ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Поляков Дмитрий Михайлович

Метод подобных операторов в спектральном анализе линейных операторов

01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А.Г. Баскаков.

Воронеж 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{R}$	— множество вещественных чисел;
$\mathbb{C}$	— множество комплексных чисел;
$\mathbb{N}$	— множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$	— множество целых чисел;
$\mathcal{X}$	— комплексное банахово пространство;
$\mathrm{End}\,\mathcal{X}$	— банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$;
$\mathcal{H}$	— комплексное гильбертово пространство;
$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$	— идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в пространстве $\mathcal{H}$;
$\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$	— идеал ядерных операторов, действующих в $\mathcal{H}$;
$\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$	— банахово пространство операторов, подчиненных линейному замкнутому оператору A, действующему в $\mathcal{H}$;
l^p	— гильбертово пространство последовательностей, суммируемых со степенью p;
$\mathrm{L}_2[0,\omega] = \mathrm{L}_2([0,\omega],\mathbb{C})$	— гильбертово пространство комплексных измеримых функций, суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$, $\omega > 0$;
$\mathrm{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$	— гильбертово пространство периодических периода 1 функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}$;
$W_2^{2m}[0,\omega]$	— пространство Соболева $\{y \in \mathrm{L}_2[0,\omega] \to \mathbb{C}\colon y$ имеет $2m-1$ производную, $y^{(2m-1)}$ абсолютно непрерывна, $y^{(2m)} \in \mathrm{L}_2[0,\omega]\}$;
$R(\cdot, A)$	— резольвента линейного оператора A;
$\sigma(A)$	— спектр линейного оператора A;
$\mathrm{Ker}\,A$	— ядро оператора A;
$\mathrm{Im}\,A$	— образ оператора A;
I	— тождественный оператор.

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию различных спектральных свойств двух классов линейных дифференциальных операторов. А именно, будут исследованы дифференциальный оператор четвертого порядка и одномерный оператор Шрёдингера на конечном интервале с различными типами краевых условий. Основным методом исследования является метод подобных операторов.

Многие задачи математической физики приводят к изучению спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов. Наиболее известным объектом в спектральной теории операторов является одномерный оператор Шрёдингера, который определяется дифференциальным выражением

$$-y'' - qy,$$

где q — потенциал. При исследовании операторов, порождаемых таким дифференциальным выражением, на конечном интервале $[0, \omega]$, $\omega > 0$, стандартным условием на потенциал является его непрерывность. В последние годы под влиянием работ А.М. Савчука и А.А. Шкаликова, стала активно развиваться спектральная теория оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Другим направлением исследований является спектральная теория дифференциальных операторов с негладким, принадлежащим классу $\mathrm{L}_2[0, \omega]$, потенциалом. Операторы с такими потенциалами исследовались в работах В.А. Марченко, М.А. Наймарка, А.М. Савчука, А.А. Шкаликова, П. Джакова, Б.С. Митягина и др.

В настоящее время активно проводятся исследования по теории дифференциальных операторов высших порядков с негладкими потенциалами. В частности, особый интерес вызывает дифференциальный оператор четвертого порядка. Это связано с тем, что такие дифференциальные операторы широко используются в различных задачах механики, а также в теории бифуркаций.

Перейдем к содержанию диссертации и более подробному обзору литературы.

В первой главе приводятся используемые в диссертации понятия теории операторов и теории полугрупп. Этому посвящены первые три параграфа. В четвертом параграфе содержатся основные положения метода подобных операторов. Данный метод возник при создании аналога замены Крылова-Боголюбова для нелинейных уравнений в банаховом пространстве. Он тесно соприкасается с методом Фридрихса [15], который относится к возмущенным операторам с непрерывным спектром. Все положения метода подобных операторов были развиты А.Г. Баскаковым и опубликованы в цикле работ [5] – [9] и [12]. В диссертации мы будем придерживаться аксиоматического подхода в изложении, развитого в работе [11], которая посвящена исследованию спектральных свойств оператора Дирака.

В теории возмущенных линейных операторов при изучении дифференциальных операторов, определяемых краевыми условиями на конечном промежутке, используются разнообразные методы. Например, П. Джаков и Б.С. Митягин проводили спектральный анализ операторов Шрёдингера и Дирака с негладкими потенциалами, используя резольвентный метод исследования [16], [31]. Резольвентный метод также был применен Э.Ф. Ахмеровой и Х.Х. Муртазиным для исследования оператора Шрёдингера и дифференциального оператора четного порядка с негладкими потенциалами [2], [3]. Еще одним популярным методом, применяемым в теории возмущений, является метод асимптотического представления решений, который активно используется в работах А.А. Шкаликова и его соавторов [25], [41]. Недостатками всех указанных методов является то, что их применение позволяет вычислять только первое приближение собственных значений возмущенного оператора и его проекторов. Особо отметим, что из-за сложностей при выборе контуров интегрирования резольвентные методы не дают возможности вычислить оценки отклонений спектральных проекторов рассматриваемых операторов.

Метод подобных операторов позволяет решить все указанные сложности. Суть этого метода заключается в преобразовании подобия исследуемого оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. А именно, доказывается подобие рассматриваемого оператора оператору блочно-диагонального вида в базисе из собственных векторов невозмущенного оператора (аналог теоремы Жордана для линейного оператора в конечномерном пространстве). Таким образом, существенно упрощается изучение исследуемого оператора.

В дальнейшем в главах 2 и 4 диссертации на основании общих положений метода подобных операторов будут построены две различные адаптированные схемы для изучения рассматриваемых классов дифференциальных операторов.

Вторая глава посвящена спектральному анализу дифференциального оператора четвертого порядка. Рассматривается оператор $L_{bc} : \mathrm{D}(L_{bc}) \subset \mathrm{L}_2[0,1] \to \mathrm{L}_2[0,1]$, который определяется следующим дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathrm{L}_2[0,1]. \tag{1}$$

Область определения задается одним из краевых условий bc:

(a) периодические $bc = per : y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1),\ j = 0,1,2,3;$

(b) антипериодические $bc = ap : y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(1),\ j = 0,1,2,3.$

Таким образом, полагается, что $\mathrm{D}(L_{bc}) = \{y \in W_2^4[0,1] : y$ удовлетворяет условию $bc\}$.

Интерес к изучению оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$, связан с тем, что такой оператор описывает вибрации балок и оболочек, а также сжатого стержня на упругом основании [19], [22]. Также интерес к этой теме в настоящее время возникает из-за многочисленных приложений в оптике, акустике [27] и к изучению проводимости нанотрубок [35].

Дифференциальный оператор четвертого порядка изучался А.В. Баданиным, Е.Л. Коротяевым [4], [28], [29], [30], О.А. Велиевым [41], В.А. Михайлецом [38], [39], В.Н. Молибогой [40], М.А. Наймарком [23] и др. Остановимся более подробно на перечисленных работах.

Сначала коснемся работ А.В. Баданина и Е.Л. Коротяева, в которых исследовался самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка с периодическими коэффициентами. В статье [28] на вещественной оси изучался оператор $\frac{d^4}{dt^4} + V$ с периодическим потенциалом V из L_1. В [4] рассматривался дифференциальный оператор четвертого порядка $H = \frac{d^4}{dt^4} + \frac{d}{dt}p\frac{d}{dt} + q$ с вещественными периодическими коэффициентами p, q такими, что p, p', $q \in \mathrm{L}_1(0,1)$. В [30] этот же оператор изучался на $\mathrm{L}_2(0,1)$ с краевыми условиями Дирихле и коэффициентами p, p'', $q \in \mathrm{L}_1(0,1)$. В [29] проводилось исследование периодического оператора четного порядка общего вида, действующего на $L_2(\mathbb{R})$, с коэффициентами из L_1. Во всех перечисленных работах проводилось исследование спектра, выписывалась асимптотика собственных значений оператора при высоких энергиях, проводились исследования спектральных зон, характеристик спектра при высоких энергиях. Для изучения применялся метод, основанный на построении функции Ляпунова и исследовании ее свойств.

В работе О.А. Велиева [41] рассматривался дифференциальный оператор произвольного порядка m с комплекснозначным потенциалом из $L_1[0,1]$ с периодическими и антипериодическими краевыми условиями. Для него были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. Используя эти формулы, О.А. Велиев получил необходимые и достаточные условия для коэффициентов, при которых корневые функции образуют базис Рисса.

В.А. Михайлец и В.Н. Молибога в [38] – [40] получили асимптотические оценки для оператора $(-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} + q$, $k \in \mathbb{N}$, с периодическими и антипериодическими краевыми условиями, где q — периодическое распределение из негативных пространств Соболева $W_2^{-m\alpha}[-1,1]$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Отметим, что оператор рассматривается в этих же пространствах.

В монографии М.А. Наймарка [23, Гл. 2, §9] была приведена асимптотика собственных значений для дифференциального оператора n-го порядка с регулярными краевыми условиями в пространстве непрерывных функций, а также в пространстве вектор-функций. Однако в ней затрагивался только случай гладких потенциалов.

В [1] М.С. Аграновичем были получены результаты о равносходимости спектральных разложений возмущения, подчиненного дробной степени невозмущенного оператора, и асимптотические оценки равносходимости спектральных разложений. Однако результаты указанной работы могут быть применены только в том случае, если a — ограниченная функция.

Отметим, что в диссертации на потенциалы не накладываются какие-либо дополнительные условия (типа гладкости), кроме $a, b \in L_2[0,1]$.

Перейдем к изложению основных результатов второй главы. Предварительно введем некоторые понятия и обозначения. Если $a = b = 0$, то полученный оператор четвертого порядка будем обозначать через $\mathcal{L}^0_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$.

Опишем спектры $\sigma(\mathcal{L}^0_{bc})$ и собственные функции операторов $\mathcal{L}^0_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$:

(a) $\sigma(\mathcal{L}^0_{per}) = \{(2\pi n)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$; соответствующее собственное подпространство для $n \neq 0$ имеет вид $E^0_n = \mathrm{Span}\{e^1_n, e^2_n\}$, где $e^1_n(t) = \mathrm{e}^{-i2\pi nt}$, $e^2_n(t) = \mathrm{e}^{i2\pi nt}$, $t \in [0,1]$. Если $n = 0$, то $E^0_0 = \{\alpha e_0, \alpha \in \mathbb{C}\}$, где $e_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$.

(b) $\sigma(\mathcal{L}^0_{ap}) = \{\pi^4(2n+1)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E^0_n = \mathrm{Span}\{e^1_n, e^2_n\}$, где $e^1_n(t) = \mathrm{e}^{-i\pi(2n+1)t}$, $e^2_n(t) = \mathrm{e}^{i\pi(2n+1)t}$, $t \in [0,1]$.

Так как $a, b \in \mathrm{L}_2[0,1]$, то имеют место следующие разложения: $a(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, $b(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, где a_l, b_l — коэффициенты Фурье функций a, b соответственно.

Через P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{(2\pi n)^4\}$ или $\{\pi^4(2n+1)^4\}$ для краевых условий $bc \in \{per, ap\}$ соответственно. Для любого $x \in \mathrm{L}_2[0,1]$ он имеет следующий вид:

(a) $P_n x = (x, e^1_n)e^1_n + (x, e^2_n)e^2_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\quad P_0 x = (x, e_0)e_0$;

(b) $P_n x = (x, e^1_n)e^1_n + (x, e^2_n)e^2_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Основными результатами второй главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.3.1. *Дифференциальный оператор L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$, является оператором с компактной резольвентой и его спектр представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \widetilde{\sigma}_m \cup \{\widetilde{\lambda}^{\mp}_n, n \geqslant m+1\}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\widetilde{\sigma}_m$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m.

Собственные значения $\widetilde{\lambda}^{\mp}_n$, $n \geqslant m+1$, оператора L_{per} допускают следующее асимптотическое представление:

$$\widetilde{\lambda}^{\mp}_n = \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 - n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l}a_{-n-l} + a_{n-l}a_{l-n})l^2}{l^4 - n^4} \mp$$

$$\mp (2\pi n)^2 \Bigg(a_{-2n}a_{2n} + \frac{1}{4\pi^4} \Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) -$$

$$-\frac{a_{-2n}}{2\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4-n^4}-\frac{a_{2n}}{2\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4-n^4}\Bigg)^{\frac{1}{2}}+\gamma_n n^2, n\geqslant m+1.$$

Или в краткой форме

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(2\pi n\big)^4+(2\pi n)^2a_0+\gamma_n^{\mp}n^2,\quad n\geqslant m+1.$$

Здесь (γ_n), $(\gamma_n^{\mp})$ *— последовательности, суммируемые со степенью* $\frac{4}{3}$ *и* 2 *соответственно.*

Собственные значения оператора L_{ap} *имеют следующую асимптотику:*

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(\pi(2n+1)\big)^4+(\pi(2n+1))^2a_0-(2n+1)^2\cdot$$
$$\cdot\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{(a_{n+l+1}a_{-n-l-1}+a_{n-l}a_{l-n})(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\mp(\pi(2n+1))^2\Bigg(a_{-2n-1}a_{2n+1}+$$
$$+\frac{4}{\pi^4}\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)-$$
$$-\frac{2a_{-2n-1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}-\frac{2a_{2n+1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\widetilde{\gamma}_n n^2, n\geqslant m+1.$$

Или в краткой форме

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(\pi(2n+1)\big)^4+(\pi(2n+1))^2a_0+\widetilde{\gamma}_n^{\mp}n^2,\quad n\geqslant m+1.$$

Здесь $(\widetilde{\gamma}_n)$, $(\widetilde{\gamma}_n^{\mp})$ *— последовательности, суммируемые со степенью* $\frac{4}{3}$ *и* 2 *соответственно, и* a_k, $k\in\mathbb{Z}$, *— коэффициенты Фурье функции* a.

Учитывая, что с точки зрения приложений значительный интерес представляет случай гладкого потенциала [19], мы приведем следующую теорему, где потенциалы a, b являются функциями ограниченной вариации.

Теорема 2.3.2. *Если функции* a *и* b *являются функциями ограниченной вариации, то собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n^{\mp}$ *допускают следующую асимптотику*

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(2\pi n\big)^4+(2\pi n)^2a_0+\mathcal{O}(1),$$

и

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(\pi(2n+1)\big)^4+(\pi(2n+1))^2a_0+\mathcal{O}(1),$$

для случаев $bc = per$ и $bc = ap$ соответственно.

В следующей теореме символ $\widetilde{P}_n$, $n \geqslant m+1$ (число $m \in \mathbb{N}$ взято из условий теоремы 2.3.1), обозначает проектор Рисса, построенный по множествам $\{\widetilde{\lambda}_n^{\mp}\}$ из спектра $\sigma(L_{bc})$ оператора L_{bc}. Если Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m\}$, то $\widetilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$ — проектор Рисса, построенный по множеству $\{\widetilde{\lambda}_k^{\mp}, k \in \Omega\}$. Аналогично, $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$. Далее, через $\widetilde{P}_{(m)}$ будет обозначаться проектор Рисса, построенный для оператора L_{bc} по спектральному множеству $\widetilde{\sigma}_m$, и через $P_{(m)}$ — проектор $P_1 + \dots + P_m$.

Отметим, что через $\|\cdot\|_2$ обозначается норма оператора Гильберта-Шмидта (см. подробнее в главе 1, §1.2).

Теорема 2.4.1. *Система проекторов Рисса $\widetilde{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$ и $\widetilde{M} > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k(\Omega)$.

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы 2.4.1 справедлива следующая оценка*

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \leqslant \frac{M_1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M_1 > 0$ — некоторая постоянная. В этом случае Ω — одноточечное множество $\{n\}$.

Следствие 2.4.2. *Если выполнены условия теоремы 2.4.1, то имеет место следующее неравенство*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \frac{M_1^2}{m^2}.$$

Отметим, что такие оценки вряд ли могут быть получены на основе резольвентного метода исследования, используемого в [2], [3], [15], [16], [18], [31], из-за проблем, связанных с выбором контуров интегрирования.

Следующая теорема посвящена оценкам равносходимости спектральных разложений.

Теорема 2.4.2. *Имеют место следующие оценки равносходимости спек-*

тральных разложений операторов L_{bc} и $\mathcal{L}^0_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$:

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $\widetilde{M} > 0$ — постоянная из теоремы 2.4.1.

Следствие 2.4.3. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов L_{bc} и $\mathcal{L}^0_{bc}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

Отметим, что оценки, полученные в [1] М.С. Аграновичем, применимы к рассматриваемому классу операторов, если функция a ограничена. В этом случае в оценках теоремы 2.4.2 отсутствует множитель $(\ln n)^{\frac{1}{2}}$. Такая же оценка получается и методом подобных операторов.

Последним результатом второй главы является теорема об асимптотическом поведении аналитической полугруппы операторов, генератором которой является оператор $-L_{bc}$.

Теорема 2.5.1. *Дифференциальный оператор $-L_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$, является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathrm{L}_2[0,1]$. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[0,1] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$.*

Полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида:

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{C_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0,1],$$

где $C_k \in \operatorname{End} \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$.

Здесь и далее символом $\operatorname{End} \mathcal{H}$ обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Отметим, что конкретный вид оператора C_k, $k \geqslant m+1$, будет указан непосредственно при доказательстве этой теоремы в главе 2, §2.5.

Третья глава посвящена исследованию дифференциального оператора четвертого порядка с негладкими потенциалами, но уже с краевыми условиями Дирихле и Неймана-Дирихле. Рассматриваются операторы $L_i : D(L_i) \subset$

$L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, которые определяются дифференциальным выражением (1) с функциями a, $b \in L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. В качестве отрезка $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ для оператора L_1 будет использоваться отрезок $[0,1]$, а для оператора L_2 — отрезок $[-1,1]$.

Область определения оператора L_1 задается краевыми условиями

$(bc)_1:$ Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, $y''(0) = y''(1) = 0$;

а L_2 — краевыми условиями:

$(bc)_2:$ Неймана-Дирихле $y(-1) = y(1) = 0$, $y'(-1) = y'(1) = 0$.

Следовательно, $\mathrm{D}(L_i) = \{y \in W_2^4[\mathbf{a},\mathbf{b}] : y$ удовлетворяет условию $(bc)_i\}$, $i = 1,2$. Через $L_{0i} : D(L_{0i}) \subset L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ будет обозначаться дифференциальный оператор четвертого порядка $L_{0i}y = y^{IV}$, $i = 1,2$. Оператор $B : D(B) \subset L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $By = a(t)y'' + b(t)y$, $i = 1,2$, будет играть роль возмущения. Оператор L_{0i}, $i = 1,2$, является самосопряженным оператором с известными спектральными свойствами. Приведем некоторые из них.

Спектры $\sigma(L_{0i})$ операторов L_{0i}, $i = 1,2$, имеют следующий вид:

$(bc)_1 : \sigma(L_{01}) = \{(\pi n)^4, n \in \mathbb{N}\}$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n = \mathrm{Span}\{e_n\}$, где $e_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t$, $t \in [0,1]$.

$(bc)_2 : \sigma(L_{02}) = \{\mu_n^4, n \in \mathbb{N}\}$, где $\mu_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ для нечетного $n \in \mathbb{N}$ или $\mu_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$ для четного $n \in \mathbb{N}$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n = \mathrm{Span}\{e_n\}$, где $e_n(t) = \frac{1}{\alpha_n}(\cos\mu_n \operatorname{ch}(\mu_n t) - \operatorname{ch}\mu_n \cos(\mu_n t))$ для нечетного n и $e_n(t) = \frac{1}{\beta_n}(\sin\mu_n \operatorname{sh}(\mu_n t) - \operatorname{sh}\mu_n \sin(\mu_n t))$ для четного n. Отметим, что здесь α_n, β_n — нормировочные параметры.

Проекторы Рисса P_n, $n \in \mathbb{N}$, построенные по одноточечным множествам $\{\pi^4 n^4\}$ или $\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)^4\}$ в обоих случаях имеют вид

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in L_2[\mathbf{a},\mathbf{b}],$$

где e_n — соответствующие собственные функции.

Перейдем к истории вопроса и известным к настоящему времени результатам. Всюду ниже через $C^n[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ обозначается пространство n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Спектральные свойства исследуемых дифференциальных операторов в первую очередь интересны с точки зрения задач механики. Оператор L_1 описывает модель балки или пластины с шарнирным соединением, а оператор L_2 — с жестко закрепленными концами [13], [19]. Некоторые упругие системы и фазовые состояния сегнетоэлектрических кристаллов моделируются решениями соответствующего нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка, линеаризация которого приводит к рассмотрению операторов L_1, L_2 [26]. В то же время, оператор L_2 появляется при визуализации аттракторов для математической модели движения водных растворов полимеров [20]. В последней работе изучался вопрос об асимптотике собственных значений оператора L_2 в пространстве $\mathrm{L}_2[-1,1]$ с достаточно гладкими коэффициентами a, $b \in C^4[-1,1]$.

Особенно выделим работы [36], [37], в которых рассматривался дифференциальный оператор $Ly = y^{IV} - (ay')' - by$ с коэффициентами $a, b \in C^\infty[0,1]$ и, соответственно, с коэффициентами $a \in C^3[0,1]$, $b \in C^1[0,1]$, и краевыми условиями Неймана-Дирихле.

Также отметим исследования М.А. Наймарка [23] и М.С. Аграновича [1], которые были приведены при описании результатов второй главы.

Перейдем к формулировке основных результатов третьей главы.

Теорема 3.3.2. *Дифференциальные операторы L_i, $i = 1, 2$, являются операторами с компактной резольвентой, и их спектр представим в виде*

$$\sigma(L_i) = \widetilde{\sigma}_m \cup \{\widetilde{\lambda}_n, n \geqslant m+1\}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\widetilde{\sigma}_m$ — конечное множество, с числом точек, не превосходящим m. Все собственные значения $\widetilde{\lambda}_{m+1}, \widetilde{\lambda}_{m+2}, \dots$ оператора L_1 являются простыми и допускают следующую асимптотику

$$\widetilde{\lambda}_n = (\pi n)^4 + (\pi n)^2 \int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t - (\pi n)^2 \int_0^1 a(t) \cos 2\pi n t\,\mathrm{d}t -$$

$$-n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln} l^2}{l^4 - n^4} + \zeta_n n^2, \quad n \geqslant m+1,$$

где (ζ_n) — суммируемая последовательность и $a_{nl} = \int_0^1 a(t)\cos\pi(l-n)t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 a(t)\cos\pi(l+n)t\,\mathrm{d}t$, $n, l \geqslant 1$.

Для оператора L_2 асимптотика собственных значений для нечетных n имеет вид:

$$\widetilde{\lambda}_n = \Big(-\frac{\pi}{4} + \pi n\Big)^4 - \Big(-\frac{\pi}{4} + \pi n\Big)^2 \Bigg(\frac{1}{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \int_{-1}^1 a(t)(\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{2}+2\pi n)t} +$$

$$+\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}-2\pi n)t}\big)\,\mathrm{d}t-\int_{-1}^{1}a(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}a(t)\cos\Big(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)t\,\mathrm{d}t\Big)-$$
$$-\Big(-\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^2\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{nl}a_{ln}(-\frac{\pi}{4}+\pi l)^2}{\lambda_l-\lambda_n}+\gamma_n n^2,\quad n\geqslant m+1,$$

где $\lambda_n=(-\frac{\pi}{4}+\pi n)^4$. *Для четных* n *асимптотика допускает следующее представление:*

$$\widetilde{\lambda}_n=\Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^4-\Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^2\Big(\frac{1}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}\int_{-1}^{1}a(t)(\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t}+$$
$$+\,\mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t}\big)\,\mathrm{d}t-\int_{-1}^{1}a(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}a(t)\cos\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)t\,\mathrm{d}t\Big)-$$
$$-\Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^2\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{nl}a_{ln}(\frac{\pi}{4}+\pi l)^2}{\lambda_l-\lambda_n}+\gamma_n n^2,\quad n\geqslant m+1,$$

где (γ_n) *— суммируемая последовательность,* $\lambda_n=(\frac{\pi}{4}+\pi n)^4$, $a_{nl}=\int_{-1}^{1}a(t)e_n(t)e_l(t)\,\mathrm{d}t$, $n,l\geqslant 1$.

Следствие 3.3.1. *Операторы* L_i, $i=1,2$, *спектральны по Данфорду (см. [15]).*

Следующая теорема будет посвящена оценкам отклонений спектральных проекторов. При ее формулировке мы будем использовать те же обозначения для спектральных проекторов, что и при описании предыдущей главы.

Теорема 3.4.1. *Система проекторов Рисса* $\widetilde{P}_n$, $n\in\mathbb{N}$, *обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega)-P(\Omega)\|_2\leqslant\frac{M\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega)=\min\limits_{k\in\Omega}k$ *и* $M>0$ *— некоторая постоянная, не зависящая от* $k(\Omega)$.

Следствие 3.4.1. *В условиях теоремы 3.4.1 имеет место оценка*

$$\|\widetilde{P}_n-P_n\|\leqslant\frac{M_3}{n},\quad n\in\mathbb{N},$$

где $M_3>0$ *— некоторая постоянная. В этом случае* Ω *— одноточечное множество* $\{n\}$.

Следствие 3.4.2. *Если выполнены условия теоремы 3.4.1, то верна следующая оценка*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\widetilde{P}_n-P_n\|_2^2<\frac{M_3^2}{m^2}.$$

Приведем результаты, касающиеся равносходимости спектральных разложений.

Теорема 3.4.2. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов* L_i *и* L_{0i}, $i = 1, 2$*:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 \leqslant \frac{M(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $M > 0$ *— постоянная из теоремы 3.4.1.*

Следствие 3.4.3. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов* L_i *и* L_{0i}, $i = 1, 2$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

Последним результатом третьей главы является теорема об асимптотическом поведении полугруппы операторов.

Теорема 3.5.1. *Дифференциальный оператор* $-L_i$, $i = 1, 2$, *является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов* $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. *Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида* $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, *действующей в* $\mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, *где* $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$.

Полугруппа $T^{(m)}(t)$ *допускает представление вида:*

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

где собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, *и число* m *определены в теореме 3.3.2.*

Четвертая глава посвящена спектральному анализу одномерного оператора Шрёдингера. В литературе встречаются различные названия для исследуемого оператора: оператор Хилла-Шрёдингера, оператор Штурма-Лиувилля, оператор Хилла и т. д. Мы будем придерживаться здесь терминологии, введенной Б.С. Митягиным.

Для спектрального анализа оператора Шрёдингера в четвертой главе будет применяться другая, по сравнению с предыдущими главами, схема метода подобных операторов. Она будет приведена в § 4.1. Рассматривается оператор $S : D(S) \subset \mathrm{L}_2[0,\omega] \to \mathrm{L}_2[0,\omega]$, порожденный на промежутке $[0,\omega]$, $\omega > 0$, дифференциальным выражением

$$s(y) = -y'' - vy, \quad v \in \mathrm{L}_2[0,\omega].$$

Область определения задается краевыми условиями Дирихле:

$$y(0) = y(\omega) = 0.$$

Таким образом, $D(S) = \{y \in W_2^2[0,\omega] : y(0) = y(\omega) = 0\}$. Если $v = 0$, то оператор второго порядка S мы будем обозначать через S_0. Оператор V является оператором умножения на потенциал v.

Спектр $\sigma(S_0)$ и собственные функции оператора S_0 имеют вид:

$\sigma(S_0) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, где $\lambda_n = (\frac{\pi n}{\omega})^2$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n = \mathrm{Span}\{e_n\}$, где $e_n(t) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{\omega}t$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,\omega]$.

Предполагается, что потенциал v принадлежит гильбертову пространству $\mathrm{L}_2[0,\omega]$, и всюду используется его разложение в ряд Фурье:

$$v(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos\frac{\pi k}{\omega}t, \quad t \in [0,\omega].$$

Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\}$. Для любого $x \in \mathrm{L}_2[0,\omega]$ этот проектор определяется следующим образом:

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Спектральному анализу оператора Шрёдингера посвящено очень большое количество работ. Замечательный обзор результатов был сделан П. Джаковым и Б.С. Митягиным в [16]. В этой статье устанавливалась взаимосвязь между асимптотическим поведением собственных значений оператора S с периодическими, антипериодическими краевыми условиями, а также краевыми условиями Дирихле, и асимптотикой длин спектральных лакун оператора Хилла-Шрёдингера.

Как уже было отмечено выше, формулы для асимптотики собственных значений дифференциальных операторов, определяемых регулярными краевыми условиями на конечном промежутке, приведены в монографии [23, гл.

2, §9]. При исследовании конкретных классов дифференциальных операторов возникает проблема получения более точных асимптотических формул для собственных значений.

В монографии [21, гл. 1, §5, Теорема 1.5.1] были приведены уточненные асимптотические формулы для дифференциального оператора второго порядка с вещественным потенциалом, который принадлежит пространству Соболева $W_2^n[0,\pi]$, и определяется краевыми условиями Дирихле и Неймана-Дирихле.

Множество работ посвящено изучению оператору Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Активное развитие исследований в этой области началось со статьи А.А. Шкаликова и А.М. Савчука [24]. Помимо непосредственно спектрального анализа оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом также проводятся исследования и для случая, когда потенциал принадлежит всей шкале пространств Соболева (соответственно, в частном случае проводится исследование оператора S). Здесь мы отметим статьи [25], [33], [34], в которых были получены асимптотические формулы для собственных значений оператора S (потенциал принадлежит пространству $W_2^{\theta-1}$, $\theta \in [0,1]$).

Оператор S с вещественным негладким потенциалом был изучен в статье [3]. В ней приводилась асимптотика собственных значений и формула следа. Позднее в работе [2] была получена асимптотика собственных значений для дифференциального оператора четного порядка с вещественным негладким потенциалом. Результаты статьи [2] в частном случае согласуются с результатами [3].

Теперь мы готовы перейти к результатам четвертой главы. Для их формулировки нам понадобится последовательность α, которая имеет следующий вид

$$\alpha(n) = \left(\frac{\|v\|_2^2}{n^2} + \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \frac{|v_{|n-p|}|^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что эта последовательность суммируема с квадратом.

Теперь приведем основные результаты четвертой главы.

Теорема 4.3.1. *Оператор S является оператором с компактной резоль-*

вентой. Его спектр допускает представление вида

$$\sigma(S) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{n \geqslant m+1} \sigma_n \Big),$$

где $\sigma_{(m)}$ *— конечное множество с числом точек, не превосходящим* m, *а множества* $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n\}$, $n \geqslant m+1$, *одноточечны. Собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, *представимы в виде*

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega}t\,\mathrm{d}t + \eta(n), \quad n \geqslant m+1,$$

где последовательность $\eta : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m+1\} \to [1, \infty)$ *допускает оценки вида*

$$|\eta(n)| \leqslant \frac{M_{dir}}{n}\alpha(2n), \quad n \geqslant m+1,$$

для некоторой постоянной $M_{dir} > 0$.

Следствие 4.3.1. *Оператор* S *является спектральным (по Данфорду).*

Полученная в теореме 4.3.1 формула остаточного члена в асимптотике собственных значений оператора S уточняет известные результаты об асимптотике, которые приведены в работах [2, Теорема 1], [3, Теорема 1], [33, Теорема 1.2], [34, Теорема 0.3].

В следующей теореме мы получим асимптотику оператора S в случае достаточно гладкого потенциала. Сформулируем эту теорему, если потенциал v является функцией ограниченной вариации, но она будет иметь место и для более гладких потенциалов.

Теорема 4.3.2. *Если* v *— функция ограниченной вариации, то для собственных значений* $\widetilde{\lambda}_n$ *имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega}t\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant m+1.$$

Перейдем к теореме об отклонениях спектральных проекторов. Пусть число m такое же, как и в теореме 4.3.1. Через $P_{(m)}$ обозначается проектор $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, m\}$. Для множества $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_k, k \in \Omega\}$ проектор Рисса $P(\Delta, S_0)$ определим равенством

$$P(\Delta, S_0)x = \sum_{n \in \Omega} P_n x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0, \omega].$$

Теперь рассмотрим множество $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(\Omega) = \cup_{k\in\Omega}\sigma_k$, где σ_k определяется в теореме 4.3.1. Символом $\widetilde{P}_n$ обозначим проектор Рисса, построенный по множеству σ_n, $n \geqslant m+1$. Тогда проектор $P(\widetilde{\Delta}, S)$ зададим равенством

$$P(\widetilde{\Delta}, S)x = \sum_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0,\omega].$$

Теорема 4.4.1. *Для любого подмножества Ω из $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m\}$ имеют место следующие оценки отклонений спектральных проекторов, построенных по операторам S и S_0:*

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - P(\Delta, S_0)\|_2 \leqslant \frac{M}{k^{\frac{1}{2}}(\Omega)},$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная и $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$.

Кроме того, существует оператор Гильберта-Шмидта $\mathcal{U}$[1] *с нормой $\|\mathcal{U}\|_2 \leqslant \frac{1}{2}$ такой, что справедлива оценка*

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - (I+\mathcal{U})^{-1}P(\Delta, S_0)(I+\mathcal{U})\|_2 \leqslant \frac{M_1}{k(\Omega)},$$

где $M_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Следствие 4.4.1. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов S и S_0:*

$$\left\| P(\sigma_{(m)}, S) + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - \sum_{k=0}^{n} P_k \right\|_2 \leqslant \frac{M_2}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $M_2 > 0$ — некоторая постоянная.

Так же как и при описании предыдущих глав, мы приведем результат об асимптотическом поведении полугруппы операторов.

Теорема 4.5.1. *Дифференциальный оператор $-S$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\,\mathrm{L}_2[0,\omega]$. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[0,\omega] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \mathrm{Im}\,P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \mathrm{Im}\,(I - P_{(m)})$.*

Полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида:

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0,\omega],$$

[1]Конкретный вид оператора $\mathcal{U}$ будет указан в доказательстве приведенной теоремы (см. § 4.4)

где собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, *определяются в теореме 4.3.1.*

Результаты диссертации докладывались и обсуждались автором на международных конференциях: Крымских Осенних математических школах–симпозиумах (Украина–Россия, Ласпи–Батилиман, 2010-2012, 2015), «15th Internet Seminar: Operator Semigroups for Numerical Analysis» (Germany, Blaubeuren, 2012), Крымской международной математической конференции (Украина, Крым, Судак, 2013), на конференции «Spectral theory and Differential Equations», посвященной 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана (Россия, Москва, МГУ, 2014), «Дифференциальные и функционально–дифференциальные уравнения» (Россия, Москва, 2014), «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Россия, Улан-Удэ, Байкал, 2015), «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VI» (Россия, Ростов-на-Дону, 2016), на семинаре Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск) под руководством Г. В. Демиденко, на семинаре кафедры высшей математики и математической физики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета под руководством Т.А. Суслиной, на семинарах НИИ математики (ВГУ, 2012–2016); на семинаре под руководством профессора А. Г. Баскакова; на научных сессиях ВГУ (2011–2016).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантами РФФИ № 14–01–31196–мол_а (руководитель В. Б. Диденко, 2014–2015 гг.) № 15–31–20241–мол_а_вед (руководитель к.ф.-м.н. С. К. Кондратьев, 2015–2016 гг.), № 16–31–00027–мол_а (руководитель Д. М. Поляков, 2016–2017 гг.), Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект № 1.1539.2014/К, руководитель проф. В. Г. Звягин, 2014–2016 гг.), РНФ «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований коллективами существующих научных лабораторий (кафедр)» (проект № 14–21–00066, руководитель проф. В. Г. Звягин 2014–2016 гг.).

Автор выражает самую искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору А. Г. Баскакову за постановку задач, внимание и помощь на протяжении всей работы над диссертацией. Также автор хотел бы поблагодарить профессора В. Г. Звягина за полезные замечания и внимание

к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [42] – [51], из них [42], [46] – [49] соответствуют перечню ВАК для кандидатских диссертаций.

ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Глава посвящена описанию основных понятий из общей теории операторов. Также здесь приводится общая схема метода подобных операторов, различные модификации которой будут использоваться в дальнейшем.

1.1 Некоторые сведения из спектральной теории операторов

При написании этого параграфа мы, в основном, опирались на монографии [12], [14], [15], [18].

Определение 1.1.1. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор. Множество $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим (т. е. $(A - \lambda I)^{-1} \in \operatorname{End} \mathcal{X}$) называется* резольвентным множеством *оператора A и обозначается $\rho(A)$. Операторнозначная функция $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ называется* резольвентой *оператора A, причем $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$.*

Определение 1.1.2. *Линейный замкнутый оператор A, определенный на плотном множестве, называется* нормальным оператором, *если*

$$AA^* = A^*A.$$

Определение 1.1.3. *Дополнение к резольвентному множеству $\rho(A)$ линейного замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется* спектром *$\sigma(A)$оператора A, т. е. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.*

Теперь перейдем к классификации спектра.

Определение 1.1.4. *Множество всех $\lambda \in \sigma(A)$, для которых отображение $A - \lambda I$ не является взаимно однозначным, т. е. нарушено первое условие* *обратимости, называется* дискретным спектром *оператора* A *и обозначается через* $\sigma_d(A)$. *Следовательно,* $\lambda \in \sigma_d(A)$ *тогда и только тогда, когда* $Ax = \lambda x$ *для ненулевого вектора* $x \in D(A)$. *В этом случае* λ *называется* собственным значением, *а вектор* x — собственным вектором.

Определение 1.1.5. *Множество*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) = \{0\},\ \mathrm{Im}\,(A - \lambda I) \neq \mathcal{X},\ \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)} = \mathcal{X}\}$$

называется непрерывным спектром *оператора* A.

Определение 1.1.6. *Множество*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) = \{0\}, \quad \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)} \neq \mathcal{X}\}$$

называется остаточным спектром *оператора* A.

Отметим, что множества $\sigma_d(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ взаимно не пересекаются, причем $\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Определение 1.1.7. *Линейный замкнутый оператор* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *называется* оператором с компактной резольвентой, *если для некоторого* $\lambda_0 \in \rho(A)$ *оператор* $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ *компактен.*

Теорема 1.1.1. *Если* A *— компактный оператор, то спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A *не более чем счетное множество, не имеющее предельных точек отличных от нуля. Каждое число* $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, *является собственным значением конечной кратности.*

Если A *— оператор с компактной резольвентой, то спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A *не более чем счетное множество, не имеющее конечных предельных точек. Каждое число* $\lambda \in \sigma(A)$ *является собственным значением конечной кратности.*

Определение 1.1.8. *Линейный ограниченный оператор* $P \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ *называется* проектором, *если* $P^2 = P$.

Отметим, что любой проектор индуцирует разложение пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, причем $\mathcal{X}_1 = \mathrm{Im}\,P$, $\mathcal{X}_2 = \mathrm{Im}\,(I - P)$, и $I - P$ — дополнительный проектор.

Определение 1.1.9. *Пусть* $\mathcal{H}$ *— гильбертово пространство и* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, *где* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ *— замкнутые подпространства из* $\mathcal{H}$, *причем* $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \varnothing$, *и любой вектор $x \in \mathcal{H}$ представим в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2 \in \mathcal{H}_2$. Проектор $P \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ вида $Px = x_1$, $x \in \mathcal{H}$, называется ортогональным проектором, если пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ ортогональны друг другу, т. е. $(x_1, x_2) = 0$, для любых $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2 \in \mathcal{H}_2$.*

Определение 1.1.10. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — замкнутый оператор, спектр которого представим в виде $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_1, σ_2 — замкнутые непересекающиеся множества, причем σ_1 — компактно. Пусть γ — жорданова замкнутая кривая, лежащая в $\rho(A)$, и содержащая σ_1 во внутренней части и σ_2 — во внешней. Проектор*

$$P(\sigma_1, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda, A)\, \mathrm{d}\lambda$$

называется спектральным проектором Рисса*, построенным по изолированной части σ_1 спектра оператора A.*

Теорема 1.1.2. *Пусть спектр замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ допускает разбиение спектра на множества σ_1 и σ_2 из предыдущего определения. Тогда оператор A допускает разложение $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_i = A|\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, — сужение оператора A на пространство $\mathcal{X}_i$ относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно оператора A подпространств $\mathcal{X}_i$. Причем $\mathcal{X}_i = \operatorname{Im} P_i$, $i = 1, 2$, где $P_1 = P(\sigma_1, A)$ — спектральный проектор Рисса, построенный по изолированной части σ_1 спектра оператора A, а $P_2 = I - P_1$ — дополнительный проектор.*

Определение 1.1.11. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор, λ — его изолированное собственное значение и $P(\lambda, A)$ — спектральный проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda\}$. Число $\nu(\lambda) = \dim \mathcal{X}_1$, где $\mathcal{X}_1 = \operatorname{Im} P$, называется* алгебраической кратностью *собственного значения λ. Если алгебраическая кратность собственного значения λ равна 1, т. е. $\dim \mathcal{X}_1 = 1$, то собственное значение λ называется простым. Наконец, если $\mathcal{X}_1 = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$, то собственное значение λ называется* полупростым.

Далее мы приведем известную теорему о представлении проектора Рисса. Всюду далее, через $\mathbb{J}$ мы будем обозначать одно из множеств $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$.

Теорема 1.1.3. *Пусть спектр самосопряженного оператора с компактной резольвентой $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ состоит из полупростых собственных* *значений* λ_n, $n \in \mathbb{J}$, *т. е. имеет место разложение* $\sigma(A) = \cup_{n\in\mathbb{J}}\{\lambda_n\}$. *Пусть* $e_n^{(j)}$, $n \in \mathbb{J}$, $j = 1, \ldots, \nu(\lambda_n)$, — *собственные векторы, соответствующие собственному значению* λ_n, *и* $\nu(\lambda_n)$ — *его алгебраическая кратность. Тогда ортогональный проектор Рисса, построенный по собственному значению* λ_n, *имеет вид*

$$P_n x = P(\lambda_n, A)x = \sum_{j=1}^{\nu(\lambda_n)} (x, e_n^{(j)})e_n^{(j)}.$$

Кроме того, оператор A *допускает представление*

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{J}} \lambda_n P_n x, \quad x \in D(A),$$

где $D(A) = \{x \in \mathcal{H} : \sum\limits_{n\in\mathbb{J}} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 < \infty\}$.

В заключение этого параграфа, следуя монографии [15], мы приведем определение спектрального оператора.

Определение 1.1.12. *Пусть* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — *самосопряженный оператор с компактной резольвентой. Оператор* A^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, *определяется следующим образом*

$$A^\alpha x = \sum_{n\in\mathbb{J}} \lambda_n^\alpha P_n x, \quad x \in D(A^\alpha),$$

где $D(A^\alpha) = \{x \in \mathcal{H} : \sum\limits_{n\in\mathbb{J}} |\lambda_n|^{2\alpha} \|P_n x\|^2 < \infty\}$.

Определение 1.1.13. *Пусть* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — *линейный оператор, спектр которого представим в виде*

$$\sigma(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{J}} \sigma_k, \tag{1.1}$$

взаимно непересекающихся компактных множеств σ_k, $k \in \mathbb{J}$. *Пусть* P_k, $k \in \mathbb{J}$, — *спектральный проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* σ_k, $k \in \mathbb{J}$. *Оператор* A *называется* спектральным *относительно разложения (1.1), если ряд* $\sum\limits_{k\in\mathbb{J}} P_k x$ *безусловно сходится к* x *для любого* $x \in \mathcal{H}$.

В том случае, если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{J}$, — *одноточечные множества, то спектральный относительно разложения (1.1) оператор* A *является* спектральным (по Данфорду) *оператором.*

Отметим, что спектральность оператора A по Данфорду эквивалентна условию базисности Рисса (со скобками) его собственных и присоединенных функций в пространстве $\mathcal{H}$.

Замечание 1.1.1. *Оператор A является* оператором скалярного типа*, если $AP_n = \lambda_n P_n$, $n \in \mathbb{J}$.*

1.2 Идеалы операторов

В настоящем параграфе мы приведем необходимые определения, связанные с идеалами операторов. Здесь и далее нас будет интересовать два больших класса: класс ядерных операторов и класс операторов Гильберта-Шмидта. При формулировки этих понятий мы придерживаемся книги [14].

Определение 1.2.1. *Если X — компактный оператор, то* s-числами *оператора X будем называть упорядоченные по убыванию собственные значения положительного самосопряженного компактного оператора $\sqrt{XX^*}$.*

Определение 1.2.2. *Множество компактных операторов, s-числа которых образуют сходящийся ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} s_n^p$ при некотором $p > 0$, обозначается через $\mathfrak{S}_p$. При $p \geqslant 1$ это множество образует симметрично-нормированный идеал в алгебре всех ограниченных операторов с нормой $\|\cdot\|_p = \big(\sum\limits_{n\geqslant 1} s_n^p\big)^{\frac{1}{p}}$.*

При $p = 1$ эта норма называется ядерной нормой операторов, а $\mathfrak{S}_1$ — двусторонним идеалом ядерных операторов.

При $p = 2$ эта норма называется нормой Гильберта-Шмидта, а $\mathfrak{S}_2$ — двусторонним идеалом операторов Гильберта-Шмидта.

Отметим, что $\|X\|_1 = \operatorname{tr}(XX^*) = \sum\limits_{n\geqslant 1} s_n$, где $\operatorname{tr}(XX^*)$ — след оператора XX^*, принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$.

Поскольку нас особенно будет интересовать класс операторов Гильберта-Шмидта, то остановимся на нем подробнее.

Пусть $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$. В обозначениях введенных выше, символом $\|X\|_2$ будем обозначать норму оператора Гильберта-Шмидта $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т. е. $\|X\|_2 = (\operatorname{tr} XX^*)^{\frac{1}{2}}$. Формула $(X, Y) = \operatorname{tr}(XY^*)$ определяет скалярное произведение в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Замечание 1.2.1. *Оператор* $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда конечна величина* $\Big(\sum\limits_{n,k\in\mathbb{J}} |(Xf_n, f_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ *для некоторого ортонормированного базиса* $\{f_k, k \in \mathbb{J}\}$ *из* $\mathcal{H}$. *Она не зависит от выбора ортонормированного базиса и совпадает с нормой Гильберта-Шмидта* $\|X\|_2$ *оператора* X.

Это замечание будет использоваться всюду в диссертации при вычислении нормы оператора Гильберта-Шмидта.

Если ввести матрицу (x_{kj}) оператора $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ в ортонормированном базисе $\{f_k, k \in \mathbb{J}\}$ как $x_{kj} = (Xf_j, f_k)$, $k, j \in \mathbb{J}$, то нормой в идеале операторов Гильберта-Шмидта будет величина $\Big(\sum\limits_{k,j\in\mathbb{J}} |x_{kj}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Приведем еще ряд необходимых в дальнейшем замечаний.

Замечание 1.2.2. *Произведение* XY *операторов* $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *является ядерным оператором и* $\|XY\|_1 \leqslant \|X\|_2\|Y\|_2$.

Замечание 1.2.3. *Пусть* $\{Q_n, n \geqslant 0\}$ — *система ортопроекторов из* $\operatorname{End}\mathcal{H}$, *образующая разложение единицы, т. е. обладающая свойствами:*

1) $Q_nQ_m = Q_mQ_n = 0$ *для* $n \neq m$;

2) $\sum\limits_{n\geqslant 0} Q_nx = x$ *для любого* $x \in \mathcal{H}$.

Тогда $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{n,m\geqslant 0} \|Q_nXQ_m\|_2^2$.

Замечание 1.2.4. *Пусть оператор* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ *(и, следовательно, имеет плотную в* $\mathcal{H}$ *область определения* $D(A)$*). Если конечна величина* $\sum\limits_{n,k\in\mathbb{J}} |(Af_n, f_k)|^2$, *то оператор* A *допускает единственное расширение на* $\mathcal{H}$. *Оно является оператором Гильберта-Шмидта и будет обозначаться тем же символом* A.

1.3 Основные понятия теории полугрупп операторов

В настоящем параграфе мы приведем используемые в диссертации некоторые определения теории полугрупп. Здесь мы придерживаемся терминологии монографии [32].

Определение 1.3.1. *Семейство операторов* $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, *из* $\operatorname{End}\mathcal{X}$ *называется* полугруппой операторов, *если выполнены два свойства:*

1) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *для любых* $t, s \in \mathbb{R}_+$;

2) $T(0) = I$.

Отметим, что если $t \in \mathbb{R}$, то семейство $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, называется группой операторов

Определение 1.3.2. *Полугруппа операторов* $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, *из* $\operatorname{End} \mathcal{X}$ *называется* сильно непрерывной *(или полугруппой класса* C_0*), если* $T(t)x$ *сходится к* x *в сильной операторной топологии при* $t \to 0+$ *для любого* $x \in \mathcal{X}$. *Аналогичное определение имеет место для группы операторов.*

Определение 1.3.3. *Замкнутый линейный оператор* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\overline{D(A)} = \mathcal{X}$, *называется генератором сильно непрерывной полугруппы операторов* $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+$ *(группы* $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$*), если*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \quad \text{существует} \quad \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\},$$

причем $Ax = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}$, $x \in D(A)$.

Теорема 1.3.1. *Если* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *— самосопряженный оператор, то оператор* iA *является генератором сильно непрерывной группы* $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, *изометрических операторов из* $\operatorname{End} \mathcal{H}$.

Если спектр оператора A *образует последовательность собственных значений* λ_n, $n \in \mathbb{J}$, *и* P_n *— ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству* $\{\lambda_n\}$, *то имеет место следующее спектральное представление операторов этой группы изометрий:*

$$T(t)x = \sum_{n \in \mathbb{J}} e^{i\lambda_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Определение 1.3.4. *Сильно непрерывная полугруппа операторов* $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, *из* $\operatorname{End} \mathcal{X}$ *называется* аналитической полугруппой *операторов, если выполнены следующие свойства:*

1) для некоторого $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ *отображение* $t \mapsto T(t)$ *может быть расширено до* $\Delta_\theta = \{0\} \cup \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta\}$;

2) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, z_1, $z_2 \in \Delta_\theta$;

3) $T(0) = I$;

4) отображение $z \mapsto T(z)$ *аналитично в* $\Delta_\theta \setminus \{0\}$;

5) $\lim\limits_{z \to 0} T(z)x = x$ *для всех* $x \in \mathcal{X}$ *и* $z \in \Delta_\theta \setminus \{0\}$.

Определение 1.3.5. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения. Если для некоторого $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, некоторой константы $M \geqslant 1$, $a \in \mathbb{R}$, сектор $S_{a,\varphi} = \{\lambda : \varphi \leqslant |\arg(\lambda - a)| \leqslant \pi,\ \lambda \neq a\}$ лежит в резольвентном множестве оператора A и выполнено неравенство*

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{\lambda - a}$$

для всех $\lambda \in S_{a,\varphi}$, то оператор A является секториальным.

Теорема 1.3.2. *Оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ является генератором аналитической полугруппы тогда и только тогда, когда он секториальный.*

1.4 О методе подобных операторов

Как было отмечено во введении, основным методом исследования является метод подобных операторов. В этом параграфе мы приведем основные определения и теоремы этого метода. Здесь мы будем придерживаться терминологии и обозначений [11], [12].

Определение 1.4.1. *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются* подобными, *если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ такой, что $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$, $U D(A_2) = D(A_1)$. Оператор U называется* оператором преобразования *оператора A_1 в A_2.*

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Имеет место следующая

Лемма 1.4.1. *Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора и $U \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — соответственно спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i, $i = 1, 2$;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2 | \mathcal{X}_k$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{X}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{X}}_k = U(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1 | \widetilde{\mathcal{X}}_k$, $k = 1, 2$, при этом $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{X}}_2$. Кроме *того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ (т. е. $\mathcal{X}_1 = \operatorname{Im} P$ — образ проектора P, $\mathcal{X}_2 = \operatorname{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\widetilde{P} \in \operatorname{End} \mathcal{X}$, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{X}}_2$, определяется формулой*

$$\widetilde{P} = UPU^{-1}. \tag{1.2}$$

3) если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T_2 : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \to \operatorname{End} \mathcal{X}$, то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \geqslant 0, \quad T_1 : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}. \tag{1.3}$$

Далее рассмотрим линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Напомним, что линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если $D(B) \supseteq D(A)$ и конечна величина

$$\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}.$$

Эта величина принимается за норму оператора B в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$. Поскольку $D(A - B) = D(A)$ для любого $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, то обычно считается, что $D(B) = D(A)$.

В дальнейшем также будет рассматриваться *трансформатор* (т. е. линейный оператор в пространстве линейных операторов) $\operatorname{ad}_A : D(\operatorname{ad}_A) \subset \operatorname{End} \mathcal{X} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$, который определяется следующим образом

$$\operatorname{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\operatorname{ad}_A).$$

Область определения $D(\operatorname{ad}_A)$, состоящая из операторов $X \in \operatorname{End} \mathcal{X}$, обладает свойствами:

1) $XD(A) \subset D(A)$;

2) оператор $AX - XA : D(A) \to \mathcal{X}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathcal{X}$ (и полагается $\operatorname{ad}_A X = Y$).

Аналогичным образом трансформатор ad_A определяется на замкнутых подалгебрах из $\operatorname{End} \mathcal{X}$.

Теперь перейдем к ключевому понятию метода подобных операторов — понятию допустимой тройки.

Определение 1.4.2 ([12]). *Пусть* $\mathfrak{U}$ *— линейное подпространство из* $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ *и*

$$J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}, \quad \Gamma : \mathfrak{U} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$$

являются линейными трансформаторами. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ *назовем* допустимой тройкой *для (невозмущенного) оператора* A, *а* $\mathfrak{U}$ *—* пространством допустимых возмущений, *если выполнены следующие условия:*

1) $\mathfrak{U}$ *— банахово пространство (со своей нормой* $\|\cdot\|_*$*), непрерывно вложенное в* $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ *(т. е. существует постоянная* $C > 0$ *такая, что* $\|X\|_A \leqslant C\|X\|_*$ *для любого* $X \in \mathfrak{U}$*);*

2) J *и* Γ *— непрерывные трансформаторы, причем* J *— проектор;*

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ *и более того имеют место равенства*

$$(\operatorname{ad}_A \Gamma X)x = A\Gamma X x - (\Gamma X)Ax = (X - JX)x, \quad X \in \mathfrak{U}, \quad x \in D(A), \quad (1.4)$$

причем $\Gamma X \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ *— единственное решение уравнения*

$$\operatorname{ad}_A Y = AY - YA = X - JX, \quad (1.5)$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$*;*

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$ *для любых* $X, Y \in \mathfrak{U}$, *и существует постоянная* $\gamma > 0$ *такая, что*

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leqslant \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

5) для любых $X \in \mathfrak{U}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ *такое, что* $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 1.4.1 ([12]). *Пусть* $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ *— допустимая для невозмущенного оператора* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *тройка и* B *— оператор из пространства допустимых возмущений* $\mathfrak{U}$, *для которого выполнено условие*

$$\|J\|\|B\|_*\|\Gamma\| < \frac{1}{4}. \quad (1.6)$$

Тогда оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - JX_*$, *где* $X_* \in \mathfrak{U}$ *является решением нелинейного уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \quad (1.7)$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$, $X_2 = \Phi(X_1), \ldots, X_{n+1} = \Phi(X_n)$, $n \geqslant 2$. *Отображение* $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ *является сжимающим в шаре* $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \leqslant 3\|B\|_*\}$. *Преобразование подобия оператора* $A - B$ *в оператор* $A - JX_*$ *осуществляет обратимый оператор* $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End} \mathcal{X}$, *т. е. имеет место равенство*

$$A - B = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*)(I + \Gamma X_*)^{-1}. \tag{1.8}$$

Из свойства 3) леммы 1.4.1 и теоремы 1.4.1 (используя равенство (1.8)) вытекает следующая

Теорема 1.4.2. *Пусть* $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — *допустимая тройка для оператора* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *тройка, оператор* $B \in \mathfrak{U}$ *удовлетворяет условию (1.6) и оператор* $A - JX_*$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов* $\widetilde{T} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}$. *Тогда оператор* $A - B$ *является генератором полугруппы операторов* $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}$, *определенной равенством*

$$T(t) = (I + \Gamma X_*)\widetilde{T}(t)(I + \Gamma X_*)^{-1}, \quad t \geqslant 0.$$

Часто бывает сложно построить пространство допустимых возмущений, содержащее рассматриваемое возмущение. В таком случае осуществляется построение трансформаторов J и Γ (с использованием равенств (1.4), (1.5)) на всем пространстве допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ такое, что оно вместе с сужениями J и Γ на это подпространство (они будут обозначаться теми же символами) образуют допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для оператора A.

Как правило, исходное возмущение B не принадлежит $\mathfrak{U}$. Тогда необходимо сделать предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - \widetilde{B}$, $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Такое преобразование возможно в условиях следующего предположения.

Предположение 1.4.1. *Операторы* ΓB, JB, B *из* $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ *удовлетворяют условиям:*

1) $\Gamma B \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ *и* $\|\Gamma B\| < 1$;

2) $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$;

3) $B\Gamma B$, $(\Gamma B)JB \in \mathfrak{U}$;

4) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$;

5) для любого $\varepsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ *такое, что* $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)\| < \varepsilon$.

Теорема 1.4.3 ([12]). *При выполнении условий предположения 1.4.1 оператор $A - B$ подобен оператору $A - JB - B_0$, где $B_0 = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$, причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - JB - B_0).$$

ГЛАВА 2
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Глава посвящена исследованию спектральных свойств дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями. Напомним основную постановку задачи. Пусть $L_{bc} : \mathrm{D}(L_{bc}) \subset \mathrm{L}_2[0,1] \to \mathrm{L}_2[0,1]$ — дифференциальный оператор четвертого порядка, который определяется следующим дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathrm{L}_2[0,1].$$

Область определения $\mathrm{D}(L_{bc})$ задается одним из краевых условий bc:

(a) периодические $bc = per : y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1),\ j = 0,1,2,3;$

(b) антипериодические $bc = ap : y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(1),\ j = 0,1,2,3.$

А именно, полагается $\mathrm{D}(L_{bc}) = \{y \in W_2^4[0,1] : y$ удовлетворяет условию $bc\}$. Отметим, что соответствующие операторы будем обозначать через L_{per}, L_{ap}. В том случае если $a = b = 0$, то соответствующий оператор будет обозначаться через $\mathcal{L}^0_{bc}$, $\mathcal{L}^0_{per}$, $\mathcal{L}^0_{ap}$ соответственно. При изучении оператора L_{bc} он будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор $B : \mathrm{D}(B) = \mathrm{D}(L_{bc}) \subset \mathrm{L}_2[0,1] \to \mathrm{L}_2[0,1]$, $By = a(t)y'' + b(t)y$, — роль возмущения. Оператор $\mathcal{L}^0_{bc}$ является самосопряженным оператором с компактной резольвентой.

Поскольку $a, b \in \mathrm{L}_2[0,1]$, то справедливы следующие разложения: $a(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, $b(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, где a_l, b_l — коэффициенты Фурье функций a, b соответственно.

Опишем спектры $\sigma(\mathcal{L}^0_{bc})$ и собственные функции операторов $\mathcal{L}^0_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$:

(a) $\sigma(\mathcal{L}^0_{per}) = \{(2\pi n)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$; соответствующее собственное подпространство для $n \neq 0$ имеет вид $E^0_n = \mathrm{Span}\{e^1_n, e^2_n\}$, где $e^1_n(t) = \mathrm{e}^{-i2\pi nt}$, $e^2_n(t) = \mathrm{e}^{i2\pi nt}$, $t \in [0,1]$. Если $n = 0$, то $E^0_0 = \{\alpha e_0, \alpha \in \mathbb{C}\}$, где $e_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$.

(b) $\sigma(\mathcal{L}^0_{ap}) = \{\pi^4(2n+1)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E^0_n = \mathrm{Span}\{e^1_n, e^2_n\}$, где $e^1_n(t) = \mathrm{e}^{-i\pi(2n+1)t}$, $e^2_n(t) = \mathrm{e}^{i\pi(2n+1)t}$, $t \in [0,1]$.

Через $P_n, n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{(2\pi n)^4\}$, $\{\pi^4(2n+1)^4\}$, $n \in \mathbb{N}$, для краевых условий $bc \in \{per, ap\}$. Для любого $x \in \mathrm{L}_2[0,1]$ он имеет следующий вид:

(a) $P_n x = (x, e^1_n)e^1_n + (x, e^2_n)e^2_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\quad P_0 x = (x, e_0)e_0$;

(b) $P_n x = (x, e^1_n)e^1_n + (x, e^2_n)e^2_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Отметим, что иногда операторы L_{bc}, $\mathcal{L}^0_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$, мы будем записывать (соответственно) также в виде L_θ, $\mathcal{L}^0_\theta$, $\theta \in \{0,1\}$.

Теперь мы готовы перейти к непосредственному применению метода подобных операторов.

2.1 Построение допустимой тройки

Согласно схеме метода подобных операторов, описанной в главе 1, первым шагом к его применению является построение допустимой тройки. В настоящем параграфе мы проведем такое построение для абстрактного оператора, который по своим свойствам наиболее близок к изучаемым дифференциальным операторам L_{per}, L_{ap}.

Пусть $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$, спектр $\sigma(A)$ которого образует последовательность собственных значений следующего вида:

$$\lambda_{n,\theta} = \pi^4(2n+\theta)^4, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\theta = 0$, если $A = \mathcal{L}^0_{per}$, и $\theta = 1$, если $A = \mathcal{L}^0_{ap}$.

Собственные значения оператора A обладают следующим свойством

$$|\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}| \geqslant \frac{1}{c}|k^4 - j^4|, \quad |\lambda_{k,\theta}| \leqslant ck^4, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \neq j, \tag{2.1}$$

где $c > 0$ — некоторая константа.

Пусть e_0, e_n^1, e_n^2, $n \in \mathbb{N}$, — ортонормированный базис. Пусть P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, — ортогональный проектор, построенный по множеству $\{\lambda_{n,\theta}\} \subset \sigma(A)$, и определяемый следующим образом:

$$P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad P_0 x = (x, e_0)e_0, \quad \text{для} \quad \theta = 0,$$
$$P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{для} \quad \theta = 1.$$

Далее будем рассматривать оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}P_n = AP_n = \lambda_{n,0}P_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{A}P_0 = P_0$ для $bc = per$ (т. е. $\theta = 0$), $\mathcal{A}P_n = AP_n = \lambda_{n,1}P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для $bc = ap$ (т. е. $\theta = 1$).

Рассмотрим операторную матрицу $(\mathcal{X}_{kj})$, составленную из операторных блоков $\mathcal{X}_{kj} = P_k X P_j$, $k, j \in \mathbb{Z}_+$. Для оператора $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ рассмотрим отдельные блоки этой матрицы в случае $\theta = 0$ (т. е. $bc = per$).

Если $k = j = 0$, то $(\mathcal{X}_{00})$ — матрица размера 1×1, состоящая из одного элемента $\mathcal{X}_{00} = (Xe_0, e_0)$. Матричные элементы матрицы $(\mathcal{X}_{k0})$, $k \geqslant 1$, размера 2×1 имеют вид

$$\begin{pmatrix} (Xe_0, e_k^1) \\ (Xe_0, e_k^2) \end{pmatrix}.$$

Соответственно, матричные элементы для матрицы $(\mathcal{X}_{0j})$, $j \geqslant 1$, размера 1×2 имеют вид $((Xe_j^1, e_0), (Xe_j^2, e_0))$.

Наконец, в силу того, что $\dim \operatorname{Im} P_n = 2$, $n \in \mathbb{N}$, то матрица $(\mathcal{X}_{kj})$, $k, j \geqslant 1$, имеет вид

$$\mathcal{X}_{kj} = \begin{pmatrix} (Xe_j^1, e_k^1) & (Xe_j^2, e_k^1) \\ (Xe_j^1, e_k^2) & (Xe_j^2, e_k^2) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Отметим, что при $\theta = 1$ (т. е. $bc = ap$) матрица $(\mathcal{X}_{kj})$, $k, j \geqslant 0$, имеет вид (2.2). При следующих оценках будут использоваться равенства $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{k,j=0}^{\infty} \|P_k X P_j\|_2^2$.

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} : \mathrm{D}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n,\theta}^{\frac{1}{2}} P_n x,$$

с областью определения $\mathrm{D}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) = \{x \in \mathcal{H} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n,\theta}| \|P_n x\|^2 < \infty\}$.

Банахово пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ будет состоять из операторов $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$, представимых в виде

$$X = X_0 \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}, \quad X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

За норму оператора X в пространстве $\mathfrak{U}$ примем величину $\|X\|_* = \|X_0\|_2$.

Далее построим трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$. Вначале эти трансформаторы определим на алгебре $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ задаются равенствами

$$JX = \sum_{n=0}^{\infty} P_n X P_n, \quad \Gamma X = \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{P_k X P_j}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}}. \tag{2.3}$$

Корректность определения JX, ΓX и их ограниченность будут установлены в следующей лемме.

Лемма 2.1.1. *Трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ корректно определены, ограничены и обладают свойствами:*

1) J — проектор, $\|J\| = 1$;

2) имеет место оценка $\|\Gamma\| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k \neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|} \leqslant \frac{c}{15}$, где константа c определяется в (2.1).

Доказательство. Докажем 1). Используя свойство ортонормированной последовательности векторов из гильбертова пространства, получим следующие равенства

$$\|(JX)x\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (P_n X P_n) x \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n (X P_n x)\|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n X P_n x\|^2 \leqslant \|X\|^2 \|x\|^2,$$

где $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, $\|JX\| \leqslant \|X\|$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, оператор J корректно определен, ограничен и $\|J\| \leqslant 1$. Отметим, что равенство $\|J\| = 1$ достигается в том случае, если X совпадает с одним из проекторов P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Докажем 2), т. е. корректность и ограниченность трансформатора Γ. Справедливы следующие оценки:

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \left\| \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{P_k X P_j}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} \right\|_2^2 \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|^2} \left\| \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} P_k X P_j \right\|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|^2} \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \|P_k X P_j\|_2^2 = \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|^2} \|X\|_2^2.$$

Таким образом, $\|\Gamma X\|_2 \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j} |\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}|} \|X\|_2 \leqslant \frac{c}{15}\|X\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, оператор Γ корректно определен, ограничен и $\|\Gamma\| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j} |\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}|} \leqslant \frac{c}{15}$. Лемма доказана. □

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространства $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{U}$ (далее обозначаемые теми же символами) будут задаваться следующим образом:

$$JX = J(X\mathcal{A}^{-1})\mathcal{A}, \quad \Gamma X = (\Gamma X\mathcal{A}^{-1})\mathcal{A}, \quad X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}),$$

$$JX = J(X\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}})\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}, \quad \Gamma X = (\Gamma X\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}})\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}, \quad X \in \mathfrak{U}. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1.2. *Каждый оператор ΓX, $X \in \mathfrak{U}$, допускает расширение на все пространство $\mathcal{H}$ до оператора (обозначаемого тем же символом ΓX), принадлежащего $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Причем, имеет место оценка*

$$\|\Gamma X\|_2 \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3}\|X\|_*, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{2.5}$$

где постоянная c определяется в (2.1).

Доказательство. Так как $X \in \mathfrak{U}$, то справедливо представление $X = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Согласно оценкам (2.1), имеют место неравенства

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \left\| \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{P_k X P_j}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} \right\|_2^2 = \left\| \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k X_0 P_j)\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} \right\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant 0\\k\neq j}} \frac{j^4}{(k^4 - j^4)^2} \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \|P_k X_0 P_j\|_2^2 \leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant 0\\k\neq j}} \frac{1}{(k^2 - j^2)^2} \|X_0\|_2^2 \leqslant \frac{c^3}{9}\|X\|_*^2.$$

Таким образом, оператор ΓX является оператором Гильберта–Шмидта. Следовательно, оператор ΓX допускает ограниченное расширение на все $\mathcal{H}$ и справедлива оценка (2.5). Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.1.1. *Учитывая лемму 2.1.2, трансформатор Γ, определенный формулой (2.4), будем рассматривать как линейный оператор из $\mathfrak{U}$ со значениями в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и обозначать тем же символом. При этом из леммы 2.1.2 следует, что $\|\Gamma\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3}$.*

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим трансформаторы $J_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следующим образом:

$$J_m X = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{2.6}$$

$$\Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}), \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{2.7}$$

где $P_{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{m} P_k$. Отметим также, что $J_0 X = JX$ и $\Gamma_0 X = \Gamma X$, $X \in \mathfrak{U}$.

Используя определения трансформаторов J_m и Γ_m, лемму 2.1.2 и замечание 2.1.1, непосредственной проверкой легко установить справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1.3. *Каждый из трансформаторов $J_m, \Gamma_m, m \in \mathbb{N}$, допускает ограниченное расширение на $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ (следовательно, и на пространство $\mathfrak{U}$). Также, имеют место оценки*

$$\|J_m\| = 1, \quad \|\Gamma_m\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m},$$

где c определено в (2.1).

Замечание 2.1.2. *Отметим, что непосредственно из равенств (2.6) и (2.7) следует, что оператор ΓX (соответственно, JX), $X \in \mathfrak{U}$, отличается от оператора $\Gamma_m X$ (соответственно, $J_m X$) на оператор конечного ранга $P_{(m)}(\Gamma X)P_{(m)}$ (соответственно, $P_{(m)}(JX)P_{(m)}$). Поэтому в дальнейшем мы будем осуществлять проверку всех необходимых свойств для оператора ΓX (соответственно, JX).*

Покажем теперь, что построенная тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой.

Лемма 2.1.4. *Тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора $\mathcal{A}$, причем для величины $\gamma = \gamma_m$ из определения 1.4.2 допустимой тройки справедлива оценка $\gamma_m \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$, где c определено в (2.1).*

Доказательство. Проверим все свойства допустимой тройки. Первые два свойства следуют из представления пространства допустимых возмущений, леммы 2.1.3 и формул (2.6), (2.7).

Докажем свойство 3), т. е. $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ для любого $X \in \mathfrak{U}$. Согласно замечанию 2.1.2, вместо $\Gamma_m X$ можно рассмотреть ΓX. Оператор X представим в виде $X = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Возьмем произвольный вектор $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, тогда $x = \mathcal{A}^{-1}y$, $y \in \mathcal{H}$. Имеют место равенства

$$(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}y = \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k X P_j)\mathcal{A}^{-1}y}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} = \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k X_0 \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} P_j)y}{(\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}} =$$

$$= \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k X_0 P_j)y}{(\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}.$$

Из (2.1), с учетом неравенства $\sup\limits_{\substack{k,j\geqslant 1\\k\neq j}} \frac{k^2}{(k-j)^2 j^4} \leqslant 4$, вытекает, что

$$\left\|\mathcal{A}(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}y\right\|^2 = \left\|\mathcal{A}\sum_{\substack{k,j=0\\j\neq k}}^{\infty} \frac{(P_k X_0 P_j)y}{(\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}\right\|^2 = \left\|\sum_{\substack{k,j=0\\j\neq k}}^{\infty} \frac{\lambda_{k,\theta}(P_k X_0 P_j)y}{(\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \left\|\sum_{\substack{k,j=0\\j\neq k}}^{\infty} \frac{k^4(P_k X_0 P_j)y}{(k^4 - j^4)j^2}\right\|^2 \leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant 1\\k\neq j}} \frac{k^8}{(k^4-j^4)^2 j^4} \sum_{k,j=0}^{\infty} \|(P_k X_0 P_j)y\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant 1\\k\neq j}} \frac{k^2}{(k-j)^2 j^4} \|X_0\|_2^2 \|y\|^2 \leqslant 4c^3 \|X_0\|_2^2 \|y\|^2.$$

Таким образом, $(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, а из полученных оценок следует ограниченность оператора $\mathcal{A}(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}$. Следовательно, $(\Gamma X)\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ и, значит, $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$. Осталось установить равенство матриц операторов $\mathcal{A}(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)\mathcal{A}$ и $X - J_m X$. При $k \neq j$ имеем

$$\left(\frac{\lambda_{k,\theta}\widetilde{x}_{kj}(1-\delta_{kj})}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}}\right) - \left(\frac{\widetilde{x}_{kj}(1-\delta_{kj})\lambda_{j,\theta}}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\widetilde{x}_{kj}(\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta})(1 - \delta_{kj})}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} \right) = \widetilde{x}_{kj} - \delta_{kj}\widetilde{x}_{kj},$$

где $(\widetilde{x}_{kj})$ — матрица оператора X. Таким образом, получаем справедливость свойства 3).

Проверим свойство 4). Возьмем $X, Y \in \mathfrak{U}$ и запишем их в виде $X = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$, $Y = Y_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$. Тогда представим оператор $X\Gamma_m Y$ в виде $X\Gamma_m Y = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\Gamma_m Y_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} = Z_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$. Докажем, что оператор Z_0 является оператором Гильберта-Шмидта. Согласно лемме 2.1.3, достаточно проверить этот факт для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Используя оценки (2.1), получим следующие неравенства:

$$\|Z_0\|_2^2 = \|X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\Gamma Y_0\|_2^2 = \left\| X_0 \left(\sum_{\substack{k,j=m+1\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k Y_0 P_j)\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} \right) \right\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant m+1\\ k\neq j}} \frac{j^4}{(k^4 - j^4)^2} \left\| X_0 \sum_{k,j=m+1}^{\infty} P_k Y_0 P_j \right\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant m+1\\ k\neq j}} \frac{1}{(k^2 - j^2)^2} \|X_0\|_2^2 \sum_{k,j=m+1}^{\infty} \|P_k Y_0 P_j\|_2^2 \leqslant \frac{c^3\|X\|_*^2\|Y\|_*^2}{m^2},$$

где c — величина из (2.1). Следовательно, $Z_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и оператор $X\Gamma_m Y$ принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$, а также справедлива оценка $\|X\Gamma_m Y\|_* \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}\|X\|_*\|Y\|_*$. Аналогично рассуждая, получим точно такую же оценку и для оператора $(\Gamma_m X)Y$. Таким образом, $\|\Gamma_m\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$.

Проверим последнее свойство допустимой тройки. Пусть $X = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$ — произвольный оператор из $\mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$. В качестве λ_ε возьмем число $-cn$, $n \in \mathbb{N}$, и число n таково, что $\frac{1}{2}c^{\frac{3}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\|X_0\|_2 < \varepsilon$, где $c > 0$ — величина из (2.1). Тогда

$$\|X(\mathcal{A} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leqslant \|X_0\|_2\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| = \|X_0\|_2 \max_{k\geqslant 1} \frac{|\lambda_{k,\theta}^{\frac{1}{2}}|}{|\lambda_{k,\theta} - \lambda_\varepsilon|} \leqslant$$

$$\leqslant c^{\frac{3}{2}}\|X_0\|_2 \max_{k\geqslant 1} \frac{k^2}{k^4 + n} \leqslant \frac{\|X_0\|_2 c^{\frac{3}{2}}}{2n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon.$$

Таким образом, $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ — допустимая тройка. Лемма доказана. □

Итак, допустимая тройка для оператора $\mathcal{A}$ построена и мы возвращаемся к исследованию оператора L_{bc}.

2.2 Предварительное преобразование подобия

В связи с тем, что оператор возмущения B не принадлежит построенному в предыдущем разделе пространству допустимых возмущений, то согласно схеме метода подобных операторов необходимо провести предварительное преобразование подобия оператора L_{bc} в оператор $\widetilde{L}_{bc} = L^0_{bc} - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Этому преобразованию и будет посвящен настоящий параграф.

Применим абстрактную схему, описанную в предыдущем параграфе, для исследования спектральных свойств оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$. В качестве оператора $\mathcal{A}$ будут выступать операторы L^0_{per}, L^0_{ap}, которые определяются следующим образом:

$$L^0_{per}P_n = \mathcal{L}^0_{per}P_n = \lambda_n P_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad L^0_{per}P_0 = \mathcal{L}^0_{per}P_0 = P_0,$$

$$L^0_{ap}P_n = \mathcal{L}^0_{ap}P_n = \lambda_n P_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что ортогональные проекторы P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, описаны в предисловии к главе 2. Операторы L^0_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$, являются самосопряженными операторами с компактной резольвентой и собственными значениями, удовлетворяющими (2.1), где $c = (2\pi)^4$ для оператора L^0_{per} и $c = (3\pi)^4$ для оператора L^0_{ap}. Напомним, что в качестве $\mathcal{H}$ мы будем использовать гильбертово пространство $\mathrm{L}_2[0,1]$. Для операторов L_{per}, L_{ap} оно будет отождествляться с гильбертовым пространством $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Оператор возмущения B принадлежит пространству $\mathfrak{L}_{L^0_{bc}}(\mathcal{H})$, $bc \in \{per, ap\}$. Следовательно, корректно определены операторы JB, ΓB, $J_m B$, $\Gamma_m B$, заданные соответственно формулами (2.3), (2.6), (2.7), для оператора B.

Сначала преобразуем оператор B. Он имеет вид $B = B_1 + B_2$, где $B_1 y = ay''$, $B_2 y = by$, $y \in \mathrm{D}(L^0_{bc})$, $bc \in \{per, ap\}$, и $a, b \in \mathcal{H}$. Представим возмущение B в виде $B = (B(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}})(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} = (B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}})(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} + (B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}})(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$. В силу принадлежности функций a и b пространству $\mathcal{H}$, имеют место следующие представления:

$$a(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{2i\pi lt}, \quad b(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{2i\pi lt}.$$

Рассмотрим случай $bc = per$. Числовые блочные матрицы $(\mathfrak{A}^{per}_{kj})$, $(\mathfrak{B}^{per}_{kj})$, $k, j \geqslant 0$, определим таким же образом, как и в предыдущем параграфе. В частности, будет иметь место формула (2.2). Вычислим элементы этих матриц. Для оператора умножения на функцию a элементы этой матрицы имеют следующий вид:

$$(ae_j^1, e_k^1) = \int_0^1 a(t)e_j^1(t)\overline{e_k^1(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{2i\pi lt} \cdot \mathrm{e}^{i2\pi(k-j)t}\,\mathrm{d}t = a_{j-k}.$$

Аналогично рассуждая, получим справедливость следующих равенств:

$$(ae_j^2, e_k^1) = a_{-j-k}, \quad (ae_j^1, e_k^2) = a_{j+k}, \quad (ae_j^2, e_k^2) = a_{-j+k}.$$

В случае, если $k = 0$, $j \geqslant 1$, и $k \geqslant 1$, $j = 0$, соответствующие элементы имеют вид:

$$(ae_0, e_0) = 0, \quad (ae_0, e_k^1) = 0, \quad (ae_0, e_k^2) = 0, \quad (ae_j^1, e_0) = a_j, \quad (ae_j^2, e_0) = a_{-j}.$$

Таким образом, матрица оператора B_1 выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{A}_{kj}^{per} = -(2\pi j)^2 \begin{pmatrix} 0 & a_j & a_{-j} \\ 0 & a_{j-k} & a_{-j-k} \\ 0 & a_{j+k} & a_{-j+k} \end{pmatrix}, \quad k, j \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Так как оператор B_2 является оператором умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то матрица $(\mathfrak{B}_{kj}^{per})$, $k, j \geqslant 1$, очевидно, определяется следующим образом:

$$\mathfrak{B}_{kj}^{per} = \begin{pmatrix} 0 & b_j & b_{-j} \\ b_{-k} & b_{j-k} & b_{-j-k} \\ b_k & b_{j+k} & b_{-j+k} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Аналогичным образом вычисляются элементы матриц $(\mathfrak{U}_{kj}^{ap})$, $(\mathfrak{B}_{kj}^{ap})$, $k, j \geqslant 0$, для случая $bc = ap$. Следовательно, имеют место следующие представления:

$$\mathfrak{A}_{kj}^{ap} = -(\pi(2j+1))^2 \begin{pmatrix} a_{j-k} & a_{-j-k-1} \\ a_{j+k+1} & a_{-j+k} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_{kj}^{ap} = \begin{pmatrix} b_{j-k} & b_{-j-k-1} \\ b_{j+k+1} & b_{-j+k} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Далее, перейдем к доказательству нескольких лемм, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 2.2.1. *Операторы ΓB, $\Gamma_m B$, $m \in \mathbb{N}$, являются операторами Гильберта -Шмидта, причем* $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Gamma_m B\|_2^2 = 0$.

Доказательство. Покажем, что оператор ΓB является оператором Гильберта -Шмидта. Так как оператор B_2 является оператором умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то для доказательства леммы будет достаточно рассмотреть оператор ΓB_1 вместо ΓB. Пусть сначала $bc = per$. Согласно представлению (2.8) имеют место следующие оценки:

$$\|\Gamma B_1\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^1, e_0)|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^2, e_0)|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty} \left|(\Gamma B_1 e_j^1, e_k^1)\right|^2 +$$
$$+ \sum_{k,j=1}^{\infty} \left|(\Gamma B_1 e_j^1, e_k^2)\right|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty} \left|(\Gamma B_1 e_j^2, e_k^1)\right|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty} \left|(\Gamma B_1 e_j^2, e_k^2)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|^2 (2\pi j)^4}{(2\pi j)^8} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_{-j}|^2 (2\pi j)^4}{(2\pi j)^8} + \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{j-k}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi k)^4 - (2\pi j)^4)^2} +$$
$$+ \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{-j-k}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi k)^4 - (2\pi j)^4)^2} + \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{j+k}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi k)^4 - (2\pi j)^4)^2} +$$
$$+ \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{-j+k}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi k)^4 - (2\pi j)^4)^2} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|^2 + |a_{-j}|^2}{j^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \frac{|a_{j-k}|^2}{(k-j)^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \frac{|a_{-j-k}|^2}{(k-j)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \frac{|a_{j+k}|^2}{(k-j)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \frac{|a_{-j+k}|^2}{(k-j)^2} \right) < \infty.$$

Следовательно, $\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, согласно замечанию 2.1.2, операторы $\Gamma_m B$, $m \in \mathbb{N}$, также являются операторами Гильберта-Шмидта. Проводя аналогичные рассуждения, используя равенства (2.10), мы получим, что $\Gamma_m B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для случая $bc = ap$.

Кроме того, из (2.7) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \|\Gamma_m B\|_2^2 = \lim_{m\to\infty} \|\Gamma B - P_{(m)}(\Gamma B)P_{(m)}\|_2^2 =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{\max\{k,j\}\geqslant m+1} \|P_k(\Gamma_m B)P_j\|_2^2 = 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.2.2. *Оператор $J_m B$ принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.1.2, достаточно провести доказательство для оператора JB. Представим его в виде $JB = (JB(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}})(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} = B_{JB}(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$ и докажем, что оператор B_{JB} принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Пусть $bc = per$. Используя представления (2.8) и (2.9), мы получим справедливость следующих неравенств:

$$\|JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 = |(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e_0, e_0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_n, e^1_n)|^2 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_n, e^2_n)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_n, e^1_n)|^2 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_n, e^2_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{2n}|^2(2\pi n)^2}{(2\pi n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{-2n}|^2(2\pi n)^2}{(2\pi n)^2} +$$

$$+ 2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_{2n}|^2}{(2\pi n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_{-2n}|^2}{(2\pi n)^2} < \infty.$$

Аналогично рассуждая, используя представление (2.10), получим такие же оценки для случая $bc = ap$. Таким образом, $B_{JB} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, операторы J_mB, $m \in \mathbb{N}$, принадлежат пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$. Лемма доказана. □

Лемма 2.2.3. *Операторы $B\Gamma_mB$, $(\Gamma_mB)J_mB$ принадлежат пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $B\Gamma B \in \mathfrak{U}$ (согласно замечанию 2.1.2). Для этого представим его в виде $B\Gamma B = (B\Gamma B(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}})(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} = B_0(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$ и установим, что $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В свою очередь, оператор B_0 представим в виде $B_0 = B_1\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}} + B_1\Gamma B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}$. Докажем, что $\|B_1\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 < \infty$. Сначала рассмотрим случай $bc = per$. Согласно представлениям (2.8) и (2.9), имеем

$$\|B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 = \sum_{k,j=1}^{\infty}|(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j, e^1_k)|^2 +$$

$$+\sum_{k,j=1}^{\infty}|(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_j, e^1_k)|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty}|(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j, e^2_k)|^2 +$$

$$+\sum_{k,j=1}^{\infty}|(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_j, e^2_k)|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}|(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j, e_0)|^2 +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}|(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_j,e_0)|^2.$$

Оценим первое слагаемое в этой сумме. Отметим, что все остальные слагаемые будут оцениваться аналогично. Имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}|(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j,e^1_k)|^2=$$

$$=\sum_{k,j=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{(a_{l-k}a_{j-l}+a_{-l-k}a_{j+l})(2\pi j)^2(2\pi l)^2}{((2\pi l)^4-(2\pi j)^4)(2\pi j)^2}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{8\pi^4}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{l-k}||a_{j-l}|}{|l^2-j^2|}\right)^2+\frac{1}{8\pi^4}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{-l-k}||a_{j+l}|}{|l^2-j^2|}\right)^2.$$

Теперь перейдем к оценке одного из слагаемых. Для определенности выберем слагаемое

$$\frac{1}{8\pi^4}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{l-k}||a_{j-l}|}{|l^2-j^2|}\right)^2,$$

обозначаемое далее через γ_1. Аналогично и той же постоянной оцениваются остальные слагаемые. Рассмотрим последовательности $f_j:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+=[0,\infty), j\geqslant 1$, вида $f_j(l)=\frac{|a_{j-l}|}{|l^2-j^2|}$, если $l\neq j$ и 0, если $l=j$. Найдем соответствующую оценку для нормы этих последовательностей в l^1:

$$\|f_j\|_{l^1}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}|f_j(l)|=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{j-l}|}{|l^2-j^2|}\leqslant\frac{\|a\|_{l^2}}{j}\left(2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\|a\|_{l^2}\pi}{j\sqrt{3}},\quad j\geqslant 1.$$

Ввиду того, что последовательности $k\mapsto|a_{|k-l|}|:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+, l\geqslant 1$, обозначаемые далее через $\widetilde{a}_l$, принадлежат l^2, справедливы следующие неравенства

$$\left\|\sum_{l=1}^{\infty}\widetilde{a}_lf_j(l)\right\|_{l^2}\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}\|\widetilde{a}_l\|_{l^2}|f_j(l)|\leqslant\|a\|_{l^2}\sum_{l=1}^{\infty}|f_j(l)|\leqslant\frac{\|a\|^2_{l^2}\pi}{j\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\gamma_1=\frac{1}{8\pi^4}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{l=1}^{\infty}\widetilde{a}_lf_j(l)\right\|^2_{l^2}\leqslant\frac{\|a\|^4_{l^2}}{24\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{\|a\|^4_{l^2}}{144}.$$

Отметим, что аналогичные рассуждения и вычисления справедливы и для случая $bc=ap$. Таким образом, оператор $B_1\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Так как B_2 — оператор умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то операторы $B_1\Gamma B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}$, $B_2\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}$, $B_2\Gamma B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}$ также принадлежат $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, $B\Gamma B$ принадлежит пространству $\mathfrak{U}$, а значит, и $B\Gamma_m B \in \mathfrak{U}$.

Осталось доказать, что $(\Gamma_m B)J_m B \in \mathfrak{U}$. Согласно лемме 2.2.1, оператор $\Gamma_m B$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а из леммы 2.2.2 следует, что оператор $J_m B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Так как произведение двух операторов Гильберта-Шмидта является ядерным оператором (см. замечание 1.2.2), то $(\Gamma_m B)J_m B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2.4. *Существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что операторы $B, J_m B, \Gamma_m B$ удовлетворяют следующим условиям:*

*(**a**) $\Gamma_m B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ и $\|\Gamma_m B\|_2 < 1$;*

*(**b**) $(\Gamma_m B)\mathrm{D}(L^0_{bc}) \subset \mathrm{D}(L^0_{bc})$;*

*(**c**) $B\Gamma_m B, (\Gamma_m B)J_m B \in \mathfrak{U}$;*

*(**d**) $L^0_{bc}(\Gamma_m B)x - (\Gamma_m B)L^0_{bc}x = Bx - (J_m B)x$, $x \in \mathrm{D}(L^0_{bc})$;*

*(**e**) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(L^0_{bc})$ такое, что $\|B(L^0_{bc} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Из леммы 2.2.1 следует, что оператор $\Gamma_m B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \operatorname{End}\mathcal{H}$, причем согласно (2.7), справедливо неравенство $\|\Gamma_m B\|_2 < 1$ для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, выполнено условие (a).

Для того чтобы установить свойство (b) для оператора ΓB (см. замечание 2.1.2), необходимо провести аналогичные рассуждения, как при доказательстве свойства 3 леммы 2.1.4. Следовательно, $(\Gamma_m B)\mathrm{D}(L^0_{bc}) \subset \mathrm{D}(L^0_{bc})$.

Свойство (c) выполнено в силу леммы 2.2.3.

Для доказательства свойства (d) необходимо провести аналогичные рассуждения, как и при доказательстве свойства 4 леммы 2.1.4. Кроме того, из равенств (2.6), (2.7) следует, что для $x \in \mathrm{D}(L^0_{bc})$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} L^0_{bc}(\Gamma_m B)x &= L^0_{bc}\Gamma Bx - L^0_{bc}P_{(m)}(\Gamma B)P_{(m)} = L^0_{bc}\Gamma Bx - P_{(m)}(L^0_{bc}\Gamma B)P_{(m)} = \\ &= (B - JB)x + (\Gamma B)L^0_{bc}x - P_{(m)}(B - JB)P_{(m)}x - \\ &- P_{(m)}(\Gamma B)L^0_{bc}P_{(m)}x = (B - J_m B)x + (\Gamma_m B)L^0_{bc}x. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено свойство (d).

Осталось установить свойство (e). Рассмотрим случай $bc = per$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\left(\frac{4\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{\|b\|_{l^2}^2}{1890}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\pi n^{\frac{1}{4}}} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

В качестве λ_ε возьмем число $-\pi^4 n$. Непосредственным вычислением, легко установить, что оператор $B(L_{per}^0)^{-\frac{3}{4}}$ ограничен и справедлива оценка $\|B(L_{per}^0)^{-\frac{3}{4}}\|_2^2 \leqslant \frac{4\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{\|b\|_{l^2}^2}{1890}$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего (2.11), имеют место неравенства

$$\|B(L_{per}^0 - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leqslant \|B(L_{per}^0)^{-\frac{3}{4}}\|_2 \max_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_k^{\frac{3}{4}}}{|\lambda_k - \lambda_\varepsilon|} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{4\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{\|b\|_{l^2}^2}{1890}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \max_{k\geqslant 1} \frac{k^3}{k^4 + n} \leqslant \left(\frac{4\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{\|b\|_{l^2}^2}{1890}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\pi n^{\frac{1}{4}}} < \varepsilon.$$

Итак, свойство (e) установлено для L_{per}^0. Аналогично рассуждая, устанавливается свойство (e) для случая $bc = ap$. Лемма доказана. □

Теорема 2.2.1. *Пусть $bc \in \{per, ap\}$. Если число $m \in \mathbb{N}$ таково, что*

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \tag{2.12}$$

то оператор $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ подобен оператору $\widetilde{L}_{bc} = L_{bc}^0 - \widetilde{B}$, где

$$\widetilde{B} = J_m B_1 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1) J_m B_1) + \widetilde{C}. \tag{2.13}$$

Оператор $\widetilde{C}$ определяется формулой $\widetilde{C} = J_m B_2 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_2 + B_2 \Gamma_m B_1 + B_2 \Gamma_m B_2 - (\Gamma_m B_1) J_m B_2 - (\Gamma_m B_2) J_m B_1 - (\Gamma_m B_2) J_m B_2)$, причем имеет место равенство

$$(L_{bc}^0 - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(L_{bc}^0 - \widetilde{B}). \tag{2.14}$$

Оператор $\widetilde{B}$ из (2.14) представим в виде

$$\widetilde{B} = J B_1 + B_1 \Gamma B_1 - (\Gamma B_1) J B_1 + C \in \mathfrak{U}, \tag{2.15}$$

где $C = C_0 (L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}$ и C_0 принадлежит идеалу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Существование числа $m \in \mathbb{N}$, для которого справедлива оценка (2.12), доказано в лемме 2.2.1. Согласно теореме 1.4.3 и лемме 2.2.4, оператор $L_{bc} = L^0_{bc} - B$ подобен оператору $\widetilde{L}_{bc} = L^0_{bc} - \widetilde{B}$, и имеют место равенства (2.13), (2.14). Оператор C из (2.15) имеет вид

$$C = -(I + \Gamma_m B)^{-1}(\Gamma_m B)(B_1\Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1)J_m B_1) + C_1 + \widetilde{C},$$

где оператор $C_1 = B_1\Gamma_m B_1 - B_1\Gamma B_1 - (\Gamma_m B_1)J_m B_1 + (\Gamma B_1)JB_1 + J_m B_1 - JB_1$ имеет конечный ранг и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Из леммы 2.2.3 следует, что операторы $(\Gamma_m B)J_m B$ и $B\Gamma_m B$ принадлежат $\mathfrak{U}$. Следовательно, операторы $\widetilde{C}$, $B_1\Gamma_m B_1$, $(\Gamma_m B_1)J_m B_1$ принадлежат $\mathfrak{U}$. Таким образом, оператор C представим в виде $C = C_0(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$, где C_0 принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ (как сумма оператора конечного ранга и произведения двух операторов Гильберта-Шмидта [14, Глава 3]). Следовательно, $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Теорема доказана. □

Теорема 2.2.1 позволяет свести изучение оператора L_{bc} к оператору $\widetilde{L}_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$. Исследование оператора $\widetilde{L}_{bc}$ будем осуществлять методом подобных операторов с использованием теоремы 1.4.1.

В условиях следующей теоремы число $m \in \mathbb{N}$ выбирается так, чтобы одновременно были выполнены условия

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \quad \frac{c^{\frac{3}{2}}\|B\|_*}{m} < \frac{1}{4}, \tag{2.16}$$

где $c = (2\pi)^4$ для случая $bc = per$ и $c = (3\pi)^4$ для случая $bc = ap$.

Наконец, сформулируем теорему о подобии, которая будет необходима для доказательства основных результатов.

Теорема 2.2.2. *Пусть $bc \in \{per, ap\}$ и число $m \in \mathbb{N}$ таково, что выполнены условия (2.16). Тогда оператор $L_{bc} = L^0_{bc} - B$ (а следовательно, и оператор $\widetilde{L}_{bc}$) подобен оператору вида*

$$L^0_{bc} - J_m X_* = L^0_{bc} - P_{(m)}X_*P_{(m)} - \sum_{j \geqslant m+1} P_j X_* P_j. \tag{2.17}$$

Оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ есть решение уравнения

$$X = \widetilde{B}\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m\widetilde{B}) - (\Gamma_m X)J_m(\widetilde{B}\Gamma_m X) + \widetilde{B}, \tag{2.18}$$

рассматриваемого в $\mathfrak{U}$. *Оператор* $I+\Gamma_m X_*$ *обратим и преобразование подобия оператора* $L_{bc}=L_{bc}^0-B$ *в оператор* $L_{bc}^0-J_mX_*$ *осуществляет оператор вида*

$$U_m=(I+\Gamma_m B)(I+\Gamma_m X_*)=I+V_m, \tag{2.19}$$

где $V_m\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. *Кроме того, оператор* J_mX_* *представим в виде*

$$J_mX_*=J\widetilde{B}+J(\widetilde{B}\Gamma\widetilde{B})+T_0, \tag{2.20}$$

где T_0 *имеет вид* $T_0=T_0'(L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}$, $T_0'\in\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Из оценки (2.12) (см. первое условие (2.16)) следует, что оператор $I+\Gamma_mB$ обратим. Из теоремы 2.2.1 (ее условия выполнены в силу обоих условий из (2.16)) вытекает подобие оператора $L_{bc}=L_{bc}^0-B$ оператору вида $\widetilde{L}_{bc}=L_{bc}^0-\widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ определен равенством (2.15). Поскольку $\widetilde{B}$ принадлежит $\mathfrak{U}$ (в силу теоремы 2.2.1), то $\widetilde{L}_{bc}=L_{bc}^0-\widetilde{B}$ (а следовательно, и оператор $L_{bc}=L_{bc}^0-B$) подобен оператору $L_{bc}^0-J_mX_*$ вида (2.17), где оператор $X_*\in\mathfrak{U}$ — решение уравнения (2.18). Применяя к обеим частям этого уравнения трансформатор J_m, получим следующие равенства

$$J_mX_*=J_m(\widetilde{B}\Gamma_mX_*)+J_m\widetilde{B}=J_m\widetilde{B}+J_m(\widetilde{B}\Gamma_m\widetilde{B})+$$
$$+J_m(\widetilde{B}\Gamma_m(X_*-\widetilde{B}))=J\widetilde{B}+J(\widetilde{B}\Gamma\widetilde{B})+T_0,$$

где $T_0=T_0'(L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}$, $T_0'\in\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Отметим, что здесь использовался тот факт, что произведение двух операторов Гильберта-Шмидта является ядерным оператором и что операторы J_mX-JX, $\Gamma_mX-\Gamma X$, $X\in\mathfrak{U}$, $m\in\mathbb{N}$, являются операторами конечного ранга.

Ясно, что оператор преобразования L_{bc} в оператор $L_{bc}^0-J_mX_*$ совпадает с оператором U_m из (2.19). Поскольку Γ_mB, $\Gamma_mX_*\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то оператор V_m из (2.19) принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Теорема доказана. □

2.3 Асимптотика собственных значений для возмущенного оператора четвертого порядка

Как было отмечено в предыдущем параграфе, теорема 2.2.2 позволяет получить спектральные свойства оператора L_{bc}. Этот параграф будет посвящен доказательству теорем об асимптотике собственных значений этого оператора. Но сначала мы приведем следующую простую лемму, которую мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2.3.1. *Собственные значения* $\widetilde{\mu}_n^{\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, *матрицы*

$$\begin{pmatrix} c_1(n) & c_2(n) \\ c_3(n) & c_4(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1(n) & d_2(n) \\ d_3(n) & d_4(n) \end{pmatrix},$$

где $c_j \in l^2$, $d_j \in l^1$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, *допускают представление вида*

$$\widetilde{\mu}_n^{\pm} = \frac{c_1(n) + c_4(n)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(c_1(n) - c_4(n))^2 + 4c_2(n)c_3(n)} + \varepsilon_n^{\pm},$$

где последовательности $(\varepsilon_n^{\pm})$ *принадлежат* $l^{\frac{4}{3}}$, *т. е.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n^{\pm}|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Теперь мы готовы перейти к доказательству основных теорем этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Дифференциальный оператор* L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$, *является оператором с компактной резольвентой и его спектр представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \widetilde{\sigma}_m \cup \{\widetilde{\lambda}_n^{\mp}, n \geqslant m+1\}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, *где* $\widetilde{\sigma}_m$ — *конечное множество с числом точек, не превосходящим* m.

Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{\mp}$, $n \geqslant m+1$, *оператора* L_{per} *допускают следующее асимптотическое представление:*

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 - n^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l}a_{-n-l} + a_{n-l}a_{l-n})l^2}{l^4 - n^4} \mp$$
$$\mp (2\pi n)^2 \Bigg(a_{-2n}a_{2n} + \frac{1}{4\pi^4} \Bigg(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) -$$
$$- \frac{a_{-2n}}{2\pi^2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4 - n^4} - \frac{a_{2n}}{2\pi^2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg)^{\frac{1}{2}} + \gamma_n n^2, n \geqslant m+1.$$

Или в краткой форме

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 + \gamma_n^{\mp} n^2, \quad n \geqslant m+1.$$

Здесь (γ_n), $(\gamma_n^{\mp})$ *— последовательности, суммируемые со степенью* $\frac{4}{3}$ *и* 2 *соответственно.*

Собственные значения оператора L_{ap} *имеют следующую асимптотику:*

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 - (2n+1)^2 \cdot$$
$$\cdot \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l+1}a_{-n-l-1} + a_{n-l}a_{l-n})(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} \mp (\pi(2n+1))^2 \bigg(a_{-2n-1}a_{2n+1} +$$
$$+ \frac{4}{\pi^4}\bigg(\sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4}\bigg)\bigg(\sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4}\bigg) -$$
$$- \frac{2a_{-2n-1}}{\pi^2} \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} - \frac{2a_{2n+1}}{\pi^2} \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4}\bigg)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \widetilde{\gamma}_n n^2, n \geqslant m+1.$$

Или в краткой форме

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 + \widetilde{\gamma}_n^{\mp} n^2, \quad n \geqslant m+1.$$

Здесь $(\widetilde{\gamma}_n)$, $(\widetilde{\gamma}_n^{\mp})$ *— последовательности, суммируемые со степенью* $\frac{4}{3}$ *и* 2 *соответственно, и* a_k, $k \in \mathbb{Z}$, *— коэффициенты Фурье функции* a.

Доказательство. Из леммы 1.4.1 и теоремы 2.2.2 следует, что оператор $L_{bc}^0 - J_m X_*$ вида (2.17) перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)}$, P_k, $k \geqslant m+1$ (см. предисловие к настоящей главе). Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, где $P_{(m)} = \sum\limits_{j\leqslant m} P_j$, $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$, $j \geqslant m+1$, инвариантны для оператора $L_{bc}^0 - J_m X_*$.

Из подобия операторов L_{bc} и $L_{bc}^0 - J_m X_*$ следуют равенства $\sigma(L_{bc}) = \sigma(\widetilde{L}_{bc}) = \sigma(L_{bc}^0 - J_m X_*)$. Очевидно, что оператор $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ (как и оператор $L_{bc}^0 - J_m X_*$) является оператором с компактной резольвентой. Поэтому, если $\lambda_0 \in \sigma(L_{bc}^0 - J_m X_*)$, то существует собственный вектор $x_0 \in \mathrm{D}(L_{bc}^0)$ такой, что $(L_{bc}^0 - J_m X_*)x_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, из вида оператора $J_m X_*$ следуют равенства

$$A_{(m)}P_{(m)}x_0 = \lambda_0 P_{(m)}x_0, \quad A_j P_j x_0 = \lambda_0 P_j x_0, \quad j \geqslant m+1, \tag{2.21}$$

где $A_{(m)} = (L_{bc}^0 - J_m X_* \,|\, \mathcal{H}_{(m)})$ — сужение оператора $L_{bc}^0 - J_m X_*$ на подпространство $\mathcal{H}_{(m)}$ и $A_j = (L_{bc}^0 - J_m X_* \,|\, \mathcal{H}_j)$ — сужение оператора $L_{bc}^0 - J_m X_*$ на подпространство $\mathcal{H}_j$, $j \geqslant m+1$. Ввиду того, что $I = P_{(m)} + \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} P_j$ (т. е. система проекторов P_j, $j \geqslant m+1$, $P_{(m)}$, образует разложение единицы), то из (2.21) следует, что хотя бы один из векторов $P_j x_0$, $j \geqslant m+1$, $P_{(m)} x_0$ ненулевой. Следовательно, λ_0 — собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов A_j, $j \geqslant m+1$, $A_{(m)}$. Таким образом, установлено включение

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma(\widetilde{L}_{bc}) = \sigma(L_{bc}^0 - J_m X_*) \subset \sigma(A_{(m)}) \bigcup \Big(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma(A_j) \Big).$$

Обратное включение очевидно. Следовательно, имеют место равенства

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma(\widetilde{L}_{bc}) = \sigma(L_{bc}^0 - J_m X_*) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \Big(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma(A_j) \Big). \tag{2.22}$$

Из представления (2.22) следует (ввиду конечномерности подпространства $\mathcal{H}_{(m)}$, $\dim \mathcal{H}_{(m)} = m$), что множество $\sigma(A_{(m)}) = \sigma_{(m)}$ конечно. Также подпространства $\mathcal{H}_j$, $j \geqslant m+1$, являются двумерными. Таким образом, операторы $A_{(m)}, A_j, j \geqslant m+1$, корректно определены.

Поскольку каждый из операторов L_{bc} подобен соответствующему оператору $\widetilde{L}_{bc}$, то все дальнейшие вычисления будем проводить с $\widetilde{L}_{bc}$.

Перейдем непосредственно к вычислению собственных значений оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$. Для этого мы будем использовать представления матриц, описанных в (2.8) и (2.9), а также разложения функций a, b в их ряды Фурье: $a(t) = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{2i\pi lt}$, $b(t) = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{2i\pi lt}$.

Для случая $bc = per$ из формулы (2.8) следует, что блочная матрица $(\mathfrak{A}_{nn}^{per})$, $n \in \mathbb{N}$, оператора B_1 имеет вид

$$\mathfrak{A}_{nn}^{per} = -(2\pi n)^2 \begin{pmatrix} 0 & a_n & a_{-n} \\ 0 & a_0 & a_{-2n} \\ 0 & a_{2n} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, для $bc = ap$ блочная матрица $(\mathfrak{A}_{nn}^{ap})$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\mathfrak{A}_{nn}^{ap} = -(\pi(2n+1))^2 \begin{pmatrix} a_0 & a_{-2n-1} \\ a_{2n+1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Блочно-диагональные элементы $\mathcal{C}_{nn}^{per}$, $n \in \mathbb{N}$, матрицы оператора $B_1 \Gamma B_1$ в случае $bc = per$ допускает представление

$$\mathcal{C}_{nn}^{per} = n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{l^2}{l^4 - n^4} \begin{pmatrix} 0 & a_l a_{n-l} + a_{-l} a_{n+l} & a_l a_{-n-l} + a_{-l} a_{-n+l} \\ 0 & a_{n-l} a_{l-n} + a_{n+l} a_{-n-l} & 2a_{l-n} a_{-n-l} \\ 0 & 2a_{n+l} a_{n-l} & a_{n+l} a_{-n-l} + a_{n-l} a_{l-n} \end{pmatrix}.$$

Для случая $bc = ap$ матрица $\mathcal{C}_{nn}^{ap}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{C}_{nn}^{ap} = (2n+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a_{n-l} a_{l-n} + a_{n+l+1} a_{-n-l-1} & 2a_{l-n} a_{-n-l-1} \\ 2a_{n+l+1} a_{n-l} & a_{n+l+1} a_{-n-l-1} + a_{n-l} a_{l-n} \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 2.2.2, представление (2.20) и лемму 2.3.1 получим, что остаток представим в виде $\gamma_n n^2$, где $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} |\gamma_n|^{\frac{4}{3}} < \infty$. Таким образом, при $n \geqslant m+1$ асимптотика собственных значений для оператора L_{per} принимает вид

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = (2\pi n)^4 + (2\pi n)^2 a_0 - n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l} a_{-n-l} + a_{n-l} a_{l-n}) l^2}{l^4 - n^4} \mp$$

$$\mp (2\pi n)^2 \Bigg(a_{-2n} a_{2n} + \frac{1}{4\pi^4} \Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n} a_{-n-l} l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n} a_{n-l} l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) -$$

$$- \frac{a_{-2n}}{2\pi^2} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n} a_{n-l} l^2}{l^4 - n^4} - \frac{a_{2n}}{2\pi^2} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n} a_{-n-l} l^2}{l^4 - n^4} \Bigg)^{\frac{1}{2}} + \gamma_n n^2, n \geqslant m+1.$$

Эту асимптотику собственных значений можно также представить в виде

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = (2\pi n)^4 + (2\pi n)^2 a_0 + \gamma_n^{\mp} n^2, \tag{2.23}$$

где последовательность $(\gamma_n^{\mp})$ принадлежит l^2. Действительно, представление (2.23) справедливо в силу следующих рассуждений:

$$\Bigg| \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n} a_{n-l} l^2}{l^4 - n^4} \Bigg| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k||a_{2n+k}|}{k(k+2n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\xi}_k}{k+2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\xi}_k \xi_{k+2n},$$

где последовательность $(\widetilde{\xi}_k)$ принадлежит l^1 и последовательность ξ_{k+2n} суммируема со степенью больше 1. Тогда $\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{\xi}_k\xi_{k+2n}\|_{l^2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\widetilde{\xi}_k|\|\xi\|_{l^2} < \infty$. Оценивая таким образом каждое из слагаемых в асимптотике собственных значений, мы получим, что имеет место формула (2.23).

Аналогично рассуждая для случая $bc = ap$, получим следующую асимптотику собственных значений оператора L_{ap}:

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 - (2n+1)^2\cdot$$
$$\cdot\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{(a_{n+l+1}a_{-n-l-1} + a_{n-l}a_{l-n})(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4} \mp (\pi(2n+1))^2\Bigg(a_{-2n-1}a_{2n+1} +$$
$$+\frac{4}{\pi^4}\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg) -$$
$$-\frac{2a_{-2n-1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4} - \frac{2a_{2n+1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+\widetilde{\gamma}_n n^2, n \geqslant m+1,$$

где $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}|\widetilde{\gamma}_n|^{\frac{4}{3}} < \infty$. Также справедлива следующая сокращенная формула для асимптотики собственных значений

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 + \widetilde{\gamma}_n^{\mp} n^2,$$

где $(\widetilde{\gamma}_n^{\mp})$ принадлежит пространству l^2. Теорема доказана. □

В следующей теореме будет установлена асимптотика собственных значений оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$, с достаточно гладкими потенциалами a и b.

Теорема 2.3.2. *Если функции a и b является функциями ограниченной вариации, то собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{\mp}$ допускают следующую асимптотику*

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 + \mathcal{O}(1),$$

и

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 + \mathcal{O}(1),$$

для случаев $bc = per$ и $bc = ap$ соответственно.

Доказательство. Если функция a является функцией ограниченной вариации, то согласно [17, Теорема II.4.10] имеет место следующая оценка для ее коэффициентов Фурье:

$$|a_n| \leqslant \frac{c_0}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $c_0 > 0$ — некоторая постоянная. Тогда, проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.3.1, получим утверждение теоремы. Теорема доказана. □

2.4 Оценки отклонений спектральных проекторов

Далее будем рассматривать спектральные проекторы, которые описаны во введении. Напомним основные обозначения. Символом $\widetilde{P}_n, n \geqslant m+1$ (число $m \in \mathbb{N}$ взято из условий теоремы 2.3.1), обозначим проектор Рисса, построенный по множествам $\{\widetilde{\lambda}_n^{\mp}\}$ из спектра $\sigma(L_{bc})$ оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$. Если Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m\}$, то $\widetilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{k \in \Omega} \widetilde{P}_k$ — проектор Рисса, построенный по множеству $\{\widetilde{\lambda}_k^{\mp}, k \in \Omega\}$. Аналогично $P(\Omega) = \sum\limits_{k \in \Omega} P_k$. Далее, через $\widetilde{P}_{(m)}$ будет обозначаться проектор Рисса, построенный для оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$, по спектральному множеству $\widetilde{\sigma}_m$, и через $P_{(m)}$ — проектор $P_1 + \dots + P_m$.

Отметим, что справедливо разложение единицы

$$I = \sum_{j=m+1}^{\infty} P_j + P_{(m)}, \quad I = \sum_{j=m+1}^{\infty} \widetilde{P}_j + \widetilde{P}_{(m)}, \tag{2.24}$$

где проектор $\widetilde{P}_{(m)}$ имеет вид $\widetilde{P}_{(m)} = (I + V_m) P_{(m)} (I + V_m)^{-1}$.

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему этого параграфа.

Теорема 2.4.1. *Система проекторов Рисса $\widetilde{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega) = \min\limits_{k \in \Omega} k$ и $\widetilde{M} > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k(\Omega)$.

Доказательство. Из теоремы 2.2.2 следует, что оператор L_{bc} подобен оператору $L_{bc}^0 - J_m X_*$ (см. формулу (2.17)) и что оператором преобразования является U_m вида (2.19). Оператор V_m из (2.19) имеет вид: $V_m = \Gamma_m B + \Gamma_m X_* + (\Gamma_m B)(\Gamma_m X_*)$. Из равенства $L_{bc}^0 - B = (I+V_m)(L_{bc}^0 - J_m X_*)(I+V_m)^{-1}$ и леммы 1.4.1 следует, что спектральные проекторы $\widetilde{P}(\Omega)$, $P(\Omega)$ подобны и, более того, оператор $\widetilde{P}(\Omega)$ допускает представление $\widetilde{P}(\Omega) = (I+V_m)P(\Omega)(I+V_m)^{-1}$. Следовательно, оператор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (I+V_m)P(\Omega)(I+V_m)^{-1} - P(\Omega) = \\ = \big(V_m P(\Omega) - P(\Omega)V_m\big)(I+V_m)^{-1}.$$

Для дальнейшего исследования оценим величины $\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma_m X_*\|_2$, $\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma_m B\|_2$.

Сначала установим оценку для $\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2$. Согласно представлению (2.8), а также замечанию 2.1.2, имеем

$$\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2^2 = \|\Gamma_m X_0 (L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}} P(\Omega)\|_2^2 = \Bigg\| \sum_{\substack{p\geqslant 0,\, j\geqslant k(\Omega) \\ p\neq j}}^{\infty} \frac{(P_p X_0 P_j)\lambda_j^{\frac{1}{2}}}{\lambda_p - \lambda_j} \Bigg\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \max_{\substack{p\geqslant 0,\, j\geqslant k(\Omega) \\ p\neq j}} \frac{j^4}{(p^4 - j^4)^2} \sum_{\substack{p\geqslant 0,\, j\geqslant k(\Omega) \\ p\neq j}}^{\infty} \|P_p X_0 P_j\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \max_{\substack{p\geqslant 0,\, j\geqslant k(\Omega) \\ p\neq j}} \frac{1}{(p^2 - j^2)^2} \|X_0\|_2^2 \leqslant \frac{c^3}{(2k(\Omega)-1)^2} \|X_0\|_2^2.$$

Таким образом,

$$\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}} \|X_0\|_2}{2k(\Omega) - 1},$$

где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ взято из представления $X_* = X_0 (L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}$, константа $c = (2\pi)^4$ в случае $bc = per$ и $c = (3\pi)^4$ для случая $bc = ap$.

Аналогичным образом получается оценка для величины $\|P(\Omega)\Gamma_m X_*\|_2$ и

$$\|P(\Omega)\Gamma_m X_*\|_2 \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}} \|X_0\|_2}{2k(\Omega) - 1}.$$

Так как оператор B_2 есть оператор умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то достаточно оценить величины $\|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2$ и $\|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2$. Перейдем к оценке величины $\|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2$.

Пусть сначала $bc = per$. Используя матричные представления (2.8), (2.9), а также замечание 2.1.2, мы получим, что имеют место следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
&\|\Gamma B_1 P(\Omega)\|_2^2 = \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^1, e_0)|^2 + \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^2, e_0)|^2 + \\
&+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^1, e_p^1)|^2 + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^2, e_p^1)|^2 + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^1, e_p^2)|^2 + \\
&+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^2, e_p^2)|^2 = \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_j|^2 (2\pi j)^4}{(2\pi j)^8} + \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_{-j}|^2 (2\pi j)^4}{(2\pi j)^8} + \\
&+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j-p}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi p)^4 - (2\pi j)^4)^2} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j-p}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi p)^4 - (2\pi j)^4)^2} + \\
&+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j+p}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi p)^4 - (2\pi j)^4)^2} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j+p}|^2 (2\pi j)^4}{((2\pi p)^4 - (2\pi j)^4)^2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_j|^2}{j^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_{-j}|^2}{j^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j-p}|^2}{(p^2 - j^2)^2} + \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j-p}|^2}{(p^2 - j^2)^2} + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j+p}|^2}{(p^2 - j^2)^2} + \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j+p}|^2}{(p^2 - j^2)^2} \leqslant \frac{1}{2\pi^4} \|a\|_{l^2}^2 \Bigg(\sum_{p=1}^{k(\Omega)-1} \frac{1}{(p + k(\Omega))^2 (k(\Omega) - p)} + \\
&+ \sum_{p=k(\Omega)+1}^{\infty} \frac{1}{(p + k(\Omega))^2 (p - k(\Omega))} \Bigg) \leqslant \frac{\|a\|_{l^2}^2 c_1^2}{k^2(\Omega)} \ln \left(\frac{(k(\Omega) - 1)(2k(\Omega) + 1)}{k(\Omega) + 1} \right),
\end{aligned}
$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная. Следовательно, справедлива оценка

$$
\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{c_1 \|a\|_{l^2}}{k(\Omega)} \left(\ln \left(\frac{(k(\Omega) - 1)(2k(\Omega) + 1)}{k(\Omega) + 1} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Проводя аналогичные рассуждения, мы получим такую же оценку с постоянной $c_2 > 0$ для случая $bc = ap$.

Аналогичная оценка справедлива для величин $\|P(\Omega)\Gamma_m B\|_2$ в обоих рассматриваемых случаях.

Из (2.12), полученных неравенств, а также используя представление оператора V_m, имеем

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \|V_m P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)V_m\|_2 \leqslant \|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2 +$$
$$+ \|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma_m X_*\|_2 + \|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2 +$$
$$+ \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 \leqslant \frac{3c_1\|a\|_{l^2}}{k(\Omega)}\left(\ln\left(\frac{(k(\Omega)-1)(2k(\Omega)+1)}{k(\Omega)+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \frac{3c^{\frac{3}{2}}\|X_0\|_2}{2k(\Omega)-1} \leqslant \frac{\widetilde{M}\big(\ln k(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $\widetilde{M} > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k(\Omega)$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы 2.4.1 справедлива следующая оценка*

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \leqslant \frac{M_1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M_1 > 0$ — некоторая константа. В этом случае Ω — одноточечное множество $\{n\}$ и суммирования по j не производится.

Следствие 2.4.2. *Если выполнены условия теоремы 2.4.1, то имеет место следующее неравенство*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \frac{M_1^2}{m^2}.$$

Отметим, что такие оценки вряд ли могут быть получены на основе резольвентного метода исследования, используемого в [2], [3], [15], [16], [18], [31], из-за проблем, связанных с выбором контуров интегрирования.

Теорема 2.4.2. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов L_{bc} и $\mathcal{L}^0_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $\widetilde{M} > 0$ — константа из теоремы 2.4.1.

Доказательство. Из формул разложения единицы (2.24) и теоремы 2.4.1 имеем:

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k -$$
$$- P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k\|_2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k \Big\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\big(\ln n\big)^{\frac{1}{2}}}{n}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2.4.3. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов L_{bc} и $\mathcal{L}^0_{bc}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

2.5 Построение аналитической полугруппы операторов

В этом параграфе полученные теоремы о спектральных свойствах дифференциального оператора L_{bc} (особенно теорема 2.2.2) будут использованы для доказательства секториальности оператора $-L_{bc} = -L^0_{bc} + B$ и построения аналитической полугруппы, генератором которой он является. Поскольку из теоремы 2.3.1 известно, что спектр $-L_{bc}$ лежит в левой полуплоскости, то оператор $-L_{bc}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов [32].

Отметим, что все построения и рассуждения будем производить для обоих случаев $bc \in \{per, ap\}$, если не будет оговорено обратное.

Теорема 2.5.1. *Дифференциальный оператор $-L_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$, является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathrm{L}_2[0,1]$. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[0,1] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$.*

Полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида:

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{C_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0,1],$$

где $C_k \in \operatorname{End} \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$.

Доказательство. По теореме 2.2.2 и формуле (2.22) оператор L_{bc} (соответственно, и $-L_{bc}$) подобен оператору $L^0_{bc} - J_m X_*$ (соответственно, $-L^0_{bc} + J_m X_*$), где $X_* = X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$, $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно,

1) $\sigma(-L_{bc}) = \sigma(-L^0_{bc} + J_m X_*) = \sigma_m \bigcup \big(\bigcup\limits_{j \geqslant m+1} \sigma_j \big)$, где σ_m — конечное множество;

2) $R(\lambda, -L_{bc}) = U_m R(\lambda, -L^0_{bc} + J_m X_*) U_m^{-1}$, где U_m — оператор преобразования, и $\lambda \in \rho(-L_{bc}) = \rho(-L^0_{bc} + J_m X_*)$, $\lambda \notin \sigma(-L_{bc})$.

Натуральное число m выбирается так, чтобы имело место утверждение теоремы 2.2.2. Для оценки резольвенты оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ рассмотрим равенства

$$
\begin{aligned}
- L^0_{bc} + J_m X_* - \lambda I &= (I + J_m X_* (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1})(-L^0_{bc} - \lambda I) = \\
&= (I + J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1})(-L^0_{bc} - \lambda I).
\end{aligned}
$$

Укажем сектор, для которого спектр оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ лежит в нем, и оператор $I + J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1}$ обратим. Согласно 1) спектр оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ состоит из объединения конечного множества и множеств $\sigma_j, j \geqslant m+1$, где $\sigma_j = \{-\widetilde{\lambda}_j\}$. Все собственные значения оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ будут лежать в секторе $\gamma = \gamma_0 + 2\|X_0\|_2^2$, где γ_0 — сектор с вершиной в нуле и аргумент удовлетворяет условию $\frac{3\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{5\pi}{4}$. Для любого λ из γ оператор $I + J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1}$ обратим и справедлива оценка $\|J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}$. Непосредственным вычислением устанавливается следующая оценка на резольвенту:

$$
\|R(\lambda, -L^0_{bc} + J_m X_*)\| \leqslant \frac{2}{|\pi^4 + \lambda|} \leqslant \frac{2}{|\lambda - 2\|X_0\|_2^2|}.
$$

Следовательно, оператор $-L^0_{bc} + J_m X_*$ (соответственно, и оператор $-L_{bc}$) является секториальным. Тогда согласно [32, Теорема II.4.6] оператор $-L_{bc}$ является генератором аналитической полугруппы $T(t) = U_m \widetilde{T}(t) U_m^{-1}$ (в силу подобия операторов $-L_{bc}$ и $-L^0_{bc} + J_m X_*$), где

$$
\widetilde{T}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, -L^0_{bc} + J_m X_*) \, \mathrm{d}\lambda.
$$

Рассмотрим ортогональное разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}\big(\sum\limits_{k \geqslant m+1} P_k\big)$. Соответственно оператор $-L_{bc}^0 + J_m X_*$ допускает разложение $-L_{bc}^0 + J_m X_* = \big(-\widetilde{A}_{(m)} + P_{(m)} \,|\, \mathcal{H}_{(m)}\big) \oplus \widetilde{A}^{(m)}$, где $\widetilde{A}_{(m)}$ — сужение оператора $L_{bc}^0 - J_m X_*$ на $\mathcal{H}_{(m)}$ и $\widetilde{A}^{(m)}$ – сужение оператора $-L_{bc}^0 + J_m X_*$ на $\mathcal{H}^{(m)}$. Тогда согласно [32] полугруппа $T(t)$ подобна полугруппе $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, причем $T^{(m)}(t)$ имеет вид

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{C_k t} P_k x, \quad x \in \mathcal{H},$$

где $C_k \in \operatorname{End} \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$. Используя вычисления, проведенные при доказательстве теоремы 2.3.1, мы получим точное представление матрицы оператора C_k.

Сначала рассмотрим случай $bc = per$. Для оператора L_{per} матрица $C_k \in \operatorname{End} \mathcal{H}_k$ допускает следующее асимптотическое представление:

$$-(2\pi k)^4 E - \begin{pmatrix} 0 & a_k - a_l a_{k-l} - a_{-l} a_{k+l} & a_{-k} - a_l a_{-k-l} - a_{-l} a_{-k+l} \\ 0 & v_1^{per}(k) + k^2 \xi_n^1 & v_2^{per}(k) + k^2 \xi_n^2 \\ 0 & v_3^{per}(k) + k^2 \xi_n^3 & v_4^{per}(k) + k^2 \xi_n^4 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица и

$$v_1^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_0 - k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{(a_{k-l} a_{l-k} + a_{k+l} a_{-k-l}) l^2}{l^4 - k^4},$$
$$v_2^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_{-2k} - 2k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{a_{l-k} a_{-l-k} l^2}{l^4 - k^4},$$
$$v_3^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_{2k} - 2k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{a_{k-l} a_{l+k} l^2}{l^4 - k^4},$$
$$v_4^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_0 - k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{(a_{k+l} a_{-l-k} + a_{k-l} a_{l-k}) l^2}{l^4 - k^4},$$

где (ξ_n^1), (ξ_n^2), (ξ_n^3), $(\xi_n^4) \in l^1$.

Соответственно, для оператора L_{ap} матрица $C_k \in \operatorname{End} \mathcal{H}_k$ имеет вид:

$$-(\pi(2k+1))^4 E - \begin{pmatrix} v_1^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^5 & v_2^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^6 \\ v_3^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^7 & v_4^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^8 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица и

$$v_1^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_0 - (2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{(a_{l-k}a_{k-l} + a_{k+l+1}a_{-k-l-1})(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

$$v_2^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_{-2k-1} - 2(2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{a_{l-k}a_{-l-k-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

$$v_3^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_{2k+1} - 2(2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{a_{k-l}a_{l+k+1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

$$v_4^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_0 - (2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{(a_{k+l+1}a_{-l-k-1} + a_{k-l}a_{l-k})(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

где (ξ_n^5), (ξ_n^6), (ξ_n^7), $(\xi_n^8) \in l^1$. Теорема доказана. $\square$

ГЛАВА 3
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА-ДИРИХЛЕ

Глава посвящена исследованию дифференциального оператора четвертого порядка, введенного в предыдущей главе, с другими краевыми условиями. Прежде чем переходить к постановке задаче, мы отметим, что в этой главе будут рассматриваться два различных пространства $\mathrm{L}_2[0,1]$ и $\mathrm{L}_2[-1,1]$. Как уже было отмечено во введении, это связано с историей вопроса и применения результатов данной главы к различным задачам математической физики. Однако, в связи с тем, что результаты в случае краевых условий Дирихле и Неймана-Дирихле достаточно похожи, то все вычисления будут проводится для случая краевых условий Дирихле.

В настоящей главе мы будем рассматривать операторы $L_i : \mathrm{D}(L_i) \subset \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $i = 1, 2$, которые определяются следующим дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Область определения оператора L_1 задается краевыми условиями

$(bc)_1 :$ Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, $y''(0) = y''(1) = 0$;

а L_2 — краевыми условиями:

$(bc)_2 :$ Неймана-Дирихле $y(-1) = y(1) = 0$, $y'(-1) = y'(1) = 0$.

Таким образом, область определения $\mathrm{D}(L_i) = \{y \in W_2^4[\mathbf{a},\mathbf{b}] : y$ удовлетворяет условию $(bc)_i\}$, $i = 1, 2$. Всюду ниже, в качестве $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ будет рассматриваться либо отрезок $[0,1]$ для оператора L_1, либо отрезок $[-1,1]$. Оператор $L_{0i} : \mathrm{D}(L_{0i}) = \mathrm{D}(L_i) \subset \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $L_{0i}y = y^{IV}$, $i = 1, 2$, при изучении оператора L_i будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор $B : \mathrm{D}(B) = \mathrm{D}(L_i) \subset \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $By = a(t)y'' + b(t)y$ — роль возмущения. Оператор L_{0i}, $i = 1, 2$, является самосопряженным положительно определенным оператором с компактной резольвентой.

Опишем спектры $\sigma(L_{0i})$ и собственные функции для операторов L_{0i}, $i = 1, 2$:

$(bc)_1$: $\sigma(L_{01}) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, где $\lambda_n = \pi^4 n^4$, $n \in \mathbb{N}$, и соответствующие нормированные собственные функции имеют вид $e_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t$;

$(bc)_2$: $\sigma(L_{02}) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, где $\lambda_n = \mu_n^4$, $\mu_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, для нечетного n или $\mu_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$ для четного n соответственно. Нормированные собственные функции имеют вид:

$e_n(t) = \frac{1}{\alpha_n}(\cos \mu_n \operatorname{ch}(\mu_n t) - \operatorname{ch} \mu_n \cos(\mu_n t))$, для нечетного n;

$e_n(t) = \frac{1}{\beta_n}(\sin \mu_n \operatorname{sh}(\mu_n t) - \operatorname{sh} \mu_n \sin(\mu_n t))$, для четного n.

Отметим, что здесь α_n и β_n являются константами нормировки и допускают следующее представление:

$$\alpha_n = \left(\left(\frac{\operatorname{sh} 2\mu_n}{2\mu_n} + 1\right)\cos^2 \mu_n - \frac{2}{\mu_n}(\operatorname{ch}\mu_n \sin\mu_n + \operatorname{sh}\mu_n \cos\mu_n)\cos\mu_n \operatorname{ch}\mu_n + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)\operatorname{ch}^2 \mu_n\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mu_n}\Big(\frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-4\mu_n}\big(\frac{1}{4\mu_n} + \frac{1}{4}\big) + \frac{1}{4\mu_n \mathrm{e}^{2\mu_n}} + \mathrm{e}^{-2\mu_n}\Big)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \mathrm{e}^{\mu_n}\left(\frac{1}{4} + o(\mathrm{e}^{-2\mu_n})\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_n = \left(\left(\frac{\operatorname{sh} 2\mu_n}{2\mu_n} - 1\right)\sin^2 \mu_n - \frac{2}{\mu_n}(\operatorname{ch}\mu_n \sin\mu_n - \operatorname{sh}\mu_n \cos\mu_n)\sin\mu_n \operatorname{sh}\mu_n + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)\operatorname{sh}^2 \mu_n\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mu_n}\Big(\frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-4\mu_n}\big(\frac{1}{4\mu_n} + \frac{1}{4}\big) - \frac{1}{4\mu_n \mathrm{e}^{2\mu_n}} - \mathrm{e}^{-2\mu_n}\Big)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \mathrm{e}^{\mu_n}\left(\frac{1}{4} + o(\mathrm{e}^{-2\mu_n})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Замечание 3.0.1. *Для собственных значений и собственных функций операторов* L_{0i}, $i = 1, 2$, *будем использовать одни и те же обозначения:* λ_n *и* e_n *соответственно.*

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_n, $n \in \mathbb{N}$, является одномерным. Проекторы Рисса P_n, $n \in \mathbb{N}$, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$ для любого $x \in \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ имеют вид

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.1 Построение допустимой тройки

Настоящий параграф посвящен построению допустимой тройки для абстрактных операторов, которые близки по своим спектральным свойствам к операторам L_i, $i = 1, 2$.

Пусть $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — нормальный оператор (см. определение 1.1.2), действующий в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, с компактной резольвентой $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, спектр $\sigma(A)$ которого образует последовательность *простых* собственных значений (λ_n) со свойством

$$|\lambda_k - \lambda_j| \geqslant \frac{1}{c}|k^4 - j^4|, \quad |\lambda_k| \leqslant ck^4, \quad k, j \geqslant 1, \quad k \neq j, \tag{3.1}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Причем $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $0 \notin \sigma(A)$.

Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, — ортогональный проектор, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, имеет место равенство $AP_n = \lambda_n P_n$. Пусть e_n — ортонормированный базис, составленный из собственных векторов. Тогда проектор P_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $P_n x = (x, e_n)e_n$ для любого вектора $x \in \mathcal{H}$.

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор $A^{\frac{1}{2}} : \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, вида

$$A^{\frac{1}{2}} x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} P_n x$$

с областью определения $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) = \{x \in \mathcal{H} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|P_n x\|^2 < \infty\}$.

Банахово пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ будет состоять из операторов $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, представимых в виде

$$X = X_0 A^{\frac{1}{2}}, \quad X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

За норму оператора X в пространстве $\mathfrak{U}$ мы положим величину $\|X\|_* = \|X_0\|_2$.

Далее приступим к построению трансформаторов $J, \Gamma : \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Как и ранее, сначала эти трансформаторы определим на алгебре $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим равен-

ствами
$$JX = \sum_{n=1}^{\infty} P_n X P_n, \quad \Gamma X = \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{P_k X P_j}{\lambda_k - \lambda_j}. \tag{3.2}$$
Корректность определения JX, ΓX и их ограниченность вытекают из следующей леммы.

Лемма 3.1.1. *Трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ корректно определены, ограничены и обладают свойствами:*

1) J – проектор, $\|J\| = 1$;

2) имеет место оценка $\|\Gamma\| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j} |\lambda_k - \lambda_j|} \leqslant \frac{c}{15}$, где c определяется в (3.1).

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 2.1.1.

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространства $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{U}$, которые далее будут обозначаться теми же символами, задаются следующим образом:
$$JX = J(XA^{-1})A, \quad \Gamma X = (\Gamma X A^{-1})A, \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}),$$
$$JX = J(XA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \quad \Gamma X = (\Gamma X A^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \quad X \in \mathfrak{U}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1.2. *Каждый оператор ΓX, $X \in \mathfrak{U}$, допускает расширение на все пространство $\mathcal{H}$ до оператора Гильберта-Шмидта, причем*
$$\|\Gamma X\|_2 \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3} \|X\|_*, \quad X \in \mathfrak{U},$$
где постоянная $c > 0$ определяется из соотношений (3.1).

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1.2.

Замечание 3.1.1. *Трансформатор Γ, определенный равенствами (3.3), мы будем рассматривать как линейный оператор из $\mathfrak{U}$ со значениями в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Из леммы 3.1.2 следует, что имеет место оценка $\|\Gamma\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3}$.*

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим трансформаторы $J_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следующим образом:
$$J_m X = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{3.4}$$
$$\Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}), \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{3.5}$$
где $P_{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{m} P_k$. Отметим, что $J_1 X = JX$, $\Gamma_1 X = \Gamma X$, для оператора $X \in \mathfrak{U}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1.3. *Каждый из трансформаторов J_m, Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, допускает ограниченное расширение на $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ (следовательно, и на пространство $\mathfrak{U}$) и справедливы следующие оценки*

$$\|J_m\| = 1, \quad \|\Gamma_m\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m},$$

где $c > 0$ — величина из (3.1).

Отметим, что в дальнейшем мы будем использовать замечание 2.1.2.

Покажем теперь, что построенная тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой.

Лемма 3.1.4. $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ *— допустимая тройка для оператора A, причем для величины $\gamma = \gamma_m$ справедлива оценка $\gamma_m \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$, где $c > 0$ — постоянная из (3.1).*

Доказательство. Первые два свойства следуют из представления пространства допустимых возмущений, леммы 3.1.1 и формул (3.4), (3.5).

Установим свойство 3), т. е. $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$ для любого оператора $X \in \mathfrak{U}$. По замечанию 2.1.2 вместо $\Gamma_m X$ можно рассмотреть ΓX. Оператор X представим в виде $X = X_0 A^{\frac{1}{2}}$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Через (x_{kj}^0) обозначим матрицу оператора X_0 в базисе (e_j). Возьмем произвольный вектор $x \in \mathrm{D}(A)$, тогда $x = A^{-1}y$, где $y \in \mathcal{H}$, $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. Имеют место равенства

$$(\Gamma X)A^{-1}y = (\Gamma X)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\lambda_j} e_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\lambda_j}(\Gamma X)e_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\lambda_j}\Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{x_{kj}^0 \lambda_j^{\frac{1}{2}}}{\lambda_k - \lambda_j} e_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k,$$

где $\beta_k = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{\infty} \frac{\alpha_j x_{kj}^0 \lambda_j^{-\frac{1}{2}}}{\lambda_k - \lambda_j}$, $k \geqslant 1$.

Согласно (3.1), и учитывая неравенство $\sup\limits_{\substack{k\geqslant 1\\k\neq j}} \frac{k^2}{(k-j)^2 j^2} \leqslant 4$, мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\beta_k|^2 \leqslant c^3 \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{\infty} \frac{k^4 x_{kj}^0 \alpha_j}{(k^4 - j^4) j^2} \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{|x_{kj}^0|^2 k^8}{(k^2+j^2)^2(k+j)^2(k-j)^2 j^4} \right) \|y\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{k^2 |x_{kj}^0|^2}{(k-j)^2 j^2} \right) \|y\|^2 \leqslant \frac{2c^3\pi^2 \|X_0\|_2^2 \|y\|^2}{3}.$$

Таким образом, $(\Gamma X)A^{-1}x \in \mathrm{D}(A)$. Из полученных оценок следует ограниченность оператора $A(\Gamma X)A^{-1}$. Следовательно, $(\Gamma X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$ и по замечанию 2.1.2, имеем $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$.

Осталось установить равенство матриц операторов $A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A$ и $X - J_m X$. При $k \neq j$ имеют место равенства

$$\left(\frac{\lambda_k x_{kj}(1-\delta_{kj})}{\lambda_k - \lambda_j} \right) - \left(\frac{x_{kj}(1-\delta_{kj})\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j} \right) =$$

$$= \left(\frac{x_{kj}(\lambda_k - \lambda_j)(1-\delta_{kj})}{\lambda_k - \lambda_j} \right) = x_{kj} - \delta_{kj} x_{kj}.$$

Таким образом, третье свойство допустимой тройки установлено.

Проверим свойство 4). Пусть $X, Y \in \mathfrak{U}$. Тогда они представимы в виде $X = X_0 A^{\frac{1}{2}}$, $Y = Y_0 A^{\frac{1}{2}}$. Пусть (x_{nj}^0), (y_{nj}^0) — матрицы операторов X_0 и Y_0 в базисе (e_j) соответственно. Тогда матрица (z_{nj}^0) оператора Z_0, где $X\Gamma_m Y = X_0 A^{\frac{1}{2}} \Gamma_m Y_0 A^{\frac{1}{2}} = Z_0 A^{\frac{1}{2}}$ будет иметь вид:

$$z_{nj}^0 = \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{x_{nk}^0 \lambda_k^{\frac{1}{2}} y_{kj}^0}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad n \geqslant 1, \quad j \geqslant m+1, \quad z_{nj}^0 = 0, \quad \text{при} \quad j \leqslant m.$$

Докажем, что оператор Z_0 является оператором Гильберта-Шмидта. Имеют место оценки

$$\|Z_0\|_*^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |z_{nj}^0|^2 = c^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{x_{nk}^0 k^2 y_{kj}^0}{k^4 - j^4} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^{\infty} |x_{nk}^0|^2 \right) \left(\sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{k^4 |y_{kj}^0|^2}{(k^4 - j^4)^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant c^3 \|X\|_*^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{|y_{kj}^0|^2}{(k^2 - j^2)^2} \leqslant \frac{c^3 \|X\|_*^2 \|Y\|_*^2}{m^2},$$

где c — постоянная из (3.1). Точно такую же оценку имеет место и для нормы $\|(\Gamma_m X)Y\|_*$. Таким образом, $X\Gamma_m Y \in \mathfrak{U}$ и $\|X\Gamma_m Y\|_* \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}\|X\|_*\|Y\|_*$. Следовательно, $\|\Gamma_m\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$.

Проверим последнее свойство допустимой тройки. Пусть $X = X_0 A^{\frac{1}{2}}$ — произвольный оператор из пространства $\mathfrak{U}$ и возьмем малое $\varepsilon > 0$. В качестве λ_ε выберем число $-cn$, $n \in \mathbb{N}$, где $c > 0$ — величина из (3.1), а $n \in \mathbb{N}$ таково, что выполнено неравенство $\frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\|X_0\|_2 < \varepsilon$. Тогда

$$\|X(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leqslant \|X_0\|_2\|A^{\frac{1}{2}}(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| = \|X_0\|_2 \max_{k\geqslant 1}\frac{|\lambda_k^{\frac{1}{2}}|}{|\lambda_k-\lambda_\varepsilon|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|X_0\|_2}{c^{\frac{1}{2}}}\max_{k\geqslant 1}\frac{k^2}{|k^4+n|} \leqslant \frac{\|X_0\|_2}{2c^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon.$$

Таким образом, $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ — допустимая тройка для оператора A. Лемма доказана. □

3.2 Предварительное преобразование подобия

Теперь мы готовы приступить к исследованию оператора L_i, $i = 1, 2$. Построенная в предыдущем параграфе допустимая тройка, будет использоваться для исследования спектральных свойств оператора L_i, $i = 1, 2$. В качестве оператора A будет выступать оператор L_{0i}, $i = 1, 2$. Операторы L_{0i}, $i = 1, 2$, являются нормальными операторами с компактной резольвентой и простыми собственными значениями, удовлетворяющими неравенствам (3.1), где $c = \pi^4$, для оператора L_{01}, и $c = (\frac{5\pi}{4})^4$ для оператора L_{02}. Всюду в дальнейшем в качестве пространства $\mathcal{H}$ будет выступать пространство $\mathrm{L}_2[0,1]$ для оператора L_1 и $\mathrm{L}_2[-1,1]$ — для оператора L_2. Напомним, что все вычисления будут проводиться для оператора L_1 в пространстве $\mathrm{L}_2[0,1]$. Для оператора L_2 они проводятся аналогичным образом.

Оператор возмущения B принадлежит пространству $\mathfrak{L}_{L_{0i}}(\mathcal{H})$, $i = 1, 2$. Следовательно, корректно определены операторы JB, ΓB, $J_m B$, $\Gamma_m B$, заданные формулами (3.2), (3.4) и (3.5) для оператора B.

Так как оператор B не принадлежит построенному в предыдущем параграфе пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$, то мы снова проведем предварительное преобразование подобия оператора L_i в оператор $\widetilde{L}_i = L_{0i} - \widetilde{B}$,

$i = 1, 2$, где $\widetilde{B}$ уже принадлежит $\mathfrak{U}$.

Рассмотрим оператор B. Он задается как $B = B_1 + B_2$, где $B_1 y = ay''$, $B_2 y = by$, $y \in \mathrm{D}(L_{0i})$, $i = 1, 2$, где $a, b \in \mathcal{H}$. Также, этот оператор B можно представить в виде

$$B = (BL_{0i}^{-\frac{1}{2}})L_{0i}^{\frac{1}{2}} = (B_1 L_{0i}^{-\frac{1}{2}})L_{0i}^{\frac{1}{2}} + (B_2 L_{0i}^{-\frac{1}{2}})L_{0i}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Так как функция a принадлежит $\mathcal{H}$, то справедливо представление $a(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(t)$. При этом $\|a\|_{l^2}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

Далее перейдем к нахождению оценок для матричных коэффициентов a_{pj} и b_{pj} операторов B_1 и B_2 соответственно. Для коэффициентов a_{pj} имеет место оценка

$$|a_{pj}| \leqslant \pi^2 j^2 \sqrt{2}\big(|a_{|p-j|}| + |a_{p+j}|\big), \quad p \neq j, \quad p, j \geqslant 1. \tag{3.6}$$

Действительно, справедливы следующие неравенства:

$$|a_{pj}| = \left| \int_0^1 a(t) e_j''(t) e_p(t)\,\mathrm{d}t \right| = \pi^2 j^2 \sqrt{2} \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi k t e_j(t) e_p(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \pi^2 j^2 \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left| \int_0^1 \cos \pi k t \cos \pi t(p-j)\,\mathrm{d}t - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \cos \pi k t \cos \pi t(p+j)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \pi^2 j^2 \sqrt{2}\big(|a_{|p-j|}| + |a_{p+j}|\big).$$

Так как оператор B_2 является оператором умножения на функцию $b \in \mathcal{H}$, то для него очевидно справедливо неравенство

$$|b_{pj}| \leqslant \sqrt{2}\big(|b_{|p-j|}| + |b_{p+j}|\big), \quad p \neq j, \quad p, j \geqslant 1. \tag{3.7}$$

В случае, если оператор B является возмущением оператора L_{02}, то имеют место следующие оценки:

$$|a_{pj}| \leqslant \frac{M_1 j^2}{p+j}, \quad |b_{pj}| \leqslant \frac{M_2}{p+j}, \quad p \neq j, \quad p, j \geqslant 1, \tag{3.8}$$

где $M_1 = \frac{25\pi^2 \|a\|_{l^2}}{4}$ и $M_2 = 4\|b\|_{l^2}$.

Перейдем к доказательству вспомогательных лемм, которые нам будут необходимы в дальнейшем.

Лемма 3.2.1. *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ оператор $\Gamma_m B$ является оператором Гильберта-Шмидта, причем $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Gamma_m B\|_2^2 = 0$.*

Доказательство. Сначала докажем, что оператор ΓB является оператором Гильберта Шмидта. Пусть оператор B является возмущением оператора L_{01}. Используя оценки (3.6) и (3.7), мы получим:

$$\sum_{p,j=1}^{\infty}\left|(\Gamma Be_j,e_p)\right|^2=\sum_{p,j=1}^{\infty}\left|(\Gamma B_1e_j,e_p)+(\Gamma B_2e_j,e_p)\right|^2\leqslant 2\sum_{\substack{p,j=1\\p\neq j}}^{\infty}\left|\frac{a_{pj}}{\lambda_p-\lambda_j}\right|^2+$$

$$+2\sum_{\substack{p,j=1\\p\neq j}}^{\infty}\left|\frac{b_{pj}}{\lambda_p-\lambda_j}\right|^2\leqslant\frac{8}{\pi^4}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{\infty}\frac{|a_{|p-j|}|^2}{(p-j)^2}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{\infty}\frac{|a_{p+j}|^2}{(p-j)^2}\right)+$$

$$+\frac{8}{\pi^8}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^6}\sum_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{\infty}\frac{|b_{|p-j|}|^2}{(p-j)^2}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^6}\sum_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{\infty}\frac{|b_{p+j}|^2}{(p-j)^2}\right)<\infty.$$

Следовательно, $\Gamma B\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, согласно замечанию 2.1.2, операторы Γ_mB_1 и Γ_mB_2, $m\in\mathbb{N}$, и, следовательно, операторы Γ_mB, $m\in\mathbb{N}$, являются операторами Гильберта-Шмидта. Кроме того,

$$\|\Gamma_mB\|_2^2=\sum_{\substack{\max\{p,j\}\geqslant m+1\\p\neq j}}\frac{|a_{pj}|^2}{|\lambda_p-\lambda_j|^2}+\sum_{\substack{\max\{p,j\}\geqslant m+1\\p\neq j}}\frac{|b_{pj}|^2}{|\lambda_p-\lambda_j|^2}\to 0$$

при $m\to\infty$ (как остаток сходящегося ряда). Аналогичным образом проводится доказательство и для случая, когда оператор B является возмущением оператора L_{02}. В этом случае используются оценки (3.8). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2.2. *Если оператор B рассматривается как возмущение оператора L_{02}, то оператор J_mB принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.1.2, все оценки достаточно осуществить для оператора JB. Представим его в виде $JB=(JBL_{02}^{-\frac{1}{2}})L_{02}^{\frac{1}{2}}=B_JL_{02}^{\frac{1}{2}}$. Докажем, что оператор B_J принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Используя неравенства (3.8), получим, что справедливы следующие оценки:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|(JBL_{02}^{-\frac{1}{2}}e_j,e_j)\right|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{a_{jj}+b_{jj}}{j^2}\right|^2\leqslant\frac{M_1^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}+\frac{M_2^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^6}<\infty.$$

Таким образом, $B_J\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, операторы J_mB, $m\in\mathbb{N}$, принадлежат $\mathfrak{U}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2.3. *Операторы $B\Gamma_m B$, $(\Gamma_m B)J_m B$ принадлежат пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим оператор $L_1 = L_{01} - B$ и докажем, что $B\Gamma B \in \mathfrak{U}$ (согласно замечанию 2.1.2). Для доказательства этого факта необходимо установить, что он представим в виде $B\Gamma B = (B\Gamma B L_{01}^{-\frac{1}{2}})L_{01}^{\frac{1}{2}} = B_0 L_{01}^{\frac{1}{2}}$, где $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оператор B_0 также представим в виде

$$B_0 = B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} + B_1\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}}.$$

Докажем, что $B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т. е. $\sum\limits_{p,j=1}^{\infty} \left|(B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} e_j, e_p)\right|^2 < \infty$. Согласно неравенству (3.6), получим

$$\sum_{p,j=1}^{\infty} \left|(B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} e_j, e_p)\right|^2 = \sum_{p,j=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{a_{pk}a_{kj}}{(\lambda_k - \lambda_j)\lambda_j^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{|p-k|}||a_{|k-j|}|}{|k^2-j^2|} \right)^2 + \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{|p-k|}||a_{k+j}|}{|k^2-j^2|} \right)^2 +$$

$$+ \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{p+k}||a_{|k-j|}|}{|k^2-j^2|} \right)^2 + \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{p+k}||a_{k+j}|}{|k^2-j^2|} \right)^2.$$

Перейдем к оценке каждого из слагаемых. Проводя аналогичные рассуждения как и при доказательстве леммы 2.2.3, мы получим, что

$$\frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{|p-k|}||a_{|k-j|}|}{|k^2-j^2|} \right)^2 \leqslant \frac{8\|a\|_{l^2}^4}{9}.$$

Этой же постоянной оцениваются все остальные слагаемые. Таким образом, оператор $B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Так как B_2 — оператор умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то $B_2\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$, $B_2\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$, $B_1\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ также принадлежат пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, оператор $B\Gamma B$ принадлежит $\mathfrak{U}$, а значит и $B\Gamma_m B \in \mathfrak{U}$.

Аналогичное утверждение имеет место для случая когда оператор B является возмущением оператора L_{02}.

Осталось доказать, что оператор $(\Gamma_m B)J_m B \in \mathfrak{U}$. Согласно лемме 3.2.1, оператор $\Gamma_m B$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Представим оператор $J_m B$ в виде

$J_m B = (J_m B L_{01}^{-\frac{1}{2}}) L_{01}^{\frac{1}{2}}$. Очевидно, что оператор $(J_m B) L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ ограничен. Таким образом, оператор $(\Gamma_m B)(J_m B) L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ (как произведение ограниченного оператора на оператор Гильберта-Шмидта). Следовательно, $(\Gamma_m B) J_m B \in \mathfrak{U}$. Если оператор B является возмущением оператора L_{02}, то этот факт непосредственно следует из лемм 3.2.1 и 3.2.2. Лемма доказана. □

Лемма 3.2.4. *Существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для операторов B, $J_m B$, $\Gamma_m B$ имеют место следующие свойства:*

*(**a**)* $\Gamma_m B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ *и* $\|\Gamma_m B\| < 1$*;*

*(**b**)* $(\Gamma_m B) \mathrm{D}(L_{0i}) \subset \mathrm{D}(L_{0i})$, $i = 1, 2$*;*

*(**c**)* $B \Gamma_m B, (\Gamma_m B) J_m B \in \mathfrak{U}$*;*

*(**d**)* $L_{0i}(\Gamma_m B)x - (\Gamma_m B) L_{0i} x = Bx - (J_m B)x$, $x \in \mathrm{D}(L_{0i})$, $i = 1, 2$*;*

*(**e**) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_{0i})$ такое, что $\|B(L_{0i} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Из леммы 3.2.1 следует, что оператор $\Gamma_m B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \operatorname{End} \mathcal{H}$, причем из равенства (3.5) следует, что $\|\Gamma_m B\|_2 < 1$ для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, выполнено условие (a).

Свойство (b) устанавливается аналогично свойству 3 леммы 3.1.4.

Свойство (c) выполнено в силу леммы 3.2.3.

Для доказательства свойств (d) и (e) необходимо провести аналогичные рассуждения как и при доказательстве свойства (d) и (e) леммы 2.2.4. Лемма доказана. □

Теорема 3.2.1. *Если число $m \in \mathbb{N}$ таково, что*

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \tag{3.9}$$

то оператор $L_i = L_{0i} - B$ подобен оператору $\widetilde{L}_i = L_{0i} - \widetilde{B}$, $i = 1, 2$, где

$$\widetilde{B} = J_m B_1 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1) J_m B_1) + \widetilde{C}. \tag{3.10}$$

Оператор $\widetilde{C}$ определяется формулой $\widetilde{C} = J_m B_2 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_2 + B_2 \Gamma_m B_1 + B_2 \Gamma_m B_2 - (\Gamma_m B_1) J_m B_2 - (\Gamma_m B_2) J_m B_1 - (\Gamma_m B_2) J_m B_2)$, причем имеет место равенство

$$(L_{0i} - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(L_{0i} - \widetilde{B}), \quad i = 1, 2. \tag{3.11}$$

Оператор $\widetilde{B}$ из (3.11) представим в виде

$$\widetilde{B} = JB_1 + B_1\Gamma B_1 - (\Gamma B_1)JB_1 + C \in \mathfrak{U}, \tag{3.12}$$

где $C = C_0 L_{0i}^{\frac{1}{2}}$ и C_0 принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Существование числа $m \in \mathbb{N}$, для которого справедлива оценка (3.9), доказано в лемме 3.2.1. Согласно лемме 3.2.4 и теореме 1.4.3 оператор $L_i = L_{0i} - B$ подобен оператору $\widetilde{L}_i = L_{0i} - \widetilde{B}$, $i = 1, 2$, а также справедливы равенства (3.10), (3.11). Оператор C из (3.12) имеет вид

$$C = -(I + \Gamma_m B)^{-1}(\Gamma_m B)(B_1\Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1)J_m B_1) + C_1 + \widetilde{C},$$

где оператор $C_1 = B_1\Gamma_m B_1 - B_1\Gamma B_1 - (\Gamma_m B_1)J_m B_1 + (\Gamma B_1)JB_1 + J_m B_1 - JB_1$ имеет конечный ранг и, следовательно, принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Из леммы 3.2.3 следует, что операторы $(\Gamma_m B)J_m B$ и $B\Gamma_m B$ принадлежат $\mathfrak{U}$. Следовательно, $\widetilde{C} \in \mathfrak{U}$ и $B_1\Gamma_m B_1$, $(\Gamma_m B_1)J_m B_1 \in \mathfrak{U}$. Таким образом, оператор C представим в виде $C = C_0 L_{0i}^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$, где оператор C_0, как сумма оператора конечного ранга, оператора из $\mathfrak{U}$ и произведения двух операторов Гильберта-Шмидта, принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Следовательно, $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Теорема доказана. □

3.3 Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с краевыми условиями Дирихле и Неймана-Дирихле

Теорема 3.2.1 позволяет свести изучение операторов L_i, $i = 1, 2$, к операторам $\widetilde{L}_i$, $i = 1, 2$.

Далее в качестве невозмущенного оператора при изучении оператора $\widetilde{L}_1$ будем использовать нормальный оператор $L'_{01} = L_{01} - JB + P_{(m)}(JB)P_{(m)}$, (согласно равенству (3.4)), с собственными значениями λ_n при $n \leqslant m$ и

$$\lambda'_n = (\pi n)^4 + (\pi n)^2 \int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t, \quad n \geqslant m + 1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Непосредственно из определения операторов JB и $P_{(m)}(JB)P_{(m)}$ следует, что собственные функции оператора L_{01} являются собственными функциями оператора L'_{01}. Поскольку собственные функции образуют ортонормированный базис, то оператор L'_{01} является нормальным. Отметим, что его собственные значения λ'_n для достаточно большого n удовлетворяют оценкам (3.1), с константой $c = 2\pi^4$.

При изучении оператора $\widetilde{L}_2$, в качестве невозмущенного оператора будет выступать L_{02}, который для единообразия будет обозначаться символом L'_{02}.

В условиях следующей теоремы число $m \in \mathbb{N}$ выбирается таким, чтобы одновременно были выполнены условия

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \quad \frac{c^{\frac{3}{2}}\|B\|_*}{m} < \frac{1}{4}. \tag{3.14}$$

Отметим, что для исследования оператора $\widetilde{L}_1$ необходимо потребовать дополнительное условие $m \geqslant \sqrt{\frac{2\int_0^1 |a(t)|dt}{2\pi^8-1}}$. Оно гарантирует выполнение неравенств

$$|\lambda'_n - \lambda'_j| \geqslant \frac{1}{2\pi^4}|n^4 - j^4|, \quad |\lambda'_n| \leqslant 2\pi^4 n^4, \tag{3.15}$$

где λ'_n — собственные значения оператора L'_{01} (см. формулу (3.13)).

Замечание 3.3.1. *Формулы для проекторов J_m, $m \in \mathbb{N}$, остаются без изменения ввиду того, что у операторов L'_{01} и L_{01} совпадают собственные векторы. Однако, трансформатор Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, который строится по L_{01}, будет отличаться от трансформатора, который строится по L'_{01}. Поэтому в дальнейшем мы будем его обозначать через Γ'_m. Для единообразия тем же символом Γ'_m обозначим трансформатор Γ_m для оператора L'_{02}.*

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему о подобии, на основании которой будут доказаны основные результаты.

Теорема 3.3.1. *Пусть число $m \in \mathbb{N}$ таково, что выполнены условия (3.14). Тогда оператор $L_i = L_{0i} - B$ подобен оператору вида*

$$L'_{0i} - J_m X_* = L'_{0i} - P_{(m)} X_* P_{(m)} - \sum_{j \geqslant m+1} P_j X_* P_j, \quad i = 1, 2, \tag{3.16}$$

где оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ есть решение уравнения

$$X = \widetilde{B}\Gamma'_m X - (\Gamma'_m X)(J_m \widetilde{B}) - (\Gamma'_m X) J_m(\widetilde{B}\Gamma'_m X) + \widetilde{B}, \tag{3.17}$$

рассматриваемого в $\mathfrak{U}$. Оператор $I + \Gamma'_m X_*$ обратим и преобразование подобия оператора $L_i = L_{0i} - B$ в оператор $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, осуществляет оператор вида

$$U_m = (I + \Gamma_m B)(I + \Gamma'_m X_*) = I + V_m, \tag{3.18}$$

где $V_m \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Доказательство. Из оценки (3.9) (см. первое условие (3.14)) следует, что оператор $I + \Gamma_m B$ обратим. Из теоремы 3.2.1 (ее условия выполнены в силу обоих условий из (3.14)) вытекает подобие оператора $L_i = L_{0i} - B$ оператору вида $\widetilde{L}_i = L'_{0i} - \widetilde{B}$, $i = 1, 2$, где $\widetilde{B}$ определен равенством (3.10). Поскольку $\widetilde{B}$ принадлежит $\mathfrak{U}$, то из теоремы 1.4.3 оператор $\widetilde{L}_i = L'_{0i} - \widetilde{B}$ (а, следовательно, и оператор $L_i = L_{0i} - B$) подобен оператору $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, вида (3.16), где оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения (3.17). Ясно, что оператор преобразования L_i в оператор $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, совпадает с оператором U_m из (3.18). Поскольку $\Gamma_m B$, $\Gamma'_m X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то оператор V_m из (3.18) принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Теорема доказана. □

Теперь мы готовы перейти к формулировке основных результатов. Первая теорема посвящена асимптотике собственных значений операторов L_i, $i = 1, 2$.

Теорема 3.3.2. *Дифференциальные операторы L_i, $i = 1, 2$, являются операторами с компактной резольвентой, и их спектр представим в виде*

$$\sigma(L_i) = \widetilde{\sigma}_m \cup \{\widetilde{\lambda}_n, n \geqslant m + 1\}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\widetilde{\sigma}_m$ — конечное множество, с числом точек не превосходящим m. Все собственные значения $\widetilde{\lambda}_{m+1}, \widetilde{\lambda}_{m+2}, \dots$ оператора L_1 являются простыми и допускают следующую асимптотику

$$\widetilde{\lambda}_n = (\pi n)^4 + (\pi n)^2 \int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t - (\pi n)^2 \int_0^1 a(t)\cos 2\pi n t\,\mathrm{d}t - \\ - n^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln} l^2}{l^4 - n^4} + \zeta_n n^2, \quad n \geqslant m + 1, \quad (3.19)$$

где (ζ_n) — суммируемая последовательность и $a_{nl} = \int_0^1 a(t)\cos\pi(l-n)t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 a(t)\cos\pi(l+n)t\,\mathrm{d}t$, $n, l \geqslant 1$.

Для оператора L_2 асимптотика собственных значений для нечетных n имеет вид:

$$\widetilde{\lambda}_n = \Big(-\frac{\pi}{4} + \pi n\Big)^4 - \Big(-\frac{\pi}{4} + \pi n\Big)^2 \Big(\frac{1}{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \int_{-1}^1 a(t)(\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)t} +$$

$$+ \mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}-2\pi n)t}) \,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} a(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a(t)\cos\big(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\big)t\,\mathrm{d}t\Big) -$$

$$- \big(-\frac{\pi}{4}+\pi n\big)^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl}a_{ln}(-\frac{\pi}{4}+\pi l)^2}{\lambda_l-\lambda_n} + \gamma_n n^2, \quad n \geqslant m+1, \tag{3.20}$$

где $\lambda_n = (-\frac{\pi}{4}+\pi n)^4$. *Для четных* n *асимптотика допускает следующее представление:*

$$\widetilde{\lambda}_n = (\frac{\pi}{4}+\pi n)^4 - (\frac{\pi}{4}+\pi n)^2\Big(\frac{1}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}\int_{-1}^{1} a(t)(\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t}+$$

$$+ \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t}) \,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} a(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a(t)\cos\big(\frac{\pi}{2}+2\pi n\big)t\,\mathrm{d}t\Big) -$$

$$- \big(\frac{\pi}{4}+\pi n\big)^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl}a_{ln}(\frac{\pi}{4}+\pi l)^2}{\lambda_l-\lambda_n} + \gamma_n n^2, \quad n \geqslant m+1, \tag{3.21}$$

где (γ_n) — *суммируемая последовательность,* $\lambda_n = (\frac{\pi}{4}+\pi n)^4$, $a_{nl} = \int_{-1}^{1} a(t)e_n(t)e_l(t)\,\mathrm{d}t$, $n, l \geqslant 1$.

Доказательство. В силу подобия операторов L_i и $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, их спектры совпадают. Таким образом, из равенства $\sigma(L_i) = \sigma(L'_{0i} - J_m X_*)$, $i = 1, 2$, будет следовать, что спектр оператора L_i, $i = 1, 2$, представим в виде

$$\sigma(L_i) = \sigma(L'_{0i} - J_m X_*) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \Big(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma(A_j)\Big), \quad i = 1, 2, \tag{3.22}$$

где $A_{(m)} = (L'_{0i} - J_m X_* \,|\, \mathcal{H}_{(m)})$ — сужение оператора $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, на подпространство $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $P_{(m)} = \sum\limits_{j=1}^{m} P_j$, и $A_j = (L'_{0i} - J_m X_* \,|\, \mathcal{H}_j)$ — сужение оператора $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, на подпространство $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$, $j \geqslant m+1$. Корректность определения этих операторов и доказательство равенства (3.22) проводится так же как и при доказательстве теоремы 2.3.1.

Очевидно, что операторы $L_i = L_{0i} - B$, $i = 1, 2$, являются операторами с компактной резольвентой. Подпространства $\mathcal{H}_{(k)}$, $k \geqslant m+1$, одномерны, и, следовательно, каждый из операторов A_k, $k \geqslant m+1$, является скалярным, т. е. оператором умножения на число, причем это число определяется как $\lambda'_n - (X_* e_n, e_n)$. Так как X_* удовлетворяет (3.17), то согласно свойству 5) определения 1.4.2 получаем, что

$$(X_* e_n, e_n) = (\widetilde{B}\Gamma'_m X_* e_n, e_n) + (\widetilde{B} e_n, e_n).$$

Из представления (3.10) и замечания 2.1.2 имеют место равенства

$$(\widetilde{B} e_n, e_n) = (JB_1 e_n, e_n) + (B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n) - ((\Gamma B_1) JB_1 e_n, e_n) + \\ + (Ce_n, e_n) = (B_1 e_n, e_n) + (B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n) + (Ce_n, e_n).$$

Величины $(B_1 e_n, e_n)$ при $n \geqslant m+1$ имеют вид

$$(B_1 e_n, e_n) = (\pi n)^2 \Big(- \int_0^1 a(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^1 a(t) \cos 2\pi n t\, \mathrm{d}t \Big).$$

Величина $(B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n)$ представима в виде:

$$(B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n) = n^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln} l^2}{\lambda_l - \lambda_n},$$

где a_{nl} — матрица оператора B_1, и

$$a_{nl} = \int_0^1 a(t) \cos \pi (n-l) t\, \mathrm{d}t - \int_0^1 a(t) \cos \pi (n+l) t\, \mathrm{d}t, \quad n \geqslant m+1.$$

Используя теорему 3.2.1 получим, что остаток будет представлен в виде $\zeta_n n^2$, где (ζ_n) — суммируемая последовательность, т. е. $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} |\zeta_n| < \infty$. Таким образом, при $n \geqslant m+1$ асимптотика собственных значений для оператора L_1 принимает вид (3.19). Аналогично рассуждая, получим асимптотику собственных значений для оператора L_2, заданную формулами (3.20), (3.21). Теорема доказана. □

В заключение приведем достаточно простое следствие из этой теоремы.

Следствие 3.3.1. *Операторы $L_i = L_{0i} - B$, $i = 1, 2$, спектральны по Данфорду.*

3.4 Оценки отклонений спектральных проекторов

В настоящем параграфе мы установим оценки отклонений спектральных проекторов и оценки равносходимости спектральных разложений для операторов L_i и L_{0i}, $i = 1, 2$.

Напомним основные обозначения. Символом $\widetilde{P}_n$, $n \geqslant m+1$, мы обозначим проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\widetilde{\lambda}_n\}$ из спектра $\sigma(L_i)$ оператора L_i, $i=1,2$ (собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$ определены в теореме 3.3.2). Если Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,m\}$, то $\widetilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$ — проектор Рисса, построенный по множеству $\{\widetilde{\lambda}_k, k\in\Omega\}$ и $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$. Через $\widetilde{P}_{(m)}$ будет обозначаться проектор Рисса, построенный для оператора L_i, $i=1,2$, по спектральному множеству $\widetilde{\sigma}_m$, и через $P_{(m)}$ обозначим проектор $P_1+\cdots+P_m$.

Напомним, что имеет место разложение единицы для спектральных проекторов (2.24). Отметим, что следующая теорема имеет место для обоих операторов L_1 и L_2.

Теорема 3.4.1. *Система проекторов Рисса $\widetilde{P}_n$, $n\in\mathbb{N}$, обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{M\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$ и $M>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k(\Omega)$.

Доказательство. Из теоремы 3.3.1 следует, что оператор L_i, $i=1,2$, подобен оператору $L'_{0i} - J_m X_*$, $i=1,2$ (см. формулу (3.16)), и оператором преобразования является оператор U_m вида (3.18). Оператор V_m из (3.18) имеет вид:

$$V_m = \Gamma_m B + \Gamma'_m X_* + (\Gamma_m B)(\Gamma'_m X_*).$$

Из равенства $L_{0i} - B = (I+V_m)(L'_{0i} - J_m X_*)(I+V_m)^{-1}$, $i=1,2$, и леммы 1.4.1 следует, что спектральные проекторы $\widetilde{P}(\Omega)$, $P(\Omega)$ подобны и, более того, оператор $\widetilde{P}(\Omega)$ допускает представление $\widetilde{P}(\Omega) = (I+V_m)P(\Omega)(I+V_m)^{-1}$. Следовательно, оператор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде:

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (I+V_m)P(\Omega)(I+V_m)^{-1} - P(\Omega) = \big(V_m P(\Omega) - P(\Omega)V_m\big)(I+V_m)^{-1}.$$

Оценим величины $\|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma'_m X_*\|_2$, $\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma_m B\|_2$. Учитывая оценки (3.15), и проводя аналогичные рассуждения как и при доказательстве теоремы 2.4.1, получим, что

$$\|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{2\sqrt{2}\pi^6}{2k(\Omega)-1}\|\Gamma'_m X_0\|_2,$$

где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ оператор в представлении $X_* = X_0 L_{01}^{\frac{1}{2}}$. Такая же оценка имеет место и для величины $\|P(\Omega)\Gamma'_m X_*\|_2$.

Установим оценку на величину $\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2$. Так как оператор B_2 является оператором умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то достаточно рассмотреть операторы $\Gamma_m B_1 P(\Omega)$ и $P(\Omega)\Gamma_m B_1$. Используя неравенство (3.6), мы получим, что имеют место оценки:

$$\|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2^2 = \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \left|\frac{a_{pj}}{\lambda'_p - \lambda'_j}\right|^2 \leqslant 16\pi^{12} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{|p-j|}|^2}{(p^2-j^2)^2} +$$

$$+ 16\pi^{12} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{p+j}|^2}{(p^2-j^2)^2} \leqslant 32\pi^{12}\|a\|_{l^2}^2 \Bigg(\sum_{p=1}^{k(\Omega)-1} \frac{1}{(p+k(\Omega))^2(k(\Omega)-p)} +$$

$$+ \sum_{p=k(\Omega)+1}^{\infty} \frac{1}{(p+k(\Omega))^2(p-k(\Omega))} \Bigg) \leqslant \frac{\pi^{12}\|a\|_{l^2}^2 c_1}{k^2(\Omega)} \ln\left(\frac{(k(\Omega)-1)(2k(\Omega)+1)}{k(\Omega)+1}\right),$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа. Следовательно,

$$\|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\pi^6 \sqrt{c_1}\|a\|_{l^2}}{k(\Omega)} \left(\ln\left(\frac{(k(\Omega)-1)(2k(\Omega)+1)}{k(\Omega)+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Точно такое же неравенство имеет место для нормы $\|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2$. Используя полученные оценки, неравенство (3.9), а также представление оператора V_m, имеем

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 &\leqslant \|V_m P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)V_m\|_2 \leqslant \|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2 + \\
&+ \|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma'_m X_*\|_2 + \|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2 + \\
&+ \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 \leqslant \frac{3\pi^6\sqrt{c_3}\|a\|_{l^2}}{k(\Omega)} \left(\ln\left(\frac{(k(\Omega)-1)(2k(\Omega)+1)}{k(\Omega)+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{6\sqrt{2}\pi^6}{2k(\Omega)-1}\|\Gamma'_m X_0\|_2 \leqslant \frac{M\big(\ln k(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},
\end{aligned}$$

где $M > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $k(\Omega)$. Аналогичным образом можно получить точно такие же оценки и для оператора L_2. Теорема доказана. □

Следствие 3.4.1. *В условиях теоремы 3.4.1 имеет место оценка*

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\| \leqslant \frac{M_3}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M_3 > 0$ — некоторая постоянная. В этом случае Ω — одноточечное множество $\{n\}$ и суммирования по j не производится.

Следствие 3.4.2. *Если выполнены условия теоремы 3.4.1, то верна следующая оценка*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \frac{M_3^2}{m^2}.$$

Теорема 3.4.2. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов L_i и L_{0i}, $i = 1, 2$:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 \leqslant \frac{M(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $M > 0$ — постоянная из теоремы 3.4.1.

Доказательство. Из формул разложения единицы (2.24) и теоремы 3.4.1 имеем:

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - P_{(m)} -$$

$$- \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k\|_2 = \|I - \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - I + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k\|_2 =$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k \right\|_2 \leqslant \frac{M\left(\ln n\right)^{\frac{1}{2}}}{n}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 3.4.3. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов L_i и L_{0i}, $i = 1, 2$:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

3.5 Построение аналитической полугруппы операторов

Данный параграф посвящен построению аналитической полугруппы операторов, генератором которой является оператор $-L_i$, $i = 1, 2$.

Теорема 3.5.1. *Дифференциальный оператор* $-L_i$, $i = 1, 2$, *является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов* $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$. *Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида* $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, *действующей в* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, *где* $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$.

Полугруппа $T^{(m)}(t)$ *допускает представление вида:*

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_k t} P_k x, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{3.23}$$

где собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m + 1$, *и число* m *определены в теореме 3.3.2.*

Доказательство. Для доказательства секториальности операторов $-L_i$, $i = 1, 2$, необходимо повторить рассуждения из доказательства теоремы 2.5.1.

Рассмотрим ортогональное разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}\big(\sum_{k=m+1}^{\infty} P_k\big)$. Соответственно оператор $-L'_{0i} + J_m X_*$ допускает разложение

$$-L'_{0i} + J_m X_* = \big(-\widetilde{A}_{(m)} + P_{(m)} \,|\, \mathcal{H}_{(m)}\big) \oplus \widetilde{A}^{(m)}, \quad i = 1, 2,$$

где $\widetilde{A}_{(m)}$ — сужение оператора $L'_{0i} - J_m X_*$ на $\mathcal{H}_{(m)}$ и $\widetilde{A}^{(m)}$ — сужение оператора $-L'_{0i} + J_m X_*$ на $\mathcal{H}^{(m)}$. Тогда согласно [32] полугруппа $T(t)$ подобна полугруппе $T_m(t) \oplus T^{(m)}(t)$. Применяя теорему 1.3.1, мы получим, что полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида (3.23). Теорема доказана. □

ГЛАВА 4
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

Данная глава посвящена исследованию спектральных свойств одномерного оператора Шрёдингера с негладким потенциалом и краевыми условиями Дирихле, а также дальнейшему развитию метода подобных операторов. Здесь мы приведем несколько иную схему метода подобных операторов, которая позволяет уточнить и в некоторых случаях улучшить известные спектральные свойства оператора Шрёдингера.

Рассмотрим оператор $S : D(S) \subset \mathrm{L}_2[0, \omega] \to \mathrm{L}_2[0, \omega]$, $\omega > 0$, порожденный на промежутке $[0, \omega]$ дифференциальным выражением

$$s(y) = -y'' - vy, \quad v \in \mathrm{L}_2[0, \omega],$$

и область определения, как отмечалось во введении, задается краевым условием Дирихле

$$y(0) = y(\omega) = 0.$$

Таким образом, $D(S) = \{y \in W_2^2[0, \omega] : y(0) = y(\omega) = 0\}$.

Оператор S представим в виде $S = S_0 - V$, где свободный оператор $S_0 : D(S_0) = D(S) \subset \mathrm{L}_2[0, \omega] \to \mathrm{L}_2[0, \omega]$ имеет вид $S_0 y = -y''$. Оператор S_0 является самосопряженным неотрицательным оператором с компактной резольвентой. Оператор V является оператором умножения на потенциал v с областью определения $D(V) = \{x \in W_2^2[0, \omega] : vx \in \mathrm{L}_2[0, \omega]\}$. Он корректно определен ввиду включения $D(V) \supset D(S_0)$. При исследовании оператора S оператор S_0 считается невозмущенным оператором, а оператор V будет играть роль возмущения.

Опишем спектр $\sigma(S_0)$ и собственные функции оператора S_0:
$\sigma(S_0) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, где $\lambda_n = (\frac{\pi n}{\omega})^2$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n = \mathrm{Span}\{e_n\}$, где $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi n}{\omega} t$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \omega]$.

Отметим, что для оператора S с краевыми условиями Дирихле все его собственные значения являются простыми (однократными).

Предполагается, что потенциал v принадлежит гильбертову пространству $L_2[0,\omega]$ и всюду используется его разложение:

$$v(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos\frac{\pi k}{\omega}t, \quad t \in [0,\omega].$$

Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\}$. Следовательно, $S_0 P_n = \lambda_n P_n$. Для любого $x \in L_2[0,\omega]$ описанные выше проекторы определяются следующим образом:

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь перейдем непосредственно к применению метода подобных операторов.

4.1 Спектральный анализ абстрактных операторов в гильбертовом пространстве

Настоящий параграф посвящен применению метода подобных операторов к абстрактным линейным операторам, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В качестве невозмущенного оператора будет выступать оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Приводимые в этом параграфе результаты существенно используются в спектральном анализе дифференциального оператора S.

Замечание 4.1.1. *Относительно оператора A мы будем предполагать, что он обладает точно такими же спектральными свойствами, как и оператор S. При этом будут использоваться те же обозначения, что и для собственных значений, собственных функций и для проекторов.*

Рассматривается оператор $A - B$, где $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой, спектр $\sigma(A)$ которого образует последовательность собственных значений вида

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В этом параграфе также предполагается, что все собственные значения оператора A — простые.

Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\}$. Следовательно, справедливы равенства $AP_n = \lambda_n P_n$. Для любого $x \in \mathcal{H}$ описанные выше проекторы определяются следующим образом:

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где e_n, $n \in \mathbb{N}$, — собственные функции оператора A.

Итак, следуя схеме метода подобных операторов, описанной в главе 1, в качестве пространства $\mathcal{X}$ выступает комплексное гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Предположим, что оператор (возмущение) B принадлежит идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Приступим к построению допустимой тройки для оператора A. В качестве пространства допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ будет выступать идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Далее перейдем к построению трансформаторов $J, \Gamma \in \operatorname{End} \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, которые будут участвовать при построении соответствующих трансформаторов в пространстве допустимых возмущений (как правило, далее обозначаемыми теми же символами).

Трансформатор J имеет вид

$$JX = \sum_{n=1}^{\infty} P_n X P_n, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \tag{4.1}$$

а трансформатор Γ определим формулой

$$\Gamma X = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Трансформатор Γ корректно определен и является ограниченным оператором так как оператор X принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеет место замечание 1.2.3 и величина $\min\limits_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$ является положительной.

Наряду с указанными трансформаторами рассмотрим последовательности трансформаторов J_m, Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, определенных равенствами:

$$J_m X = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

$$\Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}), \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

где $P_{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{m} P_k$. Отметим, что $J_1 = J$, $\Gamma_1 = \Gamma$, если $m = 1$.

Лемма 4.1.1. *Трансформаторы J_m, Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, являются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Каждый трансформатор J_m является ортогональным проектором, а трансформатор Γ_m является компактным оператором, допускающим оценку*

$$\|\Gamma_m\|_2 \leqslant \frac{\omega^2}{\pi^2(2m+1)}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Для фиксированных $i, j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $i \neq j$, $|i-j| \geqslant m+1$, операторы $P_i X P_j$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, образуют собственное подпространство, отвечающее вещественному собственному значению $(\lambda_i - \lambda_j)^{-1}$ оператора Γ_m. При этом эти подпространства взаимно ортогональны в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, трансформаторы Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, являются самосопряженными операторами. Поэтому величина $\|\Gamma_m\|_2$ совпадает со спектральным радиусом этого оператора, т. е. с величиной $\max\limits_{|i-j|\geqslant m+1} |\lambda_i - \lambda_j|^{-1}$. Таким образом, имеет место неравенство (4.2). Из определения трансформаторов J_m, $m \in \mathbb{N}$, следует, что они являются ортогональными проекторами. Лемма доказана. □

Замечание 4.1.2. *Поскольку оператор A является самосопряженным оператором, то в силу теоремы Стоуна (см. [15]), оператор iA является генератором сильно непрерывной группы изометрий $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{H}$.*

Рассмотрим оператор

$$i\,\mathrm{ad}_A : D(\mathrm{ad}_A) \subset \operatorname{End} \mathcal{H} \to \operatorname{End} \mathcal{H}$$

с областью определения $D(\mathrm{ad}_A) = \{X \in \operatorname{End} \mathcal{H} : XD(A) \subset D(A)$ и оператор $AX - XA : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ допускает расширение на $\mathcal{H}$ до оператора Y из $\operatorname{End} \mathcal{H}$ и полагается $\mathrm{ad}_A X = Y\}$. Из [10, Лемма 3] следует, что оператор $i\,\mathrm{ad}_A$ является генератором группы изометрий

$$\widetilde{T}(t)X = T(t)XT(-t), \quad X \in \operatorname{End} \mathcal{H},$$

непрерывной в сильной операторной топологии. Сужение операторов этой группы на идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, является сильно непрерывной группой изометрий с генератором (обозначаемым тем же символом) $i\,\mathrm{ad}_A : D(\mathrm{ad}_A) \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Его спектр совпадает с множеством $i\{\lambda_k - \lambda_j;\ k, j \in \mathbb{N}\}$.

Проектором на ядро $\operatorname{Ker} \operatorname{ad}_A$ является трансформатор $J \in \operatorname{End} \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Поскольку нуль — изолированная точка спектра оператора ad_A, то уравнение

$$\operatorname{ad}_A X = Y - JY$$

разрешимо для любого оператора Y из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, оператор ad_A обратим на подпространстве $\operatorname{Ker} J = \operatorname{Im}(I - J)$. Обратный к нему оператор совпадает с трансформатором Γ на операторах $P_k X P_j$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\lambda_k \neq \lambda_j$, линейные комбинации которых плотны в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, трансформатор Γ нулевой на $\operatorname{Im} J$ и совпадает с обратным к сужению ad_A на $\operatorname{Im}(I - J)$.

Формулируемые в следующей лемме свойства трансформаторов будут часто использоваться в дальнейшем.

Лемма 4.1.2. *Трансформаторы* J_m, $\Gamma_m \in \operatorname{End} \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $m \in \mathbb{N}$, *обладают следующими свойствами:*

1) $P_{(m)}(J_m X) = (J_m X) P_{(m)} = P_{(m)} X P_{(m)}$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

2) $J_m((\Gamma_m X)(J_m Y)) = J_m((J_m X)(\Gamma_m Y)) = 0$, $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

3) $\Gamma_m X \in D(\operatorname{ad}_A)$ *и* $\operatorname{ad}_A(\Gamma_m X) = X - J_m X$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

4) для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *имеют место оценки:*

$$\|(\Gamma_m X) P_n\|_2 \leqslant \frac{\omega^2 \|X P_n\|_2}{\pi^2 (2n - 1)}, \quad n \geqslant m + 1. \tag{4.3}$$

Доказательство. Свойства 1), 2) непосредственно следуют из определения трансформаторов J_m, Γ_m. Свойство 3) следует из инвариантности подпространства $\operatorname{Im}(I - J_m)$ для трансформатора ad_A.

Докажем свойство 4). Пусть $X_{kj} = P_k X P_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, — блочная матрица оператора X. Тогда матрица (Y_{kj}) оператора $Y = \Gamma_m X$ будет иметь вид

$$Y_{kj} = \begin{cases} \frac{X_{kj}}{\lambda_k - \lambda_j}, & \text{если} \quad \max\{k, j\} \geqslant m + 1, \\ 0, & \text{если} \quad \max\{k, j\} \leqslant m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\|(\Gamma_m X) P_n\|_2^2 = \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\|P_k (X P_n) P_j\|_2^2}{|\lambda_k - \lambda_j|^2} \leqslant \frac{\omega^4 \|X P_n\|_2^2}{\pi^4 (2n - 1)^2}, \quad n \geqslant m + 1.$$

Таким образом, доказано неравенство (4.3). Лемма доказана. □

Лемма 4.1.3. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора A и постоянная $\gamma = \gamma(m)$ из определения 1.4.2 имеет оценку*

$$\gamma \leqslant \|\Gamma_m\|_2 \leqslant \frac{\omega^2}{\pi^2(2m+1)}.$$

Доказательство непосредственно следует из лемм 4.1.1, 4.1.2 и замечания 4.1.2 при условии $\gamma \leqslant \|\Gamma_m\|_2$.

Теорема 4.1.1. *Пусть число $m \in \mathbb{N}$ такое, что выполнено условие*

$$\frac{\omega^2\|B\|_2}{\pi^2(2m+1)} < \frac{1}{4}. \tag{4.4}$$

Тогда оператор $A - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, подобен оператору $A - J_m X_*$, где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m B) - (\Gamma_m X)J_m(B\Gamma_m X) + B, \tag{4.5}$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B, \dots$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J_m X_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m X_*$, т. е. имеет место равенство

$$A - B = (I + \Gamma_m X_*)(A - J_m X_*)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}.$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из леммы 4.1.3 и теоремы 1.4.1.

Следующие две теоремы о спектре и проекторах будут получены при выполнении условия (4.4) теоремы 4.1.1.

Теорема 4.1.2. *Оператор $A - B$ имеет компактную резольвенту и его спектр совпадает со спектром оператора*

$$A - J_m X_* = A - P_{(m)} X_* P_{(m)} - \sum_{n \geqslant m+1} P_n X_* P_n,$$

и имеют место равенства

$$\sigma(A - B) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \Bigg(\bigcup_{n \geqslant m+1} \sigma(A_n) \Bigg) = \sigma_{(m)} \bigcup \Bigg(\bigcup_{n \geqslant m+1} \sigma_n \Bigg), \tag{4.6}$$

где оператор $A_{(m)}$ — сужение оператора $A - P_{(m)} X_* P_{(m)}$ на инвариантное подпространство $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$ и A_n — сужение оператора $A - P_n X_* P_n$ на $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$. Множества $\sigma_{(m)}$, σ_n, $n \geqslant m+1$, взаимно не пересекаются.

Доказательство. Оператор $A - J_m X_*$ очевидно имеет компактную резольвенту и, следовательно, компактную резольвенту имеет подобный ему оператор $A - B$. Совпадение их спектров следует из их подобия. Подпространства $\mathcal{H}_{(m)}$, $\mathcal{H}_n$ являются инвариантными относительно оператора $A - J_m X_*$, и поэтому имеет место включение правой части равенства (4.6) в множество $\sigma(A - J_m X_*) = \sigma(A - B)$. Доказательство обратного включения проводится так же как и в теореме 2.3.1. Теорема доказана. □

Теорема 4.1.3. *Спектр оператора $A - B$ представим в виде*

$$\sigma(A - B) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{n \geqslant m+1} \{\widetilde{\lambda}_n\} \Big),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, состоящее из не более чем $2m+1$ собственных значений. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant n_1$, где $n_1 = \max\{m+1, \frac{6\|B\|_2\omega^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\}$, допускают следующее асимптотическое представление

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - (Be_n, e_n) + \eta_n, \quad n \geqslant n_1, \tag{4.7}$$

где последовательность (η_n) удовлетворяет оценке

$$|\eta_n| \leqslant \frac{2\omega^2}{\pi^2(2n-1)} \|P_n B - P_n B P_n\|_2 \|B P_n - P_n B P_n\|_2. \tag{4.8}$$

Доказательство. Применяя к обеим частям уравнения (4.5), где $X = X_*$, слева и справа проектор P_n получим, что

$$P_n X_* P_n = P_n B P_n + P_n(B\Gamma_m X_*)P_n = (Be_n, e_n) + \\ + P_n(B\Gamma_m X_*)P_n, \quad n \geqslant m+1. \tag{4.9}$$

Далее используются следующие равенства (вытекающие из леммы 4.1.2) для любых операторов $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$:

1) $(J_m X)P_n = P_n(JX)P_n = P_n X P_n$, $n \geqslant m+1$;
2) $P_n(J_m X)(\Gamma_m Y)P_n = 0$, $n \geqslant m+1$;
3) $\Gamma_m(P_n X P_n) = 0$, $n \geqslant m+1$;
4) $P_n((J_m X)\Gamma_m Y)P_n = 0$, $n \geqslant m+1$.

Оператор $P_n(B\Gamma_m X_*)P_n$ представим в виде

$$P_n(B\Gamma_m X_*)P_n = P_n(B - J_m B)(\Gamma_m X_*)P_n = P_n(B - P_n B P_n)(\Gamma_m X_*)P_n.$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$\|P_n(B\Gamma_m X_*)P_n\|_2 \leqslant \|P_nB - P_nBP_n\|_2\|(\Gamma_m X_*)P_n\|_2, \quad n \geqslant m+1. \tag{4.10}$$

Далее рассмотрим оценки последовательности $\|(\Gamma_m X_*)P_n\|_2$, $n \geqslant m+1$. Из равенств $(\Gamma_m X_*)P_n = \Gamma_m(X_* - J_m X_*)P_n$, $n \geqslant m+1$, следует, что

$$\|(\Gamma_m X_*)P_n\|_2 \leqslant \frac{\|(X_* - J_m X_*)P_n\|_2}{\min\limits_{k\neq n}|\lambda_k - \lambda_n|} = \frac{\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2}{d_n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $d_n = \min\limits_{k\neq n}|\lambda_k - \lambda_n| = \frac{\pi^2}{\omega^2}(2n-1)$.

Поскольку оператор X_* удовлетворяет уравнению (4.5) и имеют место равенства $P_nX_*P_n = P_nBP_n + P_nB\Gamma_m(X_* - J_mX_*)P_n$, $n \geqslant m+1$, то

$$(X_* - J_mX_*)P_n = X_*P_n - P_nX_*P_n = (B - P_nBP_n)P_n + B\Gamma_m(X_* - \\ - P_nX_*P_n)P_n - \Gamma_m(X_* - P_nX_*P_n)P_nX_*P_n - P_nB\Gamma_m(X_* - P_nX_*P_n)P_n.$$

Используя оценку $\|X_*\|_2 \leqslant 4\|B\|_2$ (см. теорему 1.4.1), мы получим, что

$$\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2 \leqslant \|BP_n - P_nBP_n\|_2 + \frac{\|B\|_2\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2}{d_n} + \\ + \frac{4\|B\|_2\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2}{d_n} + \frac{\|B\|_2\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2}{d_n} = \\ = \|BP_n - P_nBP_n\|_2 + \frac{6\|B\|_2\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2}{d_n}.$$

Таким образом, для $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\dfrac{6\|B\|_2}{d_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, приходим к оценке

$$\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2 \leqslant 2\|BP_n - P_nBP_n\|_2.$$

Следовательно,

$$\|(\Gamma_m X_*)P_n\|_2 = \|\Gamma_m(X_*P_n - P_nX_*P_n)\|_2 \leqslant \frac{2\|BP_n - P_nBP_n\|_2}{d_n}. \tag{4.11}$$

Из неравенств (4.10) и (4.11) получаем, что имеют место оценки

$$\|P_n(X_* - B)P_n\|_2 \leqslant \frac{2\omega^2}{\pi^2(2n-1)}\|P_nB - P_nBP_n\|_2\|BP_n - P_nBP_n\|_2, \quad n \geqslant n_1.$$

Рассматривая сужение на $\mathcal{H}_n$ операторов из равенства (4.9), получим представление (4.7) с оценкой (4.8). Теорема доказана. □

Следствие 4.1.1. *Последовательность* $n \mapsto \|P_nB - P_nBP_n\|_2\|BP_n - P_nBP_n\|_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *является суммируемой (как произведение двух суммируемых с квадратом последовательностей).*

Перейдем к оценкам отклонений спектральных проекторов оператора $A-B$ от соответствующих проекторов, построенных по невозмущенному оператору A. Мы получим эти оценки, используя теорему 4.1.1, условие (4.4) которой будет считаться выполненным.

Пусть Ω — произвольное подмножество из множества $\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, m\}$. Положим

$$P(\Omega) = \sum_{j \in \Omega} P_j, \quad \widetilde{P}(\Omega) = \sum_{j \in \Omega} \widetilde{P}_j,$$

где $\widetilde{P}_j = P(\sigma_j, A - B)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_n, $n \geqslant m+1$, из представления (4.6) спектра оператора $A - B$.

Из леммы 1.4.1 и теорем 4.1.1, 4.1.2 получаем следующее представление проекторов $\widetilde{P}(\Omega)$:

$$\widetilde{P}(\Omega) = (I + \Gamma_m X_*)P(\Omega)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}.$$

Следовательно, оператор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ имеет вид

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (\Gamma_m X_* P(\Omega) - P(\Omega)\Gamma_m X_*)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}. \tag{4.12}$$

Символом $k(\Omega)$ мы обозначим величину $\min\limits_{k \in \Omega} k$.

Теорема 4.1.4. *Имеют место оценки отклонений спектральных проекторов:*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\omega^2}{\pi^2 k(\Omega)}, \quad n \geqslant m+1, \tag{4.13}$$

где $\widetilde{M}$ *— константа, не зависящая от* $k(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный оператор $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и оценим величину $\|(\Gamma_m X)P(\Omega)\|_2$. Из представления $P(\Omega) = \sum\limits_{j \in \Omega} P_j$ и оценок (4.3) леммы 4.1.2 получаем следующие неравенства:

$$\|(\Gamma_m X)P(\Omega)\|_2^2 \leqslant \sum_{n \in \Omega} \|(\Gamma_m X)P_n\|_2^2 \leqslant \sum_{n \in \Omega} \frac{\omega^4 \|XP_n\|_2^2}{\pi^4(2n-1)^2} \leqslant \frac{\omega^4\|X\|_2^2}{\pi^4 k^2(\Omega)}.$$

Аналогичные неравенства верны и для нормы Гильберта-Шмидта оператора $P(\Omega)\Gamma_m X$. Таким образом, имеют место оценки:

$$\|(\Gamma_m X)P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\|X\|_2}{\pi^2 k(\Omega)}, \quad \|P(\Omega)(\Gamma_m X)\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\|X\|_2}{\pi^2 k(\Omega)}. \tag{4.14}$$

Оценки (4.13) следуют из представления (4.12), условия $\|\Gamma_m X_*\|_2 < 1$, а также неравенств (4.14). Теорема доказана. □

Теорема 4.1.5. *В условиях теорем 4.1.1 и 4.1.4 имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{j=m+1}^{n} \widetilde{P}_j - P_{(m)} - \sum_{j=m+1}^{n} P_j\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\omega^2}{\pi^2 n}.$$

Здесь $\widetilde{M} > 0$ — постоянная, определенная в теореме 4.1.4.

4.2 Предварительное преобразование подобия операторов и основные оценки

В дальнейшем будет постоянно использоваться

Замечание 4.2.1. *Далее при получении оценок собственных значений и проекторов без ограничения общности будем считать, что $v_0 = 0$. Однако, величина v_0 будет учитываться в окончательных оценках.*

Следуя теореме 1.4.3, осуществим предварительное преобразование подобия дифференциального оператора $S = S_0 - V$ в оператор вида $S_0 - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что всюду далее в этой главе символом $\mathcal{H}$ будет обозначаться гильбертово пространство $\mathrm{L}_2[0,\omega]$.

Вначале определим операторы $JV, \Gamma V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, которые будут участвовать в предварительном преобразовании подобия. Для их построения будут использоваться трансформаторы $J, \Gamma \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, построенные в § 4.1. При этом будет учитываться, что операторы VP_n, P_nVP_n принадлежат идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Зададим оператор JV формулой

$$JV = \sum_{n=1}^{\infty} J(VP_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_nVP_n. \tag{4.15}$$

Оператор JV корректно определен, так как операторы P_nVP_n, $n\in\mathbb{N}$, являются операторами Гильберта-Шмидта. В силу того, что подпространство $\operatorname{Im}P_n$ является одномерным, то ряд в (4.15) является сходящимся и (в силу равенства Парсеваля) имеет место равенство

$$\|JV\|_2=\|v\|_2. \tag{4.16}$$

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ были введены трансформаторы J_k, Γ_k, $k\in\mathbb{N}$ (см. § 4.1). Оператор V может не быть ограниченным оператором, но, тем не менее, могут быть определены операторы J_kV, Γ_kV. Операторы J_kV, $k\in\mathbb{N}$, зададим следующим образом:

$$J_kV=JV-J(P_{(k)}VP_{(k)})+P_{(k)}VP_{(k)}.$$

Перейдем к определению операторов ΓV. Они задаются равенствами

$$\Gamma V=\sum_{i,j=1}^{\infty}\Gamma(P_iVP_j)=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{P_iVP_j}{\lambda_i-\lambda_j},$$

где учитывается, что $P_iVP_j\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $i,j\in\mathbb{N}$.

Вычислим матричные коэффициенты v_{ij}, $i,j\in\mathbb{N}$, оператора V. Действительно, имеют место равенства

$$\begin{aligned}v_{ij}&=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}v(t)e_i(t)\overline{e_j(t)}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{2}}{\omega}\sum_{k=1}^{\infty}v_k\int_0^{\omega}\cos\frac{\pi k}{\omega}t\sin\frac{\pi i}{\omega}t\sin\frac{\pi j}{\omega}\,\mathrm{d}t=\\&=\frac{\sqrt{2}}{\omega}\sum_{k=1}^{\infty}v_k\int_0^{\omega}\cos\frac{\pi k}{\omega}t\big(\cos\frac{\pi}{\omega}(i-j)t-\cos\frac{\pi}{\omega}(i+j)t\big)\,\mathrm{d}t=\\&=\frac{\sqrt{2}}{\omega}(v_{|i-j|}-v_{i+j})\int_0^{\omega}\cos^2\frac{\pi k}{\omega}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_{|i-j|}-v_{i+j}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_{|i-j|}-v_{i+j}),\quad i,j\in\mathbb{N}. \tag{4.17}$$

При оценках нормы Гильберта-Шмидта оператора ΓV будет использоваться его матрица $\mathcal{Q}=(q_{ij})$, $i,j\in\mathbb{N}$, которая имеет вид

$$q_{ij}=\begin{cases}\left(\frac{\omega^2}{\pi^2\sqrt{2}}\frac{v_{|i-j|}-v_{i+j}}{(i-j)(i+j)}\right), & \text{если}\quad i\neq j,\\ 0, & \text{если}\quad i=j.\end{cases}$$

Оценим величины $\|P_n\Gamma V\|_2$, $n \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие неравенства:

$$\|P_n\Gamma V\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{\pi^2\sqrt{2}}\right)^2 \sum_{\substack{p,n=1\\p\neq n}}^{\infty} \frac{|v_{|n-p|} - v_{n+p}|^2}{|n^2-p^2|^2} \leqslant \left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2 \Bigg(\sum_{\substack{p,n=1\\p\neq n}}^{\infty} \frac{|v_{|n-p|}|^2}{|n-p|^2(n+p)^2} +$$

$$+ \sum_{\substack{p,n=1\\p\neq n}}^{\infty} \frac{|v_{n+p}|^2}{|n-p|^2(n+p)^2}\Bigg) \leqslant 2\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2 \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\j\neq 0}} \frac{|v_{|j|}|^2}{j^2|2n-j|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2\sqrt{2}}{\pi^2}\right)^2 \frac{\|v\|_2^2}{(2n-1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\|P_n(\Gamma V)\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\sqrt{2}\|v\|_2}{\pi^2(2n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.18}$$

Таким образом, оператор ΓV является оператором Гильберта-Шмидта и имеет место оценка

$$\|\Gamma V\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(\Gamma V)\|_2^2 \leqslant 2\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2 \|v\|_2^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{6}\right)^2.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим оператор $\Gamma_k V$ равенствами:

$$\Gamma_k V = \Gamma(V - P_{(k)} V P_{(k)}) = \Gamma V - P_{(k)}(\Gamma V) P_{(k)}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Gamma_k V\|_2 = 0$.

Таким образом, доказана следующая

Лемма 4.2.1. *Операторы $\Gamma_k V$, $k \in \mathbb{N}$, являются операторами Гильберта-Шмидта и $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Gamma_k V\|_2 = 0$.*

Теперь осуществим проверку свойств предположения 1.4.1.

Лемма 4.2.2. *Для операторов $\Gamma_k V$, $k \in \mathbb{N}$, выполнены следующие свойства:*

1) $(\Gamma_k V)D(S_0) \subset D(S_0)$;

2) $S_0(\Gamma_k V)x - (\Gamma_k V)S_0 x = (V - J_k V)x$, $x \in D(S_0)$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(S_0)$ такое, что $\|V(S_0 - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_2 < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(S_0)$. Рассмотрим последовательность проекторов $\mathcal{P}_{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{n} P_j$. Тогда для любого вектора $y \in \mathcal{H}$, имеет место равенство (проверяемое на базисных векторах из $\mathcal{H}$):

$$\mathcal{P}_{(n)}S_0(\Gamma_k V)(S_0-\lambda_0 I)^{-1}y=\mathcal{P}_{(n)}(\Gamma_k V)S_0(S_0-\lambda_0 I)^{-1}y+ \\ +\mathcal{P}_{(n)}(V-J_k V)(S_0-\lambda_0 I)^{-1}y=\mathcal{P}_{(n)}\mathcal{S}y,$$

где $\mathcal{S}y=(\Gamma_k V)S_0(S_0-\lambda_0 I)^{-1}y+(V-J_k V)(S_0-\lambda_0 I)^{-1}y$. Оператор $\mathcal{S}$ из правой части является оператором Гильберта-Шмидта и поэтому последовательность операторов из правой части сходится к оператору $\mathcal{S}$ по норме в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Из замкнутости оператора S_0 следует, что $\Gamma_k Vx\in D(S_0)$ для любого $x\in D(S_0)$ и имеет место равенство

$$S_0(\Gamma_k V)(S_0-\lambda_0 I)^{-1}=(\Gamma_k V)S_0(S_0-\lambda_0 I)^{-1}+(V-J_k V)(S_0-\lambda_0 I)^{-1}.$$

Таким образом, установлены свойства 1) и 2).

Перейдем к доказательству свойства 3). Комплексные числа in, $n\in\mathbb{N}$, принадлежат резольвентному множеству оператора S_0. Матрица оператора $V(S_0-inI)^{-1}$ имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{v_{|p-j|}-v_{p+j}}{\frac{\pi^2 j^2}{\omega^2}-in}\right),\quad p,j\in\mathbb{N}.$$

Эта матрица является матрицей Гильберта-Шмидта и имеют место соотношения:

$$\|V(S_0-inI)^{-1}\|_2^2=\frac{\omega^4}{2}\sum_{p,j=1}^{\infty}\frac{|v_{|p-j|}-v_{p+j}|^2}{|\pi^2 j^2-in\omega^2|^2}\leqslant\omega^4\|v\|_2^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^4 j^4+n^2\omega^4}\to 0,$$

при $n\to\infty$. Таким образом, выполнено свойство 3). Лемма доказана. □

Лемма 4.2.3. *Операторы $V\Gamma_k V$, $k\in\mathbb{N}$, корректно определены и являются операторами Гильберта-Шмидта.*

Доказательство. Непосредственно из определения операторов $\Gamma_k V$ и замечания 1.2.4 следует, что достаточно доказать утверждение леммы для матрицы $\mathcal{V}=(\widetilde{v}_{pn})$, $p,n\in\mathbb{N}$, оператора $V\Gamma V: D(S_0)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$. Учитывая представление (4.17), матрица $\mathcal{V}=(\widetilde{v}_{pn})$, $p,n\in\mathbb{N}$, оператора $V\Gamma V$ имеет вид:

$$\widetilde{v}_{pn}=\frac{\omega^2}{2\pi^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{(v_{|p-j|}-v_{p+j})(v_{|j-n|}-v_{j+n})}{j^2-n^2},\quad p,n\in\mathbb{N}.$$

Перейдем к оценке нормы Гильберта-Шмидта $\|\mathcal{V}\|_2$ матрицы $\mathcal{V}=(\widetilde{v}_{pn})$, $p,n\in\mathbb{N}$. Имеют место неравенства:

$$\|\mathcal{V}\|_2^2=\left(\frac{\omega^2}{2\pi^2}\right)^2\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{(v_{|p-j|}-v_{p+j})(v_{|j-n|}-v_{j+n})}{j^2-n^2}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\left(\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{v_{|p-j|}v_{|j-n|}}{j^2-n^2}\right|^2+\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{v_{|p-j|}v_{j+n}}{j^2-n^2}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{v_{p+j}v_{|j-n|}}{j^2-n^2}\right|^2+\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{v_{p+j}v_{j+n}}{j^2-n^2}\right|^2\right).$$

Оценим первое слагаемое в последней сумме. Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Справедливы следующие равенства:

$$\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{v_{|p-j|}v_{|j-n|}}{j^2-n^2}\right|^2=\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{v_{|p-n-l|}v_{|l|}}{l(l+2n)}\right|^2=$$

$$=\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{v_{|l|}}{l}\left(\frac{v_{|p-n-l|}}{l+2n}\right)\right|^2=\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{v_{|l|}}{l}\mathcal{A}_l(p,n)\right|^2,$$

где матрица $\mathcal{A}_l(p,n)$, $p,n\in\mathbb{N}$, имеет вид

$$\mathcal{A}_l(p,n)=\frac{v_{|p-n-l|}}{l+2n}.$$

Каждая матрица $\mathcal{A}_l$, $l\in\mathbb{Z}$, является матрицей Гильберта-Шмидта, причем

$$\|\mathcal{A}_l\|_2^2=\sum_{p,n=1}^{\infty}\left|\frac{v_{|p-n-l|}}{l+2n}\right|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(l+2n)^2}\sum_{p=1}^{\infty}|v_{|p-n-l|}|^2\leqslant$$

$$\leqslant\|v\|_2^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(l+2n)^2}\leqslant\frac{\pi^2}{6}\|v\|_2^2.$$

В итоге, мы получаем оценки

$$\sum_{p,n=1}^{\infty}|v_{pn}|^2\leqslant 4\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\sum_{p,n=1}^{\infty}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{|v_{|l|}|^2}{l^2}|A_l(p,n)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\pi^2}{3}\|v\|_2^2\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{|v_{|l|}|^2}{l^2}\leqslant\frac{2\omega^4}{9}\|v\|_2^4.$$

Из замечания 1.2.4 следует, что $V\Gamma V$ допускает ограниченное расширение на все пространство $\mathcal{H}$ до оператора Гильберта-Шмидта. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, из лемм 4.2.1 – 4.2.3, представления (4.16) и теоремы 1.4.3 следует

Теорема 4.2.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ таково, что $\|\Gamma_k V\|_2 \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда оператор S подобен оператору $S_0 - B$, где $B = J_k V + V_0$ и V_0 определяется формулой*

$$V_0 = V_0(k) = (I + \Gamma_k V)^{-1}(V\Gamma_k V - (\Gamma_k V)J_k V). \tag{4.19}$$

При этом имеет место равенство

$$(S_0 - V)(I + \Gamma_k V) = (I + \Gamma_k V)(S_0 - B).$$

Оператор V_0 является оператором Гильберта-Шмидта и допускает оценку

$$\|V_0\|_2 \leqslant 2(\|V\Gamma_k V\|_2 + \|\Gamma_k V(J_k V)\|_2).$$

Из формулы (4.19) следует, что оператор V_0 допускает представление

$$V_0 = \Big(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\Gamma_k V)^j\Big)(V\Gamma_k V - (\Gamma_k V)J_k V) = V\Gamma_k V -$$
$$- (\Gamma_k V)J_k V - (\Gamma_k V)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\Gamma_k V)^j\Big)(V\Gamma_k V - (\Gamma_k V)J_k V).$$

Таким образом, оператор B определяется равенством

$$\begin{aligned} B = J_k V + V\Gamma_k V - (\Gamma_k V)J_k V - \\ - (\Gamma_k V)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\Gamma_k V)^j\Big)(V\Gamma_k V - (\Gamma_k V)J_k V) = J_k V + V\Gamma_k V - \\ - (\Gamma_k V)J_k V - (\Gamma_k V)(I + \Gamma_k V)^{-1}(V\Gamma_k V - (\Gamma_k V)J_k V). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Наконец, сформулируем основную теорему о подобии.

Теорема 4.2.2. *Существуют такие числа $k \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant k+1$, что оператор S подобен оператору вида $S_0 - J_m X_*$, где X_* — решение нелинейного уравнения*

$$X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m B) - (\Gamma_m X)J_m(B\Gamma_m X) + B. \tag{4.21}$$

В этом уравнении оператор B имеет вид (4.20) и k удовлетворяет условиям теоремы 4.2.1.

Доказательство. Из теоремы 4.2.1 следует, что дифференциальный оператор S подобен интегро-дифференциальному оператору $S_0 - B$. К последнему применима общая теорема 4.1.1, из которой следует утверждение данной теоремы. Теорема доказана. □

При доказательстве основных результатов работы будут использоваться приводимые ниже вычисления и оценки.

Используя представления (4.1), (4.20) следует, что имеет место равенство:

$$BP_n - P_nBP_n = (V\Gamma_k V)P_n - P_n(V\Gamma_k V)P_n - (\Gamma_k V)P_nVP_n +$$
$$+ (P_n(\Gamma_k V) - \Gamma_k V)(I + \Gamma_k V)^{-1}((V\Gamma_k V)P_n - (\Gamma_k V)P_nVP_n), \quad n \geqslant k+1.$$

Отметим, что здесь использовалось равенство $(J_kV)P_n = P_nVP_n$. Следовательно, для $n \geqslant k+1$ справедливы участвующие в теореме 4.1.3 оценки:

$$\|BP_n - P_nBP_n\|_2 \leqslant \|(V\Gamma_k V)P_n\|_2 + \|P_n(V\Gamma_k V)P_n\|_2 +$$
$$+ \|(\Gamma_k V)P_n\|_2\|P_nVP_n\|_2 + \frac{\|P_n(\Gamma_k V)\|_2 + \|\Gamma_k V\|_2}{1 - \|\Gamma_k V\|_2}\Big(\|(V\Gamma_k V)P_n\|_2 +$$
$$+ \|(\Gamma_k V)P_n\|_2\|P_nVP_n\|_2\Big) \leqslant \|(V\Gamma_k V)P_n\|_2 + \|P_n(V\Gamma_k V)P_n\|_2 +$$
$$+ \|(\Gamma_k V)P_n\|_2\|P_nVP_n\|_2 + 2(\|P_n(\Gamma_k V)\|_2 + \|\Gamma_k V\|_2) +$$
$$+ (\|(V\Gamma_k V)P_n\|_2 + \|(\Gamma_k V)P_n\|_2\|P_nVP_n\|_2). \tag{4.22}$$

Здесь использовались равенства $(J_kV)P_n = (JV)P_n = P_n(JV)P_n$, $n \geqslant k + 1$. Таким образом, необходимо получить оценки для величин $\|(V\Gamma_k V)P_n\|_2$, $\|P_n(V\Gamma_k V)P_n\|_2$ и $\|(\Gamma_k V)P_n\|_2$, $n \geqslant k+1$.

Сначала оценим величины $\|(\Gamma V)P_n\|_2$, $n \in \mathbb{N}$. Имеют место соотношения:

$$\|(\Gamma V)P_n\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{p=1\\p\neq n}}^{\infty}\left|\frac{v_{|p-n|} - v_{p+n}}{\lambda_p - \lambda_n}\right|^2 \leqslant \left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\Bigg(\sum_{\substack{p=1\\p\neq n}}^{\infty}\frac{|v_{|p-n|}|^2}{|p^2-n^2|^2} +$$
$$+ \sum_{\substack{p=1\\p\neq n}}^{\infty}\frac{|v_{p+n}|^2}{|p^2-n^2|^2}\Bigg) \leqslant 2\left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)^2\frac{\|v\|_2^2}{(2n-1)^2}.$$

Таким образом,

$$\|(\Gamma V)P_n\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\sqrt{2}\|v\|_2}{\pi^2(2n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Теперь перейдем к оценкам величин $\|(V\Gamma V)P_n\|_2$, $n \in \mathbb{N}$. Напомним, что через α обозначается следующая последовательность

$$\alpha(n) = \left(\frac{\|v\|_2^2}{n^2} + \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \frac{|v_{|n-p|}|^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.24}$$

Используя равенство (4.17), мы заключаем, что матрица $\mathcal{B}$ оператора $V\Gamma V$ имеет вид:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{\omega^2}{2\pi^2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(v_{|p-l|} - v_{p+l})(v_{|l-j|} - v_{l+j})}{l^2 - j^2} \right) \right), \quad l \neq j, \quad p, j \in \mathbb{N}.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\|(V\Gamma V)P_n\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{2\pi^2} \right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l=1\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{(v_{|j-l|} - v_{j+l})(v_{|l-n|} - v_{l+n})}{(l-n)(l+n)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{\pi^2} \right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left| \sum_{\substack{l=1\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{v_{|j-l|} v_{|l-n|}}{(l-n)(l+n)} \right|^2 + \left| \sum_{\substack{l=1\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{v_{|j-l|} v_{l+n}}{(l-n)(l+n)} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{\substack{l=1\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{v_{j+l} v_{|l-n|}}{(l-n)(l+n)} \right|^2 + \left| \sum_{\substack{l=1\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{v_{j+l} v_{l+n}}{(l-n)(l+n)} \right|^2 \right).$$

Рассмотрим первое слагаемое в последней сумме. Такая же оценка будет справедлива и для остальных слагаемых. Имеют место неравенства:

$$\left(\frac{\omega^2}{\pi^2} \right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l=1\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{v_{|j-l|} v_{|l-n|}}{(l-n)(l+n)} \right|^2 = \left(\frac{\omega^2}{\pi^2} \right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}\\ p \neq 0, p \neq -2n}} \frac{v_{|j-p-n|} v_{|p|}}{p(p+2n)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{\pi^2} \right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}\\ p \neq 0}} \frac{|v_{|j-p-n|}|^2}{p^2} \right) \left(\sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}\\ p \neq -2n}} \frac{|v_{|p|}|^2}{(p+2n)^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{\pi^2} \right)^2 \frac{\pi^2}{3} \|v\|_2^2 \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}\\ p \neq -2n}} \frac{|v_{|p|}|^2}{(p+2n)^2} = \left(\frac{\omega^2}{\pi\sqrt{3}} \right)^2 \|v\|_2^2 \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}\\ l \neq 0}} \frac{|v_{|l-2n|}|^2}{l^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{\omega^2}{\pi\sqrt{3}} \right)^2 \|v\|_2^2 \left(\sum_{1 \leqslant l \leqslant 2n} \frac{|v_{2n-l}|^2}{l^2} + \sum_{l \geqslant 2n+1} \frac{|v_{l-2n}|^2}{l^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{\omega^2}{\pi\sqrt{3}} \right)^2 \|v\|_2^2 \left(\sum_{1 \leqslant l \leqslant 2n} \frac{|v_{2n-l}|^2}{l^2} + \frac{\|v\|_2^2}{(2n+1)^2} \right) \leqslant 2 \left(\frac{\omega^2}{\pi\sqrt{3}} \right)^2 \|v\|_2^2 \alpha^2(2n),$$

где α — последовательность, определенная формулой (4.24). Следовательно,

$$\|(V\Gamma V)P_n\|_2 \leqslant \frac{4\omega^2}{\pi\sqrt{6}}\|v\|_2\alpha(2n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Теперь перейдем к оценке слагаемого $\|P_n(V\Gamma V)P_n\|_2$, $n \in \mathbb{N}$. Имеют место соотношения:

$$\|P_n(V\Gamma V)P_n\|_2 = |(V\Gamma V e_n, e_n)| = \frac{\omega^2}{2\pi^2}\left|\sum_{\substack{l=1\\l\neq n}}^{\infty}\frac{(v_{|n-l|}-v_{n+l})(v_{|l-n|}-v_{l+n})}{(l-n)(l+n)}\right| =$$
$$= \frac{\omega^2}{2\pi^2}\left|\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\p\neq 0, p\neq -2n}}\frac{(v_{|p|}-v_{|p+2n|})^2}{p(p+2n)}\right| = \frac{\omega^2}{4\pi^2 n}\left|\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\p\neq 0}}\frac{(v_{|p|}-v_{|p+2n|})^2}{p}-\right.$$
$$\left.-\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\p\neq -2n}}\frac{(v_{|p|}-v_{|p+2n|})^2}{p+2n}\right| \leqslant \frac{\omega^2}{2\pi^2 n}\left(\frac{|v_{2n}|^2}{2n}+\left|\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\p\neq 0}}\frac{|v_{|p|}|^2+|v_{|p+2n|}|^2}{p}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\p\neq -2n}}\frac{|v_{|p|}|^2+|v_{|p+2n|}|^2}{p+2n}\right|\right) \leqslant \frac{\omega^2}{2\pi^2 n}\left(\frac{\|v\|_2^2}{2n}+\frac{2\|v\|_2^2\pi^2}{3}+\right.$$
$$\left.+\|v\|_2\left(\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\p\neq 0}}\frac{|v_{|p+2n|}|^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\|v\|_2\left(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\j\neq 0}}\frac{|v_{|j-2n|}|^2}{j^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\omega^2}{2\pi^2 n}\left(\frac{\|v\|_2^2}{2n}+\frac{2\|v\|_2^2\pi^2}{3}+\|v\|_2\left(\sum_{\substack{|p|\leqslant 2n\\p\neq 0}}\frac{|v_{|p+2n|}|^2}{p^2}+\frac{\|v\|_2^2}{(2n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.+\|v\|_2\left(\sum_{\substack{|j|\leqslant 2n\\j\neq 0}}\frac{|v_{|j-2n|}|^2}{j^2}+\frac{\|v\|_2^2}{(2n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant \frac{\widetilde{C}}{n}\alpha(2n),$$

где $\widetilde{C}$ — некоторая константа. Таким образом, мы получили следующую оценку

$$\|P_n(V\Gamma V)P_n\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{C}}{n}\alpha(2n). \tag{4.26}$$

Замечание 4.2.2. *Отметим, что непосредственно из определения операторов $\Gamma_k V$ и способа оценок норм величин $\|(\Gamma V)P_n\|_2$, $\|(V\Gamma V)P_n\|_2$, $\|P_n(V\Gamma V)P_n\|_2$, $n \geqslant k+1$, получаем, что те же оценки верны для величин $\|(\Gamma_k V)P_n\|_2$, $\|(V\Gamma_k V)P_n\|_2$, $\|P_n(V\Gamma_k V)P_n\|_2$, $n \geqslant k+1$.*

4.3 Асимптотика собственных значений оператора Шрёдингера

На основании полученных в предыдущем параграфе оценок мы готовы перейти к доказательству основных теорем. Первый результат будет посвящен асимптотике собственных значений оператора Шрёдингера.

Теорема 4.3.1. *Оператор S является оператором с компактной резольвентой. Его спектр допускает представление вида*

$$\sigma(S) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{n \geqslant m+1} \sigma_n \Big),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m, а множества $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n\}$, $n \geqslant m+1$, одноточечны. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, представимы в виде

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega} t\,\mathrm{d}t + \eta(n), \quad n \geqslant m+1, \tag{4.27}$$

где последовательность $\eta : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m+1\} \to [1, \infty)$ допускает оценки вида

$$|\eta(n)| \leqslant \frac{M_{dir}}{n}\alpha(2n), \quad n \geqslant m+1,$$

для некоторой постоянной $M_{dir} > 0$.

Доказательство. Оператор S преобразуем в оператор $S_0 - B$, где B имеет вид (4.20). Поскольку оператор B является оператором Гильберта-Шмидта (см. § 4.2), то к оператору $S_0 - B$ применимы результаты § 4.1. По теореме 4.2.2 существует такое $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant k+1$ (см. условие (4.4)), что оператор S подобен оператору $S_0 - J_m X_*$, где X_* — решение уравнения (4.21). Поскольку оператор $J_m X_*$ ограничен, а оператор S_0 самосопряжен и имеет компактную резольвенту, то оператор $S_0 - J_m X_*$ также является оператором с компактной резольвентой. Следовательно, таким свойством обладает и подобный ему оператор S.

Поскольку проекторы P_n, $n \geqslant m+1$, имеют ранг один, то операторы $P_n X_* P_n$ представимы в виде $P_n X_* P_n = (X_* e_n, e_n) P_n$, $n \geqslant m+1$.

Таким образом, справедливо равенство

$$\sigma(S) = \sigma_{(m)} \bigcup \Bigg(\bigcup_{n \geqslant m+1} \left\{ \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - (X_* e_n, e_n) \right\} \Bigg), \tag{4.28}$$

где $\sigma_{(m)}$ — сужение оператора $S_0 - J_m X_*$ на $\operatorname{Im} P_{(m)}$.

Последовательность $(X_* e_n, e_n)$ имеет вид

$$(X_* e_n, e_n) = (Be_n, e_n) + ((X_* - B)e_n, e_n) = (J_k V e_n, e_n) + (V\Gamma_k V e_n, e_n) + \eta(n).$$

Вычислим значение величины $(J_k V e_n, e_n)$. Справедливо следующее равенство

$$(J_k V e_n, e_n) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega} t\,\mathrm{d}t.$$

Используя неравенство (4.26), мы заключаем, что для величины $(V\Gamma_k V e_n, e_n)$ имеет место оценка:

$$|(V\Gamma_k V e_n, e_n)| \leqslant \|P_n (V\Gamma_k V) P_n\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{C}}{n}\alpha(2n). \tag{4.29}$$

Теперь перейдем к оценке величины $|\eta(n)|$, $n \geqslant m+1$. Из неравенства (4.8) теоремы 4.1.3 следует, что

$$\begin{aligned} |\eta(n)| = |((X_* - B)e_n, e_n)| &\leqslant \|P_n(X_* - B)P_n\|_2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{2\omega^2}{\pi^2(2n-1)}\|P_n B - P_n B P_n\|_2 \|BP_n - P_n B P_n\|_2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{2\omega^2 \|B\|_2}{\pi^2(2n-1)}\|BP_n - P_n B P_n\|_2, \quad n \geqslant m+1. \end{aligned}$$

Осталось оценить величину $\|BP_n - P_n B P_n\|_2$. Из (4.16), (4.18), (4.23), (4.25), (4.26), представления (4.22) и замечания 4.2.2 следуют неравенства для $n \geqslant m+1$:

$$\begin{aligned} \|BP_n - P_n B P_n\|_2 &\leqslant \|(V\Gamma V)P_n\|_2 + \|P_n(V\Gamma V)P_n\|_2 + \|(\Gamma V)P_n\|_2 \|P_n V P_n\|_2 + \\ &+ 2(\|P_n(\Gamma V)\|_2 + \|\Gamma_k V\|_2)(\|(V\Gamma V)P_n\|_2 + \|(\Gamma V)P_n\|_2\|P_n V P_n\|_2) \leqslant \\ &\leqslant \frac{4\omega^2\|v\|_2}{\pi\sqrt{6}}\alpha(2n) + \frac{\widetilde{C}}{n}\alpha(2n) + \frac{\omega^2\|v\|_2^2\sqrt{2}}{\pi^2(2n-1)} + \\ &+ 2\left(\frac{\omega^2\|v\|_2\sqrt{2}}{\pi^2(2n-1)} + 1\right)\left(\frac{4\omega^2\|v\|_2}{\pi\sqrt{6}}\alpha(2n) + \frac{\omega^2\|v\|_2^2\sqrt{2}}{\pi^2(2n-1)}\right) \leqslant C_1\alpha(2n), \end{aligned}$$

для некоторой постоянной $C_1 > 0$.

Таким образом, последовательность $\eta(n)$, $n \geqslant m+1$, допускает оценку

$$|\eta(n)| \leqslant \frac{M_{dir}}{n}\alpha(2n), \quad n \geqslant m+1,$$

для некоторой постоянной $M_{dir} > 0$. Учитывая неравенства (4.29), мы заключаем, что имеет место асимптотическое представление (4.27). Теорема доказана. $\square$

Как было отмечено во введении, эта теорема уточняет известную формулу остаточного члена в асимптотике собственных значений оператора S, полученную в работах [2, Теорема 1], [3, Теорема 1], [33, Теорема 1.2], [34, Теорема 0.3].

Рассмотрим частный случай теоремы 4.3.1. А именно, если потенциал v оператора S будет достаточно гладким.

Теорема 4.3.2. *Если v — функция ограниченной вариации, то для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n$ имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega}t\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant m+1.$$

Доказательство. Так как потенциал v является функцией ограниченной вариации, то для его коэффициентов Фурье v_n, $n \in \mathbb{N}$, имеют место оценки (см. [17, Теорема II.4.12]):

$$|v_n| \leqslant \frac{C_2}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная. Непосредственно из определения последовательности α получаем, что

$$\alpha(2n) \leqslant \frac{\widetilde{C}_2}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\widetilde{C}_2 > 0$ — некоторая постоянная. Применяя теорему 4.3.1, получим утверждение настоящей теоремы. Теорема доказана. $\square$

В заключение приведем одно следствие из теоремы 4.3.1.

Следствие 4.3.1. *Оператор S является спектральным (по Данфорду).*

4.4 Оценки отклонений спектральных проекторов

В этом параграфе мы установим оценки для разности спектральных проекторов оператора S и невозмущенного оператора S_0. Но прежде мы напомним основные обозначения (см. введение). Всюду ниже число m взято таким же, как и в теореме 4.3.1. Через $P_{(m)}$ обозначается проектор $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, m\}$. Для множества $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_k, k \in \Omega\}$ проектор Рисса $P(\Delta, S_0)$ определим равенством

$$P(\Delta, S_0)x = \sum_{k \in \Omega} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0, \omega].$$

Теперь рассмотрим множество $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(\Omega) = \cup_{k \in \Omega} \sigma_k$, где σ_k определяется в теореме 4.3.1. Символом $\widetilde{P}_n$ обозначим проектор Рисса, построенный по множеству σ_n, $n \geqslant m+1$. Тогда проектор $P(\widetilde{\Delta}, S)$ зададим равенством

$$P(\widetilde{\Delta}, S)x = \sum_{k \in \Omega} \widetilde{P}_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0, \omega].$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящего параграфа.

Теорема 4.4.1. *Для любого подмножества Ω из $\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, m\}$ имеют место следующие оценки отклонений спектральных проекторов, построенных по операторам S и S_0:*

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - P(\Delta, S_0)\|_2 \leqslant \frac{M}{k^{\frac{1}{2}}(\Omega)},$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная и $k(\Omega) = \min\limits_{k \in \Omega} k$.

Кроме того, существует оператор Гильберта-Шмидта $\mathcal{U}$ с нормой $\|\mathcal{U}\|_2 \leqslant \frac{1}{2}$ такой, что справедлива оценка

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - (I + \mathcal{U})^{-1} P(\Delta, S_0)(I + \mathcal{U})\|_2 \leqslant \frac{M_1}{k(\Omega)}, \tag{4.30}$$

где $M_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Согласно теореме 4.2.1, справедливо равенство

$$(S_0 - V)(I + \Gamma_k V) = (I + \Gamma_k V)(S_0 - B),$$

где оператор B определен формулой (4.20). По теореме 4.2.2 следует, что существует такое $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant k+1$ (см. условие (4.4)), что оператор S подобен оператору $S_0 - J_m X_*$, где X_* — решение уравнения (4.21). Тогда

$$(S_0 - B)(I + \Gamma_m X_*) = (I + \Gamma_m X_*)(S_0 - J_m X_*).$$

Из полученных двух равенств следует, что

$$(S_0 - V)(I + \Gamma_k V)(I + \Gamma_m X_*) = (I + \Gamma_k V)(S_0 - B)(I + \Gamma_m X_*).$$

Поэтому оператор $S_0 - V$ представим в виде

$$S_0 - V = (I + \Gamma_k V)(I + \Gamma_m X_*)(S_0 - J_m X_*)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}(I + \Gamma_k V)^{-1}.$$

Тогда для проекторов $P(\widetilde{\Delta}, S)$ справедливо аналогичное равенство

$$P(\widetilde{\Delta}, S) = (I + \Gamma_k V)(I + \Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}(I + \Gamma_k V)^{-1}, \quad (4.31)$$

где $\Delta = \Delta(\Omega) = \cup_{n \in \Omega}\{\lambda_n\}$, $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(\Omega) = \cup_{n \in \Omega}\sigma_n$, σ_n определено в (4.28) как $(X_* e_n, e_n)$. Из (4.31) получаем следующее представление разности проекторов

$$\begin{aligned} P(\widetilde{\Delta}, S) - P(\Delta, S_0) &= (\Gamma_k V)P(\Delta, S_0) + (\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0) + \\ &+ (\Gamma_k V)(\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0) + \Big(P(\Delta, S_0) + (\Gamma_k V)P(\Delta, S_0) + (\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0) + \\ &+ (\Gamma_k V)(\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)\Big)\sum_{j=1}^{\infty}(\Gamma_m X_*)^j + \Big(P(\Delta, S_0) + (\Gamma_k V)P(\Delta, S_0) + \\ &+ (\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0) + (\Gamma_k V)(\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)\Big)\sum_{j=1}^{\infty}(\Gamma_k V)^j + \\ &+ \Big(P(\Delta, S_0) + (\Gamma_k V)P(\Delta, S_0) + (\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0) + \\ &+ (\Gamma_k V)(\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(\Gamma_m X_*)^j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(\Gamma_k V)^j\Big). \end{aligned}$$

Оценим норму операторов $(\Gamma_k V)P(\Delta, S_0)$. Поскольку $\|(\Gamma_k V)P(\Delta, S_0)\|_2 \leqslant \|(\Gamma V)P(\Delta, S_0)\|_2$, то, используя неравенство (4.23), мы получим

$$\|(\Gamma V)P(\Delta, S_0)\|_2^2 = \sum_{n \in \Omega}\|(\Gamma V)P_n\|_2^2 \leqslant 2\|v\|_2^2 \sum_{n \geqslant k(\Omega)} \frac{\omega^4}{\pi^4(2n-1)^2} \leqslant \frac{2\omega^4\|v\|_2^2}{\pi^4 k(\Omega)}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\|(\Gamma_k V)P(\Delta, S_0)\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\|v\|_2\sqrt{2}}{\pi^2 k^{\frac{1}{2}}(\Omega)}, \quad k(\Omega) = \min_{k\in\Omega} k. \tag{4.32}$$

Из представления разности $P(\widetilde{\Delta}, S) - P(\Delta, S_0)$ и неравенств (4.14), (4.32), мы заключаем, что

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - P(\Delta, S_0)\|_2 \leqslant \frac{M}{k^{\frac{1}{2}}(\Omega)},$$

где $M > 0$ — некоторая константа.

Теперь перейдем к доказательству неравенства (4.30). Положим $\mathcal{U} = \Gamma_k V$. Согласно (4.31), имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
P(\widetilde{\Delta}, S) &= (I + \Gamma_k V)(I + \Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}(I + \Gamma_k V)^{-1} = \\
&= (I + \Gamma_k V)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}(I + \Gamma_k V)^{-1} + \\
&+ (I + \Gamma_k V)(\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}(I + \Gamma_k V)^{-1} = \\
&= (I + \Gamma_k V)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_k V)^{-1} + \\
&+ (I + \Gamma_k V)P(\Delta, S_0)((I + \Gamma_m X_*)^{-1} - I)(I + \Gamma_k V)^{-1} + \\
&+ (I + \Gamma_k V)(\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}(I + \Gamma_k V)^{-1} = \\
&= (I + \Gamma_k V)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_k V)^{-1} + \\
&+ (I + \Gamma_k V)P(\Delta, S_0)(\Gamma_m X_*))\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(\Gamma_m X_*)^k\right)(I + \Gamma_k V)^{-1} + \\
&+ (I + \Gamma_k V)((\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_m X_*)^{-1}(I + \Gamma_k V)^{-1}.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\|P(\widetilde{\Delta}, S) - (I + \Gamma_k V)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_k V)^{-1}\|_2 \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant C_3(\|P(\Delta, S_0)(\Gamma_m X_*)\|_2 + \|(\Gamma_m X_*)P(\Delta, S_0)\|_2),
\end{aligned}$$

где $C_3 > 0$ — некоторая постоянная. Используя неравенства (4.14), мы заключаем, что

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - (I + \Gamma_k V)P(\Delta, S_0)(I + \Gamma_k V)^{-1}\|_2 \leqslant \frac{M_1}{k(\Omega)},$$

где $M_1 > 0$ — некоторая постоянная. Теорема доказана. □

Следствие 4.4.1. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов S и S_0:*

$$\left\| P(\sigma_{(m)}, S) + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - \sum_{k=0}^{n} P_k \right\|_2 \leqslant \frac{M_2}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n \geqslant m+1,$$

где множество $\sigma_{(m)}$ определено в (4.28) и $M_2 > 0$ — некоторая постоянная.

4.5 Асимптотическое представление аналитической полугруппы операторов

Теорема 4.5.1. *Дифференциальный оператор $-S$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathrm{L}_2[0, \omega]$. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[0, \omega] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$.*

Полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида:

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0, \omega], \tag{4.33}$$

где собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, определяются формулой (4.27).

Доказательство. Проводя такие же построения как и при доказательстве теорем 2.5.1 и 3.5.1, мы получим, что оператор $-S_0 + J_m X_*$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathrm{L}_2[0, \omega]$. При этом по теореме 4.2.2 существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что эта полугруппа подобна полугруппе $\widetilde{T} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathrm{L}_2[0, \omega]$ вида

$$\widetilde{T}(t) = T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

действующей в $\mathrm{L}_2[0, \omega] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$. Применяя теорему 1.3.1, мы получим, что полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида (4.33). Теорема доказана. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Агранович М. С. Спектральные свойства задач дифракции / М. С. Агранович // В кн.: Войтович Н. Н., Кацелембаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – М.: Наука, 1977. – С. 289-416. 8, 12, 14

2. Ахмерова Э. Ф. Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$-го порядка / Э. Ф. Ахмерова // Математические заметки. – 2011. – Т. 90, № 6. – С. 833–844. 6, 11, 18, 19, 60, 105

3. Ахмерова Э. Ф. Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов / Э. Ф. Ахмерова, Х. Х. Муртазин // Доклады АН. – 2003. – Т. 388, № 6. – С. 731–733. 6, 11, 18, 19, 60, 105

4. Баданин А. В. Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка / А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев // Алгебра и Анализ. – 2010. – Т. 22, № 5. – С. 1–48. 7

5. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Сибирский математический журнал. – 1983. – Т. 24, № 1. – С. 21–39. 6

6. Баскаков А. Г. Замена Крылова-Боголюбова в теории возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Украинский математический журнал. – 1984. – Т. 36, № 5. – С. 606–611.

7. Баскаков А. Г. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 4. – С. 555–562.

8. Баскаков А. Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 435–457.

9. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. Серия математическая. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 3–32. 6

10. Баскаков А. Г. Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова / А. Г. Баскаков, А. А. Воробьев, М. Ю. Романова // Математические заметки. – 2011. – Т. 89, № 2. – С. 190–203. 88

11. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Известия РАН. Серия математическая. – 2011. – Т. 75, № 3. – С. 3–28. 6, 30

12. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. – Воронеж.: Издательство Воронежского государственного университета, 1987. – 165 с. 6, 23, 30, 32, 34

13. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1961. – 341 с. 13

14. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с. 23, 27, 50

15. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. III / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: Мир, 1974. – 663 с. 6, 11, 15, 23, 26, 60, 88

16. Джаков П. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П. Джаков, Б. С. Митягин // Успехи математических наук. – 2006. – Т. 61, № 4. – С. 77–182. 6, 11, 17, 60

17. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1 / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – 616 с. 57, 105

18. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 738 с. 11, 23, 60

19. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 504 с. 7, 10, 13

20. Кондратьев С. К. Визуализация аттракторов для математической модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров / С. К. Кондратьев, М. В. Турбин // Вестник ВГУ, Серия Физика-Математика. – 2010. – № 2. – С. 142–163. 14

21. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев: Наукова думка, 1977. – 330 с. 18

22. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 7

23. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с. 7, 8, 14, 18

24. Савчук А. М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 897–912. 18

25. Савчук А. М. О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 6. – С. 864–884. 6, 18

26. Сидоркин А. С. Доменная структура в сегнетоэлектриках и родственные материалы / А. С. Сидоркин. – М.: Физматлит, 2000. – 233 с. 14

27. Якубович В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 720 с. 7

28. Badanin A. Spectral asymptotics for periodic fourth-order operators / A. Badanin, E. Korotyaev // Int. Math. Res. Not. – 2005. – V. 45. – P. 2775–2814. 7

29. Badanin A. Even Order Periodic Operators on the Real Line / A. Badanin, E. Korotyaev // Int. Math. Res. Not. – 2012. – V. 5. – P. 1143–1194. 7

30. Badanin A. Eigenvalue asymptotics for fourth order operators on the unit interval / A. Badanin, E. Korotyaev // arXiv: 1309. 3449. 7

31. Djakov P. Spectral triangles of Schrödinger operator with complex potentials / P. Djakov, B. S. Mityagin // Selecta Math. (N.S.). – 2003. – V. 9., № 4. – P. 495–528. 6, 11, 60

32. Engel K.-J. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Graduate texts in mathematics. / K.-J. Engel, R. Nagel. – Springer-Verlag V. 194. New York, Berlin, Heidelberg, 1999. – 609 p. 28, 61, 62, 63, 84

33. Hryniv R. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials / R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // J. Funct. Analisys. – 2006. – V. 238. – P. 27–57. 18, 19, 105

34. Kappeler T. Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schrödinger operator with singular potentials / T. Kappeler, C. Möhr // J. Funct. Analisys. – 2001. – V. 186. – P. 62–91. 18, 19, 105

35. Korotyaev E. Schrödinger operators on zigzag nanotubes / E. Korotyaev, I. Lobanov // Ann. Henri Poincare. – 2007. – V. 8. – P. 1151–1176. 7

36. McLaughlin J. R. An inverse eigenvalue problem of order four / J. R. McLaughlin // Siam J. Math. Anal. – 1976. – V. 7, № 5. – P. 646–661. 14

37. McLaughlin J. R. An inverse eigenvalue problem of order four — an infinite case / J. R. McLaughlin // Siam J. Math. Anal. – 1978. – V. 9, № 3. – P. 395–413. 14

38. Mikhailets V. Singular eigenvalue problems on the circle / V. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Functional Analysis and Topology. – 2004. – V. 10, № 3. – P. 44–53. 7, 8

39. Mikhailets V. Uniform estimates for the semi-periodic eigenvalues of the singular differential operators / V. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Functional Analysis and Topology. – 2004. – V. 10, № 4. – P. 30–57. 7

40. Molyboga V. Estimates for periodic eigenvalues of the differential operator $(-1)^m d^{2m}/dx^{2m} + V$ with V-distribution / V. Molyboga // Methods Functional Analysis and Topology. – 2003. – V. 9, № 2. – P. 163–178. 7, 8

41. Veliev O. A. On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions / O. A. Veliev // Israel Journal of Mathematics. – 2010. – V. 176. – P. 195–207. 6, 7, 8

Публикации автора по теме диссертации

42. Поляков Д. М. Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков // Вестник ВГУ. Серия Физика-Математика. – 2012. – № 1. – С. 179–181. 22

43. Поляков Д. М. Об исследовании спектральных свойств дифференциального оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков // Крымская международная математическая конференция (КММК-2013). Сборник тезисов. Т. 1. – 2013. – С. 61–62.

44. Polyakov D. M. Spectral properties of non-self adjoint differential operator of fourth order / D. M. Polyakov // The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts. – 2014. – pp. 95–96.

45. Polyakov D. M. Spectral properties of differential operator of fourth order with periodic and semi-periodic boundary conditions / D. M. Polyakov // Международная конференция "Спектральная теория и дифференциальные уравнения", посвященная 100-летию Б.М. Левитана. Сборник тезисов. – 2014. – С. 24–26.

46. Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков// Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 417–420. 22

47. Поляков Д. М. Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами / Д. М. Поляков // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 1. – С. 165–184.

48. Поляков Д. М. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 75–79.

49. Поляков Д. М. Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Алгебра и анализ. – 2015. – Т. 27, № 5. – С. 117–152. 22

50. Поляков Д. М. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с L_2 потенциалом / Д. М. Поляков // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование". Тезисы докладов. – 2015. – С. 231–233.

51. Поляков Д. М. Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка / Д. М. Поляков // Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2015). Сборник тезисов. – 2015. – С. 24–25. 22