ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО

На правах рукописи

Лапшина
Марина Геннадьевна

B -ПОТЕНЦИАЛЫ НЬЮТОНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ РАДОНА И РАДОНА-КИПРИЯНОВА

01.01.01 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ляхов Л.Н.

Липецк — 2016

Оглавление

Введение

B-потенциалами называются операторы, построенные по схеме классических потенциалов на основе специального сдвига

$$T^y: \ f(x) \to (T^y f)(x) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha \, d\alpha\,, \ x,\, y \geq 0\,,$$

принадлежащего классу обобщенных сдвигов Б.М. Левитана, и приспособленные для работы с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

Термин "обобщенный сдвиг" для T^y одновременно появился в работах А. Вайнштейна и Ж. Дельсарта в 30-40-х годах, а общая теория обобщенных сдвигов была построена Б.М. Левитаном в 40-70-х годах прошлого века (см. [16], [17]). Впервые потенциалы, порожденные обобщенным сдвигом, изучались А. Вайнштейном. Он называл их "осесимметрическими", поскольку они проявляются при исследовании задач с элементами сферической симметрии.

Смешанный обобщенный сдвиг (по одной переменной обобщенный сдвиг, а по остальным – обычный) применялся И.А. Киприяновым (1967) для исследования уравнений, содержащих по одному из направлений дифференцирования сингулярный оператор Бесселя. Таким образом, B-потенциалы известны с середины прошлого века. Однако их общая теория не построена.

B-потенциалы Рисса появляются в исследованиях уравнений с оператором Бесселя. В этой связи можно отметить работы И.А. Киприянова, А.Д. Гаджиева [1], В.С. Гулиева [5], Л.А. Иванова, В.В. Катрахова, В.И. Кононенко Л.Н. Ляхова, Ф.Г. Мухлисова и др. Теория B-потенциалов, отвечающих бесконечно дифференцируемой плотности, построена Л.Н. Ляховым [20], гл. 3 - 6. Известно, что классические потенциалы Ньютона обладают замечательными (и специфическими) свойствами. То же надо сказать и о B-потенциалах Ньютона, чем обусловлен интерес к их изучению. Из монографии И.А. Киприянова [9] известно, что B-потенциалы Ньютона являются решениями сингулярного уравнения Пуассона, если правая часть уравнения дважды непрерывно дифференцируемая функция. Для классических потенциалов справедлив и более тонкий результат: такими решениями являются потенциалы с непрерывной по Гельдеру плотностью. В данной диссертации обобщаются результаты И.А. Киприянова именно в этом направлении: изучаются B-потенциалы Рисса с непрерывной по Гельдеру плотностью. Для этого оказалось необходимым исследовать дополнительные свойства B-потенциала, не изученные ранее. В частности, возникает необходимость в формулах для вычисления первой, второй и B-производной (производной, порожденной обобщенным сдвигом) B-потенциала Ньютона. При этом формулы первой и второй производной аналогичны классическим. Формула для B-производной B-потенциала принципиально отличается от классической присутствием сингулярной составляющей оператора Бесселя в подынтегральных выражениях поверхностных интегралов. Разумеется, это приводит к необходимости введения новых ограничений на плотность B-потенциала. Во всех полученных формулах производные не применяются непосредственно к плотности. Это, как и в классическом случае, дает возможность распространить результаты работы на B-потенциалы с непрерывной по Гельдеру плотностью, подправленную понятием "четности по Киприянову" вблизи сингулярных гиперплоскостей. Но здесь возникли трудности другого характера, преодоление которых вынуждает вводить вращения. В результате обычно вырезаемый шар с центром в особой точке превращается в тор. Такое расширение евклидова пространства не дает возможности воспользоваться классической схемой. Это создает существенные сложности в изучении теории.

Актуальность данной работы в том, что полученные в ней результаты могут быть использованы при построении общей теории B-потенциалов. Кроме того, результаты, полученные относительно B-потенциалов Ньютона, могут использоваться в задачах фундаментальной физики, механики и вычислительной томографии, в которых присутствуют центральные, осевые и многоосевые симметрии.

Цель работы. Целью работы является изучение B-потенциалов с гельдеровской плотностью и их приложений к преобразованиям Радона и Радона-Киприянова.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Изучение B-потенциала и B-потенциала Ньютона с кусочно-гладкой плотностью, с гельдеровской плотностью и его основных свойств: непрерывность, ограниченность, дифференцируемость.

2. Получение формул обращения для некоторых операторов типа "весовая плоская волна".

3. Получение формул обращения преобразования Радона-Киприянова гельдеровской функции для случая, когда число $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ — натуральное.

4. Получение формул обращения преобразования Радона непрерывной функции от многоосевой сферической симметрии.

Научная новизна. Следующие результаты работы являются новыми.

1. Получены формулы второй производной и B-производной B-потенциала с непрерывной по Гельдеру плотностью. Доказано, что B-потенциал с удовлетворяющей условию Гельдера плотностью f является решением сингулярного уравнения Пуассона $\Delta_B U = C f$.

2. Получены формулы обращения некоторых интегральных опе-

раций с ядром типа "весовая плоская волна".

3. Доказана теорема о непрерывности преобразования Радона-Киприянова в весовых функциональных классах Лебега со специальным сингулярным весом.

4. Найдены формулы обращения преобразование Радона-Киприянова гельдеровской функции соответствующим B-потенциалом в случае, когда число $|\gamma|$ – натуральное. Установлено, что эти же формулы справедливы для обращения преобразования Радона гельдеровской функции, зависящей от многоосевой сферической симметрии.

Методы исследования. В работе используются методы теории функций, функционального анализа, а также методы, развитые в работах научной школы И.А. Киприянова при исследовании весовых функциональных пространств и сингулярных дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут оказаться полезными при исследовании решений сингулярных дифференциальных уравнений и могут быть включены в общую теорию B-потенциалов. Кроме того, возможно использование результатов диссертационного исследования при чтении курсов по выбору в университетах для студентов математических специальностей.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались в Воронежской зимней математической школе в 2014 г. и в 2016 г., в школе молодых ученых Липецкой области "Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания" в 2015 г., на международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" в г. Ростове-на-Дону в 2015 г. и 2016 г., на международной конференции по математической теории управления и механике в г. Суздале в 2015 г., на международной научной конференции "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных", посвященной памяти А.В. Бицадзе, в г. Москве в 2016 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [34] — [47]. В совместно опубликованных работах [34] – [37] Л.Н. Ляхову принадлежит постановка задач. Доказательства результатов получены лично диссертантом.

Работы [34] – [36] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка цитируемой литературы, включающего 47 наименования. Общий объем диссертации 124 страницы.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дается обоснование актуальности выбранной темы, приводится методика исследования, дан краткий обзор содержания диссертации и приведены основные научные результаты.

Нумерация изложенных ниже определений и утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

В первой главе даются определения преобразований Радона и Радона-Киприянова. Вводится определение смешанного обобщенного сдвига и описываются его основные свойства. Приведены некоторые, известные из работ Л.Н. Ляхова, Е.Г. Гоц, О.И. Поповой, свойства преобразования Радона-Киприянова.

Пусть натуральные числа N и n фиксированы, $1 \leq n \leq N$. Через $\mathbb{R}_N$ будем обозначать евклидово пространство точек $x{=}(x', x'')$, где $x' \in \mathbb{R}_n$, $x'' \in \mathbb{R}_{N-n}$. Так же введем обозначение $(x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}$, где мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел, его длина $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Функции $f(x)$, определенные в части пространства $\mathbb{R}_N^+$, будем называть x_i-четными по Киприянову (или x_i-четными), если они допускают четное продолжение с сохранением класса гладкости. Если функция всего лишь непрерывна (в том числе по Гельдеру), она будет называться x_i-четной по Киприянову, когда в некоторой положительной полуокрестности координатной гиперплоскости $x_i = 0$ она имеет первую непрерывную производную и выполняется условие

$$\forall i = \{1, n\}, \quad \lim_{x_i \to 0} f'_{x_i} = 0. \tag{1.1.1}$$

Функцию x_i-четную по каждой координате вектора $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ будем называть x'-четной по Киприянову (чаще просто — x'-четной функцией).

Все рассматриваемые далее функции предполагаются x'-четными в соответствующем классе. Носители таких функций $supp\, f = \Omega_N^+$ рассматриваются в области $\mathbb{R}_N^+$ евклидова пространства $\mathbb{R}_N$ с положительными весовыми переменными. Наибольший интерес представляют области, которые примыкают к координатным гиперплоскостям $x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Части границ таких областей, принадлежащих $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, будем обозначать Γ_N^0. Другую часть границы, принадлежащую $\mathbb{R}_N^+$, будем обозначать Γ_N^+. Теперь отметим, что граница Γ_N^0 — скорее граница симметрии, а не граница области. Поэтому всюду под областью задания x'-четной функции нам удобно понимать частично замкнутое множество, включающее в себя границу симметрии функции, т. е. $\Omega_N^+ \cup \Gamma_N^0$. Это множество будем обозначать тем же символом Ω_N^+.

Через $L_p^\gamma(\Omega_N^+)$ $\quad (p \geq 1,\ \Omega_N^+ \subseteq \mathbb{R}_N^+)$ будем обозначать множество измеримых и x'-четных функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega_N^+)} = \left(\int\limits_{\Omega_N^+} |f(x)|^p \, (x')^\gamma \; dx \right)^{1/p}.$$

Пусть $\delta(P)$ — δ-функция, сосредоточенная на ($N-1$)-мерной поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_N^+$.

Преобразованием Радона-Киприянова x'-четной функции f будем называть следующую конструкцию

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x)\, \mathcal{P}_{x'}^\gamma\, \delta(p - \langle x, \xi \rangle)\, (x')^\gamma \, dx\,, \tag{1.1.4}$$

где символ $\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}$ обозначает действие многомерного оператора Пуассона по совокупности переменных $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ по следующей формуле:

$$\mathcal{P}_{x'}^{\gamma} g(x', x'') = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi} \ldots \int\limits_0^{\pi} g(x_1 \cos\alpha_1, \ldots, x_n \cos\alpha_n\,, x'') \prod_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i \; d\alpha_1 \, \ldots \, d\alpha_n\,. \tag{1.1.5}$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{N+n}^{+}$, полученном вращениями $x_i \to \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2}$ исходного пространства $\mathbb{R}_N^+$ на угол π, преобразование K_γ (1.1.4) примет вид

$$K_\gamma[f](\widetilde{\xi}, p) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_{\{\langle z, \widetilde{\xi}\rangle = p\}^+} \widetilde{f}(z) \prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i - 1} d\Gamma\,, \tag{1.1.6}$$

где $z = (\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, x'') = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n},\, x'') \in \mathbb{R}_{N+n}^{+}$, $\mathbf{z}_1 {=} (z_1, z_3, \ldots, z_{2n-1}) {\in} \mathbb{R}_n$, $\mathbf{z}_2 {=} (z_2, z_4, \ldots, z_{2n}) {\in} \mathbb{R}_n^+ {=} \{z_{2i} {>} 0,\; i {=} \overline{1,n}\}$, $\widetilde{f}(z) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ldots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2},\, x''\right) \in \mathbb{R}_{N+n}^{+}$ – функция от вращений, построенная по $f(x) \in \mathbb{R}_N^+$, $\{\langle z, \widetilde{\xi}\rangle = p\}^+$ – гиперплоскость, с единичным вектором нормали $\widetilde{\xi} = (\xi_1, 0, \ldots, \xi_n, 0,\, \xi'')$, p — число, модуль которого есть расстояние от плоскости до начала координат, а элемент поверхности на гиперплоскости $\{\langle z, \widetilde{\xi}\rangle = p\}^+ \in \mathbb{R}_{N+n}^{+}$ определяется равенством

$$d\Gamma = \frac{(-1)^{j-1}}{\widetilde{\xi}_j} dz_1\, dz_2 \, \ldots \, dz_{j-1}\, dz_{j+1} \, \ldots \, dz_{N+n}\,, \;\; j \neq N+n\,, \; \widetilde{\xi}_j \neq 0\,.$$

Ориентация гиперплоскости $\{\langle z, \widetilde{\xi}\rangle = p\}^+$ выбрана так, чтобы она являлась границей полупространства $\{\langle z, \widetilde{\xi}\rangle < p\}^+$.

Следуя Б.М. Левитану, действие смешанного обобщенного сдвига $f(x) \to (T^y f)(x) = (T_{x'}^{y'} f)(x', x'' - y'') = \prod\limits_{i=1}^{n} (T_{x_i}^{y_i} f)(x', x'' - y'')$ на x'-

четную функцию f определяем равенством

$$(T^y f)(x) = C(\gamma) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f(x' \to_\alpha y', x'' - y'') \, sin^{\gamma-1}\alpha' d\alpha' , \qquad (1.2.2)$$

где через

$$x' \to_\alpha y' = \sqrt{x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos\alpha'} \qquad (1.2.3)$$

обозначен n-мерный вектор с координатами, порожденными евклидовыми расстояниями $\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha_i}$, $1 \le i \le n \le N$, а также

$$C(\gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} , \quad sin^{\gamma-1}\alpha' = \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i , \quad d\alpha' = d\alpha_1 \ldots d\alpha_n .$$

Во второй главе изучаются B-потенциалы и их основные свойства. Доказана теорема о дифференцируемости B-потенциала ограниченной функции. Основным результатом второй главы являются теоремы о дифференцировании и B-дифференцировании B-потенциалов Ньютона с гельдеровской плотностью.

Известно, что если обобщенный сдвиг отвечает порядку γ, то B-производная с точностью до константы совпадает с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя, отвечающим тому же параметру γ:

$$\lim_{h\to 0} \frac{T^h f(t) - f(t)}{(h/2)^2} = \mathcal{B}_\gamma f(t) = (\gamma+1)^{-1} B_\gamma = (\gamma+1)^{-1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}\right) . \qquad (2.1.2)$$

Сингулярную производную первого порядка обозначаем

$$B^1_{\gamma_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\gamma_i}{x_i} . \qquad (2.1.3)$$

Ядром B-потенциала Рисса порядка $\lambda \in (0, N + |\gamma|)$ является функция

$$k^{(\lambda)}_{N,\gamma}(|x|) = \left\{ \begin{array}{ll} |x|^{-\lambda} , & \lambda \neq 2k \\ |x|^{-\lambda} \ln\left|\frac{1}{x}\right| , & \lambda = 2k \end{array} \right| \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Определение 2.2.1 *B-потенциал Рисса порядка λ y'-четной по Киприянову функции f определяется выражением*

$$U_B^\lambda[f](x) = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(y)\; T_x^y k_{N,\gamma}^{(\lambda)}(|x|)\; (y')^\gamma dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(y)\; T_{x'}^{y'} k^{(\lambda)} \left(\sqrt{|x'|^2 + |x'' - y''|^2}\; \right)\; (y')^\gamma dy\,. \qquad (2.2.1)$$

Функция f называется плотностью B-потенциала.

При $\lambda{=}N{+}|\gamma|{-}2$ конструкция U_B^λ называется B-потенциалом Ньютона. Для него введем обозначение

$$U_B[f](x) = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(y)\; \left(T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right)\; (y')^\gamma\, dy\,. \qquad (2.2.2)$$

Пусть $\mathbb{B}_\rho^+(N) = \left\{ x:\; x \in \mathbb{R}_N^+,\; |x| < \rho \right\}$ и $\mathcal{X}_\rho(x)$ – характеристическая функция этого шара.

Лемма 2.2.1 *Для всех λ $, 0 < \lambda < N + |\gamma|$ справедлива оценка*

$$U_B^\lambda[\mathcal{X}_R](x) \leq \left\{ \begin{array}{ll} C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda}\,, & \lambda \neq 2k \\ C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda} \ln \frac{1}{R}\,, & \lambda = 2k \end{array} \right| \quad k = 1, 2, \ldots\;. \qquad (2.2.8)$$

Класс локально интегрируемых с весом $(x')^\gamma$ функций в любой ограниченной части Ω_N^+ n-полупространства $\mathbb{R}_N^+$ будем обозначать через $L_{1,loc}^\gamma(\Omega_N^+)$.

Лемма 2.2.2 *Пусть $f(y)$ – y'-четная функция. Если $supp\, f \in \Omega_N^+$, Ω_N^+ — ограниченная область и $f \in L_1^\gamma(\Omega_N^+)$, то $U_B^\lambda[f] \in L_{1,loc}^\gamma(\mathbb{R}_N^+)$.*

Лемма 2.2.3 *Пусть $f(y)$ – y'-четная функция. Если $supp\, f \in \Omega_N^+$, Ω_N^+ — ограниченная область и $f \in L_1^\gamma(\Omega_N^+)$, то при $|x| \to \infty$*

$$\frac{\partial^\beta U_B^\lambda[f](x)}{\partial x_i^\beta} = \left\{ \begin{array}{ll} O\left(|x|^{-\lambda-|\beta|} \right)\,, & \lambda \neq 2k \\ O\left(|x|^{-\lambda-|\beta|} \left| \ln \left(\frac{1}{|x|} \right) \right| \right)\,, & \lambda = 2k \end{array} \right| \quad k = 1, 2, \ldots\;. \qquad (2.2.16)$$

Следующую теорему будем называть теоремой о гладкости B-потенциалов.

Теорема 2.2.1 *Пусть y'-четная функция f ограничена и имеет носитель в конечной области Ω_N^+, $|f(y)|\leq M$ почти везде в Ω_N^+. Тогда $U_B^\lambda[f](x)\in C^p\left(\overline{\mathbb{R}_N^+}\right)$, где p — наибольшее целое число такое, что $\lambda+p<N+|\gamma|$. Соответствующие производные функции $U_B^\lambda[f]$ получаются дифференцированием под знаком интеграла.*

Теорема 2.3.1 *Пусть функция f – y'-четная, функция $|f|$ ограничена в области $\overline{\Omega_N^+}$, тогда B-потенциал Ньютона (2.2.2) и его первые производные всюду равномерно непрерывны, справедлива формула*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}U_B[f](x)=\int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,T^y|x|^{2-N-|\gamma|}(y')^\gamma\,dy\,. \tag{2.2.28}$$

Теорема 2.5.1 *Пусть носитель y'-четной функции f, удовлетворяющей условию Гельдера, принадлежит ограниченной области Ω_N^+. Тогда B-потенциал Ньютона (2.2.2) имеет равномерно непрерывные первые производные, получаемые дифференцированием под знаком интеграла, и непрерывные вторые производные, которые даются формулой:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\,U_B[f](x)=-\,f(x)\int\limits_{\Gamma_N^+}\cos\nu_k\,\left(\frac{\partial}{\partial x_k}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)(y')^\gamma\,d\Gamma_N+$$

$$+\int\limits_{\Omega_N^+}(f(y)-f(x))\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)(y')^\gamma\,dy\,, \tag{2.4.1}$$

где ν_k — угол между направлением внешней нормали и направлением оси Ox_k.

Теорема 2.5.2 *Пусть y'-четная функция f удовлетворяет условию Гельдера, и ее носитель принадлежит ограниченной области*

Ω_N^+. *Тогда* B *-потенциал (2.2.2) имеет равномерно непрерывные первые производные, получаемые дифференцированием под знаком интеграла, и непрерывные* B *-производные, которые даются формулой*

$$(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} U_B[f](x) = -f(x) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \, \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N(y) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x)) \, \left((\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, dy \,,$$

где $\nu_i = \nu(x_i)$ *— угол между направлением внешней нормали и оси* Ox_i, $\mathcal{B}^1_\gamma = \frac{1}{\gamma+1} B^1_\gamma$, B^1_γ *— сингулярный дифференциальный оператор первого порядка (2.1.3).*

Третья глава посвящена задаче обращения B-потенциалов Ньютона с гельдеровской плотностью и обращения некоторых операторов типа "плоская весовая волна" для случая, когда число $N + |\gamma|$ — натуральное.

Функция одного переменного $f(t)$, определенная в $\mathbb{R}_N$ в виде функции от скалярного произведения N-мерных векторов $f(\langle x \,, \xi \rangle)$, называется "плоской волной". Соответственно интегральная операция

$$Au(x) = \int f(\langle x \,, \xi \rangle) \; u(\xi) \; d\mu(\xi)$$

называется операцией типа "плоская волна".

В общем виде функция "плоская весовая волна" задается в виде действия многомерного оператора Пуассона на функцию "плоская волна": $\mathcal{P}^\gamma_{x'} f(\langle x \,, \xi \rangle)$, где оператор Пуассона $\mathcal{P}^\gamma_{x'} f(x', x'')$ отвечает мультииндексу $\gamma{=}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, состоящему из фиксированных положительных чисел.

Теорема 3.1.1 *Пусть* y' *-четная функция* f *удовлетворяет условию Гельдера, ее носитель принадлежит ограниченной области* Ω_N^+. *Тогда* B *-потенциал* $U_B[f]$ *удовлетворяет сингулярному уравнению Пуассона*

$$\Delta_B U_B[f](x) = (2 - N - |\gamma|) |S_1^+(N)|_\gamma f(x) \,, \tag{3.1.1}$$

где $|S_1^+(N)|_\gamma$ – *весовая площадь поверхности части единичной сферы*[1], $\Delta_B = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{\gamma_i} + \sum\limits_{j=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, *а* $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ – *сингулярный дифференциальный оператор Бесселя.*

Имеет место следующая теорема, представляющая собой один из вариантов теоремы о сферическом уплотнении.

Теорема 3.2.1 *Если* $u = u(|\mathbf{x}^1|, \ldots, |\mathbf{x}^n|, x'')$, *где* $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}_{m_i}$, *то*

$$Au(r,x'') = \prod_{i=1}^{n} |S_1(m_i)| \int\limits_{\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}} \mathcal{P}_r^\gamma f\left(\langle (r,\, x''), (\rho, \xi'')\rangle\right) u(\xi)\, \rho^\gamma\, d\rho\, d\xi'' ,$$

где $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i = |\mathbf{x}^i|$, $|S_1(m_i)|$ — *площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}_{m_i}^+$, r *и* $\rho \in \mathbb{R}_n^+$, $\mathcal{P}_r^\gamma$ — *многомерный оператор Пуассона, отвечающий целочисленному мультииндексу* $\gamma = (m_1 - 1, \ldots, m_n - 1)$.

Теорема 3.2.2 *Пусть носитель* ξ' *-четной непрерывной по Гельдеру функции* f *принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ , *число* $N + |\gamma| > 2$ *натуральное нечетное и* $k = 1, 3, 5, \ldots$. *Тогда*

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^\gamma |\langle x\,,\, \xi\rangle|^k\ (x')^\gamma\ dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= 2^{N+|\gamma|-2n+1}\ \pi^{N-n-1} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)\ i^{N+|\gamma|-1}\, k!\, f(\eta) . \qquad (3.2.6)$$

Теорема 3.2.3 *Пусть* f – ξ' *-четная непрерывная по Гельдеру функция, носитель которой принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ , *число* $N + |\gamma| > 2$ *натуральное четное и* $k = 0, 2, 4, \ldots$. *Тогда*

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^\gamma |\langle x, \xi\rangle|^k\ \ln|\langle x, \xi\rangle| (x')^\gamma\, dS(x)\, (\xi')^\gamma\, d\xi =$$

$$= -\pi^{N-n} 2^{N+|\gamma|-2n} i^{N+|\gamma|} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right) k\,!\, f(\eta) . \qquad (3.2.13)$$

[1] Формула для вычисления содержится в [20], с. 20, формула (1.2.5).

Четвертая глава посвящена задаче Радона об обращении интегралов по плоскостям от функций от многоосевой сферической симметрии. Решение этой задачи сводится к обращению преобразования Радона-Киприянова, когда мультииндекс этого преобразования γ является целочисленным. Это связано с тем, что преобразование Радона функций от осевой или многоосевой сферических симметрий есть преобразование Радона-Киприянова с целочисленным мультииндексом γ.

Рассмотрим множество функций $\{g_\xi(s)\}$ одного переменного s, зависящих от параметра ξ ($|\xi| = 1$), который считается фиксированным. Предположим, что $supp\ g_\xi(s)$ принадлежит интервалу $(-R, R)$ и пусть

$$\rho = \rho(s) = \frac{1}{(R^2 - s^2)^{\frac{(n+\gamma-1)\ p}{2q}}}\ , \qquad (4.2.1)$$

где числа $p, q \geq 1$ связаны соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Функция ρ будет использована в качестве сингулярного веса при определении пространств, приспособленных для работы с преобразованием Радона-Киприянова финитных функций, принадлежащих весовым лебеговым классам $L^p_\gamma(\Omega^+_N)$.

Для ρ, определенного по формуле (4.2.1), и каждого фиксированного единичного вектора ξ введем следующее множество функций

$$\mathcal{L}^p([-R; R], \rho) = \left\{ g_\xi(s) : \left(\int\limits_{-R}^{R} |g_\xi(s)|^p\ \rho(s)\ ds \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Теорема 4.2.1 *Пусть мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел, $f \in L^p_\gamma(\Omega^+_N)$ $(1 \leq p < \infty)$, и пусть $supp\, f \in \{|x| < R\}^+_N$=$\{x : |x| < R,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, $R < \infty$. Тогда существует независимая от функции f константа C такая, что*

$$\|K_\gamma[f]\|_{\mathcal{L}^p([-R;+R],\rho)} \leq C\, \|f\|_{L^p_\gamma(\Omega^+_N)}\ ,$$

где сингулярный вес $\rho = \rho(s)$ определен по формуле (4.2.1).

Теорема 4.3.1 *Пусть носитель* ξ' *-четной функции* f *, удовлетворяющей условию Гельдера, принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ *,* $K_\gamma[f]$ *– преобразование Радона-Киприянова функции* f *. Формула обращения этого преобразования для натуральных нечетных чисел* $N+|\gamma|>2$ *имеет вид:*

$$f(\eta)=\frac{2^{2n-|\gamma|-N}\pi^{n+1-N}}{i^{N+|\gamma|-1}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\triangle_B^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}K_\gamma[f](x;\langle x,\eta\rangle)(x')^\gamma dS(x)\,. \tag{4.3.1}$$

Теорема 4.3.2 *Пусть носитель* ξ' *-четной функции* f *принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ *, и функция* f *удовлетворяет условию Гельдера,* $K_\gamma[f]$ *– ее преобразование Радона-Киприянова. Формула обращения этого преобразования для натуральных четных чисел* $N+|\gamma|>2$ *имеет вид:*

$$f(\eta)=-\frac{2^{2n-|\gamma|-N}}{\pi^{N-n}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma dS(x)\,\times$$

$$\times\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}\left(\frac{1}{\langle x,\eta\rangle-p}\right)dK_\gamma[f](x;p)\,. \tag{4.3.3}$$

Теорема 4.4.1 *Пусть* $m_i>1$ *— натуральные числа,* $\xi^i\in\mathbb{R}_{m_i}$ *и* f *измеримая суммируемая функция от многоосевой симметрии в* $\mathbb{R}_{m_i}$ *:* $f=f(|\xi^1|,\ldots,|\xi^n|,\xi'')$ *. Причем, как радиальная*

$$f=f(r,\xi''),\quad r=(r_1,\ldots,r_n),\quad r_i=|\xi^i|$$

она является r *-четной по Киприянову и непрерывна по Гельдеру. Для преобразования Радона этой функции имеют место следующие формулы обращения* *а) при* $N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n$ *— нечетном*

$$f(\eta)=\frac{2^{3n-\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-N}\pi^{n+1-N}}{i^{N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n-1}\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{m_j}{2}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}|S_1(m_j)|}\times$$

$$\times\,\triangle_B^{\frac{N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}R[f](x;\langle x,\eta\rangle)\prod_{j=1}^{n}x_j^{m_j-1}dS(x)\,;$$

b) при $N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n$ *— четном*

$$f(\eta)=-\frac{2^{3n-\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-N}}{\pi^{N-n}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{m_i}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}|S_1(m_i)|}\Delta_B^{\frac{N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n-2}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_{S_1^+(N)}\prod_{i=1}^{n}r_i^{m_i-1}dS(x)\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\mathcal{P}_{\eta_i}^{m_i-1}\left(\frac{1}{\langle x,\eta\rangle-p}\right)dR[f](x;p)\,,$$

где

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{n}B_{m_i-1}+\sum_{j=n+1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\,,\quad B_{m_i-1}=\frac{\partial^2}{\partial r_i^2}+\frac{m_i-1}{r_i}\,\frac{\partial}{\partial r_i}\,,\quad \gamma_i>0\,,$$

$R[f](x;p)=R[f](|\mathbf{x}^1|,|\mathbf{x}^2|,\ldots|\mathbf{x}^n|,x'';\langle x,\eta\rangle)$ *– преобразование Радона функции от многоосевой сферической симметрии,* $|\mathbf{x}^i|=x_i$ *– длина радиуса-вектора точки* $\mathbf{x}^i\in\mathbb{R}_{m_i}$ *,* $x=(r,x'')\in\mathbb{R}_N^+$ *.*

В заключение автор выражает благодарность профессору Л.Н. Ляхову за постановку задачи и помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Глава 1

Преобразование Радона-Киприянова и его основные свойства

1.1 Обозначения, определения и преобразование Радона-Киприянова

1.1.1 Основные обозначения

Пусть натуральные числа N и n фиксированы и $1 \leq n \leq N$. Через $\mathbb{R}_N$ будем обозначать евклидово пространство точек $x{=}(x', x'')$, где $x' \in \mathbb{R}_n$, $x'' \in \mathbb{R}_{N-n}$. В этом пространстве рассмотрим область

$$\mathbb{R}_N^+{=}\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}, \quad \mathbb{R}_n^+{=}\{x' \in \mathbb{R}_n : x_1{>}0, \ldots, x_n{>}0\}.$$

Далее размерность евклидова пространства может меняться, при этом номера положительных переменных каждый раз указываются отдельно (как правило их n), и по смыслу рассматриваемых в работе задач эти переменные оказываются весовыми в соответствующих интегральных выражениях. Так же введем обозначение

$$(x')^{\gamma} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i} \,,$$

где мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел, его длина $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Исследования обобщенных сверток и дифференциальных уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя содержат либо требование четности функций, как в работе Б.М. Левитана [16], либо (если рассматриваемые функции заданы на положительной полуоси) возможность четного продолжения на отрицательную полуось с сохранением класса принадлежности функции, как это в книге И.А. Киприянова [9], с. 21.

Определение 1.1.1 *Функции* $f(x)$ *, определенные в части пространства* $\mathbb{R}_N^+$ *, будем называть* x_i *-четными по Киприянову (или* x_i *-четными), если они допускают четное продолжение с сохранением класса гладкости. Если функция всего лишь непрерывна (в том числе по Гельдеру), она будет называться* x_i *-четной по Киприянову, когда в некоторой положительной полуокрестности каждой координатной гиперплоскости* $x_i = 0$ *она имеет первую непрерывную производную и выполняется условие*

$$\forall i = \{1, n\} \,, \quad \lim_{x_i \to 0} f'_{x_i} = 0 \,. \tag{1.1.1}$$

Например, функция $f(x) \in C^{\,\ell}(\mathbb{R}_N^+)$ будет x_i -четной по Киприянову, если $\left.\frac{\partial^{2m-1} f}{\partial x_i^{2m-1}}\right|_{x_i=0} = 0$ для всех натуральных чисел $m \leq \left[\frac{\ell}{2}\right]$ (см. [9], с. 21).

Определение 1.1.2 *Функцию* x_i *-четную по каждой координате вектора* $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ *будем называть* x' *-четной по Киприянову (чаще просто —* x' *-четной функцией).*

Все рассматриваемые далее функции предполагаются x'-четными в соответствующем классе. Носители таких функций $supp\, f = \Omega_N^+$ рассматриваются в области $\mathbb{R}_N^+$ евклидова пространства $\mathbb{R}_N$ с положительными весовыми переменными. Наибольший интерес представляют области, которые примыкают к координатным гиперплоскостям $x_i = 0,\ i = 1, \dots, n$. Части границ таких областей, принадлежащие $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$, будем обозначать Γ_N^0. Другую часть границы, принадлежащую $\mathbb{R}_N^+$, будем обозначать Γ_N^+. Теперь отметим, что граница Γ_N^0 — скорее граница симметрии, а не граница области. Поэтому всюду под областью задания x'-четной функции нам удобно понимать частично замкнутое множество, включающее в себя границу симметрии функции, т. е. $\Omega_N^+ \cup \Gamma_N^0$. Это множество будем обозначать тем же символом Ω_N^+. Подобласть ω_N^+ области Ω_N^+ будем называть s-внутренней (симметрично внутренней), если

$$\omega_N^+ = \{\omega_N^+ \cup \Gamma_N'^0\} \subset \{\Omega_N^+ \cup \Gamma_N^0\} = \Omega_N^+ . \tag{1.1.2}$$

где $\Gamma_N'^0$ граница области ω_N^+, принадлежащая координатным гиперплоскостям $\{\, x_i = 0,\ \ i = \overline{1, n}\,\}$.

Когда область трансформируется с изменением размерности евклидова пространства (процедура вращения), мы используем обозначение области и ее границы с нижним индексом, указывающим размерность соответствующего евклидова пространства. Например, Ω_{N+n}^+ — область, а Γ_{N+n}^+ — ее граница, принадлежащие соответствующей части $\mathbb{R}_{N+n}^+$ евклидова пространства $\mathbb{R}_{N+n}$ размерности $N+n$.

Через $L_p^\gamma(\Omega_N^+)$ $\quad (p \geq 1,\ \Omega_N^+ \subseteq \mathbb{R}_N^+)$ будем обозначать множество измеримых и x'-четных функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega_N^+)} = \left(\int\limits_{\Omega_N^+} |f(x)|^p \, (x')^\gamma \; dx \right)^{1/p} .$$

Известно [9], что это банахово пространство. Еще отметим, что четность по Киприянову в пространствах интегрируемых функций означает, что эта функция имеет непрерывную производную в положительной полуокрестности границы Γ_N^0, причем выполняется условие (1.1.1).

1.1.2 Преобразование Радона и Радона-Киприянова

Описание преобразования Радона и общие формулы обращения можно найти в книге Ф. Йона [8], но теоретические исследования преобразования Радона содержатся и во многих монографиях, например, в [3] и [30]. В работе И.А. Киприянова и Л.Н. Ляхова [13] было дано определение "специального" преобразования Радона, которое в дальнейшем получило название *преобразование Радона-Киприянова*. Впервые обращение интегралов по прямым в $\mathbb{R}_2$ было осуществлено в [33].

Пусть $\delta(P)$ — δ-функция, сосредоточенная на $(n-1)$-мерной поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_n$. Преобразованием Радона функции f называется выражение

$$R[f](\xi, p) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \delta(p - \langle x\,,\,\xi\rangle)\ f(x)\ d\Gamma = \int\limits_{\langle x\,,\,\xi\rangle = p} f(x)\ d\Gamma\,, \qquad (1.1.3)$$

где элемент поверхности на гиперплоскости $\langle x,\,\xi\rangle = p$ определяется равенством

$$d\Gamma = \frac{(-1)^{j-1}}{\xi_j}\, dx_1\ \ldots\ dx_{j-1}\, dx_{j+1}\ \ldots\ dx_n\,,\ \ \xi_j \neq 0\,,$$

а ориентация гиперплоскости $\langle x,\,\xi\rangle = p$ выбрана так, чтобы она являлась границей полупространства $\langle x,\,\xi\rangle < p$.

Преобразованием Радона-Киприянова функции f, следуя [19], будем называть следующую конструкцию

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x)\, \mathcal{P}_{x'}^{\gamma}\, \delta(p - \langle x, \xi\rangle)\, (x')^\gamma\, dx\,, \qquad (1.1.4)$$

где символ $\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}$ обозначает действие многомерного оператора Пуассона по совокупности переменных $x'=(x_1,\dots,x_n)$ по следующей формуле:

$$\mathcal{P}^{\gamma}_{x'}g(x',x'')=\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\dots\int\limits_0^{\pi}g(x_1\cos\alpha_1,\dots,x_n\cos\alpha_n\,,x'')\,\prod_{i=1}^{n}\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\;d\alpha_1\,\dots\,d\alpha_n\,, \tag{1.1.5}$$

а остальные обозначения те же, что и в (1.1.3).

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^+_{N+n}$, которое получается вращениями $x_i\to\sqrt{z^2_{2i-1}+z^2_{2i}}$ исходного пространства $\mathbb{R}^+_N$ на угол π. Положим

$$\left.\begin{array}{l} z=(\mathbf{z_1},\mathbf{z_2},x'')=(z_1,z_2,\dots,z_{2n-1},z_{2n},\,x'')\in\mathbb{R}^+_{N+n}\,,\\ \mathbf{z}_1=(z_1,z_3,\,\dots\,,z_{2n-1})\in\mathbb{R}_n,\\ \mathbf{z}_2=(z_2,z_4,\dots,z_{2n})\in\mathbb{R}^+_n=\{z_{2i}>0,\ i=\overline{1,n}\}\,. \end{array}\right|$$

По функции $f(x)\in\mathbb{R}^+_N$ построим функцию от вращений

$$\widetilde{f}(z)=f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2},\dots,\sqrt{z^2_{2n-1}+z^2_{2n}},\ x''\right)\in\mathbb{R}^+_{N+n}\,.$$

В $\mathbb{R}^+_{N+n}$ рассмотрим гиперплоскость $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+$, с единичным вектором нормали $\widetilde{\xi}=(\xi_1,0,\,\dots\,,\xi_n,0,\,\xi'')$, p — число, модуль которого есть расстояние от плоскости до начала координат. В этих обозначениях преобразование K_γ (1.1.4) примет вид (см. [19])

$$K_\gamma[f](\widetilde{\xi},p)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_{\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+}\widetilde{f}(z)\prod_{i=1}^{n}z_{2i}^{\gamma_i-1}d\Gamma\,, \tag{1.1.6}$$

где элемент поверхности на гиперплоскости $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+\in\mathbb{R}^+_{N+n}$ определяется равенством

$$d\Gamma=\frac{(-1)^{j-1}}{\widetilde{\xi}_j}\,dz_1\,dz_2\,\dots\,dz_{j-1}\,dz_{j+1}\,\dots\,dz_{N+n}\,,\ \ j\neq N+n\,,\ \widetilde{\xi}_j\neq0\,,$$

а ориентация гиперплоскости $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+$ выбрана так, чтобы она являлась границей полупространства $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle<p\}^+$.

Важно отметить, что равенством (1.1.6) преобразование $K_\gamma[f]$ сведено к преобразованию Радона в $\mathbb{R}^+_{N+n}$ функции $\widetilde{f}(z)$, построенному по гиперплоскостям $\{\langle z, \widetilde{\xi}\rangle = p\}^+$, параллельным координатным осям $Oz_{2i},\ i=\overline{1,n}$, которые, как видим, являются весовыми.

Принципиальное отличие преобразования Радона-Киприянова K_γ от классического преобразования Радона заключается в том, что оно имеет смысл даже если $n = N = 1$, поскольку вращением $x \to \sqrt{z_1^2+z_2^2}$ преобразование K_γ функции одного переменного сводится к специальному *весовому преобразованию Радона* функции заданной в $\mathbb{R}^+_2$ (см. [13]).

1.2 Обобщенные сдвиги и обобщенные свертки

Пусть $f(t)$ локально интегрируемая на $\mathbb{R}_1$ функция. Выражение

$$(T^\tau f)(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{t^2+\tau^2-2t\tau\cos\alpha}\right) sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha \quad (1.2.1)$$

называется обобщенным сдвигом функции f, число $\gamma > 0$ называется порядком обобщенного сдвига. Свойства изучены в работе [16], некоторые из свойств приведены в [24]. Такие сдвиги возникают в задачах со сферической симметрией. Например, если

$$f = f(|x|),\ \ g = g(|x|),\ \ |x| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\,,$$

то свертка этих функций, подправленная соответствующим поворотом координатных осей с последующим сферическим преобразованием координат, представляется в виде

$$(f\,*\,g) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(|x-y|)\,g(|y|)\,dy =$$

$$= |S_1(n)| \int\limits_0^{\infty} c(n) \int\limits_0^{\pi} f\left(\sqrt{t^2+\tau^2-2t\tau\cos\alpha}\right) \sin^{n-1}\alpha\, d\alpha\; g(\tau)\, \tau^{n-1}\, d\tau\,,$$

где $|S_1(n)|$ — площадь поверхности единичной сферы в евклидовом пространстве точек $x \in \mathbb{R}_n$, $t = |x|$, $\tau = |y|$, $c(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$. Как видим, оператор справа включает в себя обобщенный сдвиг, отвечающий натуральному индексу $\gamma = n-1$. Полученное выражение носит название «обобщенная свертка функций» (впервые для произвольных положительных γ изучалась в работах [11], [12]).

Действие смешанного обобщенного сдвига

$$f(x) \to (T^y f)(x) = (T_{x'}^{y'} f)(x', x''-y'') = \prod_{i=1}^{n} (T_{x_i}^{y_i} f)(x', x''-y'')\,,$$

т. е. сдвига смешанной природы (по части переменных действует обобщенный сдвиг, а по остальным – обычный) на x' -четную функцию f определяется равенством (см. [16])

$$(T^y f)(x) = C(\gamma) \int\limits_0^{\pi} \ldots \int\limits_0^{\pi} f(x' \to_\alpha y', x''-y'')\, sin^{\gamma-1}\alpha' d\alpha'\,, \qquad (1.2.2)$$

где через

$$x' \to_\alpha y' = \sqrt{x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\alpha'} \qquad (1.2.3)$$

обозначен n -мерный вектор с координатами, порожденными евклидовыми расстояниями $\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i}$, $1 \le i \le n \le N$, а также

$$C(\gamma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\,, \quad sin^{\gamma-1}\alpha' = \prod_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,, \quad d\alpha' = d\alpha_1 \ldots d\alpha_n\,.$$

Свертки

$$(f * g)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^y f)(x)\; g(y)\; (y')^\gamma\, dy\,,$$

порожденные смешанным обобщенным сдвигом T^y (1.2.1), будем называть *обобщенными свертками* (здесь мы следуем [7], [9], [11], [20]).

Свойства **обобщенного сдвига** $f(x) \to (T_{x'}^{y'} f)(x)$, действующего на x'-четную функцию $f(x)$ по формуле (1.2.1), известны (см. [9], [16]). Приводим некоторые из них.

Симметричность:

$$T_{x'}^{y'} f(x) = T_{y'}^{x'} f(y)\,.$$

Самосопряженность: если x'-четная функция $f(x)$ непрерывная, $g(x)$ – x'-четная, непрерывная и ограниченная, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T_{x'}^{y'} f\right)(x)\, g(x)(x')^\gamma\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x) \left(T_{x'}^{y'} g\right)(x)\, (x')^\gamma\, dx\,.$$

Линейность:

$$T_{x'}^{y'}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha T_{x'}^{y'} f(x) + \beta T_{x'}^{y'} g(x)\,.$$

Обобщенный сдвиг не меняет гладкости функции (если f непрерывная функция, то и $T_{x'}^{y'} f$ — непрерывна).

Ограниченность обобщенного сдвига (см. [10]) в $L_p^\gamma(\mathbb{R}_N)$ (неравенство Киприянова-Ключанцева):

$$\|T_{x'}^{y'} f\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} \le \|f\|_{L_p^\gamma(R_N^+)}\,.$$

Оператор обобщенного сдвига перестановочен с оператором Бесселя:

$$B_{x_i} T_{x_i}^{y_i} f(x) = T_{x_i}^{y_i} B_{x_i} f(x)\,. \tag{1.2.4}$$

1.3 Основные свойства преобразования Радона-Киприянова

Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая, x'-четная, быстро убывающая вместе со всеми своими производными функция. В этом случае для преобразования $K_\gamma[f](\xi,p)$ функции f справедливы следующие свойства, известные по монографии [20] и работе [13].

1. Свойство однородности

$$K_\gamma[f](\alpha\xi,\alpha p)=|\alpha|^{-1}K_\gamma[f](\xi,p)\,.$$

2. Функция $K_\gamma[f](\xi,p)$ бесконечно дифференцируема по ξ и по p при $\xi\neq 0$.

3. При $|p|\to\infty$ для любого $k>0$ справедлива оценка

$$|K_\gamma[f](\xi,p)|=O\left(|p|^{-k}\right)$$

равномерно по ξ , когда ξ пробегает ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi=0$.

4. Для преобразования Радона-Киприянова обобщенного сдвига имеет место следующая формула (см. [19]):

$$K_\gamma[(T^{-y}f)(x)](\xi;p)=\mathcal{P}^\gamma_{y'}K_\gamma[f](\xi,p+\langle y,\xi\rangle)\,. \qquad (1.3.1)$$

Глава 2

B-потенциалы Ньютона гельдеровских функций

2.1 Предварительные сведения

Классические потенциалы (часто называемые "потенциалы Рисса") представляют собой операторы свертки плотности f с ядром $|x|^{-\lambda}$. Если предположить, что плотность является функцией с осевой симметрией $f = f(|x'|, x'')$, $x' \in \mathbb{R}_m$, справедливо следующее выражение[1]

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \frac{f(|y'|, y'')}{|x-y|^{\lambda}}\, dy = |S_1(m)| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-m}} \int\limits_0^{\infty} f(\rho, y'')\; T_{\rho}^{\,r} \left(\frac{1}{|(\rho,\, x''-y'')|^{\lambda}} \right) \rho^{\gamma}\, d\rho\, dy''.$$

Здесь $\gamma = m-1$ и обобщенный сдвиг (1.2.1), действующий по радиальной переменной, отвечает этому же индексу (порядку) $\gamma = m-1$. Потенциалы такого рода А. Вайнштейн называл «осесимметрическими» (см. [31]). В дальнейшем потенциалы, порожденные обобщенным сдви-

[1] Упрощенный вариант этой формулы ($m = n = 3$) изучался А. Вайнштейном [31]. На эту формулу можно смотреть как на следствие из первой теоремы о сферическом уплотнении из работы [24].

гом, отвечающим произвольному положительному индексу γ, стали называться B-потенциалами (см. [20], гл. 4). Теория B-потенциалов Рисса, отвечающая бесконечно дифференцируемой плотности, изложена в книге [20], гл. 3 - 6. Здесь мы изучаем B-потенциалы Рисса с непрерывной плотностью, удовлетворяющей условию Гельдера. Это привело к необходимости исследовать дополнительные свойства B-потенциала, не рассмотренные в [20], и которым посвящены последующие разделы этой главы.

B-потенциалом функции f называется (см. [20], с. 90)

$$U_B^\lambda[f](x) = \int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\, T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^\lambda} \right) (y')^\gamma dy \,.$$

Здесь функция f — плотность B-потенциала, $supp\, f = \Omega_N^+ \subseteq \mathbb{R}_N^+$, число λ — порядок B-потенциала. Переменные x' и y', как уже сказано ранее, называются весовыми переменными.

B-потенциал порядка $\lambda = N + |\gamma| - 2$ называется B-потенциалом Ньютона.

Классические потенциалы Ньютона отвечают параметру $\lambda{=}n{-}2$ и обладают замечательными (и специфическими) свойствами, которые изучаются отдельно. То же надо сказать и о B-потенциалах Ньютона, которые представляют собой обобщенную свертку с ядром $|x|^{2-N-|\gamma|}$, где мультииндекс γ состоит из фиксированных положительных чисел.

В этой главе доказана теорема о гладкости B-потенциалов, получены формулы для производных первого, второго порядков и B-производной B-потенциала. Последняя определяется как

$$\lim_{h\to 0} \frac{T^h f(t) - f(t)}{(h/2)^2} = \mathcal{B}_\gamma f(t)\,. \tag{2.1.1}$$

Здесь, если обобщенный сдвиг отвечает порядку γ, то B-производная с точностью до константы совпадает с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя, отвечающим тому же параметру γ; более точно:

$$\lim_{h\to 0}\frac{T^h f(t)-f(t)}{(h/2)^2}=\mathcal{B}_\gamma f(t)=(\gamma+1)^{-1}B_\gamma=(\gamma+1)^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\gamma}{t}\,\frac{d}{dt}\right) \tag{2.1.2}$$

(в работе [16] равенство (2.1.2) — формула Тейлора-Дельзарта с одним членом).

Замечание 2.1.1 *Отметим, что B -производная в точке $t=0$ четной дважды дифференцируемой функции совпадает со второй производной в этой точке:*

$$\mathcal{B}_\gamma f(t)|_{t=0}=\frac{1}{\gamma+1}B_\gamma f(t)\bigg|_{t=0}=\frac{1}{\gamma+1}\left(f''(0)+\gamma\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)-f'(0)}{t}\right)=f''(0)\,.$$

Для B -дифференцирования B -потенциала оказалось необходимым выделить из оператора Бесселя сингулярную производную первого порядка, которую обозначим

$$B^1_{\gamma_i}=\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\gamma_i}{x_i}\,, \tag{2.1.3}$$

так что

$$B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}=\left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}\,x_i^{\gamma_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}=B^1_{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\,. \tag{2.1.4}$$

Соответственно сингулярная составляющая B -производной имеет вид

$$\mathcal{B}^1_{\gamma_i}=\frac{1}{\gamma_i+1}\,B^1_{\gamma_i}$$

и

$$(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}=\mathcal{B}^1_{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{1}{\gamma_i+1}\,B^1_{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\ . \tag{2.1.5}$$

Отметим также, что рассматриваемые в этой работе B -потенциалы Ньютона $U_B[f]$ с гельдеровской плотностью f удовлетворяют сингулярному уравнению Пуассона

$$\Delta_B U_B[f]=C\,f\,,$$

где

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{n}B_{\gamma_i}+\sum_{j=n+1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\,, \tag{2.1.6}$$

а B_{γ_i} определяется по формуле (2.1.4). Это доказывается в данной главе.

2.2 Определение и свойства B-потенциала

Далее положительные составляющие мультииндекса γ считаем фиксированными[2].

Ядром B-потенциала Рисса порядка $\lambda\in(0,N+|\gamma|)$ является функция (см. [20], с. 95)

$$k_{N,\gamma}^{(\lambda)}(|x|)=\left\{\begin{array}{ll}|x|^{-\lambda}\,, & \lambda\neq 2k\\ |x|^{-\lambda}\,\ln\left|\frac{1}{x}\right|\,, & \lambda=2k\end{array}\right. \quad\Bigg|\quad k=1,2,\ \ldots\ .$$

Определение 2.2.1 *B-потенциал Рисса порядка λ y'-четной по Киприянову функции f определяется выражением*

$$U_B^{\lambda}[f](x)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}f(y)\;T_x^y k_{N,\gamma}^{(\lambda)}(|x|)\,(y')^{\gamma}dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}f(y)\;T_{x'}^{y'}k_{N,\gamma}^{(\lambda)}\left(\sqrt{|x'|^2+|x''-y''|^2}\;\right)\;(y')^{\gamma}dy\,. \tag{2.2.1}$$

Функция f называется плотностью B-потенциала.

При $\lambda{=}N{+}|\gamma|{-}2$ конструкция U_B^{λ} называется B-потенциалом Ньютона. Для него введем обозначение

$$U_B[f](x)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}f(y)\;\left(T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\;(y')^{\gamma}\,dy\,. \tag{2.2.2}$$

[2]Во всех полученных формулах индексы $\gamma_i>0$ ведут себя также, как размерности евклидовых пространств, хотя не обязаны быть целыми. Размерности же участвующих в наших рассуждениях евклидовых пространств (натуральные числа N и n) мы уже ранее объявили фиксированными.

Отметим, что при λ — четном B-потенциал Рисса называется *логарифмическим B-потенциалом.*

Будем использовать и другое выражение для B-потенциала, которое получим следующим образом. Воспользовавшись определением обобщенного сдвига (1.2.2) и обозначением (1.2.3), запишем (2.2.1) при $\lambda \neq 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ в виде

$$U_B[f](x) = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(y) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \big(|(x')^2 + (y')^2 - 2x'y' \cos\alpha'| +$$

$$+ |x'' - y''|^2\big)^{\frac{\lambda}{2}} \sin^\gamma \alpha' \, d\alpha' (y')^\gamma \, dy' dy'' =$$

$$= C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(y) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \big((x' - y' \sin\alpha')^2 + (y' \cos\alpha)^2 + |x'' - y''|^2\big)^{\frac{\lambda}{2}} \times$$

$$\times \sin^\gamma \alpha' \, d\alpha' (y')^\gamma \, dy' dy'',$$

где $C(\gamma)$ — константа, нормирующая обобщенный сдвиг. Полагая каждую пару (y_i, α_i) полярными координатами точки (z_{2i-1}, z_{2i}), произведем совокупность антиполярных преобразований по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2i-1} = y_i \cos\alpha_i \\ z_{2i} = y_i \sin\alpha_i \end{array} \right., \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \leq \alpha_i \leq \pi, \quad \left\{ \begin{array}{l} -\infty < z_{2i-1} < \infty \\ 0 \leq z_{2i} < \infty \end{array} \right., \tag{2.2.3}$$

$$y_i^{\gamma_i} \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_i dy_i = z_{2i}^{\gamma_i - 1} \, dz_{2i-1} dz_{2i},$$

которые задают отображение (набор вращений на угол π — полувращений) $f(y', y'') \to \widetilde{f}(\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, y'') = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ldots, \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, y''\right)$, переводящее функцию, определенную в $\mathbb{R}_N^+$, в функцию, определенную в $\mathbb{R}_{N+n}^+$.

В результате приходим к следующему выражению B-потенциала

$$U_B^\lambda[f](x) = C(\gamma) \int\limits_{\Omega_{N+n}^+} \widetilde{f}(\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, y'') \, |z - \widetilde{x}|^{-\lambda} \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1} \, dz, \tag{2.2.4}$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{array}{l}\Omega^+_{N+n}\in\mathbb{R}^+_{N+n}=\Big\{z:\ z_{2i}>0,\ i=\overline{(1,n)}\ \Big\}\,,\\ \widetilde{x}=(x_1,0,x_2,0,\ldots,x_n,0,\,x'')\in\overline{\mathbb{R}^+_{N+n}}\,,\\ z=(\mathbf{z_1},\mathbf{z_2},y'')=(z_1,z_2,\ldots,z_{2n-1},z_{2n},\,y'')\in\mathbb{R}^+_{N+n}\,,\\ \mathbf{z}_1{=}(z_1,z_3,\,\ldots\,,z_{2n-1})\in\mathbb{R}_n,\\ \mathbf{z}_2{=}(z_2,z_4,\ldots,z_{2n})\in\mathbb{R}^+_n{=}\{z_{2i}>0,\ i{=}\overline{1,n}\}\,.\end{array}\right| \tag{2.2.5}$$

Для логарифмического B-потенциала теми же действиями получаем выражение

$$U^\lambda_B[f](x)=C(\gamma)\int\limits_{\Omega^+_{N+n}}\widetilde{f}(\mathbf{z_1},\mathbf{z_2},y'')\ |z-\widetilde{x}|^{-\lambda}\,\ln\frac{1}{|z-\widetilde{x}|}\prod_{i=1}^{n}z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\,. \tag{2.2.6}$$

Выражения (2.2.4) и (2.2.6) будем называть *B-потенциалами от полувращений* (в евклидовом пространстве, полученном вращениями исходного пространства на угол π вокруг каждой гипероси $x_i=0,\ i=1,\,\ldots\,,n$).

Известно [20], [23], что при $N+|\gamma|\neq 2$ фундаментальным решением оператора Δ_B (определяется по формуле (2.1.6)) является функция

$$\mathcal{E}_{N,\gamma}(x)=\frac{|x|^{2-N-|\gamma|}}{(N+|\gamma|-2)|S^+_1(N)|_\gamma}\,,$$

где $|S^+_1(N)|_\gamma$ – площадь поверхности части сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^+_N$. Таким образом, $(\Delta_B\mathcal{E}_{N,\gamma}\,,\,\varphi)_\gamma=\varphi(0)$ или, что тоже самое, $\Delta_B\,\mathcal{E}_{N,\gamma}(x)=\delta_\gamma(x)$, где $\delta_\gamma(x)$ — δ-функционал Дирака-Киприянова, действующий на непрерывную в окрестности начала координат функцию φ, x'-четную (по Киприянову), по правилу

$$(\delta_\gamma\,,\,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}\delta_\gamma(x)\ \varphi(x)\,(x')^\gamma\,dx=\varphi(0)\,.$$

Фундаментальное решение оператора Δ_B с особенностью в произвольной точке $x\in\overline{\mathbb{R}^+_N}$, определяется посредством действия смешанного обобщенного сдвига:

$$\mathcal{E}_{N,\gamma}(x,y) = T^y \mathcal{E}_{N,\gamma}(x) = \frac{T^y |x|^{2-N-|\gamma|}}{(N+|\gamma|-2)|S_1^+(N)|_\gamma} =$$

$$= \frac{1}{(N+|\gamma|-2)|S_1^+(N)|_\gamma} \ T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x''-y''|^2)^{\lambda/2}} \right), \ \lambda = N+|\gamma|-2\,.$$

В частности, функция $\mathcal{E}_{N,\gamma}(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_B\, \mathcal{E}_{N,\gamma}(x,y) = 0, \quad x,\, y \in \overline{\mathbb{R}_N^+}, \quad x \neq y\,. \tag{2.2.7}$$

2.2.1 Ограниченность B-потенциалов в $L_1^\gamma(\Omega_N^+)$

Пусть $\mathbb{B}_\rho^+(N) = \big\{x:\ x \in \mathbb{R}_N^+,\ |x| < \rho\,\big\}$. Через $\mathcal{X}_\rho(x)$ будем обозначать характеристическую функцию этого шара.

Лемма 2.2.1 *Для всех* λ , $0 < \lambda < N + |\gamma|$ *справедлива оценка*

$$U_B^\lambda[\mathcal{X}_R](x) \leq \left\{ \begin{array}{ll} C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda}, & \lambda \neq 2k \\ C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda} \ln \frac{1}{R}\,, & \lambda = 2k \end{array} \right| \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.2.8}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 2k$, $k = 1, 2, \ldots$. Левую часть неравенства (2.2.8), воспользовавшись полувращениями и обозначениями (2.2.5), представим следующим образом

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) (y')^\gamma dy = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N+n)} \frac{\prod\limits_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1} dz}{|\widetilde{x} - z|^\lambda}. \tag{2.2.9}$$

Рассмотрим два случая: $|\widetilde{x}| = |x| \geq 2R$ и $|x| < 2R$.

Если $|x| \geq 2R$, то учитывая, что переменная $y \in \mathbb{B}_R(N+n)$, т. е. $|y| < R$ и что $|z| = |y|$ (т. к. $y_i = |(z_{2i-1}, z_{2i})|$), имеем неравенство

$$\{|x| = |\widetilde{x}| \Rightarrow |\widetilde{x}| \geq 2R\,, \quad |z| = |y| \leq R\} \quad \Longrightarrow \quad |\widetilde{x} - z| \geq |\widetilde{x}| - |z| \geq R\,.$$

В этом случае из (2.2.9) получаем

$$C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}^+_R(N+n)}\frac{\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}dz}{|\widetilde{x}-z|^\lambda}\le C(\gamma)\frac{1}{R^\lambda}\int\limits_{\mathbb{B}^+_R(N+n)}\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}dz\,.$$

Воспользовавшись сферическими координатами $z=r\Theta,\ |\Theta|=1$, имеем

$$C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}^+_R(N+n)}\frac{\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}dz}{|\widetilde{x}-z|^\lambda}\le\frac{C(\gamma)}{R^\lambda}\int\limits_0^R r^{N+n-1}\ r^{|\gamma|-n}dr\ \times$$

$$\times\int\limits_{S_1^+(N+n)}\prod_{i=1}^n\Theta_{2i}^{\gamma_i-1}dS=C(\gamma)\,\frac{R^{N+|\gamma|-\lambda}}{N+|\gamma|}\int\limits_{S_1^+(N+n)}\prod_{i=1}^n\Theta_{2i}^{\gamma_i-1}dS\,,$$

где $S_1^+(N+n)=\{\Theta\,:\ |\Theta|=1,\ \Theta_2>0,\dots,\Theta_{2n}>0,\ n\le N\}$ — часть сферической поверхности, принадлежащей $\mathbb{R}^+_{N+n}$. Из формулы площади нагруженной сферы (см. [20], с. 20, формула (1.2.5))

$$|S_1^+(N)|_\gamma=\int\limits_{S_1^+(N)}\prod_{i=1}^n\Theta_{2i}^{\gamma_i}dS=\frac{\pi^{\frac{N-n}{2}}}{2^{n-1}}\ \frac{\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}\tag{2.2.10}$$

вытекает

$$C(\gamma)\ \left|S_1^+(N+n)\right|_{\gamma-1}=C(\gamma)\int\limits_{S_1^+(N+n)}\prod_{i=1}^n\Theta_{2i}^{\gamma_i-1}dS=$$

$$=\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_{S_1^+(N+n)}\prod_{i=1}^n\Theta_{2i}^{\gamma_i-1}dS=|S_1^+(N)|_\gamma\,.$$

Или[3]

$$\frac{|S_1^+(N+n)|_{\gamma-1}}{|S_1^+(N)|_\gamma}=C^{-1}(\gamma)=\prod_{i=1}^n\frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,,\tag{2.2.11}$$

[3]Полученная формула весьма примечательна, поскольку дает возможность сравнить площади единичных сфер при расширении евклидова пространства вращениями $x_i\to\sqrt{z_{2i-1}^2+z_{2i}^2}$. Интересно, что поверхности таких сфер оказались связаны между собой константой, нормирующей обобщенный сдвиг.

где мультииндекс $\gamma-1=(\gamma_1-1,\gamma_2-1,\ldots,\gamma_n-1)$. Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'}\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)(y')^\gamma dy \leq \frac{|S_1^+(N)|_\gamma}{N+|\gamma|}\; R^{N+|\gamma|-\lambda} =$$

$$= C_{N,n,\gamma}\, R^{N+|\gamma|-\lambda}\,.$$

Пусть теперь $|x|<2R$. В этом случае

$$\{|x|=|\widetilde{x}|\Rightarrow|\widetilde{x}|<2R,\ |z|=|y|<R\}\ \Rightarrow\ |\widetilde{x}-z|\leq|\widetilde{x}|+|z|<2R+R=3R\,.$$

В правой части равенства (2.2.9) сделаем замену переменной:

$$\widetilde{x}-z=\eta:\quad x_i-z_{2i-1}=\eta_{2i-1},\ z_{2i}=\eta_{2i},\ 1\leq i\leq n,\ x_j-y_j=\eta_j,\ n+1\leq j\leq N\,.$$

В результате получим

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'}\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)(y')^\gamma dy = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N+n)}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}dz}{|\tilde{x}-z|^\lambda} =$$

$$= C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N+n)}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\eta_{2i}^{\gamma_i-1}d\eta}{|\eta|^\lambda} \leq C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}_{3R}^+(N+n)}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\eta_{2i}^{\gamma_i-1}d\eta}{|\eta|^\lambda}\;.$$

Сферическое преобразование координат $\eta=r\Theta,\ |\Theta|=1$, $d\eta=$ $=r^{N+n-1}dr\,dS$ дает

$$C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}_{3R}^+(N+n)}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\eta_{2i}^{\gamma_i-1}d\eta}{|\eta|^\lambda}=C(\gamma)\int\limits_0^{3R}\int\limits_{S_1^+(N+n)}\prod_{i=1}^{n}(r\Theta_{2i})^{\gamma_i-1}\; r^{N+n-1}dS\,dr=$$

$$= C(\gamma)\int\limits_0^{3R}\frac{r^{N+n-1}\; r^{|\gamma|-n}}{r^\lambda}dr\int\limits_{S_1^+(N+n)}\prod_{i=1}^{n}\Theta_{2i}^{\gamma_i-1}dS\,.$$

Отсюда, воспользовавшись равенством (2.2.11), получим

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'}\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)(y')^\gamma dy \le \frac{(3R)^{N+|\gamma|-\lambda}\,|S_1^+(N)|_\gamma}{N+|\gamma|-\lambda} =$$

$$= C'_{N,n,\lambda}\,R^{N+|\gamma|-\lambda}\,.$$

Таким образом, для случая $\lambda \ne 2k$, $k=1,2,\ldots$ и всех $x \in \overline{\mathbb{R}_N^+}$ неравенство (2.2.8) доказано.

Переходим к случаю $\lambda = 2k$ $k=1,2,\ldots$. Левую часть неравенства (2.2.8) запишем в виде

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'}\left(\frac{\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)(y')^\gamma dy =$$

$$= C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N+n)} \frac{\ln\left(|\tilde{x}-z|^{-1}\right)\prod\limits_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}dz}{|\tilde{x}-z|^\lambda}. \qquad (2.2.12)$$

В случае $|\widetilde{x}| \ge 2R$ имеем $\ln\left(\frac{1}{|\widetilde{x}-z|}\right) \le \ln\frac{1}{R}$ и тогда

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'}\left(\frac{\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)(y')^\gamma dy \le$$

$$\le \frac{|S_1^+(N)|_\gamma}{N+|\gamma|}\,R^{N+|\gamma|-\lambda}\ln\frac{1}{R} = C_{N,n,\gamma}\,R^{N+|\gamma|-\lambda}\ln\frac{1}{R}\,.$$

Пусть теперь $|x| < 2R$. В этом случае $|\widetilde{x}-z| \le 3R$.

После замены переменной $\widetilde{x}-z=\eta$ правая часть равенства (2.2.12) запишется в виде

$$C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N+n)} \frac{\ln\frac{1}{|\eta|}\prod\limits_{i=1}^{n}\eta_{2i}^{\gamma_i-1}d\eta}{|\eta|^\lambda} \le C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{B}_{3R}^+(N+n)} \frac{\ln\frac{1}{|\eta|}\prod\limits_{i=1}^{n}\eta_{2i}^{\gamma_i-1}d\eta}{|\eta|^\lambda}\,.$$

Совершив сферическое преобразование координат $\eta = r\Theta$, $|\Theta| = 1$, $d\eta = r^{N+n-1} dr\, dS$, получим

$$C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{B}^+_{3R}(N+n)} \frac{\ln \frac{1}{|\eta|} \prod\limits_{i=1}^{n} \eta_{2i}^{\gamma_i - 1} d\eta}{|\eta|^\lambda} =$$

$$= C(\gamma) \int\limits_0^{3R} \frac{r^{N+n-1}\ r^{|\gamma|-n}}{r^\lambda} \ln \frac{1}{r}\, dr \int\limits_{S^+_1(N+n)} \prod_{i=1}^{n} \Theta_{2i}^{\gamma_i - 1} dS =$$

$$= |S_1(N)|_\gamma \int\limits_0^{3R} r^{N+|\gamma|-\lambda-1} \ln \frac{1}{r}\, dr\,.$$

В последнем равенстве учли (2.2.11).

Остается вычислить интеграл в правой части последнего равенства. Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int\limits_0^{3R} r^{N+|\gamma|-\lambda-1} \ln \frac{1}{r}\, dr = \left| \begin{array}{l} u = \ln \frac{1}{r} \Rightarrow du = r dr\,, \\ dv = r^{N+|\gamma|-\lambda-1} dr \Rightarrow v = \frac{r^{N+|\gamma|-\lambda}}{N+|\gamma|-\lambda} \end{array} \right| =$$

$$= \left. \frac{r^{N+|\gamma|-\lambda} \ln \frac{1}{r}}{N+|\gamma|-\lambda} \right|_0^{3R} - \int\limits_0^{3R} \frac{r^{N+|\gamma|-\lambda}}{N+|\gamma|-\lambda}\, r\, dr =$$

$$= \frac{(3R)^{N+|\gamma|-\lambda} \ln \frac{1}{3R}}{N+|\gamma|-\lambda} - \frac{(3R)^{N+|\gamma|-\lambda+2}}{(N+|\gamma|-\lambda)(N+|\gamma|-\lambda+2)} \leq$$

$$\leq \frac{(3R)^{N+|\gamma|-\lambda} \ln \frac{1}{3R}}{N+|\gamma|-\lambda} = \frac{(3R)^{N+|\gamma|-\lambda} \left(\ln \frac{1}{R} - \ln 3 \right)}{N+|\gamma|-\lambda} \leq$$

$$\leq \frac{3^{N+|\gamma|-\lambda}}{N+|\gamma|-\lambda} R^{N+|\gamma|-\lambda} \ln \frac{1}{R}\,.$$

В итоге получили

$$\int\limits_{\mathbb{B}^+_R(N)} T^{y'}_{x'} \left(\frac{\ln \left((|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{-\frac{1}{2}} \right)}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) (y')^\gamma dy \leq$$

$$\leq \frac{3^{N+|\gamma|-\lambda}|S_1(N)|_\gamma}{N+|\gamma|-\lambda}\, R^{N+|\gamma|-\lambda}\, \ln\frac{1}{R} = C'_{N,n,\lambda}\, R^{N+|\gamma|-\lambda}\, \ln\frac{1}{R}\,.$$

Тем самым неравенство (2.2.8) доказано при $\lambda = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ для всех $x \in \overline{\mathbb{R}_N^+}$.

Доказательство закончено.

Замечание 2.2.1 *Отметим, что предыдущую лемму можно доказать не прибегая к вращениям, а воспользовавшись неравенством*

$$|a-b| \leq \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha} \qquad (a>0\,,\ b>0)$$

и тем фактом, что $T^y 1 = 1$ *. Тогда для всех чисел* $\mu > 1$

$$T_{x'}^{y'}\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\mu/2}}\right) \leq \frac{1}{(|x'-y'|^2+|x''-y''|^2)^{\mu/2}} = \frac{1}{|x-y|^\mu} \tag{2.2.13}$$

и

$$T_{x'}^{y'}\left(\frac{\left|\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{-1/2}\right)\right|}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\mu/2}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\left|\ln\left((|x'-y'|^2+|x''-y''|^2)^{-1/2}\right)\right|}{(|x'-y'|^2+|x''-y''|^2)^{\mu/2}} = \frac{\left|\ln\left(|x-y|^{-1}\right)\right|}{|x-y|^\mu}\,. \tag{2.2.14}$$

При этом левая часть неравенства (2.2.8) для нечетных и четных λ *соответственно не превосходит*

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} |x-y|^{-\lambda}\,(y')^\gamma\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} |x-y|^{-\lambda}\ln\left(\tfrac{1}{|x-y|}\right)\,(y')^\gamma\,dy\,.$$

Рассматривая случаи $|x| \geq 2R$ *и* $|x| < R$ *, теми же действиями, что и при доказательстве предыдущей леммы, приходим к оценке* (2.2.8) *или*

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} |x-y|^{-\lambda}\,(y')^\gamma\,dy \leq C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda}\,, \qquad \lambda \neq 2k\,, k=1,2,\ldots \tag{2.2.15}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} |x-y|^{-\lambda} \ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right) (y')^\gamma \, dy \le C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda} \ln\frac{1}{R}\,,$$

$$\lambda = 2k\,, k = 1, 2, \ldots\,.$$

2.2.2 Интегрируемость и дифференцируемость B-потенциалов в $L_1^\gamma(\Omega_N^+)$

Класс локально интегрируемых с весом $(x')^\gamma$ функций в любой ограниченной части Ω_N^+ n-полупространства $\mathbb{R}_N^+$ будем обозначать через $L_{1,loc}^\gamma(\Omega_N^+)$.

Лемма 2.2.2 *Пусть* $f(y)$ – y'*-четная функция. Если* $supp\, f \in \Omega_N^+$, Ω_N^+ *— ограниченная область и* $f \in L_1^\gamma(\Omega_N^+)$, *то* $U_{B,f}^\lambda \in L_{1,loc}^\gamma(\mathbb{R}_N^+)$.

Доказательство. Будем полагать, что функция f определена в $\mathbb{R}_N^+$ и $f = 0$ вне области Ω_N^+. Сначала рассмотрим случай $\lambda \neq 2k$, $k = 1, 2, \ldots$. Из леммы 2.2.1 следует, что при всех $R > 0$ существует повторный интеграл

$$\int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\; (y')^\gamma dy \int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)(x')^\gamma dx \le$$

$$\le C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda} \int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\; (y')^\gamma dy\,.$$

В этом случае теорема Фубини дает возможность менять порядок интегрирования в выражении $\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} U_B^\lambda[f](x)\; (x')^\gamma dx$. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} U_B^\lambda[f](x)\; (x')^\gamma dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} \int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\, T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) (y')^\gamma dy\, (x')^\gamma dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\, (y')^\gamma dy \int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) (x')^\gamma dx\,.$$

Следовательно

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} |U_B^\lambda[f](x)|\, (x')^\gamma dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\, (y')^\gamma dy \int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) (x')^\gamma dx\,.$$

Для интеграла по шару воспользуемся оценкой (2.2.8), тогда при $\lambda \neq 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} |U_B^\lambda[f](x)|\, (x')^\gamma dx \leq C_{N,n,\lambda} R^{N+|\gamma|-\lambda} \int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\, (y')^\gamma dy\,.$$

Теми же действиями для логарифмического B-потенциала ($\lambda \neq 2k$, $k = 1, 2, \ldots$) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{B}_R^+(N)} |U_B^\lambda[f](x)|\, (x')^\gamma dx \leq C'_{N,n,\lambda} R^{N+|\gamma|-\lambda} \ln \frac{1}{R} \int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\, (y')^\gamma dy\,.$$

Из двух последних неравенств заключаем, что B-потенциал $U_B^\lambda[f](x)$ финитной абсолютно интегрируемой с весом $(x')^\gamma$ функции f существует почти всюду и представляет собой локально интегрируемую функцию в $\mathbb{R}_N^+$.

Доказательство закончено.

Исследуем вопрос о поведении $U_B^\lambda[f](x)$ при условии, что аргумент x не принадлежит носителю функции f .

Лемма 2.2.3 *Пусть* $f(y)$ – y' *-четная функция. Если* $supp\, f \in \Omega_N^+$, Ω_N^+ — *ограниченная область и* $f \in L_1^\gamma(\Omega_N^+)$, *то при* $|x| \to \infty$

$$\frac{\partial^\beta U_B^\lambda[f](x)}{\partial x_i^\beta} = \left\{ \begin{array}{ll} O\left(|x|^{-\lambda-|\beta|}\right), & \lambda \neq 2k \\ O\left(|x|^{-\lambda-|\beta|}\left|\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right|\right), & \lambda = 2k \end{array} \right| \quad k = 1, 2, \ldots \ . \tag{2.2.16}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\mathcal{E}_\lambda(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} T_{x'}^{y'}\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\lambda/2}}\right), & \lambda \neq 2k\,, \\ T_{x'}^{y'}\left(\frac{\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{-1/2}\right)}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\lambda/2}}\right), & \lambda = 2k \end{array} \right| \quad k = 1, 2, \ldots \ . \tag{2.2.17}$$

Легко видеть, что функция $\mathcal{E}_\lambda$ имеет особенность при $x = y$, x и $y \in \overline{\mathbb{R}_N^+}$. При $x \neq y$ функция $\mathcal{E}_\lambda$ бесконечно дифференцируема.

Оценим производную первого порядка. Вначале рассмотрим вопрос о дифференцировании в направлении координат x_j, не являющихся весовыми. Пусть $j = n+1, \ldots, N$. Тогда при $\lambda \neq 2k$, $k=1,2,\ldots$

$$\left|\frac{\partial \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\lambda}{2} T_{x'}^{y'}\left(\frac{2(x_j-y_j)}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+2)/2}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \lambda\, T_{x'}^{y'}\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+1)/2}}\right),$$

а при $\lambda = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\left|\frac{\partial \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial x_j}\right| = \left|T_{x'}^{y'}\left(\frac{(x_j-y_j)\left(1-\lambda\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{-1/2}\right)\right)}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+2)/2}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \lambda\, T_{x'}^{y'}\left(\frac{\left|\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{-1/2}\right)\right|}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+1)/2}}\right).$$

Аналогично получим для нечетных и четных λ соответственно

$$\left|\frac{\partial^{\beta''}\mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial (x'')^{\beta''}}\right| \leq C(\beta'')\, T_{x'}^{y'}\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+|\beta''|)/2}}\right)$$

и
$$\left|\frac{\partial^{\beta''}\mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial(x'')^{\beta''}}\right| \le C(\beta'')\,T_{x'}^{y'}\left(\frac{\left|\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{-1/2}\right)\right|}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+|\beta''|)/2}}\right),$$

где $\beta''=(\beta_{n+1},\ldots,\beta_N)$ — целочисленный мультииндекс размерности $N-n$. Воспользовавшись оценками (2.2.13) и (2.2.14), получим

$$\left|\frac{\partial^{\beta''}\mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial(x'')^{\beta''}}\right| \le \frac{1}{|x-y|^{\lambda+|\beta''|}}\,,\lambda\ne 2k\,,\ k=1,2,\ \ldots \tag{2.2.18}$$

и
$$\left|\frac{\partial^{\beta''}\mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial(x'')^{\beta''}}\right| \le \frac{\left|\ln\left(|x-y|^{-1}\right)\right|}{|x-y|^{\lambda+|\beta''|}}\,,\lambda=2k\,,\ k=1,2,\ \ldots\,. \tag{2.2.19}$$

Теперь оценим первую производную по одному из весовых направлений x_i, $1\le i\le n$. В этом случае при $\lambda\ne 2k$, $k=1,2,\ldots$ имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{E}_\lambda(x,y)\right| = \left|\frac{\lambda}{2}\,C(\gamma)\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_1-1}\alpha_1\ldots\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_n-1}\alpha_n\ \times\right.$$

$$\left.\times\ \left(\frac{2(x_i-y_i\cos\alpha_i)}{(|x'\to_\alpha y'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+2)/2}}\right)d\alpha_1\ldots d\alpha_n\right| =$$

$$=\lambda\,C(\gamma)\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_1-1}\alpha_1\ldots\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_n-1}\alpha_n\ \times$$

$$\times\ \frac{\sqrt{(x_i-y_i\cos\alpha_i)^2}}{(|x'\to_\alpha y'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+2)/2}}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n \le$$

$$\le\lambda\,C(\gamma)\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_1-1}\alpha_1\ldots\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_n-1}\alpha_n\ \times$$

$$\times\ \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i)+|x''-y''|^2}}{(|x'\to_\alpha y'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+2)/2}}\ d\alpha_1\ldots d\alpha_n =$$

$$= \lambda\, C(\gamma) \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_1 - 1} \alpha_1 \ldots \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_n - 1} \alpha_n \ \times$$

$$\times \ \frac{1}{(|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2)^{(\lambda+1)/2}} \ d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= \lambda\ T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{(\lambda+1)/2}} \right) .$$

А при $\lambda = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{E}_\lambda(x, y) \right| = \left| C(\gamma) \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_1 - 1} \alpha_1 \ldots \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_n - 1} \alpha_n \ \times \right.$$

$$\times \ \left(\frac{(x_i - y_i \cos \alpha_i) \left(1 - \lambda\, \ln \left((|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2)^{-1/2} \right) \right)}{(|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2)^{(\lambda+2)/2}} \right) \ \times$$

$$\left. \times\ d\alpha_1\ \ldots\ d\alpha_n \right| = \lambda\, C(\gamma) \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_1 - 1} \alpha_1 \ldots \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_n - 1} \alpha_n \ \times$$

$$\times \ \frac{\sqrt{(x_i - y_i \cos \alpha_i)^2} \ \left| 1 - \lambda\, \ln \left(\frac{1}{(|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2)^{1/2}} \right) \right|}{(|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2)^{(\lambda+2)/2}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \leq$$

$$\leq \lambda\, C(\gamma) \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_1 - 1} \alpha_1 \ldots \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_n - 1} \alpha_n \ \times$$

$$\times \ \frac{\lambda \left| \ln \left(\frac{1}{(|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2)^{1/2}} \right) \right|}{(|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2)^{(\lambda+1)/2}} \ d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= \lambda\ T_{x'}^{y'} \left(\frac{\left| \ln \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{1/2}} \right) \right|}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{(\lambda+1)/2}} \right) .$$

В итоге получили оценку модуля производной функции $\mathcal{E}_\lambda$ по одному из весовых направлений

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{E}_\lambda(x, y) \right| \leq$$

$$
\le \left\{ \begin{array}{ll} \lambda\ T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+1)/2}} \right), & \lambda \ne 2k \\ \lambda\ T_{x'}^{y'} \left(\frac{\left| \ln\left(\frac{1}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{1/2}} \right) \right|}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{(\lambda+1)/2}} \right), & \lambda = 2k \end{array} \right| k = 1, 2, \ldots . \quad (2.2.20)
$$

Поступая аналогично, для производной порядка β для нечетных и четных λ соответственно получим

$$
\left| \frac{\partial^{\beta'} \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial (x')^{\beta'}} \right| \le C(\beta')\ T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x''-y''|^2)^{(\lambda+|\beta'|)/2}} \right)
$$

и

$$
\left| \frac{\partial^{\beta'} \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial (x')^{\beta'}} \right| \le C(\beta')\ T_{x'}^{y'} \left(\frac{\left| \ln\left(\frac{1}{(|x' \to_\alpha y'|^2+|x''-y''|^2)^{1/2}} \right) \right|}{(|x'|^2 + |x''-y''|^2)^{(\lambda+|\beta'|)/2}} \right),
$$

где $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — целочисленный мультииндекс размерности n. Следовательно, при $\lambda \ne 2k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$
\left| \frac{\partial^{\beta'} \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial (x')^{\beta'}} \right| \le C(\beta') \frac{1}{|x-y|^{\lambda+|\beta'|}}, \quad (2.2.21)
$$

а при $\lambda = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$
\left| \frac{\partial^{\beta'} \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial (x')^{\beta'}} \right| \le C(\beta') \frac{\left| \ln\left(\frac{1}{|x-y|} \right) \right|}{|x-y|^{\lambda+|\beta'|}}. \quad (2.2.22)
$$

Объединяя неравенства (2.2.18) с (2.2.21) и (2.2.19) с (2.2.22), приходим соответственно к оценкам

$$
\left| \frac{\partial^{\beta} \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial (x')^{\beta'}\, \partial (x'')^{\beta''}} \right| \le C(\beta)\ \frac{1}{(|x-y|^2)^{(\lambda+|\beta|)/2}},\ x \ne y,\ \lambda \ne 2k,\ k = 1, 2, \ldots \quad (2.2.23)
$$

и

$$
\left| \frac{\partial^{\beta} \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial (x')^{\beta'}\, \partial (x'')^{\beta''}} \right| \le C(\beta)\ \frac{\left| \ln\left(\frac{1}{|x-y|} \right) \right|}{(|x-y|^2)^{(\lambda+|\beta|)/2}},\ x \ne y,\ \lambda = 2k,\ k = 1, 2, \ldots, \quad (2.2.24)
$$

где $\beta = (\beta', \beta'')$ — целочисленный мультииндекс размерности N.

Пусть точка x принадлежит внешности области Ω_N^+ и отстоит от нее на расстояние $> \delta$. Тогда функция

$$g(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C(\lambda,\delta)}{(|x-y|^2)^{(\lambda+|\beta|)/2}}\,, & \lambda \neq 2k \\ \\ \frac{C(\lambda,\delta)\left|\ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right|}{(|x-y|^2)^{(\lambda+|\beta|)/2}}\,, & \lambda = 2k \end{array} \right| k = 1, 2, \ldots$$

как функция аргумента $y \in \Omega_N \cup \Gamma_0$ (при $x \in C\Omega_{\delta+}^+$) принадлежит $L_1^\gamma(\Omega_N^+)$ и является мажорантой для производной $\frac{\partial^\beta \mathcal{E}_\lambda(x,y)}{\partial x^\beta}$. По теореме Лебега о дифференцировании под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial^\beta U_B^\lambda[f](x)}{\partial x^\beta} = \int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\, \frac{\partial^\beta \mathcal{E}_\lambda}{\partial x^\beta}\, (y')^\gamma dy\,, \quad \forall x \in C\Omega_{\delta+}^+\,.$$

Если $|x| \to \infty$, то можно считать, что $\delta > 1$ и тогда этот интеграл всегда существует и конечен. Применив неравенство (2.2.23) или (2.2.24), получим

$$\frac{\partial^\beta U_B^\lambda[f](x)}{\partial x^\beta} \leq \left\{ \begin{array}{ll} C(\beta) \int\limits_{\Omega_N^+} \frac{f(y)}{|x-y|^{\lambda+|\beta|}}\, (y')^\gamma dy\,, & \lambda \neq 2k \\ C(\beta) \int\limits_{\Omega_N^+} \frac{f(y)\left|\ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right|}{|x-y|^{\lambda+|\beta|}}\, (y')^\gamma dy\,, & \lambda = 2k \end{array} \right| k = 1, 2, \ldots\,.$$

Пусть $\Omega_N^+ \subset \mathbb{B}_R^+$ и $|x| > R$, тогда

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - R\,, \quad \forall y \in \Omega_N^+\,.$$

Отсюда при $|x| \to \infty$

$$\frac{\partial^\beta U_B^\lambda[f](x)}{\partial x^\beta} \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C(\beta)}{(|x|-R)^{\lambda+|\beta|}} \int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\, (y')^\gamma dy = O(|x|^{-\lambda-|\beta|})\,,\ \lambda \neq 2k\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \ldots \\ \frac{C(\beta)\left|\ln\left(\frac{1}{(|x|-R)}\right)\right|}{(|x|-R)^{\lambda+|\beta|}} \int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\, (y')^\gamma dy = \\ \quad = O\left(|x|^{-\lambda-|\beta|}\left|\ln\left(|x|^{-1}\right)\right|\right)\,,\ \lambda = 2k\,,\, k = 1, 2, \ldots\,. \end{array} \right.$$

Т. е. выполняется (2.2.16).

Доказательство закончено.

2.2.3 Теорема о дифференцируемости B-потенциала ограниченной функции

В теории классических потенциалов теорема о гладкости играет важную роль, вытекающую из приложения к дифференциальным уравнениям (см. [2], §1.6). В этом пункте мы докажем аналог этой теоремы, которая имеет такое же значение для дифференциальных уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя. Схема доказательства, после применения процедуры вращения, классическая, поэтому приведем доказательство в сокращенном виде.

Через $\mathbb{B}^+_{x,R}(N)$ будем обозначать часть N-мерного шара, определенную неравенствами $\{y_1 > 0, \ldots, y_n > 0\}$, радиуса R с центром в точке x. Этот же шар с центром в начале координат, как и раньше, обозначаем $\mathbb{B}^+_R(N)$.

Для всех $\lambda,\ 0 < \lambda < N + |\gamma|$ в случае нечетного и четного λ соответственно справедливы неравенства

$$\left| \int\limits_{\mathbb{B}^+_R(N)} T^{y'}_{x'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) (y')^\gamma \, dy \right| \le C\, R^{N+|\gamma|-\lambda}, \qquad (2.2.25)$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{B}^+_R(N)} T^{y'}_{x'} \left(\frac{\ln\left((|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{-1}{2}}\right)}{(|x'|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) (y')^\gamma \, dy \right| \le C\, R^{N+|\gamma|-\lambda} \ln\left(\frac{1}{R}\right), \qquad (2.2.26)$$

вытекающие из (2.2.8).

Известен вариант теоремы Соболева об интегралах типа B-потенциалов[4] (см. [20], с. 92): *пусть* $\frac{N+|\gamma|}{p'} - \nu < \lambda < \frac{n+|\gamma|}{p'}$; *если плотность* $f(x)(1 + |x|)^\nu \in L^p_\gamma(\mathbb{R}_N)$, *то отвечающий этой плотности* B*-потенциал* $U^\lambda_B[f](x)$ *— непрерывная функция.*

[4]Классический вариант этой теоремы известен как первая теорема Соболева о потенциалах [29], с. 244. В книге [14], с. 248 можно найти более тонкий результат, который, однако, потребовал более жестких условий на плотность потенциала.

Если плотность f имеет носитель в конечной области Ω_N^+, то справедливо следующее утверждение, которое будем называть *теоремой о гладкости B-потенциалов.*

Теорема 2.2.1 *Пусть y'-четная функция f ограничена, $|f(y)| \leq M$ почти везде в Ω_N^+. Тогда $U_B^\lambda[f](x) \in C^p\left(\overline{\mathbb{R}_N^+}\right)$, где p — наибольшее целое число такое, что $\lambda + p < N + |\gamma|$. Соответствующие производные функции $U_B^\lambda[f]$ получаются дифференцированием под знаком интеграла.*

Доказательство. 1) Непрерывность функции $U_B^\lambda[f](x)$ следует из теоремы о непрерывности B-потенциалов, поскольку для ограниченной и финитной функции условие $f(x)(1+|x|)^\nu \in L_\gamma^p(\mathbb{R}_N)$ всегда выполняется при любом ν.

2) Установим дифференцируемость B-потенциала при условии, что $\lambda + 1 < N + |\gamma|$. Разумеется, нас интересуют производные по весовым переменным, поскольку для производных по другим переменным рассуждения почти совпадут с классическими.

Для функции $\mathcal{E}_\lambda(x,y)$, определяемой по формуле (2.2.17), точка $x = y$ — точка разрыва, а при $x \neq y$ эта функция бесконечно дифференцируема. Для производной от функции $\mathcal{E}_\lambda(x,y)$ по одному из весовых направлений $x_i,\ 1 \leq i \leq n$ справедлива оценка (2.2.20).

Интегральный оператор с ядром $\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{E}_\lambda(x,y)$, $1 \leq i \leq n$ обозначим $(U_B^\lambda)_{x_i}[f](x)$. Ввиду оценки (2.2.20) и условия $\lambda + 1 < N + |\gamma|$ заключаем, что этот оператор вновь является интегралом типа B-потенциала (и просто B-потенциалом для функции f умноженный на соответствующий многочлен первого порядка). Из первой части доказательства теоремы заключаем, что эта функция непрерывна. Остается доказать равенство

$$\frac{\partial U_B^\lambda[f](x)}{\partial x_i} = (U_B^\lambda)_{x_i}[f](x)\,. \tag{2.2.27}$$

Имеем

$$\int\limits_{x_i^o}^{\xi_i} (U_B^\lambda)_{x_i}[f](x)\, dx = \int\limits_{x_i^o}^{\xi_i} \left[\int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\, \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}_\lambda(x,y)\, (y')^\gamma dy \right] dx_i\,.$$

Воспользовавшись оценкой (2.2.20) и затем (2.2.25) и (2.2.26), можем записать для нечетных и четных значений λ соответственно

$$\int\limits_{x_i^o}^{\xi} \left[\int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\; T^y(|x|^{-\lambda-1})\; (y')^\gamma dy \right] dx_i \le C\; R^{N+|\gamma|-\lambda-1}\,,$$

и

$$\int\limits_{x_i^o}^{\xi} \left[\int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)|\; T^y \left(|x|^{-\lambda-1} \left| \ln \frac{1}{|x|} \right| \right) (y')^\gamma dy \right] dx_i \le C\; R^{N+|\gamma|-\lambda-1} \ln \frac{1}{R}\,,$$

где R наименьшее число, такое, что $\Omega_N^+ \subset \mathbb{B}_R^+(N)$. Следовательно, можно применить теорему Фубини и поменять порядок интегрирования. В результате получим

$$\int\limits_{x_i^o}^{\xi_i} (U_B^\lambda)_{x_i}[f](x)\, dx = \int\limits_{\Omega_N^+} f(y) \left[\int\limits_{x_i^o}^{\xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}_\lambda(x,y)\, dx_i \right] (y')^\gamma dy =$$

$$= U_B^\lambda[f](\xi_i, x^i) - U_B^\lambda[f](x_i^o, x^i)\,.$$

Дифференцирование этого равенства по переменной ξ_i приводит к равенству (2.2.27) для производной первого порядка. Аналогично доказывается это равенство для производной любого порядка от функци, удовлетворяющей условию теоремы.

Доказательство закончено.

Следствие 2.2.1 *Пусть функция* f y' *-четная, ее носитель принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ *, функция* $|f|$ *ограничена,*

$|f(y)| \le M$ почти везде в $\overline{\Omega_N^+}$. Тогда B-потенциал Ньютона (2.2.2) и его первые производные (получаемые дифференцированием под знаком интеграла)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U_B[f](x) = \int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\, T^y |x|^{2-N-|\gamma|} (y')^\gamma\, dy \tag{2.2.28}$$

всюду непрерывны.

Доказательство. Непрерывность функции $U_B[f](x)$ вытекает из первой теоремы о B-потенциалах.

Из теоремы 2.2.1 вытекает возможность дифференцирования B-потенциала под знаком интеграла p раз, если p – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N+|\gamma|-2+p < N+|\gamma|$. Таким числом для B-потенциала Ньютона, как видим, является $p=1$, следовательно, производную можем внести под знак интеграла. В результате получим формулу (2.2.28). Здесь выражение справа снова B-потенциал порядка $\lambda = N+|\gamma|-1$ от функции с конечным носителем, поэтому (опять по теореме 2.2.1) этот потенциал — непрерывная функция.

Доказательство закончено.

2.3 Равномерная непрерывность B-потенциала Ньютона и его первых производных

Замечание 2.3.1 *(относительно B-потенциала Ньютона).*
Если $\lambda = N+|\gamma|-2$, то учитывая (2.2.7), получим равенство

$$\triangle_B (U_B^\lambda[f])(x) = \int\limits_{\Omega_N^+} f(y) \triangle_B \left(T_{x'}^{y'} \left(\frac{1}{(|x'|^2 + |x''-y''|^2)^{\lambda/2}} \right) \right) (y')^\gamma dy = 0\,,$$

$$\forall x \notin \overline{\Omega_N^+}\,,$$

из которого следует, что B-потенциал Ньютона финитной интегрируемой с весом $(y')^\gamma$ функции f представляет собой B-гармоническую функцию в области, находящейся вне носителя этой функции. Далее мы увидим, что B-гармоничность B-потенциала при условии, что $\lambda+2<N+|\gamma|$, распространяется на все $\mathbb{R}_N^+$.

Доказательство равномерной непрерывности B-потенциала Ньютона и его первой производной проведем способом, заключающемся в замене ядра B-потенциала $T^y|x|^{2-N-|\gamma|}$ в окрестности особой точки $x=y$ на функцию непрерывную и непрерывно дифференцируемую. Этот подход восходит к исследованиям А.М. Ляпунова (трехмерных и двумерных) потенциалов и развит в дальнейшем в монографиях О. Келлога и Р. Куранта — Д. Гильберта (см. соответственно [32], гл. 3; [14], с. 248; [15], гл. 4, §1.2).

Теорема 2.3.1 *Пусть функция f y'-четная и ее носитель принадлежит ограниченной области Ω_N^+, функция $|f|$ ограничена в области $\overline{\Omega_N^+}$, тогда B-потенциал Ньютона (2.2.2) и его первые производные всюду равномерно непрерывны, справедлива формула* (2.2.28).

Доказательство. Воспользуемся обозначениями (2.2.5) и представлением (2.2.4) для записи B-потенциала от полувращений. В результате B-потенциал Ньютона функции f примет вид

$$U_B[f](x)=C(\gamma)\int\limits_{\Omega_{N+n}^+}\widetilde{f}(z)\,|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\prod_{i=1}^{n}z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\,,$$

где

$$\widetilde{f}\,(z_1,z_2,\,\ldots\,,z_{2n-1},z_{2n},\,y'')=f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2},\,\ldots\,,\sqrt{z_{2n-1}^2+z_{2n}^2},\,y''\right).$$

Рассмотрим функцию

$$(U_B)_\delta\,[f](x)=\int\limits_{\Omega_N^+}f(y)\,\mathcal{E}_\delta(x,y)\,(y')^\gamma\,dy\,,$$

которая получается из (2.2.2) при замене ядра $\mathcal{E}(x,y)=T^y|x|^{2-N-|\gamma|}$ на $\mathcal{E}_\delta(x,y)$, которое отличается от $\mathcal{E}(x,y)$ только внутри малого N-мерного шара $|x-y|\leq\delta$ радиуса δ; внутри этого шара функция $\mathcal{E}_\delta$, в отличии от $\mathcal{E}$, ограничена. На поверхности шара функция $\mathcal{E}_\delta$ переходит в $\mathcal{E}$ непрерывно и с непрерывной производной. Например, можем определить $\mathcal{E}_\delta$ следующим образом

$$\mathcal{E}_\delta(x,y)=\begin{cases} T^y\left[\frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{x^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2}-(N+|\gamma|)\right)\right], & |x-y|\leq\delta\,,\\ T^y\,|x|^{2-N-|\gamma|}\,, & |x-y|>\delta\,.\end{cases}$$

Эту функцию, воспользовавшись вращениями $z_i=\sqrt{y_{2i-1}^2+y_{2i}^2}$, запишем в евклидовом пространстве точек $z\in\mathbb{R}_{N+n}$ в виде

$$\mathcal{E}_\delta(\widetilde{x},z)=\begin{cases} \frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{(z-\widetilde{x})^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2}-(N+|\gamma|)\right), & |z-\widetilde{x}|\leq\delta\,,\\ |z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\,, & |z-\widetilde{x}|>\delta\,.\end{cases}$$

Непрерывность функции $\mathcal{E}_\delta(\widetilde{x},z)$ очевидна

$$\mathcal{E}_\delta(\widetilde{x},z)\big|_{|z-\widetilde{x}|=\delta}=\delta^{2-N-|\gamma|}\,.$$

Производная равна

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{E}_\delta(\widetilde{x},z)=\begin{cases} -\frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{2(z_i-\widetilde{x}_i)\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2}\right), & |z-\widetilde{x}|\leq\delta\,,\\ -(2-N-|\gamma|)(z_i-\widetilde{x}_i)|z-\widetilde{x}|^{-N-|\gamma|}\,, & |z-\widetilde{x}|>\delta\,.\end{cases}$$

Отсюда так же следует непрерывность производной функции $\mathcal{E}_\delta$ при $|z-\widetilde{x}|=\delta$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{E}_\delta(\widetilde{x},z)\bigg|_{|z-\widetilde{x}|=\delta}=C\,(z_i-\widetilde{x}_i)\,\delta^{-N-|\gamma|}\,.$$

Поскольку ядро $\mathcal{E}_\delta(\widetilde{x},z)$ ограничено и непрерывно (следовательно, тоже можно сказать и о $\mathcal{E}_\delta(x,y)$), то функция $(U_B)_\delta[f]$ — ограниченная и непрерывная для $x\in\Omega_N^+\cup\Gamma_0$; ограниченность для больших значений $|x|$ вытекает из леммы 2.2.3, а непрерывность — из теоремы

2.2.1. Отсюда, учитывая теорему Кантора о равномерной непрерывности и лемму 2.2.3, заключаем, что функция $(U_B)_\delta[f](x)$ равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau > 0$, что

$$|(U_B)_\delta[f](x) - (U_B)_\delta[f](y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\ x,\ y : |x-y| < \tau\,. \tag{2.3.1}$$

Переходя к переменным интегрирования $z \in \mathbb{R}_{N+n}$, получим следующее представление функции $(U_B)_\delta[f](x)$:

$$(U_B)_\delta[f](x) = C(\gamma)\ \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \widetilde{f}(z)\,\frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{|z-\widetilde{x}|^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2} - (N+|\gamma|)\right)\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}dz\,.$$

Ясно, что $\mathcal{E}_\delta(x,y) - \mathcal{E}(x,y) \neq 0$ только внутри части шара $\mathbb{B}^+_\delta(N{+}n)$, следовательно,

$$|(U_B)_\delta[f](x) - U_B[f](x)| =$$
$$= \left|\ \int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \widetilde{f}(z)\,[\,\mathcal{E}_\delta(x,y) - \mathcal{E}(x,y)\,]\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\right| =$$
$$= \left|\ \int\limits_{\mathbb{B}^+_\delta(N+n)} \widetilde{f}(z)\ \left[\frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{(z-\widetilde{x})^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2} - (N+|\gamma|)\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\ \right]\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\ \right| \leq$$
$$\leq\ M \int\limits_{\mathbb{B}^+_\delta(N+n)} \left|\ \frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{(z-\widetilde{x})^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2} - (N+|\gamma|)\right) - \right.$$
$$\left. -|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\ \right|\ \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\ \ ,$$

где M — верхняя грань функции $\widetilde{f}(z)$. При переходе к сферическим координатам $z-\widetilde{x}=r\Theta$, $|\Theta|=1$, $dz=r^{N+n-1}dr\,dS(\Theta)$, получим последнее неравенство в виде:

$$|(U_B)_\delta[f](x)-U_B[f](x)|\leq\frac{1}{2}\,M\,|S_1^+(N)|\,\delta^2\,, \tag{2.3.2}$$

где коэффициент $|S_1(N)^+|_\gamma$ — весовая площадь части единичной сферы, определяется по формуле (2.2.10). Из этого неравенства следует, что последовательность $(U_B)_\delta[f](x)$ при $\delta\to 0$ равномерно сходится к B-потенциалу $U_B[f](x)$ для всех x. Но тогда

$$|\,U_B[f](x)-U_B[f](y)\,|\leq|\,U_B[f](x)-(U_B)_\delta[f](x)\,|+$$

$$+|\,(U_B)_\delta[f](x)-(U_B)_\delta[f](y)\,|+|\,(U_B)_\delta[f](y)-U_B[f](y)\,|\leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Здесь первое и третье слагаемые оцениваются по неравенству (2.3.2) для достаточно малых δ, а среднее по неравенству (2.3.1) для достаточно близких x и y Тем самым функция $U_{B,f}(x)$ равномерно непрерывна.

Переходим к исследованию первых производных $U_B[f](x)$. Из дифференцируемости функции $\mathcal{E}_\delta(x,y)$ следует дифференцируемость функции $(U_B)_\delta[f](x)$ (по теореме Лебега). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x)=C(\gamma)\int\limits_{\Omega^+_{N+n}}\widetilde{f}(z)\,\times$$

$$\times\;\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{|z-\widetilde{x}|^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2}-(N+|\gamma|)\right)\right]\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\,.$$

По следствию 2.2.1 B-потенциал Ньютона можно один раз дифференцировать под знаком интеграла, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,U_B[f](x)=\mathcal{Y}(x)=C(\gamma)\int\limits_{\Omega^+_{N+n}}\widetilde{f}(z)\,\frac{\partial}{\partial x_i}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\,, \tag{2.3.3}$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x) - \frac{\partial}{\partial x_i}\,U_B[f](x) = C(\gamma) \int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \widetilde{f}(z)\,\times$$

$$\times\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{|z-\widetilde{x}|^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2}-(N+|\gamma|)\right)-|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\right]\,\times$$

$$\times\,\prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{B}^+_\delta(N+n)} \widetilde{f}(z)\,\times$$

$$\times\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2\delta^{N+|\gamma|-2}}\left(\frac{|z-\widetilde{x}|^2\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^2}-(N+|\gamma|)\right)-|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\right]\,\times$$

$$\times\,\prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{B}^+_\delta(N+n)} \widetilde{f}(z)\,\times$$

$$\times\,\left[-\frac{(z_i-x_i)\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^{N+|\gamma|}}+(2-N-|\gamma|)-|z-\widetilde{x}|^{-N-|\gamma|}(z_i-x_i)\right]\,\times$$

$$\times\,\prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\,.$$

Следовательно

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x)-\frac{\partial}{\partial x_i}\,U_B[f](x)\right|\le C(\gamma)\,M \int\limits_{\mathbb{B}^+_\delta(N+n)} \left|-\frac{(z_i-x_i)\,(N+|\gamma|+2)}{\delta^{N+|\gamma|}}\,+\right.$$

$$\left.+(2-N-|\gamma|)|z-\widetilde{x}|^{-N-|\gamma|}(z_i-x_i)\right|\,\prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i-1}\,dz\;,$$

где M обозначает верхнюю грань функции $\widetilde{f}(z)$. Переходим к сферическим координатам $z-\widetilde{x}=r\Theta$, $|\Theta|=1$, $dz=r^{N+n-1}dr\,dS(\Theta)$. Тогда

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x)-\frac{\partial}{\partial x_i}\,U_B[f](x)\right|\le M \int\limits_{|\Theta|=1} \Theta_i \prod_{i=1} n\Theta_{2i}^{\gamma_i-1} dS(\Theta)\,\times$$

$$\times\,\int\limits_0^\delta \left[-\frac{N+|\gamma|+2}{\delta^{N+|\gamma|+1}}+(2-N-|\gamma|)r^{-N-|\gamma|}\right] r^{N-1}\,dr =$$

$$= C(\gamma)\, M\, |S_1(N+n)|_{\gamma-1} \left(-\frac{N+|\gamma|+2}{N+|\gamma|+1} - (N+|\gamma|-2) \right) \delta\,.$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i}\, U_B[f](x) - \frac{\partial}{\partial x_i} (U_B)_\delta[f](x) \right| \leq$$

$$\leq C(\gamma)\, N\, |S_1(N+n)| \left(\frac{N+|\gamma|+2}{N+|\gamma|+1} + (N+|\gamma|-2) \right) \delta\,. \quad (2.3.4)$$

Неравенство (2.3.4) означает, что последовательность $\frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x)$ равномерно сходится к функции $\mathcal{Y}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} U_B[f](x)$.

Функция $\frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x)$ ограничена при $x \in \Omega_N^+ \cup \Gamma_0$; для больших значений $|x|$ ее ограниченность следует из леммы 2.2.3; ее же непрерывность следует из следствия 2.2.1. Таким образом, из теоремы Кантора о равномерной непрерывности и леммы 2.2.3 следует равномерная непрерывность функции $\frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau > 0$, такое что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x) - \frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](y) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x,\ y \in \overline{\mathbb{R}_N^+}\ :\ |x-y| < \tau. \quad (2.3.5)$$

Теперь равномерная оценка (2.3.4) позволяет получить результат о равномерной непрерывности первой производной B -потенциала: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau > 0,$ такое что для всех $x,\ y$, таких что $|x-y| < \tau\ \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} U_B[f](x) - \frac{\partial}{\partial x_i} U_B[f](y) \right| \leq \left| \frac{\partial}{\partial x_i} U_B[f](x) - \frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x) \right| +$$

$$+ \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](x) - \frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(U_B)_\delta[f](y) - \frac{\partial}{\partial x_i} U_B[f](y) \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Здесь первое и третье слагаемые оцениваются по неравенству (2.3.4) для достаточно малых δ , а среднее по неравенству (2.3.5) для достаточно близких x и y . Тем самым функция $\frac{\partial}{\partial x_i} U_B[f](x)$ равномерно непрерывна. Совершив в (2.3.3) набор полярных преобразований по формулам (2.2.3), получим формулу (2.2.28).

Доказательство закончено.

2.4 Непрерывность вторых производных и B-производных B-потенциала Ньютона с кусочно-гладкой плотностью

Теорема 2.4.1 *Пусть плотность* f *B-потенциала Ньютона кусочно-непрерывно дифференцируемая*[5] y' *-четная функция, и ее носитель принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ *. Тогда функция* $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} U_B[f]$ $(k, m = 1, \ldots, N)$ *непрерывна в* $\overline{\mathbb{R}_N^+}$ *и при* $k = m$ *справедлива формула*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} U_B[f](x) = -f(x) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos \nu_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, dy \,, \tag{2.4.1}$$

где ν_k *— угол между направлением внешней нормали и направлением оси* Ox_k *.*

Доказательство. Согласно следствию 2.2.1 можем один раз продифференцировать $U_B[f](x)$ под знаком интеграла. Перейдем к записи B-потенциала от полувращений $y_i \to \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2}$, $i = \overline{1, n}$, при котором $f(y', y'') = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ldots \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}, y''\right) = \widetilde{f}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, y'')$. Для удобства записи разделим переменные с четными и нечетными номерами, полагая (см. (2.2.5))

$$\mathbf{z}_1 = (z_1, z_3, \ldots, z_{2n-1}) \in \mathbb{R}_n, \; \mathbf{z}_2 = (z_2, z_4, \ldots, z_{2n}) \in \mathbb{R}_n^+ = \{z_{2i} > 0, \; i = \overline{1, n}\},$$

$$\mathbb{R}_{N+n}^+ = \{z = (z', y'') = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, y''), \; (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in \mathbb{R}_{2n}^+ = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n^+, \; y'' \in \mathbb{R}_{N-n}\},$$

$$\widetilde{x} = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots, x_n, 0, \, x'') \in \overline{\mathbb{R}_{N+n}^+} \,.$$

[5] Определение кусочно-непрерывно дифференцируемой (говорят также кусочно-гладкой) функции можно найти, например, в книге [14] (см. сноску на с. 247).

Учитывая, что выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(|x' \to_\alpha y'|^2 - |x'' - y''|^2\right)^{\frac{2-N-|\gamma|}{2}} =$$

$$= (2 - N - |\gamma|)\left(|x' \to_\alpha y'|^2 + |x'' - y''|^2\right)^{\frac{-N-|\gamma|}{2}} (x_m - y_m \cos\alpha_m)$$

после процедуры вращений $y_i \to \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2}$ примет вид

$$\frac{(2-N-|\gamma|)\;(x_m - z_{2m-1})}{(|x'-\mathbf{z}_1|^2+|\mathbf{z}_2|^2+|x''-y''|^2)^{\frac{-N-|\gamma|}{2}}} = \frac{\partial}{\partial x_m}|\widetilde{x} - z|^{2-N-|\gamma|}\,,$$

запишем

$$I_{k,m}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_m}\,U_B[f](x) =$$

$$= C(\gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \widetilde{f}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\,y'')\,\frac{\partial}{\partial x_m}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,dz'dy'' =$$

$$= -C(\gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \widetilde{f}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\,y'')\,\frac{\partial}{\partial z_{2m-1}}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,dz'dy''\,.$$

Кусочная непрерывно-дифференцируемость функции f дает возможность разбить область Ω^+_N на части, в каждой из которых эта функция имеет непрерывную и ограниченную производную. Условие y'-четности позволяет то же самое сказать о функции $\widetilde{f}$. Для сокращения рассуждений будем считать, что производная плотности $\widetilde{f}$ по любой из $N+n$ переменных непрерывна и ограничена во всей области Ω^+_{N+n}. Применяя формулу интегрирования по частям[6], имеем

[6]Для многомерных лебеговых интегралов формула интегрирования по частям справедлива для любых соболевских функций из $W^1_p(\Omega_m)$ и $W^1_q(\Omega_m)$, таких что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} < 1+\frac{1}{m}$ (см. [27], с. 611). В нашем случае функция f и ее производная принадлежит L_p для любого конечного p (например $p = m+1$), а ядро B-потенциала и его производная принадлежит L_1, поэтому применение формулы интегрирования по частям законно.

$$I_{k,m}(x) =$$

$$= -C(\gamma)\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} \widetilde{f}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\, y'')\,|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\cos\nu_{2m-1}\ \mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,d\Gamma_{N+n}+$$

$$+C(\gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \frac{\partial}{\partial z_{2m-1}}\widetilde{f}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\, y'')\,|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,dz'dy''\,,$$

где Γ^+_{N+n} — граница полученная полувращениями границы Γ^+_N . Здесь нет граничных интегралов по Γ^0_{N+n} , что связано с четностью функций по соответствующим переменным, поскольку изначально интегрирование можно проводить по объединению области Ω^+_N со своими зеркальными отражениями относительно каждой из гиперплоскостей $x_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$ (т. е. когда все точки Γ^0_N — внутренние).

Учитывая ограниченность производной от $\widetilde{f}$ и теорему 2.2.1 можем снова дифференцировать под знаком интеграла. Имеем

$$I_{k,m}(x) = -C(\gamma)\left[\int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} \widetilde{f}(z)\ \frac{\partial}{\partial x_k}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\ \cos\nu_{2m-1}\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,d\Gamma_{N+n}\, - \right.$$

$$\left. -\int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \frac{\partial}{\partial z_{2m-1}}\widetilde{f}(z)\ \frac{\partial}{\partial x_k}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\ \mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,dz\right],$$

где $\widetilde{f}(z) = f(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\, y'')$.

Поскольку $\frac{\partial}{\partial z_j}\widetilde{f}(z) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\widetilde{f}(z) - f(x)\right)$, особенность ядра объемного интеграла можно ослабить:

$$I_{k,m}(x) = -C(\gamma)\left[\int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} \widetilde{f}(z)\ \frac{\partial}{\partial x_k}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\ \cos\,\nu_{2m-1}\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,d\Gamma_{N+n}-\right.$$

$$
- \int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \frac{\partial}{\partial z_{2m-1}} \Big(\widetilde{f}(z) - f(x) \Big) \; \frac{\partial}{\partial x_k} |z - \widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|} \; \mathbf{z}_2^{\gamma-1} \, dz \Bigg] \; .
$$

Теперь надо выполнить обратное интегрирование по частям. Но теперь функция

$$
g(z) = \frac{\partial}{\partial x_k} |z - \widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}
$$

не принадлежит соболевскому классу W_1^1 (ее производная $\frac{\partial g(z)}{\partial z_{2m-1}}$ имеет сильную особенность $= O(|z|^{-N-|\gamma|}),\ |z| \to \infty$), и мы должны воспользоваться классической схемой — предварительно вырезаем шар с центром в точке $\widetilde{x}$ достаточного малого радиуса, затем интегрируем по частям и переходим к пределу, когда радиус вырезанного шара стремиться к нулю. Результат этой операции так хорошо известен из классической теории эллиптических уравнений и содержится во всех учебниках по уравнениям математической физики, что позволяет нам здесь этого не делать. Остается учесть, что функция $\widetilde{f}(z) - f(x) = \widetilde{f}(z) - f(\widetilde{x})$ в точке $z = \widetilde{x}$ равна нулю. В результате всех этих действий получим

$$
I_{k,m}(x) = -C(\gamma) \Bigg[\int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} \widetilde{f}(z) \; \frac{\partial}{\partial x_k} |z - \widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|} \; \cos \nu_{2m-1} \; \mathbf{z}_2^{\gamma-1} \, d\Gamma_{N+n} -
$$

$$
- \int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} (\widetilde{f}(z) - f(x)) \; \frac{\partial}{\partial x_k} |z - \widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|} \; \cos \nu_{2k-1} \; \mathbf{z}_2^{\gamma-1} \, d\Gamma_{N+n} +
$$

$$
+ \int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \Big(\widetilde{f}(z) - f(x) \Big) \; \frac{\partial^2}{\partial z_{2m-1} \, \partial x_k} |z - \widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|} \, \mathbf{z}_2^{\gamma-1} \, dz \Bigg] =
$$

$$
= -C(\gamma) \Bigg[f(x) \int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} \frac{\partial}{\partial x_k} |z - \widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|} \; \cos \nu_{2k-1} \; \mathbf{z}_2^{\gamma-1} \, d\Gamma_{N+n} -
$$

$$
-\int\limits_{\Omega^+_{N+n}} \left(\widetilde{f}(z){-}f(x)\right)\ \frac{\partial^2}{\partial x_m\,\partial x_k}|z{-}\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,dz\Bigg]\,. \qquad (2.4.2)
$$

Положим $k=m$, после чего совершим набор полярных преобразований (2.2.3). В результате получим (2.4.1).

Непрерывность функции $\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\,U_B[f](x)$, вытекает обычным образом из первой теоремы о B-потенциалах (впрочем, этот результат можно непосредственно получить из формулы (2.4.2)).

Доказательство закончено.

Из доказательства вытекает следующая формула, где поверхностный интеграл задан в евклидовом пространстве от полувращений, которая окажется полезной в дальнейшем: $\forall k=\overline{1,N}$

$$
\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\,U_B[f](x){=}\int\limits_{\Omega^+_N}(f(y){-}f(x))\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}T^x|y|^{2-N-|\gamma|}\right)(y')^\gamma\,dy-
$$

$$
-C(\gamma)\,f(x)\int\limits_{\Gamma^+_{N+n}}\cos\nu_{2k-1}\ \left(\frac{\partial}{\partial x_k}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\right)\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,d\Gamma_{N+n}\,. \qquad (2.4.3)
$$

Теперь перейдем к вычислению B-производной B-потенциала. Как и раньше, $\mathcal{B}^1_{\gamma_i}$ — сингулярная составляющая оператора Бесселя, а $(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}$ — B-производная (2.1.5).

Теорема 2.4.2 *Пусть плотность f B-потенциала Ньютона является кусочно-непрерывно дифференцируемой y'-четной функцией и $\mathrm{supp}\,f\in\Omega^+_N$. Тогда функция $(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}U_B[f](x)$, $i=1,\ldots,n$ непрерывна в области $\mathbb{R}^+_N$, и при $x_i>0$, $i=\overline{1,n}$ справедлива формула*

$$
(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}U_B[f](x)=-f(x)\int\limits_{\Gamma^+_N}\cos\nu_i\ \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)(y')^\gamma\,d\Gamma_N+
$$

$$
+\int\limits_{\Omega^+_N}(f(y){-}f(x))\ \left((\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)(y')^\gamma\,dy\,, \qquad (2.4.4)
$$

где $\nu_i = \nu(x_i)$ *— угол между направлением внешней нормали и оси* Ox_i *,* $\mathcal{B}_\gamma^1 = \frac{1}{\gamma+1}\, B_\gamma^1$ *,* B_γ^1 *— сингулярный дифференциальный оператор первого порядка* (2.1.3).

Доказательство. Имеем

$$I_B(x) = (\gamma_i+1)(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}\, U_B[f](x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) U_B[f](x)\,.$$

Для второй производной воспользуемся формулой (2.4.3), а для первой (2.2.28). Тогда

$$I_B(x) = -\,C(\gamma)\, f(x) \int\limits_{\Gamma_{N+n}^+} \cos\nu_{2i-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\right) \mathbf{z_2}^{\gamma-1}\, d\Gamma_{N+n} +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma\, dy +$$

$$+ \frac{\gamma}{x_i} \int\limits_{\Omega_N^+} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\; (y')^\gamma\, dy\,.$$

Последний интеграл нам интересно записать в той же форме, что и предыдущий, т. е. зависящий от разности $f(x)-f(y)$. Для этого мы его преобразуем, используя те же приемы, что и в предыдущей теореме в аналогичной задаче. В результате

$$\int\limits_{\Omega_N^+} f(y) \left(\frac{\gamma}{x_i}\;\frac{\partial}{\partial x_i}\, T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma\, dy =$$

$$= -C(\gamma)\, f(x) \frac{\gamma}{x_i} \int\limits_{\Gamma_{N+n}^+} \cos\,\nu_{2i-1} \left(|z-\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\right) \mathbf{z_2}^{\gamma-1}\, d\Gamma_{N+n} +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x)) \left(\frac{\gamma}{x_i}\;\frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma\, dy\,.$$

Отсюда вытекает формула

$$(B_{\gamma_i})_{x_i}\, U_B[f](x) = + \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y){-}f(x))\ \ (\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\, (y')^\gamma\, dy -$$

$$-C(\gamma)\, f(x) \int\limits_{\Gamma_{N+n}^+} \cos\nu_{2i-1} \frac{1}{\gamma_i+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}{+}\frac{\gamma_i}{x_i}\right) |z{-}\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\, \mathbf{z}_2^{\gamma-1}\, d\Gamma_{N+n}\,, \tag{2.4.5}$$

откуда (2.4.4) получим следующим образом: совершим полярное преобразование координат по каждой паре переменных $(z_{2i-1},\, z_{2i})$, затем воспользуемся определением сингулярного дифференциального оператора первого порядка B_γ^1 (см. (2.1.3)) и обозначением B-производной, используемым в формулировке теоремы.

Доказательство закончено.

2.5 B-потенциалы Ньютона с Гельдеровской плотностью

Предварительно сделаем следующее.

Замечание 2.5.1 *Представления* (2.4.1) *и* (2.4.4), *полученные соответственно для второй производной и B-производной B-потенциала Ньютона с кусочно-непрерывно дифференцируемой плотностью f, сами не содержат производных функции f. Следовательно, можно предположить, что существует более широкий класс функций f, для которых теоремы 2.4.1 и 2.4.2 верны. Как и в классической теории, наиболее подходящим классом таких функций являются функции непрерывные по Гельдеру. Обсудим особенность этой работы, связанную с сингулярностью используемых в работе дифференциальных операторов. Например, пусть четная по переменной x_i функция f непрерывна, а функция $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ непрерывна по Липшицу, т.е.*

$$|f'_{x_i}(x_i, x^i) - f'_{x_i}(y_i, x^i)| \le K_i |x_i - y_i|\,.$$

Тогда функция $\frac{1}{x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *— ограниченная. Действительно, в этом случае* $f'_{x_i}(x_i,x^i)$ *нечетная по* x_i *, а так как она непрерывна, то* $f'_{x_i}(0,x^i)$=0 *. Следовательно,*

$$\left|\frac{1}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_i,x^i)\right| = \left|\frac{1}{x_i}\left(f'_{x_i}(x_i,x^i) - f'_{x_i}(0,x^i)\right)\right| \leq K_i < \infty\,.$$

Как видим, в этом случае не потребовалось условия существования второй производной, как это требовалось в замечании 2.1.1.

Как известно, функция f называется непрерывной по Гельдеру в области в области Ω , если для любой пары точек $x,\ y$, принадлежащих Ω , выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y|^\alpha\,.$$

Лемма 2.5.1 *Пусть плотность* f B *-потенциала Ньютона* y' *-четная непрерывная по Гельдеру функция, и ее носитель принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ *. Тогда для любой точки частично замкнутой области* $x\in\Omega_N^+$ *интеграл*

$$\int\limits_{\Omega_N^+}(f(y)-f(x))\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)(y')^\gamma dy \tag{2.5.1}$$

абсолютно сходится.

Доказательство. Рассмотрим модуль подынтегрального выражения в (2.5.1)

$$\left|(f(y)-f(x))\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\right| \leq$$
$$\leq |f(y)-f(x)|\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right|.$$

Здесь, воспользовавшись условием Гельдера и оценкой (2.2.23), положив в ней $\beta=2$, приходим к выводу, что модуль подынтегрального выражения в (2.5.1) ограничен следующим интегрируемым выражением

$$C_{(\beta=2)}\,K|x-y|^{\alpha-N-|\gamma|}\,,$$

где α и K — константы Гельдера, $C_{(\beta=2)}$ – числовая константа.

Доказательство леммы закончено.

Следствие 2.5.1 *Пусть плотность f B-потенциала Ньютона y'-четная непрерывная по Гельдеру функция, и ее носитель принадлежит ограниченной области Ω_N^+. Тогда из леммы 2.5.1 следует, что правая часть формулы* (2.4.1) *является вполне определенной функцией, которую обозначим через $V(x)$:*

$$V(x) = -f(x) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_k \, \left(\frac{\partial}{\partial x_k} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N(y) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x)) \, \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, dy \,, \qquad (2.5.2)$$

где ν_k — угол между направлением внешней нормали и направлением оси Ox_k.

Теорема 2.5.1 *Пусть носитель y'-четной функции f, удовлетворяющей условию Гельдера, принадлежит ограниченной области Ω_N^+. Тогда B-потенциал Ньютона $U_B[f]$ имеет равномерно непрерывные первые производные, которые можно получить с помощью дифференцирования под знаком интеграла, и непрерывные вторые производные, которые даются формулой* (2.4.1).

Доказательство. По доказанному ранее (см. теорему 2.4.1) для B-потенциала Ньютона с непрерывно-дифференцируемой плотностью теорема верна.

Функцию f равномерно приближаем дифференцируемыми y'-четными функциями f_m, удовлетворяющими равномерно по m условию Гельдера с константами α и K. Для этих функций f_m определяем их B-потенциалы Ньютона $U_B[f_m]$ по формуле (2.2.2):

$$U_B[f_m](x) = \int\limits_{\Omega_N^+} f_m(y) \, T_{x'}^{y'} \left((|x'|^2 + |x'' - y''|^2)^{2-N-|\gamma|} \right) \, (y')^\gamma dy \,.$$

Поскольку функция f имеет конечный носитель ($\in \Omega_N^+ \cap \Gamma_N^0$), то на самом деле интегрирование происходит по области ω_N^+ (см. (1.1.2)) строго s-вложенной в область Ω_N^+. При этом мы можем считать, что

$$\text{расстояние между границами в } \mathbb{R}_N^+ \text{ равное } \rho(\partial\omega_N^+,\, \partial\Omega_N^+) = \delta > 0\,. \tag{2.5.3}$$

Функции $U_B[f_m]$ по теореме 2.4.1 имеют непрерывные вторые производные, которые задаются формулой:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U_B[f_m] f(x) = -f_m(x) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \, \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f_m(y) - f_m(x)) \, \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, dy\,. \tag{2.5.4}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что функции $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U_B[f_m](x)$ (см. (2.5.4)) равномерно сходятся к $V(x)$, определенной формулой (2.5.2), в любой замкнутой подобласти $\overline{\omega_N^+}$ области Ω_N^+.

Из формул (2.5.2) и (2.5.4) имеем

$$\left| V(x) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U_B[f_m](x) \right| =$$

$$= \left| (f(x) - f_m(x)) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \, \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x) - f_m(y) + f_m(x)) \, \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, dy \right| \leq$$

$$\leq \left| (f(x) - f_m(x)) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \, \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N \right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\Omega_N^+} (f(y)-f(x)-f_m(y)+f_m(x))\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma\, dy\right| \leq$$

$$\leq |f(x)-f_m(x)| \left|\int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma\, d\Gamma_N\right| +$$

$$+\int\limits_{\Omega_N^+} |f(y)-f(x)-f_m(y)+f_m(x)| \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right| (y')^\gamma\, dy = J_1 + J_2\,. \tag{2.5.5}$$

Рассмотрим поверхностный интеграл в (2.5.5)

$$J_1 = |f(x)-f_m(x)| \left|\int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma\, d\Gamma_N\right| \leq$$

$$|f(x)-f_m(x)| \int\limits_{\Gamma_N^+} T^y |x|^{-N-|\gamma|}\, (y')^\gamma\, d\Gamma_N \leq$$

$$\leq\ C\,\delta^{-N-|\gamma|}\ |f(x)-f_m(x)|\ ,$$

где δ – расстояние (2.5.3), а C — весовая площадь поверхности Γ_N^+. Из полученного неравенства видим, что если точка x принадлежит некоторой замкнутой подобласти $\overline{\omega_N^+}$, то $J_1 \to 0$ при $m \to \infty$ независимо от точки x (т. е. равномерно по x).

Рассмотрим объемный интеграл в (2.5.5). Выделим в области интегрирования N-полушар $\mathbb{B}_{x,R}^+$ достаточно малого радиуса R с центром в точке x, тогда

$$J_2 = \int\limits_{\mathbb{B}_{x,R}^+} |f(y)-f(x)-f_m(y)+f_m(x)| \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right| (y')^\gamma\, dy +$$

$$
+\int\limits_{\Omega_N^+\setminus\mathbb{B}^+_{x,R}} |f(y){-}f(x){-}f_m(y){+}f_m(x)| \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right| (y')^\gamma\,dy \leq
$$

$$
\leq\ C_{(\beta=2)}\left[2K\int\limits_{\mathbb{B}^+_{x,R}} |x-y|^{\alpha-N-|\gamma|}\ (y')^\gamma\,dy+\right.
$$

$$
\left.+\int\limits_{\Omega_N^+\setminus\mathbb{B}^+_{x,R}} (\,|f(y){-}f_m(y)|+|f(x){-}f_m(x)|\,)\,|x-y|^{-N-|\gamma|}\ (y')^\gamma dy\right].
$$

Здесь первое слагаемое оценили так же, как в доказательстве леммы 2.5.1 (K и α — константы Гельдера), а к подынтегральной функции во втором слагаемом применили оценку (2.2.23),положив в ней $\beta=2$.

Теперь к оставшемуся интегралу по шару можем применить оценку (2.2.15), в которой нужно положить $\lambda=N{+}|\gamma|{-}\alpha$, а к интегралу по поверхности шара неравенство $|x{-}y|\geq R$, т. е. $|x{-}y|^{-N-|\gamma|}\leq R^{-N-|\gamma|}$, получим, что интеграл J_2 не превосходит следующее выражение

$$
C_1KR^\alpha+\int\limits_{\Omega_N^+\setminus\mathbb{B}^+_{x,R}} (\,|f(y){-}f_m(y)|+|f(x){-}f_m(x)|\,)\,\frac{C_2}{R^{N+|\gamma|}}(y')^\gamma\,dy\,,
$$

в котором первое слагаемое можем сделать сколь угодно малым за счет выбора достаточно малого R , а второе при фиксированном R можно сделать достаточно малым, при условии, что m достаточно велико.

Доказательство закончено.

Лемма 2.5.2 *Пусть плотность f B -потенциала Ньютона y' -четная непрерывная по Гельдеру функция, и ее носитель принадлежит ограниченной области Ω_N^+ . Тогда для любой точки $x\in\Omega_N^+$, $x_i>0$, $i=\overline{1,n}$ интеграл вида:*

$$
\int\limits_{\Omega_N^+} (f(y)-f(x))\left((\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\,(y')^\gamma dy \tag{2.5.6}
$$

сходится абсолютно.

Доказательство. Оценим модуль подынтегрального выражения в (2.5.6)

$$\left|(f(y)-f(x))\,(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right|.$$

По условию Гельдера

$$|f(y)-f(x)|\leq K\,|y-x|^\alpha,$$

где α, K – константы Гельдера.

Рассмотрим модуль B-производной от функции $T^y|x|^{2-N-|\gamma|}$. Имеем

$$\left|(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\gamma_i+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right|+\left|\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right|.$$

Воспользуемся оценкой (2.2.23) с $\beta=2$ для первого слагаемого и с $\beta=1$ для второго, тогда

$$\left|(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right|\leq$$

$$\leq C_{(\beta=2)}|x-y|^{-N-|\gamma|}+\frac{\gamma_i}{x_i}C_{(\beta=1)}|x-y|^{1-N-|\gamma|}.$$

Здесь второе слагаемое имеет более слабую особенность в точке $y=x$, чем первое, поэтому достаточно исследовать только первое слагаемое. Имеем

$$\left|(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right|\leq C_{(\beta=2)}|x-y|^{-N-|\gamma|}\tag{2.5.7}$$

и модуль подынтегрального выражения в (2.5.6) ограничен следующим выражением:

$$C_{(\beta=2)}\,K\,|x-y|^{\alpha-N-|\gamma|},$$

где α и K — константы Гельдера. Как видим, интеграл (2.5.6) сходится абсолютно.

Доказательство леммы закончено.

Следствие 2.5.2 *Пусть плотность* f B*-потенциала Ньютона* y'*-четная непрерывная по Гельдеру функция, и ее носитель принадлежит ограниченной области* Ω_N^+*. Тогда из леммы 2.5.2 следует, что при* $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ *правая часть формулы* (2.4.4) *является вполне определенной функцией, которую обозначим через* $W(x)$*:*

$$W(x) = -f(x) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x)) \left((\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, dy \,, \qquad (2.5.8)$$

где $\nu_i = \nu(x_i)$ *— угол между направлением внешней нормали и оси* Ox_i, $\mathcal{B}^1_{\gamma_i} = \frac{1}{\gamma_i+1} B^1_{\gamma_i}$, B^1_γ *— сингулярный дифференциальный оператор первого порядка* (2.1.3)*.*

Теорема 2.5.2 *Пусть* y'*-четная функция* f *удовлетворяет условию Гельдера, и ее носитель принадлежит ограниченной области* Ω_N^+*. Тогда* B*-потенциал* $U_{B,f}$ *имеет равномерно непрерывные первые производные, которые можно получить с помощью дифференцирования под знаком интеграла и непрерывные* B*-производные, которые даются формулой* (2.4.4)*.*

Доказательство. Утверждение теоремы справедливо для кусочно-гладкой плотности. Поэтому, как и в доказательстве предыдущей теоремы, нам достаточно доказать, что формулу (2.4.4) с непрерывной функцией f можно равномерно приблизить формулами для дифференцируемых функций f_m. Функцию f равномерно приближаем дифференцируемыми функциями f_m, удовлетворяющими равномерно по m условию Гельдера с константами α и K. Для этих функций f_m определяем функции $U_B[f_m]$ по формуле (2.2.2):

$$U_B[f_m](x) = \int\limits_{\Omega_N^+} f_m(y) \, T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \, (y')^\gamma \, dy \,.$$

Функции $U_B[f_m]$ по теореме 2.4.2 имеют непрерывные B-производные, которые задаются формулой:

$$(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} U_B[f_m](x) = -f_m(x) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \, \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i}\, T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} (f_m(y) - f_m(x)) \left((\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, dy\,. \qquad (2.5.9)$$

Достаточно показать, что функция $(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} U_m(x)$ равномерно сходится к $W(x)$ (эта функция определена в следствии 2.5.2) в любой замкнутой подобласти Ω_N^+. Из формул (2.5.8) и (2.5.9) имеем

$$|W(x) - (\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} U_B[f_m](x)| =$$

$$= \left| (f(x) - f_m(x)) \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega_N^+} (f(y) - f(x) - f_m(y) + f_m(x)) \left((\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, dy \right| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_m(x)| \left| \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos\nu_i \, \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N \right| +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_N^+} |f(y) - f(x) - f_m(y) + f_m(x)| \left|(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right| (y')^\gamma \, dy\,.$$

$$(2.5.10)$$

Из оценок (2.2.23) при $\beta = 1$ и того, что $T^y|x|^{-\lambda} \leq |x-y|^{-\lambda}$ следует

$$\left| \int\limits_{\Gamma_N^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} - \frac{\gamma_i}{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) \cos\nu_i \, (y')^\gamma \, d\Gamma_N \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma_N^+} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} - \frac{\gamma_i}{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right| |\cos \nu_i| \, (y')^\gamma \, d\Gamma_N \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma_N^+} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right| + \frac{\gamma_i}{x_i} \, \left| T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right| \right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma_N^+} \left(C_{(\beta=1)} |x-y|^{1-N-|\gamma|} + \frac{\gamma_i}{x_i} \, |x-y|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^\gamma \, d\Gamma_N \, .$$

Отметим, что в отличии от доказательства предыдущей леммы полученное выражение определено и при $x_i = 0$, т. к. по условию x_i-четности (см. равенство (1.1.1)) функции f и f_m совпадают в окрестности гиперплоскостей $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Второе слагаемое в подынтегральном выражении имеет более слабую особенность в точке $y = x$, чем первое, поэтому достаточно исследовать первое слагаемое, которое равно

$$C_{(\beta=1)} |x-y|^{1-N-|\gamma|} \, .$$

Таким образом, заключаем, что

$$|f(x) - f_m(x)| \left| \int\limits_{\Gamma_N^+} \cos \nu_i \, \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|} \right) (y')^{\gamma-1} \, d\Gamma_N \right| \leq$$

$$\leq \; C \, C_{(\beta=1)} \delta^{1-N-|\gamma|} \, |f(x) - f_m(x)| \; ,$$

где δ определяется по формуле (2.5.3), а C — весовая площадь поверхности Γ_N^+. Если точка x принадлежит ω_N^+ (см. (1.1.2)), то полученное выражение становится малым при $m \to \infty$ независимо от точки x (т. е. равномерно по x).

Теперь рассмотрим объемный интеграл в (2.5.10). Область интегрирования представим следующим образом

$$\Omega_N^+ = \mathbb{B}^+_{x,R}(N) \cup \left\{ \Omega_N^+ \setminus \mathbb{B}^+_{x,R}(N) \right\} \, ,$$

где $\mathbb{B}^+_{x,R}(N)$ — N-полушар с центром в точке x радиуса R. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^+_{x,R}(N)} |f(y)-f(x)-f_m(y)+f_m(x)| \left|(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right| (y')^\gamma \, dy+$$

$$+\int\limits_{\Omega^+_N \backslash \mathbb{B}^+_{x,R}(N)} |f(y)-f(x)-f_m(y)+f_m(x)| \left|(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i} T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right| (y')^\gamma \, dy \leq$$

$$\leq C_{(\beta=2)} \left[2K \int\limits_{\mathbb{B}^+_{x,R}(N)} |x-y|^{\alpha-N-|\gamma|} (y')^\gamma \, dy+ \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega^+_N \backslash \mathbb{B}^+_{x,R}(N)} |f(y)-f(x)-f_m(y)+f_m(x)| \, |x-y|^{-N-|\gamma|} (y')^\gamma \, dy \right].$$

Здесь первое слагаемое оценили исходя из неравенства Гельдера и оценки (2.5.7). Теперь к интегралу по шару применяем оценку (2.2.15), в которой нужно положить $\lambda = N + |\gamma| - \alpha$, а в интеграле по $\Omega^+_N \setminus \mathbb{B}^+_{x,R}$ воспользуемся неравенством $|x-y| \geq R$, т. е. $|x-y|^{-N-|\gamma|} \leq R^{-N-|\gamma|}$, тогда получим, что интеграл по объему в (2.5.10) не превосходит следующее выражение

$$C_3 K R^\alpha + \int\limits_{\Omega^+_N \backslash \mathbb{B}^+_{x,R}(N)} (|f(y)-f_m(y)| + |f(x)-f_m(x)|) \frac{C_4}{R^{-N-|\gamma|}} (y')^\gamma \, dy,$$

в котором первое слагаемое можем сделать достаточно малым при достаточно малом R, а второе — при фиксированном R и достаточно большом m.

Доказательство закончено.

Глава 3

Обращение B-потенциалов Ньютона и операторов типа «плоская весовая волна»

Проблема обращения B-потенциалов поставлена И.А. Киприяновым. Изучалась многими его учениками, среди которых Л.А. Иванов, В.В. Катрахов, Л.Н. Ляхов. Наиболее полные исследования, касающиеся гладких плотностей, проведены Л.Н. Ляховым. Эти исследования содержатся в книге [20].

3.1 Обращение B-потенциала Ньютона, отвечающего непрерывной по Гельдеру плотности

В случае, когда плотность B-потенциала Ньютона дифференцируема, исследуемая этом пункте проблема решена в [20], с. 13-24. Здесь мы изучаем возможность обращения B-потенциалов для плотностей непрерывных по Гельдеру, x'-четных и только для ньютоновских B-потенциалов с целым $|\gamma|$.

Теорема 3.1.1 *Пусть y'-четная функция f удовлетворяет условию Гельдера, ее носитель принадлежит ограниченной области $\Omega_N^+ \cup \Gamma_N^0$. Тогда B-потенциал $U_B[f]$ удовлетворяет сингулярному уравнению Пуассона*

$$\Delta_B U_B[f](x) = (2 - N - |\gamma|)|S_1^+(N)|_\gamma f(x)\,, \tag{3.1.1}$$

где оператор Δ_B определяется по формуле (2.1.6)*, а $|S_1^+(N)|_\gamma$ – площадь поверхности части сферы, см.* (2.2.10).

Доказательство. Если x — произвольная внутренняя точка области Ω_N^+, то выделим в области Ω_N^+ N-мерный шар $\mathbb{B}_{\varepsilon,x}^+$ с центром в этой точке достаточно малого радиуса ε, чтобы этот шар лежал внутри частично замкнутой области $\Omega_N^+ \cup \Gamma_N^0$ (возможно, касаясь границы симметрии Γ_N^0). Если же хотя бы одна из весовых координат x_i точки x равна нулю, то выделенное нами множество $\mathbb{B}_{\varepsilon,x}^+$ – полушар с центром на гиперплоскости $x_i = 0$, в соответствующей области $x_i > 0,\ i = \overline{1,n}$. Тогда

$$\Delta_B\, U_B[f](x) = \Delta_B \left(\int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\; T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\; (y')^\gamma dy \right) =$$

$$= \Delta_B \left(\int\limits_{\Omega_N^+ \setminus \mathbb{B}_{\varepsilon,x}^+} + \int\limits_{\mathbb{B}_{\varepsilon,x}^+} \right) f(y)\; T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\; (y')^\gamma dy\,.$$

Здесь первое слагаемое — B-гармоническая функция (см. замечание 2.3.1), следовательно

$$\Delta_B\, U_B[f](x) = \Delta_B \int\limits_{\mathbb{B}^+_{\varepsilon,x}} f(y)\ T^y_x |x|^{2-N-|\gamma|}\ (y')^\gamma dy\,.$$

Ясно, что левая и, следовательно, правая части этого равенства не зависят от выбора ε. Из теорем 2.5.1 и 2.5.2 следует, что формулы (2.4.3) и (2.4.5) верны для непрерывной по Гельдеру функции f. Применяя эти формулы, получим

$$\Delta_B\, U_B[f](x) = \int\limits_{\mathbb{B}^+_{\varepsilon,x}(N)} (f(y){-}f(x))\ \left(\Delta_B\, T^y |x|^{2-N-|\gamma|}\right)\ (y')^\gamma\, dy -$$

$$-C(\gamma)\, f(x) \int\limits_{\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)} \left(\sum_{i=1}^{N+n}\right)' \cos\nu_i \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_i} |z{-}\widetilde{x}|^{2-N-\gamma}\right)\ \mathbf{z}_2^{\gamma-1}\, d\mathbb{T}(z) -$$

$$-C(\gamma)\, f(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{x_k} \int\limits_{\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)} \cos\nu_{2k-1} |z-\widetilde{x}|^{2-N-\gamma}\ \mathbf{z}_2^{\gamma-1}\, d\mathbb{T}(z)\,, \quad (3.1.2)$$

где $\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)$ — поверхность тора, образовавшаяся от вращений $y_i \to \sqrt{z^2_{2i-1}+z^2_{2i}}$ ($i = \overline{1,n}$) N-мерного шара $\mathbb{B}^+_{\varepsilon,x}(N)$ в евклидовом пространстве большей размерности $\mathbb{R}^+_{N+n}$, штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с четными номерами $i = 2k$, когда i принимает значения $i = 1, 2, \ldots, 2n$ $(n \le N)$, а ν_i — угол между направлением внешней нормали к поверхности $\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)$ и оси Oz_i. Но этот тор превратится в положительный N-полушар, если точка x принадлежит пересечению весовых координатных гиперплоскостей $\{x_i = 0\}$, т. е. когда $x \in \Gamma^0_N$. При этом исчезнут все обобщенные сдвиги ($T^x_0 f = f(x)$) и вычисление константы в правой части формулы (3.1.1) станет значительно проще, чем мы и воспользуемся далее. Но предварительно надо показать , что пределы при $\varepsilon \to 0$ существуют и ограничены.

Рассмотрим объемный интеграл в правой части (3.1.2). Подынтегральное выражение здесь равно нулю почти всюду[1]. Поэтому интеграл по объему выбранного шара в (3.1.2) равен нулю.

Рассмотрим слагаемое, состоящее из поверхностных интегралов в (3.1.2). Для первого из них введем обозначение I_1, для второго — I_2. Имеем

$$I_1{=}C(\gamma)\,f(x)\int\limits_{\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)}\left(\sum_{i=1}^{N+n}\right)'\cos\nu_i\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}_i}|z{-}\widetilde{x}|^{2-N-|\gamma|}\right)\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,d\mathbb{T}=$$

$$=(N{+}|\gamma|{-}2)C(\gamma)f(x)\int\limits_{\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)}\left(\sum_{i=1}^{N+n}\right)'\cos\nu_i|z{-}\widetilde{x}|^{-N-\gamma}\,(z_i{-}\widetilde{x}_i)\mathbf{z}_2^{\gamma-1}d\mathbb{T}\,.$$

Тогда

$$I_1+I_2=C(\gamma)\,f(x)\,\times$$

$$\times\left((N{+}|\gamma|{-}2)\int\limits_{\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)}\left(\sum_{i=1}^{N+n}\right)'\cos\nu_i|z{-}\widetilde{x}|^{-N-\gamma}\,(z_i{-}\widetilde{x}_i)\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}d\mathbb{T}\,-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{x_k}\int\limits_{\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)}\cos\nu_{2k-1}|z-\widetilde{x}|^{2-N-\gamma}\,\mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,d\mathbb{T}(z)\right),$$

---

[1]Равенство $\Delta_B T^y|x|^{2-N-|\gamma|}=0,\ x\neq 0$ можно доказать непосредственно, вычислив соответствующие производные и интегралы обобщенного сдвига. Если предварительно воспользоваться коммутируемостью обобщенного сдвига с оператором Δ_B : $\Delta_B T^{y'}_{x'}f(x',y''-x'')=T^{y'}_{x'}\Delta_B f(x',x'')$, то доказательство сведется только к вычислению производных $\triangle_B$ от ядра B-потенциала $|x|^{2-N-|\gamma|}$ при $x\neq 0$, что значительно проще. Свойство коммутируемости приведено в [9] (см. формулу 1.8.3) для функций, представленных интегралом Фурье по j-функциям Бесселя и доказано в [24] (формула (1.10)) для произвольных функций x'-четных в $\mathbb{R}^+_N$ и дважды непрерывно дифференцируемых в любой области $\Omega^+_N\in\mathbb{R}^+_N$.

Как видим, для доказательства формулы (3.1.1) остается показать, что выражение в скобках ограничено и равно соответствующей константе. Ограниченность в особенности не очевидна ввиду присутствия во втором интеграле множителя γ_i/x_i в каждом слагаемом. Поэтому ниже мы рассматриваем предельный случай, когда $x_i \to 0 \ \forall i = \overline{1,n}$. При этом поверхность тора перейдет в поверхность сферы с центром в точке $\widetilde{x}^0 = (0, x'') \in \overline{\mathbb{R}^+_{N+n}}$. Ограниченность первого интеграла (и независимость от ε) проверяется просто: в пределе мы получим интеграл

$$\Bigg| \int\limits_{S^+_{\varepsilon,(0,x'')}(N+n)} \left(\sum_{i=1}^{N+n}\right)' \cos\nu_i (|\mathbf{z}_1|^2 + |\mathbf{z}_2|^2 + |y'' - x''|^2)^{-N-|\gamma|} \times$$

$$\times\ (z_i - \widetilde{x}^0_i)\, \mathbf{z}_2^{\gamma-1} dS(z) \Bigg| \leq$$

$$\leq \int\limits_{S^+_{1,0}(N+n)} \left(\sum_{i=1}^{N+n}\right)' \varepsilon^{1-N-|\gamma|}\, \varepsilon^{|\gamma|-n} \prod_{k=1}^{n} \Theta^{\gamma-1}_{2k}\, \varepsilon^{N+n-1} dS_1(N+n) = A_{N,n,\gamma}\,.$$

Ясно что $A_{N,n,\gamma} < \infty$ и не зависит от ε.

Рассмотрим k-е слагаемое, входящее в I_2. По теореме Гульдена элемент поверхности вращения равен произведению соответствующего элемента той поверхности, которая вращается, на длину окружности, радиусом которой служит расстояние R от оси вращения до барицентра (центр тяжести) участка вращающейся поверхности. Для поверхности весового тора это расстояние R принадлежит интервалу $(x_k + \varepsilon)$ и положим его равным $\alpha\, x_k$, где число $\alpha = \alpha(\gamma_k, \varepsilon)$ близко к единице ввиду малости ε. Затем перейдем к интегрированию по тору полученному вращением единичной сферы вокруг гипероси $x_k = 0$. Такая сфера касается координатной плоскости $x_k = 0$, поэтому радиус вращения окажется тоже равным единице ("тор без дырки"). Поверхность такого тора обозначим $\mathbb{T}^+_{1,1}$. Итак,

$$\lim_{x_i\to 0}\frac{\gamma_k}{x_k}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{T}^+_{\varepsilon,\tilde{x}}(N+n)}\cos\nu_{2k-1}|z-\widetilde{x}|^{2-N-\gamma}\ \mathbf{z}_2^{\gamma-1}\,d\mathbb{T}(z)\Bigg|\le$$

$$\le\lim_{x_i\to 0}\frac{\gamma_k}{x_k}\int\limits_{\mathbb{T}^+_{1,1}(N+n)}\varepsilon^{2-N-|\gamma|}\,\varepsilon^{N+n-2}\,\alpha\,x_k\,\mathbf{\Theta}_2^{\gamma-1}\,d\mathbb{T}(z)<\infty\,.$$

Как видим, последнее выражение не зависит от x_k . Отсюда следует ограниченность правой части в формуле (3.1.2) для последнего из поверхностных интегралов.

Остается вычислить константу $C_{N,n,\gamma}$ и убедиться в правильности формулы (3.1.1). Мы воспользуемся тем, что эта константа не зависит от положения точки $x\in\Omega^+_N\cup\Gamma_0$ и останется той же для точки $x_0=(0,x'')$, лежащей на пересечении всех весовых координатных плоскостей. Но в этом случае в применяемых формулах исчезнет обобщенный сдвиг, процедура вращений (которая бы перевела сферу $S^+_1(N)$ в сферу $S^+_2(N+n)$) уже не нужна, и в результате константа находится очень просто следующим образом. Применим формулы (2.4.4) и (2.4.1), учтем при этом, что при интегрировании по поверхности сферы исчезнет слагаемое, содержащее сингулярную составляющую сингулярного дифференциального оператора первого порядка $B^1_{\gamma_i}$ (2.1.3) (Это следствие того, что $\cos\nu_{2k-1}$ ведет себя как нечетная функция по отношению к точке $\nu_{2k-1}=\frac{\pi}{2}$). Тогда

$$\Delta_B U_B[f](x_0)=f(x_0)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{S^+_\varepsilon(N)}\cos\nu_i\,\frac{\partial}{\partial y_i}\left(|y'|^2+|y''-x''|^2\right)^{\frac{2-N-|\gamma|}{2}}\times$$

$$\times\,(y')^\gamma\,dS_\varepsilon(y)+\int\limits_{\mathbb{B}^+_{x_0}}(f(y)-f(x))\ \left(\Delta_B|y-x_0|^{2-N-|\gamma|}\right)\,(y')^\gamma\,dy\,.$$

Здесь объемный интеграл, как нам уже известно, равен нулю, а выражение под знаком сферического интеграла — теперь производная в направлении радиуса. Поэтому, переходя к интегрированию по поверхности единичной сферы, получим

$$\Delta_B U_B[f](x_0) = (2-N-|\gamma|)\ f(x_0) \int\limits_{S_1^+(N)} (y')^\gamma\, dS_1(y) =$$

$$= (2-N-|\gamma|)\,|S_1^+(N)|_\gamma\ f(x_0)\,.$$

Тем самым, константа, заявленная в формулировке теоремы, подтверждена.

Доказательство закончено.

3.2 Применение формулы обращения B-потенциала для обращения операторов типа «плоская весовая волна»

Функция одного переменного $f(t)$, определенная в $\mathbb{R}_N$ в виде функции от скалярного произведения N-мерных векторов $f(\langle x\,,\,\xi\rangle)$, называется плоской волной [8]. Соответственно интегральная операция

$$Au(x) = \int f(\langle x\,,\,\xi\rangle)\ u(\xi)\ d\mu(\xi)$$

называется операцией типа плоская волна.

Термин *плоская весовя волна* введен в [11]. Появление такого рода конструкций достаточно просто проследить в интегральных операциях с функциями от сферических симметрий. Именно, пусть многомерный оператор Пуассона, отвечающий мультииндексу $\gamma = (\gamma_1,\,\ldots,\,\gamma_n)$, состоящему из фиксированных положительных чисел действует на функцию f по формуле (1.1.5). Имеет место следующая теорема, представляющая собой один из вариантов теоремы о сферическом уплотнении, приведенной в [24].

Теорема 3.2.1 *Если* $u = u(|\mathbf{x}^1|, \dots, |\mathbf{x}^n|, x'')$, *где* $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}_{m_i}$, *то*

$$Au(x) = Au(r, x'') =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} |S_1(m_i)| \int\limits_{\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}} \mathcal{P}_r^\gamma f\left(\langle (r,\, x''),\, (\rho, \xi'') \rangle\right)\; u(\xi)\, \rho^\gamma\, d\rho\, d\xi'' ,$$

где $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i = |\mathbf{x}^i|$, $|S_1(m_i)|$ *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^+_{m_i}$, r *и* $\rho \in \mathbb{R}^+_n$, $\mathcal{P}^\gamma_r$ *— многомерный оператор Пуассона, отвечающий целочисленному мультииндексу* $\gamma = (m_1 - 1, \dots, m_n - 1)$.

Доказательство. Используем схему доказательств теорем о сферическом уплотнении, примененную в [24]. Коротко — сначала в каждом $\mathbb{R}^+_{m_i}$ совершим вращение, переводящие скалярное произведение в одно слагаемое, затем набор сферических преобразований по координатам каждого m_i-мерного вектора $\mathbf{x}^i$ приведет к указанной в теореме формуле.

Одним из примеров операций типа "плоская весовая волна" является преобразование Фурье-Ганкеля [16], [24].

В общем виде функция "плоская весовая волна" задается в виде действия многомерного оператора Пуассона на функцию "плоская волна": $\mathcal{P}^\gamma_{x'} f(\langle x\,,\,\xi \rangle)$.

Введем интегральную операцию — сферическое среднее плоской весовой волны

$$M^\gamma(f) = \frac{1}{|S_1^+(N)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}^\gamma_{\xi'} f\left(\langle x\,,\,\xi \rangle\right) (x')^\gamma\, dS(x) ,$$

где $S_1^+(N)$ – поверхность единичной сферы в евклидовом пространстве размерности N с центром в начале координат, $|S_1^+(N)|$ — ее весовая площадь (определяется по формуле (2.2.10)).

В [20] (формула (1.7.13)) получено равенство

$$\int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}^\gamma_{\xi'} f\left(\langle x\,,\,\xi\rangle\right)(x')^\gamma\,dS(x)=|S_1^+(N-1)|_\gamma\int\limits_{-1}^{+1}(1^2-p^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}f(p|\xi|)\,dp\,, \tag{3.2.1}$$

из которого следует

$$M^\gamma(f)=\frac{|S_1^+(N-1)|_\gamma}{|S_1^+(N)|_\gamma}\int\limits_{-1}^{+1}(1^2-p^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}f(p|\xi|)\,dp\,.$$

Если положить в последнем равенстве функцию f равной 1, то учитывая, что $\mathcal{P}^\gamma(1)=1$, получим

$$1=\frac{|S_1^+(N-1)|_\gamma}{|S_1^+(N)|_\gamma}\int\limits_{-1}^{+1}(1^2-p^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}\,dp\,.$$

Здесь интеграл справа вычисляется по формуле для β-функций Эйлера (см. [6], формула 855.41). Таким образом, приходим к рекуррентной формуле

$$\frac{|S_1^+(N)|_\gamma}{|S_1^+(N-1)|_\gamma}=\frac{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}\,. \tag{3.2.2}$$

Для отношения площадей обычных единичных сфер в евклидовых пространствах размерностей N и $N-1$ подобная формула приведена в книге Ф. Йона [8] (с.16, формула (1.3)). Интересно отметить , что формула (1.3) из книги Ф. Йона получается из формулы (3.2.2), если в последней положить $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_n=0$.

При $f(t)=|t|^k$ из (3.2.1) получаем

$$\frac{1}{|S_1^+(N-1)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(N)}\mathcal{P}^\gamma_{\xi'}|\langle x\,,\,\xi\rangle|^k\,(x')^\gamma\,dS(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)}\,|\xi|^k\,, \tag{3.2.3}$$

а при $f(t)=|t|^k\ln|t|$

$$\int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}^\gamma_{\xi'} |\langle x,\xi\rangle|^k \ln|\langle x,\xi\rangle|\,(x')^\gamma dS(x) = \frac{\pi^{\frac{N-n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)}\times$$

$$\times|\xi|^k\left(\ln|\xi|+\mathcal{F}\left(\frac{k+1}{2}\right)-\mathcal{F}\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)\right), \qquad (3.2.4)$$

где $\mathcal{F}(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Здесь воспользовались формулой для вычисления логарифмических интегралов (см. [4] с. 552 формула 4.253).

Здесь мы проблему обращения рассматриваем для некоторых операторов типа "плоская весовая волна" , но исключительно для случая, когда число $N+|\gamma|$ — натуральное.

3.2.1 Обращения интегральных операций с ядром $|\langle x,\xi\rangle|^k$, когда $N+|\gamma|$ — нечетное число

Формула действия полигармонического оператора на функцию $|x|^k$, $x\in\mathbb{R}_N$ хорошо известна (см., например, [8], с. 18; [29], с. 477), и в ее основе лежит равенство:

$$\Delta|x|^k=k(N+k-2)|x|^{k-2}. \qquad (3.2.5)$$

В следующей лемме приведена подобная формула для B-полигармонического оператора $\triangle_B^m$. Эта формула тоже известна[2], но ее доказательство не удалось найти. Поэтому мы приведем его в сжатой форме.

Лемма 3.2.1 *Пусть m и k — натуральные числа, $x\in\mathbb{R}_N$. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\triangle_B^m|x|^k=\Pi_1\,\Pi_2\,|x|^{k-2m},$$

[2]Применялась в книге Л.Н. Ляхова [20].

где

$$\Pi_1 = \prod_{j=1}^{m} (k-2(j-1)) \ , \quad \Pi_2 = \prod_{j=1}^{m} (N+|\gamma|+k-2j) \ .$$

Доказательство. Поскольку

$$\Delta_B = \Delta + \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \, ,$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, и

$$\frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} |x|^k = \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{k}{2} \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right]^{\frac{k}{2}-1} 2x_i = k\gamma_i \, |x|^{k-2} \, ,$$

то применяя (3.2.7), получаем

$$\Delta_B |x|^k = k(N+|\gamma|+k-2)|x|^{k-2} \, .$$

Отсюда

$$\triangle_B^m |x|^k = k(k-2) \, \ldots \, (k-2(m-1)) \, \times$$

$$\times \, (N+|\gamma|+k-2)(N+|\gamma|+k-4) \, \ldots \, (N+|\gamma|+k-2m)|x|^{k-2m} =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} (k-2(j-1)) \prod_{j=1}^{m} (N+|\gamma|+k-2j) \, |x|^{k-2m} = \Pi_1 \, \Pi_2 \, |x|^{k-2m} \, .$$

Доказательство закончено.

Теорема 3.2.2 *Пусть носитель* ξ' *-четной и удовлетворяющей условию Гельдера функции* f *принадлежит ограниченной области* Ω_N^+ , *число* $N+|\gamma|>2$ *натуральное нечетное и* $k=1,3,5,\ldots$. *Тогда*

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x \, , \, \xi \rangle|^k \; (x')^\gamma \; dS(x) (\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= 2^{N+|\gamma|-2n+1} \, \pi^{N-n-1} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^2 \left(\frac{\gamma_i+1}{2} \right) \, i^{N+|\gamma|-1} \, k! \, f(\eta) \, . \qquad (3.2.6)$$

Доказательство. По условию $N+|\gamma|$ — натуральное нечетное число. Запишем равенство (3.2.3), заменив в нем ξ'' на $\xi''-\eta''$

$$\int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}^\gamma_{\xi'}\,|\langle x\,,\,(\xi',\,\xi''-\eta'')\rangle|^k\ \ (x')^\gamma\ dS(x)=C_{N,n,k}(\gamma)\ |(\xi',\,\xi''-\eta'')|^k\,, \tag{3.2.7}$$

где

$$C_{N,n,k}(\gamma)=\frac{\pi^{\frac{N-n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)}\,. \tag{3.2.8}$$

Умножим (3.2.7) на $\left(T^{\eta'}_{\xi'}f\right)(\xi',\,\xi'')$ и проинтегрируем по $\xi\in\mathbb{R}^+_N$ с весом $(\xi')^\gamma$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}(T^{\eta'}_{\xi'}f)(\xi)\int\limits_{S_1^+(N)}\ \mathcal{P}^\gamma_{\xi'}|\langle x\,,\,(\xi',\,\xi''-\eta'')\rangle|^k,\ (x')^\gamma\ dS(x)\ (\xi')^\gamma d\xi=$$

$$=C_{N,n,k}(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}(T^{\eta'}_{\xi'}f)(\xi)\,|(\xi',\,\xi''-\eta'')|^k(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Здесь слева заменяем $\xi''-\eta''$ на ξ''. Из свойства самосопряженности обобщенного сдвига следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}(T^{\eta'}_{\xi'}f)(\xi',\xi''+\eta'')\int\limits_{S_1^+(N)}\ \mathcal{P}^\gamma_{\xi'}|\langle x\,,\,\xi\rangle|^k\ (x')^\gamma\ dS(x)(\xi')^\gamma d\xi=$$

$$=C_{N,n,k}(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}\left(T^{\eta'}_{\xi'}|(\xi',\,\xi''-\eta'')|^k\right)f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

По определению смешанного обобщенного сдвига (1.2.2) получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}(T^{-\eta}f)(\xi)\int\limits_{S_1^+(N)}\ \mathcal{P}^\gamma_{\xi'}|\langle x\,,\,\xi\rangle|^k\ (x')^\gamma\ dS(x)(\xi')^\gamma d\xi=$$

$$=C_{N,n,k}(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}\left(T^{\eta}|\xi|^k\right)f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Как видим, справа имеем B-потенциал порядка $-k$. К полученному равенству $\frac{N+|\gamma|+k}{2}$ раз применим оператор $\triangle_{B_\eta}$. Напомним, что по предположению теоремы $N+|\gamma|$ и k — натуральные нечетные числа, следовательно, $\frac{N+|\gamma|+k}{2}$ — натуральное число. Имеем

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta}f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k \ (x')^\gamma \ dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma)\, \triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T^\eta |\xi|^k\right) f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Возможность дифференцирования B-потенциала под знаком интеграла вытекает из теоремы 2.2.1: если число p таково, что $-k+p<N+|\gamma|$, то B-потенциал можно дифференцировать p раз под знаком интеграла. Таким числом является $p=N+|\gamma|+k-1$. Следовательно, оператор $\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}}$ можно внести под знак интеграла, и тогда

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta}f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k \ (x')^\gamma \ dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma)\, \triangle_{B_\eta} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} \left(T^\eta |\xi|^k\right) \ f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma)\, \triangle_{B_\eta} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \triangle_{B_\xi}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} \left(T^\eta |\xi|^k\right) \ f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma)\, \triangle_{B_\eta} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T^\eta \left(\triangle_{B_\xi}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} |\xi|^k\right) \ f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

В предпоследнем равенстве воспользовались перестановочностью смешанного обобщенного сдвига с оператором Δ_B (см. свойство (1.2.4)).

Поскольку число $\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}$ — натуральное, то по лемме 3.2.1, положив в ней $m=\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}$, получим

$$\triangle_{B_\xi}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} |\xi|^k = \Pi_1\, \Pi_2\, |\xi|^{2-N-|\gamma|}\,,$$

где

$$\Pi_1 = \prod_{j=1}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} (k-2(j-1)) \ , \quad \Pi_2 = \prod_{j=1}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} (N+|\gamma|+k-2j) \ .$$

В произведении Π_1 выделим отрицательные сомножители:

$$\Pi_1 = \prod_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} (k-2(i-1)) \prod_{j=\frac{k+3}{2}}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} (k-2(j-1))$$

(отрицательные сомножители входят во второе произведение в Π_1). Представим Π_1 через произведения Γ-функций Эйлера, для чего воспользуемся хорошо известной в теории Γ-функций Эйлера формулой:

$$\Gamma(z+\ell) = (z+\ell-1)(z+\ell-2)\dots(z)\ \Gamma(z) = \prod_{i=1}^{\ell}(z+\ell-i)\ \Gamma(z)\,.$$

В частности, если k – нечетное натуральное число, то

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\dots\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ ; \quad (3.2.9)$$

если же k – четное натуральное число, то

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) = \left(\frac{k}{2}\right)!\ . \qquad (3.2.10)$$

Умножим и разделим второе произведение в Π_1 на $(2-N-|\gamma|)$, имеем

$$\Pi_1 = \prod_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} (k-2(i-1))\ \frac{\prod\limits_{j=\frac{k+3}{2}}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} (k-2(j-1))}{2-N-|\gamma|} =$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{k}{2}-i+1\right) \frac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\ 2^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} \prod\limits_{j=\frac{k+3}{2}}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \left(-\frac{k}{2}+j-1\right)}{2-N-|\gamma|} =$$

$$= (-1)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} 2^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{k}{2}-i+1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\prod\limits_{j=\frac{k+3}{2}}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \left(-\frac{k}{2}+j-1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2-N-|\gamma|)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Теперь дважды воспользуемся формулой (3.2.9), тогда

$$\Pi_1 = (-1)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\, 2^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\, \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\pi\, (2-N-|\gamma|)}.$$

Рассмотрим Π_2. Учитывая, что $N+|\gamma|+k$ — четное число, запишем

$$\Pi_2 = \prod_{j=1}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} (N+|\gamma|+k-2j) = 2^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} \left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}-j\right).$$

Следовательно, можем применить формулу (3.2.10), тогда

$$\Pi_2 = 2^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} \left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}-1\right)! = 2^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}}\, \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right).$$

Из представлений Π_1 и Π_2 получим

$$\triangle_{B_\xi}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} |\xi|^k =$$

$$= \frac{2^{N+|\gamma|+k-1}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)\, \Gamma\left(\frac{k+N+|\gamma|}{2}\right)\, \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{(2-N-|\gamma|)\pi} (-1)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} |\xi|^{2-N-|\gamma|}. \tag{3.2.11}$$

В силу (3.2.11) для нечетных $N+|\gamma|$ и $k=1,3,5,\ldots$ получим

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta}f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k\, (x')^\gamma\, dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_1\, \triangle_{B_\eta} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T^\eta |\xi|^{2-N-|\gamma|}\right) f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi\,, \tag{3.2.12}$$

где

$$C_1 = \frac{\pi^{\frac{N-n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{2^{N+|\gamma|+k-1}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+N+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{(2-N-|\gamma|)\pi}(-1)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} =$$

$$= \frac{2^{N+|\gamma|-2n+1}\ \pi^{N-n-1}\ \prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(2-N-|\gamma|)}\ \frac{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\ \prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\ i^{N+|\gamma|-1}\,k! =$$

$$= \frac{2^{N+|\gamma|-2n+1}\ \pi^{N-n-1}\ \prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(2-N-|\gamma|)\,|S_1^+(N)|_\gamma}\ i^{N+|\gamma|-1}\,k!\,.$$

К правой части равенства (3.2.12) применяем терему 3.1.1, согласно которой Δ_B обращает B-потенциал Ньютона по следующей формуле:

$$\Delta_{B_\eta}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\left(T^\eta|\xi|^{2-N-|\gamma|}\right)f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi = (2-N-|\gamma|)|S_1^+(N)|_\gamma\, f(\eta)\,,$$

тогда, равенство (3.2.12) запишется в виде (3.2.6).

Доказательство теоремы закончено.

3.2.2 Обращения интегральных операций с ядром $|\langle x,\xi\rangle|^k\ \ln|\langle x,\xi\rangle|$, когда $N+|\gamma|$ — четное число

Лемма 3.2.2 *Пусть* $k=0,2,4\ \dots\ $, $m\geq\frac{k+2}{2}$ *и* $x\in\mathbb{R}_N$. *Тогда*

$$\Delta_B^m|x|^k\ln|x| = \Pi_1\,\Pi_2\,|x|^{k-2m}\,,$$

где

$$\Pi_1 = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\frac{k+2}{2}}}^{m}(k-2(j-1))\,,\quad \Pi_2 = \prod_{j=1}^{m}(k+N+|\gamma|-2j)\,.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta_B\,|x|^k\ln|x| = \Delta\,|x|^k\ln|x| + \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,|x|^k\ln|x|\,.$$

Действие оператора Лапласа находится по формуле

$$\Delta\,|x|^k\ln|x| = k(k+N-2)|x|^{k-2}\ln|x| + (2k+N-2)|x|^{k-2}\,.$$

Из двух последних равенств следует

$$\Delta_B\,|x|^k\ln|x| =$$

$$= k(k+N+|\gamma|-2)|x|^{k-2}\ln|x| + (2k+N+|\gamma|-2)|x|^{k-2}\,.$$

Применяя оператор Δ_B дважды, получим

$$\Delta_B^2\,|x|^k\ln|x| =$$

$$= k(k+N+|\gamma|-2)(k-2)(k+N+|\gamma|-4)|x|^{k-4}\ln|x| + C_2(N,k,\gamma)|x|^{k-4}\,,$$

где

$$C_2(N,k,\gamma) = k(k+N+|\gamma|-2)(2k+N+|\gamma|-4)+$$

$$+(2k+N+|\gamma|-2)(k-2)(k+N+|\gamma|-4)\,.$$

И так далее. Для степеней m, таких что $1\le m\le\frac{k}{2}$ справедлива формула:

$$\Delta_B^m\,|x|^k\ln|x| =$$

$$= \prod_{j=1}^{m}(k-2(j-1))\,\prod_{j=1}^{m}(k+N+|\gamma|-2j)|x|^{k-2m}\ln|x| + C_m(N,k,\gamma)|x|^{k-2m}\,,$$

где $C_m(N,k,\gamma)$ — числовая константа, зависящая от k, N, γ, своя для каждого номера m.

Рассмотрим случай $m=\frac{k}{2}$

$$\Delta_B^{\frac{k}{2}}\,|x|^k\ln|x| =$$

$$= \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k-2(j-1)) \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k+N+|\gamma|-2j)|x|^0 \ln|x| + C_{k/2}(N,k,\gamma)|x|^0 =$$

$$= \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k-2(j-1)) \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k+N+|\gamma|-2j) \ln|x| + C_{k/2}(N,k,\gamma)\,.$$

Следующее применение оператора Δ_B дает

$$\Delta_B^{\frac{k+2}{2}} |x|^k \ln|x| = \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k-2(j-1)) \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k+N+|\gamma|-2j)\, \Delta_B \ln|x| =$$

$$= \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k-2(j-1)) \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k+N+|\gamma|-2j)(N+|\gamma|-2)|x|^{-2} =$$

$$= \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k-2(j-1)) \prod_{j=1}^{\frac{k+2}{2}}(k+N+|\gamma|-2j)|x|^{-2}\,.$$

Как видим, рассмотренное сочетание чисел m и k, привело к исчезновению логарифма в правой части формулы.

Итак, для всех чисел m таких, что $m \geq \frac{k+2}{2}$ справедливо следующее равенство:

$$\Delta_B^m |x|^k \ln|x| = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq \frac{k+2}{2}}}^{m} (k-2(j-1)) \prod_{j=1}^{m}(k+N+|\gamma|-2j)|x|^{k-2m} =$$

$$= \Pi_1\, \Pi_2\, |x|^{k-2m}\,.$$

Доказательство леммы закончено.

Теорема 3.2.3 *Пусть* f – ξ'*-четная удовлетворяющая условию Гельдера функция, носитель которой принадлежит ограниченной области* Ω_N^+*, число* $N+|\gamma|>2$ *натуральное четное и* $k=0,2,4,\ldots$. *Тогда имеет место следующая формула обращения*

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x,\xi\rangle|^k \ln|\langle x,\xi\rangle| (x')^\gamma\, dS(x)\, (\xi')^\gamma\, d\xi =$$

$$= -\pi^{N-n} 2^{N+|\gamma|-2n} i^{N+|\gamma|} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^2 \left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) k\,!\, f(\eta)\,. \qquad (3.2.13)$$

Доказательство. Доказательство проводим по той же схеме, что и в предыдущей теореме. Но теперь по условию $N+|\gamma|$ — натуральное четное число, поэтому за исходное берем равенство (3.2.4). На определенном этапе доказательства, после выделения из правой части равенства (3.2.4) B-потенциала, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k \ln|\langle x\,,\xi\rangle| \;(x')^{\gamma}\; dS(x)(\xi')^{\gamma} d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T^{\eta}|\xi|^k \;(\ln|\xi|+C)\right) f(\xi)(\xi')^{\gamma} d\xi\,, \qquad (3.2.14)$$

где

$$C = \mathcal{F}\left(\frac{k+1}{2}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right), \quad \mathcal{F}(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\,,$$

а коэффициент $C_{N,n,k}(\gamma)$ определяется по формуле (3.2.8).

Равенство (3.2.14) перепишем в виде

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k \ln|\langle x\,,\xi\rangle| \;(x')^{\gamma} dS(x)\,(\xi')^{\gamma} d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma)\, \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T^{\eta}|\xi|^k \;\ln|\xi|\right) f(\xi)(\xi')^{\gamma} d\xi +$$

$$+ C_{N,n,k}(\gamma)\, C\, \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T^{\eta}|\xi|^k\right) f(\xi)(\xi')^{\gamma} d\xi\,.$$

Здесь второе слагаемое справа — B-потенциал порядка $-k$, $k{=}0,2,\ldots$ с ядром $|\xi|^{-k}$, что противоречит определению B-потенциала 2.2.1. Делаем вывод, что $\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T^{\eta}|\xi|^k\right) f(\xi)(\xi')^{\gamma} d\xi = 0$ при четном k, тогда

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k \ln|\langle x\,,\xi\rangle| \;(x')^{\gamma} dS(x)\,(\xi')^{\gamma} d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma)\, \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \left(T^\eta |\xi|^k \, \ln|\xi|\right) f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi\,.$$

К последнему равенству применим оператор $\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}}$, и теми же рассуждениями, что и в предыдущей теореме, приходим к формуле

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^\gamma |\langle x\,,\, \xi\rangle|^k \ln|\langle x\,,\xi\rangle|\; (x')^\gamma dS(x)\, (\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_{N,n,k}(\gamma)\, \triangle_{B_\eta} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T^\eta \left(\triangle_{B_\xi}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} |\xi|^k \, \ln|\xi| \right) f(\xi)(\xi')^\gamma d\xi\,. \qquad (3.2.15)$$

В правой части (3.2.15) получили конструкцию $\triangle_{B_\xi}^{\frac{N+|\gamma|+k-2}{2}} |\xi|^k \, \ln|\xi|$. По условию, $N+|\gamma|>2$ — натуральное четное число и $k{=}0,2,4,\ldots$, тогда число $\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}$ (показатель степени оператора Δ_{B_ξ}) — натуральное, причем $\frac{k+N+|\gamma|-2}{2} \geq \frac{k+2}{2}$. Следовательно, можем воспользоваться леммой 3.2.2, положив в ней $m=\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}$. Имеем

$$\Delta_B^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}}\, |\xi|^k \ln|\xi| = \Pi_1\, \Pi_2\, |\xi|^{2-N-|\gamma|}\,,$$

где

$$\Pi_1 = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\frac{k+2}{2}}}^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} (k-2(j-1))\;, \quad \Pi_2 = \prod_{j=1}^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} (k+N+|\gamma|-2j)\;.$$

Представим произведение Π_1 в следующем виде $\Pi_1=\Pi_1^+\,\Pi_1^-$, выделив соответственно положительные и отрицательные сомножители, тогда

$$\Pi_1^+ = \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} (k-2(j-1)) = 2^{\frac{k}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2} - j + 1\right) =$$

$$= 2^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right) \ldots 3\cdot 2\cdot 1 = 2^{\frac{k}{2}}\, \left(\frac{k}{2}\right)! = 2^{\frac{k}{2}}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\,,$$

$$\Pi_1^- = \prod_{j=\frac{k+4}{2}}^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} (k-2(j-1)) = \frac{1}{2-N-|\gamma|} \prod_{j=\frac{k+4}{2}}^{\frac{k+N+|\gamma|}{2}} (k-2(j-1)) =$$

$$= \frac{2^{N+|\gamma|-2}}{2-N-|\gamma|} \prod_{j=\frac{k+4}{2}}^{\frac{k+N+|\gamma|}{2}} \left(\frac{k}{2}-j+1\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\, 2^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}}{2-N-|\gamma|} \prod_{j=\frac{k+4}{2}}^{\frac{k+N+|\gamma|}{2}} \left(-\frac{k}{2}+j-1\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\, 2^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}}{2-N-|\gamma|} \cdot 1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{N+|\gamma|}{2}-2\right)\left(\frac{N+|\gamma|}{2}-1\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\, 2^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}}{2-N-|\gamma|} \left(\frac{N+|\gamma|}{2}-1\right)! =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\, 2^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}}{2-N-|\gamma|}\, \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right) .$$

Заметим, что произведение Π_1^- появляется в случае $m > \frac{k+2}{2}$, при $m \le \frac{k+2}{2}$ его нет и $\Pi_1 = \Pi_1^+$.

Переходим к произведению Π_2, имеем

$$\Pi_2 = \prod_{j=1}^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} (k+N+|\gamma|-2j) =$$

$$= 2^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} \left(\frac{k+N+|\gamma|}{2}-j\right) =$$

$$= 2^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} \left(\frac{k+N+|\gamma|}{2}-1\right)\left(\frac{k+N+|\gamma|}{2}-2\right) \ldots \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 2^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}} \left(\frac{k+N+|\gamma|}{2}-1\right)! = 2^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}}\, \Gamma\left(\frac{k+N+|\gamma|}{2}\right) .$$

Таким образом, получили

$$\Delta_B^{\frac{k+N+|\gamma|-2}{2}}\,|\xi|^k\ln|\xi| = \Pi_1\,\Pi_2\,|\xi|^{2-N-|\gamma|} =$$

$$= (-1)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\,2^{k+N+|\gamma|-2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)}{2-N-|\gamma|}\,|\xi|^{2-N-|\gamma|}\,. \tag{3.2.16}$$

Учитывая результат (3.2.16), формула (3.2.15) запишется в следующем виде:

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}(T^{-\eta}f)(\xi)\int\limits_{S_1^+(N)}\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}|\langle x\,,\,\xi\rangle|^k\ln|\langle x\,,\xi\rangle|\,(x')^\gamma dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= C_2\,\Delta_{B_\eta}\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\left(T^\eta|\xi|^{2-N-|\gamma|}\right)f(\xi)\,(\xi')^\gamma\,d\xi\,. \tag{3.2.17}$$

Осталось вычислить коэффициент C_2 . Имеем

$$C_2{=}C_{N,n,k}(\gamma)\,(-1)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\,2^{k+N+|\gamma|-2}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)}{2-N-|\gamma|} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{N-n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)}\,\times$$

$$\times\,\frac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\,2^{k+N+|\gamma|-2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)}{2-N-|\gamma|}\,.$$

По формуле Лежандро

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right) = 2^{-k}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\,(k+1)\;,$$

тогда

$$C_2 = \frac{\pi^{\frac{N-n}{2}}2^{N-n+|\gamma|-1}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{2-N-|\gamma|}\,i^{N+|\gamma|-2}\,k\,!\,.$$

Выделяя площадь поверхности нагруженной сферы (2.2.10), получим C_2 в следующем виде

$$C_2 = -\frac{\pi^{N-n} 2^{N+|\gamma|-2n} \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{(2-N-|\gamma|)\,|S_1^+(N)|_\gamma}\; i^{N+|\gamma|}\, k\,! \,. \tag{3.2.18}$$

Подставляем (3.2.18) в (3.2.17)

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k \ln|\langle x\,,\xi\rangle|\;(x')^\gamma dS(x) (\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= -\frac{\pi^{N-n} 2^{N+|\gamma|-2n} \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) i^{N+|\gamma|}\, k\,!}{(2-N-|\gamma|)\,|S_1^+(N)|_\gamma} \times$$

$$\times\; \Delta_{B_\eta} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T^\eta |\xi|^{2-N-|\gamma|} f(\xi)\,(\xi')^\gamma\, d\xi\,.$$

Применив к правой части последнего равенства теорему 3.1.1 об обращении B-потенциала Ньютона с гельдеровской плотностью, получим формулу (3.2.13).

Доказательство теоремы закончено.

Глава 4

Задача Радона об обращении интегралов по плоскостям от функций от многоосевой сферической симметрии

4.1 Преобразование Радона функций от сферических симметрий

Решение поставленной в заглавии проблемы сводится к обращению преобразования Радона-Киприянова, когда мультииндекс этого преобразования γ является целочисленным. Это связано с тем, что преобразование Радона функций от осевой или многоосевой сферических симметрий есть преобразование Радона-Киприянова с целочисленным мультииндексом γ. Именно, справедлива следующая теорема (впервые сформулирована в [21], [22], доказательство приведено в [25]).

Теорема 4.1.1 *Пусть* $m_i > 1$ *— натуральные числа,* $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}_{m_i}$ *и* f *– измеримая суммируемая функция от многоосевой симметрии в* $\mathbb{R}_{m_i}$ *:* $f = f(|\mathbf{x}^1|, \ldots, |\mathbf{x}^n|, x'')$ *. Преобразование Радона такой функции выражается через преобразование Радона-Киприянова* K_γ *с целочисленным мультииндексом* $\gamma = (m_1-1, \ldots, m_n-1)$ *по формуле*

$$R[f](y;p) = R[f](|\mathbf{y}^1|, \ldots, |\mathbf{y}^n|, \xi''\,;p) = \prod_{i=1}^{n} |S_1(m_i)|\ K_\gamma[f](\xi', \xi''\,;p), \tag{4.1.1}$$

где $|S_1(m_i)|$ *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}_{m_i}$ *,* $|\mathbf{y}^i| = \xi_i$ *— длина радиуса-вектора точки* $\mathbf{y}^i \in \mathbb{R}_{m_i}$ *,* $i = 1, \ldots, n$ *,* $\xi = (\xi', \xi'') \in \mathbb{R}_N^+$*,* $n \leq N$ *.*

Таким образом, задача обращения преобразования Радона функций от сферических симметрий сведена к задаче обращения преобразования Радона-Киприянова в случае целочисленного мультииндекса γ. Далее мы увидим, что обращение преобразования Радона-Киприянова осуществляется по формулам, не зависящим от того, являются ли составляющие мультииндекса γ целыми или нет, целой должна быть только его длина, т. е. $|\gamma|$.

4.2 Непрерывность преобразования Радона-Кипринова в весовых функциональных классах Лебега

Преобразование Радона финитных функций находит практическое применение в задачах компьютерной томографии. Теоретические исследования содержатся во многих работах, мы укажем только книги Д. Хелгасона [30] и Ф. Наттерера [28]. В этой главе вводится класс функций, в который непрерывно действует преобразование Радона-Киприянова весового пространства Лебега.

В работе [26] изучено действие преобразования Радона-Киприянова на действительные финитные функции с конечной нормой, порожденной весовым скалярным произведением следующего вида

$$(u\,,\,v)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} u(x)\,v(x)\,(x')^\gamma\,dx\,,\quad (x')^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\,.$$

Функции u и v заданы в области $\mathbb{R}_N^+{\in}\mathbb{R}_N$ и предполагаются x'-четными по Киприянову. Если одна из них финитна, то четность по каждой из переменных x_i, $i=\overline{1,n}$ позволяет считать, что ее носитель симметричен в $\mathbb{R}_N$ относительно каждой гиперплоскости $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$. Будем полагать, что $supp\, f\in\Omega_N^+$ – ограниченная область в $\mathbb{R}_N^+$, прилегающая к каждой весовой гиперплоскости $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$. Последнее наиболее принципиально для рассматриваемой здесь теории.

Преобразование $K_\gamma[f](\xi,p)$ определено для любой функции f абсолютно интегрируемой по $\mathbb{R}_N^+$ с весом $(x')^\gamma$. Будем предполагать, что $f(x)$ имеет конечный носитель, принадлежащий множеству $\Omega_N^+\cup\Gamma_N^0$. Таким образом, существует положительное число R такое, что

$$supp\, f{=}\Omega_N^+\in\overline{\{|x|<R\}_N^+}{=}\{x:|x|{<}R,\ x_i{\geq}0,\ \ i{=}1,\ldots,n\}\,.$$

Далее мы полагаем, что носитель функции f принадлежит шару с центром в начале координат и радиуса R. Тогда ее преобразование Радона-Киприянова (как и обычное преобразование Радона) имеет смысл рассматривать интегрированием по плоскостям, находящимся на расстоянии $|s|$ от начала координат при $|s|\leq R$. Такие плоскости, пересекаясь с частью шара $\{|x|<R\}^+$, образуют плоскую область, представляющую собой часть шара в $\mathbb{R}_{N-1}^+$ радиуса $\sqrt{R^2-s^2}$.

Предположим, что вектор нормали ξ к плоскости интегрирования фиксирован. Тогда преобразование Радона-Киприянова функции f оказывается функцией одного переменного s, что приводит к необходимости рассматривать множество функций $\{g_\xi(s)\}$ одного переменного s, зависящих от параметра ξ ($|\xi|=1$), который считается фиксированным. Предположим, что $supp\ g_\xi(s)$ принадлежит интервалу $(-R, R)$, числа p и q (≥ 1) связаны соотношением $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и пусть

$$\rho = \rho(s) = \frac{1}{(R^2 - s^2)^{\frac{(n+\gamma-1)\ p}{2q}}}\,. \tag{4.2.1}$$

Эта функция будет использована в качестве *сингулярного* веса при определении пространств, приспособленных для работы с преобразованием Радона-Киприянова, финитных функций, принадлежащих весовым лебеговым классам $L^p_\gamma(\Omega^+_N)$.

Для ρ, определенного по формуле (4.2.1), и каждого фиксированного единичного вектора ξ введем следующее множество функций

$$\mathcal{L}^p([-R;R],\rho) = \left\{ g_\xi(s):\ \left(\int\limits_{-R}^{R} |g_\xi(s)|^p\ \rho(s)\ ds \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Теорема 4.2.1 *Пусть мультииндекс* $\gamma{=}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ *состоит из фиксированных положительных чисел,* y' *-четная функция* $f \in L^p_\gamma(\Omega^+_N)$ $(1 \leq p < \infty)$, *и пусть*

$$supp\ f \in \{|x| < R\}^+_N = \{x : |x| < R,\ x_i \geq 0,\ \ i = 1, \ldots, n\}\,, \quad R < \infty\,.$$

Тогда существует независимая от функции f *константа* C, *такая что*

$$\|K_\gamma[f]\|_{\mathcal{L}^p([-R;+R],\rho)} \leq C\,\|f\|_{L^p_\gamma(\Omega^+_N)}\,,$$

где сингулярный вес $\rho = \rho(s)$ *определен по формуле (4.2.1).*

Доказательство. Пусть γ – фиксированное положительное число, а $f \in L^p_\gamma(\mathbb{R}^+_N)$. Согласно определения оператора Пуассона (1.1.5), преобразование K_γ (1.1.4) запишем в следующей форме

$$K_\gamma[f](\xi;s) = \int\limits_{\mathbb{R}^+_N} f(x)\ \mathcal{P}^\gamma_{x'}\delta\left(s - \langle x, \xi\rangle\right)(x')^\gamma\,dx = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \delta\left(s - \left(\sum_{i=1}^n x_i \cos\alpha_i \ \xi_i + \langle x'', \xi''\rangle\right)\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n (x_i \ \sin\alpha_i)^{\gamma_i - 1} \ d\alpha_i \prod_{i=1}^n x_i \ dx_1 \ldots dx_n \, dx''\,.$$

Используя процедуру вращения $x_i \to \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2}$, получим

$$K_\gamma[f](\xi; s) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_{N+n}^+} \delta\left(s - \left(\sum_{i=1}^n z_{2i-1} \ \xi_i + \langle x'', \xi''\rangle\right)\right) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1} dz =$$

$$= C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_{N+n}^+} \widetilde{f}(z) \ \delta(s - \langle z, \widetilde{\xi}\rangle) \ \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_{i-1}} dz.$$

Таким образом,

$$K_\gamma[f](\xi; s) = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_{N+n}^+} \widetilde{f}(z) \ \delta(s - \langle z, \widetilde{\xi}\rangle) \ \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_{i-1}} dz\,, \tag{4.2.2}$$

где $C(\gamma)$ — константа, нормирующая многомерный оператор Пуассона, а интегрирование происходит по гиперплоскости

$$\Gamma_{N+n}^+ = \{z : \langle z, \widetilde{\xi}\rangle = s\}^+$$

с нормальным вектором

$$\widetilde{\xi} = (\xi_1, 0, \ldots, \xi_{2n-1}, 0, \xi''), \ |\widetilde{\xi}| = |\xi| = 1\,.$$

Как видим, вектор нормали $\widetilde{\xi}$, ортогонален координатным осям Oz_{2i}, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, плоскость интегрирования Γ_{N+n}^+ параллельна каждой из вновь образовавшихся весовых координатных осей Oz_{2i}. Уравнение плоскости Γ^+_{N+n} (в $\mathbb{R}^+_{N+n}$) удобно представить в виде векторного равенства

$$z = s \cdot \tilde{\xi} + y\,,$$

где $s{\cdot}\tilde{\xi}$ — точка плоскости, лежащая на координатных гиперплоскостях $\{z_{2i}=0,\ i=\overline{1,n}\}$ на расстоянии s от начала координат в $\mathbb{R}_{N+n}$, а y — текущая точка плоскости. Это позволяет на плоскости интегрирования ввести систему координат с началом, принадлежащим пересечению гиперплоскостей $\{z_{2i}=0\}$, $i=\overline{1,n}$, в которых точка y запишется в виде $(N+n-1)$-мерного вектора:

$$y = (y_1, \ldots, y_{N+n-1}),\ \text{где}\ y_{2i} = z_{2i},\ \ i = 1, \ldots, n\,.$$

Полученное на плоскости евклидово пространство обозначим $\mathbb{R}^+_{N+n-1}$. Эти преобразования приведут (4.2.2) к следующей форме

$$K_\gamma[f](\xi; s) = C(\gamma) \int\limits_{y\in\mathbb{R}^+_{N+n-1}} \widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y)\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}dy\,.$$

Учитывая, что носитель функции f принадлежит части шара $\{|x|<R\}^+_N$, а сечение этой части шара плоскостью Γ^+_{N+n} есть множество

$$\left\{|y| \le \sqrt{R^2-s^2}\ \right\}^+_{N+n-1} = \left\{y\in\Gamma^+_{N+n}:\ \ |y|\le\sqrt{R^2-s^2}\ \right\},$$

представляющее собой снова часть шара радиуса $\sqrt{R^2-s^2}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^+_{N+n-1}$ (на плоскости) размерности $N+n-1$, имеем

$$|K_\gamma[f](\xi;s)|^p = \left|C(\gamma) \int\limits_{\left\{|y|\le\sqrt{R^2-s^2}\ \right\}^+_{N+n-1}} \widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y)\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}dy\right|^p =$$

$$= \left|C(\gamma) \int\limits_{\left\{|y|\le\sqrt{R^2-s^2}\ \right\}^+_{N+n-1}} \widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y)\left(\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} dy\right|^p,$$

где q выбираем так, чтобы выполнялось равенство $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Оценим последнее выражение согласно неравенству Гельдера. Получим

$$\left|\int\limits_{\{|y|\le\sqrt{R^2-s^2}\}^+_{N+n-1}} \widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y)\left(\prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} dy\right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\{|y|\le\sqrt{R^2-s^2}\}^+_{N+n-1}} \left|\widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y)\right|^p \left(\prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1}\right)^{\frac{1}{p}\cdot p} dy\right)^{1/p} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\{|y|\le\sqrt{R^2-s^2}\}^+_{N+n-1}} \left(\prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1}\right)^{\frac{1}{q}\cdot q} dy\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int\limits_{\{|y|\le\sqrt{R^2-s^2}\}^+_{N+n-1}} \left|\widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y)\right|^p \prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1} dy\right)^{1/p} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\{|y|\le\sqrt{R^2-s^2}\}^+_{N+n-1}} \prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1} dy\right)^{1/q}.$$

Нетрудно видеть, что здесь последний сомножитель представляет собой весовой объем $(N+n-1)$-мерной части шара радиуса $r=\sqrt{R^2-s^2}$. Произведя сферическое преобразование координат $y=r\Theta$, $|\Theta|=1$ в $\mathbb{R}^+_{N+n}$, находим

$$\int\limits_{\{|y|\le(R^2-s^2)^{1/2}\}^+_{N+n-1}} \prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1} dy = \int\limits_0^{\sqrt{R^2-s^2}} r^{N+|\gamma|-2} dr \times$$

$$\times \int\limits_{S_1^+(N+n-1)} \prod_{i=1}^{n} \Theta_{2i}^{\gamma_i-1}\, dS(\Theta).$$

Здесь $S_1^+(N+n-1)$ — поверхность сферы с центром в начале координат радиуса равного единице. Весовую площадь этой поверхности обозначим

$$|S_1(N+n-1)|^+_{\gamma-1}=\int\limits_{S_1^+(N+n-1)}\prod_{i=1}^n\Theta_{2i}^{\gamma_i-1}\,dS(\Theta)\,.$$

Вычисляется этот интеграл по формуле (3.2.2). Ясно, что этот коэффициент не зависит от функции f . Таким образом,

$$\int\limits_{|y|\le(R^2-s^2)^{1/2}}\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}dy=\int\limits_0^{\sqrt{R^2-s^2}}r^{N+|\gamma|-2}dr\int\limits_{S_1(N+n)}\prod_{i=1}^n\Theta_{2i}^{\gamma_i-1}\,dS(\Theta)=$$

$$=\frac{r^{N+|\gamma|-1}}{N+|\gamma|-1}\bigg|_{r=0}^{r=(R^2-s^2)^{1/2}}|S_1(N+n-1)|^+_{\gamma-1}=$$

$$=\frac{|S_1(N+n-1)|_{\gamma-1}}{N+|\gamma|-1}(R^2-s^2)^{(N+|\gamma|-1)/2}\,.$$

Отсюда получаем следующую оценку

$$|K_\gamma[f](\xi;s)|^p\le\left(\int\limits_{\Gamma^+_{N+n}}|\widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y)|^p\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i}dy\right)^{\frac{1}{p}\cdot p}\times$$

$$\times\left(\frac{|S_1(N+n)|_{\gamma-1}\,C(\gamma)}{N+|\gamma|-1}\right)^{\frac{p}{q}}(R^2-s^2)^{\frac{(N+|\gamma|-1)\,p}{2q}}\,.$$

Следовательно,

$$\|K_\gamma[f]\|^p_{\mathcal{L}_p([-R;R],\rho)}=\int\limits_{-R}^{R}\rho(s)|K_\gamma f(\xi;s)|^p ds=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{(R^2-s^2)^{\frac{(N+|\gamma|-1)\,p}{2q}}}\;|K_\gamma f(\xi;s)|^p ds\le$$

$$\leq \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{(R^2-s^2)^{\frac{(N+|\gamma|-1)\,p}{2q}}} \left(\frac{|S_1(N+n-1)|^+_{\gamma-1}\,C(\gamma)}{N+|\gamma|-1}\right)^{\frac{p}{q}} \times$$

$$\times (R^2-s^2)^{\frac{(N+|\gamma|-1)\,p}{2q}} \int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} |\widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y))|^p \prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1} dyds =$$

$$\leq \left(\frac{|S_1(N+n-1)|^+_{\gamma-1}\,C(\gamma)}{N+|\gamma|-1}\right)^{\frac{p}{q}} \int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{\Gamma^+_{N+n}} |\widetilde{f}(s\cdot\widetilde{\xi}+y))|^p \prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1} dyds =$$

$$= \left(\frac{|S_1(N+n-1)|^+_{\gamma-1}\,C(\gamma)}{N+|\gamma|-1}\right)^{\frac{p}{q}} \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N+n}} |\widetilde{f}(z)|^p \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1} dz\,. \qquad (4.2.3)$$

Для завершения доказательства в выражении (4.2.3) необходимо перейти к интегрированию по области $\mathbb{R}^+_N$. Учитываем, что функция $\widetilde{f}(z)$ снабжена цилиндрическими координатами $\widetilde{f}(z) = f(\sqrt{z_1^2+z_2^2}, \sqrt{z_3^2+z_4^2}, \ldots, \sqrt{z_{2n-1}^2+z_{2n}^2}, x'')$. Произведем в (4.2.3) цилиндрическое преобразование координат, положив

$$z_{2i-1} = x_i\cos\varphi, \quad z_2 i = x_i\sin\varphi, \;\; i=1,\ldots,n$$

$$dz_{2i-1}dz_{2i} = x_i\,dx_i\,d\varphi_i, \quad x_i>0\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{N+n}} |\widetilde{f}(z)|^p \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1} dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_{N-n}} \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} \int\limits_0^{\pi} \ldots \int\limits_0^{\pi} |f(x',x'')|^p \prod_{i=1}^n (x_i sin\varphi_i)^{\gamma_i-1} \prod_{i=1}^n x_i d\varphi_i\,dx_i\,dx'' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_{N-n}} \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} |f(x',x'')|^p \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\,dx_i \int\limits_0^{\pi} \ldots \int\limits_0^{\pi} \prod_{i=1}^n sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i\,dx'' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_{N-n}} \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} |f(x',x'')|^p (x')^\gamma dx'\, dx'' \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^n sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\, d\varphi_i =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p (x')^\gamma dx \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^n sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\, d\varphi_i\,.$$

Значение тригонометрических интегралов вычисляется по формуле для бета-функции Эйлера:

$$\int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^n sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\, d\varphi_i =$$

$$2^n \int\limits_0^{\pi/2} \ldots \int\limits_0^{\pi/2} \prod_{i=1}^n sin^{2\cdot\frac{\gamma_i}{2}-1}\varphi_i cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1}\varphi_i\, d\varphi_i = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} = C^{-1}(\gamma)\,,$$

где $C(\gamma)$ – константа, нормирующая оператор Пуассона.

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{N+n}^+} |f(z)|^p \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1} dz = C^{-1}(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p \,(x')^\gamma dx\,.$$

Принимая во внимание это соотношение, продолжим неравенство (4.2.3). Имеем

$$\int\limits_{-R}^R \frac{1}{(R^2-s^2)^{\frac{(N+|\gamma|-1)\,p}{2q}}}\;|K_\gamma f(\xi;s)|^p ds \le$$

$$\le \left(\frac{|S_1(N+n-1)|_{\gamma-1}}{N+|\gamma|-1}\right)^{\frac{p}{q}} C^{\frac{p}{q}}(\gamma) C^{-1}(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p \,(x')^\gamma dx =$$

$$\le \left(\frac{|S_1(N+n-1)|_{\gamma-1}}{N+|\gamma|-1}\right)^{p-1} C^{p-2}(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p \,(x')^\gamma dx = C\|f\|^p_{L_p^\gamma}\,.$$

Доказательство закончено.

Из теоремы 4.2.1 следует, что преобразование Радона-Киприянова K_γ (1.1.4) является непрерывным оператором, действующим из пространства $L^p_\gamma(\Omega^+_N)$ в $\mathcal{L}^p([-R;+R],\rho)$.

4.3 Обращение преобразования Радона-Киприянова гельдеровских функций

Формулы обращения преобразования Радона-Киприянова для финитных функций в случае, когда весовую нагрузку несет одна переменная, были получены Л.Н. Ляховым в [19], [18] с помощью B-гиперсингулярных интегралов. В данном параграфе получены формула обращения преобразования Радона-Киприянова функции с ограниченной гладкостью радиальной по нескольким переменным, но исключительно для случая, когда $N+|\gamma|$ — натуральное число.

Замечание 4.3.1 *Теоремы 4.3.1 и 4.3.2, доказанные ниже, по сути, являются частным случаем (или следствием) теорем 3.2.2 (при* $k=1$ *) и 3.2.3 (при* $k=0$ *) соответственно.*

Теорема 4.3.1 *Пусть носитель* ξ' *-четной непрерывной по Гельдеру функции* f *принадлежит ограниченной области* Ω^+_N *,* $K_\gamma[f]$ *– преобразование Радона-Киприянова функции* f *. Формула обращения этого преобразования для натуральных нечетных чисел* $N+|\gamma|>2$ *имеет вид:*

$$f(\eta)=\frac{2^{2n-|\gamma|-N}\pi^{n+1-N}}{i^{N+|\gamma|-1}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\triangle_B^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}\mathcal{P}^\gamma_{\eta'}K_\gamma[f](x;\langle x,\eta\rangle)(x')^\gamma dS(x). \tag{4.3.1}$$

Доказательство. Исходим из формулы (3.2.6), в которой положим $k=1$. Имеем

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^\gamma |\langle x\,,\,\xi\rangle|\,(x')^\gamma\,dS(x)\ (\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= 2^{N+|\gamma|-2n+1}\ \pi^{N-n-1} \prod_{i=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\ i^{N+|\gamma|-1}\, f(\eta)\,. \qquad (4.3.2)$$

Обозначив левую часть равенства (4.3.2) через A и поменяв в ней порядок интегрирования, запишем

$$A = \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma\ dS(x) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \mathcal{P}_{\xi'}^\gamma |\langle x\,,\,\xi\rangle|\ (\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Из определения оператора Пуассона (1.1.5) следует

$$A = C(\gamma) \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma\ dS(x) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi)\ \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \left| \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \cos\alpha_i + \sum_{j=n+1}^N x_j \xi_j \right| \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\, d\alpha_1\ \ldots\ d\alpha_n\, (\xi')^\gamma d\xi\,.$$

Теперь удобно освободиться от оператора Пуассона, прибегнув к вращениям $\zeta_i = \sqrt{\xi_{2i-1}^2 + \xi_{2i}^2}$, $1 \le i \le n$, задаваемым преобразованием координат

$$\left\{ \begin{array}{l|c|c} \zeta_{2i-1} = \xi_i \cos\alpha_i & 0<\alpha_i<\pi & -\infty < \zeta_{2i-1} < +\infty \\ \zeta_{2i} = \xi_i \sin\alpha_i & i=1,\ldots,n & 0 < \zeta_{2i} < +\infty \end{array} \right. ,$$

при этом $d\zeta' = \xi_1 \ldots \xi_n\, d\xi'\, d\alpha$. Будем полагать $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2n}, \xi'') \in$ $\in \mathbb{R}_{N+n}^+ = \{\zeta,\ \ \zeta_{2i} > 0,\ \ i=1,\ \ldots\ ,n\}$. В результате получим

$$A = C(\gamma) \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma\ dS(x)\ \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N+n}} (T^{-\eta} f)\left(\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2}, \ldots, \sqrt{\zeta_{2n-1}^2+\zeta_{2n}^2},\, \xi''\right) \times$$

$$\times \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \zeta_{2i-1} + \sum_{j=n+1}^{N} x_j \xi_j\right| \prod_{i=1}^{n} \zeta_{2i}^{\gamma_i-1}\, d\zeta\,.$$

Введем обозначение $\widetilde{x} = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots, x_n, 0, x'')$, тогда

$$A = C(\gamma) \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma\, dS(x) \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N+n}} (T^{-\eta} f)\left(\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2}, \ldots, \sqrt{\zeta_{2j-1}^2+\zeta_{2j}^2},\, \xi''\right) |\langle \widetilde{x}\,,\, \zeta\rangle| \prod_{i=1}^{n} \zeta_{2i}^{\gamma_i-1}\, d\zeta\,.$$

Внутренний интеграл преобразуем следующим образом. В пространстве $\mathbb{R}^+_{N+n}$ выделим подпространство $\mathbb{R}_N = (\zeta_1, \zeta_3, \ldots, \zeta_{2n-1}, \zeta'')$, в котором произведем вращение так, чтобы вектор ζ_1 оказался ортогонален плоскости $\{\langle \widetilde{x}\,,\, \zeta\rangle = p\}^+$ ($|p|$ — расстояние от плоскости до начала координат; плоскость параллельна четным весовым координатным осям). Ввиду инвариантности скалярного произведения относительно вращения, подынтегральное выражение не изменится; само же скалярное произведение $\langle \widetilde{x}\,,\, \zeta\rangle = \zeta_1 |x|$ (напомним, что $|x| = |\widetilde{x}| = 1$) . Переменную ζ_1 удобно обозначить $\zeta_1 = p$. После чего интегрирование по $\mathbb{R}^+_{N+n}$ заменится интегрированием по $p \in (-\infty, +\infty)$ и по плоскости $\{\langle \widetilde{x}\,,\, \zeta\rangle = p\}^+$. Тогда

$$A = C(\gamma)\, \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma\, dS(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |p| \times$$

$$\times \int\limits_{\{\langle \widetilde{x}\,,\, \zeta\rangle = p\}^+} (T^{-\eta} f)\left(\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2}, \ldots, \sqrt{\zeta_{2j-1}^2+\zeta_{2j}^2}, \xi''\right) \prod_{i=1}^{n} \zeta_{2i}^{\gamma_i-1}\, d\Gamma_{N+n}\, dp\,.$$

Внутренний интеграл, по определению (1.1.6), является преобразованием Радона-Киприянова функции $(T^{-\eta}f)(\zeta)$. Поэтому

$$A=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\,dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|p|\,K_\gamma\left[(T^{-\eta}f)(\zeta)\right](\widetilde{x};p)\,dp\,.$$

Теперь по каждой паре переменных $(\zeta_{2i-1},\ \zeta_{2i})$ вновь введем полярные координаты $\xi_i\in(0,+\infty)$ в роли радиальной и $\alpha_i\in(0,\ \pi)$ в роли угловой. Имеем

$$A=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\ dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|p|\,K_\gamma\left[(T^{-\eta}f)(\xi)\right](x;p)\,dp=$$

$$=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\Delta_{B_\eta}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\ dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|p|\,K_\gamma\left[(T^{-\eta}f)(\xi)\right](x;p)\,dp\,.$$

Для K_γ -преобразования обобщенного сдвига применим формулу (1.3.1), тогда

$$A=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\ dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|p|\,\Delta_{B_\eta}\Big(\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}K_\gamma[f](x;p+\langle\eta\,,\ x\rangle)\Big)\ dp\,.$$

Известно, что оператор Пуассона преобразует сингулярный дифференциальный оператор Бесселя во вторую производную (см. [11], формула (1.1)): $B_{\gamma_i}\mathcal{P}_{\gamma_i}=\mathcal{P}_{\gamma_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, откуда следует

$$A=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\ dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|p|\,|\Theta|^2\,\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}\,\Delta_\eta\,K_\gamma[f](x;p+\langle\eta,x\rangle)\,dp=$$

$$=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\ dS(x)\,\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|p|\,\frac{\partial^2}{\partial p^2}\,K_\gamma[f](x;p+\langle\eta,x\rangle)\,dp\,.$$

В последнем равенстве учли, что $|x| = 1$, т. к. $x \in S_1^+(N)$.

Рассмотрим интеграл по переменной p, обозначив его через B. Имеем

$$B = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |p| \, \frac{\partial^2}{\partial p^2} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp \, .$$

Раскрыв модуль в подынтегральном выражении, получим

$$B = - \int\limits_{-\infty}^{0} p \, \frac{\partial^2}{\partial p^2} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp + \int\limits_{0}^{+\infty} p \, \frac{\partial^2}{\partial p^2} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp \, .$$

Каждое слагаемое проинтегрируем по частям

$$B = - \left(p \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \right) \Bigg|_{p=-\infty}^{p=0} + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp +$$

$$+ \left(p \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \right) \Bigg|_{p=0}^{p=\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp \, .$$

Очевидно, что при $p = 0$ внеинтегральные члены исчезают. По условию, носитель функции f принадлежит ограниченной области Ω_N^+, тогда далекие плоскости не пересекаются с носителем функции, поэтому $K_\gamma[f](x; p) = 0$ для достаточно больших $|p|$. Следовательно, $\left(p \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \right) \Big|_{p=\pm\infty} = 0$. И поэтому

$$B = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp -$$

$$- \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp = 2 \, K_\gamma[f](x; \langle \eta, x \rangle) \, .$$

Тогда

$$A = 2 \, \Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma} \, K_\gamma[f](x; \langle \eta, x \rangle) \, (x')^\gamma \, dS(x) \, ,$$

и равенство (4.3.2) запишется в виде:

$$2\,\Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}\, K_\gamma[f](x;\langle \eta, x\rangle)\,(x')^\gamma\; dS(x) =$$

$$= 2^{N+|\gamma|-2n+1}\;\pi^{N-n-1}\prod_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\; i^{N+|\gamma|-1}\,f(\eta)\,.$$

Отсюда вытекает формула (4.3.1).

Доказательство теоремы закончено.

.

Теорема 4.3.2 *Пусть носитель ξ' -четной непрерывной по Гельдеру функции f принадлежит ограниченной области Ω_N^+, $K_\gamma[f]$ – ее преобразование Радона-Киприянова. Формула обращения этого преобразования для натуральных четных чисел $N+|\gamma|>2$ имеет вид:*

$$f(\eta) = -\frac{2^{2n-|\gamma|-N}}{\pi^{N-n}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma dS(x)\,\times$$

$$\times\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}\left(\frac{1}{\langle x,\eta\rangle - p}\right) dK_\gamma[f](x;p)\,. \qquad (4.3.3)$$

Доказательство. Воспользуемся той же схемой доказательства, что и в предыдущей теореме. За исходную берем формулу (3.2.13) при $k=0$, имеем

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+}(T^{-\eta}f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}\ln|\langle x\,,\xi\rangle|\;(x')^\gamma\; dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= -\pi^{N-n}2^{N+|\gamma|-2n}\prod_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\; i^{N+|\gamma|}\,f(\eta)\,. \qquad (4.3.4)$$

В левой части равенства (4.3.4), которую далее обозначаем через M, поменяем порядок интегрирования и оператор Пуассона представим по формуле (1.1.5), получим

$$M = C(\gamma)\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma \, dS(x) \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \ln \left| \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \cos\alpha_i + \sum_{j=n+1}^N x_j \xi_j \right| \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \, (\xi')^\gamma d\xi \, .$$

Теперь освободимся от оператора Пуассона, прибегнув к вращениям $\xi_i = \sqrt{\zeta_{2i-1}^2 + \zeta_{2i}^2}$, $1 \le i \le n$, при этом будем полагать $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2n}, \xi'') \in \mathbb{R}_{N+n}^+ = \{\zeta, \ \zeta_{2i} > 0, \ i = 1, \ldots, n\}$. Таким образом, выражение для M запишется в следующем виде:

$$M = C(\gamma)\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma \, dS(x) \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_{N+n}^+} (T^{-\eta} f) \left(\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \ldots, \sqrt{\zeta_{2j-1}^2 + \zeta_{2j}^2}, \, \xi'' \right) \ln |\langle \widetilde{x} \, , \, \zeta \rangle| \prod_{i=1}^n \zeta_{2i}^{\gamma_i - 1} \, d\zeta \, ,$$

где $\widetilde{x} = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots, x_n, 0, x'')$.

Теми же действиями, что и при доказательстве теоремы 4.3.1, интегрирование по $\mathbb{R}_{N+n}^+$ заменяем интегрированием по $p \in (-\infty, +\infty)$ и по гиперплоскости $\{\langle \widetilde{x} \, , \, \zeta \rangle = p\}^+$, тогда

$$M = \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma \, dS(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|p| \, C(\gamma) \times$$

$$\times \int\limits_{\{\langle \widetilde{x} \, , \, \zeta \rangle = p\}^+} (T^{-\eta} f) \left(\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \ldots, \sqrt{\zeta_{2j-1}^2 + \zeta_{2j}^2}, \, \xi'' \right) \prod_{i=1}^n \zeta_{2i}^{\gamma_i - 1} \, d\Gamma_{N+n} \, dp \, .$$

По формуле (1.1.6) внутренний интеграл является преобразованием Радона-Киприянова функции $(T^{-\eta}f)(\zeta)$, поэтому

$$M=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\;dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|p|\,K_\gamma[T^{-\eta}f(\zeta)](\widetilde{x};p)\,dp\,.$$

По каждой паре переменных $\zeta_{2i-1},\ \zeta_{2i}$ вновь вводим полярные координаты: $\xi_i=\sqrt{\zeta_{2i-1}^2+\zeta_{2i}^2}\in(0,+\infty)$ в роли радиальной и $\alpha_i\in(0,\ \pi)$ в роли угловой. Имеем

$$M=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\;dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|p|\,K_\gamma\left[(T^{-\eta}f)(\xi)\right](x;p)\,dp=$$

$$=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\Delta_{B_\eta}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\;dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|p|\,K_\gamma\left[(T^{-\eta}f)(\xi)\right](x;p)\,dp\,.$$

Воспользуемся формулой (1.3.1) для K_γ-преобразования обобщенного сдвига и тем фактом, что оператор Пуассона преобразует сингулярный дифференциальный оператор Бесселя во вторую производную (см. [11] формула (1.1)), тогда

$$M=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\;dS(x)\;\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|p|\,\Delta_{B_\eta}\left(\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}K_\gamma[f](x;p+\langle\eta\,,\,x\rangle)\right)\,dp=$$

$$=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\;dS(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|p|\,|x|^2\,\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}\,\Delta_{B_\eta}\,K_\gamma[f](x;p+\langle\eta,x\rangle)\,dp=$$

$$=\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma\;dS(x)\,\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|p|\frac{\partial^2}{\partial p^2}\,K_\gamma[f](x;p+\langle\eta,x\rangle)\,dp\,.$$

Преобразуем внутренний интеграл по переменной p, обозначив его через N,

$$N = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|p| \, \frac{\partial^2}{\partial p^2} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp \, .$$

После раскрытия модуля в подынтегральном выражении получим

$$N = \int\limits_{-\infty}^{0} \ln(-p) \, \frac{\partial^2}{\partial p^2} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp +$$

$$+ \int\limits_{0}^{+\infty} \ln p \, \frac{\partial^2}{\partial p^2} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp \, .$$

Каждое слагаемое интегрируем по частям

$$N = \left(\ln(-p) \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \right) \Bigg|_{p=-\infty}^{p=0} -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{p} \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp +$$

$$+ \left(\ln p \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \right) \Bigg|_{p=0}^{p=\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{p} \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp \, .$$

Поскольку $supp \, f = \overline{\Omega_N^+}$, далекие плоскости не пересекаются с носителем функции, поэтому $K_\gamma[f](x; p) = 0$ для достаточно больших $|p|$. Следовательно, $\left(\ln(\pm p) \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \right) \Big|_{p=\pm\infty} = 0$, поэтому

$$N = \lim_{p \to 0} \ln(-p) \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) - \lim_{p \to 0} \ln p \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p} \, \frac{\partial}{\partial p} \, K_\gamma[f](x; p + \langle \eta, x \rangle) \, dp \, .$$

В последнем интеграле произведем замену $p + \langle \eta, x \rangle$ на p, тогда

$$N = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle \eta, x \rangle - p} \frac{\partial}{\partial p} K_\gamma[f](x;p)\, dp\,.$$

Получили выражение для M в следующем виде:

$$M = \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma \; dS(x)\, \mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} K_\gamma[f](x;p)\, dp}{\langle \eta, x \rangle - p}\,.$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial p} K_\gamma[f](x;p)\, dp = d\, K_\gamma[f](x;p)$, имеем

$$M = \Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} (x')^\gamma \; dS(x)\, \mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\, K_\gamma[f](x;p)}{\langle \eta, x \rangle - p}\,.$$

Подставив полученное выражение для M в (4.3.4), получим (4.3.3).

Отметим, что формула (4.3.3) имеет особенность под знаком интеграла и понимается (как и в классическом случае) лишь в смысле главного значения по Коши.

Доказательство теоремы закончено.

4.4 Обращение преобразования Радона гельдеровских функций от сферических симметрий

Вначале отметим следующее. Согласно тереме 4.1.1 о сферическом уплотнении, если каждое из чисел γ_i — натуральное, то равенство (4.1.1) дает возможность преобразование Радона-Киприянова представить в виде преобразования Радона функций от соответствующих сферических симметрий и наоборот.

Поэтому справедлив следующий результат.

Теорема 4.4.1 *Пусть* $m_i > 1$ *— натуральные числа,* $\xi^i \in \mathbb{R}_{m_i}$ *и* f *– измеримая суммируемая функция от многоосевой симметрии в* $\mathbb{R}_{m_i}$ *:* $f = f(|\xi^1|, \ldots, |\xi^n|, \xi'')$ *. Причем, как радиальная*

$$f = f(r, \xi''), \quad r = (r_1, \ldots, r_n), \quad r_i = |\xi^i|$$

она является r *-четной по Киприянову и непрерывна по Гельдеру. Для преобразования Радона этой функции имеют место следующие формулы обращения*

a) при $N + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n$ *— нечетном*

$$f(\eta) = \frac{2^{3n - \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - N} \pi^{n+1-N}}{i^{N + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n - 1} \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{m_j}{2}\right) \prod\limits_{j=1}^{n} |S_1(m_j)|} \times$$

$$\times \triangle_B^{\frac{N + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n - 1}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma} R[f](x; \langle x, \eta \rangle) \prod_{j=1}^{n} x_j^{m_j - 1} dS(x)\,;$$

b) при $N + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n$ *— четном*

$$f(\eta) = -\frac{2^{3n - \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - N}}{\pi^{N-n} \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{m_i}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^{n} |S_1(m_i)|} \Delta_B^{\frac{N + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n - 2}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_{S_1^+(N)} \prod_{i=1}^{n} r_i^{m_i - 1} dS(x) \int\limits_{p=-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_{\eta_i}^{m_i - 1} \left(\frac{1}{\langle x, \eta \rangle - p} \right) dR[f](x; p)\,,$$

где

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} B_{m_i - 1} + \sum_{j=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\,, \quad B_{m_i - 1} = \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{m_i - 1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i}\,, \quad \gamma_i > 0\,,$$

$R[f](x;p) = R[f](|\mathbf{x}^1|, |\mathbf{x}^2|, \dots |\mathbf{x}^n|, x''; \langle x, \eta\rangle)$ *– преобразование Радона функции от многоосевой сферической симметрии,* $|\mathbf{x}^i| = x_i$ *– длина радиуса-вектора точки* $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}_{m_i}$ *,* $x = (r, x'') \in \mathbb{R}_N^+$ *.*

Можем сделать вывод, что теоремы 4.3.1 и 4.3.2 дают формулы обращения преобразования Радона функции от многоосевой сферической симметрии в евклидовом пространстве $\prod_{i=1}^n \mathbb{R}_{m_i} \times \mathbb{R}_{N-n}$. Но эти теоремы доказаны при условии что $N + |\gamma|$ — натуральное, что возможно и тогда, когда числа γ_i – дроби, но $|\gamma|$ — натуральное число. Тем самым, формулы обращения справедливы и в более общей ситуации, именно, для преобразования Радона-Киприянова K_γ , когда $|\gamma|$ — целое число.

Еще отметим, что формулы обращения могут быть получены исходя из формул обращения преобразования Фурье-Бесселя. Для бесконечно дифференцируемых функций и одной весовой переменной эти результаты известны из работы [20]. Преимущество полученных формул заключается в том, что в них входит сама функция, а не ее преобразование Фурье-Бесселя. И в том, что эта функция обладает наименьшей возможной для обращения ее K_γ преобразования гладкостью (непрерывна по Гельдеру).

Литература

[1] Алиев И.А. О классах операторов типа потенциалов, порожденных обобщенным сдвигом / И.А Алиев, А.Д. Гаджиев // Докалады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И.П.Векуа. – Тбилисский гос. университет. – 1988. – Т. 3. – N 3. – С. 21-24.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

[3] Гельфанд И.М. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 656 с.

[4] Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений/ И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М: ГИФМЛ, 1965. — 1100 с.

[5] Гулиев В.С. Теорема Соболева для B-потенциалов Рисса /В.С. Гулиев // ДАН. – 1998. – Т. 358. – N4. – С. 450-451.

[6] Двайт Г.Б. Таблици интегралов и другие математические формулы/ Г.Б. Двайт. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

[7] Житомирский Я.И. Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений с оператором Бесселя / Я.И. Житомирский // Матем. сб. – 1955. – Т. 36 (78). – С. 281-310.

[8] Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – М.: ИЛ, 1958. – 156 с.

[9] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи/ И.А. Киприянов. — М.: Наука, 1997. — 199 с.

[10] Киприянов И.А. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига. II / И.А. Киприянов, М.И. Ключанцев// Сиб. мат. журн. — 1970.— Т. 11, N 5. — С. 1060 — 1082.

[11] Киприянов И.А. Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений / И.А. Киприянов, В.И. Кононенко // Дифференц. уравнения.— 1967. — Т.3. – N1.— С.114-129.

[12] Киприянов И.А. Фундаментальные решения некоторых сингулярных уравнений в частных производных / И.А. Киприянов, В.И. Кононенко //Дифференц. уравнения. — 1969. — Т.5. – N 8. — С.1470-1483.

[13] Киприянов, И.А. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // ДАН. — 1998. — Т. 360. — N 2. — С. 157-160.

[14] Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. – 830 с.

[15] Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – Т. 2. – изд.2.

[16] Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье /Б.М. Левитан// УМН.— 1951.— Т.6. – N 2.— С. 102-143.

[17] Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига / Б.М. Левитан. – М.: Наука, 1973. – 312 с.

[18] Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Киприянова-Радона /Л.Н. Ляхов // ДАН. – 2004. – Т. 399. – N 5. – С. 597-600.

[19] Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона / Л.Н. Ляхов // Труды МИАН. – 2005. – Т. 248. С. 153-163.

[20] Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами / Л.Н. Ляхов. – Липецк: Издательство ЛГПУ, 2007. – 234 с.

[21] Ляхов Л.Н. О преобразованиях Радона и Радона-Киприянова сферически симметричных функций / Л.Н. Ляхов // ДАН. – 2008. – Т. 419. – N 3. – С. 114-119.

[22] Ляхов Л.Н. RK_γ-преобразование с $\gamma \in (0,2]$ весовых сферических средних функций. Соотношение Асгейрссона / Л.Н. Ляхов // ДАН. – 2011. – Т.439. – N 5. – С 589-592.

[23] Ляхов Л.Н. Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя / Л.Н. Ляхов // РАН. Труды математического института им В.А. Стеклова. – 2012. – Т. 278. – С. 148-160.

[24] Ляхов Л.Н. Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена—Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье /Л.Н. Ляхов // Тр. ММО. – 2015. – Т. 76, выпуск 1. – С. 67-84.

[25] Ляхов Л.Н. Преобразование Радона-Киприянова обобщенного сферического среднего значения функции /Л.Н. Ляхов //Математические заметки. – 2016. – Т. 100, N 1. С. – 117-131.

[26] Ляхов Л.Н. Весовые оценки преобразования Радона-Киприянова функций с ограниченным носителем / Л.Н. Ляхов, О.И. Попова // Научные ведомости Белгородского госуниверситета. Серия: Математика, Физика. – 2011. – N 17(112), выпуск 24. – С. 54-62.

[27] Математическая энциклопедия т.II / М.: Издат. Советская энциклопедия.

[28] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии/ Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 279 с.

[29] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. — М.: Наука, 1974. – 808 с.

[30] Хелгасон Д. Группы и геометрический анализ / Д. Хелгасон. – М.: Мир, 1987. – 735 с.

[31] Weinstein A. Discontinious integrals and generalized potential theory / А. Вайнштейн // Trans Amer. Math. Soc. – 1955. – V.63. – P. 342-354.

[32] Kellog O. Foundations of potential theory / О. Келлог. – Berlin, 1929.

[33] Radon J. Uber die Bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte langs gewissel mannigfaltigkeiten / И. Радон // Ber. Verh. Sache. Acad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. kl. – 1917. – 69. – P. 262-277.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[34] Lapshina M.G. Radon-Kipriyanov transform of weighted lebesgue classes of compactly supported functions /Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина// Journal of Mathematical Sciences. – Springer. – 2015. – Vol. 205.– N 2. –pp 247-254.

[35] Lapshina M.G. B-Potentials of Holder functions / Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Journal of Mathematical Sciences. – Springer. – 2016. – Vol. 231. – N 4. – pp 551-560.

[36] Lapshina M.G. Inversion Formulas for Integral Operations of Weighted Plane Wave Tipe / Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Journal of Mathematical Sciences. – Springer. – 2016. – Vol. 216. – N 2. – pp 270-279.

[37] Лапшина М.Г. Преобразование Радона-Киприянова весовых лебеговых классов финитных функций/ Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Проблемы математического анализа. – 2014. – Выпуск 77. – С.111-117.

[38] Лапшина М.Г. B-потенциалы непрерывных по Гельдеру функций /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V" в г. Ростове-на-Дону. – Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2015. – С. 206-207.

[39] Лапшина М.Г. Непрерывность первой производной B-потенциала Ньютона /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции по математической теории управления и механике в г. Суздаль. – Тезисы докладов. – Суздаль, 2015. – С. 82-83.

[40] Лапшина М.Г. О гладкости B-потенциалов /М.Г. Лапшина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2015. – Выпуск 10. – С. 114-128.

[41] Лапшина М.Г. B-производная B-потенциала /М.Г. Лапшина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2015. – Выпуск 11. – С. 116-128.

[42] Лапшина М.Г. B-потенциалы Ньютона с кусочно-гладкой плотностью /М.Г. Лапшина // Материалы областного профильного семинара "Школа молодых ученых" по проблемам естественных наук. – "Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания" . – Липецк. – 2015 – С. 58-66.

[43] Лапшина М.Г. Непрерывность B-потенциалов Ньютона кусочно-дифференцируемых функций /М.Г. Лапшина // Вестник ЛГПУ. Серия МИФЕ. – Липецк: ЛГПУ. – 2015. – Выпуск 1(16). – С. 18-21.

[44] Лапшина М.Г. Об обращении B-потенциала /М.Г. Лапшина// Вестник ЛГПУ. Серия МИФЕ. – Липецк: ЛГПУ. – 2015. – Выпуск 4 (19). – С. 27-31.

[45] Лапшина М. Г. Обращение преобразования Радона-Киприянова в нечетно-мерном пространстве /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016". – Воронеж: ВГУ, 2016. – С. 266-270.

[46] Лапшина М.Г. Обращение некоторых весовых интегральных операций /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI" в г. Ростове-на-Дону. – Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2016. – С. 105.

[47] Лапшина М.Г. Непрерывность преобразования Радона-Киприянова в весовых функциональных классах Лебега /М.Г. Лапшина // Материалы международной научной конференции "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных", посвященной памяти А.В. Бицадзе. – г. Москва, 2016. – С. 117.