На правах рукописи

Струков Виктор Евгеньевич

МЕТОДЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2016

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Баскаков Анатолий Григорьевич
Официальные оппоненты:	Блатов Игорь Анатольевич доктор физико-математических наук, профессор, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, кафедра высшей математики, профессор,
	Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, кафедра высшей математики и математического моделирования, доцент.
Ведущая организация:	Липецкий государственный педагогический институт

Защита состоится « 24 » мая 2016 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2866

Автореферат разослан « » марта 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Классическая спектральная теория ограниченных функций, имеющая давнюю историю (начиная с работ Н. Винера), относится к спектральной теории в банаховом пространстве непрерывных ограниченных комплекснозначных функций $C_b(\mathbb{R})$, рассматриваемых как банахов модуль над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ суммируемых на вещественной прямой $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций (модульная структура на $C_b(\mathbb{R})$ определяется свёрткой функций из $L^1(\mathbb{R})$ и $C_b(\mathbb{R})$). Впервые понятие спектра функции было введено Н. Винером в монографии, изданной в 1933 году. Определение спектра функции, существенно ограниченной на вещественной прямой $\mathbb{R}$, было дано А. Бёрлингом в статье 1945 года как совокупность вещественных точек $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых функция $t \mapsto e^{i\lambda t} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит $L^1(\mathbb{R})$-замыканию линейных комбинаций сдвигов рассматриваемой функции. Затем, с использованием преобразования Лапласа, Карлеманом было дано определение спектра функции. Доказательство совпадения спектров Бёрлинга и Карлемана комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$ представлено во втором томе монографии Н. Данфорда и Дж.Т. Шварца. В своей монографии В. Арендт, Ч.Дж.К. Бэтти, М. Гибер и Ф. Нойбрандер проводят сравнение локального спектра, спектра Карлемана и носителя преобразования Фурье (по сути - частного случая спектра Бёрлинга) для равномерно непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве. Естественным образом возникла задача о распространении известных спектров на случай функций из широкого класса функциональных пространств и, более общо, векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей, а также задача о сравнении вводимых в рассмотрение спектров.

Классическая теорема Н. Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье и её различные обобщения обладают множеством применений в численном анализе, теории вейвлетов, фреймов и сигнальных отсчётов, частотно-временном анализе, в пространствах полиномиальных сплайнов и инвариантных относительно сдвига по дискретной решётке функций и распределений.

В 90-х годах прошлого столетия началось активное развитие теории линейных операторов, тесно связанной с обобщением и дальнейшим развитием теоремы Н. Винера о периодических функциях с абсолютно сходящимся рядом Фурье. По счётной системе проекторов, действующих в банаховом пространстве и образующих разложение единицы, для заданного линейного ограниченного оператора строится матрица оператора и определяется двусторонняя последовательность чисел, характеризующая убывание внедиагональных элементов матрицы оператора. Вводятся в рассмотрение несколько алгебр линейных операторов в зависимости от характера убывания внедиагональных элементов матрицы изучаемого оператора (операторы с суммируемыми диагоналями; диагоналями, суммируемыми с некоторым весом; двух- и трёхдиагональные и т.д.). В выделенном пространстве операторов вводится в рассмотрение периодическое представление группы вещественных чисел, определяется ряд Фурье оператора. Использование вводимых в рассмотрение спектров приводит к понятию памяти оператора и развитию определённых аналогов матричного исчисления линейных ограниченных операторов, действующих в банаховых пространствах. Для широкого класса линейных ограниченных операторов А.Г. Баскаковым, И.А. Кришталом[1] с помощью спектра Бёрлинга операторов было введено понятие памяти оператора и были получены оценки памяти обратных операторов. Использование методов гармонического анализа позволяет получить конкретные оценки элементов матриц обратных операторов, доказать наполненность соответствующих подалгебр операторов. Естественным образом возникает вопрос об уточнении известных к настоящему времени оценок элементов матриц обратных операторов, приложении полученных результатов к конкретным классам линейных операторов (в частности, к интегральным, дифференциальным и т.д.). Современные исследования по такой тематике проводились А.Г. Баскаковым, В.Г. Курбатовым, И.А. Кришталом, А. Альдруби, И.А. Блатовым.

Из изложенного следует актуальность темы диссертации.

Цель работы.

1) Доказательство теоремы о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей.

2) Доказательство теоремы о генераторе невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

3) Доказательство теоремы о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и локального для функций из однородных пространств.

4) Получение оценок элементов матриц для обратных линейных ограниченных операторов.

---

[1] Баскаков А.Г., Криштал И.А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69. — № 3. — С. 25.

5) Доказательство наполненности алгебры, порождённой интегральными операторами.

Методы исследования. Основными методами исследования являются методы гармонического и функционального анализа, спектральной теории операторов и теории изометрических представлений.

Научная новизна. В настоящей диссертации получены следующие новые результаты:

1) Доказана теорема о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей.

2) Доказана теорема о генераторе невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

3) Доказана теорема о совпадении спектров Бёрлинга, Карлемана и локального для функций из однородных пространств.

4) Получены оценки элементов матриц для обратных линейных ограниченных операторов.

5) Доказана наполненность алгебры, порождённой интегральными операторами.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы для дальнейшего развития методов гармонического анализа, расширения сферы их применения в спектральной теории операторов, исследования методов решений некоторых классов интегральных, разностных и дифференциальных уравнений. Также они могут быть использованы при чтении спецкурсов в университетах для студентов математических специальностей и применяться специалистами в области гармонического и функционального анализа при исследовании вопросов, связанных с тематикой диссертации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С.Г. Крейна 2010, 2012, 2013, 2014, 2016, на Крымских осенних математических школах 2010, 2011, 2012 (Украина, Севастополь), на XV Летней диффеотопической школе 2012 (Польша, Гдыня), на Крымской международной математической конференции 2013 (Украина, Судак), на математическом интернет-семинаре ISEM-2013 (Германия, Блаубойрен), на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Левитана 2014 (Москва), на семинарах А.Г. Баскакова, а также на научных сессиях Воронежского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в работах [1–15]. Работы [1–3] опубликованы в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместной работы [14] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и библиографии. Общий объем диссертации 110 страниц.

Содержание работы

В первой главе диссертации излагается ряд известных и широко используемых в диссертации понятий и результатов из теории банаховых пространств, представлений, групп и полугрупп линейных операторов, спектральной теории линейных отношений и операторов.

Во второй главе диссертации приведены определение и некоторые свойства банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, понятие его генератора. Для иллюстрации данных определений приводится ряд примеров однородных пространств функций (непрерывных, суммирумых, локально суммируемых и т.д.).Вводятся определения и доказываются некоторые свойства спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра векторов. Основные результаты данной главы связаны с доказательством совпадения рассматриваемых спектров векторов и функций (локальный спектр взят относительно генератора банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля).

Пусть X, Y – бесконечномерные комплексные банаховы пространства. Символом $\mathrm{Hom}(X, Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, отображающих X на Y, $\mathrm{End}\, X = \mathrm{Hom}(X, Y)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X. Пусть $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ – банахова алгебра измеримых суммируемых на $\mathbb{R}$ (классов) комплекснозначных функций со сверткой в качестве умножения, определяемой по формуле

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

Пусть $S : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\, L^1(\mathbb{R})$ - изометрическая группа операторов сдвига вида

$$(S(t)x)(s) = x(t+s),\ s, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Пусть банахово пространство X является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, то есть для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in X$ определено задающее модульную структуру билинейное отображение $(f,x) \mapsto fx : L^1(\mathbb{R}) \times X \to X$ и справедливо соотношение

$$\|fx\| \leq \|f\|_1 \|x\|, \ f \in L^1(\mathbb{R}), \ x \in X. \tag{2.3}$$

Определение 2.1.1. Банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль X назовём *невырожденным*, если равенство $fx = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ означает, что $x = 0$.

Будем говорить, что структура банахова $L^1(\mathbb{R})$–модуля X *ассоциирована* с ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, и использовать для X обозначение (X, T), если для всех $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо равенство $T(t)(fx) = (S(t)f)x = f(T(t)x)$.

Определение 2.1.2. Вектор $x \in X$ будем называть *T–непрерывным*, если функция $x_T : \mathbb{R} \to X$, $x_T(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна. Замкнутое подпространство T-непрерывных векторов из X обозначим символом X_c.

Рассматриваемые в диссертации банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули являются невырожденными банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями со структурой, ассоциированной с некоторым ограниченным изометрическим представлением.

Определение 2.1.3. Рассмотрим семейство функций $\{f_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$, из алгебры функций $L^1(\mathbb{R})$, определенных равенствами

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & t \leq 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases} \quad \text{если } Re\,\lambda > 0,$$

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -e^{\lambda t}, & t \geq 0, \end{cases} \quad \text{если } Re\,\lambda < 0.$$

Введём в рассмотрение семейство линейных ограниченных операторов $R_\lambda \in \operatorname{End} X$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$, вида $R_\lambda x = f_\lambda x$, $x \in X$. Это семейство операторов удовлетворяет резольвентному тождеству Гильберта $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$.

Определение 2.1.4. *Генератором банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля* (X, T) будем называть оператор $A = i^{-1}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ – замкнутый оператор, резольвентой которого является функция $\lambda \mapsto R_\lambda = T(f_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$.

В качестве примеров банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей рассматриваются однородные пространства функций, удовлетворяющих следующему определению:

Определение 2.1.5. Банахово пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется *однородным,* если выполнены следующие условия:

1) пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$ содержится в пространстве функций Степанова $S^1(\mathbb{R},X)$, причем вложение $\mathscr{F}(\mathbb{R},X)\subset S^1(\mathbb{R},X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

2) в $\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$ определена и ограничена группа $S(t),\ t\in\mathbb{R}$, операторов сдвигов функций $(S(t)x)(s)=x(s+t),\ s,t\in\mathbb{R},\ x\in\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$;

3) для любой функции $x\in\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$ и любого $C\in\operatorname{End}X$ функция $y(t)=(Cx)(t)$ принадлежит $\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$ и $\|y\|\le\|C\|\|x\|$;

4) для любых функций $f\in L^1(\mathbb{R})$, $x\in\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$ их свертка

$$(f*x)(t)=\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t\in\mathbb{R},$$

принадлежит $\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$ и выполнено неравенство $\|f*x\|\le\|f\|_1\|x\|$;

5) для $x\in\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$ из равенства $f*x=0$ для всех $f\in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x=0$.

Для векторов из рассматриваемых банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей введены следующие определения спектров Бёрлинга, Карлемана и локального спектра.

Определение 2.2.2. *Спектром Бёрлинга* вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T) называется множество

$$\Lambda(x)=\{\lambda\in\mathbb{R}: fx\ne 0 \text{ для всех } f\in L^1(\mathbb{R}) \text{ таких, что } \widehat{f}(\lambda)\ne 0\}.$$

Определение 2.3.2. *Спектром Карлемана вектора* $x\in X$ будем называть множество $\Lambda_C(x)$ таких чисел $\lambda_0\in\mathbb{R}$, что функция $R_x:\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}\to X$, $R_x(\lambda)=f_\lambda x, x\in X$, не имеет голоморфного продолжения в некоторую окрестность точки $i\lambda_0\in i\mathbb{R}$. Семейство функций f_λ взято из определения 2.1.3.

Определение 2.3.3. Множество $\Lambda_C(X)=\overline{\bigcup\limits_{x\in X}\Lambda_C(x)}$ будем называть *спектром Карлемана банахова* $L^1(\mathbb{R})$*-модуля* (X,T).

Определение 2.4.1. Замкнутый оператор $B:\mathrm{D}(B)\subseteq Y\to Y$ *обладает свойством однозначного распространения,* если для любой голоморфной функции $f:U\subseteq\mathbb{C}\to\mathrm{D}(B)$ из равенства $(B-\lambda I)f(\lambda)=0$, $\lambda\in U$, следует, что $f\equiv 0$.

Пусть оператор $B:\mathrm{D}(B)\subseteq Y\to Y$ обладает свойством однозначного распространения. Множество точек $\lambda_0\in\mathbb{C}$, для которых существует открытая окрестность $U_0 = U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U_0 \to \mathrm{D}(B) \subseteq Y$ такая, что $f(\lambda) \in \mathrm{D}(B) \subseteq Y$, и выполнено равенство $(B - \lambda I)f(\lambda) = y$, $y \in Y$, для всех $\lambda \in U_0$, называется *локальным резольвентным множеством вектора* $y \in Y$ и обозначается $\rho_B(y)$. Функцию f будем называть *локальной резольвентой вектора* y относительно оператора B в окрестности точки λ_0.

Локальный спектр вектора $y \in Y$ относительно оператора B - это множество $\sigma_B(y) = \mathbb{C}\backslash\rho_B(y)$.

Генератор рассматриваемого банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля обладает свойством однозначного распространения, поэтому относительно него возможно построение локального спектра вектора.

Основными результатами второй главы являются следующие теоремы:

Теорема 2.5.1. *Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ – изометрическое представление, ассоциированное со структурой невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T). Тогда генератор $\mathcal{A}$ сильно непрерывного сужения $T|_{X_c}$ группы операторов T является сужением оператора iA, где A – генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T), и резольвента $\lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A}) : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to \operatorname{End} X_c$ допускает расширение до резольвенты $\lambda \mapsto R_\lambda : \mathbb{C}\backslash i\Lambda_C(X) \to \operatorname{End} X$ оператора iA.*

Теорема 2.5.2. *Для любого вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) имеют место равенства $\Lambda(x) = \Lambda_C(x) = \sigma_A(x)$.*

Оператор дифференцирования $-i\frac{d}{dt} = D : \mathrm{D}(D) \subseteq \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ является генератором банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{F}, S)$, поэтому в случае однородных функциональных пространств (см. определение 2.1.5) справедлива следующая

Теорема 2.5.3. *Пусть $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$– однородное пространство функций. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathscr{F}$ справедливы равенства $\Lambda(\varphi) = \Lambda_C(\varphi) = \sigma_D(\varphi)$.*

В третьей главе диссертации вводятся понятия матрицы и ряда Фурье линейного ограниченного оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y. Приведены следствия из теоремы Бохнера-Филлипса о наполненности некоторых подалгебр алгебры линейных ограниченных операторов. Проводится систематический анализ результатов статьи А.Г. Баскакова[2], и получены теоремы, уточняющие результаты данной статьи. Результаты о наполненности подалгебр и об оценках матричных элементов обратных операторов применяются в теореме 3.5.4 о наполненности подалгебр алгебры операторов, порождённых интегральными операторами и действующих на пространстве непрерывных 2π-периодических комплекснозначных функций $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

[2] Баскаков А.Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов Изв. РАН. Сер. матем. — 1997. — Т. 61. — № 6. — С. 3–26.

Пусть $\mathbb{G}$ – счетная дискретная абелева группа с аддитивной формой записи операции на группе, а $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{G}$ – некоторое её подмножество.

Определение 3.2.1. Проекторнозначную функцию $P : \mathbb{G} \to \operatorname{End} X$, задающую множество проекторов $\{P_g = P(g)\}_{g\in\mathbb{G}}$, $P_g = 0$ для всех $g \in \mathbb{G}\backslash\mathbb{S}$, будем называть *дизъюнктной*, если $P_i P_j = 0$ для любой пары $i, j \in \mathbb{S}$, $i \neq j$.

Определение 3.2.2. Дизъюнктную проекторнозначную функцию $P : \mathbb{G} \to \operatorname{End} X$ будем называть *разложением единицы* на пространстве X, если для каждого $x \in X$ безусловно сходится ряд $\sum_{g\in\mathbb{S}} P_g x = x$ и конечна величина $C(P) = \sup_{\{\alpha_g\}\subset\mathbb{T}} \left\|\sum_{g\in\mathbb{S}} \alpha_g P_g\right\| \geq 1$.

В пространствах X и Y рассмотрим разложения единицы $P : \mathbb{G} \to \operatorname{End} X$ и $Q : \mathbb{G} \to \operatorname{End} Y$ соответственно.

Замечание 3.2.6. Для разложений единицы P и Q выполнено одно из условий:

1) В случае, когда $X = Y$ и $P = Q$, существует такая постоянная $M(P) > 0$, что для любых $g \in \mathbb{G}$, множества $G \subseteq \mathbb{S}$ и оператора $A \in \operatorname{End} X$ имеет место оценка $\|\sum_{j\in G} P_{j+g} A P_j\| \leq M(P) \max_{j\in G} \|P_{j+g} A P j\|$.

2) Для любых конечных множеств $\sigma_1, \sigma_2, \Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{S}$ таких, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, имеет место равенство

$$\|(\sum_{i\in\sigma_1} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_1} P_j) + (\sum_{i\in\sigma_2} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_2} P_j)\| =$$
$$\max\{\|(\sum_{i\in\sigma_1} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_1} P_j)\|, \|(\sum_{i\in\sigma_2} Q_i) A (\sum_{j\in\Delta_2} P_j)\|\}.$$

Определение 3.2.3. Каждому оператору $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ поставим в соответствие *матрицу оператора* $\mathcal{A} = (A_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$, элементы которой имеют вид $A_{ij} = Q_i A P_j \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, $i, j \in \mathbb{S}$.

Диагональю матрицы оператора $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ будем называть операторы $\mathcal{A}_g \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ (с учётом замечания 3.2.6), $g \in \mathbb{G}$, вида $\mathcal{A}_g = \sum\limits_{\substack{i-j=g \\ i,j\in\mathbb{S}}} Q_i A P_j$, где $\mathcal{A}_g = 0$, если $g \in \mathbb{G}$ не представима в виде $i - j$ для любых $i, j \in \mathbb{S}$.

Определение 3.2.4. Каждому оператору $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ с матрицей $\mathcal{A} = (A_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$ поставим в соответствие функцию $d_A : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ вида $d_A(g) = \sup_{i-j=g} \|A_{ij}\|$, $g \in \mathbb{G}$, $i, j \in \mathbb{S}$. Величину $d_A(g)$, $g \in \mathbb{G}$, будем называть *нормой g-ой диагонали* матрицы $\mathcal{A}$ оператора A.

Определение 3.2.5. Пусть функция $\alpha : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет свойствам:

1) $\alpha(g) \geq 1$ для всех $g \in \mathbb{G}$,

2) $\alpha(g_1+g_2) \le \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$,

3) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \alpha(ng) = 0$ для всех $g \in \mathbb{G}$.

Определение 3.2.6. Пусть $\beta : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ – функция, обладающая свойствами:

1) $\sum_{g\in\mathbb{G}} \beta(g)^{-1} < \infty$,

2) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \beta(ng) = 0$,

3) существует постоянная $C(\beta) > 0$ такая, что для всех $g \in \mathbb{G}$ справедливо неравенство $\sum_{j\in\mathbb{G}} (\beta(g-j)\beta(j))^{-1} \le C(\beta)/\beta(g)$.

Определение 3.2.7. Под *характеристикой убывания норм диагоналей* (матрицы $\mathcal{A}$) оператора $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ будем понимать правило, описывающее стремление к 0 величин $d_A(kg)$ при $k\to\infty$, $g\in\mathbb{G}$. Выделим следующие характеристики убывания норм диагоналей:

1) $\sum_{g\in\mathbb{G}} d_A(g) < \infty$;

2) $\sum_{g\in\mathbb{G}} d_A(g)\alpha(g) < \infty$, где функция α дана в определении 3.2.5;

3) $\lim_{k\to\infty, g\in\mathbb{G}} d_A(kg)\beta(kg) = 0$, где функция β дана в определении 3.2.6;

4) $\lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{Z}^n} d_A(k)(1+\|k\|)^q = 0$, для некоторого $q > n$ ($\|k\| = \max_{1\le i\le n} |k_i|$, $k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$);

5) $d_A(k) \le M\gamma^{\|k\|}$, $k \in \mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$, ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$) для некоторых постоянных $M = M(A) > 0$ и $\gamma = \gamma(A) \in (0,1)$;

6) $d_A(k) = 0$ при $|k| > 1$, $k \in \mathbb{Z}$, (трёхдиагональные);

7) $d_A(k) = 0$ при $k \ne 0, 1$ либо при $k \ne 0, -1$, $k \in \mathbb{Z}$, (двухдиагональные).

Определение 3.2.8. Операторы, удовлетворяющие любому из условий определения 3.2.7, образуют линейные подпространства из пространства $\mathrm{Hom}(X,Y)$, которые будем обозначать $\mathrm{Hom}_1(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_\alpha(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_\beta(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_q(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_\gamma(X,Y)$, соответственно, для операторов, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3), 4) и 5). Для подпространств операторов, удовлетворяющих условиям 1)–4) определения 3.2.7, введём следующие нормы

$$\|A\|_\alpha = \sum_{g\in\mathbb{G}} \alpha(g) d_A(g), \quad \|A\|_\beta = C(\beta) \sup_{g\in\mathbb{G}} \beta(g) d_A(g),$$
$$\|A\|_1 = \sum_{g\in\mathbb{G}} d_A(g), \qquad \|A\|_q = C(q) \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+\|k\|)^q d_A(k),$$

где $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ принадлежит соответствующему подпространству. Относительно введённых норм указанные подпространства полны. Отметим, что $\mathrm{Hom}_\alpha(X,Y) = \mathrm{Hom}_1(X,Y)$ при $\alpha \equiv 1$, а $\mathrm{Hom}_\beta(X,Y) = \mathrm{Hom}_q(X,Y)$ при $\beta(k) = (1+\|k\|)^q$, $k \in \mathbb{Z}^n$. В случае, когда $X = Y$ и рассматривается одно и тоже разложение единицы $P : \mathbb{G} \to \mathrm{End}\, X$ для областей определения и значений операторов, то подпространства операторов, удовлетворяющих условиям 1)–5), обозначим, соответственно, $\mathrm{End}_1 X$, $\mathrm{End}_\alpha X$, $\mathrm{End}_\beta X$, $\mathrm{End}_q X$, $\mathrm{End}_\gamma X$.

Определение 3.2.9. Пусть $\widehat{P} : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathrm{End}\, X$, $\widehat{Q} : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathrm{End}\, Y$ – сильно непрерывные изометрические представления (группы операторов), определённые формулами $\widehat{P}(\gamma)x = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}} \gamma(g)P_g x$, $x \in X$, $\widehat{Q}(\gamma)x = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}} \gamma(g)Q_g y$, $y \in Y$, где P, Q – разложения единицы согласно определению 3.2.2, соответственно, в банаховых алгебрах операторов $\mathrm{End}\, X$ и $\mathrm{End}\, Y$, $\gamma \in \widehat{\mathbb{G}}$ – унитарные характеры группы $\mathbb{G}$.

Определение 3.2.10. Каждому оператору $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ поставим в соответствие сильно непрерывную функцию $\Phi_A : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathrm{Hom}(X,Y)$, определяемую равенством $\Phi_A(\gamma) = \widehat{Q}(\gamma)A\widehat{P}(-\gamma)$, $\gamma \in \widehat{\mathbb{G}}$. Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье $\Phi_A(\gamma) \sim \sum_{g\in\mathbb{G}} \gamma(g)A_g$, $\gamma \in \widehat{\mathbb{G}}$, где

$$A_g = \int\limits_{\widehat{\mathbb{G}}} \Phi_A(\gamma)\gamma(-g)\mu(d\gamma), \quad g \in \mathbb{G}, \tag{3.1}$$

а μ – мера Хаара на компактной группе $\widehat{\mathbb{G}}$, $\mu(\widehat{\mathbb{G}}) = 1$. Ряд $\sum_{g\in\mathbb{G}} A_g$ будем называть *рядом Фурье оператора* A, а операторы A_g, $g \in \mathbb{G}$, – *коэффициентами Фурье* этого оператора (относительно пары представлений $(\widehat{P}, \widehat{Q})$).

Теорема 3.4.1. *Пусть для непрерывно обратимого оператора* $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ *относительно некоторой пары представлений* $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ *имеет две ненулевые диагонали (нулевая и первая), т.е. функция* $\Phi_A : \mathbb{T} \to \mathrm{Hom}(X,Y)$ *имеет вид*

$$\Phi_A(\theta) = A_0 + A_1\theta,\ \theta \in \mathbb{T}. \tag{3.2}$$

Обозначим $a_1 = \|A^{-1}\|d_A(1)$. *Тогда для коэффициентов Фурье оператора* $B = A^{-1}$ *справедливы следующие оценки:*

$$d_B(k) \le \begin{cases} \frac{\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k \le \frac{e\|A^{-1}\|}{a_1+1}(k+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^k, & k \ge a_1 \\ \|A^{-1}\|, & 0 < k < a_1; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$d_B(-k) \le \begin{cases} \frac{\|A^{-1}\|}{a_1} k \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1} \le \frac{e\|A^{-1}\|}{a_1} k \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{k-1}, & 1 < a_1 < k \\ \|A^{-1}\|, & 1 < k < a_1 \\ 0, & a_1 \le 1 < k; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$d_B(-1) \le \begin{cases} \|A^{-1}\|, & a_1 \ge 1 \\ 0, & a_1 < 1; \end{cases} \qquad d_B(0) \le \|A^{-1}\|.$$

При этом

$$\|B\|_1 \le \begin{cases} (2a_1+1)\|A^{-1}\| + 2e\|A^{-1}\| \left((a_1+1)\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^{a_1} + a_1 \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^{a_1-1}\right), \\ \text{если } a_1 > 1; \\ (2e+3)\|A^{-1}\|, \\ \text{если } a_1 = 1; \\ e\|A^{-1}\| \frac{a_1(a_1+2)}{a_1+1} + \|A^{-1}\|, \\ \text{если } a_1 < 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Теорема 3.4.1 уточняет результаты А.Г. Баскакова[3] (теорема 3).

Определение 3.5.1. Символом $\mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ обозначим подпространство операторов $A \in \mathrm{End}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ вида

$$A = aI + K, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \tag{3.11}$$

где K - интегральный оператор на $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ вида $(Kx)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau,u)x(u)du$, с ядром $\mathcal{K} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{K}(\tau+2\pi, u+2\pi) = \mathcal{K}(\tau,u)$ для всех $\tau, u \in \mathbb{R}$;

2) $\kappa(\tau) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, где $(\kappa(\tau))(u) = \mathcal{K}(\tau,u),\ u \in \mathbb{R}$;

3) $\kappa \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ (функция κ непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$).

Определение 3.5.2. Пусть оператор $A \in \mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ удовлетворяет одному из условий 1)–7) убывания норм диагоналей из определения 3.2.7. Для совокупностей операторов из $\mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, удовлетворяющих таким условиям, введём обозначения по аналогии с определением 3.2.8 о подпространствах операторов абстрактного пространства $\mathrm{Hom}(X,Y)$. То есть, будем пользоваться символами

[3] Баскаков А.Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов Изв. РАН. Сер. матем. — 1997. — Т. 61. — № 6. — С. 12.

$\mathrm{Gio}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Gio}_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Gio}_\beta C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Gio}_q C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathrm{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ для операторов, удовлетворяющих, соответственно, условиям 1)–5).

Из теорем 2,3 статьи[4] для рассматриваемых операторов из $\mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ вытекают следующие результаты.

Теорема 3.5.2. *Пусть непрерывно обратим оператор $A = aI + K \in \mathrm{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Положим $\widetilde{\varkappa}(A) = M\gamma\|A^{-1}\|$. Тогда оператор $B = A^{-1} \in \mathrm{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и для него справедливы оценки вида*

$$d_B(k) \le \left(2 - \frac{2(1-\gamma^2)}{8\widetilde{\varkappa}(A) + 3(1-\gamma^2)}\right)\|A^{-1}\|\left(1 - \frac{(1-\gamma)^2}{1-\gamma+4\widetilde{\varkappa}(A)}\right)^{|k|},$$

если $k \ne 0$, и $d_B(0) \le \|A^{-1}\|$. В частности,

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \le \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} - 1 + \frac{6+8\gamma+2\gamma^2}{8\widetilde{\varkappa}(A)+3(1-\gamma^2)}\right)\|A^{-1}\|,$$

причем, если $\widetilde{\varkappa}(A) \ge 1$, то

$$\|B\|_1 \le \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} + \frac{-5+8\gamma+5\gamma^2}{8+3(1-\gamma^2)}\right)\|A^{-1}\| \le \left(\frac{16\widetilde{\varkappa}(A)}{(1-\gamma)^2} + 1\right)\|A^{-1}\|.$$

Теорема 3.5.3. *Пусть непрерывно обратимый оператор $A = aI + K \in \mathrm{Gio}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ удовлетворяет условию 6) из определения 3.2.7. Обозначим величину $\bar{\varkappa}(A) = \max\{\|A_{-1}\|, \|A_1\|\}\|A^{-1}\| \le \varkappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. тогда для оператора $B = A^{-1}$ справедливы следующие оценки: $d_B(0) \le \|A^{-1}\|$,*

$$d_B(k) \le \left(\frac{16\bar{\varkappa}(A)+4}{8\bar{\varkappa}(A)+3}\right)\|A^{-1}\|\left(\frac{4\bar{\varkappa}(A)}{1+4\bar{\varkappa}(A)}\right)^{|k|} \le 2\|A^{-1}\|\left(\frac{4\bar{\varkappa}(A)}{1+4\bar{\varkappa}(A)}\right)^{|k|},$$

$$\|B\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \le \left(16\bar{\varkappa}(A) + \frac{3-8\bar{\varkappa}(A)}{3+8\bar{\varkappa}(A)}\right)\|A^{-1}\| \le 16\bar{\varkappa}(A)\|A^{-1}\|.$$

Основным результатом третьей главы диссертации является следующая

Теорема 3.5.4. *Пусть оператор $A \in \mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ непрерывно обратим и удовлетворяет одному из условий 1)–7) определения 3.2.7, тогда обратный оператор $B = A^{-1} \in \mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (т.е. алгебра $\mathrm{Gio}\, C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ наполнена) и*

1) *принадлежит подалгебре операторов, удовлетворяющих соответствующему условию определения 3.2.7 (для условий 1)–5));*

[4] Там же. — С. 12.

2) для норм его диагоналей справедливы оценки теорем 3.5.2, 3.5.3 или 3.4.1, если оператор A удовлетворяет, соответственно, условиям 5), 6) или 7) определения 3.2.7.

Список публикаций по теме диссертации

1. Струков В.Е. О структуре оператора, обратного к интегральному оператору специального вида / В.Е. Струков // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13. — № 2(1). — С. 22–30.
2. Струков В.Е. О двух определениях спектра вектора / В.Е. Струков // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2014. — Вып. 37. – № 25(196). — С. 50–57.
3. Струков В.Е. Об определениях локального спектра и спектра Карлемана векторов / В.Е. Струков // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 153–160.
4. Струков В.Е. Теорема Бохнера-Филлипса в оценках элементов обратных матриц и ее применение к интегральным операторам / В.Е. Струков // КРОМШ-2010. Сборник тезисов. — 2010. — С. 49.
5. Струков В.Е. Применение абстрактного гармонического анализа при исследовании свойств обратных операторов / В.Е. Струков // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы ВЗМШ С.Г. Крейна (дополнительный выпуск). — 2011. — С. 34–35.
6. Струков В.Е. Оценки элементов матриц обратных операторов / В.Е. Струков // КРОМШ-2011. Сборник тезисов. — 2011. — С. 52.
7. Струков В.Е. Применение абстрактного гармонического анализа при исследовании свойств обратных операторов / В.Е. Струков // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XXII". — 2011. — С. 184–185.
8. Струков В.Е. Структура оператора, обратного к интегральному оператору специального вида / В.Е. Струков // КРОМШ-2012. Сборник тезисов. — 2012. — С. 66.
9. Струков В.Е. О структуре оператора, обратного к интегральному оператору специального вида / В.Е. Струков // Международный научный журнал "Спектральные и эволюционные задачи". — 2012. — Т. 22. — С. 176–180.
10. Струков В.Е. Матрицы обратных операторов и оценки норм их диагоналей / В.Е. Струков // Международный научный журнал «Спектральные и эволюционные задачи». — 2013. — Т. 23. — С. 143–147.

11. Струков В.Е. Об оценках норм диагоналей и структуре оператора, обратного к оператору, порождённому специальным интегральным оператором / В.Е. Струков // Международная конференция "Спектральная теория и дифференциальные уравнения посвященная 100-летию Б.М. Левитана: Тезисы докладов. — 2014. — С. 121–124.
12. Струков В.Е. Об определениях спектров: Бёрлинга, Карлемана и локального для векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей / В.Е. Струков // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2016». — 2016. — С. 382–384.
13. Strukov V.E. Structure of the inverse for the integral operator of special kind / V.E. Strukov // Modern problems of Mathematics, Mechanics and Computer Science : To the 95th anniversary of Voronezh State University. — 2013. — P. 78–82.
14. Strukov V.E. The spectral mapping theorems of Gearhart and Greiner / N.M. Alba, F. Hanauska, N. Lindemulder, V.E. Strukov // Operator semigroups and dispersive equations. Workshop of the 16th Internet Seminar on Evolution Equations, 2013. — P. 18–19.
15. Strukov V.E. Estimates of the elements of inverse operators' matrices / V.E. Strukov // CIMC-2013. Book of abstracts. — 2013. — Vol. 1. — P. 46.

Работы [1-3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.