На правах рукописи

ХОАНГ НГЫ ХУАН

СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЧЁТНЫХ ПОРЯДКОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2014

Работа выполнена в

Российском государственном педагогическом университете им. А. И. Герцена

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Зайцев Валентин Федорович**.

Официальные оппоненты:

Калитвин Анатолий Семенович, доктор физико-математических наук, Липецкий государственный педагогический университет, кафедра математики, заведующий

Кусюмов Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, Казанский государственный технический университет им. А. Н. Туполева, кафедра аэрогидродинамики, профессор

Ведущая организация:

Смоленский государственный университет

Защита состоится 20 мая 2014 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета и на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfocand=2625.

Автореферат разослан ___ марта 2014 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор ф.-м. наук, профессор Гликлих Ю. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Известно, что под симметрией понимается свойство объекта оставаться инвариантным под действием какого-либо преобразования. Симметрия широко распространена в природе, исследуется во всех областях естественных наук, и её изучение во многих случаях является эффективным методом исследования. В математическом моделировании симметрия, наряду с законами сохранения, играет роль фундаментального закона природы.

В области дифференциальных уравнений (ДУ) симметрийные методы возникли в XIX веке, когда Софус Ли (1842 – 1899), наиболее известные работы которого опубликованы в конце XIX века, предложил регулярный алгоритм группового анализа для классификации и поиска решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). К сожалению, в начале XX века широкая научная общественность не проявила должного внимания к идеям С. Ли, хотя известно несколько содержательных работ в этой области. Однако подлинный расцвет симметрийного подхода к ДУ произошёл полвека спустя, когда Л. В. Овсянников успешно применил групповой анализ к исследованию нелинейных уравнений с частными производными, что позволило найти в явном виде большое число физически значимых решений модельных уравнений в различных областях прикладной науки (механика, гидродинамика, нелинейная оптика и др.). В теории ОДУ была найдена глубокая связь между различными типами симметрий – непрерывными группами преобразований (группами Ли) и первыми интегралами (законами сохранения): смысл теоремы Нётер в теории ОДУ состоит в том, что при определённых условиях симметрия исходного уравнения "наследуется" первым интегралом, и наличие **одной** вариационной симметрии позволяет понизить порядок уравнения сразу на **две** единицы.

Однако вариационная симметрия определена лишь для уравнений чётного порядка, и попытки ввести гамильтонову структуру на ОДУ нечётных порядков не привели к положительному результату (с точки зрения интегрируемости). Поэтому с временем сложилось впечатление, что аналогичной структуры симметрии для уравнения нечётных порядков не существует. Очевидно, это не так – в качестве контрпримера можно привести простое уравнение 3-го порядка

$$y''' = 2yy', \tag{0.0.1}$$

которое автономно и имеет автономный первый интеграл

$$y'' = y^2 + C, \tag{0.0.2}$$

т. е. симметрия этого уравнения абсолютно аналогична вариационной в том смысле, что первый интеграл её "наследует", позволяя с её помощью понизить порядок исходного уравнения сразу на две единицы.

В данный момент известны 2 работы, посвящённые аналогам вариационной симметрии. В 1989 г. С. П. Царёв опубликовал статью, где была разработана теория вариационной симметрии для механической системы нечётных порядков. В работе получены интересные результаты и приведены строгие доказательства сформулированных теорем. Однако все содержательные выводы касаются уравнений и систем уравнений с частными производными, для обыкновенных дифференциальных уравнений существенных результатов получить не удалось.

Более интересные результаты получил П. П. Аврашков, который в своей кандидатской диссертации, защищённой в 2004 г. в Казани, указал нетривиальные примеры уравнений 3-го порядка, имеющие аналог вариационной симметрии. Следует отметить, что Аврашков успешно использовал прямой метод, опирающийся на определяющее уравнение и определение первого интеграла.

Заметим, что полномасштабные исследования уравнений нечётных порядков до определённого времени вообще не проводились – сколько-нибудь общая групповая классификация уравнений 3-го порядка была проведена М. Я. Ланкеровичем и имела вспомогательное значение (темой исследования были уравнения в частных производных). Поэтому в работах Аврашкова не ставилась цель полномасштабного исследования подклассов уравнений 3-го порядка, имеющих аналоги вариационных симметрий. В настоящей работе мы будем искать широкие классы таких уравнений, удовлетворяющие некоторым априорным условиям – как по структуре самих уравнений, так и по структуре первого интеграла (за немногими исключениями рассматриваются первые интегралы, являющиеся полиномами по второй производной).

Если абстрагироваться от механических аналогий, то становится очевидным, что последовательное разыскание и описание подклассов подобных уравнений весьма актуально, учитывая востребованность ОДУ 3-го порядка в качестве эталонных и промежуточных моделей.

Цель работы. Целью исследования являются некоторые направления симметрийного анализа ОДУ 3-го порядка. В соответствие с этим мы будем решать следующие задачи.

1. Разработать технику, позволяющую эффективно решать обратные задачи и находить подклассы уравнений 3-го порядка, допускающие аналог вариационной симметрии.
2. Найти группы эквивалентности для различных подклассов ОДУ 3-го порядка.
3. Провести поиск уравнений класса $y''' = f(y)$, имеющих автономный первый интеграл, который обладает определённой структурой – в виде полиномов относительно старшей производной (линейный, квадратичный и кубичный).
4. Провести поиск уравнений класса $y''' = f(y, y')$, имеющих автономный первый интеграл, который обладает определённой структурой – в виде полиномов относительно старшей производной (линейный, квадратичный и кубичный).
5. Провести поиск уравнений класса $y''' = f(y, y'')$ (в случае, когда $f(y, y'')$ является полиномами относительно y''), имеющих автономный первый интеграл, который также обладает полиноминальной структурой по старшей производной.

Научная новизна. Все результаты исследования являются новыми. Впервые найдены классы уравнений 3-го порядка заданной структуры, имеющие первый интеграл, удовлетворяющий априорным условиям, причём доказаны теоремы о единственности этих классов при этих условиях с точностью до найденных групп эквивалентности.

Методы исследования. При решении поставленных задач были использованы методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, классического группового анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также аппарат теории первого интеграла.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Разработанные подходы и полученные результаты могут использоваться для решения ряда задач математического моделирования, а найденные конкретные классы уравнений – в качестве модельных (эталонных) для ряда физических задач и тестирования систем аналитических вычислений на ЭВМ.

Регулярность и "прозрачность" разработанных алгоритмов позволяет использовать полученные результаты и в педагогической практике, при чтении курсов обыкновенных дифференциальных уравнений и математического моделирования, спецкурсов современного группового анализа.

Апробация работы. Результаты исследований прошли апробацию на научных конференциях "Герценовские чтения" РГПУ им. А. И. Герцена (LXIV–LXVI, 2011–2013 гг.) и на научных семинарах кафедры математического анализа математического факультета РГПУ им. А. И. Герцена.

Достоверность и обоснованность полученных результатов. Все результаты, полученные в работе, строго доказаны.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 6], из которых [1] и [6] – в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1], [2], [6] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на 8 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы из 43 наименований. Общий объём работы составляет 109 страниц текста.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы: симметрия широко распространена в природе и является фундаментальным свойством, поэтому её необходимо учитывать при моделировании в различных областях естественных наук; в частности, модельные дифференциальные уравнения должны обладать симметрийными свойствами изучаемого объекта или процесса. До настоящего времени аналоги нётеровых симметрий для обыкновенных дифференциальных уравнений не рассматривались. Указаны примеры, подтверждающие существование уравнений нечётных порядков, допускающих аналог вариационной симметрии, а также приводится обзор основных работ других авторов по исследуемому нами направлению. Излагается краткое содержание работы и сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В первой главе содержится 3 параграфа, соответствующих трём классическим симметрийным теориям: групповому анализу, первым интегралам и вариационной симметрии, которые являются теоретической основой данной работы. **Первый параграф** посвящён групповому анализу, в начале параграфа приводится краткий обзор истории возникновения группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, как аналога теории Галуа для алгебраических уравнений, а также изложена главная идея Ли и особенность точечных преобразований Ли. Далее, введён ряд понятий: однопараметрические точечные преобразования

$$\bar{x} = \varphi(x, y, a), \qquad \bar{y} = \psi(x, y, a), \tag{1.1.1}$$

где $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}\right|_{a=0} = x, \quad \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial a}\right|_{a=0} = y$, образующие группу, инфинитезимальный оператор в “геометрической” и канонической формах

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \qquad X = \hat{\eta}(x, y, y')\partial_y, \tag{1.1.6}$$

а также понятие инвариантности функции относительно группы и необходимое и достаточное условие, при котором функция $F(x, y)$ инвариантна относительно группы

$$XF = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0. \tag{1.1.11}$$

На основе этих понятий строится продолжение n-го порядка инфинитезимального оператора

$$\underset{n}{X} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_{y'} + \ldots + \zeta_n\partial_{y^{(n)}}$$

где $\zeta_i = D_x(\zeta_{i-1}) - y^{(i)}D_x(\xi), \quad \zeta_0 = \eta$, а также критерий инвариантности дифференциальных функций относительно группы. Центральное место занимает понятие и критерий допускаемости точечной группы обыкновенными дифференциальными уравнениями $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$:

$$\underset{n}{X} \left(y^{(n)} - F\right)\Big|_{y^{(n)}=F} = 0. \tag{1.1.20}$$

Изложен также **метод расщепления**, позволяющий эффективно решать определяющее уравнение (1.1.20).

Второй параграф посвящён первым интегралам ОДУ. Кратко пояснена роль первых интегралов в математике и физике: тесная связь с законами сохранения и средство понижения порядков уравнения (**метод первых интегралов**). Подробно изложены 2 алгоритма поиска первых интегралов: **метод Эйлера и прямой алгоритм**. Первый алгоритм основан на "укороченном"операторе Эйлера

$$E_n = \frac{\partial}{\partial y} - D_x \frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + (-1)^n (D_x)^n \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}, \tag{1.2.53}$$

где $D_x = \partial_x + y' \partial_y + \ldots$, который обладает уникальным свойством – аннулирует полную производную. Иными словами, действие оператора Эйлера на функцию, являющуюся полной производной другой функции даёт тождественный нуль. Из определения первого интеграла

$$D_x P = \left[y^{(n)} - f\right] R \tag{1.2.4}$$

мы можем выписать систему уравнений для поиска интегрирующих множителей $R(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, в которой центральное место занимает уравнение

$$E_n \left[(y^{(n)} - f) R\right] = 0. \tag{1.2.59}$$

Далее, с помощью каждого найденного R можно выделить все частные производные от первого интеграла по всем его переменным

$$P_x, P_y, P_{y'}, \ldots, P_{y^{(n-1)}}.$$

И, наконец, сам первый интеграл восстановится с помощью криволинейного интеграла

$$P = \int\limits_C \left[P_x dx + P_y dy + P_{y'} dy' + \ldots + P_{y^{(n-1)}} dy^{(n-1)}\right], \tag{1.2.11}$$

где C – произвольная кривая из точки $\left(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{y}', \ldots, \widetilde{y^{(n-1)}}\right)$ в точку $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

В работе алгоритм Эйлера (во избежание излишней абстракности) обоснован сначала для двух конкретных случаев $n = 1, 2$, затем – для общего случая, когда n является произвольным натуральным числом.

Второй алгоритм (прямой метод) прямо следует из определения первого интеграла (1.2.4). Он оказывается существенно проще и эффективнее алгоритма Эйлера: одновременно позволяет найти и первые интегралы и интегрирующие множителя. В ходе поиска решения поставленной обратной задачи мы использовали именно прямой метод. В обоих алгоритмах необходимо принять некоторый "анзатц", т. е. заранее предположить вид искомого первого интеграла (или интегрирующего множителя), например, первый интеграл линеен по старшей производной

$$P = Q(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})y^{(n-1)} + S(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}), \tag{1.2.9}$$

или квадратичен по $y^{(n-1)}$

$$P = Q(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}) \left(y^{(n-1)}\right)^2 + S(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})y^{(n-1)}+ \\ + T(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}). \tag{1.2.10}$$

Далее процесс поиска продолжается с помощью метода расщепления.

Третий параграф посвящён вариационной симметрии. В рамках данной диссертации все результаты теории вариационной симметрии непосредственно не использованы, однако необходимо дать чёткое представление о её свойствах и использовании при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, после чего строить аналог для уравнений нечётных порядков. Даётся понятие вариационной формулировки для дифференциальных уравнений

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.3.1}$$

и показано, что вариационной симметрией обладают только уравнения чётных порядков в том случае, когда они в точности являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для какого-либо лагранжиана

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = E_n \left[L(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\right]. \tag{1.3.4}$$

Подробно изложен в виде теоремы с доказательством способ понижения порядка уравнения Эйлера–Лагранжа на 2 единицы с помощью её вариационной симметрии. Центральное место в параграфе занимает теорема Нётер, в которой доказывается критерий, при выполнении которого первый интеграл уравнения чётного порядка "наследует" его группу симметрий.

Во второй главе содержатся новые результаты, представленные в 3-х параграфах. В начале определяется понятие аналога вариационной симметрии. Далее осуществляется поиск широких классов уравнений 3-го порядка, допускающих аналог вариационной симметрии и удовлетворяющих некоторым априорным условиям – как по структуре самих уравнений, так и по структуре первого интеграла.

Для того, чтобы максимально эффективно решить поставленную задачу, предлагается новый подход, идея которого заключается в использовании группы эквивалентности, существенно упрощающей решение обратной задачи: сначала задача решается её для самого простого случая – первые интегралы наследуют группу параллельных переносов, затем (с помощью группы эквивалентности) полученный результат распространяется на весь класс.

В **первом параграфе 2.1** вводится определение группы эквивалентности. Доказывается, что соответствующие точечные преобразования группы эквивалентности [5] для класса $y''' = F(x, y, y')$ должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = Cf'(t)u + h(t), \end{cases} \tag{2.1.24}$$

для класса $y''' = F(x, y)$ условия сохранения подклассов становятся следующими

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{t + C_2} + C_3, \\ y = \dfrac{C_4 u}{(t + C_2)^2} + h(t). \end{cases} \tag{2.1.31}$$

И, наконец, аналогичные условия для класса $y''' = F(x, y, y'')$ представлены подобными же преобразованиями

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{t + C_2} + C_3, \\ y = \dfrac{C_4 u}{(t + C_2)^2} + \beta(t). \end{cases} \tag{2.1.42}$$

Во втором параграфе 2.2 ведётся поиск линейных, квадратичных и кубичных по старшей производной автономных первых интегралов, т. е.

$$P = R(y,y')y'' + Q(y,y'), \tag{2.2.2}$$

$$P = R(y,y')(y'')^2 + Q(y,y')y'' + S(y,y'), \tag{2.2.5}$$

$$P = R(y,y')(y'')^3 + Q(y,y')(y'')^2 + S(y,y')y'' + T(y,y') \tag{2.2.27}$$

для класса автономных уравнений

$$y''' = F(y). \tag{2.2.1}$$

Все результаты сформированы во виде 3-х теорем с доказательством.

Теорема 2.2.1 *Не существует нетривиального уравнения* (2.2.1) (*т. е. с* $F(y) \neq 0$), *имеющего автономный первый интеграл вида* (2.2.2).

Теорема 2.2.2 *Уравнение*

$$y''' = (ay^2 + by + c)^{-5/4}, \tag{2.2.6}$$

где a, b, c *– произвольные константы, является единственным уравнением класса* (2.2.1), *имеющим квадратичный по старшей производной автономный первый интеграл* (2.2.5).

Соответствующий первый интеграл имеет вид

$$P = R(y'')^2 - \frac{1}{2}R'(y')^2y'' + \frac{1}{8}R''(y')^4 - 2R^{-1/4}y', \tag{2.2.25}$$

где $R(y,y) = ay^2 + by + c$.

Теорема 2.2.3 *Уравнение*

$$y''' = (ay + b)^{-5/2} \tag{2.2.26}$$

является единственным уравнением класса (2.2.1), *имеющим кубичный по старшей производной первый интеграл* (2.2.27).

Соответствующий первый интеграл может быть представлен в виде линейной комбинации двух кубичных и одного квадратичного по старшей производной выражений

$$P = a_1P_1 + a_0P_0 + Q, \tag{2.2.54}$$

где

$$P_1 = \frac{(ay+b)^2 y}{b^2}(y'')^3 - \frac{(3ay+b)(ay+b)}{2b^2}(y')^2(y'')^2 + \\ + \left[\frac{(3ay+2b)a}{4b^2}(y')^3 - \frac{3y}{(ay+b)^{1/2}b^2}\right] y'y'' - \frac{a^2}{8b^2}(y')^6 + \\ + \frac{9a^3y^3 + 26a^2by^2 + 25ab^2y + 8b^3}{6(ay+b)^{7/2}b^2}(y')^3 - \frac{3}{2}\frac{2aby+b^2}{a^2b^3(ay+b)^2}, \quad (2.2.55)$$

$$P_0 = -\frac{(2ay-b)(ay+b)^2}{b^3}(y'')^3 + \frac{3a^2y(ay+b)}{b^3}(y')^2(y'')^2 - \\ - \frac{3}{b^3}\left[\frac{a^2(2ay+b)}{4}(y')^3 - \frac{2ay-b}{(ay+b)^{1/2}}\right] y'y'' + \frac{a^3}{4b^3}(y')^6 - \\ - \frac{a(6a^3y^3 + 17a^2by^2 + 16ab^2y + 5b^3)}{2b^3(ay+b)^{7/2}}(y')^3 + \frac{3}{2}\frac{4ay+b}{ab^3(ay+b)^2}, \quad (2.2.56)$$

и

$$Q = (ay+b)^2(y'')^2 - a(ay+b)(y')^2y'' + \frac{1}{4}a^2(y')^4 - 2(ay+b)^{-1/2}y'. \quad (2.2.57)$$

Интересно, что все функции P_0, P_1, Q являются первыми интегралами уравнения (2.2.26). Однако вместе они функционально-зависимы – их якобиан равен нулю.

В третьем параграфе изложены результаты поиска полиномиальных автономных первых интегралов (2.2.2, 2.2.5, 2.2.27) для класса уравнений

$$y''' = F(y, y'). \quad (2.3.1)$$

Доказаны 2 теоремы.

Теорема 2.3.1 *Уравнение*

$$y''' = \frac{R''(y')^3 - 2S'y'}{2R}, \quad (2.3.3)$$

где R и S – произвольные функции переменной y, является единственным подклассом уравнений (2.3.1), *имеющих линейный по y'' первый интеграл* (2.2.2).

Найденный первый интеграл имеет следующий вид

$$P = R(y)y'' - \frac{1}{2}R'(y')^2 + S(y). \quad (2.3.7)$$

Теорема 2.3.2 *Уравнение*
$$y''' = R^{-3/2}y'\Phi(u) + \frac{2RR'' - (R')^2}{8R^2}(y')^3 - \frac{2RT' - R'T}{4R^2}y', \qquad (2.3.9)$$
где $u = R^{-1/2}(y')^2 + \int TR^{-3/2}\,dy$, R и T – *произвольные функции переменной* y, Φ – *произвольная функция переменной* u, *является единственным подклассом уравнений* (2.3.1), *имеющих квадратичный по* y'' *первый интеграл* (2.2.5).

Искомый первый интеграл имеет следующий вид
$$P = R(y'')^2 + \left[-\frac{1}{2}R'(y')^2 + T(y)\right]y'' + \\ + \frac{1}{16}\frac{(R')^2}{R}(y')^4 - \int \Phi(u)\,du - \frac{R'T}{4R}(y')^2 + \frac{1}{4}\frac{T^2}{R}. \quad (2.3.41)$$

Рассматриваются также кубичный первый интеграл (2.2.27) для класса (2.3.1). Здесь не удаётся выписать конкретный результат в явном виде, но доказано, что решение задачи сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных
$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{y'}SG_{y'}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}(QG_{y'}) - y'S_{yy} = 0. \qquad (2.3.49)$$

В третьей главе мы рассматриваем поиск автономных первых интегралов для класса уравнений, содержащих в явном виде вторую производную. Здесь мы проводим поиск аналогов вариационной симметрии не для общего класса, а только для некоторых специфических подклассов, так как в общем случае затруднительно использовать метод расщепления. При этом алгоритм решения обратной задачи, изложенный в доказательстве, существенно отличается от вышерассмотренных задач.

В первом параграфе 3.1 рассматривается существование аналогов вариационных симметрий подкласса автономных уравнений вида
$$y''' = F(y, y', y'')G(y''). \qquad (3.1.1)$$

Найдены первые интегралы для нескольких случаев:

1a. Функция F линейна по второй производной, тогда первый интеграл уравнения (3.1.1) имеет вид
$$P = \int \frac{dy''}{G(y'')} - H(y, y').$$

1б. Функция F не зависит от второй производной, тогда первый интеграл уравнения (3.1.1) имеет вид

$$P = \int \frac{dy''}{G(y'')} - H(y).$$

В этом случае функция F линейна по первой производной: $F = H(y)y'$, где H – произвольна.

1в. Отметим важный случай степенно́й зависимости функции G от “предстаршей” производной, когда $G = (y'')^n$. Тогда

$$P = \begin{cases} (y'')^{1-n} - (1-n)H(y, y'), & \text{если} \quad n \neq 1, \\ \ln y'' - H(y, y'), & \text{если} \quad n = 1. \end{cases}$$

Во втором параграфе 3.2 ведётся поиск линейного и квадратичного автономных первых интегралов (2.2.2) и (2.2.5) для двух подклассов уравнений

$$y''' = F(y)y'' + G(y) \tag{3.2.2}$$

и

$$y''' = F(y)(y'')^2 + G(y)y'' + H(y). \tag{3.2.45}$$

Все результаты представлены в виде 4-х теорем с доказательством.

Теорема 3.2.1 *Уравнение*

$$y''' = \frac{cy''}{ay + b} \tag{3.2.3}$$

является единственным уравнением вида (3.2.2), *имеющим линейный первый интеграл.*

Соответствующий первый интеграл уравнения (3.2.3) принимает вид

$$P = (ay + b)y'' - \frac{1}{2}a(y')^2 - cy'. \tag{3.2.12}$$

Теорема 3.2.2 *Уравнение*

$$y''' = \frac{ay''}{by + c} + \frac{d}{(by + c)^{5/2}} \tag{3.2.13}$$

является единственным уравнением вида (3.2.2), *имеющим квадратичный по второй производной первый интеграл.*

Первый интеграл уравнения (3.2.13) принимает вид

$$P = \left[(by+c)y'' - \frac{1}{2}b(y')^2 - ay'\right]^2 - \frac{2bdy' + 4ad}{b\sqrt{by+c}}. \qquad (3.2.33)$$

Рассматривался также кубичный первый интеграл (2.2.27) для класса (3.2.2), доказано,что он удовлетворяет переопределённой системе

$$\begin{cases} \dfrac{7}{24}R_{yyy}G + \dfrac{91}{120}R_{yy}G_y + \dfrac{2}{3}R_yG_{yy} + \dfrac{1}{5}RG_{yyy} = 0, \\ \dfrac{13}{12}R_{yy}G^2 + \left(\dfrac{47}{12}R_yG_y + \dfrac{7}{4}RG_{yy}\right)G + \dfrac{7}{4}RG_y^2 - \dfrac{1}{8}\alpha_{yyy} = 0, \\ -3G_yRG^2 + RH_{yy} + \dfrac{5}{6}\alpha_{yy}G - R_yG^3 + \dfrac{2}{3}\alpha G_{yy} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{3}{2}\alpha_yG_y + \dfrac{35}{24}R_{yy}H + \dfrac{7}{3}R_yH_y = 0, \\ \alpha_yG^2 + \left(2\alpha G_y + \dfrac{35}{6}R_yH + \dfrac{9}{2}RH_y\right)G + \dfrac{11}{2}HRG_y = 0. \end{cases} \qquad (3.2.44)$$

Теорема 3.2.3 *Уравнение*

$$y''' = a(y'')^2 + \frac{d}{by+c}y'', \qquad (3.2.46)$$

где a, b, c, d *– произвольные константы, является единственным уравнением вида* (3.2.45), *имеющим линейный по старшей производной автономный первый интеграл.*

Первый интеграл найденного уравнения (3.2.46) имеет следующий вид

$$P = \left[(by+c)y'' + \frac{aby' + ad + b}{a^2}\right]\exp(-ay'). \qquad (3.2.62)$$

Теорема 3.2.4 *Уравнение*

$$y''' = a(y'')^2 - \frac{by''}{a(by+c)} + \frac{d}{(by+c)^4}, \qquad (3.2.63)$$

где a, b, c, d *– произвольные константы, является единственным уравнением вида* (3.2.45), *имеющим квадратичный по старшей производной автономный первый интеграл.*

Первый интеграл уравнения (3.2.63) имеет вид

$$P = \left\{\left[(by+c)y'' + \frac{b}{a}y'\right]^2 + \frac{d}{a(by+c)^2}\right\}\exp(-2ay'). \qquad (3.2.92)$$

Публикации автора по теме диссертации

[1] Хоанг Нгы Хуан. Аналоги вариационных симметрий ОДУ третьего порядка / В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан // Известия российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена.-2013.-№154.-С.33–41.

[2] Хоанг Нгы Хуан. Аналоги вариационных симметрий уравнений вида $y''' = F(y, y'')$ / В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы XVI научной конференции «Герценовские чтения».-СПб: РГПУ.-2013.-С.65–69.

[3] Хоанг Нгы Хуан. Аналог вариационной симметрии ОДУ нечётных порядков [электронный ресурс]/ Хоанг Нгы Хуан // Дифференциальные уравнения и процессы управления.-2013.-№3.-С.117–135.-Режим доступа:
http://www.math.spbu.ru/diffjournal

[4] Хоанг Нгы Хуан. О группах эквивалентности на подклассах уравнений третьего порядка/ Хоанг Нгы Хуан // Препринт НИИ математики ВГУ.-2013.-№45.-9с.

[5] Хоанг Нгы Хуан. Об алгоритмах поиска первых интегралов дифференциальных уравнений/ Хоанг Нгы Хуан // Препринт НИИ математики ВГУ.-2013.-№46.-11с.

[6] Хоанг Нгы Хуан. Аналоги вариационных симметрий уравнений вида $y''' = F(y, y', y'')$ / В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан // Известия российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена.-2013.-№163.-С.7–16.

Работы [1] и [6] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.