На правах рукописи

Дикарев Егор Евгеньевич

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2016

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор

Баскаков Анатолий Григорьевич.

Официальные оппоненты:

Глушак Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, кафедра математики, профессор,

Сторожук Константин Валерьевич, кандидат физико-математических наук, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, старший научный сотрудник.

Ведущая организация: **Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова**, г. Владикавказ.

Защита состоится 24 мая 2016 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
`http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2865`

Автореферат разослан "   " марта 2016 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Гликлих Ю. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одно из основных направлений развития теории операторов связано с изучением аксиоматически выделяемых классов линейных операторов, допускающих определённые аналоги спектральных разложений самосопряжённых и нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Определяющим является требование наличия у вводимого класса операторов инвариантных подпространств таких, что спектры сужения оператора на эти подпространства лежат в наперёд заданных компактах и порождающих в том или ином смысле исходное пространство. На таком подходе основано определение и изучение классов нормальных, самосопряжённых, спектральных (по Данфорду), обобщённых спектральных, разложимых (по Фойашу), неквазианалитических (по Любичу – Мацаеву) и многих других классов линейных операторов.

Данная диссертация посвящена изучению некоторых классов линейных операторов, действующих в банаховых пространствах. Основными методами исследования являются методы гармонического анализа, которые используются благодаря наличию достаточно обширного функционального исчисления для рассматриваемых классов операторов. Спектральный анализ достаточно широких классов операторов, находящих применение при изучении дифференциальных и разностных уравнений, в данной диссертации делает задачу их изучения актуальной.

Цель работы состоит в развитии методов гармонического анализа линейных операторов, доказательстве существования инвариантных подпространств для линейных операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах, обобщении неравенств Бернштейна и Бора–Фавара на более широкий класс операторов, получении приложений указанных неравенств, в частности, к методу подобных операторов.

Методы исследования. Основными методами исследования являются методы гармонического анализа, спектральной теории операторов, теории функций, теории представлений групп и полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах.

Научная новизна. В диссертации получен ряд новых результатов.

1. Доказано существование нетривиальных инвариантных подпространств для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

2. Получен абстрактный аналог неравенства Бернштейна для векторов и некоторых классов операторов.

3. Получены приложения неравенства Бернштейна к оценкам норм производных функций из однородных пространств, целых на бесконечности функций, оценкам норм операторов коммутирования.

4. Получен абстрактный аналог неравенства Бора – Фавара для векторов и некоторых классов операторов.

5. Получены оценки проекторов на спектральное подпространство.

6. Получены приложения неравенства Бора – Фавара к методу подобных операторов (*теорема о расщеплении*), оценке интеграла от функций из однородных пространств.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы для дальнейшего развития методов гармонического анализа, получения приложений к спектральной теории операторов, в частности, оценок типа Бернштейна и Бора – Фавара. Также результаты могут использоваться при чтении спецкурсов в университетах для студентов математических специальностей и применяться специалистами в области гармонического и функционального анализа при исследовании вопросов, связанных с тематикой диссертации.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С. Г. Крейна (2013, 2014 гг.), на Крымских осенних математических школах (Украина, г. Севастополь, 2010, 2011, 2012 г.), на Крымской международной математической конференции (Украина, г. Судак, 2013 г.), на математическом интернет-семинаре ISEM-2014 (Германия, г. Блаубойрен, 2014 г.), на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана (г. Москва, 2014 г.), на семинарах А. Г. Баскакова и научных сессиях Воронежского государственного университета.

Публикации автора по теме диссертации. Основные результаты диссертации содержатся в работах [1-9]. Работы [6,8,9] опубликованы в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных публикаций [1,7,8,9] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, и библиографии, включающей 72 наименования. Основные результаты содержатся во 2, 3 и 4 главах. Общий объем диссертации составляет 101 страницу.

Глава 1 содержит сводку широко используемых в диссертации определений и результатов из спектральной теории замкнутых операторов, теории топологических групп, банаховых алгебр, банаховых модулей, представлений групп и полугрупп линейных операторов.

Глава 2 содержит результаты по спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах. В большинстве известных монографий, в которых подробно излагается либо существенно используется спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах, их авторы, как правило, предполагают, что эти пространства являются комплексными либо указывают на возможность комплексификации вещественного банахова пространства. Тем не менее, при построении спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах иногда необходимо подробно отслеживать переход в комплексификацию пространства и обратный переход.

Для неквазианалитического оператора в вещественном банаховом пространстве получены результаты о существовании нетривиального инвариантного подпространства.

Пусть X — вещественное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Если $A \in \operatorname{End} X$, то спектр оператора A может быть пустым множеством. Тем самым, возникает проблема построения по спектру инвариантных подпространств для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

При изучении оператора A обычно осуществляется комплексификация банахова пространства X, т. е. рассматривается банахово пространство $\mathbf{X}$, состоящее из векторов вида $x_1 + \mathrm{i}x_2$, где $x_1, x_2 \in X$.

Оператор A расширяется на $\mathbf{X}$ до оператора $\mathbf{A} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$. Определённые свойства оператора A (например, неквазианалитичность) индуцируют аналогичные свойства для оператора $\mathbf{A}$. Проводится исследование оператора $\mathbf{A}$ методами гармонического анализа. Затем, следуя подходу, разработанному А. Г. Баскаковым[1], свойства оператора $\mathbf{A}$ распространяются для исследования оператора A. Таким способом получены условия разложимости по Фойашу, а также устанавливается существование нетривиальных инвариантных подпространств для оператора A. Используя полученные результаты для $\mathbf{A}$, соответствующее свойство переносится на оператор $A \in \operatorname{End} X$. Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Подмножество $\Delta \in \mathbb{C}$ будем называть *симметричным*, если для любых $\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2 \in \Delta$ $\lambda_1 - \mathrm{i}\lambda_2 \in \Delta$. Пусть $A \in \operatorname{End} X$ и $\mathbf{A} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$ — комплексификация оператора A, т. е. оператор $\mathbf{A}$ определяется на любом векторе $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$ равенством $\mathbf{A}x = Ax_1 + \mathrm{i}Ax_2$. Спектр оператора $\mathbf{A}$ называется *комплексным спектром* оператора A и обозначается $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$. Символом $\mathbf{J}$ обозначим отображение $\mathbf{J}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $\mathbf{J}(x + \mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y$, $x, y \in X$, которое будет аддитивным, но не однородным. Ясно, что $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$.

Определение 2.11. Оператор $A \in \operatorname{End} X$ называется *симметрично суперразложимым*, если для любого конечного открытого покрытия $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ симметричными множествами $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, комплексного спектра $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ оператора A существуют операторы $R_1, \ldots, R_n \in \operatorname{End} X$ со свойствами: 1) $I = R_1 + \cdots + R_n$; 2) операторы $R_k,\ k = 1, \ldots, n$, перестановочны между собой, с оператором A и оператором $\mathbf{J}$; 3) $\sigma_{\mathbb{C}}\big(A|\overline{\operatorname{Im} R_k}\big) = \sigma_k \subset U_k,\ k = 1, \ldots, n$, где $\operatorname{Im} R_k$ — образ оператора R_k.

Одними из основных результатов главы являются следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T\colon G \to \operatorname{End} X$ — неквазианалитическое сильно непрерывное представление. Тогда операторы $T(g)$, $g \in G$, $T(f)$, $f \in \mathrm{L}_\alpha(G, \mathbb{R})$, где оператор $T(f)$ определён формулой $T(f)x = \int\limits_G f(g)T(-g), \mathrm{d}g$, $x \in \mathscr{X}$, симметрично суперразложимы.*

Теорема 2.2. *Пусть $T \in \operatorname{End} X$ — обратимый оператор, для которого $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2} < \infty$. Тогда оператор T является симметрично суперразложимым. Если $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ содержит более двух точек, то оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Пусть $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ — сильно непрерывная группа операторов, удовлетворяющая условию неквазианалитичности $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\ln \|T(t)\|}{1+t^2}\, \mathrm{d}t < \infty$, с генератором $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$. Тогда имеет место

[1] Баскаков А. Г. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах / А. Г. Баскаков, А. С. Загорский // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81. – № 1. – С. 17-31.

Теорема 2.3. *Для любого числа $0 \neq a \in \mathbb{R}$ оператор $(A - aI)^{-1} \in \operatorname{End} X$, где A — генератор группы $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, является симметрично суперразложимым. Если множество $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ содержит более двух точек, то оператор A имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Глава 3 содержит результаты, связанные с получением неравенств типа Бернштейна, связывающих норму оператора (вектора) с его спектральным радиусом. С. Н. Бернштейном[2] было получено неравенство $\|x'\|_\infty \leqslant 2n \cdot \|x\|_\infty$ для любого тригонометрического многочлена $x(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad |\alpha_{-n}| + |\alpha_n| > 0$, из пространства $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) = \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Практически сразу оно было уточнено Э. Ландау: $\|x'\|_\infty \leqslant n \cdot \|x\|_\infty$. Константа n является точной.

В 1914 году М. Рисс[3], используя интерполяционную формулу, обобщил неравенство на случай произвольного тригонометрического полинома с комплексными коэффициентами.

Затем С. Н. Бернштейном[4] было получено неравенство

$$\|x'\|_\infty \leqslant \sigma \cdot \|x\|_\infty \tag{3.3}$$

для целой функции x экспоненциального типа $\sigma > 0$, принадлежащей пространству $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$. Отметим статьи В. И. Иванова[5] и Э. А. Стороженко[6], где аналоги неравенства Бернштейна были получены в других функциональных пространствах.

В 70-х годах прошлого столетия многие авторы стали получать аналоги неравенства Бернштейна для специальных классов линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве. В статье А. П. Терёхина[7] неравенство Бернштейна для операторов было получено с использованием оценки (3.3) для функций. В статье А. Г. Баскакова[8] неравенство для оценки нор-

[2] Bernstein S. N. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes / S. N. Bernstein // Academie Royale de Belgique, Classe des Sciences, Memores Collection in 4., ser. II, 1922. – V. 4. – 577 p.

[3] Riesz M. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome / M. Riesz // Deutch Mat. Ver. – 1914. – V. 23. – P. 354-368.

[4] Bernstein S. N. Sur une propriete des fonctions entieres / S. N. Bernstein // C. R. Acad. Sci. – 1923. – V. 176. – P. 1603-1605.

[5] Иванов В. И. Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках / В. И. Иванов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18. – № 4. – С. 489-498.

[6] Стороженко Э. А. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд // Матем. сб. – 1975. – Т. 98. – № 140. – С. 395-415.

[7] Терёхин А. П. Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение / А. П. Терёхин // Саратов, изд-во Саратовск. ун-та. Дифферен. ур. и выч. матем. – 1975. – Вып. 3. – С. 3-28.

[8] Баскаков А. Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе / А. Г. Бас-

мы оператора было получено на основе аналога интерполяционной формулы Боаса[9], полученной для оцениваемого оператора. Это представление использовалось в статье [6] для оценки нормы векторов из банахова пространства. Сразу отметим, что, хотя полученные здесь оценки для векторов и операторов, действующих в комплексных банаховых пространствах, с помощью комплексификации банахова пространства и результатов статьи [8] и статей А. Г. Баскакова[10] и К. В. Сторожука[11] они распространяются и для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

Пусть $\mathrm{i}A$ — генератор изометрической группы операторов $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Отметим, что оператор A может являться неограниченным.

Определение 3.1. *Спектром Бёрлинга вектора x* из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$. Если множество $\Lambda(x)$ компактно, то через $\mathrm{r_B}(x)$ обозначим число $\mathrm{r_B}(x) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda(x)} |\lambda|$, называемое *спектральным радиусом* вектора $x \in \mathscr{X}$.

Теорема 3.1. *Если вектор x из $\mathscr{X}$ имеет компактный спектр Бёрлинга, то $x \in \mathrm{D}(A^m)$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$ и справедливы оценки $\|A^m x\| \leqslant \mathrm{r_B}(x)^m \cdot \|x\|$ при $m \geqslant 1$.*

Через $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем обозначать банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определённых на вещественной оси со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathscr{X}$, с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \big\|x(t)\big\|$, $x \in \mathrm{C_b}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$. Символом $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем обозначать подпространство равномерно непрерывных функций из $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$. Также рассматривается подпространство $\mathrm{C_0}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \subset \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ функций, исчезающих на бесконечности, а именно, $x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, если $\lim\limits_{|t| \to \infty} \big\|x(t)\big\| = 0$.

Определение 3.5. Функцию $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем называть *целой на бесконечности* функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_0 \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции $\widetilde{x_0}\colon \mathbb{C} \to \mathscr{X}$ экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$ такая, что $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

---

каков // Сиб. матем. журн. – 1979. – Т. 20. – № 5. – С. 942–952.

[9]Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

[10]Баскаков А. Г. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах / А. Г. Баскаков, А. С. Загорский // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81. – № 1. – С. 17-31.

[11]Сторожук К. В. Симметричные инвариантные подпространства у комплексификаций линейных операторов / К. В. Сторожук // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – № 4. – С. 938-940.

где $y_0 \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathscr{X})$.

Теорема 3.2. *Пусть функция* $x \in \mathrm{C}_{\mathrm{bu}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа* $\sigma \geqslant 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такая целая функция* x_0 *экспоненциального типа* $\sigma + \varepsilon$ *и функция* $y_0 \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *такие, что* $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *и имеет место оценка* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big\|x_0'(t)\big\| \leqslant (\sigma + \varepsilon) \lim\limits_{\alpha\to\infty} \sup\limits_{|t|>\alpha} \big\|x(t)\big\|$.

Пусть $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$ — банаховы пространства. Через $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов (*гомоморфизмов*), действующих из $\mathscr{X}_1$ в $\mathscr{X}_2$. Пусть $\mathrm{i}A_1$, $\mathrm{i}A_2$, $A_k \in \mathrm{End}\,\mathscr{X}_k$, $k = 1, 2$, — генераторы изометрических групп $T_1 \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_1$ и $T_2 \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}_2$ соответственно. Банахово пространство $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ наделяется структурой банахова модуля по представлению $T \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ вида $T(t)X = T_2(t)XT_1(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$. Следовательно, определён спектр Бёрлинга $\Lambda(X)$ любого оператора $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$. Обозначим символом ad_{A_1,A_2} оператор вида $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = A_2X - XA_1$. В случае, когда $A_1 = A_2 = A$, $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = \mathrm{ad}_A X = AX - XA$ — коммутатор. Оператор X принадлежит $\mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$, если $X\mathrm{D}(A_1) \subset \mathrm{D}(A_2)$ и оператор $A_2X - XA_1$ допускает ограниченное расширение на $\mathscr{X}_1$. В дальнейшем это расширение будет обозначаться тем же символом $A_2X - XA_1$.

Теорема 3.3. *Если спектр Бёрлинга* $\Lambda(X, T)$ *оператора* $X \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ *является компактным множеством, то справедливо следующее неравенство:* $\big\|\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X\big\| \leqslant \mathrm{r_B}(X) \cdot \|X\|$, *где* $\mathrm{r_B}(X) = \max\limits_{\lambda\in\Lambda(X)} |\lambda|$.

Далее символом $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем обозначать пространство локально суммируемых функций, определённых на вещественной оси, со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathscr{X}$. *Пространством Степанова* $\mathcal{S}^{\mathrm{p}}$, $\mathrm{p} \in [0, \infty)$, будем называть совокупность локально суммируемых функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что $\|x\|_{\mathcal{S}^{\mathrm{p}}} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Big(\int\limits_0^1 \big\|x(s+t)\big\|^{\mathrm{p}}\, \mathrm{d}s \Big)^{1/\mathrm{p}} < \infty$.

Функциональное банахово пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ будем называть *однородным*, если оно обладает следующими свойствами: 1) $\mathcal{F}$ непрерывно вложено в пространство Степанова $\mathcal{S}^1$; 2) для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{F}$ имеет место $S(t)x \in \mathcal{F}$, где оператор сдвига $\big(S(t)x\big)(s) = x(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{F}$, является изометрией из $\mathrm{End}\,\mathcal{F}$; 3) для $x \in \mathscr{X}$ и $C \in \mathrm{End}\,\mathscr{X}$ функция $y(t) = Cx(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|y\| \leqslant \|C\| \cdot \|x\|$; 4) для любых функций $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,

$x \in \mathcal{F}$ их свёртка $(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)x(t-s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{R}$, принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|f * x\| \leqslant \|f\|_1 \|x\|$; 5) если Функция $x \in \mathcal{F}$ такова, что $f * x = 0$ для всех $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, то $x = 0$ (*свойство невырожденности*).

Непосредственно из определения однородное пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ является банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модулем, структура которого определяется представлением $S\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$.

Теорема 3.4. *Если спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ функции $x \in \mathcal{F}$ является компактным множеством, то x допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа $\sigma = \mathrm{r_B}(x)$ и для производной $x^{(k)}$, $k \geqslant 1$, имеют место оценки $\left\|x^{(k)}\right\|_{\mathcal{F}} \leqslant \sigma^k \|x\|_{\mathcal{F}}, \quad k \geqslant 1$.*

Рассматривается группа операторов (представление) $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, допускающих оценку

$$\|T(-t)\| \leqslant \alpha(t) = \mathrm{c}_1(1 + \mathrm{c}_2|t|)^\gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

где $\mathrm{c}_1 \geqslant 1$, $\mathrm{c}_2 \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$. Основные результаты главы получены с использованием следующих величин: $\mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}(a) = a \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left(\frac{k\pi - \pi}{a}\right)}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}, \quad a > 0$, в предположении, что выполнено условие (3.8) на вес α (отметим, что $\mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}(a) = a$ в случае $\alpha = 1$); $\mathrm{C_B} = \inf\left\{\|f\|_\alpha \;\middle|\; f \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbb{R}),\ \widehat{f}(\lambda) = \lambda \text{ в окрестности } [-1, 1]\right\}$, а также $\mathrm{C_B}(a) = a \sup\limits_{\tau > 0} \frac{\alpha\left(\tau/a\right)}{\alpha(\tau)} \mathrm{C_B}$.

Теорема 3.5. *Пусть вес $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию (3.8) с $0 < \gamma < 1$. Тогда любой вектор $x \in \mathcal{X}$ с компактным спектром Бёрлинга $\Lambda(x)$ принадлежит области определения оператора A. Имеет место представление $Ax = \mathrm{r_B}(x) \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi - \pi}{r(x)}\right)x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}$ и оценка $\|Ax\| \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}\big(\mathrm{r_B}(x)\big) \cdot \|x\|, \quad n \geqslant 1$.*

Теорема 3.6. *Пусть $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, — весовая функция, удовлетворяющая условию (3.8), и вектор $x \in X$ имеет компактный спектр Бёрлинга. Тогда $x \in \mathrm{D}(A)$ и имеет место оценка $\|Ax\| \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r_B}(x)\big) \cdot \mathrm{r_B}(x)$. В частности, если A — ограниченный оператор, то $\|A\| \leqslant \mathrm{C_B}\big(\mathrm{r}(A)\big) \cdot \mathrm{r}(A)$, где $\mathrm{r}(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ — спектральный радиус оператора A.*

Глава 4 содержит результаты, касающиеся неравенств Бора–Фавара для операторов. Для генераторов изометрических групп операторов и групп операторов полиномиального роста получены оценки нормы обратного оператора через его спектральный радиус. Полученные оценки находят применение в теории приближений функций и в исследованиях, где применяется метод подобных операторов.

В 1935 году Х. Бором[12] было доказано неравенство (оценка нормы интегрального оператора) $\|Jx\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2n}\|x\|_\infty = \frac{\pi}{2n}\max\limits_{t\in[0,2\pi]}\big|x(t)\big|$ для любой непрерывной 2π–периодической функции с рядом Фурье вида $x(t) \sim \sum\limits_{|k|\geqslant n} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t \in \mathbb{R}$, и интеграла $Jx = J_n x = \sum\limits_{|k|\geqslant n} \frac{1}{\mathrm{i}k} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, получена оценка нормы $\|J_n\|$ оператора интегрирования в подпространстве $\mathrm{C}_{2\pi,n}(\mathbb{R})$ банахова пространства $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ периодических периода 2π функций, спектр которых лежит вне интервала $(-n,n)$. Полученная оценка является точной, т. е. $\|J_n\| = \frac{\pi}{2n}$. Затем эта оценка была распространена Ж. Фаваром[13] и Б. М. Левитаном[14] на почти периодические функции.

Рассматривается сильно непрерывное представление $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство, с генератором $\mathrm{i}A\colon D(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Одним из основных результатов главы является

Теорема 4.1. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(\mathscr{X})$ банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля $(\mathscr{X}, T)$ представим в виде $\Lambda(\mathscr{X}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$ непересекающихся замкнутых множеств σ_0 и σ_1, где σ_0 — компактное множество. Тогда $\mathscr{X}$ представимо в виде $\mathscr{X} = \mathscr{X}(\sigma_0) \oplus \mathscr{X}(\sigma_1)$. Это разложение осуществляют проекторы P_0, $P_1 = I - P_0$ (т. е. $\operatorname{Im} P_k = \mathscr{X}(\sigma_k)$, $k = 0,1$), где проектор P_0 определяется формулой $P_0 x = f_0 x$, $x \in \mathscr{X}$, т. е. $P_0 = T(f_0)$, где f_0 — любая функция из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством: $\widehat{f}_0 = 1$ в некоторой окрестности σ_0 и $\widehat{f}_0 = 0$ в некоторой окрестности σ_1, причём $\|P_0\| \leqslant \inf\limits_f \|f\|$, где инфимум берётся по всем функциям f с указанным свойством для f_0.*

Теорема 4.2. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(y)$ вектора y из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля (X, T) не содержит нуля. Тогда существует единственный вектор $x \in D(A)$ такой, что: 1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$; 2) $x \in D(A)$; 3) $Ax = y$; 4) $\|x\| \leqslant$*

[12] Bohr H. Ein allgemeinerung Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynomials / H. Bohr // Prace Math. Fiz. – 1935. – V. 43. – P. 273–288.

[13] Favard J. Application de la formule sommatoire d'Euler á la démonsration de quclques propertietés extrémales des intégrales des fonctions péeriodiques on presque-périodiques / J. Favard // Mat. Tidskr. – 1936. – P. 81-95.

[14] Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 205 с.

$\dfrac{\pi}{2\,\mathrm{dist}\big(0,\Lambda(y)\big)}\|y\|.$

Символом $T\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{End}\,\mathscr{X}$ будем обозначать представление алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ операторами из алгебры $\mathrm{End}\,\mathscr{X}$, определяемое равенствами $T(f)x = fx, \quad x \in \mathscr{X}, \quad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Отметим, что представление T является гомоморфизмом алгебр, т. е. $T(f_1 * f_2) = T(f_1)T(f_2)$. Для каждой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ оператор $T(f)$ является линейным ограниченным оператором и имеет место оценка $\big\|T(f)\big\| \leqslant \|f\|_1$.

Теорема 4.3. *Пусть $\sigma_0 = [-a, a]$, $\sigma_1 = \mathbb{R} \setminus (-b, b)$, где $0 \leqslant a < b$. Тогда $\mathscr{X} = \mathscr{X}(\sigma_0) \oplus \mathscr{X}(\sigma_1)$ и норма проектора P_0 допускает оценку вида $\|P_0\| \leqslant$ $\|P_0\| \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}$.*

Теорема 4.4. *Пусть вектор $y \in \mathscr{X}$ представим в виде $y = y_0 + y_1$, где $\Lambda(y_0) \subset [-a, a]$ и $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b, b)$, где $0 \leqslant a < b$. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathscr{X}$ со свойствами: 1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y_1) \subset (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$; 2) $x \in \mathrm{D}(A)$; 3) $Ax = y_1 = y - y_0$; 4) $\|x\| \leqslant \frac{\pi}{2b}\Big(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}\Big)\|y\|$.*

Пусть $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_1$, $B\colon \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_2$ — замкнутые линейные операторы, $C \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_2, \mathscr{X}_1)$, $D \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$, и имеет место условие *равномерной отделимости спектров*

$$\mathrm{d} = \mathrm{dist}\,\big(\sigma(A), \sigma(B)\big) = \inf_{\substack{\lambda \in \sigma(A)\\ \mu \in \sigma(B)}} |\lambda - \mu| > 0 \tag{4.9}$$

$\sigma(A)$, $\sigma(B)$ операторов A, B.

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A}\colon \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$, заданный операторной матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ D & B \end{smallmatrix}\right)$, т. е. $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 + Cx_2, Dx_1 + Bx_2)$ для любой упорядоченной пары $(x_1, x_2) \in \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(B)$. Оператор $\mathbb{A}$ представим в виде $\mathbb{A} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A}\colon \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(B) \subset \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ задаётся матрицей $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, а оператор $\mathcal{B} \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$ определяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -C \\ -D & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Рассмотрим канонические проекторы $P_1 x = (x_1, 0)$, $P_2 x = (0, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$. Для любого оператора $X \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$ рассмотрим операторы $P_i X P_j \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$, $i, j \in \{1, 2\}$. Таким образом, любой оператор $X \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$ задаётся матрицей $X = \left(\begin{smallmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{smallmatrix}\right)$, где операторы $X_{ij} \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_j, \mathscr{X}_i)$, $i, j \in \{1, 2\}$ — сужение оператора $P_i X P_j$ на $\mathscr{X}_j$ с областью значений $\mathscr{X}_i$. Символом $\mathfrak{U}$ обозначим пространство $\mathrm{End}\,(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)$, которое в дальнейшем будем называть *пространством допустимых возмущений.* Символами $\mathfrak{U}_{ij}$ будем обозначать банаховы пространства $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{X}_j, \mathscr{X}_i)$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Будем считать, что операторы $\mathrm{i}A$ и $\mathrm{i}B$ являются генераторами сильно непрерывных групп изометрий $T_A\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}_1$ и $T_B\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}_2$ соответственно. Трансформатор $\mathrm{J} \in \operatorname{End} \mathfrak{U}$ (оператор блочной диагонализации) определим формулой $\mathrm{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$, $(\mathrm{J}X)x = (P_1XP_1 + P_2XP_2)(x_1, x_2) = (X_{11}x_1, 0) + (0, X_{22}x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$, $X \in \mathfrak{U}$, $X_{ii} \in \mathfrak{U}_{ii}$, $i \in \{1, 2\}$. Рассмотрим трансформаторы $\mathrm{ad}_{AB}\colon \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{AB}) \subset \mathfrak{U}_{21} \to \mathfrak{U}_{21}$, $\mathrm{ad}_{AB}X = AX - XB$, $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{AB})$, $\mathrm{ad}_{BA}\colon \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{BA}) \subset \mathfrak{U}_{12} \to \mathfrak{U}_{12}$, $\mathrm{ad}_{BA}X = BX - XA$, $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{BA})$, которые являются генераторами групп изометрий $T_{AB}\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathfrak{U}_{21}$, $T_{AB}(t)X = T_A(t)XT_B(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{U}_{21}$, $T_{BA}\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathfrak{U}_{12}$, $T_{BA}(t)X = T_B(t)XT_A(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{U}_{12}$, соответственно. Трансформаторы ad_{AB} и ad_{BA} обратимы. Обратные к ним операторы обозначим соответственно $\Gamma_{12} \in \operatorname{End} \mathfrak{U}_{12}$ и $\Gamma_{21} \in \operatorname{End} \mathfrak{U}_{21}$. Операторы $\Gamma_{12}X_{12}$ и $\Gamma_{21}X_{21}$ являются решениями линейных уравнений $\mathbb{A}Y - Y\mathbb{A} = X - \mathrm{J}X$, где $Y \in \mathfrak{U}$ обладает свойством $\mathrm{J}Y = 0$. Применяя проекторы P_1, P_2 к последнему уравнению, получаем следующую эквивалентную систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} A\Gamma_{12}X_{12} - \Gamma_{12}X_{12}B = X_{12}, \\ B\Gamma_{21}X_{21} - \Gamma_{21}X_{21}A = -X_{21}, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $\Gamma_{12}X_{12} \in \mathfrak{U}_{12}$, $\Gamma_{21}X_{21} \in \mathfrak{U}_{21}$. В случае, когда оператор A или оператор B ограничен, из результатов работ А. Г. Баскакова[15] [16] следует, что система уравнений (4.11) разрешима. Трансформатор $\Gamma \in \operatorname{End} \mathfrak{U}$ определим следующим образом: $(\Gamma X)x = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}X_{12} \\ \Gamma_{21}X_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_{12}X_{12})x_2 \\ (\Gamma_{21}X_{21})x_1 \end{pmatrix}$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$. Непосредственно из определения трансформаторов J и Γ следует, что имеет место равенство

$$\mathbb{A}(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(\mathcal{A} - \mathrm{J}X), \tag{4.14}$$

проверяемое для матриц указанных операторов. Уравнение (4.14) эквивалентно

[15] Баскаков А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50. – № 4. – С. 435-457.

[16] Баскаков А. Г. Расщепление возмущённого дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков // Фундамент. и прикл. матем.. – 2002. – Т. 8. – № 1. – С. 1-16.

выполнению условий

$$\begin{cases} X_{11} = C\Gamma_{21}X_{21}, \\ X_{12} = -(\Gamma_{12}X_{12})D\Gamma_{12}X_{12} + C, \\ X_{21} = -(\Gamma_{21}X_{21})C\Gamma_{21}X_{21} + D, \\ X_{22} = D\Gamma_{21}X_{12}, \end{cases} \tag{4.15}$$

где второе и третье уравнения рассматриваются в пространствах $\mathfrak{U}_{12}$ и $\mathfrak{U}_{21}$ соответственно. Символом γ будем обозначать величину $\frac{\pi}{2\mathrm{d}}$ из оценки (4.9).

Теорема 4.5. *При условии*

$$2\gamma\sqrt{\|C\|\cdot\|D\|} = \frac{\pi}{\mathrm{d}}\sqrt{\|C\|\cdot\|D\|} < 1 \tag{4.16}$$

система (4.15) разрешима, причём решения $X_{12}^{(0)}$, $X_{21}^{(0)}$ могут быть найдены методом последовательных приближений с начальными значениями $X_{12}^{(1)} = X_{21}^{(1)} = 0$. При этом имеют место оценки $\|X_{12}^{(0)}\| \leqslant \frac{2\|C\|}{1+\sqrt{1-4\gamma^2\|C\|\cdot\|D\|}}$, $\|X_{21}^{(0)}\| \leqslant \frac{2\|D\|}{1+\sqrt{1-4\gamma^2\|C\|\cdot\|D\|}}$.

Определение 1.20. Два линейных оператора $A_i\colon \mathrm{D}(A_i) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $i \in \{1, 2\}$, будем называть *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ такой, что $U\mathrm{D}(A_2) = \mathrm{D}(A_1)$ и имеет место равенство $A_1Ux = UA_2x$ для всех $x \in \mathrm{D}(A_2)$. При этом оператор U будем называть *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Одним из основных результатов параграфа 2 является следующая

Теорема 4.6. *При условии $\frac{\pi}{\mathrm{d}}\sqrt{\|C\|\cdot\|D\|} < 1$ операторы $\mathbb{A}$ и $\mathcal{A} - \mathrm{J}X^{(0)}$ подобны, где $X^{(0)}$ — единственное решение системы (4.15) и $\mathrm{J}X^{(0)} = \begin{pmatrix} X_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & X_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$.*

Отметим, что для операторов, действующих в гильбертовых пространствах, где A, B — самосопряжённые операторы, соответствующий результат получен А. К. Мотовиловым и А. А. Шкаликовым.

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$, заданный операторной матрицей $\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$, подобен оператору $\mathcal{A} - \mathrm{J}X$, заданному операторной матрицей $\begin{pmatrix} A-X_{11} & 0 \\ 0 & B-X_{22} \end{pmatrix}$.

Опишем приложения полученных в теоремах 4.5 и 4.6 результатов к оценкам интеграла от функций из однородных пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$.

Теорема 4.7. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(y)$ функции y из однородного пространства функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ не содержит нуля. Тогда существует един-*

ственная функция $x \in \mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *такая, что: 1)* $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$*; 2)* $x' = y$*; 3)* $\|x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \dfrac{\pi}{2\,\mathrm{dist}\big(0, \Lambda(y)\big)}\|y\|_{\mathcal{F}}$.

Теорема 4.8. *Пусть функция* y *принадлежит однородному пространству функций* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ *и допускает представление вида* $y = y_0 + y_1$*, где* $\Lambda(y_0) \subset [-a, a]$ *и* $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b, b)$*, где* $0 \leqslant a < b$*. Тогда существует единственная функция* $x \in \mathcal{F}^{(1)}$ *со свойствами: 1)* $\Lambda(x) \subset \Lambda(y_1)$*; 2)* $x' = y_1 = y - y_0$*; 3)* $\|x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \frac{\pi}{2b}\Big(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}\Big)\|y\|_{\mathcal{F}}$.

Публикации автора по теме диссертации

1. Дикарев Е. Е. Исследование спектра одного класса дифференциального оператора 4 – го порядка / Т. Л. Джонга, Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Сб. тезисов Междунар. конф. «Крымская Осенняя Математическая Школа — Симпозиум» (Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17 — 29 сентября 2010г.). — Украина, Семфирополь: КНЦ НАНУ, 2010. — С. 38.

2. Дикарев Е. Е. Неравенства бернштейновского типа для операторов / Е. Е. Дикарев // Сб. тезисов Междунар. конф. «Крымская Осенняя Математическая Школа — Симпозиум» (Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17 — 29 сентября 2011г.). — Украина, Семфирополь: КНЦ НАНУ, 2011. — С. 18.

3. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Spectral and Evolution Problems. — 2012. — V. 22. — P. 58-61.

4. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Сб. тезисов Междунар. конф. «Крымская Осенняя Математическая Школа — Симпозиум» (Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17 — 29 сентября 2012г.). — Украина, Симферополь: КНЦ НАНУ, 2012. — С. 21.

5. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Материалы Воронежской змней математической школы (Воронеж, 27 января — 2 февраля 2013г.). — Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — С. 83.

6. Дикарев Е. Е. О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств / Е. Е. Дикарев // Уфимск. матем. журн. – 2013. – Т. 5. – № 4. – С. 77–83.

7. Дикарев Е. Е. Об инвариантных подпространствах неквазианалитических операторов в вещественном банаховом пространстве / Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Материалы Воронежской змней математической школы С. Г. Крейна – 2014 — Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014. — С. 18-19.

8. Дикарев Е. Е. Гармонический анализ неквазианалитических операторов в вещественном банаховом пространстве / Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2014. – Т. 14. – № 3. – С. 19-28.

9. Дикарев Е. Е. Гармонический анализ некоторых классов линейных операторов в вещественном банаховом пространстве / Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97. – № 5. – С. 670-680.

Работы [6,8,9] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.