ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Хасан Фаза Лафта Хасан

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент М.А. Сагадеева

ЧЕЛЯБИНСК – 2016

Содержание

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися названиями, например:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{R}_+$ — множество $\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел,

$W_q^m(\Omega)$ — пространство Соболева,

ℓ_q — пространство последовательностей,

$L_q(\Omega)$ — пространство Лебега,

$\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ — линейная оболочка векторов.

2. Элементы множеств и индексы обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавитов, кроме отображений множеств, называемых операторами и обозначаемых заглавными буквами латинского алфавита, например:

$L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — оператор, действующий из пространства $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$;

$\mathrm{dom} L$ — область определения оператора L.

$L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ — обозначает, что L является линейным ограниченным оператором.

3. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначаются, соответственно, тождественный и "нулевой"операторы, области определения которых ясны из контекста.

4. Символ $\bullet$ указывает окончание доказательства.

5. Все рассуждения проводятся в комплексных квазибанаховых пространствах последовательностей. Все контуры ориентированы движением против часовой стрелки и ограничивают область лежащую слева при таком обходе.

Введение

Актуальность темы исследования

Уравнения, неразрешенные относительно старшей производной, по-видимому, впервые встречаются еще в работах А. Пуанкаре в конце 19 века, однако систематическое их изучение началось в середине прошлого века с работ С.Л. Соболева. Поэтому в настоящее время в отношении уравнений, неразрешенных относительно производной, закрепился термин "уравнения соболевского типа", впервые предложенный Р.Е. Шоуолтером в [105]. Уравнения соболевского типа и разрешающие семейства операторов для таких уравнений являются активно изучаемыми областями функционального анализа и неклассических уравнений математической физики соответственно. В последние десятилетия написано большое количество монографий полностью или частично посвященных этой тематике, сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы. В проблематике уравнений, неразрешенных относительно старшей производной, активно работают Р.Е. Шоуолтер (R.E. Showalter), А. Фавини (A. Favini), А. Яги (A. Yagi), И.В. Мельникова, Г.В. Демиденко, С.Г. Пятков, Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, В.Е. Федоров.

Уравнения соболевского типа как абстрактные операторно-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах в терминах относительного спектра начали изучаться в работах [58, 59]. Результаты этой теории о разрешимости таких уравнений в банаховых пространствах представлены в монографии [107].

Одним из обобщений понятия банахова пространства является квазинормированное и квазибанахово пространства.

Напомним, что пространство $(\mathfrak{U},_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным*, если оно является векторным пространством $\mathfrak{U}$ над полем $\mathbb{R}$ с *квазинормой* ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$, которая отличается от нормы только аксиомой «неравенство треугольника»:

$$\forall u, v \in \mathfrak{U} \quad {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| +_{\mathfrak{U}} \|v\|),$$

где константа $C \geq 1$. Если $C = 1$, то квазинорма становится нормой, а квазинормированное пространство превращается в нормированное. Вообще говоря, квазинормированное пространство не нормируемо, но метризуемо [7, гл. 3]. Таким образом, что для квазинормированного пространства корректны понятия фундаментальной последовательности и полноты.

Отметим, что квазинормируемые пространства являются как самостоятельным объектом теоретических исследований [1], [33], так и используются в решении прикладных задач [11].

Полное квазинормированное пространство $\mathfrak{U}$ называется *квазибанаховым.* Любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное — неверно.

Понятие квазибанаховых пространств, по всей видимости, неразрывно связано с понятием банаховых пространств [7, 81]. Однако самостоятельный интерес к квазибанаховым пространствам, как к объекту исследования, появился сравнительно недавно, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона (N. Kalton) [92], кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп [7] и прикладных задач [46], [90].

Известно, что в общем случае в квазибанаховых пространствах не могут быть построены отображения, отличные от нулевого и тождественного [102], например, в пространстве $L_p[a,b]$, $0 < p < 1$. Вместе с тем, это справедливо не для всех квазибанаховых пространств. Так, в пространствах последовательностей ℓ_q, $0 < q < 1$ и построенных на их основе квазисоболевых пространствах ℓ_q^r, $0 < q < 1$, $r \in \mathbb{R}$ существуют линейные отображения, отличные от тривиальных [7, 2]. Подчеркнем, что в данном диссертационном исследовании рассматриваются только такие квазибанаховы пространства, которые в дальнейшем будем называть квазибанаховыми пространствами последовательностей.

Исследование таких уравнений в квазибанаховых пространствах актуально в силу того, что полученные более 20 лет назад результаты в банаховых пространствах, оказались применимы в теории динамических измерений [77], в теории оптимального управления [37], теории устойчивости уравнений соболевского типа [55], а также при изучении уравнений соболевского типа высокого порядка [17]. Уравнения соболевского типа возникают при моделировании различных процессов в естественных и технических науках [85], [107]: уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, моделирующее динамику вязко-упругой жидкости в трещинновато-пористой среде [6], уравнение эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости, уравнение волн Россби [57], система уравнений Соболева, линеаризованная система уравнений Навье – Стокса [34], многие другие системы уравнений гидродинамики. Для исследования такого рода прикладных задач при более общих условиях является всестороннее развитие теории операторно-дифференциальных уравнений.

Постановка задач

Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Степени квазиоператора Лапласа $\Lambda^n u = \{\lambda_k^n u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$ являются линейными непрерывными операторами из квазисоболева пространства ℓ_q^{r+2n} в квазисоболево пространство ℓ_q^r $(0 < q < 1,\ r \in \mathbb{R})$. Рассмотрим класс уравнений вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u, \tag{0.1}$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$, – многочлены, такие, что $m \leq n$. Отметим, что операторно-дифференциальные уравнения называются *динамическими*, если их решения могут быть продолжены на всю числовую ось $\mathbb{R}$ и *эволюционными*, если их решения продолжимы лишь на положительную полуось $\mathbb{R}_+$.

Будем исследовать разрешимость, а также свойства решений уравнения (0.1). При этом будем использовать подходы, используемые для изучения решений абстрактных линейных уравнений вида

$$L\dot{u} = Mu. \tag{0.2}$$

Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ квазисоболевы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ будем называть решением уравнения (0.2), если при подстановке она обращает его в тождество. Решение $u = u(t)$ такого уравнения назовем решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \tag{0.3}$$

если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (0.3) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Рядом исследователей, например в [64], отмечается, что при произвольных начальных данных задача Коши (0.3) неразрешима для уравнения (0.2). Поэтому более целесообразным является рассмотрение задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{0.4}$$

где P — проектор на образ разрешающей группы операторов уравнения (0.2). Отметим, что задача Шоуолтера–Сидорова в невырожденном случае совпадает с задачей Коши, а в вырожденном — может быть решена при произвольных начальных данных.

В работе исследована разрешимость начальных задач (0.3) и (0.4) как для уравнения (0.1), так и для неоднородного уравнения вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u + g, \tag{0.5}$$

где $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}$. Кроме разрешимости в работе исследуются свойства полученных решений. А именно исследуются вопрос существования инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений однородного уравнения (0.1), а также связанный с ним вопрос существования ограниченных решений для неоднородного уравнения (0.5).

Кроме того, в работе исследована разрешимость начально-конечной задачи [15]

$$P_1(u(0) - u_0) = 0, \qquad P_2(u(\tau) - u_\tau) = 0$$

с некоторыми элементами $u_0, u_\tau \in \mathfrak{U}$ для уравнения (0.5), здесь P_1 и P_2 — проекторы при некоторых условиях на относительный спектр порождающих операторов группы.

Целью работы является изучение одного класса линейных динамических уравнений в комплексных квазисоболевых пространствах с получением условий существования ограниченных решений этого класса уравнений.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать разрешимость различных начальных задач и начально-конечной задачи для указанного класса линейных динамических уравнений;

2. Получить условия существования инвариантных пространств решений изучаемых уравнений;

3. Исследовать существование дихотомий решений для однородных уравнений в квазисоболевых пространствах;

4. Исследовать вопросы существования ограниченных решений для однородных и неоднородных уравнений изучаемого класса;

5. Применить полученные результаты при изучении свойств решений для аналога уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной и аналога линеаризованного уравнения Хоффа в квазисоболевых пространствах.

Историография проблематики

Неоднородное уравнение (0.5) можно рассматривать как конкретную интерпретацию операторно-дифференциального уравнения

$$L\dot{u} = Mu + g, \tag{0.6}$$

также как для однородного (0.1) рассматривается уравнение (0.2). Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (0.2) эквивалентно уравнению

$$\dot{u} = Su, \tag{0.7}$$

где операторы $S = L^{-1}M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$.

В банаховых пространствах вопросы разрешимости уравнения (0.7) удобно исследовать с помощью теории групп операторов. В классической теории разрешающих семейств операторов в банаховых пространствах можно выделить три основных случая, когда семейство является: 1) полугруппой сильно непрерывных операторов; 2) полугруппой голоморфных операторов; 3) группой голоморфных операторов. Развитие теории разрешающих полугрупп неразрывно связано с исследованием решений операторно–дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

В первом, самом непростом, случае классическим результатом о разрешимости уравнения (0.7) является теорема Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса (теорема ХИФМФ) [74], устанавливающая биекцию между множеством разрешающих полугрупп операторов и множеством операторов, называемых генераторами этих полугрупп (развитие этой теории см., например, в [99]). Во втором — аналогичный результат сформулирован в теореме Соломяка–Иосиды [109] (отметим также работы [26, 27, 73]). Наконец, в третьем случае подобная взаимосвязь является следствием применения преобразования Лапласа [13, 31, 80].

В свое время полу(группы) уравнения (0.2) в банаховых пространствах рассматривались разным авторами [39, 61, 88, 108]. При этом исследователи отмечали, что характерной чертой (полу) группы уравнения с вырожденным оператором при производной является то, что единицей полугруппы является не тождественный оператор, как в классической теории полугруппы операторов, а проектор на некоторое подпространство. Этот факт, в частности, влечет то, что задача Коши разрешима не для произвольных начальных данных. Такие полугруппы в дальнейшем называется вырожденным, либо полугруппами операторов с ядрам.

Так, разрешимость задачи (0.2),(0.3) изучали математики школы С.Г. Крейна. Продолжая традицию, заложенную в работах К. Вейерштрасса и Л. Кронекера, для исследования разрешимости этой задачи они использовали понятие регулярности операторного пучка $M + \mu L$. (Пучок $M + \mu L$ называется регулярным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow ((M + \mu L)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}))).$$

С.Г. Крейн и В.Б. Осипов [32], при исследовании однородной задачи с линейными ограниченными операторами L, M в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$, применили метод, предложенный С.Г. Крейном и С.Д. Эйдельманом, в основе которого лежит построение функции Ляпунова. Ими было показано, что если обратим оператор M и (или) оператор $M+\mu L$ с некоторым μ, то решения уравнения (0.2) заполняют некоторое собственное подпространство, в котором задача Коши однозначно разрешима.

С.П. Зубова и К.И. Чернышов [18] в банаховых пространствах $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ исследовали уравнения с замкнутым фредгольмовы оператором L и ограниченным оператором M. В случае невырожденности оператора L получена однозначная разрешимость задачи Коши (0.2),(0.3) с начальными значениями из подпространства с конечным дефектом. Показано существование решения неоднородной задачи Коши

(0.3),(0.6) с функциями $f(t)$ некоторой гладкости, согласованными с начальными данными. В вырожденном случае показана неединственность решения задачи (0.2),(0.3), более того это решение существует только в случае, если начальные данные удовлетворяют счетному числу условий. Для того чтобы в этом случае существовало решение неоднородной задачи (0.3),(0.6) необходима бесконечная гладкость функции $f(t)$ и выполнение счетного числа условий согласования с начальными данными.

А.Г. Руткас [51] исследовал задачу (0.3),(0.6) в банаховых пространствах $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ с линейными ограниченными операторами L, M, с использованием методов классического и локального преобразования Лапласа, а также с помощью спектральной теории операторных пучков. В статье охарактеризованы нормальные решения, корректная и диссипативная задача Коши, описано начальное многообразие при различных условиях.

Отметим, что преобразование Лапласа является распространенным методом построения разрешающих семейств операторов [8, 9, 51, 52, 80, 86]. Поэтому также интересны результаты спектральной теории, как сами по себе [42], так и с точки зрения построения разрешающих семейств [76].

A. Favini [86] вводит в рассмотрение задачу

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + f(t) \quad (0 < t < \infty)$$

$$\lim_{t\to 0+} Lu(t) = u_0$$

с замкнутыми линейными операторами L, M. В [87] он рассматривает то же уравнение на конечном отрезке $[0, T]$ с начальным условием $Lu(0) = Lu_0, \quad \mathrm{dom}L \supseteq \mathrm{dom}M \ni u_0, \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{F}$. В терминах оператора $M(\mu L - M)^{-1}$ сформулированы теоремы существования и единственности решения этих задач при некоторых условиях на начальное значение u_0 и гладкость функции $f(t)$.

Н.А. Сидоровым [66] было показано существование и единственность решения задачи (0.2), (0.3) в банаховых пространствах при условии замкнутости, плотной определенности операторов L, M, причем L фредгольмов. Н.А. Сидоров и М.В. Фалалеев [67] исследовали задачу Коши для линейного уравнения типа Соболева (0.6) с замкнутым фредгольмовым оператором L, замкнутым оператором M, банаховыми пространствами $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$; $\mathrm{dom}L \subseteq \mathrm{dom}M$. Кроме того, предполагается, что оператор L имеет полный M-жорданов набор, а g – достаточно гладкая функция. Обобщенное решение уравнения (0.6) построено с использованием теории обобщенных функций в банаховых пространствах, понятий псевдообратного, фундаментального операторов.

С.Г. Пятков исследовал спектральную задачу $Lu = \lambda Bu$, где L неограниченный симметрический положительно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве, B самосопряженный невырожденный оператор. В работах [47, 48] найдены достаточные условия базисности по Риссу собственных функций этой задачи в терминах интерполяционных пространств. В работе [48] показано, что эти условия близки к необходимым. Приведены различные примеры, в которых L – дифференциальный оператор, скажем, эллиптический, а B – оператор умножения на функцию. В работе [49] эти результаты обобщены на случай спектральной задачи с самосопряженными операторами L, B. Более широко эти результаты представлены в [101].

Обобщение классической теории идет сразу по нескольким направлениям. Одно из них – получение некоторых семейств операторов, дающих решение уравнения (0.2) в более общем смысле. Введение понятий экспоненциально ограниченной, n раз интегрированной и локальной n раз интегрированной полугрупп $\{V^t : t \geq 0\}$ [41, 80] позволило в случае, когда задача Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (0.2) некорректна, но оператор A порождает такую полугруппу, получить решение этой задачи

$$v(t) = \frac{d^n V^t}{dt^n} v_0, \quad v_0 \in \mathrm{dom} A^n,$$

устойчивое относительно изменения v_0 по норме $\|v_0\|_n = \|v_0\|_{\mathcal{V}} + \|Av_0\|_{\mathcal{V}} + \cdots + \|A^n v_0\|_{\mathcal{V}}$ (так называемая, $n - \omega$-корректность). В работе [41] устанавливается взаимно однозначная связь между существованием интегрированной полугруппы и существованием обобщенного решения задачи Коши для уравнения (0.7). В [80] W. Arendt обобщил теорему ХИФФМ на случай n раз интегрированных полугрупп.

Определив экспоненциально ограниченную C-полугруппу [41, 80, 84, 93] $\{V^t : t \geq 0\}$, удалось получить решение $v(t) = C^{-1} V^t v_0$ задачи Коши для уравнения (0.7) в случае, когда оператор A является генератором C-полугруппы. Это решение получено для $v_0 \in C[\mathrm{dom} A]$ и устойчиво относительно нормы $\|v_0\|_{C^{-1}} = \|v_0\|_{\mathfrak{U}} + \|C^{-1} v_0\|_{\mathfrak{U}}$. Отметим, что для C-полугрупп также доказан аналог теоремы ХИФФМ.

В 60-е годы в работах [39, 41, 95] появилось понятие регулярной полугруппы распределений, и было доказано, что существование ее является необходимым и достаточным условием обобщенной корректности. Более подробно эти семейства операторов рассмотрены в монографии И.В. Мельниковой и А.И. Филинкова [96], в частности, в ней показана схема связей между генераторами различных классов полугрупп уравнения (0.7).

Отметим также распространение теории C_0-полугрупп на пространства Степанова [25, 28], которые позволяют рассматривать более широкое множество операторов в уравнениях вида (0.7). В настоящее время в г. Воронеже усилиями В.А. Костина создана математическая школа, представители которой изучают пространства Степанова и C_0-полугруппы с особенностями в различных аспектах.

Далее, теория групп операторов в банаховых пространствах [5, 10, 23, 31, 74, 99] была распространена на локально выпуклые пространства. При этом теория равностепенно полугрупп операторов в локально выпуклых пространствах (Л. Шварц [104], H. Komatsu [94], K. Yosida [109]) оказалась очень близка к теории полугрупп в банаховых пространствах: в обоих случаях основным языком и методом исследования служит резольвента производящего оператора полугруппы.

Многие понятия теории полу(групп) изучены в локально выпуклых пространствах [23, 73]. Разрешимость уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах была исследована в работе [109] при различных условиях на пару операторов в уравнениях. В работах [69, 70] были рассмотрены вопросы разрешимости таких уравнений в максимальной степени общности для локально выпуклых пространствах и пространств Фреше, которые являются проективными пределами пространств Соболева.

Что касается разрешимости уравнений в квазибанаховых пространствах, то в силу того, что, как уже отмечалось выше, в таких пространствах даже линейные отображения существуют не всегда, результатов по исследованию уравнений (0.2) в квазибанаховых пространствах не много. Можно отметить монографию [72] в первой части которой В.Г. Фетисов рассматривает уравнения в пространствах Орлича. Операторный подход к таким уравнениям в квазибанаховых пространствах был впервые применен в работах Дж.К. Аль-Делфи [4, 22]. Настоящее исследование лежит в русле этих работ.

Одними из основных объектов исследования данной работы являются вопросы существования экспоненциальных дихотомий и ограниченных решений уравнений соболевского типа первого порядка в квазибанаховых пространствах последовательностей. Наиболее широко ограниченные решения исследованы в области обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной. Интенсивность развития этой теории подтверждается тем, что в известном обзоре Л. Чезари 1959 года [75] список литературы занял 140 страниц. Базовыми работами в этой области являются работы А.М. Ляпунова [35]. Результаты об устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений наиболее полно представлены в работах Ф. Гантмахера [12], Б. Демидовича [14], Э. Коддингтона и Н. Левинсона [24]. В настоящее время вопросы устойчивости, а также существования ограниченных решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений остаются актуальными, но по большей части для нелинейных систем (см. например, работы [43]–[45]).

Условие экспоненциальной дихотомии для систем уравнений с переменными коэффициентами рассматривалось, по-видимому, уже в работе О. Перрона [100], изучавшего нелинейные возмущения таких уравнений. Ранее подобная задача для нелинейного уравнения со стационарной линейной частью исследовалась П. Болем [83]. О. Перрон обобщил результаты Ж. Адамара [89], относящиеся к двумерному дискретному случаю. Причем при данном обобщении условие экспоненциальной дихотомичности решений не была сформулирована явно. Условие существования дихотомий было заменено на условие существования ограниченных решений неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с ограниченной неоднородностью. Эквивалентность этих условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений была установлена А.Д. Майзелем [36].

В случае непрерывной обратимости оператора L уравнение (0.6) можно редуцировать к уравнению

$$\dot{u}(t) = Su(t) + w(t), \tag{0.8}$$

где $S = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$, $\mathrm{dom}S = \mathrm{dom}M$, $w(t) = L^{-1}g(t) : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$. Одним из важных аспектов, в которых исследуется задача (0.3), (0.8), является поиск условий на оператор S, которые гарантируют ограниченность решения в случае ограниченности функции w.

В бесконечномерных банаховых пространствах М.Г. Крейн [29] впервые исследовал вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. Более подробно эти результаты представлены в [30]. К классическим работам по исследованию ограниченных решений уравнения (0.8) и экспоненциальных дихотомий решений уравнения (0.2) относятся монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [13], Х.Л. Массера и Х.Х. Шеффера [38], в которых уравнения рассматривались при условии ограниченности оператора S.

Ю.Л. Далецкий и М.Г. Крейн в монографии [13] исследовали устойчивость решений уравнения (0.7) и (0.8). Ими были найдены условия в терминах спектра оператора S достаточные для существования ограниченных решений неоднородного уравнения и экспоненциальных дихотомий однородного уравнения.

Х.Л. Массерой и Х.Х. Шеффером [38] изучались однородные уравнения (0.7) и неоднородные уравнения (0.8)при условии, что оператор S ограничен и зависит от t. Получены условия допустимости пар подпространств и существования дихотомий решений, причем не только экспоненциальных, но и простых. В более общих условиях, чем в [13], получен критерий существования ограниченного решения.

Отметим, что в банаховых пространствах полный аналог результата А.Д. Майзеля не был получен даже в случае ограниченности оператора S в уравнении (0.8). Этот факт в работах [13], [38] был обоснован при дополнительных предположениях, не являющихся необходимыми. Д. Хенри этот результат получил для дискретных дихотомий [73].

В банаховых пространствах ограниченность решений уравнения (0.6) и экспоненциальные дихотомии решений уравнения (0.2) исследовались Г.А. Свиридюком и А.В. Келлер [21, 63] в случаях (L, σ)-ограниченного и сильно (L, p)-секториального оператора M. Ими были получены условия существования экспоненциальных дихотомий решений уравнения (0.2) в терминах L-спектра оператора M. Кроме того, получены условия существования решений уравнения (0.6), ограниченных на прямой в случае (L, σ)-ограниченного оператора M и на положительной полуоси в случае сильно (L, p)-секториального оператора M. Оставшиеся случаи, а именно существования экспоненциальных дихотомий решений уравнения (0.2) в случае сильной (L, p)-радиальности, а также существование ограниченного на всей оси решения неоднородного уравнения (0.6) в случаях сильной (L, p)-радиальности и сильной (L, p)-секториальности оператора M исследовались В.Е. Федоровым и М.А. Сагадеевой [53, 55, 71].

В данной работе вводится в рассмотрение класс динамических уравнений вида (0.1) в комплексных квазисоболевых пространствах, исследуются вопросы разрешимости различных начальных задач, а также начально-конечной задачи для уравнений (0.1) и (0.5) на основе переноса результатов [4, 22] в комплексные квазисоболевы пространства. Также в работе исследованы свойства решений, а именно, получены условия существования экспоненциальных дихотомий и ограниченных решений этих уравнений, причем возможность вырожденности оператора при производной рассматривается для большей общности.

Методы исследования

В данном исследовании для построения решений уравнений (0.1), (0.5) и изучения их свойств в квазисоболевых пространствах используются классические методы функционального анализа, теории линейных ограниченных операторов, спектральной теории, теории относительно ограниченных операторов.

Для построения решений необходимо обоснование существования в квазибанаховых пространствах последовательностей аналитичности отображения и интегрирования для таких отображений. В основе этого обоснования лежит метризуемость квазибанаховых пространств последовательностей. В случае, если оператор при производной вырожден, у операторов разрешающей группы имеются ядра. Для преодоления трудностей, связанных с этим используется то, что пространства, где действуют операторы, распадаются в прямую сумму ядер и образов разрешающих групп (точнее, их единиц). Причем, в этом случае действие операторов L и M также распадается в соответствии с расщеплением пространств (из ядра – в ядро, из образа – в образ), на ядре полугруппы оказывается обратимым сужение оператора M, а на образе – сужение оператора L. Тем самым исходное уравнение (или задачи Коши, Шоуолтера–Сидорова или начально-конечной задачи для него) редуцируется к системе двух уравнений (двух задач Коши, Шоуолтера–Сидорова), а для начально-конечной задачи к системе из трех уравнений, заданных на взаимно дополнительных подпространствах. Уравнение на образе (в случае начально-конечной задачи получаем два таких уравнения) имеет вид уравнения (0.6), при этом оператор S является инфинитезимальным генератором уже невырожденной группы соответствующего класса, и исследование его разрешимости и свойств его решений проводится классическими методами. Другое уравнение принимает вид

$$H\dot{u}(t) = u(t) + v(t),$$

и получить его решение в явном виде и, соответственно, исследовать его свойства позволяет нильпотентность оператора H, автоматически следующая из условия (L, p)-ограниченности оператора M.

Новизна полученных результатов

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Введен в рассмотрение класс динамических уравнений в комплексных квазисоболевых пространствах.

2. Показана относительная ограниченность оператора правой части и исследована разрешимость указанного класса уравнений с обобщением таких результатов на случай комплексных квазибанаховых пространств последовательностей.

3. Получены условия существования инвариантных пространств. Исследованы необходимые и достаточные условия существования ограниченных на полуоси решений для однородных уравнений.

4. Получены условия существования экспоненциальных дихотомий решений. Определены условия существования ограниченных решений для неоднородных уравнений с построением и исследованием свойств оператор-функции Грина.

5. В работе рассматриваются свойства решений аналогов известных неклассических уравнений математической физики — линеаризованного уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной — в комплексных квазисоболевых пространствах.

Теоретическая и практическая значимость исследования

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии теории динамических уравнений соболевского типа. А именно в работе обобщены результаты о разрешимости уравнений соболевского типа на случай комплексных квазисоболевых пространств и получены условия существования экспоненциальных дихотомий и ограниченных решений одного класса уравнений в таких пространствах.

Отметим, что именно ограниченные решения представляют наибольший интерес в практических приложениях, так как именно такое поведение решений системы считается наиболее «физичным». Кроме того, информация об инвариантных подпространствах решений и экспоненциальных дихотомиях позволяет исследователям, выбирая начальные данные, получать результаты с некоторыми свойствами. А именно, выбрав начальное значение из одного инвариантного пространства, получим возрастающие решения, а из другого — убывающие.

Исследование продолжает развитие теории уравнений, неразрешенных относительно производной, которая неразрывно связана с решением неклассических уравнений математической физики. Получение и расширение теоретической базы позволяет не только начать исследования неклассических уравнений в квазибанаховых пространствах последовательностей и различных задач для такого рода, но и рассматривать возможность более эффективного решения ряда технических задач. Возможность приложения полученных теоретических результатов к различным областям научных исследований свидетельствует о практической значимости исследования.

Апробации

Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на:

– Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2014),

– научных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ "Технические науки. Естественные науки. Социально-гуманитарные науки. Экономика. Управление. Право." (Челябинск, 2014, 2015),

– Воронежских зимних математических школах "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2014, 2016) [113, 116],

– Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2015) [114],

– Международной научной конференции "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ" (Уфа, 2015) [115],

– семинаре профессора Г.А. Свиридюка "Уравнения соболевского типа" в Южно-Уральском государственном университете.

Результаты диссертации опубликованы в работах [110] – [112].

Необходимо отметить, что в работах [111], [112], выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит только постановка задачи и некоторые идеи доказательств. Все доказательства выполнены автором диссертации самостоятельно.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении обоснована актуальность исследования, определены цель и задачи исследования, дана историография проблематики исследования, представлены новизна и методы исследования, теоретическая и практическая значимость результатов.

Первая глава содержит результаты, относящиеся к предварительным сведениям. Результаты, сформулированные в первых двух параграфах этой главы не выносятся на защиту. Вместе с тем, здесь приведены доказательства ряда необходимых результатов, которые в известной литературе приводятся без доказательств. В первом параграфе приведены определения и понятия, связанные с квазибанаховыми пространствами последовательностей. Приведены теорема о вложениях, теорема об эквивалентности непрерывности и ограниченности операторов. Во втором параграфе рассматриваются функции линейных ограниченных операторов. Приведена теорема об обратимости близкого к единичному оператору, показано, что этот обратный имеет вид ряда и приводится радиус его сходимости. Аналогично введены понятия резольвентного множества и спектра линейного непрерывного оператора, а также резольвента этого оператора, представимая в виде ряда. Интегрирование по замкнутому контуру в комплексной плоскости для аналитических вектор-функций со значениями в квазибанаховом пространстве последовательностей введено с использованием вычетов. Кроме того доказана теорема об отображении спектра для линейных непрерывных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. В третьем параграфе приведены понятия и свойства относительных резольвент в квазибанаховых пространствах последовательностей, теорема о расщеплении, введено понятие (L, p)-ограниченных операторов. Также здесь доказана относительно спектральная теорема. В четвертом параграфе доказаны результаты о разрешимости рассматриваемого класса уравнений при различных начальных условиях.

Вторая глава посвящена вопросу существования ограниченных на полуоси однородных уравнений указанного класса, а именно, по большей части, содержит результаты исследования свойств решений класса уравнений при условии, что многочлен в левой уравнения имеют бошую степень, чем многочлен в правой части. В первом параграфе, основываясь на относительно спектральной теореме рассматриваются инвариантные подпространства решений изучаемого класса уравнений. Кроме того, строится решение начально-конечной задачи. Во втором параграфе рассматриваются ограниченные на полуоси решения для однородных уравнений исследуемого класса. В третьем параграфе рассматривается аналог линеаризованного уравнения Хоффа в квазисоболевых пространствах. Получены результаты о разрешимости начальных задач и начально-конечной задачи, а также о существовании ограниченных на полуоси решений для однородного аналога линеризованного уравнения Хоффа. Наконец, в четвертом параграфе приведены решения начальных задач и начально-конечной задачи, а также получены условия существования ограниченных на полуоси решений для однородного аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной.

В третьей главе диссертации исследуются вопросы существования экспоненциальных дихотомий и ограниченных на всей оси решений. А именно исследуются свойства решений класса уравнений при условии, что многочлены в левой и правой части уравнения имеют одинаковую степень. В первом параграфе доказана теорема о существовании экспоненциальных дихотомий решений для однородных уравнений. Во втором параграфе построена оператор-функция Грина для неоднородного уравнения и исследованы ее свойства. Третий параграф содержит доказательство теоремы о существовании ограниченного на всей оси решения неоднородного уравнения, а также теорему об ограниченном на полуоси решения такого уравнения. Наконец, в четвертом параграфе все полученные результаты этой главы применены при исследовании свойств решений аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной.

В заключении представлены выводы о результатах исследования, а также представлены перспективы развития тематики работы.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Теоремы о разрешимости одного класса динамических уравнений в комплексных квазибанаховых пространствах с различными начальными и начально-конечным условиями.

2. Относительно спектральная теорема в квазисоболевых пространствах.

3. Теоремы о существовании инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений для однородных уравнений указанного класса.

4. Теоремы об ограниченности на полуоси решений однородных уравнений указанного класса.

5. Теоремы об ограниченности решений неоднородных уравнений указанного класса.

6. Построение аналога линеаризованного уравнения Хоффа и аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в комплексных квазисоболевых пространствах, а также исследование свойств решений этих уравнений.

1. Разрешимость одного класса динамических уравнений в квазисоболевых пространствах

1.1. Пространство линейных ограниченных операторов в комплексных квазисоболевых пространствах

Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторое вещественное линейное пространство.

Квазинормой на линейном пространстве $\mathfrak{U}$ называется отображение ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее следующим аксиомам

(i) $\forall u \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq 0$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 0 \ \Leftrightarrow\ u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$;

(ii) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|$;

(iii) $\forall u, v \in \mathfrak{U}\ \ {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| + \ {}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$, где константа $C \geq 1$ и не зависит ни от u, ни от v.

Квазинормированным линейным пространством называется пара $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$. Это понятие является обобщением понятия нормированного пространства, так как при $C = 1$ квазинорма становится нормой. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ отождествим с линейным пространством $\mathfrak{U}$.

Квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ естественным образом задает топологию на $\mathfrak{U}$. Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств вида $\{u \in \mathfrak{U} :\ {}_{\mathfrak{U}}\|u - v\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В случае $C = 1$ это топология определяется посредством метрики $\rho(u, v) = {}_{\mathfrak{U}}\|u - v\|$. Однако, квазинормированное пространство метризуемо и в случае $C > 1$.

Лемма 1.1.1. (лемма 3.10.1 [7]). *Пусть $\mathfrak{U}$ – квазинормированное пространство и пусть число α определяется уравнением $(2C)^\alpha = 2$. Тогда на $\mathfrak{U}$ существует метрика $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ такая, что при* *всех* $u \in \mathfrak{U}$

$$d(\mathbf{0}, u) \leq {}_{\mathfrak{U}}\|u\|^{\alpha} \leq 2d(\mathbf{0}, u). \tag{1.1.1}$$

Из этой леммы следует, что мы можем определить понятие *фундаментальной последовательности* $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}: \lim\limits_{n,l\to\infty} {}_{\mathfrak{U}}\|u_n - u_l\| = 0$, и следовательно можно определить понятие полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым.* Предел $u \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ будем обозначать символом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

Пространства последовательностей ℓ_q, $q \in \mathbb{R}_+$ банаховы при $q \in [1, +\infty)$ и квазибанаховы при $q \in (0, 1)$. При $q \in (0, 1)$ константа $C = 2^{\frac{1-q}{q}}$, что легко получить из оценки

$$(a + b)^q \leq a^q + b^q \leq 2^{1-q}(a + b)^q \tag{1.1.2}$$

для чисел $a, b \geq 0$. Пространства ℓ_q при $q \in (0, 1)$ будем называть *квазбанаховыми пространствами последовательностей.*

Замечание 1.1.1. В силу леммы 1.1.1 пространство ℓ_q при $q \in (0, 1)$ метризуемо и параметр $\alpha = q$.

Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. По аналогии с пространствами Соболева W_p^m введем в рассмотрение *квазисоболевы пространства*

$$\ell_q^r = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{C}: \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{r}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\},$$

где $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_q^r квазибанаховы при всех $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}_q^r\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{r}{2}} |u_k| \right)^q \right)^{1/q},$$

причем они тоже банаховы только если $q \in [1, +\infty)$. Если $q \in (0, 1)$, то константа $C = 2^{\frac{1-q}{q}}$. Заметим еще, что если $r = 0$, то $\ell_q^0 = \ell_p$.

Замечание 1.1.2. Как и в замечании 1.1.1 пространство ℓ_q^r $(r \in \mathbb{R})$ при $q \in (0, 1)$ метризуемо и параметр $\alpha = q$.

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — два квазибанаховых пространства последовательностей. Будем говорить, что

— $\mathfrak{U}$ *вложено в* $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

— $\mathfrak{U}$ *плотно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

— $\mathfrak{U}$ *плотно и непрерывно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq C \cdot {}_{\mathfrak{F}}\|u\|$, где $C \in \mathbb{R}_+$ — некоторая константа, не зависящая от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1.1. *При всех $q \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $p \leq r$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_q^r \hookrightarrow \ell_q^p$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$ и $u \in \ell_q^r$, $0 < q < 1$, тогда

$$u \in \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{r}{2}} |u_k|)^q < \infty \right\}.$$

Возьмем, $u_k = \lambda_k^{-s} v_k$, где $s \in \mathbb{R}$, тогда получим

$$u \in \left\{ \{v_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{p}{2}} |v_k|)^q < \infty, \text{ где } p = r - s \right\} = \ell_q^p.$$

Далее,

$${}^p_q\|u\|^q = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{p}{2}} |v_k|)^q = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{r}{2}} |u_k|)^q \cdot (1/\sqrt{\lambda_k})^{sq} \leq$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{r}{2}} |u_k|)^q \cdot \sup_k (1/\sqrt{\lambda}_k)^{sq}.$$

Отсюда,

$${}_q^p\|u\| \le {}_q^r\|u\| \cdot (\sup_k (1/\sqrt{\lambda}_k)^{sq})^{1/q}$$

Если положим, $C = (\sup_k (1/\sqrt{\lambda}_k)^{sq})^{1/q}$, получим ${}_q^p\|u\| \le C \cdot {}_q^r\|u\|$.

Поэтому, ℓ_q^r непрерывно вложено в ℓ_q^p. Докажем теперь плотность вложения. Пусть $u \in \ell_q^p$, тогда рассмотрим последовательность $\{u_n\}$, где

$$u_1 = (u_1, 0, 0, \ldots),\ u_2 = (u_1, u_2, 0, 0, \ldots),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ u_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots), \ldots.$$

Очевидно, $\{u_n\} \subset \ell_q^r$, причем $u_n \to u$ в квазинорме l_q^p. •

Теперь пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\Big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\Big)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$${}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \le K \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|,$$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, таких что $\mathrm{dom}\, L = \mathfrak{U}$ является линеалом, который мы обозначим символом $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. На этом линеале определим неотрицательную функцию

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|.$$

Теорема 1.1.2. [4] *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ такой, что* $\mathrm{dom}\ L{=}\mathfrak{U}$, *непрерывен точно тогда, когда он ограничен.*

Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *обратимым*, если существует оператор $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, такой что $L^{-1}L = \mathbb{I}_{\mathfrak{U}}$, $LL^{-1} = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$. Обратимый оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *непрерывно обратимым*, если $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Непрерывный оператор называется *топлинейным изоморфизмом*, если $\mathrm{dom}\ L^{-1} = \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1.3. (аналог теоремы Банаха) [4]. *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, тогда биективный оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — топлинейный изоморфизм.*

Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ монотонно возрастающая последовательность и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Рассмотрим *квазиоператор Лапласа* $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$.

Теорема 1.1.4. [2] *При всех $q \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_q^{r+2} \to \ell_q^r$ — топлинейный изоморфизм.*

Обратный оператор $\Lambda^{-1}u = \{\lambda_k^{-1}u_k\}$ (*квазиоператор Грина*). Очевидно, $\Lambda\Lambda^{-1}u = u$ при всех $u \in \ell_q^r$, и $\Lambda^{-1}\Lambda u = u$ при всех $u \in \ell_q^{r+2}$.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — линеал всех линейных ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.1.5. [4] *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, тогда $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — квазибанахово пространство с квазинормой ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\|$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство последовательностей, $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$

$(\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{F}))$ — квазибанахово пространство линейных ограниченных операторов.

Теорема 1.1.6. [4] *Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| < 1/C$. Тогда оператор $T = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M$ непрерывно обратим и*

$$
{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|T^{-1}\| \leq \frac{C}{1 - C\cdot {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|},
$$

где C — константа из определения квазинормы.

Определение 1.1.1. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, если существует оператор $R_\lambda(M) = (\lambda\mathbb{I} - M)^{-1}$ (*резольвента* оператора M). Множество регулярных точек $\rho(M)$ оператора M называется *резольвентным множеством* оператора M.

Определение 1.1.2. Комплексное число λ, не являющееся регулярным называется *спектральной точкой* или спектральным значением оператора M. Множество спектральных точек $\sigma(M)$ называется *спектром* оператора M. Таким образом, $\sigma(M) = \mathbb{C} \setminus \rho(M)$.

Спектр всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leq C\cdot {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|$. Более точно, *спектр $\sigma(M)$ лежит в круге, радиус которого равен* $C \cdot r_M$, где

$$
r_M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^n\|}.
$$

При $|\lambda| > C\cdot r_M$ всегда существует резольвента и $R_\lambda(M) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{M^k}{\lambda^{k+1}}$. Для резольвенты выполняется *тождество Гильберта*

$$
R_\lambda(M) - R_\mu(M) = (\mu - \lambda)R_\lambda(M)R_\mu(M), \quad \lambda, \mu \in \rho(M), \qquad (1.1.3)
$$

которое проверяется непосредственно.

Теорема 1.1.7. [4] *Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Тогда резольвентное множество $\rho(M)$ открыто, а резольвента $R_\lambda(M)$ оператора M является аналитической функцией переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ в окрестности регулярной точки $\mu \in \rho(M)$, причем для $|\mu - \lambda| < 1/(C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \|R_\mu(M)\|)$ справедливо*

$$R_\lambda(M) = R_\mu(M) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R_\mu^{k+1}(M). \tag{1.1.4}$$

1.2. Аналитические функции в пространстве линейных ограниченных операторов

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$. Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Будем говорить, что $f(z)$ *аналитична в* D, если для любого $z_0 \in D$ существует окрестность V_{z_0}, в которой функция $f(z)$ может быть представлена как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n, \qquad f_n \in \mathfrak{F}.$$

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

где $a \in \mathbb{C}$, элементы $c_n \in \mathfrak{F}$, будем называть *рядом Лорана.* Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификацию изолированных особых точек будем понимать также, как в теории функций комплексного переменного.

В силу [102, Теорема 3.5.2] для аналитических функций со значениями в квазибанаховых пространствах последовательностей существует интеграл Римана на отрезке. Несобственный интеграл будем понимать стандартным образом, как предел соответствующих интегралов Римана.

Лемма 1.2.1. *Пусть $q \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$ и вектор-функция $f : \mathbb{R}_+ \to \ell_q^r$ аналитична и существует $\widetilde{f} \in \ell_q^r$, что $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} |f_k(t)| = \widetilde{f}_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-at} dt$$

сходится в ℓ_q^r для любого $a > 0$.

Доказательство. По [102, Теорема 3.5.2] для любого $b > 0$ существует $\int\limits_0^b f(t)e^{-at}dt$ как интеграл Римана от аналитической функции. Обозначим $I_n = \int\limits_0^n f(t)e^{-at}dt$. Покажем, что последовательность $\{I_n\}$ образует последовательность Коши.

Действительно, рассмотрим

$$ {}_q^r\|I_n - I_m\|^q = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{r/2} \left| \int\limits_m^n f_k(t) e^{-at} dt \right| \right)^q \leq $$

$$ \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{r/2} \left| \int\limits_m^n e^{-at} dt \right| |\widetilde{f}_k| \right)^q \leq \frac{2e^{-amq}}{a} C \, {}_q^r\|\widetilde{f}\|^q. $$

А значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такой , что для всех $m, n > N$ выполнено ${}_q^r\|I_n - I_m\| < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{I_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства ℓ_q^r

существует элемент $I \in \ell_q^r$, что $I = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Этот элемент и обозначим

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt. \quad \bullet$$

Интеграл от вектор-функции $f(z)$ по замкнутому гладкому контуру $\Gamma \subset \mathbb{C}$ будем понимать как сумму вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура Γ, умноженную на коэффициент $2\pi i$. Тогда ясно, что для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

Пусть $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, обозначим через K_M класс всех функций $\varphi(\lambda)$ комплексного переменного, *кусочно-аналитических на спектре* $\sigma(M)$. Это означает, что функция $\varphi \in K_M$, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения функции $\varphi(\lambda)$ состоит из конечного числа открытых связных компонент, объединение которых содержит спектр $\sigma(M)$ оператора M, причем каждая компонента содержит по крайней мере одну точку спектра;

2) функция $\varphi(\lambda)$ кусочно–аналитична, то есть аналитична в каждой компоненте своей области определения.

Если две функции $\varphi_1, \varphi_2 \in K_M$ совпадают на некоторой открытой окрестности спектра $\sigma(M)$, то, очевидно, они будут аналитическим продолжением друг друга. Такие функции считаются равными.

Для $\varphi \in K_M$ всегда найдется гладкий, сложный, вообще говоря, контур Γ_M, охватывающий спектр $\sigma(M)$. Другими словами, Γ_M распадается на конечное число границ некоторых открытых множеств, объединение которых принадлежит области определения φ и накрывает спектр $\sigma(M)$, каждый из жордановых контуров «положительно» ориентирован, т. е. так, чтобы при движении в заданном направлении по контуру соответствующее множество оставалось слева. После этого положим для $\varphi \in K_M$

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \varphi(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda.$$

Из теоремы Коши следует независимость интеграла от выбора контура. В частности, операторная экспонента e^{Mt} и сам оператор M задаются следующим образом:

$$e^{Mt} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} e^{\lambda t} R_\lambda(M) d\lambda, \qquad M = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \lambda R_\lambda(M) d\lambda.$$

Теорема 1.2.1. *Пусть* $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ *и функция* $\varphi \in K_M$. *Тогда*

(i) *оператор* $\varphi(M) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ *обратим тогда и только тогда, когда* $\varphi(\lambda) \neq 0$ *при каждом* $\lambda \in \sigma(M)$;

(ii) $\sigma(\varphi(M)) = \varphi(\sigma(M))$.

Доказательство. (i) Пусть $\varphi(\lambda)$ не имеет нулей на $\sigma(M)$. Тогда функция $\psi = 1/\varphi$ аналитична на некотором можестве D_1 таком, что $\sigma(M) \subset D_1 \subset D$. Так как $\varphi\psi = 1$ в D_1, то $\varphi(M)\psi(M) = \mathbb{I}$. А следовательно, $\varphi(M)$ обратим. Обратно, если $\varphi(\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \in \sigma(M)$, то существует функция $\eta \in K_M$, что для $\lambda \in D$ выполнено $\varphi(\lambda) = (\alpha - \lambda)\eta(\lambda)$, откуда получим

$$\varphi(M) = (\alpha\mathbb{I} - M)\eta(M).$$

Так как по условию $(\alpha\mathbb{I} - M)$ необратим, то из последнего равенства получаем, что $\varphi(M)$ также необратим.

(ii) Зафиксируем $\beta \in \mathbb{C}$. По определению 1.2.2, $\beta \in \sigma(\varphi(M))$ тогда и только тогда, когда оператор $\beta\mathbb{I} - \varphi(M)$ необратим. Применяя утверждение (i) к функции $\beta - \varphi(\lambda)$ получим, что это возможно в том и только том случае, если функция $\beta - \varphi(\lambda)$ имеет нуль на множестве $\sigma(M)$, т.е. если $\beta \in \varphi(\sigma(M))$. •

Рассмотрим оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, спектр которого образует несвязное множество. Замкнутую часть спектра, имеющую в нем замкнутое дополнение, называют *спектральным множеством.* Предположим, что $\sigma(M) = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \sigma_k(M)$, где $\sigma_k(M)$ $(k = \overline{1,m})$ — непересекающиеся спектральные множества. Будем считать, что контур Γ_M состоит из непересекающихся частей Γ_k $(k = \overline{1,m})$, каждая из которых окружает область D_k, содержащую соответствующее спектральное множество $\sigma_k(M)$.

Зададим функции $\varphi_k(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in D_k, \\ 0, & \text{если } \lambda \in D_j, \quad j \neq k. \end{cases}$

Функции $\varphi_k \in K_M$ $(k = \overline{1,m})$, и поэтому имеют смысл операторы

$$P_k = \varphi_k(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \varphi_k(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} R_\lambda(M) d\lambda.$$

Последний интеграл в этом равенстве известен под названием *интеграл Ф. Рисса.*

Поскольку в области $D = \bigcup\limits_{k=1}^{m} D_k$ выполняются соотношения

$$\varphi_k(\lambda)\varphi_j(\lambda) = \delta_{kj}\varphi_k(\lambda)$$

(δ_{kj} – символ Кронекера) и $\sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k(\lambda) \equiv 1$, то справедливы равенства

$$P_k P_j = 0 \ (k \neq j); \ P_k^2 = P_k; \ \sum_{k=1}^{m} P_k = I.$$

1.3. Относительные резольвенты и относительно спектральная теорема

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Лемма 1.3.1. [4] *Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, и, следовательно, $\sigma^L(M)$ всегда замкнут.*

Определение 1.3.1. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой и левой L-резольвентой* оператора M.

Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда из тривиальных тождеств:

$$(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = \mathbb{I} + (\lambda - \mu) L(\mu L - M)^{-1},$$

$$(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1} L \tag{1.3.1}$$

справедливы L-резольвентные тождества, являющиеся аналогами тождества Гильберта (1.1.3):

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1} L (\lambda L - M)^{-1}, \tag{1.3.2}$$

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) R^L_\mu(M) R^L_\lambda(M), \tag{1.3.3}$$

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) L^L_\mu(M) L^L_\lambda(M). \tag{1.3.4}$$

Теорема 1.3.1. [4] *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.*

Замечание 1.3.1. В силу тождеств (1.3.3) ((1.3.4)), доказательство того, что правая (левая) L-резольвенты оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$ очевидно.

Пусть для относительного спектра $\sigma^L(M)$ выпонено условие

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \bigcup \sigma_1^L(M),\ \sigma_1^L(M) \neq \oslash,\ \text{причем} \\ \text{существует ограниченная область } \Omega_1 \subset \mathbb{C} \text{ с границей} \\ \partial\Omega_1 \text{ класса } C^1;\ \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \text{ и } \overline{\Omega}_1 \cap \sigma_0^L(M) = \oslash. \end{array}\right\} \quad (1.3.5)$$

Пусть $\gamma_1 = \partial\Omega_1$, построим операторы

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu \quad \text{и} \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} L_\mu^L(M) d\mu, \qquad (1.3.6)$$

причем интегралы понимаются в смысле Римана. По построению операторы $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.3.2. *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, *причем выполнено условие* (1.3.5). *Тогда операторы* P_1 *и* Q_1 *– проекторы.*

Доказательство. По построению оператор $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, поэтому для доказательства достаточно показать его идемпотентность.

Из условия (1.3.5) и замкнутости $\sigma^L(M)$ следует существование замкнутого контура $\gamma_2 \subset \mathbb{C}$ и $\gamma_2 \cap \sigma^L(M) = \oslash$, ограничевающего область, содержащую контур γ_1. Из аналитичности резольвенты $R^L(M)$ следует, что

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} R_\mu^L(M) d\mu.$$

Откуда, используя тождество (1.3.3), получим следующее

$$P_1^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_2} \int\limits_{\gamma_1} R_\lambda^L(M) R_\mu^L(M) d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\gamma_2} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu + \int\limits_{\gamma_2} R_\lambda^L(M) d\lambda \int\limits_{\gamma_1} \frac{d\mu}{\lambda - \mu} \right) = P_1,$$

где точка $\mu \in \gamma_1$ лежит внутри области, ограниченной контуром γ_2, а точка $\lambda \in \gamma_2$ находится вне области, ограниченной контуром γ_1 и в силу теоремы о вычетах

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} = 2\pi i, \qquad \int\limits_{\gamma_1} \frac{d\mu}{\lambda - \mu} = 0.$$

Утверждение относительно Q_1 доказывается аналогично. •

Положим $\mathfrak{U}^{11}$ ($\mathfrak{F}^{11}$) $= \mathrm{im} P_1$ ($\mathrm{im} Q_1$) и через L_{11} (M_{11}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{11}$.

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнены условия леммы* 1.3.2. *Тогда*

(i) *операторы* $L_{11}, M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$;

(ii) *существует оператор* $L_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{11}; \mathfrak{U}^{11})$;

(iii) $\sigma^{L_{11}}(M_{11}) = \sigma_1^L(M)$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из построения операторов P_1 и Q_1, так как $LP_1 = Q_1 L$. Откуда ясно, что $L_{11} : \mathfrak{U}^{11} \to \mathfrak{F}^{11}$. Далее рассмотрим два очевидных тождества

$$(\mu L - M)^{-1} M = \mu R_\mu^L(M) - I$$
$$M(\mu L - M)^{-1} = \mu L_\mu^L(M) - I,$$

из которых получаем
$$L(\mu L - M)^{-1} M = \mu L(\mu L - M)^{-1} L - L$$
$$M(\mu L - M)^{-1} L = \mu L(\mu L - M)^{-1} L - L,$$

а следовательно верно $M R_\mu^L(M) = L_\mu^L(M) M$.

Откуда в силу того, что интегралы (1.3.6) понимаются в смысле Римана, а оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, то

$$MP_1u = Q_1Mu.$$

Соответственно $M_{11} : \mathfrak{U}^{11} \to \mathfrak{F}^{11}$.

(ii) В силу того, что для любых $u \in \mathfrak{U}^{11}$ и $f \in \mathfrak{F}^{11}$ справедливы $u = P_1u, \quad f = Q_1f$, то, в силу леммы 1.3.2, оператор L_{11}^{-1} равен сужению на $\mathfrak{F}^{11}$ оператора $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_1}(\mu L - M)^{-1}d\mu$.

(iii) Из способа задания операторов $L_{11}, M_{11} : \mathfrak{U}^{11} \to \mathfrak{F}^{11}$, следует, что $\sigma_1^L(M) \subset \sigma^{L_{11}}(M_{11})$.

Теперь покажем, что $\sigma^{L_{11}}(M_{11}) \subset \sigma_1^L(M)$. Ясно, что это эквивалентно тому, что из $\lambda \notin \sigma_1^L(M)$ следует, что $\lambda \notin \sigma^{L_{11}}(M_{11})$. Итак, пусть $\lambda \notin \sigma_1^L(M)$, покажем существование непрерывных операторов $(\lambda L_{11} - M_{11})^{-1} : \mathfrak{F}^{11} \to \mathfrak{U}^{11}$, равных сужению оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{(\mu L - M)^{-1}}{\mu - \lambda}\,d\mu$$

на подпространство $\mathfrak{F}^{11}$.

Обозначим через Ω_1 область, ограниченную контуром γ_1. Тогда в силу тождеств (1.3.1) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{(\mu L - M)^{-1}}{\mu - \lambda}\,d\mu(\lambda L - M) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{I\,d\mu}{\mu - \lambda} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}R_\mu^L(M)\,d\mu = \begin{cases} I - P_1, & \lambda \in \Omega_1; \\ -P_1, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Аналогично, для оператора Q_1. Таким образом показали, что справедливо равенство $\sigma^{L_{11}}(M_{11}) = \sigma_1^L(M)$.$\bullet$

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим случай, когда существует ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащая весь $\sigma^L(M)$.

Определение 1.3.2. Оператор M назовем *спектрально ограниченным* относительно оператора L (кратко, (L,σ)*-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \ \Rightarrow \ \left(\mu \in \rho^L(M)\right).$$

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$. Рассмотрим интегралы типа Ф. Рисса

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^L_\mu(M)d\mu. \tag{1.3.7}$$

Лемма 1.3.3. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы.*

Доказательство. В силу того, что оператор M (L,σ)-ограничен, то утверждение данной леммы следует из леммы 1.3.2. Также доказательство леммы может быть получено без применения отнгосительно спектральной теоремы (см. напр. [4, 22]). •

Положим $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^1) = \ker P$ $(\mathrm{im} P)$, $\mathfrak{F}^0$ $(\mathfrak{F}^1) = \ker Q$ $(\mathrm{im} Q)$, и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0,1$. Из предыдущей леммы следует, что проекторы P и Q расщепляют пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Теорема 1.3.3. (Теорема о расщеплении). [4, 22] *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда*

(i) *операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$;*

(ii) *существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.*

В силу теоремы о расщеплении, существуют операторы:

$$H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0) \quad \text{и} \quad S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1).$$

Определение 1.3.3. (L, σ)-ограниченный оператор M назовем

- $(L, 0)$-*ограниченным*, если $H \equiv \mathbb{O}$;
- (L, p)-*ограниченным*, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$ при $p \in \mathbb{N}$.

Следствие 1.3.1. [4] *Пусть оператор L непрерывно обратим, тогда справедливо $\sigma^L(M) = \sigma(S)$.*

1.4. Существование решений для одного класса линейных динамических уравнений

Рассмотрим класс уравнений вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u, \tag{1.4.1}$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$, – многочлены, такие, что $m \leq n$. Оператор $\Lambda : \ell_q^{r+2} \to \ell_q^r$ – квазиоператор Лапласа [2], действующий в квазисоболевых пространствах последовательностей [3]

$$\ell_q^r = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{r}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\},$$

где $r \in \mathbb{R}$ и $q \in (0, 1)$, а последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$.

Рассмотрим разрешимость задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.4.2}$$

для динамических уравнений вида (1.4.1) в квазисоболевых пространствах. Отметим, что решения задачи Коши (1.4.2) для уравнения

(1.4.1) при любых начальных данных существуют не всегда [107], поэтому также рассматривается задача Шоуолтера–Сидорова [64]

$$P(u(0) - u_0) = 0 \tag{1.4.3}$$

для уравнения неоднородного (1.4.1), которая уже имеет решения для любых начальных данных.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.4.4}$$

Определение 1.4.1. Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ назовем *решением уравнения* (1.4.4), если она удовлетворяет ему.

Определение 1.4.2. Решение $u = u(t)$ уравнения (1.4.4) назовем *решением задачи Коши* (1.4.2) для уравнения (1.4.4) (коротко, задачи (1.4.2), (1.4.4)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (1.4.2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 1.4.3. Аналогично, решение $u = u(t)$ уравнения (1.4.4) назовем решением *задачи Шоуолтера–Сидорова* (1.4.3) для уравнения (1.4.4) (коротко, задачи (1.4.3), (1.4.4)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Шоуолтера–Сидорова (1.4.3) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 1.4.4. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1.4.4), если

(i) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1.4.2), (1.4.4);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1.4.4) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

Теорема 1.4.1. [22] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения* (1.4.4) *служит подпространство* $\mathfrak{U}^1$.

Вернемся к рассмотрению уравнения (1.4.1). Рассмотрим степени квазиоператора Лапласа [103] $\Lambda^n u = \{\lambda_k^n u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$. Как нетрудно видеть, оператор $\Lambda^n : \ell_q^{r+2n} \to \ell_q^r$ — топлинейный изоморфизм, $r \in \mathbb{R}$.

Выберем пространства $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$. Операторы $L = P_n(\Lambda)$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $M = Q_m(\Lambda)$, где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$, – многочлены, такие, что $m \leq n$.

Лемма 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$. Тогда $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.*

Доказательство. По построению $L = P_n(\Lambda) : \ell_q^{r+2n} \to \ell_q^r$ линеен и ограничен, то есть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Оператор $M = Q_m(\Lambda) : \ell_q^{r+2n} \to \ell_q^{r+2(n-m)}$, следовательно, линейный и непрерывный из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$ в силу теоремы 1.1.1, то есть в силу того, что $\ell_q^{r+2(n-m)} \hookrightarrow \ell^r$ при $n \geq m$. •

Теорема 1.4.2. *Пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$. Тогда оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Доказательство. В силу того, что для построения относительного спектра необходимо выполнения условия $\ker L \cap \ker M = \oslash$ [107], то необходимо, чтобы числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являлись корнями $Q_m(x)$. Относительный спектр будет иметь вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \, \mu_k = \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, \text{ при } k : \, P_n(\lambda_k) \neq 0 \right\}.$$

Так как $\lambda_k \to +\infty$, то в силу того, что $n \geq m$, точки относительного спектра $\sigma^L(M)$ стремятся к конечной точке. А следовательно, множество $\sigma^L(M)$ ограничено.

Пространство

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } P_n(\lambda_k) \neq 0 \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : P_n(\lambda_l) = 0\}\}, \end{cases}$$

поэтому оператор $H = M_0^{-1} L_0 = \mathbb{O}$. Следовательно, оператор M $(L, 0)$-ограничен. $\bullet$

Пусть далее $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ — голоморфная вырожденная группа операторов, а U^0 — ее единица. Введем в рассмотрение образ $\mathrm{im}U^\bullet = \mathrm{im}U^0$ и ядро $\ker U^\bullet = \ker U^0$ этой группы. Назовем группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ разрешающей группой уравнения (1.4.4), если во-первых, вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (1.4.4) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$, а во-вторых, образ $\mathrm{im}U^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (1.4.4).

Теорема 1.4.3. [22] *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения* (1.4.4), *которая к тому же имеет вид*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = h > a\}$.

В силу теорем 1.4.2 и 1.4.3 нетрудно показать, голоморфная разрешающая группа уравнения (1.4.1) будет иметь вид

$$U^t \cdot = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } P_n(\lambda_k) \neq 0,\ k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \neq l} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} :\ P_n(\lambda_l) = 0, \end{cases}$$

здесь векторы $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где единица стоит на k-том месте. Фазовым пространством уравнения (1.4.1) по теоремам 1.4.1 и 1.4.2 будет множество

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } P_n(\lambda_k) \neq 0, \ k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : \ u_l = 0, \ P_n(\lambda_l) = 0\}. \end{cases}$$

Замечание 1.4.1. В условиях теоремы 1.4.3 операторы L и M на пространстве $\mathfrak{F}$ порождают голоморфную вырожденную группу

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu \quad -$$

разрешающую группу уравнения $L(\beta L - M)^{-1}\dot{f} = M(\beta L - M)^{-1} f$, где $\beta \in \rho^L(M)$.

Рассмотрим разрешимость линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + g, \tag{1.4.5}$$

где вектор-функция $g : [0, \tau] \to \mathfrak{U}$ с $\tau \in \mathbb{R}_+$ будет определена ниже. Обозначим $g^0 = (I - Q)g$ и $g^1 = Qg$.

Теорема 1.4.4. [22] *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любой аналитической вектор-функции $g : [0, \tau] \to \mathfrak{F}$ и любого $u_0 \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение $u \in C^1([0, \tau]; \mathfrak{U})$ задачи* (1.4.3) *для уравнения* (1.4.5), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{0(k)}(t) + U^t u_0 + \int\limits_0^t U^{t-s} L_1^{-1} g^1(s)\, ds. \tag{1.4.6}$$

Замечание 1.4.2. Если к условиям теоремы 1.4.4 добавить дополнительно условие $(\mathbb{I} - P)u_0 = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{0(k)}(0)$, то решение (1.4.6) является единственным решением задачи Коши (1.4.2), (1.4.5).

Замечание 1.4.3. Используя изложенные выше результаты, уравнение (1.4.5) мы можем представить в виде системы двух уравнений

$$\dot{u}(t) = L_1^{-1}M_1u(t) + L_1^{-1}Qg(t), \tag{1.4.7}$$

$$H\dot{u}(t) = u(t) + M_0^{-1}(I-Q)g(t) \tag{1.4.8}$$

на подпространствах $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{U}^0$ соответственно. В представленном в теореме 1.4.4 решении уравнения (1.4.5) первые два слагаемых разрешают уравнение (1.4.7), а третье – уравнение (1.4.8).

В силу теорем 1.4.2 и 1.4.4 для уравнения

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u + g \tag{1.4.9}$$

справедлива следующая

Теорема 1.4.5. *Пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$. Тогда для любой аналитической вектор-функции $g : [0,\tau] \to \mathfrak{F}$, а также для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение $u \in C^1([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи* (1.4.3) *для уравнения* (1.4.9), *которое к тому же имеет вид либо*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{\mu_k t}\langle u_0, e_k\rangle + \int_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}\, e^{\mu_k(t-s)}ds\right) e_k,$$

если для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $P_n(\lambda_k) \neq 0$, либо

$$u(t) = -\sum_{l\in\mathbb{N}:P_n(\lambda_l)=0} \frac{\langle g(t), e_l\rangle}{Q_m(\lambda_l)}\, e_l +$$

$$+\sum_{k\neq l}\left(e^{\mu_k t}\langle u_0, e_k\rangle + \int_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}\, e^{\mu_k(t-s)}ds\right) e_k$$

в противном случае.

Замечание 1.4.4. Если к условиям теоремы 1.4.5 в случае вырожденности (т.е. когда существуют такие $l \in \mathbb{N}$, что $P_n(\lambda_l) = 0$) добавить дополнительно условие

$$\langle u_0, e_l \rangle = -\frac{\langle g(0), e_l \rangle}{Q_m(\lambda_l)} \quad \text{для} \;\; l \in \mathbb{N}: \;\; P_n(\lambda_l) = 0,$$

то решение из формулировки теоремы 1.4.5 является единственным решением задачи Коши (1.4.2), (1.4.9).

2. Ограниченные на полуоси решения однородных уравнений

2.1. Инвариантные подпространства решений и решение начально-конечной задачи

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим пару эквивалентных уравнений вида

$$L\dot{u} = Mu, \tag{2.1.1}$$

$$L(\beta L - M)^{-1}\dot{f} = M(\beta L - M)^{-1}f \tag{2.1.2}$$

с параметром $\beta \in \rho^L(M)$ при условии (L,σ)-ограниченности оператора M.

Определение 2.1.1. Пусть $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ ($\tilde{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{F}$) – фазовое пространство уравнения (2.1.1) ((2.1.2)). Множество $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$ ($\tilde{\mathfrak{J}} \subset \tilde{\mathfrak{P}}$) называется *инвариантным подпространством* этого уравнения, если при любом $u_0 \in \mathfrak{J}$ ($f_0 \in \tilde{\mathfrak{J}}$) существует единственное решение $u = u(t)$ ($f = f(t)$) задачи Коши $u(0) = u_0$ ($f(0) = f_0$) для уравнения (2.1.1) ((2.1.2)), причем $u(t) \in \mathfrak{J}$ ($f(t) \in \tilde{\mathfrak{J}}$) для всех $t \in \mathbb{R}$.

Напомним, условие (1.3.5) для относительного спектра $\sigma^L(M)$

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \bigcup \sigma_1^L(M),\ \sigma_1^L(M) \neq \oslash,\ \text{причем} \\ \text{существует ограниченная область } \Omega_1 \subset \mathbb{C} \text{ с границей} \\ \partial\Omega_1 \text{ класса } C^1;\ \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \text{ и } \overline{\Omega}_1 \cap \sigma_0^L(M) = \oslash, \end{array}\right\}$$

тогда пусть $\gamma_1 = \partial\Omega_1$. Операторы (1.3.6) имеют вид

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} R_\mu^L(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} L_\mu^L(M)d\mu,$$

и $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 2.1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен и выполнено условие* (1.3.5)*. Тогда $P_1 = PP_1 = P_1P$ и $Q_1 = QQ_1 = Q_1Q$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.3.2.

Построим операторы $P_0 = P - P_1$ и $Q_0 = Q - Q_1$. В силу леммы 2.1.1 эти операторы являются проекторами. Положим $\mathfrak{U}^{01}$ $(\mathfrak{F}^{01}) = \mathrm{im}P_0$ $(\mathrm{im}Q_0)$ и через L_{01} (M_{01}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{01}$.

Лемма 2.1.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1.1*. Тогда*

(i) $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{01} \oplus \mathfrak{U}^{11}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{01} \oplus \mathfrak{F}^{11}$;

(ii) *операторы* $L_{01}, M_{01} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{01}; \mathfrak{F}^{01})$;

(iii) $\sigma^{L_{01}}(M_{01}) = \sigma_0^L(M)$.

Доказательство. Утверждение (i) леммы справедливо в силу задания проекторов.

Утверждения (ii) и (iii) доказываются аналогично соответствующим утверждениям теоремы 1.3.2. $\bullet$

Теорема 2.1.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и выполнено условие* (1.3.5)*. Тогда образ группы*

$$U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1.3}$$

будет инвариантным пространством уравнения (2.1.1).

Доказательство. В силу теоремы 1.3.2 и лемм 2.1.1, 2.1.2 следует $\mathrm{im}U_1^{\bullet} = \mathrm{im}P_1 = \mathfrak{U}^{11}$, а значит утверждение теоремы верно. $\bullet$

Замечание 2.1.1. Аналогичные утверждения имеют место для группы, определенной в замечании 1.4.1.

Следствие 2.1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.1, *причем* $\sigma_0^L(M) \neq \oslash$. *Тогда существует не менее двух инвариантных подпространств уравнения* (2.1.1) (*уравнения* (2.1.2)).

Перейдем к рассмотрению инвариантных подпространств решений класса уравнений вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u, \tag{2.1.4}$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$, – многочлены, такие, что $m \leq n$. Оператор $\Lambda^n : \ell_q^{r+2n} \to \ell_q^r$, где $r \in \mathbb{R}$ и $q \in (0,1)$, а последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. И пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$.

В силу теоремы 1.4.2 относительный спектр имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \, \mu_k = \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, \text{ при } k : \, P_n(\lambda_k) \neq 0 \right\}.$$

Откуда ясно, что $\sigma^L(M)$ дискретен и имеет одну предельную точку, которая конечна.

Следствие 2.1.2. *Пусть числа* λ_k, *являющиеся корнями многочлена* $P_n(x)$, *не являются корнями* $Q_m(x)$, *выполнено условие* (1.3.5) *и* σ_1 *содержит конечное число точек* $\{\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \ldots, \mu_{k_\nu}\} \subset \sigma^L(M)$.

Тогда инвариантное подпространство уравнения (2.1.4), *построенное по* σ_1, *конечномерно и имеет вид* $\mathfrak{U}^{11} = \operatorname{span}\{e_{k_1}, e_{k_2} \ldots, e_{k_\nu}\}$, *а следовательно,* $\mathfrak{U}^{01}$ *бесконечномерно.*

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен и выполнено условие (1.3.5). Рассмотрим на отрезке $[0,\tau]$ начально-конечную задачу [15]

$$P_0(u(0)-u_0)=0, \qquad P_1(u(\tau)-u_\tau)=0, \qquad u_0,u_\tau\in\mathfrak{U} \tag{2.1.5}$$

для неоднородного уравнения

$$L\dot{u}=Mu+g. \tag{2.1.6}$$

Вектор-функцию $u\in C^1([0,\tau];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2.1.6), назовем *решением начально-конечной задачи* (2.1.5), (2.1.6), если она удовлетворяет уравнению (2.1.6), и условиям (2.1.5).

Теорема 2.1.2. [4] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, и выполнено условие* (1.3.5). *Тогда для любых $u_0,u_\tau\in\mathfrak{U}$ и любой аналитической вектор-функции $g:[0,\tau]\to\mathfrak{F}$ существует единственное решение $u\in C^1([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи* (2.1.5), (2.1.6), *имеющее вид*

$$u(t)=U^tQ_0u_0+\int\limits_0^t U^{t-s}L^{-1}Q_0g(s)ds+$$

$$+U^{t-\tau}Q_1u_\tau-\int\limits_\tau^t U^{t-s}L^{-1}Q_1g(s)ds-\sum_{q=0}^{p}H^qM_0^{-1}\frac{d^q}{dt^q}(\mathbb{I}-Q)g^0(t).$$

Сформулируем аналогичный результат для класса динамических уравнений в квазисоболевых пространствах. В силу теорем 1.4.2 и 2.1.2 для уравнения

$$P_n(\Lambda)\dot{u}=Q_m(\Lambda)u+g \tag{2.1.7}$$

справедлива следующая

Теорема 2.1.3. *Пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, и выполнено условие* (1.3.5).

Тогда для любой аналитической вектор-функции $g : [0,\tau] \to \mathfrak{F}$, а также для любых $u_0, u_\tau \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение $u \in C^1([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи (2.1.5) *для уравнения* (2.1.7), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{l\in\mathbb{N}:P_n(\lambda_l)=0} \frac{\langle g(t), e_l\rangle}{Q_m(\lambda_l)}\, e_l +$$
$$+\sum_{\mu_k\in\sigma_0^L(M)} \left(e^{\mu_k t}\langle u_0, e_k\rangle + \int_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}\, e^{\mu_k(t-s)} ds \right) e_k +$$
$$+\sum_{\mu_k\in\sigma_1^L(M)} \left(e^{\mu_k(t-\tau)}\langle u_\tau, e_k\rangle - \int_\tau^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}\, e^{\mu_k(t-s)} ds \right) e_k.$$

2.2. Ограниченность на полуоси решений однородных уравнений

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu \tag{2.2.1}$$

с условием Коши

$$u(0) = u_0. \tag{2.2.2}$$

Найдем необходимые и достаточные условия существования ограниченного решения задачи Коши (2.2.1), (2.2.2) на полуоси в терминах L-спектра оператора M.

Лемма 2.2.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, и любое нетривиальное решение уравнения* (2.2.1) *ограничено на по-*

луоси $\overline{\mathbb{R}_+}$. Тогда L-спектр оператора M лежит в замкнутой левой полуплоскости.

Доказательство. В силу теоремы 1.4.3 решение задачи (2.2.1), (2.2.2) имеет следующий вид $u(t) = U^t u_0$, где U^t – разрешающая группа, а $u_0 \in \mathfrak{U}^1$. Так как по условию теоремы любое решение уравнения (2.2.1) ограничено на полуоси $\overline{\mathbb{R}_+}$, то существует $K_1 > 0$, что для всех $t \geq 0$ выполняется ${}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \leq K_1$, а следовательно,

$$ {}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| = {}_{\mathfrak{U}}\|U^t u_0\| \leq K_{\mathfrak{U}}\|u_0\| \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad K = \frac{K_1}{{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|}. $$

В силу замечания 1.4.3 и следствия 1.3.1 группа $U^t\Big|_{\mathfrak{U}^1} = e^{St}$, где $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$. Зафиксируем $t > 0$. В силу теоремы 1.2.1 об отображении спектра

$$ \sigma(e^{St}) = e^{t\sigma(S)}, $$

а значит множество вида $t\sigma(S)$ лежит в полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda \leq \ln K\}$. Следовательно, спектр $\sigma(S)$ лежит в полуплоскости

$$ \{\operatorname{Re}\mu \leq \ln K/t\}. $$

Так как $t > 0$ произвольно и, в силу следствия 1.3.1, $\sigma(S) = \sigma^L(M)$, то получим требуемое. $\bullet$

Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$ — квазисоболевы пространства, где $r \in \mathbb{R}$ и $q \in (0,1)$, а последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Операторы $P_n(\Lambda), Q_m(\Lambda) \in \mathcal{L}(\ell_q^{r+2n}; \ell_q^r)$, $m \leq n$ и числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$. Рассмотрим ограниченные решения класса уравнений вида

$$ P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u. \tag{2.2.3} $$

Теорема 2.2.1. *Пусть $m \leq n$, операторы $P_n(\Lambda), Q_m(\Lambda) \in \mathcal{L}(\ell_q^{r+2n}; \ell_q^r)$ и числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, а также выполнено условие*

$$\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M),$$

где $\sigma_1^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu < 0\}$, $\sigma_2^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu \geq 0\}$.

Тогда решение задачи (2.2.3), (2.2.2) ограничено на $\overline{\mathbb{R}_+}$ тогда и только тогда, когда $u_0 \in \mathfrak{U}^{11}$.

Доказательство. Задача (2.2.1), (2.2.2) может быть представлена в виде эквивалентной системы задач

$$L_{11}\dot{u}^{11} = M_{11}u^{11}, \qquad u^{11}(0) = u_0^{11}; \tag{2.2.4}$$

$$L_{21}\dot{u}^{21} = M_{21}u^{21}, \qquad u^{21}(0) = u_0^{21}. \tag{2.2.5}$$

В силу условий теоремы существует контур γ_1', лежащий в левой полуплоскости, и контур γ_2', которые ограничивают соответственно области, содержащие $\sigma_1^L(M)$ и $\sigma_2^L(M)$. Построим группы U_1^t и U_2^t, используя формулу (2.1.3), где контур γ_1 заменим сначала на γ_1', а потом на γ_2'. Обозначим инвариантные пространства уравнения (2.2.1) $\mathfrak{U}^{11} = \mathrm{im}U_1^\bullet$ и $\mathfrak{U}^{21} = \mathrm{im}U_2^\bullet$, которые существует в силу теоремы 2.1.1. В силу того, что $U_1^t + U_2^t = U^t$, то $\mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{21} = \mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}U^\bullet$.

Пусть теперь $u_0 \in \mathfrak{U}^{11}$, тогда в силу леммы 1.1.1, а также [7, леммы 3.10.2] справедлива оценка

$$_{\mathfrak{U}}\|U_1^t u_0\|^{\alpha} = {}^{r+2n}_{\quad q}\left\| \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_1^L(M)} e^{\mu_k t}\langle u_0, e_k\rangle e_k \right\|^q =$$

$$= \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_1^L(M)} \left(e^{\mu_k t}\lambda_k^{\frac{r+2n}{2}}|u_{0k}|\right)^q \leq 2C^q e^{qa_1 t} \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_1^L(M)} \left(\lambda_k^{\frac{r+2n}{2}}|u_{0k}|\right)^q =$$

$$= C_1^\alpha e^{a_1 t\alpha}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|^\alpha \leq C_1^\alpha{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|,$$

где $a_1 = \max\limits_{\mu\in\gamma_1'} \mathrm{Re}\mu$.

Если решение $u(t) = U^t u_0$ задачи (2.2.1), (2.2.2) ограничено на $\overline{\mathbb{R}_+}$, то в силу леммы 2.2.1 L-спектр оператора M лежит в левой полуплоскости, а следовательно $\sigma_2^L(M) = \oslash$. Откуда получаем, что задача (2.2.5) имеет решение, причем тривиальное, только при $\mathfrak{U}^{21} = \{0\}$. Следовательно, $u_0 = u_0^{11} \in \mathfrak{U}^{11}$. $\bullet$

Следствие 2.2.1. *Если в теореме* 2.2.1 *поменять условие о спектре на условие* $\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M)$, *где* $\sigma_1^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu \leq 0\}$, $\sigma_2^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu > 0\}$. *Тогда решение* (2.2.1), (2.2.2) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_-}$ *тогда и только тогда, когда* $u_0 \in \mathfrak{U}^{21}$.

В силу теорем 1.4.2, 2.2.1 справедлива следующая

Теорема 2.2.2. *Пусть* $n > m$, *числа* λ_k, *являющиеся корнями многочлена* $P_n(x)$, *не являются корнями* $Q_m(x)$, *для всех* $k \in \mathbb{N}$ *и точек вида* $\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}$ *с условием* $\mathrm{Re}\left(\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) < 0$ *конечное число. Тогда решение задачи* (2.2.2), (2.2.3) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle u_0, e_k\rangle = 0 \quad$ *при* $\quad k \in \mathbb{N} : \ \mathrm{Re}\left(\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) \geq 0$.

В силу следствия 2.2.1 справедливо

Следствие 2.2.2. *Если в теореме* 2.2.2 *потребовать, чтобы точек с условием* $\mathrm{Re}\left(\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) > 0$ *было конечное число. Тогда решение задачи* (2.2.2), (2.2.3) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_-}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\langle u_0, e_k\rangle = 0 \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N} : \ \mathrm{Re}\left(\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) \leq 0.$$

Теорема 2.2.3. *Пусть $n = m$, числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$. Тогда, если точек вида $\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}$ с условием $\mathrm{Re}\left(\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) < 0$ конечное число, то решение задачи (2.2.2), (2.2.3) ограничено на $\overline{\mathbb{R}_+}$ тогда и только тогда, когда*

$$\langle u_0, e_k \rangle = 0 \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}: \ \mathrm{Re}\left(\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) \geq 0.$$

Замечание 2.2.1. Если в теореме 2.2.3 поменять условия также как в следствии 2.2.2, то получим условия существования ограниченного решения задачи (2.2.2), (2.2.3) на $\overline{\mathbb{R}_-}$.

2.3. Аналог линеаризованного уравнения Хоффа в квазисоболевых пространствах

Рассмотрим аналог линеаризованного уравнения Хоффа [91]

$$(\lambda + \Lambda) u_t = \alpha u, \qquad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.3.1}$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$ при $r \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R}_+$. Положим операторы $L = P_1(\Lambda) = \lambda + \Lambda$ и $M = Q_0(\Lambda) = \alpha\mathbb{I}$, тогда в силу леммы 1.4.1 операторы $L, M \in \mathcal{L}(\ell_q^{r+2}; \ell_q^r)$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$ при $r \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Доказательство. L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \ \mu_k = \frac{\alpha}{\lambda + \lambda_k}, \text{ при } k: \ \lambda_k \neq -\lambda \right\}. \tag{2.3.2}$$

Так как $\lambda_k \to +\infty$, то точки относительного спектра $\sigma^L(M)$ стремятся к нулю. А следовательно, множество $\sigma^L(M)$ ограничено.

Пространство

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = -\lambda\}\}\,; \end{cases}$$

поэтому оператор $H = M_0^{-1} L_0 = \mathbb{O}$. Следовательно, оператор M $(L, 0)$-ограничен. $\bullet$

В силу теоремы 1.4.3 существует разрешающая группа уравнения (2.3.1), которая имеет вид

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda,\ k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \neq l} e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} :\ \lambda_l = -\lambda. \end{cases}$$

Начальное значение $\{u_{0k}\} = u_0 \in \ell_q^{r+2}$, векторы $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где единица стоит на k-том месте. В силу теоремы 1.4.1 образ $\mathrm{im}U^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (2.3.1). И это фазовое пространство имеет вид

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \ell_q^{r+2}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \ell_q^{r+2} : u_k = 0,\ \lambda_k = -\lambda\}. \end{cases}$$

Рассмотрим разрешимость неоднородного уравнения Хоффа

$$(\lambda + \Lambda) u_t = \alpha u + g, \tag{2.3.3}$$

где вектор-функция $g : [0, \tau] \to \ell_q^{r+2}$ с $\tau \in \mathbb{R}_+$ будет определена ниже.

Для постановки задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0 \tag{2.3.4}$$

приведем вид оператора P:

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{k \in \mathbb{N} : k = l} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_l = -\lambda \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

По аналогии построим оператор

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda+\lambda_k)^{-1}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k\neq l} (\lambda+\lambda_k)^{-1}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } \lambda_l = -\lambda \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В силу теоремы 1.4.5 справедлива следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть* $r, \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\tau, q \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \ell_q^{r+2}$ *и вектор-функция* $g : [0,\tau] \to \ell_q^r$ *аналитична, тогда существует единственное решение* $u \in C^1([0,\tau]; \ell_q^{r+2})$ *задачи* (2.3.3), (2.3.4)*; кроме того оно имеет вид либо*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}t}\langle u_0, e_k\rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{\lambda+\lambda_k} e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}(t-s)} ds \right) e_k,$$

если $\lambda_k \neq -\lambda$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *либо*

$$u(t) = -\sum_{l:\lambda_l=-\lambda} \frac{\langle g(t), e_l\rangle}{\alpha} e_l + \sum_{k\neq l} \left(e^{\frac{\alpha t}{\lambda+\lambda_k}}\langle u_0, e_k\rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{\lambda+\lambda_k} e^{\frac{\alpha(t-s)}{\lambda+\lambda_k}} ds \right) e_k$$

в противном случае. Здесь

$$\mathfrak{F}^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = -\lambda\}\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}^1 = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0, \lambda_k = -\lambda\}. \end{cases}$$

Замечание 2.3.1. Если к условиям теоремы 2.3.1 в случае вырожденности (т.е. когда существуют такие $l \in \mathbb{N}$, что $\lambda_l = -\lambda$) добавить дополнительно условие

$$\langle u_0, e_l\rangle = -\frac{\langle g(0), e_l\rangle}{\alpha} \quad \text{для } l \in \mathbb{N}: \ \lambda_l = -\lambda,$$

то решение из теоремы 2.3.1 является единственным решением задачи Коши (2.2.2), (2.3.3).

Пусть выполнено условие (1.3.5) и $\sigma_0^L(M) \neq \oslash$. Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_0^L(M)} \langle u(0) - u_0, e_k \rangle e_k = 0, \qquad \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle u(\tau) - u_\tau, e_k \rangle e_k = 0 \quad (2.3.5)$$

для уравнения (2.3.3). В силу леммы 2.3.1 и теоремы 2.1.3 справедлива следующая

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, *выполнено условие* (1.3.5) *и* $\sigma_0^L(M) \neq \oslash$. *Тогда для любой аналитической вектор-функции* $g : [0, \tau] \to \ell_q^r$, *а также для любых* $u_0, u_\tau \in \ell_q^{r+2}$, *существует единственное решение* $u \in C^1([0, \tau]; \ell_q^{r+2})$ *задачи* (2.3.5) *для уравнения* (2.3.3), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{l \in \mathbb{N}: \lambda_l = -\lambda} \frac{\langle g(t), e_l \rangle}{\alpha} e_l +$$

$$+ \sum_{\mu_k \in \sigma_0^L(M)} \left(e^{\mu_k t} \langle u_0, e_k \rangle + \int_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda + \lambda_k} e^{\mu_k (t-s)} ds \right) e_k +$$

$$+ \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \left(e^{\mu_k (t-\tau)} \langle u_\tau, e_k \rangle - \int_\tau^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda + \lambda_k} e^{\mu_k (t-s)} ds \right) e_k.$$

Здесь μ_k *взяты из* (2.3.2).

Перейдем к рассмотрению свойств решений уравнения (2.3.1).

Сначала рассмотрим инвариантные подпространствах решений. Относительный спектр имеет вид (2.3.2), а следовательно он дискретен и очевидно выполняется условие (1.3.5). А значит, в силу следствий 2.1.1, 2.1.2 имеет место

Лемма 2.3.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.3.1 *и* $\lambda < 0$ *такое, что существуют* $\tilde{k} \in \mathbb{N}$*, для которых* $\lambda_{\tilde{k}} < -\lambda$*. Тогда существует не менее двух инвариантных подпространств решений уравнения* (2.3.1)*.*

Причем, инвариантное подпространство уравнения (2.3.1) *вида* $\mathrm{span}\{e_{\tilde{k}} : \lambda_{\tilde{k}} < -\lambda\}$ *конечномерно.*

Наконец, рассмотрим ограниченные на полуоси решения однородного аналога уравнения Хоффа. В силу теоремы 2.2.1 справедлива следующая

Теорема 2.3.3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}_+$*. Тогда решение задачи* (2.2.2), (2.3.1) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\langle u_0, e_k \rangle = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad k : \lambda_k \geq -\lambda.$$

Аналогично следствию 2.2.2 сформулируем следующее

Следствие 2.3.1. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}_-$*. Тогда решение задачи* (2.2.2), (2.3.1) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_-}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\langle u_0, e_k \rangle = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad k : \lambda_k \geq -\lambda.$$

2.4. Ограниченность на полуоси решений аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

Рассмотрим аналог уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной как одного из наиболее известных из неклассических уравнений математический физики [65]

$$(\lambda - \Lambda)\dot{u} = \alpha\Lambda u. \tag{2.4.1}$$

Возьмем $\mathfrak{U} = \ell_p^{r+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_p^r$, операторы L, M зададим формулами $L = P_1(\Lambda) = \lambda - \Lambda$, $M = Q_1(\Lambda) = \alpha\Lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ — некоторые константы. В силу леммы 1.4.1 операторы $L, M \in \mathcal{L}(\ell_q^{r+2}; \ell_q^r)$.

Лемма 2.4.1. [22] *Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

В силу результатов [22] L-спектр оператора M имеет вид

$$\left\{\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\right\}, \tag{2.4.2}$$

подпространства

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{\mathbf{0}\}, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} :\ u_k = 0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\}\,; \end{cases}$$

и

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} :\ u_l = 0,\ \lambda_l = \lambda\}\,. \end{cases}$$

Подпространства $\mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$ определяется аналогично.

Также в силу результатов [22] разрешающая группа уравнения (2.4.1) имеет вид

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}\langle \cdot, e_k\rangle e_k, \text{ если } \lambda \notin \lambda_k, k \in \mathbb{N} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}\langle \cdot, e_k\rangle e_k, \text{ если существует } \ l \in \mathbb{N} : \lambda = \lambda_l. \end{cases}$$

Здесь $\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}$ – точки L-спектра оператора M, последовательность $\{u_{0k}\} = u_0 \in \ell_q^{r+2}$, векторы $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где единица стоит на k-том месте. Фазовым пространством уравнения (2.4.1) будет множество $\mathfrak{U}^1$, определенное выше.

В силу того, что относительный спектр имеет вид (2.4.2), то он дискретен и очевидно выполняется условие (1.3.5). А значит, в силу следствий 2.1.1, 2.1.2 справедлива следующая

Лемма 2.4.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.4.1 *и множество* σ_1 *содержит конечное число точек* $\{\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \ldots, \mu_{k_\nu}\} \subset \sigma^L(M)$. *Тогда существует не менее двух инвариантных подпространств решений уравнения* (2.4.1).

Причем, инвариантное подпространство уравнения (2.4.1), *соответствующее* σ_1, *конечномерно и имеет следующий вид* $\mathfrak{U}^{11} = \mathrm{span}\{e_{k_1}, e_{k_2} \ldots, e_{k_\nu}\}$. *А значит,* $\mathfrak{U}^{01}$ *бесконечномерно.*

Рассмотрим аналог неоднородного уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)u_t = \alpha\Lambda u + g \tag{2.4.3}$$

с начальным условием Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.4.4}$$

или условием Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0. \tag{2.4.5}$$

Здесь проектор P имеет вид

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k=l} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_l = -\lambda \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В силу теоремы 1.4.5 справедливо следующее

Следствие 2.4.1. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Тогда для любой аналитической вектор-функции* $g : [0, \tau] \to \ell_q^r$, *а также для любого* $u_0 \in \ell_q^{r+2}$, *существует единственное решение* $u \in C^1([0, \tau]; \ell_q^{r+2})$ *задачи* (2.4.5) *для уравнения* (2.4.3), *которое имеет вид либо*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}\alpha t} \langle u_0, e_k \rangle + \int_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda - \lambda_k} e^{\frac{\lambda_k \alpha}{\lambda - \lambda_k}(t-s)} ds \right) e_k,$$

если при $\lambda \neq \lambda_k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *либо*

$$u(t) = -\sum_{\lambda_l = \lambda} \frac{\langle g(t), e_l \rangle}{\alpha \lambda} e_l +$$
$$+ \sum_{k : \lambda_k \neq \lambda} \left(e^{\frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}\alpha t} \langle u_0, e_k \rangle + \int_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda - \lambda_k} e^{\frac{\lambda_k \alpha}{\lambda - \lambda_k}(t-s)} ds \right) e_k$$

в противном случае.

Замечание 2.4.1. Если к условиям следствия 2.4.1 в случае вырожденности (т.е. когда существуют такие $l \in \mathbb{N}$, что $\lambda_l = \lambda$) добавить дополнительно условие

$$\langle u_0, e_l \rangle = -\frac{\langle g(0), e_l \rangle}{\alpha \lambda} \quad \text{для} \quad l \in \mathbb{N} : \ \lambda_l = \lambda,$$

то решение из следствия 2.4.1 является единственным решением задачи Коши (2.4.4), (2.4.3).

Сформулируем результат о решении начально-конечной задачи (2.3.5), (2.4.3). В силу теоремы 2.1.3 и леммы 2.4.1 справедливо

Следствие 2.4.2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Тогда для любой аналитической вектор-функции* $g : [0, \tau] \to \ell_q^r$, *а также для любых*

$u_0, u_\tau \in \ell_q^{r+2}$, *существует единственное решение* $u \in C^1([0,\tau]; \ell_q^{r+2})$ *задачи* (2.3.5) *для уравнения* (2.4.3), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{l\in\mathbb{N}:\lambda_l=\lambda} \frac{\langle g(t), e_l\rangle}{\alpha\lambda}\, e_l +$$
$$+ \sum_{\mu_k\in\sigma_0^L(M)} \left(e^{\mu_k t}\langle u_0, e_k\rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{\lambda-\lambda_k}\, e^{\mu_k(t-s)} ds \right) e_k +$$
$$+ \sum_{\mu_k\in\sigma_1^L(M)} \left(e^{\mu_k (t-\tau)}\langle u_\tau, e_k\rangle - \int\limits_\tau^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{\lambda-\lambda_k}\, e^{\mu_k(t-s)} ds \right) e_k.$$

Здесь μ_k *взяты из* (2.4.2).

Рассмотрим ограниченные на полуоси решения однородного аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной (2.4.1). В силу теоремы 2.2.1 справедлива следующая

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Тогда решение задачи* (2.4.1), (2.4.4) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *тогда и только тогда, когда для* $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ *выполнено условие*

$$\langle u_0, e_k\rangle = 0 \quad \text{при таких} \;\; k, \text{ что} \quad \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k} > 0.$$

Аналогично следствию 2.2.2 получим следующее

Следствие 2.4.3. *В условиях теоремы* 2.4.1 *решение задачи* (2.4.1), (2.4.4) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_-}$ *тогда и только тогда, когда для* $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ *выполнено условие*

$$\langle u_0, e_k\rangle = 0 \quad \text{при таких} \;\; k, \text{ что} \quad \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k} < 0.$$

3. Существование экспоненциальных дихотомий и ограниченных решений неоднородных уравнений

3.1. Экспоненциальные дихотомии решений

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu, \tag{3.1.1}$$

при условии (L, p)-ограниченности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Определение 3.1.1. Будем говорить, что решения уравнения (3.1.1) имеют *экспоненциальную дихотомию* (или, коротко, *э-дихотомичны*), если

(i) фазовое пространство уравнения (3.1.1) представимо в виде $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}^1 \oplus \mathfrak{I}^2$, где $\mathfrak{I}^k$ – инвариантное подпространство уравнения (3.1.1), $k = 1, 2$.

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{I}^1$ ($u_0 \in \mathfrak{I}^2$) решение $u = u(t)$ задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3.1.2}$$

для (3.1.1) таково, что при некотором $a \in \mathbb{R}_+$ и всех $t \in \mathbb{R}$

$${}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \leq C_1 e^{-at}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\| \qquad \left({}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \geq C_2 e^{at}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|\right).$$

Замечание 3.1.1. В силу определения 3.1.1 наличие экспоненциальных дихотомий решений означает, что решения, начинающиеся в подпространстве $\mathfrak{I}^1$ экспоненциально убывают, а в подпространстве $\mathfrak{I}^2$ – экспоненциально возрастают. Соответственно, уместно называть подпространство $\mathfrak{I}^1$ *экспоненциально устойчивым*, а $\mathfrak{I}^2$ – *экспоненциально неустойчивым.*

Рассмотрим экспоненциальные дихотомии решений класса уравнений вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u, \tag{3.1.3}$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$, – многочлены, такие, что $m = n$. Оператор $\Lambda^n : \ell_q^{r+2n} \to \ell_q^r$, где $r \in \mathbb{R}$ и $q \in (0,1)$, а последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. И пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$. Операторы $L = P_n(\Lambda)$ и $M = Q_m(\Lambda)$.

Теорема 3.1.1. *Пусть $n = m$, числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, для всех $k \in \mathbb{N}$, и выполнено условие*

$$i\mathbb{R} \cap \sigma^L(M) = \oslash. \tag{3.1.4}$$

Тогда решения (3.1.3) *имеют экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. В силу теоремы 1.4.2 оператор $M = Q_m(\Lambda)$ является $(L,0)$-ограниченным при $L = P_n(\Lambda)$. Далее в силу этой же теоремы относительный спектр имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu_k = \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, \text{ при } k : P_n(\lambda_k) \neq 0 \right\}.$$

В силу компактности L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M и условия (3.1.4) имеем $\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M)$, где $\sigma_1^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu < 0\}$, $\sigma_2^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu > 0\}$. Кроме того, существуют контуры γ_1' и γ_2' лежащие соответственно в левой и правой полуплоскостях и ограничивающие области, содержащие $\sigma_1^L(M)$ и $\sigma_2^L(M)$. Построим группы U_1^t и U_2^t, используя формулу (2.1.3), где контур γ_1 заменим сначала на γ_1', а потом на γ_2'. В силу теоремы 2.1.1 $\mathrm{im} U_1^\bullet = \mathfrak{I}^1$ и

$\mathrm{im}U_2^\bullet = \mathfrak{J}^2$ — инвариантные пространства уравнения (3.1.3), причем поскольку $U_1^t + U_2^t = U^t$, то $\mathfrak{J}^1 \oplus \mathfrak{J}^2 = \mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}U^\bullet$.

Получим оценки из (ii) определения 3.1.1. В силу леммы 1.1.1, замечания 1.1.2, а также [7, леммы 3.10.2], для любых $u \in \mathfrak{J}^1$ и $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$
{}_{\mathfrak{U}}\|U_1^t u\|^\alpha = {}^{r+2n}_{\quad q}\left\| \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_1^L(M)} e^{\mu_k t}\langle u, e_k\rangle e_k \right\|^q =
$$

$$
= \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_1^L(M)} \left(e^{\mathrm{Re}\mu_k t} \lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} |u_k| \right)^q \leq 2C^q e^{qa_1 t} \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_1^L(M)} \left(\lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} |u_k| \right)^q =
$$

$$
= C_1^\alpha e^{a_1 t\alpha} {}_{\mathfrak{U}}\|u\|^\alpha,
$$

где $a_1 = \max\limits_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \mathrm{Re}\mu$. Аналогично, при любых $u \in \mathfrak{J}^2$ и $t \in \mathbb{R}$ получаем следующую оценку

$$
{}_{\mathfrak{U}}\|U_2^t u\|^\alpha = {}^{r+2n}_{\quad q}\left\| \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_2^L(M)} e^{\mathrm{Re}\mu_k t}\langle u, e_k\rangle e_k \right\|^q =
$$

$$
= \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_2^L(M)} \left(e^{\mu_k t} \lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} |u_k| \right)^q \geq C^q e^{qa_2 t} \sum_{k:\ \mu_k \in \sigma_2^L(M)} \left(\lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} |u_k| \right)^q =
$$

$$
= C_2^\alpha e^{a_2 t\alpha} {}_{\mathfrak{U}}\|u\|^\alpha
$$

где $a_2 = \min\limits_{\mu_k \in \sigma_2^L(M)} \mathrm{Re}\mu$.

Положим $a = \min\{-a_1, a_2\}$, тогда следует выполнение требования (ii) определения 3.1.1. $\bullet$

Замечание 3.1.2. Если при выполнении (3.1.4) окажется, что если одна из компонент $\sigma_2^L(M) = \oslash$, то $\mathfrak{J}^1 = \mathrm{im}U^\bullet$, где $\mathrm{im}U^\bullet$ — фазовое пространство уравнения (3.1.1). В этом случае решения уравнения (3.1.1) уместно назвать *экспоненциально асимптотически устойчивыми.*

Замечание 3.1.3. В теореме 3.1.1 условие (3.1.4) будет выполнено, если

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d_m}{c_n}\right) \neq 0 \qquad \text{и для всех } \ k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) \neq 0.$$

Действительно, при $\lambda_k \to +\infty$ и $n = m$ точки относительного спектра $\mu_k \to \dfrac{d_m}{c_n}$. Тогда в силу условий $\operatorname{Re}\left(\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\operatorname{Re}\left(\dfrac{d_m}{c_n}\right) \neq 0$, следует, что относительный спектр $\sigma^L(M)$ не пересекается с мнимой осью, то есть выполнено условие (3.1.4).

Следствие 3.1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.1 *и дополнительно* $\operatorname{Re}\left(\dfrac{d_m}{c_n}\right) < 0$*. Тогда устойчивое подпространство* $\mathfrak{I}^1$ *уравнения* (3.1.3) *бесконечномерно, а неустойчивое* $\mathfrak{I}^2$ *— конечномерно.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1.1 решения уравнения (3.1.3) имеют экспоненциальную дихотомию. Используя терминологию из замечания 3.1.1 исследуем инвариантные подпространства.

В силу условия $\operatorname{Re}\left(\dfrac{d_m}{c_n}\right) < 0$ компонента относительного спектра $\sigma_2^L(M)$, если не пуста, может содержать только конечное число точек относительного спектра. И соответственно, утверждение имеет место в силу следствия 2.1.2. $\bullet$

Замечание 3.1.4. Если в формулировке следствия 3.1.1 вместо условия $\operatorname{Re}\left(\dfrac{d_m}{c_n}\right) < 0$ взять условие $\operatorname{Re}\left(\dfrac{d_m}{c_n}\right) > 0$, то наоборот устойчивое подпространство $\mathfrak{I}^1$ будет конечномерным, а неустойчивое $\mathfrak{I}^2$ — бесконечномерным.

3.2. Оператор-функция Грина неоднородного уравнения

Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$ — квазисоболевы пространства, где $r \in \mathbb{R}$ и $q \in (0,1)$, а последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Рассмотрим неоднородное уравнение вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u}(t) = Q_m(\Lambda)u(t) + g(t), \tag{3.2.1}$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$, – многочлены, такие, что $m = n$. И пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$.

При таких условиях в силу теоремы 1.4.2 оператор $M = Q_m(\Lambda)$ является $(L,0)$-ограниченным при $L = P_n(\Lambda)$. В предыдущем пункте было показано, что для того, чтобы решения однородного уравнения (3.1.3) с $(L,0)$-ограниченным оператором M были э-дихотомичны достаточно, чтобы L-спектр оператора M не пересекался с мнимой осью. Это же условие достаточно для существования ограниченных решений неоднородного уравнения (3.2.1) в банаховых пространствах (см. напр. [21, 55, 63]). Покажем аналогичный результат для квазибанаховых пространств последовательностей.

Итак, пусть выполнено условие (3.1.4). Согласно предыдущему пункту обозначим $\sigma_1^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu < 0\}$, $\sigma_2^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu > 0\}$ и существуют контуры γ_1' и γ_2' лежащие соответственно в левой и правой полуплоскостях и ограничивающие области, содержащие $\sigma_1^L(M)$ и $\sigma_2^L(M)$ соответственно.

Согласно лемме 2.1.2 пространства $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}^1$ расщепляются: $\mathfrak{U}^1 =$

$\mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{21}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{11} \oplus \mathfrak{F}^{21}$. И соответствующие проекторы имеют вид

$$P_{1(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'_{1(2)}} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad Q_{1(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'_{1(2)}} L(\mu L - M)^{-1} d\mu,$$

$$P = P_1 + P_2, \quad Q = Q_1 + Q_2.$$

Здесь $\mathfrak{U}^{11} = \mathrm{im} P_1$, $\mathfrak{U}^{21} = \mathrm{im} P_2$, $\mathfrak{F}^{11} = \mathrm{im} Q_1$, $\mathfrak{F}^{21} = \mathrm{im} Q_2$.

Определение 3.2.1. Оператор-функцию

$$G^t \cdot = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma'_2} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu = -\sum_{k:\ \mu_k > 0} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & t < 0; \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma'_1} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu = \sum_{k:\ \mu_k < 0} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & t > 0, \end{cases}$$

назовем *функцией Грина* уравнения (3.2.1).

Рассмотрим функцию Грина подробнее.

Лемма 3.2.1. *Пусть $n = m$, числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, и выполнено условие* (3.1.4). *Тогда*

(i) $G^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^1$ *и выполнено* ${}_{q}^{r+2n}\|G^t u\| \leq C \cdot {}_{q}^{r+2n}\|u\| e^{-a|t|}$ *с* $a > 0$;

(ii) *при* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *функция Грина* G^t *непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению* $L\frac{dG^t}{dt} = MG^t$, *кроме того,* $\dfrac{dG^t}{dt} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^1$ *ограничена;*

(iii) $G^{0+} - G^{0-} = P$.

Доказательство. (i) Действие оператор-функции G^t из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}^1$ следует из вида функции G^t. Получим оценку. Аналогично, доказательству теоремы 3.1.1 при условии (3.1.4) выполнено $\sigma^L(M) = \sigma^L_1(M) \cup \sigma^L_2(M)$, где $\sigma^L_1(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu < 0\}$, $\sigma^L_2(M) =$

$\{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu > 0\}$. Кроме того, существуют контуры γ_1' и γ_2' лежащие в левой и правой полуплоскостях и ограничивающие области, содержащие $\sigma_1^L(M)$ и $\sigma_2^L(M)$ соответственно. А значит, существуют положительные константы $a_1 = -\max\limits_{\mu\in\gamma_1'} \operatorname{Re}\mu$ и $a_2 = \min\limits_{\mu\in\gamma_2'} \operatorname{Re}\mu$. При отрицательных t в силу леммы 1.1.1, а также замечания 1.1.1, получим

$$ {}^{r+2n}_{\quad q}\|G^t u\|^q = {}^{r+2n}_{\quad q}\left\| - \sum_{k:\ \mu_k>0} e^{\mu_k t}\langle u, e_k\rangle e_k \right\|^q = \sum_{k:\ \mu_k>0} \left(e^{\operatorname{Re}\mu_k t} \lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} |u_k| \right)^q \leq $$

$$ \leq C^q e^{q a_2 t} \sum_{k:\ \mu_k>0} \left(\lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} |u_k| \right)^q \leq C^q e^{-q a_2 |t|} \cdot {}^{r+2n}_{\quad q}\|u\|^q. $$

Аналогично, при $t > 0$ получим ${}^{r+2n}_{\quad q}\|G^t u\|^q \leq C^q e^{-q a_1 |t|} \cdot {}^{r+2n}_{\quad q}\|u\|^q$. Взяв в качестве $a = \min\{a_1, a_2\}$, получим оценку

$$ {}^{r+2n}_{\quad q}\|G^t u\| \leq C \cdot {}^{r+2n}_{\quad q}\|u\| e^{-a|t|}. $$

(ii) Из предыдущих оценок видно, что ряды, определяющие функцию Грина, сходятся равномерно. Кроме того справедливы равенства

$$ \frac{dG^t\cdot}{dt} = -\sum_{k:\ \mu_k>0} \mu_k e^{\mu_k t}\langle \cdot, e_k\rangle e_k, \quad t < 0; $$
$$ \frac{dG^t\cdot}{dt} = \sum_{k:\ \mu_k<0} \mu_k e^{\mu_k t}\langle \cdot, e_k\rangle e_k, \quad t > 0, $$

откуда следует непрерывная дифференцируемость G^t по параметру. Кроме того, справедливо равенство

$$ L\frac{dG^t}{dt} - MG^t = (-1)^{\tilde{m}-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\tilde{m}}'} (\mu L - M) R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu = 0, \quad \tilde{m} = 1, 2, $$

где $\gamma_{1(2)}'$ ограничивает, соответствующую часть относительного спектра $\sigma^L(M)$.

Ограниченность $\dfrac{dG^t}{dt}$ проверяется аналогично (i).

(iii) $\quad G^{0+} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1'} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu = \sum\limits_{k:\ \mu_k<0} \langle \cdot, e_k \rangle e_k = P_1.$

Аналогично $G^{0-} = -P_2$, а, значит, $G^{0+} - G^{0-} = P_1 + P_2 = P$. •

Лемма 3.2.2. *Пусть $n = m$, числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, выполнено условие* (3.1.4), *а функция $g : [a, b] \to \mathfrak{F}$ аналитична. Тогда вектор-функция*

$$u(t) = \int\limits_a^b G^{t-s} L_1^{-1} Q g(s) ds : [a, b] \to \mathfrak{U}^1$$

удовлетворяет уравнению (1.4.7) *при $t \in [a, b]$.*

Доказательство. По лемме 3.2.1 (i) при всех t функция $u(t) \in \mathfrak{U}^1$. Перепишем $u(t)$ в следующем виде

$$u(t) = \int\limits_t^b G^{t-s} L_1^{-1} Q g(s) ds + \int\limits_a^t G^{t-s} L_1^{-1} Q g(s) ds$$

и продифференцируем это равенство.

$$\frac{du}{dt} = -G^{0-} L_1^{-1} Q g(t) + \int\limits_t^b \frac{dG^{t-s}}{dt} L_1^{-1} Q g(s) ds + G^{0+} L_1^{-1} Q g(t) +$$

$$+ \int\limits_a^t \frac{dG^{t-s}}{dt} L_1^{-1} Q g(s) ds = L_1^{-1} Q g(t) + \int\limits_a^b L_1^{-1} L_1 \frac{dG^{t-s}}{dt} L_1^{-1} Q g(s) ds =$$

$$= L_1^{-1} Q g(t) + L_1^{-1} \int\limits_a^b M G^{t-s} L_1^{-1} Q g(s) ds = L_1^{-1} Q g(t) + L_1^{-1} M_1 u(t).$$

Мы использовали лемму 3.2.1, непрерывность операторов L_1^{-1} и M.

•

3.3. Ограниченные решения неоднородных уравнений

Напомним, что $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$ — квазисоболевы пространства, где $r \in \mathbb{R}$ и $q \in (0,1)$, а последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Операторы $P_n(\Lambda), Q_m(\Lambda) \in \mathcal{L}(\ell_q^{r+2n}; \ell_q^r)$ и числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$.

Рассмотрим существование ограниченных на всей числовой оси решений для уравнений вида (3.2.1). В дальнейшем будем использовать обозначения $g^0 = (I - Q)g$, $g^1 = Qg$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $n = m$, *числа* λ_k, *являющиеся корнями многочлена* $P_n(x)$, *не являются корнями* $Q_m(x)$, *выполнено условие* (3.1.4) *и пусть аналитическая вектор-функция* $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}$ *такова, что существует* $\widetilde{g} \in \mathfrak{F}$, *что* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |g_k(t)| = \widetilde{g}_k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда уравнение* (3.2.1) *имеет единственное ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, *причем это решение* $u = u(t)$ *имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{t-s} L_1^{-1} g^1(s) ds - M_0^{-1} g^0(t). \tag{3.3.1}$$

Если к тому же начальное значение $u_0 \in \mathfrak{U}$ *имеет вид*

$$u_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{-s} L_1^{-1} g^1(0) ds - M_0^{-1} g^0(0),$$

то вектор-функция (3.3.1) *является единственным ограниченным решением задачи* (3.2.1), (3.1.2).

Доказательство. Аналогично лемме 1.2.1, рассмотрим

$${}_{\mathfrak{U}}\left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{t-s} L_1^{-1} g^1(s) ds \right\|^{\alpha} =$$

$$= \ _{\mathfrak{U}}\left\| \int\limits_{t}^{+\infty} G^{t-s} L_1^{-1} Q g(s) ds + \int\limits_{-\infty}^{t} G^{t-s} L_1^{-1} Q g(s) ds \right\|^{\alpha} \leq$$

$$\leq \ {}^{r+2n}_{\quad q}\left\| \sum_{k:\ \mu_k>0} \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\mu_k(t-s)} \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} ds \ e_k \right\|^{q} +$$

$$+ \ {}^{r+2n}_{\quad q}\left\| \sum_{k:\ \mu_k<0} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\mu_k(t-s)} \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} ds \ e_k \right\|^{q} =$$

$$= \sum_{k:\ \mu_k>0} \left(\lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} \left| \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\mu_k(t-s)} \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} ds \right| \right)^{q} +$$

$$+ \sum_{k:\ \mu_k<0} \left(\lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} \left| \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\mu_k(t-s)} \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} ds \right| \right)^{q} \leq$$

$$\leq C \sum_{k:\ \mu_k>0} \left(\int\limits_{t}^{+\infty} e^{a_2(t-s)} ds \ \ \lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} \frac{\langle \widetilde{g}, e_k \rangle}{|P_n(\lambda_k)|} \right)^{q} +$$

$$+ C \sum_{k:\ \mu_k<0} \left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a_1(t-s)} ds \ \ \lambda_k^{\frac{r+2n}{2}} \frac{\langle \widetilde{g}, e_k \rangle}{|P_n(\lambda_k)|} \right)^{q}.$$

Здесь показатели a_1, a_2 такие, как в доказательстве пункта (i) леммы 3.2.1. В силу чего справедлива оценка

$$_{\mathfrak{U}}\left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{t-s} g(s) ds \right\| \leq \frac{2C_3}{a} \sup_{t \in \mathbb{R}} {}_{\mathfrak{U}}\| L_1^{-1} g(t) \|.$$

Второе слагаемое из решения (3.3.1) ограничено по условиям теоремы:

$$\left\| M_0^{-1} g^0(t) \right\| \leq C_{4\mathfrak{U}} \| \widetilde{g} \|.$$

Из всего выше сказанного следует, что вектор-функция (3.3.1) ограничена:

$$_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \leq \frac{2C_3}{a} \sup_{t\in\mathbb{R}} {}_{\mathfrak{U}}\|L_1^{-1}g(t)\| + C_4.$$

Согласно лемме 3.2.2 первое слагаемое в (3.3.1) удовлетворяет уравнению (1.4.7). Второе слагаемое является решением (1.4.8) согласно теореме 1.4.4 и замечанию 1.4.3.

Покажем единственность ограниченного решения. Для этого проверим, что однородное уравнение (3.1.3) не имеет ограниченных на всей оси решений, отличных от тривиального.

Напомним сначала, что группа из теоремы 1.4.3 для уравнения (3.1.3) имеет вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu.$$

В силу аналитичности подынтегральной функции этот интеграл можно представить в виде суммы интегралов по контурам γ_1' и γ_2': $U^t = U_1^t P_1 + U_2^t P_2$, где

$$U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1'} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu = \sum_{k:\ \mu_k < 0} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$U_2^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2'} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu = \sum_{k:\ \mu_k > 0} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что в силу (2.1.4) семейства операторов $\{U_1^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{U_2^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : t \in \mathbb{R}\}$ образуют группы операторов, так как оператор M_{11} (L_{11}, σ)-ограничен в силу относительно спектральной теоремы 1.3.2 и оператор M_{21} также (L_{21}, σ)-ограничен в силу той же теоремы.

Допустим, что нетривиальное ограниченное решение $u(t)$ уравнения (3.1.3) на прямой существует. Обозначим $u(0) = u_0$. Тогда это решение $u(t) = U^t u_0$, где U^t разрешающая группа из теоремы 1.4.3, и в силу теоремы 1.4.1 оно единственно.

Рассмотрим уравнение

$$L_{11}\dot{u}_1(t) = M_{11}u_1(t) \tag{3.3.2}$$

на пространстве $\mathfrak{U}^{11}$. Поскольку оператор M_{11} (L_{11}, σ)-ограничен, то из теоремы об инвариантном пространстве 2.1.1 следует, что U_1^t — разрешающая группа для уравнения (3.3.2). Тогда решение $u_1(t) = U_1^t u_0^1$, где $u_0^1 = P_1 u_0 \in \mathfrak{U}^{11}$, причем это решение также ограничено при $t > 0$:

$$\exists N > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|U_1^t u_0\| \leq N.$$

Из (i) леммы 3.2.1 следует, что при $t > 0$

$${}_{\mathfrak{U}}\|U_1^t\| = {}_{\mathfrak{U}}\|G^t P_1\| \leq Ce^{at}{}_{\mathfrak{U}}\|P_1\|.$$

Поэтому при $t < 0$

$${}_{\mathfrak{U}}\|u_0^1\| = {}_{\mathfrak{U}}\|U_1^{-t}U_1^t u_0^1\| \leq NC_{\mathfrak{U}}\|L_{11}\|e^{at} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty,$$

и следовательно $u_0^1 = 0$.

Аналогично рассмотрим уравнение

$$L_{21}\dot{u}_2(t) = M_{21}u_2(t) \tag{3.3.3}$$

на пространстве $\mathfrak{U}^{21}$. Так как оператор M_{21} также (L_{21}, σ)-ограничен, то из теоремы об инвариантном пространстве 2.1.1 следует, что U_2^t — разрешающая группа для уравнения (3.3.3). Тогда $u_2(t) = U_2^t u_0^2$, где $u_0^2 = P_2 u_0 \in \mathfrak{U}^{21}$, причем это решение также ограничено при $t > 0$:

$$\exists N > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|U_2^t u_0\| \leq N.$$

Из (i) леммы 3.2.1 следует, что при $t > 0$

$$_{\mathfrak{U}}\|U_2^t\| = {}_{\mathfrak{U}}\|G^t P_2\| \leq Ce^{at}{}_{\mathfrak{U}}\|P_2\|.$$

Поэтому при $t < 0$

$$_{\mathfrak{U}}\|u_0^2\| = {}_{\mathfrak{U}}\|U_2^{-t}U_2^t u_0^2\| \leq NC_{\mathfrak{U}}\|L_{21}\|e^{at} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty,$$

и следовательно $u_0^2 = 0$.

Поэтому $u_0 = u_0^1 + u_0^2 = 0$. Следовательно решение уравнения .... $u(t) = U^t u_0 \equiv 0$. Что противоречит предположению о существовании нетривиального ограниченного решения. Теорема доказана. •

Опишем ограниченные на положительной полуоси решения уравнения (3.2.1).

Теорема 3.3.2. *Пусть $n = m$, числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, выполнено условие* (3.1.4) *и пусть аналитическая вектор-функция $g : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{F}$ такова, что существует $\widetilde{g} \in \mathfrak{F}$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |g_k(t)| = \widetilde{g}_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $u_0 = u_0^1 \in \mathfrak{J}^1$ задача Коши* (3.2.1), (3.1.2) *имеет единственное ограниченное на $\overline{\mathbb{R}_+}$ решение $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathfrak{U})$ вида*

$$u(t) = U^t u_0^1 + \int\limits_0^{+\infty} G^{t-s} L_1^{-1} g^1(s) ds - M_0^{-1} g^0(t). \tag{3.3.4}$$

А если начальное значение $u_0 \in \mathfrak{U}$, то вектор-функция (3.3.4) *является единственным ограниченным решением задачи Коши* (3.2.1), (3.1.2), *только если выполнено*

$$(\mathbb{I} - P_1)u_0 = \int\limits_0^{+\infty} G^{-s} L_1^{-1} g^1(0) ds - M_0^{-1} g^0(0). \tag{3.3.5}$$

Доказательство. Пусть начальное значение $u_0 \in \mathfrak{J}^1$, тогда задача (3.2.1), (3.1.2) эквивалентна совокупности задач

$$H\dot{u}^0(t) = u^0(t) + M_0^{-1} g^0(t), \tag{3.3.6}$$

$$\dot{u}^1(t) = L_{11}^{-1} M_{11} u^1(t) + L_{11}^{-1} Q_1 g^1(t), \quad u^1(0) = u_0, \tag{3.3.7}$$

$$\dot{u}^2(t) = L_{21}^{-1} M_{21} u^2(t) + L_{21}^{-1} Q_2 g^1(t), \quad u^2(0) = 0. \tag{3.3.8}$$

Здесь использованы обозначения п.п. 1.3 и 3.2.

В силу теоремы 1.4.2 решение уравнения (3.3.6) имеет вид

$$u^0(t) = -M_0^{-1} g^0(t) = -\sum_{l\in\mathbb{N}:P_n(\lambda_l)=0} \frac{\langle g(t), e_l\rangle}{Q_m(\lambda_l)}\, e_l$$

и по условиям теоремы ограничено на $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Можно показать, что ограниченное решение задачи (3.3.7) на $\overline{\mathbb{R}_+}$ имеет вид

$$u^1(t) = \sum_{k:\mu_k<0} \left(e^{\mu_k t}\langle u_0, e_k\rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}\, e^{\mu_k(t-s)} ds \right) e_k.$$

Единственным ограниченным на $\overline{\mathbb{R}_+}$ решением задачи (3.3.8) является функция

$$u^2(t) = -\sum_{k:\mu_k>0} \int\limits_t^{+\infty} \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}\, e^{\mu_k(t-s)} ds\, e_k,$$

что проверяется непосредственно.

Следовательно, решение $u(t) = u^0(t) + u^1(t) + u^2(t)$ имеет вид (3.3.4) и ограничено на $\overline{\mathbb{R}_+}$. Также по построению это решение единственно.

Теперь пусть начальное значение $u_0 \in \mathfrak{U}$, тогда задача (3.2.1), (3.1.2) эквивалентна совокупности задач

$$H\dot{u}^0(t) = u^0(t) + M_0^{-1} g^0(t),$$

$$\dot{u}^1(t) = L_{11}^{-1} M_{11} u^1(t) + L_{11}^{-1} Q_1 g^1(t), \quad u^1(0) = u_0^1,$$

$$\dot{u}^2(t) = L_{21}^{-1} M_{21} u^2(t) + L_{21}^{-1} Q_2 g^1(t), \quad u^2(0) = u_0^2. \tag{3.3.9}$$

Ограниченные решения первых двух из них определяются также как и выше.

Решение уравнения из задачи (3.3.9) имеет вид

$$u^2(t) = \sum_{k:\mu_k>0} e^{\mu_k t} \langle u_0^2, e_k \rangle e_k - \sum_{k:\mu_k>0} \int\limits_t^{+\infty} \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} e^{\mu_k(t-s)} ds\, e_k.$$

Эта функция ограничена при $t > 0$ только в случае, если $u_0^2 = 0$, так как соответствующее однородное уравнение не имеет ограниченных решений, отличных от тривиальных (в силу теоремы 3.1.1 эта часть решения экспоненциально возрастает). Кроме того, данная функция удовлетворяет начальному условию из (3.3.9) только в случае, если выполнено условие согласования (3.3.5).

Следовательно, ограниченное на $\overline{\mathbb{R}_+}$ решение $u(t) = u^0(t) + u^1(t) + u^2(t)$ имеет вид (3.3.4) и по построению это решение единственно. •

Замечание 3.3.1. Аналогично теореме 3.3.2 существует ограниченное решение на $\overline{\mathbb{R}_-}$ и при соответствующей смене требований теоремы 3.3.2, и это решение имеет вид

$$u(t) = U^t u_0^2 + \int\limits_{-\infty}^{t} G^{t-s} L_1^{-1} Q_2 g^1(s) ds - M_0^{-1} g^0(t).$$

3.4. Экспоненциальные дихотомии и ограниченные решения аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

Пусть $r \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$ и последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Рассмотрим в квазисоболевых пространствах аналог уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)\dot{u} = \alpha\Lambda u. \tag{3.4.1}$$

Возьмем $\mathfrak{U} = \ell_p^{r+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_p^r$, операторы L, M зададим формулами $L = P_1(\Lambda) = \lambda - \Lambda$, $M = Q_1(\Lambda) = \alpha\Lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ — некоторые константы. В силу лемм 1.4.1, 2.4.1 операторы $L, M \in \mathcal{L}(\ell_q^{r+2}; \ell_q^r)$ и M является $(L,0)$-ограниченным.

Относительный L-спектр оператора M имеет вид

$$\left\{\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l:\ \lambda = \lambda_l\}\right\}, \tag{3.4.2}$$

подпространства

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{\mathbf{0}\}, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U}:\ u_k = 0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l:\ \lambda = \lambda_l\}\}\,; \end{cases}$$

и

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U}:\ u_l = 0,\ \lambda_l = \lambda\}\,. \end{cases}$$

Подпространства $\mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$ определяется аналогично.

Разрешающая группа уравнения (3.4.1) имеет вид

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } \lambda \notin \lambda_k, k \in \mathbb{N} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если существует } \ l \in \mathbb{N} : \lambda = \lambda_l. \end{cases}$$

Здесь $\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}$ – точки L-спектра оператора M из (3.4.2). Фазовым пространством уравнения (3.4.1) будет множество $\mathfrak{U}^1$, определенное выше.

Сформулируем результат о существовании дихотомий решений.

Теорема 3.4.1. *Для любых* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *решения уравнения* (3.4.1) *имеют экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. По лемме 2.4.1 оператор M $(L, 0)$-ограничен. Так как $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, то для относительного спектра (3.4.1) выполнено условие (3.1.4). Соответственно, по теореме 3.1.1 решения уравнения (3.4.1) имеют экспоненциальную дихотомию. •

Так как L-спектр оператора M имеет вид (3.4.2), то он дискретен и имеет только одну точку "накопления": $-\alpha$. Соответственно в силу следствия 2.1.1 и леммы 2.4.2, при $\alpha > 0$ устойчивое инвариантное подпространство $\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{U}^{11}$ (в терминах пункта 2.2) бесконечномерно, а неустойчивое $\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{U}^{21}$ либо конечномерно, либо тривиально. Если $\alpha < 0$, то наоборот.

Перейдем к рассмотрению аналога неоднородного уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)u_t = \alpha\Lambda u + g \tag{3.4.3}$$

с начальным условием Коши (3.1.2).

Покажем существование ограниченного решения для уравнения (3.4.3). В силу теоремы 3.3.1 справедлива следующая

Теорема 3.4.2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и пусть вектор-функция* $g : \mathbb{R} \to \ell_q^r$ *аналитична и для нее существует* $\widetilde{g} \in \ell_q^r$ *такое, что*

$\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |g_k(t)| = \widetilde{g}_k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда уравнение* (3.4.3) *имеет единственное ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* $u \in C^1(\mathbb{R}, \ell_q^{r+2})$, *причем*

$$u(t) = \sum_{k:\lambda_k\neq\lambda} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{t-s} \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}\, ds \right) e_k - \sum_{\lambda_l=\lambda} \frac{\langle g(t), e_l\rangle}{\alpha\lambda}\, e_l, \qquad (3.4.4)$$

где оператор-функция Грина из определения 3.2.1. *Если к тому же начальное значение* $u_0 \in \ell_q^{r+2}$ *имеет вид*

$$u_0 = \sum_{k:\lambda_k\neq\lambda} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{-s} \frac{\langle g(0), e_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}\, ds \right) e_k - \sum_{\lambda_l=\lambda} \frac{\langle g(0), e_l\rangle}{\alpha\lambda}\, e_l,$$

то вектор-функция (3.4.4) *является единственным ограниченным решением задачи* (3.1.2), (3.4.3).

Наконец, в силу теоремы 3.3.2 справедлива теоремы о существовании ограниченного на полуоси решения уравнения (3.4.3).

Теорема 3.4.3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и вектор-функция* $g : \mathbb{R}_+ \to \ell_q^r$ *аналитична и для нее существует* $\widetilde{g} \in \ell_q^r$ *такое, что* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |g_k(t)| = \widetilde{g}_k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$.

Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ *такого, что выполнено условие*

$$\langle u_0, e_k\rangle = 0 \text{ при } \mu_k > 0, \quad \text{а также } \langle u_0, e_l\rangle = 0 \quad \text{при } \lambda_l = \lambda,$$

уравнение (3.4.3) *имеет единственное ограниченное на полуоси* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *решение* $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}, \ell_q^{r+2})$, *причем*

$$u(t) = -\sum_{l\in\mathbb{N}:\lambda_l=\lambda} \frac{\langle g(t), e_l\rangle}{\alpha\lambda}\, e_l - \sum_{k:\mu_k>0} \int\limits_t^{+\infty} \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}\, e^{\mu_k(t-s)} ds\, e_k +$$
$$+ \sum_{k:\mu_k<0} \left(e^{\mu_k t}\langle u_0, e_k\rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}\, e^{\mu_k(t-s)} ds \right) e_k.$$

Аналогично для отрицательной полуоси получим

Теорема 3.4.4. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и вектор-функция* $g : \mathbb{R}_- \to \ell_q^r$ *аналитична и для нее существует* $\widetilde{g} \in \ell_q^r$ *такое, что* $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}_-} |g_k(t)| = \widetilde{g}_k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$.

Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ *такого, что выполнено условие*

$$\langle u_0, e_k \rangle = 0 \text{ при } \mu_k < 0, \quad \text{а также } \langle u_0, e_l \rangle = 0 \quad \text{при } \lambda_l = \lambda,$$

уравнение (3.4.3) *имеет единственное ограниченное на полуоси* $\overline{\mathbb{R}_-}$ *решение* $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_-}, \ell_q^{r+2})$, *причем*

$$u(t) = -\sum_{l \in \mathbb{N}: \lambda_l = \lambda} \frac{\langle g(t), e_l \rangle}{\alpha \lambda} e_l + \sum_{k: \mu_k < 0} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda - \lambda_k} e^{\mu_k (t-s)} ds \, e_k +$$
$$+ \sum_{k: \mu_k > 0} \left(e^{\mu_k t} \langle u_0, e_k \rangle - \int\limits_{t}^{0} \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda - \lambda_k} e^{\mu_k (t-s)} ds \right) e_k.$$

Заключение

В диссертационном исследовании цель работы достигнута решением всех поставленных задач. Получены следующие результаты:

1. Теоремы о разрешимости одного класса динамических уравнений в комплексных квазибанаховых пространствах с различными начальными и начально-конечным условиями.

2. Относительно спектральная теорема в квазисоболевых пространствах.

3. Теоремы о существовании инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений для однородных уравнений указанного класса.

4. Теоремы об ограниченности на полуоси решений однородных уравнений указанного класса.

5. Теоремы об ограниченности решений неоднородных уравнений указанного класса.

6. Построение аналога линеаризованного уравнения Хоффа и аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в комплексных квазисоболевых пространствах, а также исследование свойств решений этих уравнений.

Диссертация является законченным исследованием, полностью соответствующим специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

В качестве перспектив развития тематики исследования укажем: исследование уравнений высокого порядка, уравнения с относительно секториальными операторами. Ограниченные решения считаются наиболее «физичными» с точки зрения приложений, поэтому результаты диссертации в перспективе будут применены при переходе к изучению конкретных приложений в виде уравнений в квазибанаховых пространствах последовательностей.

Исследование линейных классов уравнений обычно предваряет исследование нелинейных, которые более часто встречаются в приложениях, поэтому в качестве перспективы укажем исследование нелинейных уравнений в квазисоболевых пространствах. Для рассмотрения нелинейных уравнений, во-первых, необходимо исследовать классы пространств, в которых существуют решения. После того, как будет исследована разрешимость, можно будет перейти к исследованию свойств решений – существование устойчивых и неустойчивых многообразий решений, для чего необходимы результаты о свойствах решений линейной части уравнения, которые получены в данной работе.

Список литературы

[1] *Александров, А.Б.* Квазиномированные пространства в комплексном анализе : дисс. …докт. физ.-мат. наук : 01.01.01 / А.Б. Александров. – Ленинград, 1983.

[2] *Аль-Делфи, Дж.К.* Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2013. – № 2 (13). – С. 13–16.

[3] *Аль-Делфи, Дж.К.* Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

[4] *Аль-Делфи, Дж.К.* Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах : дисс. …канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Дж.К. Аль-Дельфи; ЮУрГУ. – Челябинск, 2015.

[5] *Балакришнан, А.В.* Прикладной функциональной анализ / А.В. Балакришнан. – М.: Наука, 1980.

[6] *Баренблатт, Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.

[7] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрем. – М.: Мир, 1980.

[8] *Баскаков, А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов /

А.Г. Баскаков // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, № 3. – С. 1–11.

[9] *Баскаков, А.Г.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А.Г. Баскаков, К.И. Чернышов // Математический сборник. – 2002. – Т. 193, № 11. – С. 3–35.

[10] *Васильев, В.В.* Полугруппы операторов, косинус оператор–функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев // Итоги науки и текники. Сер. Мат. анализ. – 1990. – Т. 28. – С. 87–202.

[11] *Вовк, С.М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2010. – Т. 53, № 7. – С. 31–42.

[12] *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967.

[13] *Далецкий, Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – Москва: Наука, 1970.

[14] *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967.

[15] *Загребина, С.А.* Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина //

Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.

[16] *Загребина, С.А.* Устойчивость в моделях Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Москвичева. – Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[17] *Замышляева, А.А.* Линейные уравнения соболевского типа высского порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[18] *Зубова, С.П.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова, К. И. Чернышев // Дифференц. уравнения и их применение. – 1976. – № 14. – С.21–39.

[19] *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972.

[20] *Келлер, А.В.* Относительно спектральная теорема / А.В. Келлер // Вестник Челяб. гос. университета. Сер. Матем. Мех. – 1996. – № 1 (3). – С. 62–66.

[21] *Келлер, А.В.* Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева : дисс. …канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / А.В. Келлер; ЧелГУ. – Челябинск, 1997.

[22] *Келлер, А.В.* Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

[23] *Клемент, Ф.* Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. – М.: Мир, 1992.

[24] *Коддингтон, Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: ИЛ, 1958.

[25] *Костин, А.В.* К теории функциональных пространств Степанова / А.В. Костин, В.А. Костин. – Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2007.

[26] *Костин, В.А.* К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп / В.А. Костин // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11, вып. 1. – С. 118–140.

[27] *Костин, В.А.* Элементарные полугруппы преобразований и производящие их уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // ДАН. – 2014. – Т. 455, № 2. – С. 1–4.

[28] *Костин, В.А.* Эволюционные уравнения с особенностями в обобщенных пространствах Степанова / В.А. Костин, С.В. Писарева // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – № 6. – С. 35–44.

[29] *Крейн, М.Г.* О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости / М.Г. Крейн // УМН. – 1948. – Т. 3, № 3. – С. 166-169.

[30] *Крейн, М.Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.Г. Крейн. – Киев: Изд-во ИМ АН УССР, 1964. – 186 с.

[31] *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967.

[32] *Крейн, С.Г.* Функции Ляпунова и задачи Коши для некоторых систем уравнений в частных производных / С.Г. Крейн, В.Б. Осипов // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 11. – С. 2053–2061.

[33] *Крепкогорский, В.Л.* Квазиномированные пространства функций, рационально аппроксимируемых в норме BMO / В.Л. Крепкогорский // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1990. – № 3.– С. 38–44.

[34] *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973.

[35] *Ляпунов, А.М.* Собрание сочинений. Т.2 / А.М. Ляпунов. – М.: Изд-во АН СССР, 1956.

[36] *Майзель, А.Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений / А.Д. Майзель // Тр. Уральск. политехн. ин-та. Сер. математика. – 1954. – № 51. – С. 20-50.

[37] *Манакова, Н.А.* Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[38] *Массера, Х.Л.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970.

[39] *Мельникова, И.В.* Об однопараметрических группах операторов в локально выпуклых пространствах / И.В. Мельникова // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. XXVI, № 6. – С. 167–170.

[40] *Мельникова, И.В.* Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений / И.В. Мельникова // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 4. – С. 892–910.

[41] *Мельникова, И.В.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 6. – С. 111–150.

[42] *Мухамадиев, Э.М.* Об оценке спектрального радиуса одного оператора, связанного с уравнениями нейтрального типа / Э.М. Мухамадиев // Математические заметки. – 1973. – Т. 13, вып. 1. – С. 67–78.

[43] *Мухамадиев, Э.М.* Асимптотика и существование ограниченных решений нелинейного уравнения Шредингера на полуоси / Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 5. – С. 651–656.

[44] *Мухамадиев, Э.М.* Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 9. – С. 121–134.

[45] *Наимов, А.Н.* О числе нестационарных ограниченных траекторий одного класса автономных систем на плоскости / А.Н. На-

имов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 8. – С. 1050–1055.

[46] *Новиков, С.Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных прространств на $[0, 1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. – 1997. – Т. 62, вып. 4. – С. 549–563.

[47] Пятков, С.Г. Некоторые свойства собственных функций линейных пучков / С.Г. Пятков // Сиб. мат. журн. – 1989. – Т. 30, № 4. – С. 111-124.

[48] Пятков, С.Г. О некоторых свойствах собственных функций линейных пучков / С.Г. Пятков // Мат. заметки. – 1992. – Т. 51, вып. 1. – С. 141-148.

[49] Пятков, С.Г. Базисность по Риссу собственных и присоединенных элементов линейных самосопряженных пучков / С.Г. Пятков // Мат. сборник. – 1994. – Т. 185, № 3. – С. 93-116.

[50] *Рудин, У.* Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975.

[51] *Руткас, А.Г.* Спектральный анализ и вопросы разрешимости операторно-дифференциальных уравнений / А.Г. Руткас // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 4. — С. 161.

[52] *Руткас, А.Г.* Спектральные методы исследования вырожденных дифференциально-операторных уравнений / А.Г. Руткас // Современная математика и ее приложения, том 35: Труды весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XIV Воронеж, 2003. Часть 2. — Тбилиси, 2005. — С. 48–64.

[53] *Сагадеева, М.А.* Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / М.А. Сагадеева; ЧелГУ. – Челябинск, 2006.

[54] *Сагадеева, М.А.* Разрешимость нестационарной задачи теории фильтрации / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18. – С. 45–56.

[55] *Сагадеева, М.А.* Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[56] *Сапронов, Ю.И.* Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем / Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов. – Воронеж, 2012.

[57] *Свешников, А.Г.* Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М., 2007.

[58] *Свиридюк, Г.А.* Задачи Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 2169–2171.

[59] *Свиридюк, Г.А.* К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

[60] *Свиридюк, Г.А.* Фазовые пространства полулинейных уравений типа Соболева с относительно сильно секториальным опкрато-

ром / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.

[61] *Свиридюк, Г.А.* Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывнные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // ДАН. – 1994. – Т. 337, № 5. – С. 581–584.

[62] *Свиридюк, Г.А.* Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Математические заметки СВФУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 180–185.

[63] *Свиридюк, Г.А.* Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

[64] *Свиридюк, Г.А.* Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2012. – № 1. – С. 104–125.

[65] *Свиридюк, Г.А.* Неклассические модель математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

[66] Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. – Иркутск: Иркут. ун-т, 1982. – 312 с.

[67] Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726-728.

[68] *Трибель, Х.* Теория интерполяций. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980.

[69] *Федоров, В.Е.* Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160.

[70] *Федоров, В.Е.* Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах : дисс. ...докт. физ.-мат. наук : 01.01.02 / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005.

[71] *Федоров, В.Е.* Существование экспоненциальных дихотомий некоторых классов вырожденных линейных уравнений / В.Е. Федоров, М.А. Сагадеева // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 82 – 92.

[72] *Фетисов, В.Г.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах / В.Г. Фетисов, В.И. Филиппенко, В.Н. Козоброд. – Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006.

[73] *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.

[74] *Хилле, Е.* Функциональный анализ и полугруппы / Е. Хилле, Р. Филлипс. – М.: ИЛ, 1962.

[75] *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. – М.: Мир, 1964.

[76] *Чшиев, А.Г.* Спектральный анализ вырожденных полугрупп операторов : дисс. . . . канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / А.Г. Чшиев. – Воронеж, 2011.

[77] *Шестаков, А.Л.* Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

[78] *Adams, R.* Sobolev space / R. Adams. – New York, London, 1975.

[79] *Al'shin, A.B.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin: de Gruyter, 2011.

[80] *Arendt, W.* Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems / W. Arendt // Israel J. Math. – 1987. – V. 59. – P. 327–352.

[81] *Bastero, J.* An extention of Milmans Reverse Burn–Minkowski inequality / J. Bastero, J. Bernuès, A. Péna // Math. & Func. Anal. – 1995. – V. 1. – P. 950–1210.

[82] *Berberian, S.* Lectures in Functional analysis and operator theory / S. Berberian. – New York: Springer-Velag, Inc, 1974.

[83] *Bohl, P.* Über Differentialugleichungen / P. Bohl // J. f. reine und angew, Math. – 1913. – V. 144. – S. 284-318.

[84] *De Laubenfelds, R.* Integrated semigroups, C-semigroups and the abstract Cauchy problem / R. de Laubenfelds // Semigroup Forum. – 1990. – V. 41. – P. 83–95.

[85] *Demidenko, G.V.* Partial differential equation and systems not solvable with respect to the highest–order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

[86] *Favini, A.* Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // Rend. Mat. – 1979. – V. 12, № 3-4. – P. 511–536.

[87] *Favini, A.* An operational method for abstract degenerate evolution equations of hiperbolic type / A. Favini // J. Funct. Anal. – 1988. – V. 76. – P. 432–456.

[88] *Favini, A.* Degenerate differential equation in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York etc.: Marcel Dekker Inc. – 1999.

[89] *Hadamard, J.* Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles / J. Hadamard // Bull. Soc. Math. – 1901. – V. 29. – P. 224-228.

[90] *Hardtke, J.D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. – 2013. – V. 9, № 4. – P. 448–454.

[91] *Hoff, N.A.* Greep buckling / N.A. Hoff // Aeron. – 1965. – V. 7, № 1. – P. 1–20.

[92] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. – Amsterdam etc.: Elsevier, 2003. – P. 1099–1130.

[93] *Kellerman, H.* Integrated semigroups / H. Kellerman, M. Hieber // J. Funct. Anal. – 1989. – V. 84. – P. 160–180.

[94] *Komatsu, H.* Semi-group of operators in locally convex spaces / H. Komatsu // J. Math. Soc. Japan. – 1964. – V. 16. – P. 230–262.

[95] *Komura, T.* Semigroups of operators in locally convex spaces / T. Komura // Anal. – 1968. – V. 2. – P. 252–296.

[96] *Melnikova, I.V.* The Cauchy problem. Three approaches Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov. – London, New York, Washington, 2001.

[97] *Obayashi, H.* On a generation theorem of groups of operators in locally convex spaces / H. Obayashi // Mem. Kanazawa Inst. Technol. – 1979. – № 12. – P. 5–10.

[98] *Ouchi, S.* Semi-groups of operators in locally convex spaces / S. Ouchi // J.Math. Soc. Japan. – 1973. – V. 25, № 2. – P. 265–276.

[99] *Pazy, A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – New York etc.: Springer, 1983.

[100] *Perron, O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Z. – 1930. – V. 32, № 5 – P. 703-728.

[101] *Pyatkov, S.G.* Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht – Boston – Köln – Tokyo: VSP, 2002.

[102] *Rolewicz, S.* Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. – Warsaw: PWN, 1985.

[103] *Sagadeeva, M.A.* Existence of Solutions in Quasi-Banach Spaces for Evolutionary Sobolev Type Equations in Relatively Radial Case / M.A. Sagadeeva, A.S. Rashid // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, no. 2. – P. 71–81.

[104] *Schwartz, L.* Lectures on mixed problems in partial differential equations and representation of semi-groups / L. Schwartz. – Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[105] *Showalter, R.E.* The Sobolev type equation I / R.E. Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V.5, № 1. – P. 15–22.

[106] *Sidorov, N.* Lyapunov–Shmidt Method in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[107] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003.

[108] *Yagi, A.* Generation theorems of semigroups for multivalued linear operators / A. Yagi // Osaka J. Math. – 1991. – V. 28. – P. 385–410.

[109] *Yosida, K.* Functional Analysis / K. Yosida. – New York, London, 1978.

Публикации автора по теме диссертации

[110] *Хасан, Ф.Л.* Solvability of the Cauchy Problem for One Class of Dynamical Equations in Quasi-Sobolev Spaces / Ф.Л. Хасан // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, no. 3. – P. 34–42.

[111] *Хасан, Ф.Л.* Существование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 46–53.

[112] *Хасан, Ф.Л.* Ограниченные решения модели Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 132–139.

Тезисы и материалы конференций

[113] *Хасан, Ф.Л.* Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах / Ф.Л. Хасан // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014. – Воронеж, 2014. – С. 393–396.

[114] *Хасан, Ф.Л.* Инвариантные подпространства решений уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазибанаховых пространствах / Ф.Л. Хасан // Обозрение прикладной и промышленной математики – 2015. Т. 22, вып. 2. – С. 278–279.

[115] *Хасан, Ф.Л.* Об относительно спектральной теореме для одного класса динамических уравнений в квазисоболевых пространствах / Ф.Л. Хасан // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сб. тез. междунар. науч. конф. Уфа, 1 – 3 октября 2015 г. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. – С. 142–143.

[116] *Хасан, Ф.Л.* Об ограниченных решениях одного класса динамических уравнений в квазисоболевых пространствах / Ф.Л. Хасан // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016. – Воронеж, 2016. – С. 417–420.