

$$\|f\|_\alpha = \sum_{g\in\mathbb{G}} \|f(g)\|\alpha(g), \quad f \in L_\alpha(\mathbb{G},\mathbb{F}).$$

Определение 3.3.2. Символом $M_\beta(\mathbb{G},\mathbb{F})$ обозначим банахову алгебру функций $f : \mathbb{G} \to \mathbb{F}$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное множество G_1 элементов группы $\mathbb{G}$ такое, что $\beta(g)\|f(g)\|_{\mathbb{F}} < \varepsilon$ для любого $g \in \mathbb{G}\setminus G_1$, где β – весовая функция из определения 3.2.6. Норму в $M_\beta(\mathbb{G},\mathbb{F})$ определим формулой

$$\|f\|_\beta = C(\beta)\sup_{g\in\mathbb{G}} \|f(g)\|\beta(g), \quad f \in M_\beta(\mathbb{G},\mathbb{F}).$$

Роль операции умножения для введенных алгебр играет свертка. Для удобства обозначим $L_\alpha(G) = L_\alpha(G, \mathbb{C})$, $M_\beta(G) = M_\beta(G, \mathbb{C})$.

Условия, накладываемые на функции α и β, обеспечивают полупростоту коммутативных банаховых алгебр $L_\alpha(\mathbb{G})$ и $M_\beta(\mathbb{G})$. Спектры этих алгебр естественным образом отождествляются с компактной группой $\widehat{\mathbb{G}}$ унитарных характеров группы $\mathbb{G}$. Отметим, что спектром $Sp\mathbb{A}$ произвольной банаховой алгебры $\mathbb{A}$ называется компактное пространство ненулевых комплексных гомоморфизмов или пространство максимальных идеалов (см. теоремы 1.1.1, 1.1.2).

Для каждой функции f, принадлежащей одной из банаховых алгебр $L_\alpha(\mathbb{G}, \mathbb{F})$ и $M_\beta(\mathbb{G}, \mathbb{F})$, через $\widehat{f}$ обозначим преобразование Фурье функции f, то есть $\widehat{f} : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathbb{F}$ - функция, определенная формулой

$$\widehat{f}(\gamma) = \sum_{g \in \mathbb{G}} f(g)\gamma(-g),\ \gamma \in \widehat{\mathbb{G}}.$$

Введём следующие определения и обозначения согласно статье [4].

Определение 3.3.3. Пусть банахова алгебра $\mathbb{B}$ с единицей обладает следующими свойствами:

1) существуют (замкнутые) коммутативная подалгебра $\mathbb{A}$ с единицей и подалгебра $\mathbb{F}$ из центра $Z(\mathbb{B})$ алгебры $\mathbb{B}$ такие, что векторы вида

$$(a, f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, \quad a = (a_1, .., a_n) \in \mathbb{A}^n, f = (f_1, .., f_n) \in \mathbb{F}^n$$

плотны в $\mathbb{B}$;

2) $\|a_0 f_0\| = \|a_0\|\|f_0\|$ для любых $a_0 \in \mathbb{A}$, $f_0 \in \mathbb{F}$;

3) $\|\sum_{i=1}^{n} \chi(a_i) f_i\| = \|(a, f)\|$ для любых $a \in \mathbb{A}^n, f \in \mathbb{F}^n$ и для любого комплексного гомоморфизма $\chi : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ из спектра $\mathrm{Sp}\,\mathbb{A}$ банаховой алгебры $\mathbb{A}$.

Гомоморфизм алгебр $\bar{\chi} : \mathbb{B} \to \mathbb{F}$ называется *обобщенным характером* алгебры $\mathbb{B}$, если существует гомоморфизм $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathbb{A}$ такой, что $\bar{\chi}(af) = \chi(a)f$ для любых $a \in \mathbb{A}$, $f \in \mathbb{F}$. Совокупность всех обобщенных характеров алгебры $\mathbb{B}$ обозначим символом $\mathrm{Sp}\,(\mathbb{B},\mathbb{F})$.

Перечисленным условиям 1 – 3 определения 3.3.3 удовлетворяет банахова алгебра $\mathbb{B}$, совпадающая с одной из банаховых алгебр $L_\alpha(\mathbb{G},\mathbb{F})$ или $M_\beta(\mathbb{G},\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ - некоторая банахова алгебра с единицей e. В качестве алгебры $\mathbb{A}$ будем рассматривать, соответственно, алгебры $L_\alpha(\mathbb{G})$ и $M_\beta(\mathbb{G})$, отождествленные с функциями вида fe, $f \in \mathbb{B}_0$, где $\mathbb{B}_0$ – соответственно, одна из алгебр $L_\alpha(\mathbb{G})$, $M_\beta(\mathbb{G})$. Банахову алгебру $\mathbb{F}$ можно рассматривать как подалгебру $\mathbb{B}$, если каждому элементу $f \in \mathbb{F}$ поставить в соответствие функцию $f\delta_0$, где δ_0 – единица алгебры $\mathbb{B}_0$. Каждый обобщенный характер алгебры $\mathbb{B}$ определяется преобразованием Фурье функции из $\mathbb{B}$ в некоторой точке из $\widehat{\mathbb{G}}$.

Пусть банахова алгебра $\mathbb{B}$ удовлетворяет условиям 1 – 3 определения 3.3.3. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.1 (Бохнер - Филлипс, [45])**.** *Для того, чтобы элемент b из алгебры $\mathbb{B}$ имел левый(правый) обратный, необходимо и достаточно, чтобы для каждого обобщенного характера $\bar{\chi} \in Sp(\mathbb{B},\mathbb{F})$ элемент $\bar{\chi}(b) \in \mathbb{F}$ имел левый(правый) обратный в $\mathbb{F}$.*

Базовым для полученных в работе результатов является следующее следствие.

Следствие 3.3.1. *Пусть $\mathbb{B}$ - одна из банаховых алгебр $L_\alpha(G,\mathbb{F})$, $M_\beta(G,\mathbb{F})$. Для обратимости элемента $f \in \mathbb{B}$ необходимо и достаточно, чтобы все элементы из $\mathbb{F}$ вида*

$$\widehat{f}(\gamma) = \sum_{k\in G} f(k)\gamma(-k), \gamma \in \widehat{G}$$

были обратимы в алгебре $\mathbb{F}$.

С помощью следствия 3.3.1 из теоремы 3.3.1 в статье [4] был доказан следующий результат.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $A \in \operatorname{End} X$ *– обратимый оператор, удовлетворяющий одному из условий 1 - 4 убывания норм диагоналей из определения 3.2.7. Тогда обратный оператор* $B = A^{-1} \in \operatorname{End} X$ *также удовлетворяет соответствующему условию убывания норм диагоналей. Иначе говоря, алгебры* $\operatorname{End}_1 X, \operatorname{End}_\alpha X, \operatorname{End}_\beta X, \operatorname{End}_q X$ *наполнены в алгебре* $\operatorname{End} X$.

3.4. Оценки элементов матриц и рядов Фурье обратных операторов

С помощью введенной терминологии и методов теории голоморфных функций возможно получить оценки норм диагоналей обратных операторов в случае обратимых операторов из $\operatorname{Hom}(X, Y)$, удовлетворяющих одному из условий 5 - 7 убывания норм диагоналей из определения 3.2.7. Отметим, что существование разложений единицы в пространствах X и Y в смысле определения 3.2.2 не требуется. При этом $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$, а $\widehat{\mathbb{G}} = \mathbb{T}$.

Теорема 3.4.1. *Пусть для непрерывно обратимого оператора* $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ *относительно некоторой пары представлений* $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ *имеет две ненулевые диагонали (нулевая и первая), т.е. функция* $\Phi_A : \mathbb{T} \to \operatorname{Hom}(X, Y)$ *имеет вид*

$$\Phi_A(\theta) = A_0 + A_1\theta,\ \theta \in \mathbb{T}. \tag{3.2}$$

Обозначим $a_1 = \|A^{-1}\| d_A(1)$. *Тогда для коэффициентов Фурье оператора* $B = A^{-1}$ *справедливы следующие оценки:*

$$d_B(k) \le \begin{cases} \frac{\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k \le \frac{e\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k, & k \ge a_1 \\ \|A^{-1}\|, & 0 < k < a_1; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$d_B(-k) \le \begin{cases} \frac{\|A^{-1}\|}{a_1} k \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1} \le \frac{e\|A^{-1}\|}{a_1} k \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1}, & 1 < a_1 < k \\ \|A^{-1}\|, & 1 < k < a_1 \\ 0, & a_1 \le 1 < k; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$d_B(-1) \le \begin{cases} \|A^{-1}\|, & a_1 \ge 1 \\ 0, & a_1 < 1; \end{cases}$$

$$d_B(0) \le \|A^{-1}\|.$$

При этом

$$\|B\|_1 \le \begin{cases} (2a_1+1)\|A^{-1}\| + 2e\|A^{-1}\| \left((a_1+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^{a_1} + a_1 \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{a_1-1}\right), \\ \quad \textit{если } a_1 > 1; \\ (2e+3)\|A^{-1}\|, \\ \quad \textit{если } a_1 = 1; \\ e\|A^{-1}\| \frac{a_1(a_1+2)}{a_1+1} + \|A^{-1}\|, \\ \quad \textit{если } a_1 < 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Доказательство. Функция Φ_A в виде (3.2) совпадает со своим рядом Фурье и допускает голоморфное расширение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Будем обозначать это расширение тем же символом $\Phi_A : \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}_c(X, Y)$. Кроме того, для каждого $\theta \in \mathbb{T}$ оператор $\Phi_A(\theta)$ обратим и его обратный имеет вид

$$(\Phi_A(\theta))^{-1} = P(\theta) B Q(\theta^{-1}) = \Phi_B(\theta).$$

Воспользуемся свойством устойчивости обратимости операторов при малых возмущениях и найдем кольцо $K(\gamma_1, \gamma_2) = \{z \in \mathbb{C} : \gamma_1 < |z| < \gamma_2\}$, в котором оператор $\Phi_A(z)$ непрерывно обратим. Для этого запишем $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|\theta = t\theta$, где $\theta \in \mathbb{T}$, а $t > 0$, и оценим величину

$$\|\Phi_A(z) - \Phi_A(\theta)\| \le d_A(1)|z - \theta| = d_A(1)|t - 1| = \varphi_A(t).$$

Из соотношений

$$\Phi_A(z) = \Phi_A(\theta) + (\Phi_A(z) - \Phi_A(\theta)) =$$

$$= \Phi_A(\theta)\left(I - \Phi_A(\theta)^{-1}(\Phi_A(z) - \Phi_A(\theta)\right)$$

вытекает, что оператор $\Phi_A(z) \in \mathrm{Hom}_c(X, Y)$ обратим, если для числа $t = |z|$ выполнено условие

$$\|\Phi_A(\theta)^{-1}\|\|\Phi_A(z) - \Phi_A(\theta)\| \leq \|A^{-1}\|\varphi_A(t) < 1. \tag{3.6}$$

Условие (3.6) выполнено при $t \in (\min\{0, \frac{a_1-1}{a_1}\}, \frac{a_1+1}{a_1})$, где $a_1 = \|A^{-1}\|d_A(1)$. При этом будет справедлива оценка

$$\|\Phi_B(z)\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\varphi_A(t)},$$

где $z = t\theta, \quad \theta \in \mathbb{T}$, $t \in \left(\min\left\{0, \frac{a_1-1}{a_1}\right\}, \frac{a_1+1}{a_1}\right)$. Заметим, что из голоморфности функции Φ_A и соотношения

$$\frac{\Phi_B(z+\Delta z) - \Phi_B(z)}{\Delta z} = \frac{\Phi_A^{-1}(z+\Delta z) - \Phi_A^{-1}(z)}{\Delta z} =$$

$$= \Phi_B(z)\Phi_B(z+\Delta z)\frac{\Phi_A(z+\Delta z) - \Phi_A(z)}{\Delta z},$$

$$z, (z+\Delta z) \in K\left(\min\left\{0, \frac{a_1-1}{a_1}\right\}, \frac{a_1+1}{a_1}\right),$$

следует голоморфность функции Φ_B в кольце $K\left(\min\left\{0, \frac{a_1-1}{a_1}\right\}, \frac{a_1+1}{a_1}\right)$, и для нее определены коэффициенты Фурье. Из принципа максимума модуля для голоморфных функций получим следующие оценки норм коэффициентов Фурье функции Φ_B

$$d_B(k) \leq \sup_{\theta\in\mathbb{T}} \|\Phi_B(t\theta)\|t^{-k},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, при $t \geq 1$ имеет смысл оценивать диагонали $d_B(k)$ при $k \in \mathbb{N}$ следующим образом

$$d_B(k) \leq \frac{\|A^{-1}\|t^{-k}}{1 - a_1(t-1)} = \psi_1(t).$$

Найдем точку $t \geq 1$, в которой функция ψ_1 достигает своего минимума. Производная данной функции имеет вид

$$\psi_1'(t) = \|A^{-1}\| \frac{-kt^{-k-1}(1+a_1-a_1t)+a_1t^{-k}}{(1+a_1-a_1t)^2} =$$

$$= \|A^{-1}\| t^{-k-1} \frac{(k+1)a_1t - k(a_1+1)}{(1+a_1-a_1t)^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Такой точкой является точка $t_1 = \frac{k(a_1+1)}{(k+1)a_1}$ при $k \geq a_1$. Поэтому

$$d_B(k) \leq \psi_1(t_1) = \frac{\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k,\ k \geq a_1.$$

Таким образом, при $k \geq a_1,\ k \in \mathbb{N}$,

$$d_B(k) \leq \frac{\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k \leq$$

$$\leq \frac{e\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k.$$

Поскольку $\min\limits_{t\in[1,\infty)} \psi_1(t) = \psi_1(1) = \|A^{-1}\|,$ при $k < a_1,\ k \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$d_B(k) \leq \|A^{-1}\|,\ k < a_1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично получим оценки для $d_B(-k),\ k \in \mathbb{N}$.

$$d_B(-k) \leq \frac{\|A^{-1}\| t^k}{1-a_1(1-t)} = \psi_2(t),\ t \in (0;1].$$

Найдем точку $t \in (0;1]$, в которой функция ψ_2 достигает своего минимума. Производная данной функции имеет вид

$$\psi_2'(t) = \|A^{-1}\| t^{k-1} \frac{(k-1)a_1t - k(a_1-1)}{(1-a_1+a_1t)^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Такой точкой является точка $t_2 = \frac{k(a_1-1)}{(k-1)a_1}$ при $k \geq a_1$. При $a_1 \geq 1$ справедливы оценки

$$d_B(-1) \leq \|A^{-1}\|,$$

$$d_B(-k) \le \frac{\|A^{-1}\|k}{a_1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1} \le$$

$$\le \frac{e\|A^{-1}\|k}{a_1}\left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1},\ k>1,\ k\in\mathbb{N}.$$

При $a_1 < 1$ $d_B(-k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Выберем натуральное число k_0 таким образом, что

$$k_0 - 1 \le a_1 < k_0, \tag{3.7}$$

рассмотрим функцию $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$\xi(\alpha) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha^{k+1},\ \alpha\in\mathbb{R},\ 0<\alpha<1,\ k_0\ge 1, \tag{3.8}$$

и найдем ее производную. Поскольку $0 < \alpha < 1$, ряд в (3.8) образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем α. Поэтому

$$\xi(\alpha) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha^{k+1} = \frac{\alpha^{k_0+1}}{1-\alpha},\ \alpha\in(0,1).$$

Продифференцируем ряд в (3.8) почленно

$$\xi'(\alpha) = \sum_{k=k_0}^{\infty}(k+1)\alpha^k,\ \alpha\in(0,1).$$

С другой стороны, производная функции ξ имеет вид

$$\xi'(\alpha) = \frac{\alpha^{k_0}(k_0+1-k_0\alpha)}{(1-\alpha)^2},\ \alpha\in(0,1).$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}(k+1)\alpha^k = \frac{\alpha^{k_0}(k_0+1-k_0\alpha)}{(1-\alpha)^2},\ \alpha\in(0,1).$$

Подставляя в последнюю формулу $\alpha = \frac{a_1}{a_1+1}$, получаем, что

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k = (a_1+1)^2\left(1+\frac{k_0}{a_1+1}\right)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^{k_0},$$

откуда, с учетом (3.7), следует оценка

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k \leq 2(a_1+1)^2\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^{a_1}.$$

Просуммируем $d_B(k)$ с положительными индексами и, используя вышеизложенные рассуждения, запишем оценку для суммы

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} d_B(k) \leq (k_0-1)\|A^{-1}\| + e\|A^{-1}\|(k_0+a_1+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^{k_0} \leq$$

$$\leq \|A^{-1}\|\left(a_1 + 2e(a_1+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^{a_1}\right). \tag{3.9}$$

Далее получим оценку для $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} d_B(-k)$.

Вначале рассмотрим случай, когда $a_1 > 1$. В этом случае

$$d_B(-k) \leq \frac{e\|A^{-1}\|k}{a_1}\left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1},\ k>1,\ k\in\mathbb{N}. \qquad (3.4)$$

Рассматривая функцию ξ, определяемую формулой (3.8), подставив вместо k_0 число k_0-1 и находя ее производную в точке $\alpha = \frac{a_1-1}{a_1}$, получаем оценки

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} d_B(-k) \leq (k_0-1)\|A^{-1}\| + e\|A^{-1}\|(k_0+a_1-1)\left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k_0-1},\ a_1>1.$$

С учетом (3.7), получим следующие оценки

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} d_B(-k) \leq a_1\|A^{-1}\| + 2e\|A^{-1}\|a_1\left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{a_1-1},\ a_1>1;$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} d_B(-k) \leq \|A^{-1}\| \text{ при } a_1 = 1; \tag{3.10}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} d_B(-k) = 0 \text{ при } a_1 < 1.$$

Из формул (3.9) и (3.10) для $\|B\|_1$ следуют оценки (3.5). Теорема доказана.

Замечание 3.4.1. Полученные оценки уточняют результаты, полученные в теореме 3 статьи А.Г. Баскакова [5].

Качественным результатом данной теоремы является отражение свойства сохранения одностороннего расположения диагоналей обратного оператора при малых значениях величины a_1. Данное свойство может быть использовано при исследовании структуры обратных операторов с помощью представлений операторов.

Замечание 3.4.2. В терминах представлений $\widehat{P}$ и $\widehat{Q}$ (без использования систем проекторов $(P_j), (Q_j)$) возможно доказательство теорем 2-3 из [5].

3.5. О наполненности некоторых алгебр операторов

Из группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ выделим подгруппу $2\pi\mathbb{Z}$ – чисел, кратных 2π и порождённых всеми целыми числами. Не ограничивая общности, можно также считать, что вместо 2π взято любое число из $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим фактор-группу вращений окружности (также, группу одномерного тора) $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Обозначим символом p проекцию группы $\mathbb{R}$ на группу $\mathbb{T}$, которая каждому $t \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие класс $t + 2\pi\mathbb{Z}$. Роль такой проекции может играть отображение $p : t \mapsto e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$.

Подобные рассуждения позволяют каждой 2π-периодической функции (например, 2π-периодическому представлению группы $\mathbb{R}$) взаимно-однозначно соотнести функцию на группе $\mathbb{T}$ с помощью формулы $f = g \circ p$ (например, представление группы $\mathbb{T}$). В связи с этим рассматриваемые в данном параграфе объекты гармонично встраиваются в общую теорию матриц и рядов Фурье операторов.

Пусть $L^1_{2\pi} = L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ – банахова алгебра измеримых 2π-периодических, интегрируемых на отрезке длины 2π функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|f\|_{1,\,2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt$. В качестве операции умножения возьмем свертку $(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)g(t-s)ds$, для всех $f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Обозначим символом $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ банахово пространство непрерывных функций периода 2π с нормой $\|x\|_{C_{2\pi}} =$

$\max\limits_{t\in[0,2\pi]}|x(t)|$.

Определение 3.5.1. Символом $\mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ обозначим подпространство операторов $A\in \mathrm{End}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ вида

$$A = aI + K, \quad a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tag{3.11}$$

где K - интегральный оператор, действующий в банаховом пространстве $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ вида

$$(Kx)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(\tau,u)x(u)du,$$

с ядром $\mathcal{K}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{K}(\tau+2\pi,u+2\pi)=\mathcal{K}(\tau,u)$ для всех $\tau,u\in\mathbb{R}$;

2) $\kappa(\tau)\in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ для всех $\tau\in\mathbb{R}$, где $(\kappa(\tau))(u)=\mathcal{K}(\tau,u),\ u\in\mathbb{R}$;

3) $\kappa\in C_{2\pi}(\mathbb{R},L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ (функция κ непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$).

Замечание 3.5.1. Рассматриваемый оператор K определен корректно, т.е. $Kx\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ для любого $x\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Подпространство $\mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ является банаховой подалгеброй в алгебре $\mathrm{End}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

В качестве изометрического представления группы $\mathbb{R}$ в пространстве $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ возьмём группу сдвигов $S:\mathbb{R}\to\mathrm{End}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, определенную формулой $(S(t)x)(\tau)=x(\tau+t)$, $t,\tau\in\mathbb{R}$. В этом случае функция $\Phi_K:\mathbb{R}\to\mathrm{End}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, определённая формулой $\Phi_K(t)=S(t)KS(-t)$, имеет вид

$$(\Phi_K(t)x)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(\tau+t,v+t)x(v)dv, \quad x\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}). \tag{3.12}$$

Коэффициенты Фурье оператора K из определения 3.5.1 имеют вид:

$$(K_n x)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}_n(\tau,v)x(v)e^{inv}dv,$$

где

$$\mathcal{K}_n(\tau, v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau + t, v + t) e^{-in(t+v)} dt.$$

Коэффициенты Фурье оператора A совпадают с коэффициентами оператора K за исключением нулевого коэффициента, имеющего вид $A_0 = aI + K_0$.

Используя замену переменных в формуле $\mathcal{K}_n$ получаем, что $\mathcal{K}_n(\tau + u, v + u) = \mathcal{K}_n(\tau, v)$ для всех $u, \tau, v \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $\mathcal{K}_n(\tau, v) = \mathcal{K}_n(\tau - v, 0) = \mathcal{K}_n^0(\tau - v)$, то есть функция $\mathcal{K}_n$ зависит, в действительности, от разности аргументов.

Определение 3.5.2. Пусть оператор $A \in \operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ удовлетворяет одному из условий 1)–7) убывания норм диагоналей из определения 3.2.7. Для совокупностей операторов из $\operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, удовлетворяющих таким условиям, введём обозначения по аналогии с определением 3.2.8 о подпространствах операторов абстрактного пространства $\operatorname{Hom}(X, Y)$. То есть, будем пользоваться символами $\operatorname{Gio}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\beta C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_q C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для операторов, удовлетворяющих, соответственно, условиям 1)–5).

Отметим, что совокупности операторов из определения 3.5.2 являются подалгебрами банаховой алгебры $\operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Лемма 3.5.1. *Рассматриваемый оператор* $K \in \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *компактен.*

Доказательство. Докажем данное утверждение с помощью теоремы Арцела, то есть покажем, что оператор K отображает единичный шар $B(0,1) \subset \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ в равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное множество. В силу оценки

$$\|Kx\| = \max_{t \in [0, 2\pi]} \Big| \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(t, s) x(s) ds \Big| \le \max_{t \in [0, 2\pi]} \|\kappa(t)\|_{1, 2\pi} \equiv const$$

для всех $x \in B(0,1)$, где $(\kappa(t))(s) = \mathcal{K}(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, получаем, что множество

$KB(0,1)$ равномерно ограниченно. Для всех $x \in B(0,1)$ из соотношения

$$| (Kx)(t) - (Kx)(t+\tau)| = | \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(t,s)x(s)ds - \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(t+\tau,s)x(s)ds| \leq$$

$$\leq \|x\|_{C_{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} |\mathcal{K}(t,s) - \mathcal{K}(t+\tau,s)|ds \leq \|\kappa(t) - \kappa(t+\tau)\|_{1,\,2\pi},$$

а также из того, что $\kappa \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$, следует, что множество $KB(0,1)$ является равностепенно непрерывным. Лемма доказана.

Лемма 3.5.2. *Рассмотрим в пространстве $L^1_{2\pi}$ оператор сдвига $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Совокупность функций $\{S(\tau)(\mathcal{K}(t,s)) = \mathcal{K}(t,\tau+s),\ \tau,t,s \in \mathbb{R}\}$ равностепенно непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ относительно переменной $\tau \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для доказательства данного факта достаточно показать равностепенную непрерывность при $\tau = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Сначала докажем, что семейство функций $\{\kappa(t),\ t \in \mathbb{R}\} = \{\mathcal{K}(t,\cdot),\ t \in \mathbb{R}\}$ является предкомпактным множеством в $L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Поскольку функция κ непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, и периодична, то она равномерно непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, в силу чего выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ из того, что $|t_1 - t_2| < \delta_1$, всегда следовало, что

$$\|\kappa(t_1) - \kappa(t_2)\|_{1,\,2\pi} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу периодичности функции κ с помощью разбиения $\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[0,2\pi]$ с диаметром δ_1 можно построить конечную $\varepsilon/3$-сеть $\{\kappa(t_k)\}_{k=0}^n$ для множества функций $\{\kappa(t),\ t \in \mathbb{R}\} \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Поскольку множество непрерывных функций плотно в $L^1_{2\pi}$ [17, гл. VII,§ 1.2,теорема 2], для каждой функции $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ можно подобрать последовательность непрерывных периодических функций $\{f_m\} \subset C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, такую, что $\|f - f_m\|_{1,\,2\pi} \to 0$ при $m \to \infty$. Для величины $\varepsilon/9$ выберем такое

$m_0 = m_0(\varepsilon/9, f)$, что для всех $m > m_0$ $\|f - f_m\|_{1,2\pi} \le \varepsilon/9$. В силу равномерной непрерывности периодической функции f_{m_0} выберем такое $\delta = \delta(\varepsilon/9, f_{m_0}) > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau| < \delta$, справедливо, что $\|f_{m_0} - S(\tau)f_{m_0}\|_{1,2\pi} \le \varepsilon/9$. Таким образом, для произвольной функции $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и произвольного числа $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau| < \delta$, из соотношения

$$\|f - S(\tau)f\|_{1,2\pi} \le \|f - f_{m_0}\|_{1,2\pi} + \|f_{m_0} - S(\tau)f_{m_0}\|_{1,2\pi} + \|S(\tau)f_{m_0} - S(\tau)f\|_{1,2\pi}$$

следует, что $\|f - S(\tau)f\|_{1,2\pi} \le \varepsilon/3$.

Теперь для каждой функции из указанной выше конечной $\varepsilon/3$-сети $\{\kappa(t_k)\}_{k=0}^n$ найдем указанным выше образом величины и функции $m_0(\varepsilon/9, \kappa(t_k))$, $f_{m_0(\varepsilon/9,\kappa(t_k))}$, $\delta(\varepsilon/6, f_{m_0(\varepsilon/9,\kappa(t_k))})$ и выберем

$$\delta_2 = \min_{0 \le k \le n}\{\delta(\varepsilon/9, f_{m_0(\varepsilon/9,\kappa(t_k))})\} > 0.$$

При этом из условия $|\tau| < \delta_2$ для всех $k = \overline{0,n}$ будет следовать, что $\|\kappa(t_k) - S(\tau)\kappa(t_k)\| \le \varepsilon/3$.

Фиксируем произвольное $t \in [0, 2\pi]$, выберем соответствующее $t_{k_0} \in \{t_k\}_{k=0}^n$ такое, что $\|\kappa(t) - \kappa(t_k)\|_{1,2\pi} < \varepsilon/3$, возьмем также $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $|\tau| < \delta_3$. Из соотношения

$$\|\kappa(t) - S(\tau)\kappa(t)\|_{1,2\pi} \le$$

$$\le \|\kappa(t) - \kappa(t_k)\|_{1,2\pi} + \|\kappa(t_k) - S(\tau)\kappa(t_k)\|_{1,2\pi} + \|S(\tau)\kappa(t_k) - S(\tau)\kappa(t)\|_{1,2\pi}$$

для произвольного $t \in [0, 2\pi]$ и произвольного $|\tau| < \delta_3$ получим, что

$$\|\kappa(t) - S(\tau)\kappa(t)\|_{1,2\pi} < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5.3. *Для рассматриваемого оператора $K \in \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ функция Φ_K непрерывна в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Для доказательства данного факта достаточно проверить непрерывность в нуле. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливо соотношение

$$\|\Phi_K(t) - \Phi_K(0)\| = \|S(t)KS(-t) - K\| =$$

$$= \sup_{\|x\|\le 1} \|(S(t)KS(-t) - K)x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \max_{\tau\in[0,2\pi]} \| \int_0^{2\pi} (\mathcal{K}(\tau+t, v+t) - \mathcal{K}(\tau, v))x(v)dv\| \le$$

$$\le \max_{\tau\in[0,2\pi]} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau+t, v+t) - \mathcal{K}(\tau, v)|dv = \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau+t, v+t) \pm \mathcal{K}(\tau+t, v) - \mathcal{K}(\tau, v)|dv \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau + t, v) - \mathcal{K}(\tau, v)|dv + \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau + t, v + t) - \mathcal{K}(\tau + t, v)|dv.$$

В силу свойства 3 ядра оператора K, можно подобрать такое $\delta_1 > 0$, что при $|t| < \delta_1$ первое слагаемое в правой части выражения выше будет меньше, чем $\varepsilon/2$. В силу леммы 3.5.2 можно выбрать величину $\delta_2 > 0$ такую, что для всех t, $|t| < \delta_2$ второе слагаемое будет меньшим $\varepsilon/2$.

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для всех t, $|t| < \delta$, будет справедливо

$$\|\Phi_K(t) - \Phi_K(0)\| < \varepsilon.$$

т.е. функция Φ_K непрерывна в равномерной операторной топологии. Лемма доказана.

Определение 3.5.3. Пусть функции $e_n \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}$, определены формулой $e_n(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{R}$. Символом $E_n \in \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}$, обозначим *оператор (поточечного) умножения на экспоненту*: $E_n x = e_n x$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 3.5.4. *Пусть A_n – коэффициенты Фурье некоторого оператора $A \in \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R})$ с непрерывной в равномерной операторной топологии функцией $\Phi_A(t)$, тогда операторы $A_n E_{-n}$ перестановочны со сдвигом при всех $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Покажем, что $S(\omega)A_nS(-\omega) = e^{in\omega}A_n$ при всех $\omega \in \mathbb{R}$ и для любого $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольное $\omega \in \mathbb{R}$.

$$S(\omega)A_nS(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(\omega)S(t)AS(-t)S(-\omega)e^{-int}dt =$$

$$= \frac{e^{in\omega}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(\omega+t)AS(-t-\omega)e^{-in(t+\omega)}dt = \frac{e^{in\omega}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(t)AS(-t)e^{-int}dt = e^{in\omega}A_n.$$

Тогда

$$S(t)A_nE_{-n}S(-t) =$$

$$= S(t)A_nS(-t)(S(t)E_{-n}S(-t)) = S(t)A_nS(-t)e^{-int}E_{-n}$$

$$= A_nE_{-n},$$

т.е. оператор A_nE_{-n} перестановочен со сдвигом. Лемма доказана.

В дальнейших утверждениях потребуется аппроксимативная единица в алгебре $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Определение 3.5.4. Определим аппроксимативную единицу $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ по следующей формуле

$$\Psi_n x = \sum_{|k|\le n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)x_k e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

где x – произвольный элемент $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ с рядом Фурье вида

$$x(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e_k.$$

Данная последовательность операторов сильно сходится к тождественному оператору в пространстве $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, то есть, для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi_n x = x$.

Лемма 3.5.5. *Для того, чтобы оператор $A \in \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ был перестановочен со сдвигом, необходимо и достаточно, чтобы функции e_n были его собственными функциями, т.е. $Ae_n = \alpha_n e_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, где $\alpha_n \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор A перестановочен со сдвигом, т.е. $S(t)A = AS(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $x_n = Ae_n$ и ее сдвиг $S(h)x_n$, $h \in \mathbb{R}$.

$$S(h)x_n = S(h)Ae_n = AS(h)e_n = A(e^{inh}e_n) = e^{inh}Ae_n = e^{inh}x_n.$$

Рассмотрим теперь функцию $\widetilde{x_n} = x_n e_{-n}$ и ее сдвиг $S(h)\widetilde{x_n}$.

$$S(h)\widetilde{x_n} = S(h)(x_n e_{-n}) = S(h)x_n S(h)e_{-n} = e^{inh}x_n e^{-inh}e_{-n} = \widetilde{x_n}.$$

Получаем, что $S(h)\widetilde{x_n} = \widetilde{x_n}$ для всех $h \in \mathbb{R}$, т.е. $\widetilde{x_n}$ - постоянная функция. Обозначим $\widetilde{x_n} = x_n e_{-n} = \alpha_n$, где $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Тогда $x_n = Ae_n = \alpha_n e_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Достаточность. Пусть выполнено $Ae_n = \alpha_n e_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$S(h)AS(-h)e_n = S(h)A(e^{-inh}e_n) = e^{-inh}S(h)Ae_n =$$

$$= e^{-inh}S(h)(\alpha_n e_n) = e^{-inh}\alpha_n S(h)e_n = \alpha_n e_n = Ae_n.$$

Соотношение выше останется справедливым, если заменить e_n элементом $\Psi_m x$ для произвольного $x \in X$. В виду сильной сходимости последовательности $\{\Psi_m\}$ к тождественному оператору для всех $x \in X$ справедливо соотношение $S(h)AS(-h)x = Ax$, т.е. оператор A перестановочен со сдвигом. Лемма доказана.

Лемма 3.5.6. *Пусть $D \in \operatorname{End} C_{2\pi}$ – компактный перестановочный со сдвигом оператор. Тогда D и Ψ_n перестановочны и $\|\Psi_n D - D\| \to 0$ при $n \to \infty$ в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Поскольку оператор D перестановочен со сдвигом, из леммы 3.5.5 вытекает его перестановочность с аппроксимативной единицей Ψ_n.

Для произвольного $x \in B(0,1)$ оценим величину $\|D\Psi_n x - Dx\| = \|\Psi_n Dx - Dx\|$. Пусть $y = Dx$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и в силу компактности оператора D построим конечную $\varepsilon/3$-сеть $DB_{\varepsilon/3}$ образа единичного шара

$D(B(0,1))$. Для рассмотренного y выберем элемент сети $y_0 \in DB_{\varepsilon/3}$ такой, что $\|y-y_0\| < \varepsilon/3$. Поскольку множество $DB_{\varepsilon/3}$ конечно, найдем такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$ и для любого $y_0 \in DB_{\delta/3}$ выполнялось $\|\Psi_n y_0 - y_0\| < \varepsilon/3$. Тогда

$$\|\Psi_n Dx - Dx\| \leq \|\Psi_n(y-y_0)\| + \|\Psi_n y_0 - y_0\| + \|y_0 - y\| \leq$$

$$\leq \varepsilon/3(\|\Psi_n\| + 1) + \|\Psi_n y_0 - y_0\| < \varepsilon.$$

Данная оценка не зависит от конкретного $x \in B(0,1)$, поскольку n_0 выбирается только по $\delta/3$ - сети, зависящей, в свою очередь, только от δ и оператора D. Лемма доказана.

Теорема 3.5.1. *Пусть D - компактный перестановочный со сдвигом оператор из пространства $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, тогда он имеет вид $(Dx)(t) = \int\limits_0^{2\pi} f(t-s)x(s)ds$, где $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (т.е. является оператором свертки с суммируемой функцией).*

Доказательство. Покажем, что $\Psi_n Dx = f_n * x$ для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Рассмотрим данный оператор на функциях e_k. В силу перестановочности со сдвигом согласно лемме 3.5.5 получаем, что $De_k = \alpha_k e_k$, $k \in \mathbb{Z}$, причем $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ в силу компактности оператора D. Тогда

$$D\Psi_n e_k = D\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e_k = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)De_k = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\alpha_k e_k.$$

С другой стороны,

$$(f_n * e_k)(t) = \int\limits_0^{2\pi} f_n(\tau)e^{ik(t-\tau)}d\tau = 2\pi\widehat{f}_n(k)e_k.$$

Отсюда следует, что $\widehat{f}_n(k) = \frac{\alpha_k}{2\pi}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)$, $|k| \leq n$. Тогда $\Psi_n De_k = f_n * e_k$, $k \in \mathbb{Z}$, где f_n имеют вид

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leq n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\alpha_k e_k.$$

А значит и для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $\Psi_n Dx = f_n * x$, причем доказано, что $\|\Psi_n D\| = \|f_n\|_{1,2\pi}$, где $\|\cdot\|_{1,2\pi}$ - норма в $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится. В силу того, что $(D\Psi_n - D\Psi_{n+m})x = (f_n - f_{n+m}) * x$ для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, получаем, что $\|D\Psi_n - D\Psi_{n+m}\| = \|f_n - f_{n+m}\|_{1,2\pi}$, а из сходимости последовательности $D\Psi_n$ к оператору D по норме пространства $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (лемма 3.5.6) следует ее фундаментальность. Тогда последовательность $\{f_n\}$ также будет фундаментальной, что в силу полноты пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ означает ее сходимость.

Обозначим $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, тогда $Dx = f * x$, $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, т.е. D - интегральный оператор вида $(Dx)(t) = \int\limits_0^{2\pi} f(t-s)x(s)ds$. Теорема доказана.

Из теорем 2,3 статьи [5] для рассматриваемых операторов из $\operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ с учётом замечания 3.4.2 вытекают следующие результаты.

Теорема 3.5.2. *Пусть непрерывно обратим оператор* $A = aI + K \in \operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, *т.е. для его коэффициентов Фурье* $A_n = K_n$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $A_0 = aI + K_0$ *выполняется условие* $\|K_n\| \le M\gamma^{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Положим* $\widetilde{\varkappa}(A) = M\gamma\|A^{-1}\|$. *Тогда оператор* $B = A^{-1} \in \operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *и для него справедливы оценки вида*

$$d_B(k) \le \left(2 - \frac{2(1-\gamma^2)}{8\widetilde{\varkappa}(A) + 3(1-\gamma^2)}\right)\|A^{-1}\|\left(1 - \frac{(1-\gamma)^2}{1-\gamma+4\widetilde{\varkappa}(A)}\right)^{|k|},$$

если $k \ne 0$, *и*

$$d_B(0) \le \|A^{-1}\|.$$

В частности,

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \le \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} - 1 + \frac{6+8\gamma+2\gamma^2}{8\widetilde{\varkappa}(A)+3(1-\gamma^2)}\right)\|A^{-1}\|,$$

причем

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \le \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} + \frac{-5+8\gamma+5\gamma^2}{8+3(1-\gamma^2)}\right)\|A^{-1}\| \le$$

$$\le \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2}+1\right)\|A^{-1}\|,$$

если $\widetilde{\varkappa}(A) \ge 1$.

Теорема 3.5.3. *Пусть непрерывно обратимый оператор* $A = aI + K \in \operatorname{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *удовлетворяет условию 6) из определения 3.2.7, т.е. для его коэффициентов Фурье* $A_n = K_n$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $A_0 = aI + K_0$ *выполняется условие* $K_n = 0$ *при* $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,0,1\}$. *Обозначим величину* $\bar{\varkappa}(A) = \max\{\|A_{-1}\|,\|A_1\|\}\|A^{-1}\| \le \varkappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. *тогда для оператора* $B = A^{-1}$ *справедливы следующие оценки*

$$d_B(k) \le \left(\frac{16\bar{\varkappa}(A)+4}{8\bar{\varkappa}(A)+3}\right)\|A^{-1}\|\left(\frac{4\bar{\varkappa}(A)}{1+4\bar{\varkappa}(A)}\right)^{|k|} \le 2\|A^{-1}\|\left(\frac{4\bar{\varkappa}(A)}{1+4\bar{\varkappa}(A)}\right)^{|k|},$$

$$d_B(0) \le \|A^{-1}\|,$$

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \le \left(16\bar{\varkappa}(A) + \frac{3-8\bar{\varkappa}(A)}{3+8\bar{\varkappa}(A)}\right)\|A^{-1}\| \le 16\bar{\varkappa}(A)\|A^{-1}\|.$$

Теперь возможно сформулировать основной результат данной главы в виде следующей теоремы.

Теорема 3.5.4. *Пусть оператор* $A \in \operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *непрерывно обратим и удовлетворяет одному из свойств 1)–7) определения 3.2.7, тогда обратный оператор* $B = A^{-1} \in \operatorname{Gio} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *лежит в той же алгебре и*

1) *принадлежит подалгебре операторов, удовлетворяющих соответствующему условию определения 3.2.7 (для условий 1)–5));*

2) *для норм его диагоналей справедливы оценки теорем 3.5.2, 3.5.3 или 3.4.1, если оператор A удовлетворяет, соответственно, условиям 5), 6) или 7) определения 3.2.7.*

В терминах наполненности пункт 1 теоремы 3.5.4 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.5.5. *Подалгебры* $\mathrm{Gio}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Gio}_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Gio}_\beta C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Gio}_q C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *наполнены в алгебре* $\mathrm{End}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Доказательство теоремы 3.5.4. Так как оператор A непрерывно обратим, то его обратный имеет вид $B = A^{-1} = \frac{1}{a}I + \widetilde{K}$, где $\widetilde{K} = -\frac{1}{a}KA^{-1}$ - компактный оператор (как произведение компактного и ограниченного).

В силу того, что оператор $A \in \mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ удовлетворяет одному из условий определения 3.2.7, из теоремы 3.3.2 с учётом замечания 3.2.5 следует абсолютная сходимость рядов Фурье операторов B и $\widetilde{K}$, то есть операторы B и $\widetilde{K}$ удовлетворяют свойству 1 определения 3.2.7. В силу компактности оператора $\widetilde{K}$ его коэффициенты Фурье $\widetilde{K}_n$ также компактны. В силу леммы 3.5.4 операторы $\widetilde{K}_n E_{-n}$ компактны и перестановочны со сдвигом. По доказанному в теореме 3.5.1 операторы $\widetilde{K}_n E_{-n}$ являются интегральными и имеют следующий вид:

$$(\widetilde{K_n E_{-n}} x)(t) = \int_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s)x(s)ds,$$

где функции $\widetilde{\mathcal{K}}_n \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Тогда оператор $\widetilde{K_n}$ представим в виде

$$(\widetilde{K_n} x)(t) = (\widetilde{K_n} E_{-n} E_n x)(t) = \int_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s)e^{ins}x(s)ds.$$

Заметим, что коэффициенты Фурье операторов K и $\widetilde{K}$ имеют сходную структуру, то есть каждый из операторов является произведением интегрального оператора с ядром, зависящим от разности аргументов, и оператора E_n

$$(K_n x)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_n^0(\tau - v)e^{inv}x(v)dv, \quad (\widetilde{K_n} x)(t) = \int_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s)e^{ins}x(s)ds.$$

Кроме того, $\|\widetilde{K_n} E_{-n}\| = \|\widetilde{K_n}\| = \|\widetilde{\mathcal{K}}_n\|_1$. Тогда, в силу абсолютной сходимости ряда Фурье оператора $\widetilde{K}$, ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s)e^{ins}$ также абсолютно сходится. Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{K}}(t,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s)e^{ins}. \tag{3.13}$$

С учетом данного обозначения для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ имеем

$$(\widetilde{K}x)(t) = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{K}_n x)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s)e^{ins}x(s)ds =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s)e^{ins} \right) x(s)ds = \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{K}}(t,s)x(s)ds.$$

Исследуем функцию $\widetilde{\mathcal{K}}$ и покажем, что она обладает теми же свойствами, что и ядро оператора K. Так как функции $\widetilde{\mathcal{K}}_n \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ и ряд (3.13) абсолютно сходится, то $\widetilde{\mathcal{K}}(t,\cdot) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Непосредственно из определения функции $\widetilde{\mathcal{K}}$ по формуле (3.13) следует, что $\widetilde{\mathcal{K}}(t+2\pi, s+2\pi) = \widetilde{\mathcal{K}}(t,s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}(t,\cdot) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Из соотношения $\widetilde{\mathcal{K}}_n(t-s) = S(t)\widetilde{\mathcal{K}}_n(-s)$ следует непрерывность функции $\widetilde{\mathcal{K}}(\cdot, s)$ по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Теорема доказана.

Замечание 3.5.2. Наполненность некоторых других подалгебр, порожденных интегральными операторами, рассмотрена В.Г. Курбатовым в работе [19]. В вышеуказанной статье была исследована алгебра $\mathcal{J}(L_p(G,X))$ интегральных операторов $J \in \operatorname{End} L_p(G,X)$, где $L_p(G,X)$, $1 \le p \le \infty$, - пространства классов совпадающих локально почти всюду относительно меры Хаара измеримых функций $f : G \to X$, G – компактно-порожденная группа, изоморфная группе $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$, где $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ – компактная абелева группа, X – конечномерное банахово пространство. Операторы $J \in \mathcal{J}(L_p(G,X))$ имеют вид

$$(Jx)(t) = \int\limits_G N(t,s)x(s)ds,$$

(интегрирование ведется по мере Хаара), где ядро N измеримо и при некоторых $M < \infty$ и $\gamma > 0$ удовлетворяет оценке

$$\|N(t,s)\| \le Me^{-\gamma|t-s|}.$$

Для операторов из $\mathcal{J}(L_p(G,X))$ справедлива следующая

Теорема 3.5.6. *Пусть оператор* $I + J$, *где* $J \in \mathbb{J}(L_p(G, X))$, *обратим в* $L_p(G, X)$, *тогда обратный оператор имеет вид* $(I + J)^{-1} = I + J_1$, *где* $J_1 \in \mathbb{J}(L_p(G, X))$.

Список литературы

1. Атья М. Введение в коммутативную алгебру / М. Атья, И. Макдональд. — М.: Мир, 1972. — 160 с.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж: ВГУ, 1987. — 165 с.
4. Баскаков А.Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ / А.Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. — 1997. — Т. 38. – № 1. — С. 14–28.
5. Баскаков А.Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 1997. — Т. 61. — № 6. — С. 3–26.
6. Баскаков А.Г. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А.Г. Баскаков, К.И. Чернышов // Матем. сборник. — 2002. — Т. 193. — № 11. — С. 3–42.
7. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А.Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.
8. Баскаков А.Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69. — № 3. — С. 3–54.
9. Баскаков А.Г. Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов / А.Г. Баскаков // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84. — № 2. — С. 175–192.
10. Баскаков А.Г. Лекции по алгебре : учебное пособие / А.Г. Баскаков. — Воронеж: ВГУ, 2013. — 159 с.
11. Бурбаки Н. Спектральная теория / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1972. — 184 с.

12. Гельфанд И.М. Коммутативные нормированные кольца / И.М. Гельфанд, Д.А. Райков, Г.Е. Шилов. — М.: Физматгиз, 1960. — 315 с.
13. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М: ИЛ, 1962. — Т.1. — 895 с.
14. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: Мир, 1966. — Т.2. — 1064 с.
15. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральные операторы / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М.: Мир, 1966. — Т.3. — 663 с.
16. Желобенко Д.П. Основные структуры и методы теории представлений : монография / Д.П. Желобенко. — М.: МЦНМО, 2004. — 488 с.
17. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.
18. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры / А.И. Кострикин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994. — 320 с.
19. Курбатов В.Г. Об алгебрах разностных и интегральных операторов // Функц. анализ и его прил. — 1990. — Т. 24. — № 2. — С. 98–99.
20. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп / С. Моррис. — М.: Мир, 1980. — 102 с.
21. Наймарк М.А. Нормированные кольца / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1968. — 664 с.
22. Рид М. Методы современной математической физики. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. — М.: Мир, 1977. — Т.1. — 355 с.
23. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 589 с.
24. Росс К. Абстрактный гармонический анализ / К. Росс, Э. Хьюитт. — М.: Мир, 1975. — Т. 2. — 899 с.
25. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975. — 444 с.
26. Струков В.Е. О структуре оператора, обратного к интегральному опера-

тору специального вида / В.Е. Струков // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13. — № 2(1). — С. 22–30.

27. Струков В.Е. О двух определениях спектра вектора / В.Е. Струков // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2014. — Вып. 37. – № 25(196). — С. 50–57.
28. Струков В.Е. Об определениях локального спектра и спектра Карлемана векторов / В.Е. Струков // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 153–160.
29. Струков В.Е. Теорема Бохнера-Филлипса в оценках элементов обратных матриц и ее применение к интегральным операторам / В.Е. Струков // КРОМШ-2010. Сборник тезисов. — 2010. — С. 49.
30. Струков В.Е. Применение абстрактного гармонического анализа при исследовании свойств обратных операторов / В.Е. Струков // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы ВЗМШ С.Г. Крейна (дополнительный выпуск). — 2011. — С. 34–35.
31. Струков В.Е. Оценки элементов матриц обратных операторов / В.Е. Струков // КРОМШ-2011. Сборник тезисов. — 2011. — С. 52.
32. Струков В.Е. Применение абстрактного гармонического анализа при исследовании свойств обратных операторов / В.Е. Струков // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XXII". — 2011. — С. 184–185.
33. Струков В.Е. Структура оператора, обратного к интегральному оператору специального вида / В.Е. Струков // КРОМШ-2012. Сборник тезисов. — 2012. — С. 66.
34. Струков В.Е. О структуре оператора, обратного к интегральному оператору специального вида / В.Е. Струков // Международный научный журнал "Спектральные и эволюционные задачи". — 2012. — Т. 22. — С. 176–180.
35. Струков В.Е. Матрицы обратных операторов и оценки норм их диагоналей / В.Е. Струков // Международный научный журнал «Спектральные и

эволюционные задачи». — 2013. — Т. 23. — С. 143–147.

36. Струков В.Е. Об оценках норм диагоналей и структуре оператора, обратного к оператору, порождённому специальным интегральным оператором / В.Е. Струков // Международная конференция "Спектральная теория и дифференциальные уравнения посвященная 100-летию Б.М. Левитана: Тезисы докладов. — 2014. — С. 121–124.
37. Струков В.Е. Об определениях спектров: Бёрлинга, Карлемана и локального для векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей / В.Е. Струков // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2016». — 2016. — С. 382–384.
38. Халмош П. Теория меры / П. Халмош. — М.: ИЛ, 1953. — 281 с.
39. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.
40. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1969. — 576 с.
41. Arendt W. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. // Monographs in Mathematics. — Basel. Boston. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2011. — Vol. 96. — XIII, 539 p.
42. Arens R. Operational calculus of linear relations / R. Arens // Pacific J. Math — 1961. — Vol. 11. — P. 9–23.
43. Baskakov A.G. Memory estimation of inverse operators / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal // Journal of Functional Analysis. — 2014. — Vol. 267. — Issue 8. — P.2551–2605.
44. Beurling A. Un theoreme sur les fonctions bornees et uniformement continues sur l'axe reel / A. Beurling // Acta Math. — 1945. — Vol. 77. — P.127–136.
45. Bochner S. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings / S. Bochner, R.S. Phillips // Ann. of Math. (2). — 1942. — Vol. 43. — № 3. — P. 409-418.
46. Domar Y. Harmonic analysis based in certain commutative Banach algebras/

Y. Domar // Acta Math. — 1956. — Vol.96. — Issue 1. — P. 1–66.

47. Engel K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel. — New York: Springer-Verlag, 2000. — xxiv, 586 p.

48. Strukov V.E. Structure of the inverse for the integral operator of special kind / V.E. Strukov // Modern problems of Mathematics, Mechanics and Computer Science : To the 95th anniversary of Voronezh State University. — 2013. — P. 78–82.

49. Strukov V.E. The spectral mapping theorems of Gearhart and Greiner / N.M. Alba, F. Hanauska, N. Lindemulder, V.E. Strukov // Operator semigroups and dispersive equations. Workshop of the 16th Internet Seminar on Evolution Equations, 2013. — P. 18–19.

50. Strukov V.E. Estimates of the elements of inverse operators' matrices / V.E. Strukov // CIMC-2013. Book of abstracts. — 2013. — Vol. 1. — P. 46.

51. van Neerven J. The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators / J. van Neerven // Oper. Theory Adv. Appl. — Basel: Birkhäuser, 1996. — Vol. 88. — v, 234 p.