ВОРОНЕЖСКИЙ ИНСТИТУТ МВД РОССИИ

на правах рукописи

СИТНИК СЕРГЕЙ МИХАЙЛОВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА–ЭРДЕЙИ И ИХ ОБОБЩЕНИЙ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико - математических наук

ВОРОНЕЖ — 2016

Оглавление

Введение **3**

1 Предварительные сведения и обозначения **32**

1.1 Специальные функции 32

1.2 Функциональные пространства 37

1.3 Основные интегральные преобразования 39

1.4 Операторы преобразования, связанные с дифференциальным уравнением Штурма–Лиувилля 47

1.5 Дифференциальные уравнения и операторы преобразования, связанные с операторами Бесселя 47

1.5.1 Основные классы дифференциальных уравнений с операторами Бесселя 47

1.5.2 Операторы преобразования Сонина и Пуассона. . . 48

1.5.3 Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи различных классов 50

1.6 Другие типы операторов преобразований 53

2 Классификация и свойства различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи с приложениями к теории дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах **56**

2.1 Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости 57

2.2 Интегральные операторы преобразования
Бушмана–Эрдейи второго рода 81
2.3 Унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова
и Пуассона–Катрахова 85
2.4 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах . . 89
2.4.1 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к задачам для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и лемме Копсона 89
2.4.2 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений 93
2.5 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению интегродифференциальных уравнений 95
2.5.1 Приложения операторов преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению одной пары интегродифференциальных уравнений 95
2.5.2 Решение задачи об обращении операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости с приложениями к решению соответствующих интегродифференциальных уравнений 97
2.6 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к установлению эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева 112

3 Композиционный метод построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений

с особенностями в коэффициентах 120

3.1 Общая схема композиционного метода построения ОП для решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах 120

3.2 Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи третьего рода и их обобщения 122

3.2.1 Введение 122

3.2.2 Классические интегральные преобразования 123

3.2.3 Введение о.п. в образах преобразований типа Фурье. 123

3.2.4 Случай $\varphi = x^{\alpha}$. 126

3.2.5 Сведение к функциям Лежандра 131

3.2.6 Случай cos — преобразования 145

3.2.7 Сдвиги по параметру α 160

3.2.8 Унитарность 163

3.3 Применения композиционного метода для решения интегродифференциальных уравнений 168

3.4 Расширение композиционного метода на другие классы дифференциальных операторов 182

3.4.1 B-гиперболические операторы преобразования. . . . 182

3.4.2 B-эллиптические операторы преобразования. 186

3.4.3 B–параболические операторы преобразования. . . . 188

3.4.4 Операторы сдвига по параметру типа Лаундеса. . . 189

4 Приложения метода операторов преобразования к интегральным представлениям и оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 192

4.1 Приложение метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и задаче Е.М.Ландиса 193

4.2 Приложения метода операторов преобразования для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 201

5 Некоторые приложения метода операторов преобразования и родственные задачи 217

5.1 Явное построение дробных степеней оператора Бесселя с приложениями к решению интегро–дифференциальных уравнений дробного порядка 218

5.2 Приложения обобщений неравенств Коши–Буняковского и неравенств для специальных функций к оценкам ядер интегральных операторов преобразования, сплетающих решения дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах 225

5.3 Обобщения операторов Бушмана–Эрдейи 232

Литература 236

Введение

Определение 0.1 *Пусть дана пара операторов (A, B). Оператор T называется оператором преобразования (ОП, transmutation), если выполняется соотношение*

$$T\,A = B\,T. \tag{1}$$

Соотношение (1) называется иначе *сплетающим свойством*, тогда говорят, что ОП T *сплетает* операторы A и B (intertwining operator). Для превращения (1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B, и, следовательно, T. Обычно в определение ОП закладывают также требования обратимости и непрерывности, которые являются желательными, но не обязательными условиями. В конкретных реализациях операторы A и B чаще всего (но не обязательно!) являются дифференциальными, T — интегральный линейный непрерывный оператор на стандартных пространствах.

Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры [39], [207], [185]. Следует отметить, что не существует эффективных методов проверки подобия двух конечных матриц, так как не существует эффективных способов проверки совпадения их Жордановых форм, кроме прямого вычисления.

Вместе с тем ОП *не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам*, так как сплетаемые операторы как правило являются неограниченными в естественных пространствах, к тому же обратный к ОП не обязан существовать, действовать в том же пространстве или быть ограниченным. Так что спектры операторов, сплетаемых ОП, как правило не совпадают. Кроме того, сами ОП могут быть неограниченными. Так бывает, например, в теории преобразований Дарбу, предметом которой является нахождение дифференциальных операторов преобразования (подстановок или замен) между парой дифференциальных же операторов, таким образом в этом случае все три рассматриваемых оператора являются неограниченными в естественных пространствах. При этом теория преобразований Дарбу как соответствующий раздел теории дифференциальных уравнений также вписывается в общую схему теории операторов преобразования при её расширенном понимании. Парой операторов, для которых ищется ОП, не обязаны быть только дифференциальные. В теории ОП встречаются задачи для следующих разнообразных типов операторов: интегральных, интегро–дифференциальных, дифференциально–разностных (например, типа Дункла), дифференциальных или интегро–дифференциальных бесконечного порядка (например, в вопросах, связанных с леммой Шура о дополняемости), общих линейных в фиксированных функциональных пространствах, псевдодифференциальных и операторно–дифференциальных (абстрактных дифференциальных).

Для примера кратко изложим модельную схему, иллюстрирующую использование операторов преобразования для получения формул связи между решениями возмущённого и невозмущённого уравнений, для которых доказано сплетающее свойство. Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A. При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B. Тогда, если существует ОП (1), то часто удаётся перенести свойства модельного оператора B и на A. Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором

A, то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (1), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu, g = Tf$. Поэтому, если второе уравнение с оператором B является более простым, и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из простейших применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин ***"transmutation"***, восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин "transformation" при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина, Ханкеля и другими подобными им. Кроме того, термин ***"transmutation"*** имеет в романских языках дополнительный оттенок "волшебного превращения", что довольно образно характеризует действие ОП. Приведём дословную цитату из [238]: "Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems "magical" at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation". Лучше и точнее не скажешь.

В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегродифференцирования, теории оптимального управления и динамических систем.

Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом её приложений. Особую роль методы операторов преобразования играют в теории дифференциальных уравнений различных типов. С их помощью были доказаны многие фундаментальные результаты для различных классов дифференциальных уравнений.

В развитии теории операторов преобразования можно выделить три основных периода. В первом начальном периоде становления теории операторов преобразования закладывались базовые идеи и определения, их источником была теория подобия конечных матриц [39], [207], [185], отдельные результаты по подобию операторов, а также некоторые результаты для простейших дифференциальных уравнений. Считается, что идея операторов преобразования в операторной формулировке была высказана Фридрихсом [201]. На самом деле метод операторов преобразования для получения представлений решений дифференциальных уравнений был разработан и впервые применён намного раньше в 19 веке в работах А.В.Летникова, кроме того это было и по существу первое реальное применение дробного интегродифференцирования как ОП к задачам дифференциальных уравнений [213], [304].

Второй период условно продолжался в течение 1940–1980 гг., его можно назвать классическим. В этот период были получены многочисленные результаты в теории операторов преобразования и их приложениям. Перечислим основные направления и результаты этого периода.

Методы операторов преобразования были с успехом применены в теории обратных задач, определяя обобщённое преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Гельфанда–Левитана (З.С.Агранович, В.А.Марченко [4], [121]–[127], Б.М.Левитан [98]–[105]); в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается не менее знаменитое уравнение Марченко (Б.М.Левитан [98]–[105], В.А.Марченко [4], [121]–[122], Л.Д.Фаддеев [195]–[196]); для обоих классов обратных задач операторы преобразования являются основным инструментом, так как перечисленные классические уравнения выписываются для ядер операторов преобразования, а значения ядер на диагонали восстанавливают неизвестные потенциалы в обратной задаче по спектральной функции и теории рассеяния [94]–[95], [210], [81], [142]–[143], [144], [18]. Для операторов Штурма–Лиувилля были построены ставшие классическими ОП на отрезке (Б.Я.Левин [97]) и полуоси (А.Я.Повзнер [151]). В спектральной теории были получены известные формулы следов и асимптотика спектральной функции (В.А.Марченко [121]–[122], Б.М.Левитан [98]–[105]); оценки ядер операторов преобразования, отвечающие за устойчивость обратных задач и задач рассеяния (В.А.Марченко [4], [121]–[122]); оценки решений Йоста в квантовой теории рассеяния (З.С.Агранович, В.А.Марченко [4], [121]–[122], Б.М.Левитан [98]–[105], В.В.Сташевская [179]–[180], А.С.Сохин [175]–[178]). В результате применения ОП можно сказать, что теория операторов Штурма–Лиувилля была тривиализирована до уровня простейшего уравнения с тригонометрическими или экспоненциальными решениями. Также была исследована система Дирака и другие матричные системы дифференциальных уравнений (Б.М.Левитан, И.С.Саргсян [103]).

Была развита теория обобщённых аналитических функций, которую можно трактовать как раздел теории операторов преобразования, сплетающих невозмущённые и возмущённые уравнения Коши–Римана (Л.Берс [227]–[228], С.Бергман [14], И.Н. Векуа [29], [30], Б.Боярский [21], Г.Н.Положий [152]–[154]) с приложениями в задачах механики, теории упругости и газодинамики. На основе методов операторов преобразований был создан новый раздел гармонического анализа, изучающий различные модификации операторов обобщённого сдвига и обобщённых операторных свёрток (Ж.Дельсарт [255]–[256], [261], Я.И.Житомирский [54], Б.М.Левитан [99]–[100]). Была установлена глубокая связь операторов преобразования с теоремами типа Пэли–Винера (В.В.Сташевская

[179]–[180], А.И.Ахиезер [6], Х.Шабли [243]–[246], Х.Тримеш [348]–[349]). Теория операторов преобразования позволила дать новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах (Р.Кэрролл [236]–[238], Т.Корвиндер). Нахождение ядер ОП использует существование и явный вид функций Грина или Римана для различных классов дифференциальных уравнений [172], [35], [37].

В теории нелинейных дифференциальных уравнений был разработан метод Лакса, который использует операторы преобразования для доказательства существования решений и построения солитонов [55], [56], [3], [239], также широкие применения нашли преобразования Дарбу [325], которые можно рассматривать как операторы преобразования, в которых и сплетаемые и сплетающий операторы являются дифференциальными; о связи теорий преобразования Дарбу и ОП см. обзор [8]. В квантовой физике при рассмотрении уравнения Шрёдингера и задач теории рассеяния был изучен специальный класс операторов преобразования — волновые операторы. Рассмотрение общих задач рассеяния с точки зрения ОП изложено в [195]–[196], а в работе [63] волновые операторы построены для задач теории рассеяния с потенциалом Штарка.

В самой теории ОП были обнаружены ограничения, связанные с порядком дифференциального оператора. Так, для дифференциальных операторов порядков выше третьего было показано, что классические ОП в форме Вольтерра существуют только для аналитических коэффициентов (В.И.Мацаев [130], Л.А.Сахнович [166]–[168], М.М. Маламуд [114]–[118]), а в общем случае ОП имеют более сложную структуру (А.Ф.Леонтьев [108], Ю.Н.Валицкий [25], И.Г.Хачатрян [204]–[205], М.М.Маламуд [114]–[118], А.П.Хромов [208]). Вместе с тем в пространствах аналитических функций была доказана эквивалентность дифференциальных операторов одного порядка и изучен целый ряд задач (Д.К. Фаге [188]–[194], В.А. Марченко [125]–[127], Ю.Ф. Коробейник [82]–[83], М.К.Фишман [200]).

С целью применения к теории ОП была построена теория разрешимости для известного уравнения Бианки (Д.К.Фаге [188]).

Отдельной областью применения ОП стала теория дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, особенно с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx}. \tag{2}$$

На первоначальном этапе исследований уравнений этого класса применялась пара известных ОП Сонина и Пуассона (см. определения). Как ОП эти операторы впервые были введены в работах Жана Дельсарта [255]–[258], а затем на основе идей Дельсарта их изучение продолжилось в работах Дельсарта и Лионса [259]–[260], [261],[312]–[314]. Поэтому мы будем называть (1.37)–(1.38) ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). Об операторах СПД см. также известную статью Б.М. Левитана [104].

Ж.Дельсартом на базе ОП СПД было введено фундаментальное понятие обобщённого сдвига (ООС, см. определение). Были разработаны многочисленные конструкции обобщённого гармонического анализа, основанные на определениях обобщённого сдвига и вводимых с его помощью групповых структурах. Направление обобщённых почти–периодических функций с использованием ОП типа СПД и ООС было заложено в работах Ж.Дельсарта 1938 г. [255]–[256] и продолжено Дельсартом и Лионсом в [259]–[260], [312]–[314]. Этот круг вопросов параллельно был исчерпывающе изучен в работах Б.М. Левитана 1940, и особенно 1947–1949 гг., результаты вошли в его классические монографии [99]–[101]. (Отметим неточности в статье Большой Советской Энциклопедии "Почти периодическая функция". Там имя Дельсарта не упоминается, а работы Б.М. Левитана датированы 1938 г. Насколько известно автору, первая печатная работа Б.М. Левитана на немецком языке вышла в 1940 г.). Также в работах Жана Дельсарта были впервые построены разложения по обобщённым рядам Тэйлора, справедливо названных рядами Тэйлора–Дельсарта [256], [261], [98]–[100], такие ряды изучаются до сих пор во многих работах, см., например, [290]. Следует отметить, что первоначальным источником и прототипом большинства вариантов обобщённого гармонического анализа были операторы Бесселя и связанные с ними дифференциальные уравнения.

Огромную роль конструкции ОП и ООС сыграли в теории уравнений с частными производными. ОП позволяют преобразовывать более сложные уравнения в более простые, ООС помогают в сингулярных уравнениях переносить особенность из начала в произвольную точку, а также с помощью обобщённой свёртки находить фундаментальные решения.

Здесь следует отметить, что первой фундаментальной работой, с которой начался отсчёт изучения вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, является статья М.В. Келдыша [64] (задача Е). Теория вырождающихся, смешанных, сингулярных и неклассических уравнений различных типов [183],[17],[67],[215],[171],[181],[159],[120],[235], [162],[135],[342], [169]–[170] разрабатывалась Ф. Трикоми, Е. Хольмгреном, С. Геллерстедом, М. Проттером, М. Чибрарио, Г. Фикерой, С.А. Алдашевым, А.А. Андреевым, Ф.Т. Барановским, А.В. Бицадзе, А.А. Вашариным, И.Н. Векуа, М.И. Вишиком, В.Ф. Волкодавовым, В.Н. Враговым, В.П. Глушко, Г.В. Джаяни, И.Е.Егоровым, А.Н. Зарубиным, А.М. Ильиным, Т.Ш. Кальменовым, М.В. Капилевичем, А.А. Килбасом, А.И. Кожановым, Л.Д. Кудрявцевым, П.И. Лизоркиным, О.И. Маричевым, Л.Г. Михайловым, С.Г. Михлиным, А.М. Нахушевым, Н.Я. Николаевым, С.М. Никольским, О.А. Олейник, Л.С. Парасюком, С.П. Пулькиным, Л.С. Пулькиной, Н. Раджабовым, О.А. Репиным, К.Б. Сабитовым, М.С. Салахитдиновым, А.Л. Скубачевским, М.М. Смирновым, С.Руткаускасом, С.А. Терсеновым, Ф.Трикоми, В.Е.Фёдоровым, Ф.И. Франклем, Л.И. Чибриковой, А.И. Янушаускасом и многими другими.

Особо отметим один класс уравнений с частными производными с особенностями, типичным представителем которого является B–эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1,\ldots,x_n) = f, \tag{3}$$

аналогично рассматриваются B–гиперболические и B–параболические уравнения, эта удобная терминология была введена И.А.Киприяновым [67]. Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу, продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала А. Вайнштейна (Теория GASPT — Generalized Axially Symmetric Potential Theory,[357]–[359]), Л.Берса [227]–[229] и в трудах математиков И.Е. Егорова, Я.И. Житомирского, А.А.Килбаса, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, О.И.Маричева, М.И. Матийчука, Л.Г. Михайлова, М.Н. Олевского, С.П.Пулькина, М.М. Смирнова, С.А. Терсенова, Хе Кан Чера, А.И. Янушаускаса и других. Важность уравнений из этих классов определяется также их использованием в приложениях к задачам теории осесимметрического потенциала, уравнениям Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) [47],[38] , преобразованию Радона и томографии [320],[138],[277], [335]–[337], газодинамики и акустики [227]–[229], теории струй в гидродинамике (М.И.Гуревич [44]), линеаризованным уравнениям Максвелла–Эйнштейна (А.В.Бицадзе [16]), механике, теории упругости и пластичности [48] и многим другим.

Наиболее полно весь круг вопросов для уравнений с операторами Бесселя был изучен воронежским математиком Иваном Александровичем Киприяновым и его учениками Л.А. Ивановым, А.В. Рыжковым, В.В. Катраховым, В.П. Архиповым, А.Н. Байдаковым, Б.М. Богачёвым, А.Л. Бродским, Г.А. Виноградовой, В.А. Зайцевым, Ю.В. Засориным, Г.М. Каганом, А.А. Катраховой, Н.И. Киприяновой, В.И. Кононенко, М.И. Ключанцевым, А.А. Куликовым, А.А. Лариным, М.А. Лейзиным, Л.Н. Ляховым, А.Б. Муравником, И.П. Половинкиным, А.Ю. Сазоновым, С.М. Ситником, В.П. Шацким, В.Я. Ярославцевой; основные результаты этого направления представлены в [67]. Для описания классов решений соответствующих уравнений И.А. Киприяновым были введены и изучены функциональные пространства [68], позднее названные его именем (см. монографии Х. Трибеля [184], Л.Д. Кудрявцева и С.М. Никольского [88], в которых пространствам Киприянова посвящены отдельные параграфы). Задачи для операторно–дифференциальных (абстрактных) уравнений вида (3), берущие начало в известной монографии [235], рассматривали А.В. Глушак [40]–[42], С.Б. Шмулевич и другие. Интересные результаты по изучению псевдодифференциальных операторов на основе ОП СПД были получены В.В. Катраховым [69], они также изложены в специально переработанном Р. Кэрролом виде в отдельной главе в [237].

Рассматривались также ОП для многочисленных обобщений оператора Бесселя. Важным обобщением операторов Сонина–Пуассона–Дельсарта являются ОП для гипербесселевых функций. Теория таких функций была первоначально заложена в работах Куммера и Делерю. Полное исследование гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений для них и соответствующих операторов преобразования было исчерпывающе проведено в работах И. Димовски и его учеников [262], [263]–[264]. Соответствующие ОП заслуженно получили в литературе названия ОП Сонина–Димовски и Пуассона–Димовски, они также изучались в работах ученицы И. Димовски — В. Киряковой [263]–[264],[297]–[301]. В теории гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразования для них центральную роль играет знаменитое интегральное преобразование Обрешкова, введённое болгарским математиком Н. Обрешковым. Это преобразование, ядро которого выражается в общем случае через G–функцию Майера, является одновременным обобщением преобразований Лапласа, Меллина, синус– и косинус преобразований Фурье, Ханкеля, Майера и других классических интегральных преобразований. Различные формы гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразований для них, а также частные случаи преобразования Обрешкова многократно впоследствии переоткрывались. По мнению автора, преобразование Обрешкова, наряду с преобразованиями Фурье, Меллина и Лапласа относится к небольшому числу фундаментальных, из которых, как из кирпичиков, складываются многие другие преобразования, а также основанные на них конструкции и приложения.

Вместе с тем были построены аналогичные теории и для некоторых других модельных операторов, например таких [236]–[238], [218]–[219]:

$$A = \frac{1}{v(x)}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d}{dx}, \tag{4}$$

$$v(x) = \sin^{2\nu+1} x, \operatorname{sh}^{2\nu+1} x, (e^x - e^{-x})^{2\nu+1}(e^x + e^{-x})^{2\mu+1}.$$

Важность операторов A вида (4) для теории заключается в том, что по знаменитой формуле Гельфанда они представляют радиальную часть оператора Лапласа на симметрических пространствах [206]. При этом оператор Бесселя получается при выборе в (4) $v(x) = x^{2\nu+1}$. Другим модельным оператором, для которого построены ОП, является оператор Эйри $D^2 + x$, рассматривался также его возмущённый вариант, связанный с эффектом Штарка из квантовой механики [63]. Были изучены операторы сдвига по спектральному параметру Векуа–Эрдейи–Лаундеса [317]–[319].

К третьему современному периоду развития теории ОП можно отнести работы с 1990–х годов и до настоящего времени, за этот период были получены и продолжают появляться многие важные исследования, см., например, обзоры [129],[240],[28]–[29],[46]. Перечислим некоторые из них. Продолжено развитие теории обобщённых аналитических функций (А.П.Солдатов [173], С.Б.Климентов [73]–[77], В.В.Кравченко [305]). Были найдены приложения операторов преобразования к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди [112],[118],[66], построению различных конструкций обобщённого сдвига и основанным на них обобщённых вариантов гармонического анализа (А.Д.Гаджиев, В.Гулиев, С.С.Платонов [148]–[150], Л.Н.Ляхов, Э.Л.Шишкина [340],[211]–[212], а также [247]). Продолжилось применение ОП и родственных методов в теории обратных задач и теории рассеяния [161], [242],[331],[214]. Для дифференциальных уравнений продолжается развитие метода Дарбу и его модификаций (В.Б.Матвеев [325], А.Б.Шабат), рассмотрены новые классы задач для решений с существенными особенностями на части границы во внутренних или угловых точках (В.В.Катрахов [58]–[61], И.А.Киприянов [71]–[72]), получены точные оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений (В.З.Мешков [131]–[132], [3]). Отдельной тематикой стало использование ОП при исследовании различных операторов дробного интегродифференцирования (И.Димовски, В.Кирякова [262], [263]–[264],[297]–[301], [220], Н.А.Вирченко [31],[354]–[355], а также [225]). Было продолжено с использованием методов ОП изучение сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов (В.В.Катрахов [58]–[61], И.А.Киприянов [71]–[72], Л.Н.Ляхов [112]–[113], О.А.Репин [162]), операторных уравнений (А.В.Глушак [40]–[42], В.Е.Фёдоров [198]–[199]). Уравнения с оператором Бесселя и связанные с ними вопросы изучают А.В. Глушак [40]–[42], В.С. Гулиев, Л.Н. Ляхов [112]–[113],[323]–[324], Л.С.Пулькина [160], К.Б.Сабитов [164], В.В.Кравченко [306]–[310] со своими коллегами и учениками, а также А.Б.Муравник (дифференциально–функциональные уравнения [136]), В.В.Волчков [356], И.П.Половинкин (теоремы о среднем для уравнений с операторами Бесселя [324]), Э.Л.Шишкина (B — гиперболические потенциалы и обобщённые средние [340],[211]–[212]), В.Д.Репников (стабилизация решений) и другие.

В последнее время также разработаны эффективные численные методы для применения операторов преобразования при расчётах решений дифференциальных уравнений, их собственных функций и спектральных характеристик (В.В.Кравченко, С.Торба [306]–[310]). Отдельный класс задач составляют задачи типа Дирихле–Нейман, Нейман–

Дирихле, при которых оператор преобразования действует на краевые или начальные условия, сохраняя дифференциальное выражение; такие задачи нашли важные приложения в механике (О.Э.Яремко [7], [216]–[217]). Достаточно законченные модификации гармонического анализа для операторов Бесселя построены в работах С.С. Платонова [148]–[150], для возмущённого оператора типа Бесселя с переменными коэффициентами — в работах Х. Тримеша [350]–[352], в последнее время активно создаётся гармонический анализ для дифференциально–разностных операторов типа Дункла [266]–[268],[333]–[334],[353],[265], [279]–[280],[332] на основе соответствующих обобщений операторов СПД. Наличие благодаря ОП соответствующих ООС позволяет также определить обобщённую свёртку, новые алгебраические и групповые структуры, рассматривать различные задачи аппроксимации функций [224]. Идеи М.К.Фаге, развитые для уравнения Бианки в связи с построением ОП для дифференциальных уравнений высоких порядков, нашли своё продолжение в исследовании более общих уравнений в работах В. И. Жегалова, А. Н. Миронова, Е.А.Уткиной [52]–[53]. В теории уравнений дробного порядка появились работы, которые можно трактовать как метод ОП для представления решений уравнений дробного порядка через решения уравнений целого порядка (А.Псху, Прусс, А.Н.Кочубей). ОП находят применения в теории преобразования Радона и математической томографии [138], [206], [277], [335]–[337], а также при разложении функций в различные ряды по специальным функциям [290]. В работах В.А.Марченко продолжилось применение ОП к квантовой теории [128]–[129]. Теория ОП также связана с вопросами факторизации дифференциальных операторов (Л.М.Беркович [15], А.Б.Шабат). При изучении групповых свойств дифференциальных уравнений важное значение имеет лемма Шура о дополняемости, которую можно трактовать как существование формального ОП между оператором дробного интегрирования и некоторым дифференциальным оператором бесконечного порядка, подобная задача рассматривалась ещё в учебнике Н.Бурбаки [22]. В последних работах Р.Кэрролла была сделана попытка построения "квантовых" ОП для q — дифференциальных операторов [241]. Разные задачи, использующие идеи ОП или родственные методы также рассматривались в [9],[5], [202], [284], [290],[326],[339].

Возможность, чтобы исходная и преобразованная функции принадлежали различным пространствам, что принято подчёркивать использованием различных обозначений для переменных, позволяет включить в общую схему ОП все классические интегральные преобразования: Фурье, Лапласа (на самом деле Петцваля), Меллина, Ханкеля, Вейерштрасса, Конторовича–Лебедева, Фока, Обрешкова, Станковича и другие [10]–[11],[145]. При вычислении интегралов, необходимых для реализации метода ОП, фундаментальные приложения нашла теорема Слейтер–Маричева, соединившая методы преобразования Меллина с теорией гипергеометрических функций [119], [155]. В общую схему ОП также включаются конечные интегральные преобразования Г.А. Гринберга [43]. Продолжилось исследование функций Грина и Римана, которые используются в методе ОП [109], [120], [172], . Существуют связи ОП с теорией дробных (квадратичных) интегральных преобразований Фурье [330] и Ханкеля. Решение В.А.Чернятиным знаменитой задачи о нахождении необходимых и достаточных условий на потенциалы для обоснования метода Фурье для волнового уравнения с переменным коэффициентом открывает перспективы использования этого метода для оценки ядер в теории ОП [209].

Коммутирующие операторы любой природы также подходят под определение ОП. Наиболее близко к духу и задачам теории ОП относится изучение операторов, коммутирующих с производными. Сами ОП в этом случае зачастую представляются формальными рядами, псевдо–дифференциальными операторами или дифференциальными операторами бесконечного порядка. Описание коммутантов напрямую связано с описанием всего семейства ОП для заданной пары по его единственному представителю. В этом классе задач фундаментальные приложения нашла теория операторных свёрток, особенно свертки Берга–Димовски (Берг, Димовски [262], [230]). Начинают находить приложения в теории ОП и результаты для коммутирующих дифференциальных операторов, восходящие к классическим работам Бёчнела и Чонди (J.L. Burchnall, T.W. Chaundy).

Важным разделом теории ОП стал специальный класс — ОП Бушмана–Эрдейи (см. определения). Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП СПД и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока. Интегральные операторы указанного вида с функциями Лежандра в ядрах впервые встретились в работах E.T. Copson по уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу в конце 1950-х годов [250]–[252]. Впервые подробное изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960–х годах в работах Р. Бушмана [233]–[234] и А. Эрдейи [272]–[276]. Операторы Бушмана–Эрдейи или их аналоги изучались также в работах T.P. Higgins [287], Ta Li [346]–[347], E.R. Love [315]–[316], G.M. Habibullah, K.N. Srivastava, Динь Хоанг Ань [51], В.И. Смирнова, Б.Рубина, Н.А. Вирченко, И. Федотовой [354], А.А. Килбаса, О.В. Скоромник [66],[296] и др. При этом в основном изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения. Эти результаты частично упомянуты в монографии [165], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается, за исключением одного набора формул композиции, см. также [28]–[29],[66],[66]. Некоторые результаты для особого выбора пределов были добавлены в английское расширенное издание монографии [338].

Термин "операторы Бушмана–Эрдейи" как наиболее исторически оправданный был введён автором в [66],[6], впоследствии он использовался и другими авторами. Ранее в [165] встречался предложенный О.И. Маричевым термин "операторы Бушмана". В теории преобразования Радона и математической томографии также используется термин "операторы Чебышёва–Гегенбауэра" [277], [335]–[337]. Наиболее полное изучение операторов Бушмана–Эрдейи на наш взгляд было проведено в работах автора в 1980–1990-е годы [6], [66], [2],[4],[65],[?],[68]–[72] и затем продолжено в [7],[14],[17],[22],[28]–[29],[46]. При этом необходимо отметить, что роль операторов Бушмана–Эрдейи как ОП до работ автора [6], [66], [2],[4],[65],[?],[68]–[72] вообще ранее нигде не отмечалась и не рассматривалась.

Из относительно недавних работ, в которых изучались операторы Бушмана–Эрдейи как интегральные операторы, отметим работы Н.А. Вирченко [354]–[355], А.А. Килбаса, Б.Рубина, А.В.Глушака и их учеников. Так в работах А.А. Килбаса и О.В. Скоромник [296],[66] рассматривается действие операторов Бушмана–Эрдейи в весовых пространствах Лебега, а также многомерные обобщения в виде интегралов по пирамидальным областям. В монографии Н.А. Вирченко и И. Федотовой [354] вводятся некоторые обобщения стандартных функций Лежандра, а затем рассматриваются напоминающие операторы Бушмана–Эрдейи, но не содержащие их как частные случаи, интегральные операторы с введёнными функциями в ядрах на всей положительной полуоси (операторы Бушмана–Эрдейи определены на части положительной полуоси). В работах Б.Рубина среди других результатов описаны множества определения и образы интегральных операторов Бушмана–Эрдейи (Гегенбауэра–Чебышёва) в некоторых функциональных пространствах [277], [335]–[337] с приложениями результатов к теории преобразования Радона и томографии. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи используются в недавних работах А.В.Глушака [41]–[42].

Важность операторов Бушмана–Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными [165]: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике (см. лемму Копсона выше), теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига [320],[138], [254], [277], [335]–[337] действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана–Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями внутри области, доказательству вложения пространств И.А. Киприянова в весовые пространства С.Л. Соболева, установлению связей между операторами преобразования и волновыми операторами теории рассеяния, обобщению классических интегральных представлений Сонина и Пуассона и операторов преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены существенные части монографий [235]–[239],[14],[281],[312],[7],[216]–[217], кроме того различные вопросы ОП рассматриваются также в [165],[248]–[249],[282]–[283] и целом ряде других известных монографий. К сожалению, на русском языке нет книг, полностью посвящённых ОП, таких, как содержательные книги Роберта Кэрролла на английском [235]–[239]. Но следует безусловно отметить монографию Д.К. Фаге и Н.И. Нагнибида [188]. В этой монографии практически никак не отражены известные к тому времени результаты теории ОП, что полностью компенсируется изложением в основном собственных результатов авторов по одной из самых трудных задач теории ОП — их построении для дифференциальных операторов высоких порядков с переменными коэффициентами. Кроме того, в эту монографию вошли и многие другие вопросы: решение задачи об операторах, коммутирующих с производными в пространствах аналитических функций (включая исправление ошибочных результатов Дельсарта и Лионса), создание законченной теории разрешимости для уравнения Бианки, теория операторно–аналитических функций (первоначально возникшая в работах В.А. Марченко [125]–[127]), исследование операторов дифференцирования, интегрирования и корней из них в пространствах аналитических функций.

Таким образом, методы теории ОП и связанные с ними задачи в той или иной степени применялись в работах многих математиков. Перечислим некоторых из них: A.I. Aliev, H. Begehr, J. Betancor, A. Boumenir, B. Braaksma, L. Bragg, R. Carroll, H. Chebli, I. Dimovski, C. Dunkl, J. Delsarte, R. Gilbert, V. Hristov, V. Hutson, G.K. Ka1isch, S.L. Kalla, T.H. Koornwinder, V. Kiryakova, J. Lőffstrőm, J. Lions, J.S. Pym, B. Rubin, F. Santosa, J. Siersma, H.S.V. de Snoo, K. Stempak, V. Thyssen, K. Trimèche, M. Voit, Vu Kim Tuan, Агранович З.С., Андрощук А.А., Баскаков А.Г., Бритвина Л.Е., Валицкий Ю.Н., Волк В.Я., Волчков В.В., Гаджиев А.Д., Глушак А.В., Горбачук М.Л., Гохберг И.Ц., Гулиев В.С., Гусейнов И.М., Житомирский Я.И., Иванов Л.А., Ерёмин М.С., Карп Д.Б., Катрахов В.В., Качалов А.П., Килбас А.А, Киприянов И.А., Ключанцев М.И., Кононенко В.И., Коробейник Ю.Ф., Кравченко В.В., Крейн М.Г., Кулиш П.П., Кушнирчук И.Ф., Лаптев Г.И, Левин Б.Я., Левитан Б.М., Леонтьев А.Ф., Линчук Н.Е., Линчук С.С., Ляхов Л.Н., Ляховецкий Г.В., Маламуд М.М., Марченко В.А., Мацаев В.И., Муравник А.Б., Нагнибида Н.И., Нижник Л.П., Олевский М.Н., Платонов С.С., Повзнер А.Я., Рубин Б., Рофе–Бекетов Ф.С., Сабитов К.Б., Сахнович Л.А., Сохин А.С., Сташевская В.В., Торба С.М., Фаддеев Л.Д., Фаге Д.К., Фишман К.М., Хачатрян И.Г., Хромов А.П., Шишкина Э.Л., Шмулевич С.Д., Ярославцева В.Я. Разумеется, этот список не полон и может быть существенно расширен.

Из проведённого анализа следует, что метод операторов преобразования является эффективным методом в теории дифференциальных уравнений и смежных разделах математики, ему посвящено большое число работ и на его основе решаются многочисленные классы задач. Таким образом, тема диссертационного исследования *"Применение операторов преобразования Бушмана–Эрдейи и их обобщений в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах"* является актуальной для теории дифференциальных уравнений и их приложений.

Несмотря на вышеизложенное, в теории операторов преобразования остаются существенные пробелы и многие нерешённые задачи. Так, для операторов преобразования, сплетающих дифференциальные операторы или решения дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, включая дифференциальные операторы Бесселя, отсутствует подробная классификация с описанием основных свойств. Подробно изучены и описаны в литературе свойства и приложения простейшего класса ОП Сонина и Пуассона, но отсутствует систематическое изложение и доказательства многих свойств для их важных обобщений — операторов Бушмана–Эрдейи. До работ автора не отмечалось вообще, что интегральные операторы Бушмана–Эрдейи являются ОП для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Не существует общих схем для построения ОП нужных классов, доведённых до возможности построения на их основе явных формул, сплетающих решения различных дифференциальных уравнений. Практически отсутствуют работы, вскрывающие связь ОП с основными конструкциями дробного исчисления. Не рассматривались возможные применения ОП к доказательствам вложений функциональных пространств, таких, как пространства С.Л.Соболева и И.А.Киприянова, в том числе энергетических пространств для сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя по одной или нескольким переменным. Для операторов второго порядка с переменными коэффицентами при построении ОП использовались методы, дающими грубые оценки ядер ОП с неопределёнными постоянными, неточные требования на коэффициенты дифференциальных уравнений приводили к сужению их классов, например классов допустимых потенциалов для задач Штурма–Лиувилля и их обобщений для дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Методы ОП практически не применялись к получению точных оценок для решений дифференциальных уравнений, например, в таких задачах, как известная задача Е.М.Ландиса. Также сложилась парадоксальная ситуация, когда дробные степени оператора Бесселя, которые используются во многих работах, определяются исключительно неявно в терминах преобразования Фурье–Бесселя или Ханкеля, а при этом отсутствуют формулы для их явного определения в интегрального виде, хотя именно с таких представлений начиналась теория классических дробных интегралов Римана-Лиувилля. Многие простые и естественные конструкции ОП для стандартных пар дифференциальных операторов не построены в явном виде. Также не вводились и не рассматривались общие схемы для оценок ядер ОП в широко используемых функциональных пространствах, требующие уточнений и обобщений классических неравенств. Полученные в последнее время точные неравенства для многих специальных функций не находили применения для оценки ядер ОП.

Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы является дальнейшая разработка метода операторов преобразования и его приложения в теории дифференциальных уравнений. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи:

- Приложения метода операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к решению ряда задач для дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.
- Получение результатов об эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева с использованием операторов преобразования.

- Разработка и систематическое приложение общего композиционного метода построения новых классов операторов преобразования.

- Получение формул факторизации для операторов преобразования Бушмана–Эрдейи через весовые интегральные преобразования с приложениями к представлению решений дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя.

- Получение явных интегральных представлений для дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложения к решению дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

- Разработка метода оценок решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе применения метода операторов преобразования и точных неравенств для специальных функций.

- Приложение теории операторов преобразования к получению оценок экспоненциального убывания решений уравнений с частными производными эллиптического и ультрагиперболического типов.

- Приложения обобщений неравенства Коши–Буняковского к оценке ядер операторов преобразования.

Методы исследования.

В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, теории специальных функций, теории неравенств, теории операторов преобразования, теории интегральных преобразований, теории дробного интегродифференцирования.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Изучены новые свойства, введены новые классы, произведена классификация операторов преобразования Бушмана–Эрдейи и рассмотрены их приложения к решению ряда задач для дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

2. С использованием операторов преобразования Бушмана–Эрдейи решена проблема об эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева.

3. Доказаны формулы обращения для различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи в стандартных функциональных пространствах и с их использованием получены формулы связи решений для дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

4. Предложен новый общий композиционный метод построения различных классов операторов преобразования и получения на его основе формул соответствия между классами решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

5. Получены формулы факторизации для операторов преобразования Бушмана–Эрдейи через весовые интегральные преобразования Фурье и Ханкеля с приложениями к представлению решений дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя.

6. Получены новые интегральные представления для различных модификаций дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложения к решению дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

7. Разработан метод для оценок решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сингулярными потенциала-

ми на основе применения метода операторов преобразования и точных неравенств для специальных функций.

8. Рассмотрены приложения теории операторов преобразования к получению оценок экспоненциального убывания решений уравнений с частными производными эллиптического и ультрагиперболического типов, выделены классы дифференциальных уравнений, для которых известная проблема Е.М.Ландиса имеет положительное решение.

9. Разработан метод оценок ядер операторов преобразования в формулах связи решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах на основе уточнений неравенства Коши–Буняковского.

Практическая и теоретическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться в теории дифференциальных уравнений, включая обыкновенные, в частных производных и интегродифференциальные уравнения, теории оптимального управления, при рассмотрении стохастических методов для динамических систем. Они могут также найти приложения в задачах компьютерной томографии и преобразования Радона, теории нелинейных уравнений и солитонов, изучении обратных задач и теории рассеяния, задачах фильтрации, геофизики, трансзвуковой газодинамики и теоретической механики.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались более чем на 70 всесоюзных, всероссийских и международных конференциях за период 1983–2016 гг. В том числе на конференциях (начиная с 2000 г.): Международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти академика А. В. Бицадзе, (Москва, 2016); Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения–VI посвящённой 75-летию проф. С.Г. Самко. (Ростов–на-Дону, 2016); Международной конференции "Колмогоровские чтения-VII". "Общие проблемы управления и их приложения"(Тамбов, 2015); 8 международном научном семинаре AMADE (Analytic Methods of Analysis and Differential Equations) Памяти Анатолия Александровича Килбаса, (Минск, 2015); XII Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования". (Владикавказ,2015); Крымской международной математической конференции, (Украина, Судак, 2013); Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения (Белгород, 2013); Международной научно–практической конференции «Фундаментальное образование xxi века: наука, практика, методика». (Украина, Харьков, 2013); Международной научно–практической конференции «Математика в сучасному технічному університеті», (Украина, Киев, 2013); XVII международная научно–методическая конференция учёных Украины, России, Республики Беларусь, Узбекистана и Литвы "Методы совершенствования фундаментального образования в школах и вузах". (Украина, Севастополь, 2012); Международном научном семинаре: Аналитические методы Анализа и дифференциальных уравнений. AMADE (Analytic Methods of Analysis and Differential Equations), (Беларусь, Минск, 2012); Spectral theory and differential equations, International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday. (Украина, Харьков, 2012); Международной конференции: "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения Посвящена памяти Николая Карапетовича Карапетянца (Ростов-на-Дону, 2012); Международной научная конференция "Комплексный Анализ и его приложения к дифференциальным уравнениям и теории чисел". (Белгород, 2012); XIX международная научно–техническая конференция "Прикладные задачи математики и механики (Украина, Севастополь, 2011); International

conference dedicated to the 70th anniversary of A.F.Grishin. V.N.Karazin Kharkiv National University, B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. (Украина, Харьков, 2011); Международном семинару "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения". (Ростов–на–Дону, 2011); Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения-XXI. Современные методы теории краевых задач" . (Воронеж, 2010); Воронежской зимней математической школе, (Воронеж, 2010); Российско–Китайском симпозиуме «Комплексный анализ и его приложения» (Белгород, 2009); Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ–2009,(Белоруссия, Минск, 2009); Международном Российско–Абхазском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы Анализа и информатики". (Нальчик, 2009); Международной школае–семинаре по геометрии и анализу памяти Николая Владимировича Ефимова. (Абрау-Дюрсо, 2008); Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования посвящённая 85–летию Л.Д. Кудрявцева. (Москва, 2008); Международной конференции "Анализ и особенности посвящённая 70–летию Владимира Игоревича Арнольда. (Москва, 2008); Всероссийской конференции «Теория операторов. Комплексный анализ и математическое моделирование» (посвящённая 70-летию Юрия Федоровича Коробейника). (Волгодонск, 2006); Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы посвящённой 103–летию со дня рождения И.Г. Петровского. (Москва, 2004); Международном
Российско–Казахском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". (Нальчик, 2004); Bunyakovsky International Conference. Международная конференция, посвящённая двухсотлетию со дня рождения академика Виктора Яковлевича Буняковского, (Киев, 2004); Международной конференции "Функциональ-

ные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования". посвящённой 80–летию члена–корреспондента РАН, профессора Льва Дмитриевича Кудрявцева. (Москва, 2003); 11-я Саратовская зимняя школа, посвящённая памяти выдающихся профессоров МГУ Н.К. Бари и Д.Е. Меньшова. Современные проблемы теории функций и их приложения. (Саратов, 2002); Conference in Mathematical Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's Sixtieth Birthday. (Sweden, 1996), а также на ряде научных семинаров.

Публикации.

По теме диссертации опубликованы 151 работа, из них 27 статей, опубликованных в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, а также материалов и тезисов докладов на международных и всероссийских научных конференциях. Из совместных статей [1], [5], [7]–[8], [12]–[13], [15]–[16], [18], [20]–[21], [23]–[27] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем диссертации.

Диссертация изложена на 307 страницах и состоит из введения, пяти глав и списка цитируемой литературы, включающего 510 наименований.

Приведём краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе "Предварительные сведения"изложены основные определения, обозначения и используемые в дальнейшем результаты по специальным функциям, функциональным пространствам, основным интегральным преобразованиям, операторам преобразования, связанным с дифференциальным уравнением Штурма–Лиувилля, дифференциальным уравнениям и операторам преобразования, связанным с операторами Бесселя.

Во второй построена теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения к теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Название "*операторы Бушмана–Эрдейи*" было предложено автором, оно становится общепринятым. Интегральные уравнения с подобными операторами рассматривались с середины 1950–х годов, автором было впервые замечено, что операторы Бушмана–Эрдейи являются операторами преобразования для дифференциального выражения Бесселя и изучены их специальные свойства именно как операторов преобразования. Частными случаями операторов преобразования Бушмана–Эрдейи являются известные классические операторы преобразования Сонина и Пуассона, а их обобщениями являются операторы преобразования Сонина–Димовски и Пуассона–Димовски для гипербесселевых уравнений и функций.

Операторы Бушмана–Эрдейи имеют многочисленные модификации. Автором предложена удобная классификация их различных вариантов. Операторы Бушмана–Эрдейи первого рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра первого рода. Их предельным случаем являются операторы нулевого порядка гладкости, играющие важную роль в различных приложениях. Операторы Бушмана–Эрдейи второго рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра второго рода. Комбинация операторов первого и второго родов приводит к операторам Бушмана–Эрдейи третьего рода. При специальном выборе параметров они сводятся к унитарным операторам преобразованиям, которые автор назвал унитарными операторами преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова, в честь Валерия Вячеславовича Катрахова, начавшего их изучение.

В третьей главе излагается принадлежащий автору композиционный метод построения операторов преобразования, основанный на использовании весовых композиций классических интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах. Этот метод позволяет воспроизвести не только все известные ранее явные конструкции операторов преобразования, но и построить много новых примеров для различных классов операторов преобразования. В частности, обобщая терминологию Р. Кэрролла, определяются и строятся классы B–гиперболических, B–эллиптических и B–параболических операторов преобразования. Подобные названия для соответствующих классов сингулярных уравнений с операторами Бесселя были введены И.А. Киприяновым. Другим приложением композиционного метода являются новые формулы факторизации операторов преобразования Сонина–Пуассона и Бушмана–Эрдейи через классические интегральные преобразования Ханкеля, синус– и косинус–преобразования Фурье.

В четвёртой главе рассматриваются задачи построения операторов преобразования для дифференциального оператора Бесселя, возмущённого переменным потенциалом с возможными особенностями в начале координат. Это классическая задача, которой ранее были посвящены многие работы. Автором замечено, что в популярные схемы решения этого класса задач можно внести две новые идеи. Во–первых, входящая в доказательства основная специальная функция гипергеометрического типа может быть упрощена и выражена через более простую функцию Лежандра, что упрощает доказательства и делает известные оценки более точными, позволяя заменить в них неопределённые постоянные на явно вычисляемые. Во–вторых, кроме двух используемых ранее способов расстановки пределов в интегральных уравнениях предлагается рассмотреть ещё два, которые ранее не встречались. Это позволяет в некоторых случаях расширить класс допустимых сингулярных потенциалов.

В заключительной пятой главе изложены результаты, в основном полученные в работах автора . Следует отметить, что как в этой, так и в предыдущих главах широко используются многие специальные функции. Для их эффективного применения автором решён целый ряд задач, содержащих различные свойства и оценки специальных функций. В данной главе по необходимости кратко приведено решение ряда задач, которые связаны с рассмотренными ранее операторами преобразования и могут быть использованы для получения дальнейших результатов. В первом пункте проводится построение дробных степеней оператора Бесселя в явном интегральном виде, ранее эти степени вводились только неявно в образах преобразования Ханкеля. Для дробных степеней оператора Бесселя построена также их резольвента. Во втором пункте намечен принадлежащий автору метод уточнения классического неравенства Коши–Буняковского для дискретного и интегрального случаев на основе использования абстрактных средних значений. Полученный набор уточнений интегрального неравенства Коши–Буняковского предлагается использовать для оценки ядер операторов преобразования различных типов, а уточнения дискретного варианта этого неравенства — для оценки приближённых методов вычисления ядер операторов преобразования. В третьем заключительном пункте приводятся некоторые обобщения операторов Бушмана–Эрдейи, изученных во второй главе, со специальными функциями более общего вида в качестве ядер.

Глава 1

Предварительные сведения и обозначения

В работе используются стандартные обозначения для числовых множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.1 Специальные функции

В этом пункте даны краткие определения и пояснения для специальных функций, которые использованы в работе, следуя монографиям и справочникам [1], [10]–[12], [111], [321]–[322], [186], [221], [156], [328].

Функции Бесселя, названные в честь немецкого астронома Фридриха Бесселя, определяются как решения дифференциального уравнения Бесселя:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0,$$

где порядок α — произвольное комплексное число.

Функциями Бесселя первого рода, обозначаемыми $J_\alpha(x)$, являются решениями, конечными в точке $x = 0$ при целых или неотрицательных α. Можно определить эти функции с помощью разложения в ряд Тейлора около нуля, или в более общий степенной ряд при нецелых α:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

Если α не является целым числом, функции $J_\alpha(x)$ и $J_{-\alpha}(x)$ линейно независимы и, следовательно, являются решениями уравнения. Но если α целое, то верно следующее соотношение:

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x).$$

Оно означает, что в этом случае функции линейно зависимы. Тогда вторым решением уравнения станет функция Бесселя второго рода — *функция Неймана*, то есть решение $N_\alpha(x)$ уравнения Бесселя, бесконечное в точке $x = 0$. Эта функция связана с $J_\alpha(x)$ следующим соотношением:

$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

где в случае целого α берётся предел по α, вычисляемый, например, с помощью правила Лопиталя. Функции Неймана также называются функциями Бесселя второго рода. Линейная комбинация функций Бесселя первого и второго родов являет собой полное решение уравнения Бесселя:

$$y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 N_\alpha(x).$$

Часто также используется обозначение $N_\alpha(x) = Y_\alpha(x)$.

Модифицированные функции Бесселя, или функции Бесселя мнимого аргумента.

Так называются функция

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(x)$$

и *функция Макдональда*

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)} \left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right], \nu \notin \mathbb{Z}.$$

В случае целого $\nu \in \mathbb{Z}$ функция Макдональда вычисляется предельным переходом по индексу с помощью правила Лопиталя.

Функции Ганкеля (Ханкеля) или функции Бесселя третьего рода — это линейные комбинации функций Бесселя первого и второго родов и, следовательно, также решения уравнения Бесселя. Названы в честь немецкого математика Хермана Ханкеля.

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$$

— функция Ганкеля первого рода;

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z)$$

— функция Ганкеля второго рода. Функции Ганкеля с индексом 0 являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца. Представление функциями Бесселя первого рода:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i}J_\nu(z)}{i\sin(\nu\pi)},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{\nu\pi i}J_\nu(z)}{-i\sin(\nu\pi)}.$$

Отметим, что полезные свойства функций Бесселя с приложениями в аналитической теории чисел получены в работах Н.В.Кузнецова [89]–[90].

Гипергеометрические функции , см. также [223], [226],

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется как сумма гипергеометрического ряда при $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$

$$F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$c \neq 0, -1, -2, ..., \quad (a)_k = \prod_{k=1}^{n} (a + k - 1),$$

а при $|z| > 1$ – как её аналитическое продолжение.

Обобщённые функции гипергеометрического типа рассматривались в [343],[36],[269], [278],[291]

Функции Миттаг–Лефлера, см. [49],[12],[286], [301]–[302].

Мы используем определение этой функции в виде ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \;\; z \in \mathbb{C},\; \alpha, \beta \in \mathbb{C},\; Re(\alpha) > 0,\; Re(\beta) > 0. \tag{1.1}$$

Функция была введена Гёстой Миттаг–Лефлером в 1903 г. для $\alpha = 1$ и А.Виманом в 1905 г. в общем случае. Первыми приложениями этих функций у Миттаг–Лефлера и Вимана были приложения в ТФКП (нетривиальные примеры целых функций с нецелыми порядками роста и обобщённые методы суммирования). Самым известным применением функций Миттаг–Лефлера в теории интегродифференциальных уравнений и дробном исчислении является тот факт, что через них в явном виде выражается резольвента дробного интеграла Римана–Лиувилля по знаменитой формуле Хилле–Тамаркина–Джрбашяна [288],[271],[165],[157]. В виду многочисленных приложений к решению дифференциальных уравнений дробного порядка эта функция была названа в [285] "*Королевской функцией дробного исчисления*".

Функции Райта [32] являются непосредственными обобщениями функций Миттаг–Лефлера и определяются в виде рядов, аналогичным (1.1), но с произвольным конечным числом гамма–функций в числителе и знаменателе дроби для общего члена ряда.

G — функции Майера [270],[341]. Общее определение G–функции Майера дается следующим интегралом в комплексной плоскости, то есть они по существу определяются в образах преобразования Меллина:

$$G^{m,n}_{p,q}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \;\middle|\; z\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - s)}\, z^s\, ds.$$

Это интеграл так называемого типа Меллина–Барнса и его можно рассматривать как обратное преобразование Меллина. Определение выполняется при следующих предположениях: $0 \leqslant m' \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, $a_k - b_j \neq 1, 2, 3, ...$ для $k = 1, 2, ..., n$ и $j = 1, 2, ..., m$, что означает, что никакие полюса $\Gamma(b_j - s)$, $j = 1, 2, ..., m$, не совпадают ни с какими полюсами $\Gamma(1 - a_k + s)$, $k = 1, 2, ..., n$, $z \neq 0$.

Функции Фокса [292]. H–функцию ввел Чарльз Фокс в 1961 г. H–функция также определяется с помощью типа интеграла Меллина–Барнса в образах преобразования Меллина:

$$H(x) = H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n}\left[z\middle|\begin{pmatrix}(a_p, A_p)\\(b_q, B_q)\end{pmatrix}\right] =$$

$$= H_{p,q}^{m,n}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_1, A_1) & (a_2, A_2) & \dots & (a_p, A_p)\\(b_1, B_1) & (b_2, B_2) & \dots & (b_q, B_q)\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j + B_j s)\right)\left(\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1 - a_j - A_j s)\right)}{\left(\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1 - b_j - B_j s)\right)\left(\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j + A_j s)\right)} z^{-s}\, ds.$$

Здесь пустое произведение всегда интерпретируется как единица; $m, n, p, q \in \mathbb{N}_0$, $0 \leqslant n \leqslant p$, $1 \leqslant m \leqslant q$, $A_i, B_j \in \mathbb{R}_+$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $i = 1, ..., p$; $j = 1, ..., q$, L — некоторый подходящий контур, отделяющий полюса

$$\zeta_{j\nu} = -\left(\frac{b_j + \nu}{B_j}\right), \qquad j = 1, ..., m; \qquad \nu = 0, 1, 2, ...$$

гамма-функции $\Gamma(b_j + sB_j)$ от полюсов

$$\omega_{\lambda k} = \left(\frac{1 - a_\lambda + k}{A_\lambda}\right), \qquad \lambda = 1, ..., n; \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

гамма-функции $\Gamma(1 - a_\lambda - sA_\lambda)$ так чтобы

$$A_\lambda(b_j + \nu) \neq B_j(a_\lambda - k - 1), j = 1, ..., m; \lambda = 1, ..., n; \nu, k = 0, 1, 2, ...$$

Особым случаем, для которого H–функция Фокса сводится к G–функции Майера, является набор параметров $A_j = B_k = C$, $C > 0$ для $j = 1, ..., p$, $k = 1, ..., q$:

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_1, C) & (a_2, C) & \dots & (a_p, C)\\(b_1, C) & (b_2, C) & \dots & (b_q, C)\end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{C} G_{p,q}^{m,n}\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_p\\b_1, \dots, b_q\end{matrix}\,\middle|\, z^{1/C}\right).$$

Самым известным применением функций Фокса в теории дифференциальных уравнений является их использование А.Н. Кочубеем для построения функции Грина для уравнения дробной диффузии [84]–[85].

1.2 Функциональные пространства

Основные определения см., например, в [80],[23], [24].

Обозначим через $L_2\left(E_+^1\right)$ гильбертово пространство функций $f(y)$, $y > 0$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{2,\nu}\left(E_+^1\right)} = \left(\int\limits_0^\infty |f(y)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Обозначим через $L_{2,\nu}\left(E_+^1\right)$, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, весовое гильбертово пространство функций $f(y)$, $y > 0$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{2,\nu}\left(E_+^1\right)} = \left(\int\limits_0^\infty |f(y)|^2 y^{2\nu+1}\,dy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

Хорошо известно, что преобразование Фурье–Бесселя унитарно в $L_{2,\nu}\left(E_+^1\right)$ и справедливо равенство Парсеваля

$$\|F_\nu f\|_{L_{2,\nu}\left(E_+^1\right)} = \|f\|_{L_{2,\nu}\left(E_+^1\right)}. \tag{1.4}$$

Функциональное пространство $H_{\nu,+}^s\left(E_+^1\right)$ (пространство И.А.Киприянова), $s \geqslant 0$, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, введенное в работе [68], определяется как замыкание по норме

$$\|f\|_{H_{\nu,+}^s\left(E_+^1\right)} = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}\|(1+\eta^2)^{\frac{s}{2}} F_\nu f\|_{L_{2,\nu}\left(E_+^1\right)} \tag{1.5}$$

множества функций $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{+}\left(\overline{E^1_+}\right)$. Предположение о четности здесь существенно, поскольку в противном случае норма (1.5) может быть равной бесконечности. Для пространств Киприянова возможны и другие эквивалентные определения нормы.

Определим пространство С.Л. Соболева $\overset{\circ}{H}{}^s(0,R)$, $s \geqslant 0$, $0 < R < \infty$, как замыкание множества $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}[0,R)$ по норме

$$\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s(0,R)} = \|D^s f\|_{L_{2,\nu}(0,R)}.$$

Для изучения операторов типа свёртки Меллина (1.12) автором в [6],[66] был предложен удобный алгебраический подход, который не содержит ничего нового, но в удобной форме позволяет быстро получать нужные оценки. Полезные факты будут собраны вместе как

Теорема 1.2.1 *Пусть оператор A действует по формуле (1.12). Тогда*
а) Для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = M_2 < \infty, \tag{1.6}$$

при этом $\|A\|_{L_2} = M_2$.
б) Для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_p(0,\infty), p > 1$ при дополнительном условии неотрицательности ядра K необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{p})| = M_p < \infty, \tag{1.7}$$

при этом $\|A\|_{L_p} = M_p$.
в) Обратный оператор A^{-1} действует также по формуле (1.12) с мультипликатором $\frac{1}{m_A}$, для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = m_2 < \infty, \tag{1.8}$$

при этом $\|A^{-1}\|_{L_2} = \frac{1}{m_2}$.

г) Пусть операторы A, A^{-1} *определены и ограничены в* $L_2(0,\infty)$. *Они унитарны тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$|m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = 1 \tag{1.9}$$

для почти всех ξ.

Последняя теорема суммирует результаты многих математиков: Шура, Харди, Литтвульда, Пойа, Кобера, Михлина и Хермандера. Неизвестно, можно ли в формулировке пункта б) при дополнительных условиях опустить требование неотрицательности ядра. В диапазоне $0 < p < 1$ в общем случае оценок нет, на что было мне указано В.И. Буренковым на примере операторов Харди. Впоследствии мы увидим, что операторы Харди тесно связаны с ОП Бушмана–Эрдейи. Первым математиком, использовавшим технику преобразования Меллина для оценки норм операторов Римана–Лиувилля для случая чисто мнимых степеней, был, насколько мне известно, Кобер [303]. Поэтому иногда часть б) приведённой теоремы называется леммой Кобера, что не совсем точно, так как он на самом деле доказал формулу для нормы из части а) для случая знакопеременных функций.

1.3 Основные интегральные преобразования

Основные определения можно найти в монографиях [49], [86], [292],[145], [34],

Досадные ошибки в обращении некоторых интегральных преобразований, которые допущены в [10]–[12], исправлены в [90]–[91].

Преобразование Фурье, синус и косинус преобразования, преобразование Ханкеля [182],[49].

$$(Ff)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-ity) f(y)\, dy,$$
$$(F_c f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(ty) f(y)\, dy,$$
$$(F_s f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(ty) f(y)\, dy,$$
$$(H_\nu f)(t) = \frac{1}{t^\nu} \int_0^\infty J_\nu(ty) f(y)\, dy.$$

При введённых нормировках все эти преобразования унитарны в $L_2(0,\infty)$ и совпадают с обратными.

Преобразование Меллина, теорема Слейтер [119], [155], [156]. При вычислении интеграла от произведения гипергеометрических функций будем пользоваться методом из [119],[155], основанном на применении преобразования Меллина.

Преобразованием Меллина функции $f(x)$ называется функция $g(s)$, которая определяется по формуле

$$g(s) = Mf(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx. \tag{1.10}$$

Определим также свёртку Меллина

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^\infty f_1\left(\frac{x}{y}\right) f_2(y)\, \frac{dy}{y}, \tag{1.11}$$

при этом оператор свёртки с ядром K действует в образах преобразования Меллина как умножение на мультипликатор

$$MAf(s) = \int_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\, \frac{dy}{y} = MK * f(s) = m_A(s) Mf(s), \tag{1.12}$$
$$m_A(s) = MK(s).$$

Заметим, что преобразование Меллина является обобщённым преобразованием Фурье на полуоси по мере Хаара $\frac{dy}{y}$ [206]. Его роль велика в теории специальных функций, например, гамма–функция является преобразованием Меллина экспоненты. С преобразованием Меллина связан важный прорыв в 1970–х годах, когда в основном усилиями

О.И. Маричева была полностью доказана и приспособлена для нужд вычисления интегралов известная теорема Джоан Люси Слейтер, позволяющая для большинства образов преобразований Меллина восстановить оригинал в явном виде по простому алгоритму через гипергеометрические функции [119],[343],[155]. Этот результат, который несложно получить формально по общей формуле обращения Меллина–Барнса через вычеты, для своего строгого обоснования потребовал достаточно сложных и тщательных выкладок, связанных с обработкой асимптотик гипергеометрических функций вблизи полюсов и на бесконечности, а такие асимптотики весьма разнообразны и разнородны. Эта работа была только начата Люси Джоан Слейтер, а в основном проведена до конца Олегом Игоревичем Маричевым, данное обстоятельство часто недооценивается. Теорема Слейтер–Маричева позволила создать универсальный мощный метод вычисления интегралов, который впоследствии позволил решить многие задачи в теории уравнений с частными производными, а также воплотился в передовые технологии символьного интегрирования пакета MATHEMATICA (О.И. Маричев работает в Wolfram Research).

Приведем теорему Слейтер (см. [343],[119],[155]). Пусть

$$\Gamma\left[\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & ..., & a_A \\ b_1, & b_2, & ... & b_B \end{array}\right] = \Gamma[(a),(b)] = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)...\Gamma(a_A)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)...\Gamma(b_B)} \tag{1.13}$$

пустое произведение заменяется единицей,

$$(a)+s = a_1+s, a_2+s, ..., a_A+s,$$

$$(b)'-b_k = b_1-b_k, ..., b_{k-1}-b_k, b_{k+1}-b_k, b_B-b_k, \tag{1.14}$$

$$\Sigma_A(z) = \sum_{j=1}^{A} z^{a_j}\Gamma\left[\begin{array}{cc} (a)'-a_j, & (b)+a_j \\ (c)-a_j & (d)+a_j \end{array}\right]\times$$

$$\times\, {}_{B+C}F_{A+D-1}\left(\begin{array}{ccc} (b)+a_j, & 1+a_j-(c); & (-1)^{C-A}z \\ 1+a_j-(a)', & (d)+a_j & \end{array}\right), \tag{1.15}$$

$$\Sigma_B(1/z)=\sum_{k=1}^{B} z^{-b_k}\Gamma\left[\begin{array}{cc}(b)'-b_k, & (a)+b_k\\ (d)-b_k & (c)+b_k\end{array}\right]\times$$

$$\times\,{}_{A+D}F_{B+C-1}\left(\begin{array}{ccc}(a)+b_k, & 1+a_k-(d); & \frac{(-1)^{D-B}}{z}\\ 1+b_k-(b)', & (c)+b_k & \end{array}\right), \qquad (1.16)$$

$$|\arg z|<\pi.$$

Если ряды сходятся, то функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ являются функциями гипергеометрического типа, причем переходят друг в друга, если поменять местами A-мерный комплексный вектор $(a)=a_1,a_2,...,a_A$ с аналогичным B-мерным вектором (b), C-мерный вектор (c) с D-мерным (d), а z заменить на $1/z$. Эти функции аналитически зависят от комплексных параметров (a), (b), (c), (d) и переменной z. Если некоторые параметры векторов (a) (или (b)) совпадают между собой или отличаются на целое число, то векторы $(a)'-a_j$ ($(b)'-b_k$) содержат ненулевые или отрицательные целые компоненты и в силу свойства $\Gamma(-n)=\infty$, $n=0,1,2,...$, у функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$, вообще говоря, могут возникнуть неопределенности типа $\infty-\infty$. В таких логарифмических случаях под значениями $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ будем понимать соответствующие пределы "регулярных" функций $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$, когда их параметры непрерывно стремятся к рассматриваемым особым значениям.

Следует отметить, что без ограничения $|\arg z|<\pi$ функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ в общем случае являются многозначными.

Теорема Слейтер. Пусть функция $K^*(s)$ имеет вид

$$K^*(s)=\Gamma\left[\begin{array}{cc}(a)+s & (b)-s\\ (c)+s, & (d)-s\end{array}\right], \qquad (1.17)$$

где векторы (a), (b), (c), (d) имеют соответственно A, B, C, D компонент a_j, b_k, c_l, d_m. Тогда если выполняются следующие две группы условий:

$$-\mathrm{Re}\ a_j<\mathrm{Re}\ s<\mathrm{Re}\,b_k,\ \ j=1,2,...,A,\ \ k=1,2,...,B, \qquad (1.18)$$

$$\begin{cases} A+B>C+D, \\ A+B=C+D, \quad \operatorname{Re} s(A+D-B-C)<-\operatorname{Re}\nu, \\ A=C,\ B=D, \quad \operatorname{Re}\nu<0, \end{cases} \tag{1.19}$$

где

$$\nu=\sum_{j=1}^{A} a_j+\sum_{k=1}^{B} b_k-\sum_{l=1}^{C} c_l-\sum_{m=1}^{D} d_m,$$

то для таких s справедливы равенства

$$K^*(s)=\begin{cases} \int\limits_0^\infty x^{s-1}\Sigma_A(x)dx, & A+D>B+C; \\ \int\limits_0^1 x^{s-1}\Sigma_A(x)dx+\int\limits_1^\infty x^{s-1}\Sigma_B(1/x)dx, & A+D=B+C; \\ \int\limits_0^\infty x^{s-1}\Sigma_B(1/x)dx, & A+D<B+C, \end{cases} \tag{1.20}$$

$\Sigma_A(1)=\Sigma_B(1)$, если $A+D=B+C$, $\operatorname{Re}\nu+C-A+1<0$, $A\geqslant C$.

Следствие. При условиях (4.18)

$$-\operatorname{Re}\, a_j<\operatorname{Re}\, s<\operatorname{Re} b_k,\ \ j=1,2,...,A,\ \ k=1,2,...,B,$$

$$\begin{cases} A+B>C+D, \\ A+B=C+D, \quad \operatorname{Re} s(A+D-B-C)<-\operatorname{Re}\nu, \\ A=C,\ B=D, \quad \operatorname{Re}\nu<0, \end{cases}$$

прообразом функции

$$K^*(s)=\Gamma\left[\begin{array}{cc} (a)+s & (b)-s \\ (c)+s, & (d)-s \end{array}\right],$$

является функцией $K(x)$ гипергеометрического типа, равной одному из следующих выражений

$$K(x)=\begin{cases} \Sigma_A(x), & x>0, A+D>B+C; \\ \Sigma_A(x), & 0<x<1, A+D=B+C; \\ \Sigma_B(1/x), & x>1, A+D=B+C; \\ \Sigma_B(1/x), & x>0, A+D<B+C, \end{cases} \tag{1.21}$$

$K(1) = \Sigma_A(1) - \Sigma_B(1)$, если $A+D = B+C$, $\operatorname{Re}\nu + C - A + 1 < 0$, $A \geqslant C$.

Замечание 1. Соответствующая теорема 1 из ([343] (§4.8)) содержит ряд неточностей:

1) вместо условий

$$\begin{cases} A+B > C+D, \\ A+B = C+D, \quad \operatorname{Re} s(A+D-B-C) < -\operatorname{Re}\nu, \\ A = C,\ B = D, \quad \operatorname{Re}\nu < 0, \end{cases}$$

указано лишь условие $A+B \geqslant C+D$;

2) вместо $\operatorname{Re}\nu + C - A + 1 < 0$ приводится условие $\operatorname{Re}\nu < 0$;

3) говорится, что при $A+D = B+C$ функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ аналитически продолжают друг друга, а это верно лишь в случае $A+B > C+D$.

Замечание 2. В случае $|A+D-B-C| > 1$, $A+B = C+D$ ограничение на $\operatorname{Re}s$, указанное в (4.18б), может быть несколько ослаблено до условия

$$\operatorname{Re}s(A+D-B-C < \frac{1}{2} - \operatorname{Re}\nu. \tag{1.22}$$

Замечание 3. Если для некоторых параметров выполняется одно или несколько условий $a_j = c_l + n$ (или $a_j = -d_m - n$) $[b_k = d_m + n$ (или $b_k = -c_l - n)]$, где $n = 0, 1, 2, ...$, и при этом векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ не содержат целые компоненты, то из группы условий (4.18а) можно устранить (или ослабить) условия, относящиеся к этим параметрам. При $a_j = c_l + n$ $[b_k = d_m + n]$ соответствующие условия $\operatorname{Re}(s + a_j) > 0$ $[\operatorname{Re}(b_k - s) > 0\ ]$ устраняются, а при $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ они заменяются на ослабленные требования $\operatorname{Re}(s + a_j) > -n-1$ $[\operatorname{Re}(b_k - s) > -n-1]$. Если же векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ содержат целые компоненты, то вопрос об ослаблении ограничений (4.18а) требует специальных исследований.

Замечание 4. Ограничения (4.18)а — в обеспечивают, по крайней мере, условную сходимость интегралов (1.20) в 0, ∞ (и 1). Если эти ограничения нарушаются, то интегралы (1.20) как несобственные, вообще говоря, расходятся, однако в отдельных случаях они существуют в смысле главного значения.

Квадратичное (дробное) преобразование Фурье [2], [57], [146],

Операторы дробного интегродифференцирования [165], [139]–[141], [293],[31],[285],[294]–[295],

Операторы дробного интегродифференцирования играют важную роль во многих современных разделах математики. Для теории специальных функций важность дробного интегродифференцирования отражена в названии известной статьи [300]: "***Все специальные функции получаются дробным интегродифференцированием элементарных функций***"! (Замечание проф. А.А. Килбаса: кроме функций Фокса!)

Приведём список основных операторов дробного интегродифференцирования.

Римана–Лиувилля определяются при $\alpha > 0$ по формулам:

$$I^{\alpha}_{0+,x} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) d\,t, \tag{1.23}$$

$$I^{\alpha}_{-,x} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) d\,t.$$

На остальные значения α они определяются при помощи аналитического продолжения.

Эрдейи–Кобера определяются при $\alpha > 0$ по формулам:

$$I^{\alpha}_{0+;\,2,\,y} f = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} x^{-2(\alpha+y)} \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1} t^{2y+1} f(t)\,dt, \tag{1.24}$$

$$I^{\alpha}_{-;\,2,\,y} f = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} x^{2y} \int\limits_x^{\infty} (t^2-x^2)^{\alpha-1} t^{2(1-\alpha-y)-1} f(t)\,dt, \tag{1.25}$$

а при значениях $\alpha > -n$, $n \in \mathbb{N}$ по формулам

$$I^{\alpha}_{0+;\,2,y} f = x^{-2(\alpha+y)} \left(\frac{d}{dx^2}\right)^n x^{2(\alpha+y+n)} I^{\alpha+n}_{0+;\,2,\,y} f \tag{1.26}$$

$$I^{\alpha}_{-;\,2,y} f = x^{2y} \left(-\frac{d}{dx^2}\right)^n x^{2(\alpha-y)} I^{\alpha+n}_{-;\,2,\,y-n} f. \tag{1.27}$$

На остальные значения α они определяются при помощи аналитического продолжения, аналогично операторам дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля.

Отметим, что в классической монографии [165] случаи выбранных нами пределов интегрирования $0, \infty$ не рассматриваются. В последующей английской версии [338] эти особые случаи пределов допускаются, но определения содержат неточности, в частности, приводящие к комплексным величинам под знаком интеграла.

Дробного интеграла по произвольной функции $g(x)$:

$$I^{\alpha}_{0+,g}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(g(x)-g(t)\right)^{\alpha-1} g'(t)f(t)d\,t, \tag{1.28}$$
$$I^{\alpha}_{-,g}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \left(g(t)-g(x)\right)^{\alpha-1} g'(t)f(t)d\,t,$$

во всех случаях предполагается, что $Re\,\alpha > 0$, на оставшиеся значения α формулы также без труда продолжаются [165]. При этом обычные дробные интегралы (1.23) получаются при выборе в (1.28) $g(x) = x$, Эрдейи–Кобера (1.24) при выборе $g(x) = x^2$, Адамара при $g(x) = \ln x$.

Связь с ОП проявляется в том, что, как видно из (1.37)–(1.38), ОП СПД с точностью до множителей как раз и являются операторами Эрдейи–Кобера, то есть дробными степенями $(\frac{d}{dx^2})^{-\alpha}$. Поэтому основные свойства этих ОП можно получить из теории операторов дробного интегродифференцирования, а не изобретать заново, что нередко и делалось. А.М. Джрбашян обратил моё внимание на тот факт, что операторы дробного интегрирования по функции (1.28) являются частными случаями несколько более общих операторов, которые были введены и изучались его отцом М.М. Джрбашяном [165].

Операторы Харди

$H_1,\ H_2$ – операторы Харди [329],[311].

$$H_1 f = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)dy,\ \ H_2 f = \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}dy, \tag{1.29}$$

I — единичный оператор.

По поводу общих вопросов теории для различных классов операторов и функциональных пространств см. [137], [345], [80], [87], [9], [92], [147], [173], [197],

1.4 Операторы преобразования, связанные с дифференциальным уравнением Штурма–Лиувилля

1.5 Дифференциальные уравнения и операторы преобразования, связанные с операторами Бесселя

1.5.1 Основные классы дифференциальных уравнений с операторами Бесселя

В работе принята следующая терминология для названий дифференциальных уравнений с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx}, \tag{1.30}$$

в основном введённая И.А.Кіприяновым [67].

B–эллиптическим называется уравнение с операторами Бесселя вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1,\dots,x_n) = f, \tag{1.31}$$

иногда такое уравнение называется уравнением Лапласа–Бесселя.

B–гиперболическим называется уравнение с операторами Бесселя вида

$$B_{\nu,t} u(t,x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(t,x_1,\dots,x_n) = f, \tag{1.32}$$

в случае одной пространственной переменной получаем уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу.

B–параболическим называется уравнение с операторами Бесселя вида

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{\nu, x_k} u(t, x_1, \ldots, x_n) = f. \qquad (1.33)$$

Те же названиях сохраняем для неполных уравнений, в которых один или несколько операторов Бесселя сводятся ко вторым производным, а также к уравнениям добавляются спектральные параметры.

1.5.2 Операторы преобразования Сонина и Пуассона.

Определим самый известный класс ОП, сплетающих дифференциальный оператор Бесселя со второй производной:

$$T\left(B_\nu\right) f = \left(D^2\right) T f, B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x} D, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \nu \in \mathbb{C}. \qquad (1.34)$$

Одним из способов построения ОП является установление соответствий между решениями дифференциальных уравнений. Решениями уравнения вида $B_\nu f = \lambda f$ являются функции Бесселя, а уравнения $D^2 f = \lambda f$ — тригонометрические функции или экспонента. Поэтому прообразами ОП вида (1.34) были формулы Пуассона и Сонина:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) 2^{\nu-1} x^\nu} \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos(t)\, dt, Re\nu > \frac{1}{2} \quad (1.35)$$

$$J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\nu - \frac{1}{2}} \sin(t)\, dt, -\frac{1}{2} < Re\nu < \frac{1}{2} \quad (1.36)$$

Интеграл (1.35) начал изучать Эйлер в 1769 г. Затем Парсеваль посчитал интеграл при $\nu = 0$ в 1805 г., для целых ν формулу (1.35) получил Плана в 1821 г., Пуассон вывел её для полуцелых ν в 1823 г., его метод применим и для целых ν, но он этого не заметил. Далее этот интеграл встречался в работах Куммера, Лоббато и Дюамеля. Окончательно формулу (1.35), которую мы приписываем Пуассону, установил в общем случае Ломмель в 1868 г., а Сонин вывел формулу (1.36) в 1880 г.

Определение 1.1 *ОП Пуассона называется выражение*

$$P_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)2^\nu x^{2\nu}} \int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} f(t)\,dt, Re\,\nu > -\frac{1}{2}. \tag{1.37}$$

ОП Сонина называется выражение

$$S_\nu f = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} t^{2\nu+1} f(t)\,dt, Re\,\nu < \frac{1}{2}. \tag{1.38}$$

Операторы (1.37)–(1.38) действуют как ОП по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{1.39}$$

Их можно доопределить на все значения $\nu \in \mathbb{C}$.

Идею изучения операторов подобных (1.37)–(1.38) высказывал ещё Лиувилль, их реальное использование в контексте теории функций Бесселя начал Н.Я. Сонин. Как ОП эти операторы впервые были введены в работах Жана Дельсарта, а затем на основе идей Дельсарта их изучение продолжилось в работах Дельсарта и в совместных работах Дельсарта и Лионса. Поэтому мы будем называть (1.37)–(1.38) ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). Об операторах СПД см. также статью Б.М. Левитана [104].

Не будет преувеличением сказать, что операторы СПД (1.37)–(1.38) являются самыми знаменитыми объектами всей теории ОП, их изучению, приложениям и обобщениям посвящены сотни работ.

Ж.Дельсартом на базе ОП СПД было введено фундаментальное понятие обобщённого сдвига.

Определение 1.2 *Оператором обобщённого сдвига (ООС) называется решение $u(x,y) = T_x^y f(x)$ задачи*

$$(B_\nu)_y u(x,y) = (\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\nu+1}{y}\frac{\partial}{\partial y})\ u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ u(x,y), \tag{1.40}$$

$$u(x,0) = f(x), u_y(x,0) = 0.$$

Название объясняется тем, что ООС в частном случае $\nu = -\frac{1}{2}$ сводится к почти обычному сдвигу

$$T_x^y f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) + f(x-y)\right).$$

Для ООС (1.40) Дельсартом была получена явная формула

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos(t)}) \sin^{2\nu} t\, dt. \qquad (1.41)$$

Можно рассматривать в определении (1.40) и произвольные пары дифференциальных (или даже любых) операторов. Например, при таком определении получаем привычный сдвиг:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, u(x,0) = f(x),\ T_x^y f(x) = f(x+y).$$

Отметим, что ООС (1.40)–(1.41) явно выражаются через ОП СПД (1.37)–(1.38) (см. [99]–[100]).

Сделаем важное для дальнейшего замечание. С точки зрения приложений к исследуемым в данной работе решениям дифференциальных уравнений в частных производных с особенностями в коэффициентах указанные операторы СПД обладают рядом недостатков, которые не позволяют применять во многих важных случаях. К этим недостаткам относится следующее: во–первых, введённые выше операторы СПД являются ОП лишь на множестве четных функций, что исключает возможность рассмотрения функций с особенностями в нуле; во–вторых, они не сохраняют финитность и быстроубываемость на бесконечности функций; в-третьих, они изменяют гладкость преобразуемых функций. На этот факт впервые обратили внимание Ж.–Л. Лионс [312].

Таким образом, возникает необходимость введения и изучения других классов ОП для дифференциальных уравнений, содержащих операторы Бесселя.

1.5.3 Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи различных классов

В этом пункте мы перечислим справочную информацию, содержащую определения ОП Бушмана–Эрдейи различных типов. Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП СПД и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Операторами Бушмана–Эрдейи первого рода называются интегральные операторы с функциями Лежандра первого рода в ядрах

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{x}{t}\right) f(t) d\, t, \tag{1.42}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{t}{x}\right) f(t) d\, t, \tag{1.43}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{t}{x}\right) f(t) d\, t, \tag{1.44}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{x}{t}\right) f(t) d\, t. \tag{1.45}$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$—функция Лежандра первого рода [10], $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$—та же функция на разрезе $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $f(x)$—локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \to 0, x \to \infty$. Параметры μ, ν—комплексные числа, $Re\, \mu < 1$, можно ограничиться значениями $Re\, \nu \geqslant -1/2$.

Операторами Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости называются следующие интегро–дифференциальные операторы

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{1.46}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\, dt, \tag{1.47}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) (-\frac{df(t)}{dt})\, dt, \tag{1.48}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = (-\frac{d}{dx}) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{1.49}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$—функция Лежандра.

Операторами Бушмана–Эрдейи второго рода называются интегральные операторы с функциями Лежандра второго рода в ядрах

$$ {}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1(\frac{x}{y}) f(y) dy + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1(\frac{x}{y}) f(y) dy \right), \tag{1.50}$$

$$ {}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1(\frac{y}{x}) f(y) dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1(\frac{y}{x}) f(y) dy \right). \tag{1.51}$$

При $y \to x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (1.50) будет типа Сонина, (1.51) — типа Пуассона).

Унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова

Такие операторы определяются по формулам:

$$S_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\, {}_2S^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\, {}_1S_-^\nu f, \tag{1.52}$$

$$P_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\, {}_2P^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\, {}_1P_-^\nu f. \tag{1.53}$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана–Эрдейи 1 и 2 рода нулевого порядка гладкости. Их можно назвать операторами Бушмана–Эрдейи третьего рода. В интегральной форме эти операторы имеют вид:

$$S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy + \tag{1.54}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\right),$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy - \tag{1.55}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\right).$$

1.6 Другие типы операторов преобразований

Построение ОП тесно связано с описанием коммутантов для дифференциальных операторов в различных пространствах функций. Для решения этого класса задач была создана специальная теория обобщённых операторных свёрток, отличающихся по определению от привычных свёрток для интегральных преобразований. Теория операторных свёрток, самая известная из которых была названа свёрткой Берга–Димовски, была в основном развита в работах болгарского математика И. Димовски и его учеников (см. введение).

Другой важный класс обобщений операторов СПД возник при изучении операторов Дункла. Операторы Дункла включаются в общую схему ОП как специальный случай, когда один из сплетаемых операторов является дифференциально–разностным, а второй по–прежнему дифференциальным. Построению ОП типа Сонина и Пуассона для операторов Дункла в последнее время посвящено много работ, (см. введение).

Отметим, что некоторый способ построения ОП со свойствами (1.39) на решениях соответствующих уравнений для частного случая целых ν упоминается в литературе под названием метода Крама–Крейна [121]–[122], но он приводит к длинной последовательности усложняющихся подстановок, а результирующий ОП не может быть выписан в явном виде. В наиболее общем виде эта теория известна как метод преобразований Дарбу [325], к которым и относятся в частном случае подстановки Крама–Крейна. Известно также обобщение одномерных преобразований Дарбу на двумерный случай—преобразование Мутара [325]. На самом деле, и подстановки Крама–Крейна, и преобразования Дарбу и Мутара, могут быть включены в общую схему ОП. Они возникают, когда сплетаемые операторы остаются дифференциальными, а ОП для этой пары ищется уже не в интегральном, а в дифференциальном представлении. К таким дифференциальным ОП формально могут быть отнесены и многие известные замены переменных типа преобразования Миуры, которые сплетают нелинейный и линейный операторы, решая задачу линеаризации.

Вместе с тем были построены аналогичные теории и для некоторых других модельных операторов, например таких [236]–[238], [218]–[219]:

$$A = \frac{1}{v(x)}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d}{dx}, \tag{1.56}$$
$$v(x) = \sin^{2\nu+1} x, \operatorname{sh}^{2\nu+1} x, (e^x - e^{-x})^{2\nu+1}(e^x + e^{-x})^{2\mu+1}.$$

Важность операторов A вида (1.56) для теории заключается в том, что по знаменитой формуле Гельфанда они представляют радиальную часть оператора Лапласа на симметрических пространствах [206]. При этом оператор Бесселя получается при выборе в (1.56) $v(x) = x^{2\nu+1}$. Другим модельным оператором, для которого построены ОП, является оператор Эйри $D^2 + x$, рассматривался также его возмущённый вариант, связанный с эффектом Штарка из квантовой механики [63]. Были изучены операторы сдвига по спектральному параметру Векуа–Эрдейи–Лаундеса [317]–[319].

Глава 2

Классификация и свойства различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи с приложениями к теории дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах

Основные теоремы работы, вынесенные в число защищаемых задач, в этой и последующих главах даются с полными доказательствами. Часть остальных результатов, особенно те, доказательства которых элементарны, даются без доказательств или с краткими пояснениями.

Необходимо отметить, что следуя традиции теории операторов преобразования и соответствующей литературы, мы зачастую используем термин "операторы" там, где более точным был бы термин "дифференциальные выражения" . В основных теоремах указаны функциональные пространства, для которых они верны. Для результатов, содержащих явные формулы, если конкретные классы функций не указаны, то считается, что они сформулированы для функций, финитных на положительной полуоси (бесконечно дифференцируемых функциях, отличных от нуля на некотором отрезке $(a, b), a > 0, b < \infty$).

2.1 Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости

Теперь перейдём к описанию основных свойств важнейшего класса — операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП СПД и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Определение 2.1 *Операторами Бушмана–Эрдейи первого рода называются интегральные операторы*

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{x}{t}\right) f(t) d\,t, \tag{2.1}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{t}{x}\right) f(t) d\,t, \tag{2.2}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{t}{x}\right) f(t) d\,t, \tag{2.3}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{x}{t}\right) f(t) d\,t. \tag{2.4}$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$—функция Лежандра первого рода [10], $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$—та же функция на разрезе $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $f(x)$—локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \to 0, x \to \infty$.

Параметры μ, ν—комплексные числа, $Re\,\mu < 1$, можно ограничиться значениями $Re\,\nu \geqslant -1/2$.

Интегральные операторы указанного вида с функциями Лежандра в ядрах впервые встретились в работах E.T. Copson по уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу в конце 1950-х годов. А именно, в работах [250]–[251] рассмотрено следующее утверждение, которое мы назовём

Лемма Копсона. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с двумя переменными:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{2.5}$$

(обобщённое уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу или B–гиперболическое уравнение по терминологии И.А. Киприянова) в открытой четверти плоскости $x > 0,\ y > 0$ при положительных параметрах $\beta > \alpha > 0$ с краевыми условиями на осях координат (характеристиках)

$$u(x,0) = f(x), u(0,y) = g(y), f(0) = g(0). \tag{2.6}$$

Предполагается, что решение u(x,y) является непрерывно дифференцируемым в замкнутом первом квадранте, имеет непрерывные вторые производные в открытом квадранте, граничные функции $f(x), g(y)$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Тогда, если решение поставленной задачи существует, то для него выполняются соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, y = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, x = 0, \tag{2.7}$$

$$2^\beta \Gamma(\beta + \frac{1}{2}) \int_0^1 f(xt) t^{\alpha+\beta+1} \left(1 - t^2\right)^{\frac{\beta-1}{2}} P_{-\alpha}^{1-\beta}(t)\, dt = \tag{2.8}$$

$$= 2^\alpha \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \int_0^1 g(xt) t^{\alpha+\beta+1} \left(1 - t^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} P_{-\beta}^{1-\alpha}(t)\, dt,$$

$$\Downarrow$$

$$g(y)=\frac{2\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\beta-\alpha)}y^{1-2\beta}\int_0^y x^{2\alpha-1}f(x)\left(y^2-x^2\right)^{\beta-\alpha-1}x\,dx, \quad (2.9)$$

где $P_\nu^\mu(z)$—функция Лежандра первого рода [10].

Соотношения (2.7) были известны ранее до Копсона, они очевидны. В работе приводится нестрогий вывод (2.8), то есть получено, что граничные функции (или значения решения на характеристиках) не могут быть произвольными, они связаны в современной терминологии операторами Бушмана–Эрдейи. Далее утверждается, что если две функции связаны операторами Бушмана–Эрдейи указанных порядков, то на самом деле выполняется (2.9)—то есть они связаны более простыми операторами Эрдейи–Кобера. В этом основное содержание леммы Копсона.

Но отсюда не следует, как иногда отмечается, что теперь можно сразу получить обращение соответствующего оператора Бушмана–Эрдейи, хотя бы формально. Для этого произвольную функцию в правой части соответствующего уравнения надо записать также в виде оператора Бушмана–Эрдейи соответствующего порядка, чтобы подогнать под лемму Копсона. Но для этого уже надо уметь оператор Бушмана–Эрдейи обращать–получается порочный круг. Таким образом, неверно приписывать Копсону первый результат по обращению операторов Бушмана–Эрдейи, хотя насколько нам известно в его работе эти операторы действительно встречаются в явном виде впервые.

Доказательства в работах [250]–[251] скорее являются нестрогими рассуждениями, намечающими что и в каком порядке надо делать, хотя всё понятно и видимо легко доводится до строгого, этот результат не включён Копсоном в его монографию [253]. Отметим также, что в знаменитой монографии [165] и других работах даётся не совсем точная ссылка на работу [250], которую мы здесь исправили. Эта первая работа Копсона нашла продолжение в совместной работе с Эрдейи [252]. Там даётся строгий вывод, вводятся подходящие классы функций, явно озвучена связь с дробными интегралами и операторами Кобера–Эрдейи.

Перейдём к изложению результатов автора для ОП Бушмана–Эрдейи и их приложений к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах.

Все рассмотрения ведутся ниже на полуоси. Поэтому будем обозначать через L_2 пространство $L_2(0,\infty)$ и $L_{2,k}$ весовое пространство $L_{2,k}(0,\infty)$.

Вначале распространим определения (2.1–2.4) на важный не исследованный ранее случай $\mu = 1$.

Определение 2.2 *Введём при $\mu = 1$ операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам*

$$B_{0+}^{\nu,1} f = {}_1S_{0+}^{\nu} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \tag{2.10}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = {}_1P_{-}^{\nu} f = \int_0^x P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\,dt, \tag{2.11}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = {}_1S_{-}^{\nu} f = \int_x^\infty P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) (-\frac{df(t)}{dt})\,dt, \tag{2.12}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = {}_1P_{0+}^{\nu} f = (-\frac{d}{dx}) \int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \tag{2.13}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$—функция Лежандра.

Разумеется, при очевидных дополнительных условиях на функции в (2.10)–(2.13) можно продифференцировать под знаком интеграла или проинтегрировать по частям.

Теорема 2.1.1 *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана–Эрдейи на подходящих функциях через дробные интегралы Римана–Лиувилля и Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости:*

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu}\ {}_1S_{0+}^{\nu} f,\ \ B_{-}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{-}^{\nu}\ I_{-}^{1-\mu} f, \tag{2.14}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{0+}^{\nu}\ I_{0+}^{1-\mu} f,\ \ E_{-}^{\nu,\mu} f = I_{-}^{1-\mu}\ {}_1S_{-}^{\nu} f. \tag{2.15}$$

Доказательство. Докажем первую формулу, остальные доказываются аналогично. С учётом определений, финитности функции $f(x)$, согласно соглашению в начале главы, и полугруппового свойства дробных интегралов Римана–Лиувилля, получаем

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu}\ {}_1S_{0+}^{\nu} f = I_{0+}^{-\mu} \int_0^t P_\nu \left(\frac{t}{y}\right) f(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^x (x-t)^{-\mu-1} \left(\int_0^t P_\nu \left(\frac{t}{y}\right) f(y)\, dy\right) d\,t.$$

Теперь переставим пределы интегрирования, что возможно, ввиду финитности функции, и для вычисления внутреннего интеграла применим формулу 7 на с. 163, т.3 из [156]. Получим нужное интегральное представление для оператора Бушмана–Эрдейи первого рода, теорема доказана.

Эти важные формулы позволяют "разделить" параметры ν и μ. Мы докажем, что операторы (2.10)–(2.13) являются изоморфизмами пространств $L_2(0,\infty)$, если ν не равно некоторым исключительным значениям. Поэтому операторы (2.1)–(2.4) по действию в пространствах типа L_2 в определённом смысле подобны операторам дробного интегродиффенцирования $I^{1-\mu}$, с которыми они совпадают при $\nu = 0$. Далее операторы Бушмана–Эрдейи будут доопределены при всех значениях μ. Исходя из этого, введём следующее

Определение 2.3 *Число $\rho = 1 - Re\,\mu$ назовём порядком гладкости операторов Бушмана–Эрдейи* (2.10)–(2.13).

Таким образом, при $\rho > 0$ (то есть при $Re\,\mu > 1$) операторы Бушмана–Эрдейи являются сглаживающими, а при $\rho < 0$ (то есть при $Re\,\mu < 1$) уменьшающими гладкость в пространствах типа $L_2(0,\infty)$. Операторы (2.10)–(2.13), для которых $\rho = 0$, являются по данному определению операторами нулевого порядка гладкости.

Перечислим основные свойства операторов Бушмана–Эрдейи первого рода (2.1)–(2.4) с функцией Лежандра I рода в ядре. Приведём эти свойства без доказательств, так как они все следуют из основных свойств функций Лежандра. Будем обозначать области определения операторов через $\mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu,\mu})$, $\mathfrak{D}(E_{0+}^{\nu,\mu})$ и т.д.

Простейшие свойства функций Лежандра приводят к тождествам, выражающим симметрию по параметрам, соотношения смежности и свойство сдвига по параметрам операторов Бушмана–Эрдейи.

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = B_{0+}^{-\nu-1,\mu} f, \quad E_{0+}^{\nu,\mu} f = E_{0+}^{-\nu-1,\mu} f,$$
$$B_{-}^{\nu,\mu} f = B_{-}^{-\nu-1,\mu} f, \quad E_{-}^{\nu,\mu} f = E_{-}^{-\nu-1,\mu} f, \tag{2.16}$$

$$(2\nu+1)x\, B_{0+}^{\nu,\mu} \frac{1}{x} f = (\nu-\mu+1) B_{0+}^{\nu+1,\mu} f + (\nu+\mu) B_{0+}^{\nu-1,\mu} f,$$
$$(2\nu+1)\frac{1}{x}\, B_{-}^{\nu,\mu} x f = (\nu-\mu+1) B_{-}^{\nu+1,\mu} f + (\nu+\mu) B_{-}^{\nu-1,\mu} f, \tag{2.17}$$

$$B_{0+}^{\nu-1,\mu} f - B_{0+}^{\nu+1,\mu} f = -(2\nu+1) B_{0+}^{0,\mu-1} \frac{1}{x} f,$$
$$B_{-}^{\nu-1,\mu} f - B_{-}^{\nu+1,\mu} f = -(2\nu+1) \frac{1}{x} B_{-}^{\nu,\mu-1} f. \tag{2.18}$$

Из формул разложения L_ν на множители получаются тождества

$$B_{0+}^{\nu,\mu-1} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) f = B_{0+}^{\nu-1,\mu} f, , \tag{2.19}$$

$$B_{0+}^{\nu,\mu-1} \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right) f = B_{0+}^{\nu+1,\mu} f, \tag{2.20}$$

справедливые при условиях $Re\, \mu < 1$, $Re\, \nu > -\frac{1}{2}$

$$\lim_{y\to 0} f(y)/y^\nu = 0, \ f \in \mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu\pm 1,\mu}), \ \left(\frac{d}{dx} \pm \frac{\nu}{x} \right) f \in \mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu,\mu-1})$$

Формулы (2.16) позволяют ограничиться случаем $Re\, \nu \geqslant -\frac{1}{2}$. Функции, на которые действуют операторы, должны принадлежать их областям определения. Для оператора $E_{0+}^{\nu,\mu}$ справедливы те же формулы, что и для $B_{0+}^{\nu,\mu}$.

Теорема 2.1.2 *Операторы Бушмана-Эрдейи* (2.1)-(2.4) *определены, если* $Re\ \mu < 1$ *или* $\mu \in \mathbb{N}$ *и дополнительно выполнены условия:*

а) для оператора $B_{0+}^{\nu,\mu}$

$$\int\limits_0^x \sqrt{y}\,|f(y)\ln y|\,dy \ < \infty,$$

если $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu \neq \frac{1}{2}$, *а во всех остальных случаях*

$$\int\limits_0^x y^{-Re\,\nu}\,|f(y)|\,dy \ < \infty,$$

б) для оператора $E_{0+}^{\nu,\mu}$ *дополнительные условия не требуются;*

в) для оператора $E_{-}^{\nu,\mu}$

$$\int\limits_x^\infty y^{-Re\,\nu}\,|f(y)|\,dy \ < \infty,$$

г) для оператора $B_{-}^{\nu,\mu}$

$$\int\limits_x^\infty y^{-\frac{1}{2}-Re\,\nu}\,|\ln y\cdot f(y)|\,dy \ < \infty,$$

если $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu \neq \frac{1}{2}$, *а во всех остальных случаях*

$$\int\limits_x^\infty y^{Re(\nu-\mu)}\,|f(y)|\,dy \ < \infty.$$

В этой теореме предполагается, что функция $f(x)$ является локально суммируемой на $(0,\infty)$, x – произвольное положительное число. Доказательство следует из оценок интегралов по модулю и использования известных асимптотик для функций Лежандра в нуле и на бесконечности, см. [10],[328] .

Важно отметить, что при некоторых специальных значениях параметров $\nu,\ \mu$ операторы Бушмана–Эрдейи сводятся к более простым. Так при значениях $\mu = -\nu$ или $\mu = \nu + 2$ они являются операторами Эрдейи–Кобера; при $\nu = 0$ операторами дробного интегродифференцирования

$I_{0+}^{1-\mu}$ или $I_{-}^{1-\mu}$; при $\nu=-\frac{1}{2}$, $\mu=0$ или $\mu=1$ ядра выражаются через эллиптические интегралы; при $\mu=0$, $x=1$, $v=it-\frac{1}{2}$ оператор $B_{-}^{\nu,0}$ лишь на постоянную отличаются от преобразования Мелера–Фока. Таким образом, операторы Бушмана–Эрдейи первого рода являются обобщениями всех этих указанных классов стандартных интегральных операторов.

Теорема 2.1.3 *Пусть или* $Re\,\mu<0$*, или* $\mu=m\in\mathbb{N}$, $-m\leqslant\nu\leqslant m-1$, $\nu\in\mathbb{Z}$*. Тогда справедливы тождества*

$$\tfrac{d}{dx}B_{0+}^{\nu,\mu}f=B_{0+}^{\nu,\mu+1}f,\qquad E_{0+}^{\nu,\mu}\frac{d\,f}{dx}=E_{0+}^{\nu,\mu+1}f, \tag{2.21}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu}\left(-\tfrac{d\,f}{dx}\right)=B_{-}^{\nu,\mu+1}f,\ \ \left(-\frac{d}{dx}\right)E_{-}^{\nu,\mu}f=E_{-}^{\nu,\mu+1}f. \tag{2.22}$$

если все указанные операторы определены.

Эта теорема позволяет доопределить операторы Бушмана–Эрдейи и на значения $Re\mu\geqslant 1$, переопределив их для натуральных μ.

Определение 2.4 *Пусть дано число* σ, $Re\,\sigma\geqslant 1$*. Обозначим через* m *наименьшее натуральное число, такое, что* $\sigma=\mu+m$, $Re\,\mu<1$*. Тогда операторы Бушмана–Эрдейи доопределим по формулам*

$$\begin{aligned}
B_{0+}^{\nu,\sigma}&=B_{0+}^{\nu,\mu+m}=\left(\frac{d}{dx}\right)^m B_{0+}^{\nu,\mu},\\
E_{0+}^{\nu,\sigma}&=E_{0+}^{\nu,\mu+m}=E_{0+}^{\nu,\mu}\left(\frac{d}{dx}\right)^m,\\
B_{-}^{\nu,\sigma}&=B_{-}^{\nu,\mu+m}=B_{-}^{\nu,\mu}\left(-\frac{d}{dx}\right)^m,\\
E_{-}^{\nu,\sigma}&=E_{-}^{\nu,\mu+m}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^m E_{-}^{\nu,\mu}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Отметим, что при натуральных μ операторы Бушмана–Эрдейи определены и по формулам (2.1)–(2.4). Мы переопределяем их для этих значений μ по формуле (2.23). Таким образом, символами $B_{0+}^{\nu,\mu}$, $E_{0+}^{\nu,\mu}$, $B_{-}^{\nu,\mu}$,

$E_-^{\nu,\mu}$ далее мы будем обозначать операторы, определяемые по формулам (2.1)–(2.4) при $Re\,\mu < 1$, и по формулам (2.23) при $Re\,\mu \geqslant 1$.

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \tag{2.24}$$

$$= \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) = \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu+1}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu+1}{x}\right),$$

который при $\nu \in \mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливают легко проверяемые формулы связи, приведём их.

Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетают L_ν и вторую производную:

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \tag{2.25}$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \tag{2.26}$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетают оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{2.27}$$

Разумеется, по указанным формулам можно перейти и наоборот от ОП для оператора Бесселя к ОП для оператора углового момента. А именно, если дана пара ОП S_ν, P_ν со сплетающим свойством (2.27), то новая пара ОП, определяемых по формулам

$$X_\nu = S_{\nu+1/2} x^{-(\nu+1)}, Y_\nu = x^{\nu+1} P_{\nu+1/2}, \tag{2.28}$$

удовлетворяет соотношениям (2.25).

Преимуществом ОП, сплетающих вторую производную не с оператором Бесселя, а с оператором углового момента, является тот факт, что при определённых условиях они оказываются ограниченными в одном пространстве, а не в паре разных пространств. Мы сохраним за ОП, действующим по формулам (2.25), названия ОП типа Сонина и Пуассона соответственно.

Перейдём к определению условий, при которых ОП Бушмана–Эрдейи первого рода действительно являются операторами преобразования.

Определим класс $\Phi(B_{0+}^{\nu,\mu})$ как множество функций таких, что

1) $f(x) \in \mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu,\mu}) \bigcap C^2(0,\infty)$,

2) $\lim\limits_{y\to 0}\left|\frac{\ln y}{\sqrt{y}} f(y) + \sqrt{y}\ln y \cdot f'(y)\right| = 0$,

если $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu \neq \frac{1}{2}$;

$$\lim_{y\to 0} (\nu+1)y^{\nu} f(y) - y^{\nu+1} f'(y) = 0,$$

если $\mu = \nu + 1$, $Re\,\nu \neq -\frac{1}{2}$; и, наконец,

$$\lim_{y\to 0}\left(\nu\frac{f(y)}{y^{\nu+1}} + \frac{f'(y)}{y^{\nu}}\right) = 0$$

во всех остальных случаях.

Теорема 2.1.4 *Пусть $f(x) \in \Phi(B_{0+}^{\nu,\mu})$, $Re\,\mu \leqslant 1$. Тогда оператор $B_{0+}^{\nu,\mu}$ является оператором преобразования типа Сонина и удовлетворяет соотношению* (2.25) *на функциях $f(x)$.*

Аналогичный результат справедлив и для других операторов Бушмана–Эрдейи. При этом $E_{-}^{\nu,\mu}$ также является оператором типа Сонина, а $E_{0+}^{\nu,\mu}$ и $B_{-}^{\nu,\mu}$ – операторами типа Пуассона. Доказательство см. в [66], оно основано на общих условиях для ядер сплетающих операторов преобразования и асимптотик функций Лежандра.

Можно рассматривать случай, когда нижний предел в соответствующих интегралах (2.1)–(2.4) равен произвольному числу $a > 0$, или верхний предел в интегралах равен произвольному конечному числу $b > 0$. При этом все результаты этого пункта сохраняются, а их формулировки значительно упрощаются. В частности, все операторы Бушмана–Эрдейи в этом случае определены при единственном условии $Re\mu < 1$ в форме

(2.1)–(2.4) и являются операторами преобразования на функциях $f(x)$ таких, что $f(a) = f'(a) = 0$ или $(f(b) = f'(b) = 0)$.

Теперь сделаем важное замечание. Из полученной теоремы следует, что ОП Бушмана–Эрдейи связывают собственные функции операторов Бесселя и второй производной. Таким образом, половина ОП Бушмана–Эрдейи переводят тригонометрические или экспоненциальные функции в приведённые функции Бесселя, а другая половина наоборот. Эти формулы здесь не приводятся, их нетрудно выписать явно. Все они являются обобщениями исходных формул Сонина и Пуассона (1.34)–(1.35) и представляют существенный интерес. Ещё раз отметим, что подобные формулы являются непосредственными следствиями доказанных сплетающих свойств ОП Бушмана–Эрдейи, и могут быть непосредственно проверены при помощи таблиц интегралов от специальных функций.

Перейдём к вопросу о различных факторизациях операторов Бушмана–Эрдейи через операторы Эрдейи–Кобера и дробные интегралы Римана–Лиувилля (см. определения в главе 1).

Теорема 2.1.5 *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана–Эрдейи через операторы дробного интегродифференцирования и Эрдейи–Кобера:*

$$B_{0+}^{\nu,\mu} = I_{0+}^{\nu+1-\mu} I_{0+;\,2,\,\nu+\frac{1}{2}}^{-(\nu+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1}, \tag{2.29}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I_{0+;\,2,\,-\frac{1}{2}}^{\nu+1} I_{0+}^{-(\nu+\mu)}, \tag{2.30}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I_{-;\,2,\,\nu+1}^{-(\nu+1)} I_{-}^{\nu-\mu+2}, \tag{2.31}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu} = I_{-}^{-(\nu+\mu)} I_{-;\,2,\,0}^{\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}. \tag{2.32}$$

Доказательство приведено в [66], оно аналогично [59]–[60]. Ещё проще эти формулы доказываются через мультипликаторы Меллина, см. далее.

Многие основные свойства операторов Бушмана–Эрдейи как интегральных операторов (но не как операторов преобразования!) могут быть выведены из теоремы 2.1.5. Так можно получить, что формально обратным к оператору Бушмана–Эрдейи с параметрами $(\nu,\ \mu)$ является тот же оператор с параметрами $(\nu,\ 2-\mu)$. При этом из двух операторов — прямого и обратного — всегда один будет иметь интегральное представление (2.1)–(2.4), а другой определяется формулами (2.23); один будет обязательно иметь положительный порядок гладкости, а другой отрицательный (кроме операторов нулевого порядка гладкости). Кроме того, теорема 2.1.5 позволяет доопределить операторы Бушмана–Эрдейи на всю область значений параметров. Такое доопределение согласуется с (2.23). Отметим, что факторизации (2.29)–(2.32) являются новыми по сравнению с факторизациями, приведёнными в [165].

Рассмотрим связь между операторами Бушмана–Эрдейи и сплетающими операторами Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). Мы предпочтём дать новые определения для них, чтобы сохранить однообразие обозначений в этом пункте.

Определение 2.5 *Переопределим операторы преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта (см. гл.1) по формулам*

$$ {}_0S^{\nu}_{0+} = B^{\nu,\,\nu+2}_{0+} = I^{-(\nu+1)}_{0+;\,2,\,\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} \tag{2.33}$$

$$ {}_0P^{\nu}_{0+} = E^{\nu,\,-\nu}_{0+} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I^{\nu+1}_{0+;\,2,\,-\frac{1}{2}} \tag{2.34}$$

$$ {}_0P^{\nu}_{-} = B^{\nu,\,\nu+2}_{-} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I^{-(\nu+1)}_{-;\,2,\,\nu+1} \tag{2.35}$$

$$ {}_0S^{\nu}_{-} = E^{\nu,\,-\nu}_{-} = I^{\nu+1}_{-;\,2,\,0}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \tag{2.36}$$

Это определение в сочетании с (1.24),(1.26)–(1.27) приводит к следующим интегральным представлениям:

$$ {}_0S^{\nu}_{0+} f = \frac{2^{\nu+2}}{\Gamma(-\nu-1)} x \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{-\nu-2} t^{\nu+1} f(t)\,dt,\ \ Re\,\nu < -1,$$

$$= \frac{2^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\nu-1} t^{\nu+1} f(t)\, dt, \;\; Re\,\nu < 0;$$

$${}_0P^{\nu}_{0+} f = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} x^{-\nu} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu} f(t)\, dt, \;\; Re\,\nu > -1,$$

$$= \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+2)} \frac{1}{x^{\nu+1}} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu+1} f(t)\, dt, \;\; Re\,\nu > -2;$$

$${}_0P^{\nu}_{-} f = \frac{2^{\nu+2}}{\Gamma(-\nu-1)} x^{\nu+1} \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\nu-2} t f(t)\, dt, \;\; Re\,\nu < -1,$$

$$= \frac{2^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu)} x^{\nu} \left(-\frac{d}{dx}\right) \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\nu-1} t f(t)\, dt, \;\; Re\,\nu < 0;$$

$${}_0S^{\nu}_{-} f = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{\nu} t^{-\nu} f(t)\, dt, \;\; Re\,\nu > -1,$$

$$= \frac{1}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)} \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right) \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{\nu+1} t^{-\nu} f(t)\, dt, \;\; Re\,\nu > -2.$$

Эти операторы являются сплетающими типа Сонина или Пуассона. Если построить новые ОП для оператора углового момента (см. выше), то получим операторы типа Сонина

$$X_{\nu} f = {}_0S^{\nu-\frac{1}{2}}_{0+} x^{\nu} f = \frac{2^{\nu+\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})} x \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} t^{2\nu+1} f(t)\, dt$$

если $Re\,\nu < -1/2$, а если $Re\,\nu < 1/2$, то

$$X_{\nu} f = S_{\nu} f = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} t^{2\nu+1} f(t)\, dt \qquad (2.37)$$

Аналогично получим оператор типа Пуассона вида

$$Y_\nu f = P_\nu f = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \frac{1}{x^{2\nu}} \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} f(t)\,dt \tag{2.38}$$

при условии $Re\,\nu > -1/2$.

Отметим, что из теоремы 2.1.5 выводятся и формулы (2.14)–(2.15).

Перейдём теперь к изучению операторов (2.10)–(2.13). Отметим, что если функция $f(x)$ допускает дифференцирование под знаком интеграла или интегрирование по частям, то операторы (2.10)–(2.13) принимают вид

$$_1S^\nu_{0+} f = f(x) + \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy, \tag{2.39}$$

$$_1P^\nu_{0+} f = f(x) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial y} P_\nu \left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy, \tag{2.40}$$

$$_1P^\nu_{-} f = f(x) + \int\limits_x^\infty \frac{\partial}{\partial y} P_\nu \left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy, \tag{2.41}$$

$$_1S^\nu_{-} f = f(x) - \int\limits_x^\infty \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy. \tag{2.42}$$

При этом для справедливости (2.40) и (2.41) соответственно дополнительно необходимы условия

$$\lim_{x\to 0} P_\nu(0) f(x) = 0, \ \lim_{x\to\infty} P_\nu(x) f(x) = 0.$$

Несложными выкладками можно доказать, что при определённых условиях на функции операторы (2.10)–(2.13) являются операторами преобразования. Они сплетают оператор углового момента и вторую производную.

Из теоремы 2.1.5 вытекают следующие факторизации для операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости:

Следствие 2.1.1

$$
{}_1S^{\nu}_{0+} = I^{\nu+1}_{0+} I^{-(\nu+1)}_{0+;\,2,\,\nu+\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} \tag{2.43}
$$

$$
{}_1P^{\nu}_{0+} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I^{\nu+1}_{0+;\,2,\,-\frac{1}{2}} I^{-(\nu+1)}_{0+} \tag{2.44}
$$

$$
{}_1P^{\nu}_{-} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I^{-(\nu+1)}_{-;\,2,\,\nu+1} I^{\nu+1}_{-} \tag{2.45}
$$

$$
{}_1S^{\nu}_{-} = I^{-(\nu+1)}_{-} I^{\nu+1}_{-;\,2,\,0} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \tag{2.46}
$$

Теперь рассмотрим более подробно свойства ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, введённых по формулам (2.10). Подобный оператор был построен В.В. Катраховым [59]–[60] путём домножения стандартного ОП Сонина на обычный дробный интеграл с целью взаимно компенсировать гладкость этих двух операторов и получить новый, который бы действовал в одном пространстве типа $L_2(0,\infty)$. Как впоследствии оказалось, это можно сделать известными средствами, так как ОП Сонина—это частный случай операторов Эрдейи–Кобера. Существует замечательная теорема А. Эрдейи, позволяющая выделить стандартный дробный интеграл Римана–Лиувилля из дробного интеграла по любой функции [165]. В результате получается

Теорема 2.1.6 *Рассмотрим оператор дробного интегродифференцирования Эрдейи–Кобера по функции $g(x) = x^2$*

$$
I^{\alpha}_{0+;\,x^2} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} 2t \cdot f(t)\, dt
$$

при значениях $Re\,\alpha > 0$. Тогда при $0 < Re\,\alpha < \frac{1}{2}$ на подходящих функциях справедливо представление оператора Эрдейи–Кобера через дробный интеграл Римана–Лиувилля и оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости (2.10) при $0 < Re\,\alpha < \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha}_{0+,x^2}(f)(x) = I^{\alpha}_{0+} \left((2x)^{\alpha} f(x) + \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} P_{-\alpha}\left(\frac{x}{t}\right)\right) (2t)^{\alpha} f(t)\, dt \right) = \\
= B^{\nu,1}_{0+} \left((2x)^{\alpha} f \right),
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

где I^α_{0+} — обычный дробный интеграл Римана–Лиувилля.

Доказательство. Из теоремы А.Эрдейи [165] мы получаем представление вида

$$(2x)^\alpha f(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,s) f(s)\,ds.$$

Для ядра Φ справедливо представление [165]

$$\Phi(x,s) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi} 2s \cdot \int_s^x (x-u)^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1}\frac{(u-1)^{1-\alpha}}{(u^2-s^2)^{1-\alpha}}du$$

$$= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot 2s\cdot\int_s^x (x-u)^{-\alpha}(u^2-s^2)^{\alpha-1}du.$$

Интеграл вычисляется по формуле I, с. 301 из [156]. Получаем

$$\Phi(x,s) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot 2s\cdot(2s)^{\alpha-1}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\,{}_2F_1(\alpha, 1-\alpha; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{s}) =$$

$$= (2s)^\alpha {}_2F_1(\alpha, 1-\alpha; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{s})$$

Осталось воспользоваться формулой (14) из [156], с. 129.

Операторы нулевого порядка гладкости выделяются тем, что только для них можно доказать оценки в *одном* пространстве типа $L_p(0,\infty)$. При этом, учитывая структуру этих операторов, удобно пользоваться техникой преобразования Меллина и теоремой Слейтер (см. гл. 1).

Теорема 2.1.7 *1. Операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости действуют по правилу* (1.12). *Для их мультипликаторов справедливы формулы:*

$$m_{{}_1S^{\nu}_{0+}}(s)=\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}=; \tag{2.48}$$

$$=\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)}{\Gamma(1-s)}, Re\, s<\min(2+Re\,\nu,1-Re\,\nu);$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{0+}}(s)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})},\ Re\, s<1; \tag{2.49}$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{-}}(s)=\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}, Re\, s>\max(Re\,\nu,-1-Re\,\nu); \tag{2.50}$$

$$m_{{}_1S^{\nu}_{-}}(s)=\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})}, Re\, s>0 \tag{2.51}$$

2. Кроме того, выполняются следующие соотношения для мультипликаторов:

$$m_{{}_1P^{\nu}_{0+}}(s)=1/m_{{}_1S^{\nu}_{0+}}(s),\ m_{{}_1P^{\nu}_{-}}(s)=1/m_{{}_1S^{\nu}_{-}}(s) \tag{2.52}$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{-}}(s)=m_{{}_1S^{\nu}_{0+}}(1-s),\ m_{{}_1P^{\nu}_{0+}}(s)=m_{{}_1S^{\nu}_{-}}(1-s) \tag{2.53}$$

3. Справедливы следующие формулы для норм операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2*:*

$$\|{}_1S^{\nu}_{0+}\|=\|{}_1P^{\nu}_{-}\|=1/\min(1,\sqrt{1-\sin\pi\nu}), \tag{2.54}$$

$$\|{}_1P^{\nu}_{0+}\|=\|{}_1S^{\nu}_{-}\|=\max(1,\sqrt{1-\sin\pi\nu}). \tag{2.55}$$

4. Нормы операторов (2.10) – (2.13) *периодичны по* ν *с периодом 2, то есть* $\|x^{\nu}\|=\|x^{\nu+2}\|$, *где* x^{ν} *— любой из операторов* (2.10) – (2.13).

5. Нормы операторов ${}_1S^{\nu}_{0+}$, ${}_1P^{\nu}_{-}$ *не ограничены в совокупности по* ν, *каждая из этих норм не меньше* 1. *Если* $\sin\pi\nu\leqslant 0$, *то эти нормы равны* 1. *Указанные операторы неограничены в* L_2 *тогда и только тогда, когда* $\sin\pi\nu=1$ *(или* $\nu=(2k)+1/2,\ k\in\mathbb{Z}$*).*

6. Нормы операторов ${}_1P^{\nu}_{0+}$, ${}_1S^{\nu}_{-}$ *ограничены в совокупности по* ν, *каждая из этих норм не больше* $\sqrt{2}$. *Все эти операторы ограничены* *в L_2 при всех ν. Если $\sin\pi\nu \geqslant 0$, то их L_2 – норма равна 1. Максимальное значение нормы, равное $\sqrt{2}$, достигается тогда и только тогда, когда $\sin\pi\nu = -1$ (или $\nu = -1/2 + (2k)$, $k \in \mathbb{Z}$).*

Доказательство.

Будем доказывать требуемые утверждения для первого оператора, для остальных доказательства аналогичны.

1. Вначале докажем формулу (1.12) с нужным мультипликатором (2.48). Используя последовательно формулы из [119] (7), с. 130, (2) с. 129, (4) с. 130, получим

$$M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](s) = \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}\cdot M\left[\int_0^\infty \left\{H(\frac{x}{y}-1)P_\nu(\frac{x}{y})\right\}\{yf(y)\}\,\frac{dy}{y}\right](s-1) =$$

$$= \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}\cdot M\left[(x^2-1)_+^0 P_\nu^0(x)\right](s-1)\cdot M\left[f\right](s),$$

где использованы обозначения из [119] для функции Хевисайда и усечённой степенной функции

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases},\ H(x) = x_+^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Далее, используя формулы 14 (1) с. 234 и 4 с. 130 из [119], получаем

$$M\left[(x-1)_+^0 P_\nu^0(\sqrt{x})\right](s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-s)\Gamma(-\frac{\nu}{2}-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{1}{2}-s)},$$

$$M\left[(x^2-1)_+^0 P_\nu^0(x)\right](s-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2})\Gamma(-\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2})}{\Gamma(1-\frac{s-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s-1}{2})} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{s}{2}+1)}$$

при условиях $Re\, s < \min(2+Re\,\nu,\ 1-Re\,\nu)$. Отсюда выводим формулу для мультипликатора

$$M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}\cdot\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1\right).$$

Применяя к $\Gamma\,(2-s)$ формулу Лежандра удвоения аргумента гамма–функции (см., например, [10]), получим

$$M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](s)=\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1-s)}.$$

Ещё одно применение формулы удвоения Лежандра к $\Gamma(1-s)$ приводит к нужной формуле для мультипликатора (2.48).

В работе [66] показано, что за счёт рассмотрения подходящих факторизаций, условия справедливости доказанной формулы, приведённые в [119] для более общего случая, являются в рассматриваемом нами случае завышенными, их можно несколько расширить. В частности, формула для мультипликатора справедлива при условиях $0<Re\,s<1$ при всех значениях параметра ν, что проверяется непосредственно.

2. Теперь установим формулу для нормы (2.54). Из найденной формулы для мультипликатора в силу теоремы 1.2.1 получаем на прямой $Re\,s=1/2, s=iu+1/2$

$$|M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](iu+1/2)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\Gamma(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iu)}\right|.$$

Далее будем опускать у мультипликатора указание на порождающий его оператор. Используем формулу для модуля комплексного числа $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ и тождество для гамма–функции $\overline{\Gamma(z)}=\Gamma(\bar{z})$, вытекающее из её определения в виде интеграла. Последнее равенство справедливо для класса так называемых вещественно–аналитических функций, к которому относится и гамма–функция. Тогда получим

$$|M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](iu+1/2)|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\Gamma(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})\Gamma(i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iu)\Gamma(\frac{1}{2}+iu)}\right|.$$

В числителе объединим крайние и средние сомножители, и три образовавшиеся пары гамма–функций преобразуем по известной формуле (см.

[10])

$$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\;\Gamma(\frac{1}{2}-z)=\frac{\pi}{\cos\pi z}.$$

В результате получим

$$|M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](iu+1/2)|=\sqrt{\frac{\cos(\pi iu)}{2\cos\pi(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}+i\frac{u}{2})\cos\pi(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-i\frac{u}{2})}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\pi iu)}{\operatorname{ch}\pi u-\sin\pi\nu}}$$

Далее обозначим $t=\operatorname{ch}\pi u, 1\leqslant t<\infty$. Отсюда, применяя условие из теоремы 1.2.1, получаем

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}|m(iu+\frac{1}{2})|=\sup_{1\leqslant t<\infty}\sqrt{\frac{t}{t-\sin\pi\nu}}.$$

Поэтому, если $\sin\pi\nu\geqslant 0$, то супремум достигается при $t=1$, и справедлива нужная формула для нормы

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin\pi\nu}}.$$

Если же $\sin\pi\nu\leqslant 0$, то супремум достигается при $t\to\infty$, и справедлива формула

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2}=1.$$

Эта часть теоремы доказана.

Утверждения теоремы 3–6 теперь напрямую следуют из найденной формулы для нормы и условий теоремы 1.2.1. Теорема полностью доказана.

Важнейшим свойством операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν. Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике, параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения. Сформулируем один из основных результатов данной главы.

Теорема 2.1.8 *Для унитарности в L_2 операторов* (2.10) – (2.13) *необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов $({}_1S_{0+}^{\nu},\ {}_1P_{-}^{\nu})$ и $({}_1S_{-}^{\nu},\ {}_1P_{0+}^{\nu})$ взаимно обратны.*

Доказательство.

При $\nu \in \mathbb{Z}$ получим $\sin \pi\nu = 0$ и модуль соответствующего мультипликатора в формуле (2.48) тождественно равен единице на нужной прямой $Re\, s = \frac{1}{2}$. Поэтому, по свойству г) теоремы 1.2.1 данный оператор является унитарным в $L_2(0,\infty)$, как и его обратный. То, что соответствующие пары операторов являются взаимно обратными, теперь следует из того, что они являются сопряжёнными в $L_2(0,\infty)$. Теорема доказана.

Эта теорема была первоначально сформулирована в [58]–[59], доказательство содержало неточности (утверждалась унитарность при всех ν), затем скорректированные в [68],[70],[4],[67],[72], см. также [6],[28]–[29],[66].

Перед формулировкой частного случая как следствия предположим, что операторы (2.10) – (2.13) заданы на таких функциях $f(x)$, что справедливы представления (2.39)–(2.42) (для этого достаточно предположить, что $xf(x) \to 0$ при $x \to 0$). Тогда при $\nu = 1$

$$
{}_1P^1_{0+}f = (I - H_1)f,\ {}_1S^1_{-}f = (I - H_2)f, \tag{2.56}
$$

где $H_1,\ H_2$ – операторы Харди (см. гл. 1)

$$
H_1 f = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)dy,\ H_2 f = \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}dy, \tag{2.57}
$$

I — единичный оператор.

Следствие 2.1.2 *Операторы* (2.56) *являются унитарными взаимно обратными в* L_2 *операторами. Они сплетают дифференциальные выражения* d^2/dx^2 *и* $d^2/dx^2 - 2/x^2$.

Кроме того, можно показать, что операторы (2.56) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов $\pm 2i(xf(x))$ при соответствующем выборе областей определения.

В унитарном случае операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости образуют пару биортогональных преобразований Ватсона, а их ядра образуют пары несимметричных ядер Фурье [49]. Ограниченность операторов с подобными мультипликаторами изучалась ещё Лесли Фоксом.

Отметим важность изучения унитарности для теории интегральных уравнений. В этом случае обратный оператор необходимо искать в виде интеграла с другими, чем у исходного, пределами интегрирования.

Рассмотрим случай $\nu = i\alpha - \frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, связанный с преобразованием Мелера–Фока.

Теорема 2.1.9 *Пусть $\nu = i\alpha - \frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда операторы* (2.10) – (2.13) *ограничены в L_2 при всех таких ν. Для их норм справедливы формулы*

$$\|{}_1S_{0+}^{i\alpha-\frac{1}{2}}\| = \|{}_1P_{-}^{i\alpha-\frac{1}{2}}\| = 1$$

Доказательство такое же, как и для вещественного ν.

Далее перечислим некоторые общие свойства операторов, которые действуют по правилу (1.12) как умножение на некоторый мультипликатор в образах преобразования Меллина и одновременно являются сплетающими для второй производной и оператора углового момента.

Теорема 2.1.10 *Пусть оператор S_ν действует по формулам* (1.12) *и* (2.25). *Тогда*

а) его мультипликатор удовлетворяет функциональному уравнению

$$m(s) = m(s-2)\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)-\nu(\nu+1)}; \tag{2.58}$$

б) если функция $p(s)$ периодична с периодом 2 (то есть $p(s) = p(s-2)$), то функция $p(s)m(s)$ является мультипликатором нового оператора преобразования S_2^ν, опять же сплетающего L_ν и вторую производную по правилу (2.25).

Доказательство. Второй пункт следует из первого. Уравнение (2.58) получается из (2.25) применением преобразования Меллина и использованием формул преобразования простейших операций [119].

Последняя теорема ещё раз показывает, насколько удобно изучение ОП в терминах мультипликаторов преобразования Меллина.

Определим преобразование Стилтьеса (см., например, [165]) по формуле

$$(Sf)(x) = \int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{x+t} dt.$$

Этот оператор имеет вид (1.12) с мультипликатором $p(s) = \pi/sin(\pi s)$ и ограничен в L_2. Очевидно, что $p(s) = p(s-2)$. Поэтому из теоремы 2.1.10 следует, что композиция преобразования Стилтьеса с ограниченными сплетающими операторами (2.10)–(2.13) снова является оператором преобразованием того же типа, ограниченным в L_2.

Отметим, что из предыдущего изложения следует, что

$$\|S\|_{L_p} = |\pi / \sin \frac{\pi}{p}|, \ p > 1.$$

С другой стороны,

$$\|S\|_{L_{2,k}} = |\pi / \sin \pi k|, \ k \notin \mathbb{Z}.$$

Аналогично получаются оценки в весовых пространствах $L_{p,k}$ $p > 0$.

Рассмотрим теперь оператор H^ν вида (1.12) с мультипликатором

$$m(s) = \sqrt{\frac{\sin \pi s - \sin \pi \nu}{\sin \pi s}} \tag{2.59}$$

Из теоремы 2.1.7 получаем, что на прямой $Re\, s = \frac{1}{2}$ величина $m(s)$ обратна величине (2.59). Тогда из этой теоремы следует, что

$$\|H^\nu\|_{L_2} = \|{}_1P^\nu_{0+}\|_{L_2} = \|{}_1S^\nu_-\|_{L_2}. \tag{2.60}$$

Поэтому для оператора H^ν справедливо заключение теоремы 2.1.7. В частности H^ν ограничен в L_2 при всех ν.

Отметим, что формально этот оператор связан с преобразованием Стилтьеса формулой

$$H^\nu = (1 - \frac{\sin \pi \nu}{\pi} S)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.61}$$

Одновременно с H^ν введём оператор $\mathfrak{D}^\nu$ с мультипликатором

$$m_{\mathfrak{D}^\nu}(s) = \sqrt{\frac{\sin \pi s}{\sin \pi s - \sin \pi \nu}}$$

Отсюда получаем, что

$$\|\mathfrak{D}^\nu\|_{L_2} = \|{}_1S^\nu_{0+}\|_{L_2} = \|{}_1P^\nu_{-}\|_{L_2}. \tag{2.62}$$

и кроме того, оператор $\mathfrak{D}^\nu$ ограничен при $\sin \pi\nu \neq 1$.

Теорема 2.1.11 *Рассмотрим композиции операторов*

$$ {}_3S^\nu_{0+} = {}_1S^\nu_{0+} H^\nu,\ {}_3S^\nu_{-} = \mathfrak{D}^\nu\, {}_1S^\nu_{-}, \tag{2.63}$$

$$ {}_3P^\nu_{0+} = \mathfrak{D}^\nu\, {}_1P^\nu_{0+},\ {}_3P^\nu_{-} = {}_1P^\nu_{-} H^\nu. \tag{2.64}$$

Тогда операторы ${}_3S^\nu_{0+}$, ${}_3S^\nu_{-}$ являются новыми операторами преобразования типа Сонина, а ${}_3P^\nu_{0+}$, ${}_3P^\nu_{-}$ — типа Пуассона. Все эти операторы унитарны в L_2. Кроме того, если $\sin\pi\nu \neq 1$, *то композиции* (2.63) – (2.64) *можно вычислять в любом порядке.*

Доказательство этой теоремы очевидно и следует из перехода к мультипликаторам. Аналогичная идея применена в [320] для подправления преобразования Радона до изометрии.

Ниже будет получено явное интегральное представление операторов преобразования, сплетающих L_ν и d^2/dx^2, которые *являются унитарными при всех $\nu \in \mathbb{R}$.*

Изучим вопрос о взаимосвязи разносторонних операторов Бушмана–Эрдейи. Полученные формулы аналогичны тем, которые связывают лево– и правосторонние дробные интегралы Римана–Лиувилля (см. [165], с. 163–171). С этой целью введём оператор

$$C^\nu f = f(x) - \frac{sin\pi\nu}{\pi} Sf, \tag{2.65}$$

где S — преобразование Стильтьеса. Приведём без доказательства свойства C^ν:

1) $\|C^\nu\|_{L_2} = \min(1, 1 - \sin\pi\nu) \leqslant 1,\ \nu \in \mathbb{R}$;

2) $\|C^\nu\|_{L_2} = 1 + \operatorname{ch}\pi\alpha,\ \nu = i\alpha - \frac{1}{2},\ \alpha \in \mathbb{R}$;

Теорема 2.1.12 *При $\nu \in \mathbb{R}$ справедливы тождества для композиций*

$$C^\nu = {}_1S^\nu_- \; {}_1P^\nu_{0+} = {}_1P^\nu_{0+} \; {}_1S^\nu_-, \tag{2.66}$$

$${}_1S^\nu_- = {}_1S^\nu_{0+} \; C^\nu, \; {}_1P^\nu_{0+} = {}_1P^\nu_- \; C^\nu, \tag{2.67}$$

$${}_1S^\nu_- = C^\nu \; {}_1S^\nu_{0+}, \; {}_1P^\nu_{0+} = C^\nu \; {}_1P^\nu_-, \; \sin\pi\nu \neq 1. \tag{2.68}$$

2.2 Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи второго рода

Теперь определим и изучим операторы Бушмана–Эрдейи второго рода. В этом пункте для краткости некоторые доказательства будут опущены, так как они в основном повторяют доказательства из предыдущего пункта.

Введём новую пару операторов Бушмана–Эрдейи с функциями Лежандра второго рода [10] в ядре

Определение 2.6

$${}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} Q^1_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}^1_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy\right), \tag{2.69}$$

$${}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}^1_\nu\left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q^1_\nu\left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy\right). \tag{2.70}$$

При $y \to x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (2.69) будет типа Сонина, (2.70) — типа Пуассона).

Теорема 2.2.1 *Операторы* (2.69) – (2.70) *представимы в виде* (1.12) *с мультипликаторами*

$$m_{{}_2S^\nu}(s) = p(s)\ m_{{}_1S^\nu_-}(s), \tag{2.71}$$

$$m_{{}_2P^\nu}(s) = \frac{1}{p(s)}\ m_{{}_1P^\nu_-}(s), \tag{2.72}$$

где мультипликаторы операторов ${}_1S^\nu_-$, ${}_1P^\nu_-$ *определены формулами* (2.50) – (2.51), *а функция* $p(s)$ *(с периодом 2) равна*

$$p(s) = \frac{\sin\pi\nu + \cos\pi s}{\sin\pi\nu - \sin\pi s}. \tag{2.73}$$

Вначале докажем лемму.

Лемма 2.2.1 *Рассмотрим более общий чем* (2.69) *интегральный оператор при значениях* $\operatorname{Re}\nu < 1$*:*

$$\begin{gathered}{}_3S^{\nu,\mu}f = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^x (x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} e^{-\mu\pi i} Q^\mu_\nu(\frac{x}{y}) f(y)\,dy + \right. \\ \left. + \int\limits_x^\infty (y^2+x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{Q}^\mu_\nu(\frac{x}{y}) f(y)\,dy\right),\end{gathered} \tag{2.74}$$

где $Q^\mu_\nu(z)$ — *функция Лежандра второго рода,* $\mathbb{Q}^\mu_\nu(z)$ — *значение этой функции на разрезе.*

Тогда на функциях из $C_0^\infty(0,\infty)$ *оператор* (2.74) *определён и действует по формуле*

$$M_3S^\nu(s) = m(s)\cdot Mx^{1-\mu}f(s),$$

$$\begin{gathered}m(s) = 2^{\mu-1}\left(\frac{\cos\pi(\mu-s) - \cos\pi\nu}{\sin\pi(\mu-s) - \sin\pi\nu}\right)\cdot \\ \cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}))}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1-\nu-\mu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+1+\frac{\nu-\mu}{2})}\right).\end{gathered} \tag{2.75}$$

Доказательство. Из асимптотики функций Лежандра [10] следует, что оператор (2.74) определён. Записывая его как свёртку Меллина, и последовательно применяя формулы (2.50) с. 31, 10 с. 283, 40(1) с.251, 5 с.130 из [119], получим выражение (2.2.1) со значением мультипликатора

$$\frac{2^{\mu-2}}{\pi^2}\cdot\frac{\sin\pi(\nu-\mu)}{\sin\pi\mu}\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1+\mu+\nu}{2}-\frac{s}{2})\Gamma(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{s}{2})+$$

$$+\frac{2^{\mu-1}}{\sin\pi\mu}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1+\mu+\nu}{2}-\frac{s}{2})\Gamma(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{s}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})}+$$

$$+\frac{2^{\mu-1}\cos\pi\mu}{\sin\pi\mu}\cdot\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1-\nu-\mu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+1+\frac{\nu-\mu}{2})}.$$

В двух последних слагаемых "поднимем" гамма–функции в числитель из знаменателя, переходя от $\Gamma(z)$ к $\Gamma(1-z)$. Получим

$$m(s)=\frac{2^{\mu-1}}{\pi^2\sin\pi\mu}A(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\mu+\nu+1-s}{2})\Gamma(\frac{\mu-\nu-s}{2}).$$

Выражение $A(s)$ последовательно преобразуем по элементарным тригонометрическим формулам

$$A(s)=\sin\pi(\nu-\mu)+$$

$$+2\sin\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi s}{2}-2\cos\pi\mu\cdot\cos\frac{\pi}{2}(s-\nu-\mu)\sin\frac{\pi}{2}(s+\nu-\mu)=$$

$$=\sin\pi(\nu-\mu)+\sin\pi s-\cos\pi\mu(\sin\pi\nu+\sin\pi(s-\mu))=$$

$$=\sin\pi\mu\cdot(\cos\pi(s-\mu)-\cos\pi\nu).$$

Подставим это выражение в $m(s)$. Перебрасывая две последние гамма–функции в знаменатель, получим (2.2.1). Применение указанных формул из [119] приводит к ограничениям на значения переменной

$$0<Re(\nu+\mu)<\min(1+Re(\nu+\mu),\ Re(\mu-\nu)),\qquad(2.76)$$

которые в нашем случае можно ослабить. Лемма доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 2.2.1. Из формулы (2.2.1) следует, что можно перейти к пределу при $\mu \to 1-0$. Отсюда получим (2.71) и (2.73). Аналогичными рассуждениями доказывается (2.72).

Отметим, что в процессе доказательства построено ещё одно семейство операторов преобразования типа Сонина (2.74).

Доказательства следующих результатов полностью аналогичны соответствующим утверждениям для операторов Бушмана–Эрдейи первого рода.

Теорема 2.2.2 *Справедливы формулы для норм*

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\nu}), \tag{2.77}$$

$$\|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1/\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\nu}). \tag{2.78}$$

Следствие. Оператор ${}_2S^\nu$ ограничен при всех ν. Оператор ${}_2P^\nu$ не является непрерывным тогда и только тогда, когда $\sin\pi\nu = -1$.

Теорема 2.2.3 *Для унитарности в L_2 операторов ${}_2S^\nu$ и ${}_2P^\nu$ необходимо и достаточно, чтобы параметр ν был целым числом.*

Теорема 2.2.4 *Пусть $\nu = i\beta + 1/2,\ \beta \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \sqrt{1+\operatorname{ch}\pi\beta},\ \|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1. \tag{2.79}$$

Теорема 2.2.5 *Справедливы представления*

$${}_2S^0 f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y}{x^2-y^2} f(y)\,dy, \tag{2.80}$$

$${}_2S^{-1} f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2-y^2} f(y)\,dy. \tag{2.81}$$

Таким образом, в этом случае оператор ${}_2S^\nu$ сводится к паре известных преобразований Гильберта на полуоси [165].

2.3 Унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова

Перейдём к построению операторов преобразования, унитарных при всех ν. Такие операторы определяются по формулам:

$$S_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2S^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1S_-^\nu f, \tag{2.82}$$

$$P_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2P^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1P_-^\nu f. \tag{2.83}$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана–Эрдейи 1 и 2 рода нулевого порядка гладкости. Их можно назвать операторами Бушмана–Эрдейи третьего рода. В интегральной форме эти операторы имеют вид:

$$S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy + \tag{2.84}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\right),$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy - \tag{2.85}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\right).$$

Теорема 2.3.1 *Операторы* (2.82)–(2.83) *или* (2.84)–(2.85) *при всех* ν *являются унитарными, взаимно сопряжёнными и обратными в* L_2. *Они* *являются сплетающими и действуют по формулам* (2.24). *При этом* S_U^ν *является оператором типа Сонина (Сонина–Катрахова), а* P_U^ν *– типа Пуассона (Пуассона–Катрахова).*

Доказательство.

Проверим выполнение равенства (1.9) для одного из мультипликаторов. Аналогично случаю теоремы 2.1.7 с использованием свёртки Меллина и формул для преобразования Меллина специальных функций получается следующая формула для мультипликатора:

$$M\left[S_U^\nu\right](s) = -\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi s-\cos\pi\nu}{\sin\pi s-\sin\pi\nu}\right)\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right)+$$

$$+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right)=$$

$$=\left(-\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi s-\cos\pi\nu}{\sin\pi s-\sin\pi\nu}\right)+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\right)\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right).$$

Полностью вычисления проведены в [66]. Далее рассматриваем в соответствии с теоремой 1.2.1 с учётом выкладок из теоремы 2.1.7 величину

$$\left|M\left[S_U^\nu\right](iu+\frac{1}{2})\right|=$$

$$=\left|-\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi(iu+\frac{1}{2})-\cos\pi\nu}{\sin\pi(iu+\frac{1}{2})-\sin\pi\nu}\right)+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\right|\cdot\sqrt{\frac{\cos\pi u-\sin\pi\nu}{\cos\pi u}}=$$

$$=\left|\frac{\sin(\frac{\pi\nu}{2})-\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\pi iu\right)}{\sin\pi\nu-\cos\pi iu}\right|\cdot\sqrt{\frac{\cos\pi u-\sin\pi\nu}{\cos\pi u}}=$$

$$=\left|\frac{\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}\pi u+i\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}\pi u}{\sqrt{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}\right|.$$

Вычисляя модуль и заменяя затем тригонометрический и гиперболический синусы на косинусы, получим:

$$\left|M\left[S_U^\nu\right](iu+\frac{1}{2})\right|=\sqrt{\frac{\left(\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}\pi u\right)^2+\left(\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}\pi u\right)^2}{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}=$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \pi u - \sin \pi\nu \operatorname{ch} \pi u}{\operatorname{ch} \pi u (\operatorname{ch} \pi - \sin \pi\nu)}} = 1.$$

Унитарность этим доказана. Взаимная сопряжённость следует из определений (2.82)–(2.83), если рассматривать операторы как расширения с множества финитных функций. Следовательно, эти унитарные операторы и взаимно обратны. То, что они являются ОП типа Сонина и Пуассона, вытекает из проверки условий для мультипликаторов теоремы 1.2.1. Теорема доказана.

Этим результатом завершается история построения унитарных ОП типа Сонина и Пуассона. Унитарные операторы преобразования тесно связаны с унитарностью оператора рассеяния в задачах квантовой механики [4],[195]–[196],[210].

Интересно рассмотреть частный случай, который вытекает из теоремы 2.3.1 при $\nu = 1$. Получаем пару очень простых операторов

$$B_{0+}^{1,1} f = f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy, \;\; B_{-}^{1,1} f = f(x) - \int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\, dy, \qquad (2.86)$$

связанных со знаменитыми операторами Харди

$$H_1 f = \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy, H_2 f = \int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\, dy. \qquad (2.87)$$

По поводу теории неравенств Харди см. [329]. Из наших результатов следует

Теорема 2.3.2 *Операторы (2.86) образуют пару взаимнообратных унитарных в $L_2(0,\infty)$ операторов. Они сплетают как ОП $\frac{d^2}{dx^2}$ и $\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}$.*

Как следует из (2.87), операторы Бушмана–Эрдейи могут рассматриваться как *обобщения операторов Харди*, а неравенства для их норм являются *определёнными обобщениями неравенств Харди*, что позволяет взглянуть на этот класс операторов под новым интересным углом зрения. Кроме того, можно показать, что операторы (2.86) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов $\pm 2i(xf(x))$ при соответствующем выборе областей определения. Их спектром является единичная окружность. В [6],[66] эти вопросы рассмотрены и для пространств со степенным весом.

Результат об унитарности из теоремы 2.3.2 рассматривался Куфнером, Перссоном и Малиграндой [311], давшими его элементарное доказательство и приложения. Теорема 2.3.1 позволяет выписать ещё несколько пар унитарных в $L_2(0,\infty)$ операторов очень простого вида, которые являются частными случаями операторов Бушмана–Эрдейи при целых ν ([6],[66]):

$$
\begin{aligned}
U_3 f = f + \int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y},\ U_4 f = f + \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy,\\
U_5 f = f + 3x\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2},\ U_6 f = f - \frac{3}{x^2}\int_0^x y f(y)\,dy,\\
U_7 f = f + \frac{3}{x^2}\int_x^\infty y f(y)\,dy,\ U_8 f = f - 3x\int_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2},\\
U_9 f = f + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y}\right) f(y)\,dy,\\
U_{10} f = f + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) f(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

Этот перечень можно продолжить дальше.

ОП в форме подобной (2.84–2.85), но только с ядрами, выражающимися через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, были впервые построены в 1980 г. В.В. Катраховым. Поэтому автор предлагает названия: операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова. Их выражение через функции Лежандра первого и второго родов получено автором, кроме того их удаётся включить в общую схему построения операторов преобразования композиционным методом, изложенным ниже. При этом основными становятся наиболее простые формулы факторизации вида (2.82)–(2.83). На этом пути построение подобных операторов перестаёт быть специальным искусным приёмом, а встраивается в общую методику построения целых классов подобных операторов преобразования композиционным методом.

2.4 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах

2.4.1 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к задачам для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и лемме Копсона

Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к обобщению леммы Копсона

Рассмотрим теперь приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости к обобщениям и уточнению леммы Копсона.

Теорема 2.4.1 *Рассмотрим задачу Дирихле в четверти плоскости для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в условиях леммы Копсона* (2.5)–(2.6). *Тогда между данными задачи Дирихле справедливы соотношения, выражающиеся через операторы Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости:*

$$\frac{c_\beta}{x^\beta} E_{0+}^{-\alpha,1-\beta}(y^{\alpha+\beta+1} f(y)) = \frac{c_\alpha}{x^\alpha} E_{0+}^{-\beta,1-\alpha}(y^{\alpha+\beta+1} g(y)), c_\beta = 2^\Gamma \beta + 1/2, \tag{2.88}$$

$$\frac{c_\beta}{x^\beta} {}_1P_{0+}^{-\alpha} I_{0+}^{\beta}(y^{\alpha+\beta+1} f(y)) = \frac{c_\alpha}{x^\alpha} {}_1P_{0+}^{-\beta} I_{0+}^{\alpha}(y^{\alpha+\beta+1} g(y)), \tag{2.89}$$

Данные формулы являются прямыми следствиями теоремы 2.1.1. С другой стороны, применяя теперь полученную выше теорему 2.1.5, в которой операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости были профакторизованы через дробные интегралы Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, мы получаем такой результат.

Теорема 2.4.2 *Между данными задачи Дирихле в условиях леммы Копсона справедливы соотношения, выражающиеся через операторы Эрдейи–Кобера:*

$$x^{\alpha+\beta+1}f(x) = \frac{c_\alpha}{c_\beta} I^{\alpha-\beta}_{0+;2;-1/2}(y^{\alpha+\beta+1}g(y)). \tag{2.90}$$

Последнее соотношение уточняет соответствующий результат из оригинальной работы Копсона, который, по–видимому, содержит неточности в коэффициентах.

Связь между данными на осях, выраженная через операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, позволяет установить дополнительные результаты.

Теорема 2.4.3 *Рассмотрим пространство с весом $L_{2,x^k}(0,\infty)$, и пусть α,β — целые числа. Тогда для весовых норм данных Дирихле справедливы соотношения*

$$c_\beta \| I^\beta_{0+}(y^{\alpha+\beta+1}f(y))\| = c_\alpha \| I^\alpha_{0+}(y^{\alpha+\beta+1}g(y))\|. \tag{2.91}$$

Этот результат следует из условия унитарности операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в теореме 2.1.8. Кроме того, в этом случае можно из той же теоремы выразить данные не через оператор Эрдейи–Кобера, а через обратный оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, получив новое соотношение. Для произвольных, не являющихся целыми значений параметров, из теоремы 2.1.7 также получается соотношение между весовыми нормами данных Дирихле.

Задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД)

Рассмотрим уравнение ЭПД в полупространстве

$$B_{\alpha,t}u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + F(t,x),$$

где $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Дадим описание процедуры, позволяющей получать различные постановки начальных условий при $t=0$ единым методом. Образуем по формулам (2.24) операторы преобразования $X_{\alpha,t}$ и

$Y_{\alpha,t}$. Предположим, что существуют выражения $X_{\alpha,t}u = v(t,x)$, $X_{\alpha,t}F = G(t,x)$. Пусть обычная (несингулярная) задача Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_x v + G, \ v|_{t=0} = \varphi(x), \ v'_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{2.92}$$

корректно разрешима в полупространстве. Тогда получаем следующие начальные условия для уравнения ЭПД:

$$X_\alpha u|_{t=0} = a(x), \ (X_\alpha u)'|_{t=0} = b(x). \tag{2.93}$$

При этом различному выбору операторов преобразования $X_{\alpha,t}$ (операторы Сонина, Бушмана–Эрдейи, Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости I или 2 рода, унитарные операторы третьего рода (2.84), обобщенные операторы Бушмана–Эрдейи) будут соответствовать различные начальные условия. Следуя изложенной методике в каждом конкретном случае их можно привести к более простым аналитическим формулам. При этом с использованием интегральных ОП различных типов для каждого конкретного ОП будут получатся некоторые нелокальные начальные условия, в том числе и с возможностью рассмотрения решений с особенностями.

Данная схема обобщается на дифференциальные уравнения с большим числом переменных, по которым могут действовать операторы Бесселя с различными параметрами, а также уравнения других типов. Применение операторов преобразований позволяет сводить сингулярные (или иначе вырождающиеся) уравнения с операторами Бесселя по одной или нескольким переменным (уравнения ЭПД, сингулярное уравнение теплопроводности, B—эллиптические уравнения по определению И.А. Киприянова, уравнения обобщённой осесимметрической теории потенциала—теории $GASPT$(*Generalized Axially Symmetric Potential Theory*) —А. Вайнстейна и другие) к несингулярным. При этом априорные оценки для сингулярного случая получаются как следствия соответствующих априорных оценок для регулярных уравнений, если только удалось оценить сами операторы преобразования в нужных функциональных пространствах. Значительное число подобных оценок было приведено выше.

2.4.2 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений

Начнём с простого, но важного замечания. Любую из рассмотренных в этой главе пар операторов преобразования, сплетающих операторы Бесселя и вторую производную, можно использовать для установления связей между решениями дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах с операторами Бесселя вида

$$\sum a_k B_{\nu_k, x_k} u(x) = f(x)$$

и невозмущённого уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum a_k \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_k^2} = g(x).$$

При этом если пары взаимообратных ОП действуют по каждой переменной по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu, \tag{2.94}$$

то решения возмущённого и невозмущённого уравнений связаны соотношениями

$$u(x) = \prod_k S_{\nu_k} v(x), \quad v(x) = \prod_k P_{\nu_k} u(x)$$

(операторы типа Сонина и Пуассона). При этом результаты об ограниченности, оценках норм, унитарности операторов преобразований приводят автоматически к соответствующим утверждениям для пар решений дифференциальных уравнений. Мы ограничимся этой схемой, не выписывая соответствующих формул связи и оценок для решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Рассмотрим подробно один пример, позволяющий использовать построенные ОП различных классов и их оценки для построения решений одного из нелинейных уравнений. В работе А.В.Бицадзе [16] указано, что в математической физике ряд задач сводятся к решению нелинейных уравнений Максвелла–Эйнштейна вида

$$\Delta u + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{u}(1 - \frac{u^2}{A^2 - u^2})(u_x^2 + u_y^2) = 0, \tag{2.95}$$

$$\Delta u + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{u}(u_x^2 + u_y^2) = 0, \tag{2.96}$$

Используя результаты этой работы А.В.Бицадзе и развитую нами технику ОП, получаем следующее приложение рассмотренных классов ОП к нелинейным уравнениям математической физики Максвелла–Эйнштейна.

Теорема 2.4.4 *Пусть P — произвольный оператор преобразования типа Пуассона, удовлетворяющий сплетающему свойству на гладких функциях*

$$P\ D^2 = (\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx})\ P, \tag{2.97}$$

$g(x,y)$ — произвольная гармоническая функция. Тогда функция $u_1(x,y) = \frac{A}{\mathrm{ch}(CP_xg(x,y))}$ является решением нелинейного уравнения (2.95)*, а функция $u_2(x,y) = \exp(DP_xg(x,y))$ является решением нелинейного уравнения* (2.96)*, C, D — произвольные постоянные.*

Нами построены различные классы ОП типа Пуассона: Бушмана–Эрдейи первого, второго родов, нулевого порядка гладкости, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова и тд. Теперь мы можем использовать их в приведённой теореме для получения представлений решений нелинейных уравнений Максвелла–Эйнштейна через гармонические функции.

2.5 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению интегродифференциальных уравнений

2.5.1 Приложения операторов преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению одной пары интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотрим приложения унитарных операторов Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению соответствующих интегродифференциальных уравнений.

Теорема 2.5.1 *Пусть функции* $f(x),\ \ g(x) \in L_2(0,\infty)$ *и непрерывно дифференцируемы на полуоси. Тогда следующие интегро–дифференциальные уравнения взаимно обратны и решаются по приведённым формулам:*

$$g(x) = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \tag{2.98}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right),$$

$$f(x) = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right) g(y)\,dy - \tag{2.99}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) g(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) g(y)\,dy\right).$$

При этом в указанном пространстве нормы решений и правых частей равны.

Это приложение теоремы об унитарности ОП Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова. Отметим, что при специальных значениях параметра ν, при которых функции Лежандра выражаются через более простые функции, получается список конкретных интегро–дифференциальных уравнений, для которых получены явные решения с их оценками. Мы не будем приводить здесь этот список.

2.5.2 Решение задачи об обращении операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости с приложениями к решению соответствующих интегродифференциальных уравнений

В этом пункте подробнее будет исследовано условие унитарности при целых значениях параметра для операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости с использованием теоремы Бохнера, решена задача об обращении операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, рассмотрены решения соответствующих интегродифференциальных уравнений, в том числе включающие известные операторы Харди.

Унитарность и обращение операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в Лебеговых пространствах

Рассмотрим операторы преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, для которых в этом пункте мы выберем более простые обозначения

$$S_\nu u(r) = u(r) - \int\limits_r^\infty \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{t}\right) u(t)\,dt,$$

Рассмотрим с применением теоремы Бохнера вопрос об унитарности оператора S_ν в $L_2\,(0,\infty)$ и построим обратный оператор S_ν^{-1}, определённый на всём $L_2\,(0,\infty)$.

Теорема 2.5.2 *Операторы*

$$S_\nu u(r) = u(r) - \int\limits_r^\infty \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{t}\right) u(t)\,dt,$$

$$S_\nu^{-1} u(r) = u(r) - \int\limits_0^r \frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{r}\right) u(t)\,dt$$

являются взаимнообратными операторами в $L_2(0,\infty)$*. Для их унитарности в* $L_2(0,\infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\nu-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z},\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяются формулы

$$\int\limits_0^\xi (S_\nu u)(r)\,dr=\int\limits_0^\infty K(r,t)u(t)\,dt,$$

$$\int\limits_0^\xi \left(S_\nu^{-1}u\right)(r)\,dr=\int\limits_0^\infty H(r,t)u(t)\,dt,$$

где введены обозначения

$$K(r,t)=-\vartheta(t-r)P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{t}\right),$$

$$H(r,t)=-\vartheta(r-t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^r P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{x}\right)\,dx.$$

Очевидно, что $K(r,t)\in L_2(0,\infty)$, $H(r,t)\in L_2(0,\infty)$ при каждом фиксированном $r>0$. Поэтому в силу теоремы Бохнера [163] для доказательства теоремы требуется проверка равенств

$$\int\limits_0^\infty K(\xi,x)K(y,x)\,dx=y, \tag{2.100}$$

$$\int\limits_0^\infty H(\xi,x)H(y,x)\,dx=y, \tag{2.101}$$

$$\int\limits_0^y K(\xi,x)\,dx=\int\limits_0^\xi H(y,x)\,dx, \tag{2.102}$$

где для определённости положено $\xi\geqslant y\geqslant 0$. Так как плоская мера точек с координатами $\xi=y$ равна нулю, то при доказательстве примем

$\xi > y$. Соотношение (5.9) получается сразу. Соотношение (5.7) после подстановки значений $K(r,t)$ приводится к виду

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} \left\{P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi}{x}\right) - P_{\nu-\frac{1}{2}}(0)\right\}\left\{P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) - P_{\nu-\frac{1}{2}}(0)\right\} dx -$$

$$-P_{\nu-\frac{1}{2}}(0)\int\limits_{y}^{\xi} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) dx = I(\xi,y) = y - \left|P_{\nu-\frac{1}{2}}(0)\right|^2 \xi, \quad (2.103)$$

а соотношение (5.8) принимает вид

$$\int\limits_{0}^{y}\left\{\int\limits_{x}^{\xi} \frac{\partial}{\partial x} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{s}\right) ds - 1\right\}\left\{\int\limits_{x}^{y} \frac{\partial}{\partial x} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{s}\right) ds - 1\right\} dx =$$
$$= J(\xi,y) = y. \quad (2.104)$$

Перейдём к доказательству тождества (5.10). Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial \xi} = \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi}{x}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) dx - \frac{\partial}{\partial y} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\xi}\right).$$

Мы покажем, что при $\xi > y$ выполнено тождество

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial \xi} = 0 \quad (2.105)$$

Перейдём к вычислению интеграла

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi}{x}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) dx = L(\xi,y) =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \left\{H(1-t)\frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}}(t)\right\}\left\{H\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right\} dx$$

где обозначено $t = \frac{\xi}{x}$. Последний интеграл определён уже при всех $\xi > 0$; мы покажем, что он равен обобщённой функции (распределению), носитель которой по ξ лежит на отрезке $[0,y]$, поэтому при $\xi > y$ справедливо (5.12).

Отметим, что если $\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial \xi} \neq 0$ при $\xi > y$, то оператор S_ν не является унитарным в $L_2(0,\infty)$.

Получившийся интеграл будем вычислять при помощи преобразования Меллина и теоремы Слейтер [119]. Воспользуемся теоремой о преобразовании Меллина свёртки

$$M_\xi\left[L(\xi,y)\right] = M\left\{H(1-x)\frac{\partial}{\partial x}P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\right\}\times M\left\{H\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right\}.$$

Первый сомножитель вычисляем с использованием определения и формулы (5.7), см. с. 221, [119].

$$M\left\{H(1-x)\frac{\partial}{\partial x}P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\right\} = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x}P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\,x^{s-1}\,dx =$$

$$= 1-(s-1)\int\limits_0^1 P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\,x^{s-2}\,dx =$$

$$= 1-(s-1)\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-s}\,\Gamma(s-1)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}.$$

Проведённые преобразования справедливы лишь при $s \geqslant 1$. Но окончательная формула выражает равенство двух функций при $s \geqslant 1$ при этом обе функции аналитичны по s при $s > 0$. Поэтому мы нашли преобразование Меллина первого сомножителя при $s > 0$.

Перейдём к вычислению выражения

$$M\left[H\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right] =$$

$$= \int\limits_y^\infty \frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)x^{s-1}\,dx = \int\limits_y^\infty P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)x^{s-2}\,dx,$$

которое определено при $-1 < s < 1$. Поэтому мы опять вычислим этот интеграл лишь при $-1 < s < 0$, а окончательную формулу распространим на $0 \leqslant s < 1$ как и выше.

Сначала найдём, что

$$\int\limits_{y}^{\infty} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) x^{s-1}\,dx = y^{s}\int\limits_{0}^{1} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(t\right) t^{-s-1}\,dt =$$

$$= y^{s}\frac{\sqrt{\pi}\,2^{s}\,\Gamma\left(-s\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}.$$

В силу тождества при $-1 < s < 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{y}^{\infty} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) x^{s-1}\,dx = \int\limits_{y}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) x^{s-1}\,dx - y^{s-1}$$

получаем при $0 < s < 1$

$$\int\limits_{y}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) x^{s-1}\,dx = s\,y^{s-1}\frac{\sqrt{\pi}\,2^{s}\,\Gamma\left(-s\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)} + y^{s-1}$$

Отсюда получаем для преобразования Меллина первого интеграла следующее выражение при $0 < s < 1$

$$M_{\xi}\left[L\left(\xi,y\right)\right] = y^{s-1}(1+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,2^{s}\cdot s\,\Gamma\left(-s\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}-$$

$$-\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-s}(s-1)\,\Gamma\left(s-1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}+$$

$$+\frac{2\pi\,2^{1-s}\,\Gamma\left(s\right)\,\Gamma\left(1-s\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}.$$

Находим прообраз суммы первых трёх слагаемых

$$\delta\left(\xi-y\right)+H\left(1-\frac{y}{\xi}\right)\frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\xi}\right)-\delta\left(\xi-y\right)+$$

$$+H\left(1-\frac{\xi}{y}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi}{y}\right)-\delta\left(\xi-y\right).$$

Последнее слагаемое преобразуем с учётом формулы

$$\Gamma\left(s\right)\,\Gamma\left(1-s\right)=\frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

Для него получается следующее выражение:

$$2\pi\frac{\pi}{\sin\pi s}\frac{\sin\pi\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\pi}\frac{\sin\pi\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\pi}=$$

$$=\frac{2\sin\pi\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu-\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu-\frac{1}{2}}{2}\right)}{\sin\pi s}=$$

$$=\frac{2\sin\pi\left(\frac{s}{2}-\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{s}{2}+\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{2}\right)}{\sin\pi s}=$$

$$=\frac{\sin\pi s-\sin\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\sin\pi s}=1-\frac{\sin\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\pi}\Gamma\left(s\right)\,\Gamma\left(1-s\right).$$

Отсюда по формуле 3(1), с. 131, [119] находим окончательно

$$L\left(\xi,y\right)=H\left(1-\frac{y}{\xi}\right)\frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\xi}\right)+H\left(1-\frac{\xi}{y}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi}{y}\right)-$$

$$-\frac{\sin\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\pi}\frac{1}{y}\left(1+\frac{\xi}{y}\right)^{-1}=$$

$$=H\left(1-\frac{y}{\xi}\right)\frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\xi}\right)+H\left(1-\frac{\xi}{y}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi}{y}\right)-$$

$$-\frac{\sin\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\pi}\frac{1}{\xi+y}. \tag{2.106}$$

Таким образом, при $\sin\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)=0$ и $\xi>y$ тождество (5.12) доказано.

Итак, мы доказали, что для всех $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\xi \geqslant y \geqslant 0$ выполнено соотношение (5.12). Поэтому существуют функции α, β, такие, что

$$I(\xi, y) = \alpha(\xi) - \beta(y).$$

Переходя в (5.10) к пределу при $y \to 0$, получаем

$$\alpha(\xi) - \beta(0) = -\left|P_{\nu-\frac{1}{2}}(0)\right|^2 \xi.$$

Отсюда

$$I(\xi, y) = \beta(0) - \left|P_{\nu-\frac{1}{2}}(0)\right|^2 \xi - \beta(y).$$

Меняя местами в (5.10) ξ и y, получаем

$$I(y, \xi) = I(\xi, y) + (\xi - y)\left(1 + \left|P_{\nu-\frac{1}{2}}(0)\right|^2\right).$$

Отсюда определяем α, β и получаем (5.10).

Аналогично проверяется соотношение (5.11). Поэтому мы приведём здесь лишь план доказательства. Нужно доказать, что

а)

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y \partial \xi} = 0$$

Это соотношение эквивалентно равенству

$$\int\limits_0^y \frac{\partial}{\partial x} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\xi}\right) \frac{\partial}{\partial x} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) dx = \frac{\partial}{\partial y} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\xi}\right),$$

которое после замены переменных по формуле $t = \frac{\xi y}{x}$ и переходу к дифференцированию по ξ, y сводится к (2.106).

Затем проверяется, что

б)

$$J(\xi, y) - J(y, \xi) = y - \xi.$$

Доказательство аналогично доказательству (5.10).

в) Из соотношений $J(\xi, y) = \alpha(\xi) - \beta(y)$ и $\lim\limits_{y \to 0} J(\xi, y) = 0$ и из б) теперь и выводится (5.11).

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим пару операторов Харди

$$H_1 u = \frac{1}{r}\int\limits_0^r u(t)\,dt,\ \ H_2 u = \int\limits_r^\infty \frac{u(t)}{t}\,dt.$$

Для них теорема даёт следующее

Следствие. Операторы

$$(I - H_1)\,u = u(r) - \frac{1}{r}\int\limits_0^r u(t)\,dt,$$

$$(I - H_2)\,u = u(r) - \int\limits_r^\infty \frac{u(t)}{t}\,dt$$

являются взаимнообратными унитарными операторами в $L_2\,(0,\infty)$.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$I - H_2 = S_{\frac{3}{2}},\ \ I - H_1 = S_{\frac{3}{2}}^{-1}.$$

Отсюда получается известный из "фольклора" факт о расположении спектра в $L_2\,(0,\infty)$ операторов H_1 и H_2 на окружности единичного радиуса с центром в точке $(1,0)$.

Унитарность и обращение операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в пространстве финитных функций

В этом пункте рассмотрим взаимообратность операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка в пространстве финитных функций. Эти результаты эквивалентны решению соответствующих интегро-дифференциальных уравнений в указанном пространстве.

Ещё раз переопределим в этом пункте операторы

$$S_\nu u(r) = c_\nu \left[r^{\nu+\frac{1}{2}} u(r) - \int\limits_r^\infty u(t) t^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{t}\right) \, dt \right]$$

$$P_\nu u(r) = c_\nu^{-1} \left[u(r) + \int\limits_r^\infty u(t) \frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{r}\right) \, dt \right] r^{-\nu-\frac{1}{2}}. \quad (2.107)$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$S_\nu B_\nu = \frac{d^2}{dr^2} S_\nu, \;\; P_\nu \frac{d^2}{dr^2} = B_\nu P_\nu,$$

где B_ν — дифференциальное выражение Бесселя

$$B_\nu = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\nu+1}{r} \frac{d}{dr}.$$

Теорема 2.5.3 *О.П. S_ν и P_ν, определяемые по формулам* (2.107)*, являются взаимнообратными на функциях класса C_0^∞* $(r > 0)$.

Доказательство. Покажем сначала, что P_ν является правым обратным к оператору S_ν. Из (2.107) получаем

$$S_\nu P_\nu u(r) = u(r) + \int\limits_r^\infty u(t) \frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{r}\right) \, dt -$$

$$- \int\limits_r^\infty u(t) \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{t}\right) \, dt -$$

$$- \int\limits_r^\infty dt \int\limits_t^\infty u(s) \frac{\partial}{\partial s} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{s}{t}\right) \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{t}\right) \, ds.$$

В повторном интеграле сначала изменим порядок интегрирования, а затем поменяем местами переменные t, s; с учётом этих преобразований получаем

$$\int\limits_r^\infty dt \int\limits_t^\infty u(s) \frac{\partial}{\partial s} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{s}{t}\right) \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{t}\right) \, ds =$$

$$= \int\limits_r^\infty ds \int\limits_r^s u(s) \frac{\partial}{\partial s} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{t}\right) \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{t}\right) ds =$$

$$= \int\limits_r^\infty u(t)\, dt \int\limits_r^t \frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{s}\right) \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right) ds.$$

Поэтому достаточно убедится в справедливости тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{t}\right) - \int\limits_r^t \frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{s}\right) \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right) ds = \Delta(r,t) = 0.$$

Но в силу равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \int\limits_r^t P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{s}\right) P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right) ds = -\Delta(r,t) \tag{2.108}$$

достаточно показать, что интеграл

$$I(t,r) = \int\limits_r^t P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{s}\right) P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right) ds \tag{2.109}$$

является решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r \partial t} = 0.$$

Перейдём к вычислению интеграла (2.109). Преобразуем (2.109) к виду свёртки Меллина

$$I(t,r) = \int\limits_0^\infty \left[P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{s}\right) H\left(\frac{t}{s}-1\right)\right] \left[sH\left(1-\frac{r}{s}\right) P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right)\right] \frac{ds}{s}.$$

Будут использованы следующие обозначения для функции Хэвисайда и степенной функции

$$H(x) = 1,\ x \geqslant 0,\ H(x) = 0,\ x < 0;$$

$$x_+^\alpha = x^\alpha,\ x \geqslant 0,\ x_+^\alpha = 0,\ x < 0.$$

Теперь применим преобразование Меллина по переменной t, которое будем обозначать символом M. По теореме о преобразовании Меллина свёртки получаем

$$MI\,(t,r) = M\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)H(x-1)\right] M\left[xH\left(1-\frac{r}{x}\right)P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{x}\right)\right]. \quad (2.110)$$

Используя определение преобразования Меллина и формулу (2.109) на с. 227 из [119], получаем

$$M\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)H(x-1)\right] = \int\limits_1^\infty x^{-(1-s)}P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{-(s+1)}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\,(1-s)}.$$

Для нахождения второго сомножителя в (5.10) получим сначала, что

$$M\left[H\,(1-x)\,P_{\nu-\frac{1}{2}}\,(x)\right] = \int\limits_0^1 x^{s-1}P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,2^{-s}\,\Gamma\,(s)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}.$$

Последнее соотношение вытекает из формулы 1, на с. 221 из [119]. Поэтому из равенства 4.6 ([119], стр. 130) следует, что

$$M\left[xH\left(1-\frac{1}{x}\right)P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\right](s) = M\left[H\,(1-x)\,P_{\nu-\frac{1}{2}}\,(x)\right](-s-1) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,2^{s+1}\,\Gamma\,(-s-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}.$$

Теперь применим формулу 3 из [119], стр. 130. Это даёт

$$M\left[\frac{x}{r}H\left(1-\frac{r}{x}\right)P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{x}\right)\right] = \left(\frac{1}{r}\right)^{-s} M\left[xH\left(1-\frac{1}{x}\right)P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Отсюда и находим преобразование Меллина второго сомножителя в (2.110). С учётом проведённых преобразований, получаем

$$MI\,(t,r) = r\left(\frac{1}{r}\right)^{-s}\frac{\Gamma\,(-s-1)}{\Gamma\,(-s+1)}$$

Но, с другой стороны, по формуле 2, (4) ([119], с. 131) получаем

$$M[(t-1)_+] = \frac{\Gamma(-s-1)}{\Gamma(-s+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$M\left[r\left(\frac{t}{r}-1\right)_+\right] = r\left(\frac{1}{r}\right)^{-s}\frac{\Gamma(-s-1)}{\Gamma(-s+1)}.$$

Поэтому, в силу единственности преобразования Меллина

$$I(t,r) = r\left(\frac{t}{r}-1\right)_+ = t-r\ (t \geqslant r)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r \partial t} = 0.$$

Аналогично, доказательство того, что P_ν является левым обратным к S_ν, сводится к тождеству

$$\int\limits_r^t \frac{\partial}{\partial s} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{t}\right)\frac{\partial}{\partial s} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{r}\right) ds = \frac{\partial}{\partial t} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial r} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{t}\right),$$

которое заменой переменных по формуле

$$x = \frac{tr}{s},\ ds = -\frac{tr}{x^2}dx$$

приводится к уже доказанному.

Итак, построен о.п., обратный к S_ν. Но этот оператор был определён на функциях из C_0^∞, и его невозможно определить на всём $L_2(0,\infty)$. Однако оказывается, что S_ν имеет другой обратный, уже определённый на всём $L_2(0,\infty)$. Отсюда вытекает, что построенные о.п. S_ν и S_ν^{-1} являются изометричными из пространств И.А. Киприянова в пространства С.Л. Соболева. Изометричность S_ν доказана впервые в [59] другим методом.

Теперь рассмотрим операторы с другими пределами интегрирования.

Рассмотрим пару интегральных операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости:

$$S_\nu f(x) = f(x) + \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y}\right) f(y)\, dt \tag{2.111}$$

$$P_\nu f(x) = f(x) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial y} P_\nu \left(\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy. \tag{2.112}$$

Дадим прямое доказательство тождеств

$$S_\nu P_\nu f(x) = f(x),\ \ P_\nu S_\nu f(x) = f(x)$$

на подходящем множестве функций $f(x)$, например, финитных.

Теорема 2.5.4 *Операторы преобразования S_ν и P_ν, определяемые по формулам (2.111)–(2.112), являются взаимно обратными на функциях из класса C_0^∞ $(x \geqslant 0)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что P_ν является правым обратным к оператору S_ν.

$$S_\nu P_\nu f(x) = f(x), f(x) \in C_0^\infty (x \geqslant 0)$$

Из (2.111)–(2.112) получаем

$$S_\nu P_\nu f(x) = f(x) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial y} P_\nu \left(\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y}\right) f(y)\, dy -$$

$$- \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y}\right) \frac{\partial}{\partial s} P_\nu \left(\frac{s}{y}\right) f(s)\, ds \right) dy.$$

В повторном интеграле изменим порядок интегрирования

$$\int_0^x \left(\int_0^y \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) \frac{\partial}{\partial s} P_\nu \left(\frac{s}{y} \right) f(s)\, ds \right) dy =$$

$$\int_0^x f(s)\, ds \left(\int_s^x \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) \frac{\partial}{\partial s} P_\nu \left(\frac{s}{y} \right) \right) dy.$$

С учётом этих преобразований получаем

$$S_\nu P_\nu f(x) = f(x) + \int_0^x K(x;s) f(s)\, ds, \tag{2.113}$$

где для ядра справедлива формула

$$K(x;s) = \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} P_\nu \left(\frac{s}{x} \right) -$$

$$- \int_s^x \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) \frac{\partial}{\partial s} P_\nu \left(\frac{s}{y} \right) dy.$$

Поэтому достаточно убедиться в справедливости тождества

$$K(x;s) = 0.$$

Но в силу равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial x} \int_s^x P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) P_\nu \left(\frac{s}{y} \right) dy = -K(x;s)$$

достаточно показать, что интеграл

$$I\,(x,s) = \int_s^x P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) P_\nu \left(\frac{s}{y} \right) dy \tag{2.114}$$

является решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 I}{\partial s \partial x} = 0.$$

Но этот интеграл был подсчитан ранее. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай, когда операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости сводятся к сдвинутым операторам Харди. Этот случай иллюстрирует неоднозначность обратного оператора, проявляющегося в рассматриваемой задаче.

Рассмотрим интегральные операторы

$$P_1 f(x) = f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt,$$

$$S_1 f(x) = f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt,$$

$$S_2 f(x) = f(x) - \int\limits_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt$$

на подходящих функциях.

1) Вычислим $P_1 S_1$. Имеем

$$(P_1 S_1) f = S_1 f - \frac{1}{x}\int\limits_0^x S_1 f(t)dt = f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x \left[f(t) + \int\limits_0^t \frac{f(s)}{s}ds\right] dt =$$

$$= f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t \frac{f(s)}{s}ds\right) dt =$$

$$= f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x \left(\int\limits_s^x \frac{f(s)}{s}dt\right) ds =$$

$$= f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{f(s)}{s}(x-s)ds =$$

$$= f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x \frac{f(s)}{s}ds + \frac{1}{x}f(s)ds = f(x).$$

2) Вычислим S_1P_1. Имеем

$$(S_1P_1)f = P_1f + \int\limits_0^x \frac{(P_1f)(t)}{t}dt = f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt + \int\limits_0^x \frac{1}{t}\left[f(t) - \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(s)ds\right]dt =$$

$$= f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t \frac{f(s)}{t^2}ds\right)dt =$$

$$= f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_0^x \left(\int\limits_s^x \frac{f(s)}{t^2}dt\right)ds =$$

$$= f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_0^x f(s)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{x}\right)ds = f(x).$$

Отметим, что для функций, интеграл от которых по полуоси равен нулю, "хороший" обратный оператор совпадает с "плохим" .

2.6 Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к установлению эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева

Пространства И.А.Киприянова, как было показано в его работах и в работах представителей его научной школы, идеально подходят для изучения B — эллиптических уравнений с частными производными [67]–[68]. Поэтому свойства этих пространств играют существенную роль при изучении дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. В данном пункте доказано, что в одномерном случае нормы в пространствах И.А.Киприянова эквивалентны нормам в весовых пространствах С.Л.Соболева. Этот результат справедлив и для некоторых модельных областей в многомерных пространствах. При этом соответствующие результаты по существу являются переформулировками результатов предыдущего параграфа об условиях ограниченности и унитарности в пространствах Лебега на полуоси операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости. Таким образом, указанные результаты об условиях ограниченности и унитарности в пространствах Лебега на полуоси операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости имеют важное значение для теории уравнений с частными производными с операторами Бесселя, находя в этой области свои как стандартные, так и неожиданные приложения. Получаемые результаты относятся также к энергетическим пространствам для соответствующих дифференциальных уравнений.

Рассмотрим множество функций $\mathfrak{D}(0,\infty)$. Если $f(x)\in\mathfrak{D}(0,\infty)$, то $f(x)\in C^\infty(0,\infty)$, $f(x)$ —финитна на бесконечности. На этом множестве функций введём полунормы

$$\|f\|_{h_2^\alpha}=\|I_-^\alpha f\|_{L_2(0,\infty)} \tag{2.115}$$

$$\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha}=\|x^\alpha(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^\alpha f\|_{L_2(0,\infty)} \tag{2.116}$$

где I_-^α — дробная производная Римана–Лиувилля, оператор в (2.116) определяется по формуле

$$(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^\beta=2^\beta I_{-;\,2,\,0}^{-\beta}x^{-2\beta}, \tag{2.117}$$

$I_{-;2,\,0}^{-\beta}$ — оператор Эрдейи–Кобера, α — произвольное действительное число. При $\beta=n\in\mathbb{N}_0$ выражение (2.117) понимается в обычном смысле, что согласуется с определением (2.72).

Лемма 2.6.1 *Пусть* $f(x)\in\mathfrak{D}(0,\infty)$. *Тогда справедливы тождества:*

$$I_-^\alpha f={}_1S_-^{\alpha-1}x^\alpha(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^\alpha f, \tag{2.118}$$

$$x^\alpha(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^\alpha f={}_1P_-^{\alpha-1}I_-^\alpha f. \tag{2.119}$$

Таким образом, операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости первого рода осуществляют связь между дифференциальными операторами (при $\alpha\in\mathbb{N}$) из определений полунорм (2.115) и (2.116).

Лемма 2.6.2 *Пусть $f(x) \in \mathfrak{D}(0,\infty)$. Тогда справедливы неравенства между полунормами*

$$\|f\|_{h_2^\alpha} \leqslant \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha})\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha}, \tag{2.120}$$

$$\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha} \leqslant \frac{1}{\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha})}\|f\|_{h_2^\alpha}, \tag{2.121}$$

где α — любое действительное число, $\alpha \neq -\frac{1}{2}+2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Постоянные в неравенствах (2.120)–(2.121) не меньше единицы, что будет далее использовано. В случае $\sin\pi\alpha = -1$ или $\alpha = -\frac{1}{2}+2k,\ k \in \mathbb{Z}$, оценка (2.121) не имеет места.

Приведённые леммы — это переформулировки результатов о формулах факторизации и оценках норм для операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости.

Введём на $\mathfrak{D}(0,\infty)$ соболевскую норму

$$\|f\|_{W_2^\alpha} = \|f\|_{L_2(0,\infty)} + \|f\|_{h_2^\alpha}. \tag{2.122}$$

Введём также другую норму

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} = \|f\|_{L_2(0,\infty)} + \|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha} \tag{2.123}$$

Пространства W_2^α, $\widehat{W}_2^\alpha$ определим как замыкания $\mathfrak{D}(0,\infty)$ по нормам (2.122) и (2.123) соответственно.

Теорема 2.6.1 *a) при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ пространство $\widehat{W}_2^\alpha$ непрерывно вложено в W_2^α, причём*

$$\|f\|_{W_2^\alpha} \leqslant A_1\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha}, \tag{2.124}$$

где $A_1 = \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha})$.

б) Пусть $\sin\pi\alpha \neq -1$ или $\alpha \neq -\frac{1}{2}+2k,\ k \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливо обратное вложение W_2^α в $\widehat{W}_2^\alpha$, причём

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} \leqslant A_2\|f\|_{W_2^\alpha}, \tag{2.125}$$

где $A_2 = 1/\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha})$.

в) Пусть $\sin\pi\alpha \neq -1$, *тогда пространства* W_2^α *и* $\widehat{W}_2^\alpha$ *изоморфны, а их нормы эквивалентны.*

г) Константы в неравенствах вложений (2.124)–(2.125) *точные.*

Эта теорема фактически является следствием результатов по ограниченности операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2, а именно теоремы 2.1.7. В свою очередь, из теоремы об унитарности этих операторов 2.1.8 вытекает результат об эквивалентной нормировке рассматриваемых нами вариантов пространств С.Л.Соболева.

Теорема 2.6.2 *Нормы*

$$\|f\|_{W_2^\alpha} = \sum_{j=0}^{s} \|\mathfrak{D}_-^j f\|_{L_2}, \tag{2.126}$$

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} = \sum_{j=0}^{s} \|x^j(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^j f\|_{L_2} \tag{2.127}$$

задают эквивалентные нормировки в пространстве Соболева при целых $s \in \mathbb{Z}$. *Кроме того, каждое слагаемое в* (2.126) *тождественно равно соответствующему слагаемому в* (2.127) *с тем же индексом* j.

Как уже было отмечено, И. А. Киприянов ввёл в [67]–[68] шкалу пространств, которые оказали существенное влияние на теорию уравнений в частных производных с оператором Бесселя по одной или нескольким переменным. Эти пространства можно определить следующим образом. Рассмотрим подмножество чётных функций на $\mathfrak{D}(0,\infty)$, у которых все производные нечётного порядка равны нулю при $x = 0$. Обозначим это множество $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ и введём на нём норму

$$\|f\|_{\widetilde{W}_{2,k}^s} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|B_k^{\frac{s}{2}}\|_{L_{2,k}} \tag{2.128}$$

где s — чётное натуральное число, $B_k^{s/2}$ — итерация оператора Бесселя. Пространство И.А. Киприянова при чётных s определяется как замыкание $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ по норме (2.128). Известно, что эквивалентная (2.128) норма может быть задана по формуле [68]

$$\|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|x^s(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^s f\|_{L_{2,k}} \tag{2.129}$$

Это позволяет доопределить норму в $\widetilde{W}^s_{2,\,k}$ для всех s. Отметим, что по существу этот подход совпадает с одним из принятых в [68], другой подход основан на использовании преобразования Фурье–Бесселя. Далее будем считать, что $\widetilde{W}^s_{2,k}$ нормируется по формуле (2.129).

Введём весовую соболевскую норму

$$\|f\|_{W^s_{2,k}} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|\mathfrak{D}^s_- f\|_{L_{2,k}} \tag{2.130}$$

и пространство $W^s_{2,\,k}$ как замыкание $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ по этой норме.

Теорема 2.6.3 *а) Пусть* $k \neq -n,\ n \in \mathbb{N}$. *Тогда пространство* $\widetilde{W}^s_{2,\,k}$ *непрерывно вложено в* $W^s_{2,\,k}$, *причём существует постоянная* $A_3 > 0$ *такая, что*

$$\|f\|_{W^s_{2,k}} \leqslant A_3 \|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}}, \tag{2.131}$$

б) Пусть $k + s \neq -2m_1 - 1,\ k - s \neq -2m_2 - 2,\ m_1 \in \mathbb{N}_0,\ m_2 \in \mathbb{N}_0$. *Тогда справедливо обратное вложение* $W^s_{2,\,k}$ *в* $\widetilde{W}^s_{2,\,k}$, *причём существует постоянная* $A_4 > 0$, *такая, что*

$$\|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}} \leqslant A_4 \|f\|_{W^s_{2,k}}. \tag{2.132}$$

в) Если указанные условия не выполняются, то соответствующие вложения не имеют места.

Следствие 2.6.1 *Пусть выполнены условия:* $k \neq -n,\ n \in \mathbb{N}$; $k + s \neq -2m_1 - 1,\ m_1 \in \mathbb{N}_0$; $k - s \neq -2m_2 - 2,\ m_2 \in \mathbb{N}_0$. *Тогда пространства И.А. Киприянова можно определить как замыкание* $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ *по весовой соболевской норме* (2.130).

Следствие 2.6.2 *Точные значения постоянных в неравенствах вложения* (2.131)–(2.132) *есть*

$$A_3 = \max(1, \|_1 S^{s-1}_-\|_{L_{2,k}}),\ A_4 = \max(1, \|_1 P^{s-1}_-\|_{L_{2,k}}).$$

Очевидно, что приведённая теорема и следствия из неё вытекают из приведённых выше результатов для операторов Бушмана–Эрдейи. Отметим, что нормы операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в $L_{2,\,k}$ дают значения точных постоянных в неравенствах вложения (2.131)–(2.132). Оценки норм операторов Бушмана–Эрдейи в банаховых пространтсвах $L_{p,\alpha}$ позволяют рассматривать вложения для соответствующих функциональных пространств.

Неравенство для полунорм, приводящее к вложению (2.131) (s — целое число), получено в [110]. Вложения типа полученных в теореме 2.6.3 ранее изучались в [106]–[107]. В последней работе рассматривался случай $k > -1/2,\ s \in \mathbb{N}$, пространства $W^s_{p,\,k}$. Мы рассматриваем гильбертовы пространства $W^s_{2,\,k}$, k и s — любые действительные числа. Кроме того, в теореме 2.6.3 уточнены условия отсутствия вложений из [106]–[107], которые содержали ошибки (в качестве контрпримеров для некоторых вложений приводилась функция синуса, которая считалась чётной). Отметим, что в теореме 2.6.3 фактически установлены более точные неравенства между соответствующими полунормами, чем в предшествующих работах [106]–[107]. Это стало возможным благодаря применению подробно изученных выше ОП Бушмана–Эрдейи.

Перейдём к рассмотрению правосторонних сплетающих операторов (2.10)–(2.13). Мы покажем, что в общем случае они осуществляют изоморфизм пространства С.Л. Соболева и И.А. Киприянова. Определим пространства H^{2s}, H^{2s}_α и K^{2s}_α как замыкания множества функций $\mathfrak{D}(0,\infty)$ по нормам

$$\|f\|_{H^{2s}} = \|f\|_{L_2} + \|I^{2s}_- f\|_{L_2}, \tag{2.133}$$

$$\|f\|_{H^{2s}_\alpha} = \|f\|_{L_{2,\alpha}} + \|I^{2s}_- f\|_{L_{2,\alpha}}, \tag{2.134}$$

$$\|f\|_{K^{2s}_\alpha} = \|f\|_{L_{2,\alpha}} + \|B^s_\alpha f\|_{L_{2,\alpha}}, \tag{2.135}$$

s — натуральное число, $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим также пару операторов типа

(2.25)

$$ {}_1X_-^\alpha = {}_1S_-^{\alpha-\frac{1}{2}} x^{\alpha+\frac{1}{2}},\ {}_1Y_-^\alpha = x^{-(\alpha+\frac{1}{2})} {}_1P_-^{\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{2.136} $$

Теорема 2.6.4 *Пусть $\alpha \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{N}$. Тогда оператор ${}_1X_-^2$ действует непрерывно из H_α^{2s} в K_α^{2s}, причём*

$$ \|{}_1X_-^\alpha f\|_{H_\alpha^{2s}} \leqslant A_5 \|f\|_{K_\alpha^{2s}}, \tag{2.137} $$

где $A_5 = \|{}_1X_-^\alpha\|_{H_\alpha^{2s}\to K_\alpha^{2s}} = \|{}_1S_-^{\alpha-\frac{1}{2}}\|_{L_2} = \max(1, \sqrt{1+\cos\pi\alpha})$

Пусть $s \in \mathbb{N}, \alpha \neq 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ (или $\cos\pi\alpha \neq -1$). Тогда оператор ${}_1Y_-^\alpha$ действует непрерывно из в K_α^{2s} в H_α^{2s}, причём справедливо неравенство

$$ \|{}_1Y_-^\alpha f\|_{K_\alpha^{2s}} \leqslant A_6 \|f\|_{H_\alpha^{2s}}, \tag{2.138} $$

с постоянной

$$ A_6 = \|{}_1Y_-^\alpha\|_{K_\alpha^{2s}\to H_\alpha^{2s}} = \|{}_1P_-^{\alpha-\frac{1}{2}}\|_{L_2} = 1/\max(1, \sqrt{1+\cos\pi\alpha}) $$

Все утверждения теоремы вновь следуют из результатов для свойств норм ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости.

Оператор Бесселя является радиальной частью лапласиана в $\mathbb{R}^n$. При такой интерпретации этого оператора в случае нечётномерных пространств будет выполнено условие теоремы 2.6.4.

Теорема 2.6.5 *Пусть выполнены условия $\alpha \neq 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq -n,\ n \in \mathbb{N}$; $\alpha + 2s \neq -2m_1 - 1,\ m_1 \in \mathbb{N}_0;\ \alpha - 2s \neq -2m_2 - 2,\ m_2 \in \mathbb{N}_0$. Тогда операторы (2.136) осуществляют топологический изоморфизм пространств Соболева H^{2s} и весового пространства Соболева H_α^{2s}.*

Очевидно, что все условия теоремы 2.6.5 выполнены при полуцелых $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому справедлива

Теорема 2.6.6 *Пусть $s \in \mathbb{N},\ \alpha - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$. Тогда операторы (2.136) осуществляют топологический изоморфизм пространств Соболева H^{2s} и весовых пространств Соболева H_α^{2s}.*

Аналогично можно ввести по формулам типа (2.136) операторы ${}_1X^{\alpha}{}_{0+}$ и ${}_1Y^{\alpha}{}_{0+}$. В качестве приложения приведённых выше результатов можно также рассмотреть действие операторов (2.136) в пространствах с нормами (2.133)–(2.135) при произвольных весах, не согласованных с постоянной α в операторе Бесселя B_{α}.

Полученные в этом пункте результаты для одномерного случая очевидным образом переносятся на многомерный случай для области, которая состоит из декартового произведения положительных полуосей или отрезков по каждой переменной. Например, в двумерном случае полученные результаты сразу могут быть применены для оценок норм и доказательству вложений в первом положительном квадранте или лежащем в нём прямоугольнике.

Таким образом в этом пункте с помощью ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости дан положительный ответ на вопрос, который давно обсуждался в устном "фольклоре" — *пространства Киприянова изоморфны весовым пространствам Соболева.* Приведённые результаты ни в коем случае не умаляют ни существенного значения, ни необходимости использования пространств И.А. Киприянова для подходящего круга задач в теории дифференциальных уравнений с частными производными с операторами Бесселя. Полученные результаты также подтверждают полезность и эффективность для теории дифференциальных уравнений специального класса ОП — Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, по существу введённого В.В.Катраховым в 1980–х годах.

Глава 3

Композиционный метод построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах

3.1 Общая схема композиционного метода построения ОП для решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах

Перечисленные ранее классы ОП строились каждый своими методами. Поэтому возникает необходимость в разработке общей схемы построения ОП. Такая схема—метод факторизации или композиционный метод—предлагается в настоящей главе. Метод основан на представлении ОП в виде композиции интегральных преобразований. Композиционный метод даёт алгоритмы не только для построения новых ОП, но содержит как частные случаи ОП СПД, Векуа–Эрдейи–Лаундеса, Бушмана–Эрдейи различных типов, унитарные ОП Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова, обобщённые операторы Эрдейи–Кобера, а также введённые Р. Кэрролом [236]–[238] классы эллиптических, гиперболических и параболических ОП. В работе вводятся их обобщения: классы B — эллиптических, B — гиперболических и B — параболических ОП.

Общая схема композиционного метода следующая. На вход подаётся пара операторов произвольного вида A, B, а также связанные с ними обобщённые преобразования Фурье $F(A), F(B)$, которые обратимы и действуют по формулам

$$F(A)A = g(t)F(A), F^{-1}(B)g(t) = BF^{-1}(B), \tag{3.1}$$

где t—двойственная переменная. В дальнейшем сделаем самый очевидный выбор $g(t) = -t^2$. На выходе получаем пару ОП, сплетающих A, B.

Действительно, определим пару формально взаимно обратных операторов по формулам

$$S = F^{-1}(B)\frac{1}{w(t)}F(A), P = F^{-1}(A)w(t)F(B) \tag{3.2}$$

с произвольной весовой функцией $w(t)$. Тогда они являются ОП, которые удовлетворяют сплетающим соотношениям $SA = BS, PB = AP$.

Формальная проверка получается прямой подстановкой. Основную трудность представляет вычисление введённых композиций в явном интегральном виде, а также задание соответствующих областей определений операторов.

В композиционном методе может быть использован оператор квадратичного преобразования Фурье (КПФ, дробное преобразование Фурье, преобразование Фурье–Френеля). Это важное интегральное преобразование недостаточно широко известно (пока), оно возникло из предложения Френеля заменить стандартные плоские волны с линейными аргументами в экспонентах на более общие волны с квадратичными аргументами в экспонентах, что позволило полностью объяснить парадоксы со спектральными линиями при дифракции Фраунгофера. Математически операторы КПФ являются дробными степенями F^{α} обычного преобразования Фурье, достраивая его до полугруппы по параметру α, они были определены Н. Винером и А. Вейлем. В теории всплесков, в которой принято каждую формулу считать новой и называть по–новому давно известные вещи, КПФ называется преобразованием Габора. Изложенный выше композиционный метод позволяет с помощью этого преобразования строить ОП для одномерного оператора Шрёдингера из квантовой механики. При этом может быть использовано и более общее квадратичное преобразование Ханкеля.

3.2 Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи третьего рода и их обобщения

3.2.1 Введение

В данном пункте реализована описанная выше общая схема композиционного метода для конкретных весовых функций. Наиболее богатое семейство ОП получается при выборе степенной функции. Чтобы не усложнять изложение мы будем проводить все выкладки для финитных функций. Вместе с тем результаты можно выразить и в весовых пространствах, так как для используемых классических интегральных преобразований известны двухвесовые оценки, по крайней мере в пространствах со степенными весами. Как приложения композиционного метода вводится ещё один класс ОП Бушмана–Эрдейи — третьего рода. Полученные различные классы ОП могут быть применены для получения формул связи между решениями дифференциальных уравнений с операторами Бесселя и их невозмущённых аналогов по обычной для теории ОП схеме. Кроме того, в этом пункте в качестве приложения композиционного метода построено большое число решений для различных интегродифференциальных уравнений со специальными функциями в ядрах. Подобные уравнения находят приложения в различных прикладных задачах.

Ссылки на формулы в этом пункте даются на справочники [156] с указанием тома.

3.2.2 Классические интегральные преобразования

Рассмотрим синус и косинус-преобразования Фурье и обратные к ним преобразования

$$F_c f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(y) \cos(ty)\, dy, \tag{3.3}$$

$$F_c^{-1} = F_c,$$

$$F_s f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(y) \sin(ty)\, dy, \tag{3.4}$$

$$F_s^{-1} = F_s.$$

Определим преобразование Фурье-Бесселя по формулам

$$F_\nu f = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int\limits_0^\infty f(y)\, j_\nu(ty)\, y^{2\nu+1}\, dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(y) \frac{J_\nu(ty)}{(ty)^\nu}\, y^{2\nu+1}\, dy = \frac{1}{t^\nu} \int\limits_0^\infty f(y) J_\nu(ty)\, y^{\nu+1}\, dy, \tag{3.5}$$

$$F_\nu^{-1} f = \frac{1}{(y)^\nu} \int\limits_0^\infty f(t) J_\nu(yt)\, t^{\nu+1}\, dt. \tag{3.6}$$

Операторы (3.2.10)-(3.4) самосопряженные унитарные в $L_2(0,\infty)$. Операторы (3.5)-(3.6) самосопряженные унитарные в $L_{2,\nu}(0,\infty)$.

3.2.3 Введение о.п. в образах преобразований типа Фурье.

Введём первую пару ОП по формулам

$$S^{(\varphi)}_{\nu,\,c} = F_c^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(t)}F_\nu\right), \tag{3.7}$$

$$P^{(\varphi)}_{\nu,\,c} = F_\nu^{-1}\left(\varphi(t)F_c\right), \tag{3.8}$$

и другую пару

$$S^{(\varphi)}_{\nu,\,s} = F_s^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(t)}F_\nu\right), \tag{3.9}$$

$$P^{(\varphi)}_{\nu,\,s} = F_\nu^{-1}\left(\varphi(t)F_s\right). \tag{3.10}$$

Формально введенные пары операторов взаимнообратны. Дальнейшие выкладки проводятся на финитных функциях, что, в частности, позволяет производить перестановку порядка интегрирования.

Получим интегральные представления ОП (3.7)-(3.8).

$$(S^{(\varphi)}_{\nu,\,c}f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \left\{\frac{1}{\varphi(t)}(F_\nu f)(t)\right\}\cos(tx)\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\varphi(t)}\left\{\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^\nu}f(\lambda)J_\nu(t\lambda)\lambda^{\nu+1}d\lambda\right\}dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(\lambda)\lambda^{\nu+1}\left(\int\limits_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\varphi(t)t^\nu}J_\nu(t\lambda)dt\right)d\lambda =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty K(x,\lambda)f(\lambda)\,d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty K(x,y)f(y)\,dy,$$

$$K(x,y) = y^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\varphi(t)\,t^\nu}J_\nu(yt)\,dt.$$

Займемся обратным оператором

$$(P^{(\varphi)}_{\nu,c} f)(x) = \frac{1}{x^\nu}\int\limits_0^\infty J_\nu(xt)\, t^{\nu+1} \left\{ \varphi(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(y)\cos(ty)\, dy \right\} dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^\nu}\int\limits_0^\infty f(y)\left\{ \int\limits_0^\infty J_\nu(xt)\, t^{\nu+1}\varphi(t)\cos(ty)\, dt \right\} dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty G(x,y)f(y)\, dy,$$

где

$$G(x,y) = \frac{1}{x^\nu}\int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{\nu+1}\cos(yt)J_\nu(xt)\, dt.$$

Аналогично с заменой $\cos\xi \to \sin\xi$ получаем вторую пару формул.

Суммируем это в виде теоремы.

Теорема 3.2.1 *Определим операторы преобразования, сплетающие B_ν и D^2, по формулам*

$$S^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} = F^{-1}_{\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}}\left(\frac{1}{\varphi(t)}F_\nu\right),$$

$$P^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} = F^{-1}_\nu\left(\varphi(t)F_{\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}}\right).$$

Тогда для оператора типа Сонина справедливо представление

$$\left(S^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty K(x,y)f(y)\, dy, \tag{3.11}$$

где

$$K(x,y) = y^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \frac{\begin{Bmatrix} \sin(xt) \\ \cos(xt) \end{Bmatrix}}{\varphi(t)\, t^\nu} J_\nu(yt)dt.$$

Представление для оператора типа Пуассона имеет вид

$$\left(P^{(\varphi)}_{\nu, \begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} f \right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty G(x,y) f(y)\, dy, \tag{3.12}$$

где

$$G(x,y) = \frac{1}{x^\nu} \int\limits_0^\infty \varphi(t)\, t^{\nu+1} \begin{Bmatrix} \sin(yt) \\ \cos(yt) \end{Bmatrix} J_\nu(xt)dt.$$

Чтобы было удобно считать, сделаем преобразование для $K(x,y)$

$$x \to b,\ y \to c,\ t \to x \Longrightarrow K(b,c) = c^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varphi(x)\, x^\nu} \begin{Bmatrix} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix} J_\nu(cx)\, dx,$$

а для $G(x,y)$

$$x \to c,\ y \to b,\ t \to x \Longrightarrow G(b,c) = c^{\nu} \int\limits_0^\infty \varphi(x) x^{\nu+1} \begin{Bmatrix} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix} J_\nu(cx)\, dx.$$

Рассмотрим далее возможные случаи выбора функции $\varphi(\cdot)$.

3.2.4 Случай $\varphi = x^\alpha$.

В этом случае назовём ОП данного класса операторами Бушмана–Эрдейи третьего рода.

Вычисление ядер ОП в случае $\varphi(x) = x^\alpha$ ($\sin$-преобразование)

В этом случае получим

$$K(b,c) = c^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^{\alpha+\nu}\varphi(x)} \begin{Bmatrix} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix} J_\nu(cx)\, dx,$$

а) Выбираем sin–преобразование

$$K(b,c) = c^{\nu+1} \int\limits_0^\infty x^{-(\alpha+\nu)} \sin(bx) J_\nu(cx)\, dx =$$

$$= [\text{Т.2, с.192, ф. 3–4}] \left| \begin{matrix} \delta' = 1,\ \alpha' - 1 = -\alpha - \nu \\ \alpha' = 1 - \alpha - \nu \end{matrix} \right| =$$

$$= c^{\nu+1} \frac{2^{1-\alpha-\nu+1-1} b}{c^{1-\alpha-\nu+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha-\nu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu-1+\alpha+\nu-1}{2}\right)} \cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left(\frac{1-\alpha-\nu+\nu+1+\nu}{2}, \frac{1-\alpha-\nu+1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{b^2}{c^2}\right)$$

при условиях $0 < b < c$,

$$-1 - Re\,\nu < Re\,(1-\alpha-\nu) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -2 < Re\,(-\alpha) < Re\,\nu + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - Re\,\nu < Re\alpha < 2$$

имеет смысл когда по крайней мере

$$-\frac{1}{2} - Re\,\nu < 2,\ Re\,\nu > -\frac{5}{2}.$$

$$= \frac{2^{1-\alpha-\nu} b}{c^{1-\alpha-2\nu}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)} {}_2F_1\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 1 - \nu - \frac{\alpha}{2}; \frac{3}{2}; \frac{b^2}{c^2}\right)$$

$$-Re\,\left(\nu + \frac{1}{2}\right) < Re\,\alpha < 2 \quad \left(Re\nu > -\frac{5}{2}\right).$$

Отсюда, меняя $b \to x,\ c \to y\ \Rightarrow$

$$K(x,y)=\frac{2^{1-\alpha-\nu}x}{y^{1-\alpha-2\nu}}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(1-\frac{\alpha}{2},1-\nu-\frac{\alpha}{2};\frac{3}{2};\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)$$

$-Re\,\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,\alpha<2\quad\left(Re\,\nu>-\frac{5}{2}\right).\qquad x<y$

Рассмотрим второй случай $b>c$.

$$K(x,y)=\frac{c^{\nu+1}c^{\nu}\sin\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha-\nu+\nu\right)}{2^{\nu}b^{\nu+1-\alpha-\nu}}\frac{\Gamma\left(\nu+1-\alpha-\nu\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{1-\alpha-\nu+\nu}{2},\frac{1-\alpha-\nu+\nu+1}{2};\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right)$$

$-1-Re\,\nu<Re\,(1-\alpha-\nu)<\frac{3}{2}$

$$=\frac{c^{2\nu+1}\sin\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha\right)}{2^{\nu}b^{1-\alpha}}\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right).$$

Меняя $b \to x,\ c \to y \Rightarrow$

$$K(x,y)=\frac{y^{2\nu+1}}{x^{1-\alpha}}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha\right)}{2^{\nu}}\,\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{y^2}{x^2}\right).$$

$y<x,\ -Re\,\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,\alpha<2\quad\left(Re\nu>-\frac{5}{2}\right).$

Окончательно получаем

$$\left(S^{x^{\alpha}}_{\nu,\,s}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}K(x,y)f(y)\,dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times$$

$$\times\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)}{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+1\right)}\,\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int\limits_0^{x}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)y^{2\nu+1}\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{2^{1-\alpha-\nu}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}x\int\limits_x^{\infty}{}_2F_1\left(1-\frac{\alpha}{2},1-\nu-\frac{\alpha}{2};\frac{3}{2};\frac{x^2}{y^2}\right)y^{2+2\nu-1}f(y)\,dy\right)\qquad(3.13)$$

при $-Re\,\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,\alpha<2\quad\left(Re\nu>-\frac{5}{2}\right)$.

Рассмотрим соответствующий обратный.

$$G(c,b)=\frac{1}{c^{\nu}}\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha+\nu+1}\sin(bx)J_{\nu}(cx)\,dx=\begin{vmatrix}\delta=1\\ \alpha'=\alpha+\nu+2\end{vmatrix}$$

при $b<c$

$$=\frac{1}{c^{\nu}}\frac{2^{\alpha+\nu+2}b}{c^{\alpha+\nu+2+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+2+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-\alpha-\nu-2-1}{2}\right)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\nu+2+1+\nu}{2},\frac{\alpha+\nu+2+1-\nu}{2};\frac{3}{2};\frac{b^2}{c^2}\right)=$$

$$=\frac{2^{\alpha+\nu+2}b}{c^{\alpha+2\nu+3}}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2};\frac{3}{2};\frac{b^2}{c^2}\right)$$

$-1-Re\,\nu<Re\,(\nu+\alpha+2)<\frac{3}{2};\ -3-2\,Re\,\nu<Re\,\alpha<\frac{3}{2}-2-Re\,\nu=-Re\,\nu-\frac{1}{2}=-Re\,(\nu+\frac{1}{2})$.

В частности $-3-2\,Re\,\nu<-Re\,\nu-\frac{1}{2},\ Re\,\nu>-\frac{5}{2}$.

Второй случай $c<b$

$$K(x,y)=\frac{1}{c^{\nu}}\frac{c^{\nu}}{2^{\nu}b^{\nu+\alpha+\nu+2}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(2\nu+\alpha+2\right)\Gamma\left(2\nu+\alpha+2\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\nu+1+\frac{\alpha}{2},\nu+\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(2\nu+\alpha+2\right)\Gamma\left(2\nu+\alpha+2\right)}{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+1\right)b^{\nu+\alpha+\nu+2}}\,{}_2F_1\left(\nu+1+\frac{\alpha}{2},\nu+\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right)=$$

$$=-\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(2\nu+\alpha\right)\Gamma\left(2\nu+\alpha+2\right)}{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+1\right)b^{2\nu+\alpha+2}}\,{}_2F_1\left(\nu+1+\frac{\alpha}{2},\nu+\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right).$$

(те же условия на α.)

Сделаем замены $c \to x$, $b \to y$. Тогда получим

$$\left(P_{\nu,s}^{(\varphi)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times$$
$$\times \left(\frac{2^{\alpha+\nu+2}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)x^{\alpha+2\nu+3}} \int\limits_0^x {}_2F_1\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{y^2}{x^2}\right) y f(y)\,dy - \right.$$
$$-\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2\nu+\alpha)\,\Gamma(2\nu+\alpha+2)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \cdot$$
$$\left. \cdot \int\limits_x^\infty {}_2F_1\left(\nu+1+\frac{\alpha}{2}, \nu+\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}; \nu+1; \frac{x^2}{y^2}\right) \frac{f(y)\,dy}{y^{2\nu+\alpha+2}} \right) \tag{3.14}$$

при условиях $-3-2\,Re\,\nu < Re\,\alpha < -Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$. В частности $\left\{Re\,\nu > -\frac{5}{2}\right\}$.

Замечание 3.2.1 *Из условий на* $Re\,\alpha$ (3.13)-(3.14) *видно, что они несовместны. В каждом конкретном случае есть надежда, что их можно расширить.*

Теперь соберем формулы (3.13)-(3.14) вместе.

Теорема 3.2.2 *Справедливы формулы*

$$\left(S_{\nu,s}^{(x^\alpha)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times$$
$$\times \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int\limits_0^x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}; \nu+1; \frac{y^2}{x^2}\right) y^{2\nu+1} f(y)\,dy + \right.$$
$$\left. + \frac{2^{1-\alpha-\nu}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)} x \int\limits_x^\infty {}_2F_1\left(1-\frac{\alpha}{2}, 1-\nu-\frac{\alpha}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{y^2}\right) y^{\alpha+2\nu-1} f(y)\,dy \right) \tag{3.15}$$

при условии $-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right) < Re\,\alpha < 2$ *и*

$$\left(P_{\nu,s}^{(x^\alpha)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times$$
$$\times \left(\frac{2^{\alpha+\nu+2}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) x^{\alpha+2\nu+3}} \int\limits_0^x {}_2F_1\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{y^2}{x^2}\right) y f(y)\, dy - \right.$$
$$-\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2\nu+\alpha)\,\Gamma(2\nu+\alpha+2)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \cdot$$
$$\left. \cdot \int\limits_x^\infty {}_2F_1\left(\nu+1+\frac{\alpha}{2}, \nu+\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}; \nu+1; \frac{x^2}{y^2}\right) \frac{f(y)\, dy}{y^{2\nu+\alpha+2}} \right) \tag{3.16}$$

при условии $-3 - 2\,Re\,\nu < Re\,\alpha < -Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$.

Во всех случаях $Re\,\nu > -\frac{5}{2}$.

3.2.5 Сведение к функциям Лежандра

Выразим ядра этих ОП через функции Лежандра.

а) ОП S

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}; \nu+1; \frac{y^2}{x^2}\right) = \begin{pmatrix} \text{ИР-3,} \\ \text{с.460} \\ \text{ф. 102} \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} a=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}, \\ c=\nu+1 \end{matrix} \right| =$$

$$= e^{(\nu+1-1+\alpha-\frac{1}{2})\pi i} \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1-2\nu-2}{4}} \cdot$$

$$\cdot \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{2\nu+2-1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{1-\alpha-\nu-1+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{(\nu+\alpha-\frac{1}{2})\pi i} \left(\frac{y}{x}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$= e^{(\nu+\alpha-\frac{1}{2})\pi i} \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(1+\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \frac{(x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{y^{\nu+\frac{1}{2}}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$
{}_2F_1\left(1-\frac{\alpha}{2},1-\nu-\frac{\alpha}{2};\frac{3}{2};\frac{x^2}{y^2}\right)=\begin{pmatrix}\text{ИР-3,}\\ \text{с.458}\\ \text{ф. 78}\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}a=1-\frac{\alpha}{2}\\ b=1-\nu-\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right|=
$$

$$
=\frac{1}{2}\frac{2^{2-\nu-\alpha-\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\frac{x}{y}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{(3-2+\alpha-2+2\nu+\alpha)}{4}}\times
$$

$$
\times\left[\mathbb{P}^{\frac{3}{2}-1+\frac{\alpha}{2}-1+\nu+\frac{\alpha}{2}}_{1-\frac{\alpha}{2}-1+\nu+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}\right)-\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right]=
$$

$$
=\frac{1}{2^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)\frac{y}{x}\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\times
$$

$$
\times\left\{\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}=
$$

$$
=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}}\frac{(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{x\,y^{\alpha+\nu-\frac{3}{2}}}\times
$$

$$
\times\left\{\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}.
$$

Подставим все это в формулировку теоремы.

$$
\left(S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma\left(1-\alpha\right)}{2^\nu\Gamma\left(\nu+1\right)}\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{x^{1-\alpha}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\alpha-1}}\frac{e^{(\nu+\alpha-\frac{1}{2})\pi i}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\alpha)}\times\right.
$$

$$
\times\int\limits_0^x y^{2\nu+1}f(y)\cdot\frac{(x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{y^{\nu+\frac{1}{2}}}Q^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)dy+
$$

$$
+\frac{2^{1-\alpha-\nu}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}x\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\,x}\cdot
$$

$$\cdot\int\limits_x^\infty y^{\alpha+2\nu-1}f(y)\frac{(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{y^{\alpha+\nu-\frac{3}{2}}}\left\{\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}\,dy\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}e^{(\nu+\alpha-\frac{1}{2})\pi i}\int\limits_0^x(x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+\right.$$

$$+\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)2^{2\alpha+2\nu+1}}\times$$

$$\left.\times\int\limits_x^\infty(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left\{\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)dy\right).$$

Выразим значения формулы Лежандра через положительное значение аргумента (см. [10], с.145, ф. 14)

$$\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)=P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\cos\pi\left(\nu-\frac{1}{2}+\alpha+\nu-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\sin\pi(\alpha+2\nu-1)$$

Получим

$$\cos(z-\pi)=-\cos z;\ \sin(z-\pi)=-\sin z\qquad\Rightarrow$$

$$\left(S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}f\right)(x)=\frac{2}{\pi}\left(-i\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}\times\right.$$

$$\times\int\limits_0^x(x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+$$

$$+(-1)\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)2^{2\alpha+2\nu+1}}\times$$

$$\times\left(\left(1+\cos\pi(\alpha+2\nu)\right)\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)dy-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu)\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)dy\right).$$

Теорема 3.2.3 *Справедливы интегральные представления для оператора типа Сонина*

$$\left(S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}f\right)(x)=\frac{2}{\pi}\left[-i\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot e^{(\nu+\alpha)\pi i}\cdot\right.$$

$$\cdot\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+$$

$$+\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot \tag{3.17}$$

$$\left.\cdot\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)dy\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-i\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+\right.$$

$$+\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot \tag{3.18}$$

$$\cdot\left(\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu)\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)dy-\right.$$

$$-\left(1+\cos\pi(\alpha+2\nu)\right)\int\limits_x^{\infty}(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)dy\Bigg).$$

$$-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,alpha<2.$$

Выведем ещё одно представление, в котором заменим верхний индекс у функций Лежандра на противоположный. (см. [10], с.145, ф. 17-18).

$$\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+1-\alpha-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+1+\alpha+\nu-\frac{1}{2}\right)}\right)^{-1}$$

$$\cdot\left[\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)\cdot\cos\pi(\alpha+\nu-\frac{1}{2})-\frac{\pi}{2}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)\cdot\sin\pi(\alpha+\nu-\frac{1}{2})\right]=$$

$$=\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1}\left[\sin\pi(\alpha+\nu)\,\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)+\frac{\pi}{2}\cos\pi\left(\alpha+\nu\right)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)\right].$$

$$\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\alpha-\nu\right)-\frac{2}{\pi}\sin\pi\left(\frac{1}{2}-\alpha-\nu\right)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)\right]=$$

$$=\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1}\left[\sin\pi(\alpha+\nu)\,\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)-\frac{2}{\pi}\cos\pi(\alpha+\nu)\,\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}(z)\right].$$

Преобразуем выражение в круглых скобках в (3.18).

$$\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu)\int\limits_x^{\infty}(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left\{\sin\pi(\alpha+\nu)\,\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)+\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}\cos\pi(\alpha+\nu)\,\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg\}\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1} f(y)\,y^{\nu+\frac{1}{2}}\,dy-$$

$$-(1+\cos\pi(\alpha+2\nu))\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1}\int\limits_x^\infty y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sin\pi(\alpha+\nu)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{2}{\pi}\cos\pi(\alpha+\nu)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}dy=$$

$$\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu)\sin\pi(\alpha+\nu)+\frac{2}{\pi}\cos\pi(\alpha+\nu)(1+\cos\pi(\alpha+2\nu))\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int\limits_x^\infty(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy+$$

$$+(\sin\pi(\alpha+2\nu)\cos\pi(\alpha+\nu)-(1+\cos\pi(\alpha+2\nu))\sin\pi(\alpha+\nu))\cdot$$

$$\left.\cdot\int\limits_x^\infty(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy\right\}=$$

$$=\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{2}{\pi}(\cos\pi(\alpha+\nu)+\cos\pi\nu)\int\limits_x^\infty(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy+\right.$$

$$+\left(\sin\pi\nu-\sin\pi(\alpha+\nu)\right)\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac14}\mathbb{P}^{\frac12-\alpha-\nu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac12}\,f(y)\,dy\Bigg]=$$

$$=2\left(\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}\right)^{-1}\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac14}\mathbb{Q}^{\frac12-\alpha-\nu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac12}\,f(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac14}\mathbb{P}^{\frac12-\alpha-\nu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac12}\,f(y)\,dy\right].$$

Преобразуем const.

$$2\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\frac{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}=2\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\cdot$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)2^{\alpha+2\nu-1}\pi^{-\frac12}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac12+\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)2^{-\alpha}\pi^{-\frac12}\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac12\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\Gamma\left(\nu+\frac12+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)=$$

$$=\frac12\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\frac{\pi}{\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\pi}{2}.$$

В результате оператор примет вид

$$\left(S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s}f\right)(x)=\frac{2}{\pi}\left(-i\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\right.$$

$$\cdot\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac14}Q^{\frac12-\alpha-\nu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac12}\,f(y)\,dy+$$

$$+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy-$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy\right).$$

Теорема 3.2.4 *Пусть* $-Re\,(\nu+\frac{1}{2})<Re\,\alpha<2$. *Тогда*

$$\left(S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}f\right)(x)=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(-i\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy\right)-$$

$$-\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}\,f(y)\,dy.$$

Перейдем к вычислению ядер для оператора типа Пуассона через функции Лежандра.

Займемся оператором $P_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}$.

$${}_2F_1\left(\nu+1+\frac{\alpha}{2},\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2};\nu+1;\frac{x^2}{y^2}\right)=\begin{pmatrix}\text{ИР-3,}\\ \text{с.460}\\ \text{ф. 102}\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}a=\nu+\frac{\alpha}{2}+1,\\ c=\nu+1\end{matrix}\right|=$$

$$=e^{(\nu+1-2\nu-\alpha-2-\frac{1}{2})\pi i}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\alpha+2\nu+2)}\cdot\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1-2\nu-2}{4}}\times$$

$$\times\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{2\nu+2-1}{4}-\nu-\frac{\alpha}{2}-1}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{2\nu+\alpha+2-\nu-1+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}}\right)=$$

$$= \frac{\Gamma(1+\nu)2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+2\nu+2)\sqrt{\pi}}\, e^{(-\nu-\alpha-\frac{3}{2})\pi i} \left(\frac{x}{y}\right)^{-(\nu+\frac{1}{2})} \cdot$$

$$\cdot \frac{(y^2-x^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}}{y^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}}\, Q^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\nu)2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+2\nu+2)\sqrt{\pi}}\, i\, e^{(-\nu-\alpha)\pi i}\, \frac{y^{2\nu+\alpha+2}}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\, (y^2-x^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\, Q^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right).$$

$${}_2F_1\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{y^2}{x^2}\right) = \begin{pmatrix} \text{ИР-3,} \\ \text{с.458} \\ \text{ф. 78} \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} a = \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}, \\ b = \nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2^{\nu+\alpha+3-\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi\frac{y^2}{x^2}}}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)\Gamma(\nu+\frac{\alpha}{2}+1)\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{3-2\nu-2\alpha-6}{4}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathbb{P}^{\frac{3}{2}-\nu-\alpha-3}_{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}-\nu-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\right) - \mathbb{P}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{2^{\nu+\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)\, \Gamma(\nu+\frac{\alpha}{2}+1)\frac{x}{y}\frac{(x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}}{x^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathbb{P}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right) - \mathbb{P}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Подставим все это в оператор $P_{\nu,s}$

$$\left(P^{(x^\alpha)}_{\nu,s} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{2^{\alpha+\nu+2}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{1}{x^{\alpha+2\nu+3}}\int\limits_0^x y\frac{2^{\nu+\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right) \cdot\right.$$

$$\cdot \frac{x^{\nu+\alpha+\frac{5}{2}}}{y}\,(x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\left(\mathbb{P}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right) - \mathbb{P}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right) f(y)\, dy -$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2\nu+2)\,\Gamma(2\nu+\alpha+2)}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{i\,\Gamma(\nu+1)2^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-(\nu+\alpha)\pi i}}{y^{2\nu+\alpha+2}\Gamma(2\nu+\alpha+2)\sqrt{\pi}}\frac{y^{2\nu+\alpha+2}}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\,(y^2-x^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\Big)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\,i\,e^{-(\nu+\alpha)\pi i}\sin\frac{\pi}{2}(2\nu+2)\frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\int\limits_{x}^{\infty}(y^2-x^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy+$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{0}^{x}\left[\mathbb{P}_{-\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right)-\mathbb{P}_{-\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right](x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}f(y)\,dy$$

Разность функций Лежандра преобразуем в следующем порядке: 1) сменим нижний индекс; 2) у первой функции перейдем к положительному аргументу; 3) поменяем знак верхнего индекса на противоположный. (см. [10], с.145)

$$\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right)-\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)=\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\cos\pi(-\alpha-2)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\sin\pi(-\alpha-2)-\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)-(1-\cos\pi\alpha)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\pi\alpha\,\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}-\nu-\alpha-\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+\nu+\alpha+\frac{3}{2}+1\right)}\left[\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\cos\pi\left(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}\sin\pi\left(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\Bigg]-$$

$$-(1-\cos\pi\alpha)\frac{\Gamma(-\alpha-1)}{\Gamma(2\nu+\alpha+1)}\left[\cos\pi\left(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\sin\pi\left(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right]=\frac{\Gamma(-\alpha-1)}{\Gamma(2\nu+\alpha+2)}\cdot$$

$$\cdot\Bigg[(\sin\pi\alpha(-\cos\pi(\nu+\alpha))+(\cos\pi\alpha-1)\sin\pi(\nu+\alpha))\,\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}(\sin\pi\alpha\sin\pi(\nu+\alpha)-(1-\cos\pi\alpha)\cos\pi(\nu+\alpha))\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\Bigg].$$

Преобразуем тригонометрические выражения

$$\sin\pi(\nu+\alpha)\cos\pi\alpha-\cos\pi(\nu+\alpha)\sin\pi\alpha-\sin\pi(\nu+\alpha)=$$

$$=\sin\pi\nu-\sin\pi(\nu+\alpha)=2\cos\frac{\pi}{2}(2\nu+\alpha)\sin\frac{\pi(\nu-\nu-\alpha)}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\pi(\nu+\alpha)\cos\pi\alpha+\sin\pi(\nu+\alpha)\sin\pi\alpha-\cos\pi(\nu+\alpha)=$$

$$=\cos\pi\nu-\cos\pi(\nu+\alpha)=2\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

Теперь преобразуем const

$$\frac{2}{\pi}\frac{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma(-\alpha-1)}{\Gamma(2\nu+\alpha+2)}\,2=$$

$$
= \frac{2^{2\alpha+2\nu+3}}{\pi} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)2^{2\nu+\alpha+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right)}\cdot
$$

$$
\cdot\frac{2^{-\alpha-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)} =
$$

$$
= \frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi\sin\pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} = -\frac{1}{\sin\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.
$$

Подставляем во второй интеграл

$$
\frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}(-1)\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\left\{-\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{2}{\pi}\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right\}f(y)\,dy = \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\cdot
$$

$$
\cdot\left\{\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\int\limits_0^x \mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)(x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}f(y)\,dy-\right.
$$

$$
\left.-\frac{2}{\pi}\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\int\limits_0^x \mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)(x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}f(y)\,dy\right\}.
$$

Теорема 3.2.5 *Справедливо представление*

$$
(P_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}f)(x) = \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\cdot
$$

$$
\cdot\left(\cos\pi(\nu+\frac{\alpha}{2})\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\,-\right.
$$

$$
-\frac{2}{\pi}\sin\pi(\nu+\frac{\alpha}{2})\left\{\int\limits_0^x \mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)(x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}f(y)\,dy\,+\right.
$$

$$
\left.\left.+\,i\,e^{-(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\right\}\right).
$$

при условии $-3-2\,Re\,\nu < Re\,\alpha < -Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \quad \left(Re\,\nu > -\frac{5}{2}\right)$.

Теорема 3.2.6 *Положим* $\beta=-(2\nu+\alpha+1)$. *Подправим операторы по стандарту на* $x^{\pm(\nu+\frac{1}{2})}$. *Тогда*

$$\left(S'^{(x^\beta)}_{\nu,\,s}\right)^* = P'^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s}. \ \ (Im\,(\nu+\beta)=0)$$

($'$ *означает подправленные операторы,* $*$ *— сопряжение в* $L_2(0,\infty)$*). при этом, если* $-\left(Re\,\nu+\frac{1}{2}\right) < Re\,\beta < 2$, *то* $-3-2\,Re\,\nu < Re\,\alpha < -Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$.

Доказательство.

$$(S'^{(x^\beta)}_{\nu,\,s} f)(x) = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi\beta}{2}\cdot$$
$$\cdot\left(-i\,e^{-(\nu+\beta)\pi i}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} Q^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy+\right.$$
$$\left.+\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \mathbb{Q}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right)-$$
$$-\sin\frac{\pi\beta}{2}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy.$$

Перейдём к сопряжённым и подставим β.

$$S^* = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi\beta}{2}\cdot$$
$$\cdot\left(\overline{-i\,e^{(\nu+\beta)\pi i}}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \overline{Q^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}}\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \mathbb{Q}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy\right)-$$
$$-\sin\frac{\pi\beta}{2}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy=$$

$$\cos\frac{\pi}{2}(-2\nu-\alpha-1)=\cos\frac{\pi}{2}(2\nu+\alpha+1)=-\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\sin\frac{\pi}{2}(-2\nu-\alpha-1)=-\sin\frac{\pi}{2}(2\nu+\alpha+1)=-\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\nu+\beta=\nu-(2\nu+\alpha+1)=-(\nu+\alpha)-1;\ \frac{1}{2}-\beta-\nu=\frac{1}{2}+(2\nu+\alpha+1)-\nu=\nu+\alpha+\frac{3}{2}.$$

С сопряжением Q возникает сложность. Во–первых,

$$\overline{-i\ +e^{(\nu+\beta)\pi i}}=i\,e^{-(\nu+\beta)\pi i}=i\,e^{-(\nu+(-2\nu-\alpha-1))\pi i}=i\,e^{-(\nu+\alpha+1)\pi i}=-i\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}.$$

Q вне разреза — комплексная функция. Из БЭ-I, с.140, ф. 4 и из вещественности $P_\nu^\mu(x)$ (выражается через ${}_2F_1(x)$)(x — вещественно) следует, что $Q_\nu^\mu(x)=e^{\mu\pi i}f(x)$, f — вещественно $\Longrightarrow$

$$\overline{Q_\nu^\mu(x)}=e^{-\mu\pi i}\overline{f(x)}=e^{-2\mu\pi i}e^{\mu\pi i}f(x)=e^{-2\mu\pi i}Q_\nu^\mu(x),$$

$$\overline{-i\,e^{(\nu+\beta)\pi i}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}\left(\frac{y}{x}\right)}=-ie^{(\nu+\alpha)\pi i}e^{-2\left(\frac{1}{2}-\beta-\nu\right)\pi i}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=i\,e^{\pi i(3\nu+\alpha+2\beta)}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}\left(\frac{y}{x}\right)=i\,e^{\pi i(3\nu+\alpha-4\nu-2\alpha-2)}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=i\,e^{-\pi i(\nu+\alpha)}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Получим

$$S^* = \frac{2}{\pi}(-1)\sin\pi\left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(i\,e^{-(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} \mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy\right) +$$
$$+\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} \mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy = P_{\nu,s}^{\prime(x^\alpha)}.$$

Соотношение между операторами доказано. Нужное неравенство очевидно.

3.2.6 Случай $\cos$ — преобразования

Начинаем с теоремы 1. Ядра считаем по доказанным формулам.

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty x^{-(\alpha+\nu)}\cos(bx)J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= [\text{ИР-2, с.192, ф. 3-4}]\left|\begin{matrix}\delta' = 0\\ \alpha' = 1-\alpha-\nu\end{matrix}\right| =$$

Пусть $0 < b < c$, $-Re\,\nu < Re\,\alpha' < \frac{3}{2}$.

$$= c^{\nu+1}\frac{2^{-\nu-\alpha}}{c^{1-\alpha-\nu}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha-\nu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-(1-\alpha-\nu)}{2}+1\right)}\cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left(\frac{1-\alpha-\nu+\nu}{2}, \frac{1-\alpha-\nu-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{b^2}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)c^{\alpha+2\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)2^{\alpha+\nu}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu; \frac{1}{2}; \frac{b^2}{c^2}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{ИР-3,} \\ \text{с. 458} \\ \text{ф. 74} \end{pmatrix} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) c^{\alpha+2\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right) 2^{\alpha+\nu}} \cdot \frac{2^{1-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-\nu\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{1-2(1-\alpha-\nu)}{4}} \left[\mathbb{P}^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}+\nu+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{b^2}{c^2}}\right) + \mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{c}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{2\alpha+2\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)} c^{\alpha+2\nu} \frac{(c^2-b^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{c^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{c}\right) + \mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{b}{c}\right)\right).$$

Сделаем маленькое отступление — проверим ф. 74 при $x = 0$.

$$\frac{2^{a+b-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\left[\mathbb{P}^{\frac{1}{2}-a-b}_{a-b-\frac{1}{2}}(0) + \mathbb{P}^{\frac{1}{2}-a-b}_{a-b-\frac{1}{2}}(0)\right] =$$

$$= \frac{2^{a+b-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}-a-b} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\frac{\pi}{2}(-2b) \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a-b-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+a+b}{2}\right)} = \frac{1}{\pi}\cos b\pi \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos b\pi \frac{\pi}{\cos b\pi} = 1.$$

Проверка сходится.

$$-Re\,\nu < Re\,(1-\alpha-\nu) < \frac{3}{2};$$

$$-\nu < 1-\alpha-\nu;\ \ \alpha < 1,\ \ Re\,\alpha < 1.$$

$$1-\alpha-\nu<\frac{3}{2};\ \alpha>-\left(\nu+\frac{1}{2}\right).$$

Все это требует по крайней мере $-Re\,\nu<\frac{3}{2}$, $Re\,\nu>-\frac{3}{2}$. Итак,

$$-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,\alpha<1\ \left(Re\,\nu>-\frac{3}{2}\right).$$

Пусть теперь $0<c<b$, те же условия.

$$K(b,c)=c^{\nu+1}\frac{c^{\nu}}{2^{\nu}b^{\nu+1-\nu-\alpha}}\cos\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha-\nu+\nu\right)\frac{\Gamma\left(\nu+1-\alpha-\nu\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\cdot$$

$$\cdot{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right)=\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+1\right)}\cos\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha\right)\frac{c^{2\nu+1}}{b^{1-\alpha}}\cdot$$

$$\cdot\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+1\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1-\alpha\right)}(-i)e^{(\nu+\alpha)\pi i}\frac{1}{b^{\alpha-1}}\frac{(b^2-c^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{c^{\nu+\frac{1}{2}}}\,Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{b}{c}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-i)e^{(\nu+\alpha)\pi i}\sin\frac{\pi}{2}\alpha\cdot c^{\nu+\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{b}{c}\right).$$

Теперь вспомним, что $b\to x$, $c\to y$.

$$\left(S_{\nu,\,c}^{(x^{\alpha})}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_0^x\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-i)e^{(\nu+\alpha)\pi i}\sin\frac{\pi}{2}\alpha\cdot\right.$$

$$\cdot y^{\nu+\frac{1}{2}}(x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2^{2\alpha+2\nu+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}\,y^{\nu+\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left.\cdot\,(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left\{\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}f(y)\,dy\right)=$$

$$
= \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}(-i)e^{(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\nu+\frac{1}{2}}\, f(y)\, dy + \right.
$$

$$
+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}\cdot
$$

$$
\left.\cdot\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left\{\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)\right\} y^{\nu+\frac{1}{2}}\, f(y)dy\right).
$$

Стандартная процедура с функцией Лежандра

$$
\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)+\cos\pi(\alpha+2\nu-1)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu-1)\cdot
$$

$$
\cdot Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)+
$$

$$
+(1-\cos\pi(\alpha+2\nu))\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)=
$$

$$
=\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu)\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+\alpha+\nu-\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\alpha-\nu+1\right)}\cdot
$$

$$
\cdot\left[\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\alpha-\nu\right)+\frac{\pi}{2}\sin\pi\left(\frac{1}{2}-\alpha-\nu\right)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\right]+
$$

$$
+\left(1-\cos\pi(\alpha+2\nu)\right)\frac{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left[\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\sin\pi\left(\alpha+\nu\right)-\right.
$$

$$
\left.-\frac{2}{\pi}\sin\pi\left(\frac{1}{2}-\alpha-\nu\right)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\right]=\frac{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\cdot
$$

$$\cdot\left\{\left(\sin\pi(\alpha+2\nu)\cos\pi(\alpha+\nu)+(1-\cos\pi(\alpha+2\nu))\sin\pi(\alpha+\nu)\right)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi(\alpha+2\nu)\sin\pi(\alpha+\nu)-(1-\cos\pi(\alpha+2\nu))\cos\pi(\alpha+\nu)\right)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left\{\left(\sin\pi\nu+\sin\pi(\alpha+\nu)\right)\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\left(\cos\pi\nu-\cos\pi(\alpha+\nu)\right)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\right\}=$$

$$\begin{pmatrix}\sin\pi\nu+\sin\pi(\alpha+\nu) & = & 2\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\\ \cos\pi\nu-\cos\pi(\alpha+\nu) & = & 2\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2\,\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\frac{\pi\alpha}{2}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

Теперь преобразуем *const*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}\cdot\frac{2\,\Gamma\left(\alpha+2\nu\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{2^{\alpha+2\nu-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2^{-\alpha}\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi}{\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\pi}{2}.$$

Подставляем всё

$$\left(S_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)}f\right)(x)=(-i)e^{(\nu+\alpha)\pi i}\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{y}{x}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+$$

$$+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty \mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(-i\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{y}{x}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy\right)+$$

$$+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_x^\infty \mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy.$$

б) Перейдём к обратному оператору.

$$G(c,b)=\frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^{\alpha+\nu+1}\cos(bx)J_\nu(cx)\,dx\Big|_{\alpha'=\alpha+\nu+2}^{\delta=0}$$

Пусть $0<b<c$, $-Re\,\nu<Re\,\alpha'<\frac{3}{2}$

$$G=\frac{1}{c^\nu}\frac{2^{\alpha+\nu+1}}{c^{\alpha+\nu+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+2\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-\alpha-\nu-2}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot{}_2F_1\left(1+\nu+\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha+\nu+2-\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{b^2}{c^2}\right)=$$

$$= \frac{2^{\alpha+\nu+1}}{c^{\alpha+2\nu+2}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\, {}_2F_1\left(1+\frac{\alpha}{2};1+\frac{\alpha}{2}+\nu;\frac{1}{2};\frac{b^2}{c^2}\right).$$

Пусть теперь $0 < c < b$, условия те же

$$G = \frac{1}{c^\nu}\frac{c^\nu}{2^\nu b^{\alpha+2\nu+2}}\cos\frac{\pi}{2}\left(\alpha+2\nu+2\right)\frac{\Gamma\left(\alpha+2\nu+2\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu;\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu;\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right).$$

Условия на α:

$$-Re\,\nu < Re(\alpha+\nu+2) < \frac{3}{2};$$

$$\left.\begin{array}{cc} -\nu < \alpha+\nu+2; & \alpha > -2\nu-2; \\ \alpha+\nu+2 < \frac{3}{2}; & \alpha < -\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow\ -Re(2\nu{+}2) < Re\,\alpha < -Re(\nu{+}\frac{1}{2});$$

$$\left(Re\,\nu > -\frac{3}{2}\right),\ c\to x,\ b\to y \Rightarrow$$

$$\left(P_{\nu,c}^{(x^\alpha)}f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2^{\alpha+\nu+1}\Gamma\left(1+\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^x \frac{f(y)}{x^{\alpha+2\nu+2}}\cdot\right.$$

$$\cdot {}_2F_1\left(1+\frac{\alpha}{2};1+\frac{\alpha}{2}+\nu;\frac{1}{2};\frac{y^2}{x^2}\right)dy + \cos\frac{\pi}{2}\left(\alpha+2\nu+2\right)\frac{\Gamma(\alpha+2\nu+2)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\cdot$$

$$\left.\cdot\int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y^{\alpha+2\nu+2}}\,{}_2F_1\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu;\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu;\nu+1;\frac{x^2}{y^2}\right)dy\right)$$

Выразим ${}_2F_1$ в первом интеграле

$$\frac{2^{\alpha+\nu+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)x^{\alpha+2\nu+2}}\,{}_2F_1\left(1+\frac{\alpha}{2};1+\frac{\alpha}{2}+\nu;\frac{1}{2};\frac{y^2}{x^2}\right) =$$

$$=\begin{pmatrix}\text{ИР-3,}\\ \text{с.458}\\ \text{ф. 74}\end{pmatrix}=\frac{2^{\alpha+\nu+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)x^{\alpha+2\nu+2}}\frac{2^{2+\alpha+\nu-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\nu+\frac{3}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1-2(2+\alpha+\nu)}{4}}\left(\mathbb{P}^{\frac{1}{2}-2-\alpha-\nu}_{1+\frac{\alpha}{2}-1-\frac{\alpha}{2}-\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right)+\mathbb{P}^{-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right)=$$

$$=\frac{2^{2\alpha+2\nu+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^{\alpha+2\nu+2}}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(x^2-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}}}{x^{-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}}\left(\mathbb{P}^{-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right)+\mathbb{P}^{-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

На стр. 29-30 выведена формула ($\beta=\alpha$)

$$\mathbb{P}^{\beta+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right)+\mathbb{P}^{\beta+\nu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2\Gamma(\beta+2\nu)}{\Gamma(1-\beta)}\sin\pi\left(\nu+\frac{\beta}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\frac{\pi\beta}{2}\mathbb{P}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\beta}{2}\mathbb{Q}^{\frac{1}{2}-\beta-\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

Подставив $\beta=-2\nu-\alpha-1,\ z\to\frac{1}{z}$, получим

$$\mathbb{P}^{-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{x}\right)+\mathbb{P}^{-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2\Gamma(-\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+2\nu+2)}\sin\pi\left(\nu-\nu-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\frac{\pi}{2}(-2\nu-\alpha-1)\mathbb{P}^{\frac{1}{2}-\nu+2\nu+\alpha+1}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(-2\nu-\alpha-1)\mathbb{Q}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\right]=$$

$$=\frac{2\Gamma(-\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+2\nu+2)}(-1)\sin\pi\left(1+\alpha\right)\left[\sin\frac{\pi}{2}(2\nu+\alpha)(-1)\mathbb{P}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)-\right.$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\Bigg] =$$

$$= \frac{2\Gamma(-\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+2\nu+2)}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\Bigg[\sin\pi(\nu+\frac{\alpha}{2})\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos\pi(\nu+\frac{\alpha}{2})\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)\Bigg]$$

Подсчитаем $const$

$$\frac{2\Gamma(-\alpha-1)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\Gamma(\alpha+2\nu+2)}\frac{2^{2\alpha+2\nu+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2^{-\alpha-2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}{2^{\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(1+\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,2^{2\alpha+2\nu+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-1-\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\frac{\pi}{\cos\pi\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Второй же интеграл уже найден (с заменой cos на sin).

$$(P_{\nu,c}^{(x^\alpha)}f)(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\pi(\nu+\frac{\alpha}{2})\,i\,e^{-(\nu+\alpha)\pi i}\frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy -$$

$$-\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy -$$

$$-\frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy.$$

Теорема 3.2.7 *Справедливы представления через функцию Гаусса*

$$\left(S_{\nu,c}^{(x^\alpha)}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times$$
$$\times\left(\frac{\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\Gamma(\nu+1)\,2^\nu}\,x^{\alpha-1}\int\limits_0^x y^{2\nu+1}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2};\nu+1;\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)\,dy+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu\right)2^{\alpha+\nu}}\int\limits_x^\infty y^{\alpha+2\nu}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\nu;\frac{1}{2};\frac{x^2}{y^2}\right)f(y)\,dy\right).$$
$-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,\alpha<1,\quad \left(Re\,\nu>-\frac{3}{2}\right).$

$$\left(P_{\nu,c}^{(x^\alpha)}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times$$
$$\times\left(\frac{2^{\alpha+\nu+1}\Gamma\left(1+\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^x\frac{f(y)}{x^{\alpha+2\nu+2}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2},1+\frac{\alpha}{2}+\nu;\frac{1}{2};\frac{y^2}{x^2}\right)dy-\right.$$
$$-\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\frac{\Gamma(2+\alpha+2\nu)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int\limits_x^\infty\frac{f(y)}{y^{\alpha+2\nu+2}}\,{}_2F_1\left(1+\frac{\alpha}{2}+\nu,\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}+\nu;\nu+1;\frac{x^2}{y^2}\right)d$$
$-Re\,(2\nu+2)<Re\,\alpha<-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right),\quad \left(Re\,\nu>-\frac{3}{2}\right).$

Теорема 3.2.8 *Справедливы представления: при* $-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,\alpha<$ 1

$$\left(S_{\nu,c}^{(x^\alpha)}f\right)(x)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot$$
$$\cdot\left(-i\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_0^x(x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy+\right.$$
$$\left.+\int\limits_x^\infty(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy\right)+$$
$$+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_0^x\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)(y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)\,dy.$$

при $-Re\,(2\nu+2) < Re\,\alpha < -Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$

$$\left(P_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)}f\right)(x) = \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\left(-\frac{2}{\pi}\right)\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\,\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\,+\right.$$

$$\left.+\,i\,e^{-(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}}Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\right)-$$

$$\left.-\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\alpha+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\right].$$

$Re\,\nu > -\frac{3}{2}$.

$\alpha = \beta = -2\nu-\alpha-1. \;\Rightarrow\; \nu+\beta+\frac{3}{2} = \nu+\frac{3}{2}-2\nu-\alpha-1 = \frac{1}{2}-\alpha-\nu.$

Вычислим

$$\left({P'}_{\nu,\,c}^{(x^\beta)}f\right)^*(x) = \left(-\frac{2}{\pi}\right)\cos\frac{\pi}{2}(-2\nu-\alpha-1+2\nu)\,\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\,+\right.$$

$$\left.+\,(-i)e^{(\nu+\alpha)\pi i}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\overline{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\right)-$$

$$-\sin\frac{\pi}{2}(2\nu-2\nu-\alpha-1)\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha-\nu}\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy = \left({S'}_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)}f\right)(x).$$

Теорема 3.2.9 *Пусть* $\beta = -2\nu-\alpha-1$. *Тогда операторы* $P_{\nu,\,c}^{(x^\beta)'}$ *и* $S_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)'}$ *взаимно сопряжены в* $L_2(0,\infty)$.

Исследование сдвинутого cos-преобразования

Рассмотрим пару ОП типа Сонина $S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}$ и $S_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)}$. Введём обозначения $\mu = \frac{1}{2}-\alpha-\nu$;

$$S_1 f = \frac{2}{\pi}\left(e^{-\mu\pi i}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\mu}{2}} Q^{\mu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\nu+\frac12} f(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{Q}^{\mu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\nu+\frac12} f(y)\,dy\right),$$

$$S_2 f = \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}^{\mu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\nu+\frac12} f(y)\,dy.$$

Тогда две теоремы объединятся

$$\left\{\begin{aligned} \left(S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} f\right) &= \cos\tfrac{\pi\alpha}{2}\, S_1\, f - \sin\tfrac{\pi\alpha}{2}\, S_2\, f. \\ \left(S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} f\right) &= \sin\tfrac{\pi\alpha}{2}\, S_1\, f + \cos\tfrac{\pi\alpha}{2}\, S_2\, f. \end{aligned}\right| - Re\,\left(\nu+\frac12\right) < Re\,\alpha < 1$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi\alpha}{2} & -\sin\frac{\pi\alpha}{2} \\ \sin\frac{\pi\alpha}{2} & \cos\frac{\pi\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} \\ S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} \end{pmatrix}$$

U — унитарная матрица; ($U^{-1} = U^*$ при действительных α.)

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi\alpha}{2} & \sin\frac{\pi\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\pi\alpha}{2} & \cos\frac{\pi\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} \\ S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

Это же верно и при всех других α. Можно сказать, что одна из пар о.п. получается из другой поворотом.

$$\begin{cases} S_1 = \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} + \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} \\ S_2 = -\sin\frac{\pi\alpha}{2}\, S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} \end{cases}$$

На функциях

$$S_1 f = \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} f - \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, S^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} f =$$

$$= \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, F_s^{-1}\left(\frac{1}{t^\alpha} F_\nu f\right) + \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, F_c^{-1}\left(\frac{1}{t^\alpha} F_\nu f\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_0^\infty \sin(xt)\,\frac{1}{t^\alpha}\,g(t)\,dt + \sin\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_0^\infty \cos(xt)\,\frac{1}{t^\alpha}\,g(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \sin\left(xt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{1}{t^\alpha}\,g(t)\,dt.$$

Окончательно

$S_1^\alpha f = \int\limits_0^\infty \sin\left(xt+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{(F_\nu f)(t)}{t^\alpha}\,dt$ Аналогично $S_2^\alpha f = \int\limits_0^\infty \cos\left(xt+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{(F_\nu f)(t)}{t^\alpha}\,g(t)\,dt$	ввели верхний индекс

Следовательно,

$$S_1^{\alpha+1} f = \int\limits_0^\infty \sin\left(xt + \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\frac{F_\nu f\,dt}{t^{\alpha+1}} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \cos\left(xt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{1}{t^\alpha}\left(\frac{1}{t}F_\nu f\right)\,dt$$

Теорема 3.2.10 *Введём обозначения*

$$S_1 f = \frac{2}{\pi}\left(e^{-\mu\pi i}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\mu}{2}} Q^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\nu+\frac{1}{2}} f(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{Q}^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\nu+\frac{1}{2}} f(y)\,dy\right),$$

$$S_2 f = \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\nu+\frac{1}{2}} f(y)\,dy.$$

$\mu = \frac{1}{2} - \alpha - \nu$, $-Re\,(\nu + \frac{1}{2}) < Re\,\alpha < 1$.
Тогда

$$\begin{cases} S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)} f = \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, S_1\, f - \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, S_2\, f \\ S_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)} f = \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, S_1\, f + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, S_2\, f. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$S_1 f = \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}\, f - \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, S_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)}\, f = \tag{3.19}$$

$$= \int\limits_0^\infty \sin(xt + \frac{\pi\alpha}{2}) \frac{(F_\nu f)(t)}{t^\alpha}\, dt. \tag{3.20}$$

$$S_2 f = -\sin\frac{\pi\alpha}{2}\, S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}\, f + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, S_{\nu,\,c}^{(x^\alpha)}\, f = \tag{3.21}$$

$$= \int\limits_0^\infty \cos(xt + \frac{\pi\alpha}{2}) \frac{(F_\nu f)(t)}{t^\alpha}\, dt. \tag{3.22}$$

По формулам (3.19), (3.21) можно распространить операторы S_1 и S_2 на другие значения параметров.

Рассмотрим пару операторов типа Пуассона. Обозначим $\sigma = \nu + \alpha + \frac{3}{2}$, $(Re\,\sigma < 1)$.

$$P_1 f = \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\sigma} \left(\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy,$$

$$P_2 f = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}} \left(\int\limits_0^x \mathbb{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\sigma} \left(\frac{y}{x}\right) (x^2 - y^2)^{-\frac{\sigma}{2}} f(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + e^{-\sigma\pi i} \int\limits_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{\sigma}{2}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\sigma} \left(\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy \right)$$

Тогда две теоремы объединятся при условиях $-Re(2\nu + 2) < Re\,\alpha < -Re(\nu + \frac{1}{2})$

$$\begin{cases} P_{\nu,s}^{(x^\alpha)} = \cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\,P_1 - \sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\,P_2 \\ P_{\nu,c}^{(x^\alpha)} = -\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\,P_1 - \cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\,P_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu) & -\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu) \\ -\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu) & -\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\nu,s}^{(x^\alpha)} \\ P_{\nu,c}^{(x^\alpha)} \end{pmatrix}$$

Матрица унитарная, да ещё и симметричная.

$$\begin{pmatrix} \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right) & -\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right) & -\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\nu,s}^{(x^\alpha)} \\ P_{\nu,c}^{(x^\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 f = \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{(x^\alpha)}\, f - \sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,c}^{(x^\alpha)}\, f =$$

$$= F_\nu^{-1}\left(t^\alpha\left[\cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right) F_s f - \sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right) F_c f\right]\right) =$$

$$= F_\nu^{-1} t^\alpha \left(\int\limits_0^\infty \sin\left(xt - \pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\right) f(x)\,dx\right)$$

$$P_2 f = -\left(\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{(x^\alpha)}\, f + \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,c}^{(x^\alpha)}\, f\right) =$$

$$= -F_\nu^{-1} t^\alpha \left(\int\limits_0^\infty \cos\left(xt - \pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\right) f(x)\,dx\right).$$

Важное замечание. В частности, мы получили новую факторизацию операторов Бушмана–Эрдейи.

Теорема 3.2.11 *Введём обозначения*

$$P_1 f = \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \mathbb{P}^{\sigma}_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy,$$

$$P_2 f = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}} \left(\int\limits_0^x \mathbb{Q}^{\sigma}_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right) (x^2-y^2)^{-\frac{\sigma}{2}} f(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + e^{-\sigma\pi i} \int\limits_x^{\infty} (y^2-x^2)^{-\frac{\sigma}{2}} Q^{\sigma}_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy \right)$$

при $-Re\,(2\nu+2) < Re\,\alpha < -Re\,(\nu+\frac{1}{2})$, $Re\,\sigma < 1$, $\sigma = \nu+\alpha+\frac{3}{2} = 2-\mu$. *Тогда*

$$P^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} = \cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\, P_1 - \sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\, P_2 \tag{3.23}$$

$$P^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} = -\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\, P_1 - \cos\frac{\pi}{2}(\alpha+2\nu)\, P_2 \tag{3.24}$$

$$P_1 f = \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} f - \sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} f = \tag{3.25}$$

$$= F_\nu^{-1} t^\alpha \left[\int\limits_0^\infty \sin\left(xt - \pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\right) f(x)\, dx \right] \tag{3.26}$$

$$P_2 f = -\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P^{(x^\alpha)}_{\nu,\,s} f + \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P^{(x^\alpha)}_{\nu,\,c} f = \tag{3.27}$$

$$= (-1) F_\nu^{-1} t^\alpha \left[\int\limits_0^\infty \cos\left(xt - \pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\right) f(x)\, dx \right] \tag{3.28}$$

По формулам (3.25), (3.27) можно распространить операторы P_1 и P_2 на другие значения параметров.

3.2.7 Сдвиги по параметру α

Научимся сдвигать множество значений α влево и вправо.

а) $P^{(x^{\alpha+1})}_{\nu,s} = P^{(x^\beta)}_{\nu,s} = F_\nu^{-1}\left(t^{\alpha+1} F_s\right) = F_\nu^{-1} t^\alpha F_c\, D = P^{(x^\alpha)}_{\nu,c} D$, так как $tF_s = F_c\,\mathfrak{D}$.

ОДЗ: $P_{\nu,c}^{(x^\alpha)}$ определен, если $-Re\,(2\nu+2) < Re\,\alpha < -Re\,(\nu+\frac{1}{2}) \;\Rightarrow\; 1-Re\,(2\nu+2) < Re\,\beta < -Re\,(\nu+\frac{1}{2})+1$.

<u>Вывод:</u> мы сдвинули область определения по α. При этом правая граница интервала ОДЗ сдвинулась на 1 единицу, а левая — на 2.

б) $P_{\nu,c}^{(x^{\alpha+1})} = P_{\nu,c}^{(x^\beta)} = P_{\nu,s}^{(x^\alpha)}\,(-\mathfrak{D})$.

ОДЗ: была $-Re\,(2\nu+2) < Re\,\beta < -Re\,(\nu+\frac{1}{2})$

стала $-3-2Re\,\nu < Re\,\alpha < -Re\,(\nu+\frac{1}{2}) \quad\Rightarrow$

$$-Re\,(2\nu+2) < Re\,\beta < -Re\,\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+1$$

<u>Вывод:</u> Сдвиг вправо. Правая граница интервала ОДЗ сдвинулась на 1 единицу, а левая — не изменилась.

<u>Следствие.</u> $P_{\nu,c}^{(x^{\alpha+2})} = P_{\nu,s}^{(x^{\alpha+1})}\,(-D) = P_{\nu,c}^{(x^\alpha)}\left(-D^2\right)$. ОДЗ сдвигается вправо на две единицы.

$$P_{\nu,s}^{(x^{\alpha+2})} = P_{\nu,c}^{(x^{\alpha+1})}D = P_{\nu,s}^{(x^\alpha)}\left(-\mathfrak{D}^2\right).$$

<u>Вывод:</u>

$$P^{(x^{\alpha+2})}_{\nu,\left\{\begin{matrix}s\\c\end{matrix}\right\}} = P^{(x^\alpha)}_{\nu,\left\{\begin{matrix}s\\c\end{matrix}\right\}}(-D^2).$$

ОДЗ сдвигается вправо на две единицы.

Все это на функциях $C_0^\infty(0,\infty)$ — и в 0, и в ∞.

в) $S_{\nu,s}^{(x^{\alpha-1})} = F_s^{-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}F_\nu = (-D)\,S_{\nu,c}^{(x^\alpha)}$,

так как $(-D)\,F_c^{-1} = F_s^{-1}t$, $F^{-1}_{\left\{\begin{matrix}s\\c\end{matrix}\right\}} = F_{\left\{\begin{matrix}s\\c\end{matrix}\right\}}$.

ОДЗ: была $-Re\,\left(\nu+\frac{1}{2}\right) < Re\,\beta < 2 \quad (\beta=\alpha-1)$

стала $-Re\,\left(\nu+\frac{1}{2}\right) < Re\,\alpha < 1 \quad\Rightarrow$

$$-Re\,\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-1 < Re\,\beta < 0.$$

Вывод: Сдвиг влево. Нижняя граница сдвинулась на 1 единицу, верхняя на 2 единицы.

г) $S_{\nu,c}^{(x^{\alpha-1})} = DS_{\nu,s}^{(x^{\alpha})}$.

ОДЗ: была $-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right) < Re\,\beta < 1$

стала $-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right) < Re\,\alpha < 2 \quad \Rightarrow$

$$-Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right) - 1 < Re\,\beta < 1$$

Вывод: Сдвиг влево. Нижняя граница сдвинулась на 1 единицу, правая — не сдвинулась.

Следствие.

$$S^{(x^{\alpha-2})}_{\nu,\left\{\begin{matrix} s \\ c \end{matrix}\right\}} = (-D^2) S^{(x^{\alpha})}_{\nu,\left\{\begin{matrix} s \\ c \end{matrix}\right\}}.$$

Замечание: вот теперь, последоопределения, можно увидеть, что S и P взаимно обратны!

$$P_1 Df = \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{\alpha} Df - \sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,c}^{\alpha} Df =$$

$$= \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\,(-1)P_{\nu,c}^{\alpha+1} f - \sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{\alpha+1} f =$$

$$= \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha+1}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{\alpha+1} f - \sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha+1}{2}\right)\, P_{\nu,c}^{\alpha+1} f = P_1^{\alpha+1} f$$

$$P_2 Df = -\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{\alpha} Df - \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,c}^{\alpha} Df =$$

$$= \sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,c}^{\alpha+1} f - \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{\alpha+1} f =$$

$$= -\sin\pi\left(\nu+\frac{\alpha+1}{2}\right)\, P_{\nu,s}^{\alpha+1} f - \cos\pi\left(\nu+\frac{\alpha+1}{2}\right)\, P_{\nu,c}^{\alpha+1} f = P_2^{\alpha+1} Df.$$

3.2.8 Унитарность

Рассмотрим частное значение $\alpha = -\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$.

$$S_\nu = S^{\left(x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right)}_{\nu,\begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} = F^{-1}_{\begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} \left(t^{\nu+\frac{1}{2}} F_\nu\right)$$

$$P_\nu = P^{\left(x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right)}_{\nu,\begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} = F_\nu^{-1} \left(t^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} F_{\begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} \right)$$

Для "подправления"о.п. получим

$$\|S'_\nu f\|_{L_2(0,\infty)} = \|S_\nu \, x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \, f\|_{L_2(0,\infty)} =$$

$$= \|F^{-1} \left(t^{\nu+\frac{1}{2}} F_\nu \left(x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f\right)\right) \|_{L_2(0,\infty)} = \|t^{\nu+\frac{1}{2}} F_\nu \left(x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f\right) \|_{L_2(0,\infty)} =$$

$$= \|F_\nu \left(x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f\right) \|_{L_{2,\nu}} = \|x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f\|_{L_{2,\nu}} = \|f\|_{L_2(0,\infty)}.$$

Итак, все эти операторы — изометрии.

Теорема 3.2.12 *все изометрии имеют вид*

$$S_\nu = F^{-1} U \left(t^{\nu+\frac{1}{2}} F_\nu \, x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$P_\nu = x^{\nu+\frac{1}{2}} F_\nu^{-1} \, t^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} U F.$$

Доказательство. Пусть S_ν — изометрия.

$S_\nu = A_1 U A_2$ — где A_1, A_2 — изометрии.

$U = A_1^{-1} S_\nu A_2^{-1}$ — композиция трех изометрий.

Теорема 3.2.13 *Если U — изометрия L_2, коммутирующая с умножением на t^2, то S_ν — о.п.*

Теорема 3.2.14 *Пусть $S_\nu L_\nu = D^2 S_\nu$ на плотном в L_2 множестве. Тогда $\xi^2 U = Ux^2$.*

Доказательство. $S_\nu L_\nu = A_1 U A_2 L_\nu = A_1 U x^2 A_2$;

$$D^2 S_\nu = D^2 A_1 U A_2 = A_1 \xi^2 U A_2.$$

$$A_1 \left(Ux^2 - \xi^2 U\right) A_2 = 0;$$

Из изометричности $A_1 \quad \Rightarrow$

$$\|A_1 \left(Ux^2 - \xi^2 U\right) A_2 f\| = \| \left(Ux^2 - \xi^2 U\right) A_2 f\| = 0.$$

f — плотное. A_2 — унитарное $\Rightarrow \quad v = A_2 f$ — плотное.

$$\| \left(Ux^2 - \xi^2 U\right) v\| = 0 \ \forall v. \Rightarrow Ux^2 = \xi^2 U.$$

Рассмотрим пару с cos — преобразованием.

$${}_1S_\nu = S_{\nu,\,c}^{\left(x^{-(\nu+\frac{1}{2})}\right)},\ {}_1P_\nu = P_{\nu,\,c}^{\left(x^{-(\nu+\frac{1}{2})}\right)}.$$

$\alpha = -\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ — недопустимое значение.

$$S_{\nu,\,c}^{\left(x^{\alpha-1}\right)} = D S_{\nu,\,s}^{(x^\alpha)}$$

$$S_{\nu,\,c}^{\left(x^{-(\nu+\frac{1}{2})}\right)} = D S_{\nu,\,s}^{\left(x^{\frac{1}{2}-\nu}\right)}.$$

ОДЗ: $-Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right) < Re\left(\frac{1}{2} - \nu\right) < 2$, $Re\,\nu > -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} - \alpha - \nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \nu - \nu = 0$.

$${}_1S_\nu' f = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)\left(\frac{d}{dx}\int\limits_0^x Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \right.$$

$$+\frac{d}{dx}\int\limits_x^\infty \mathbb{Q}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\Bigg) - \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac12-\nu\right)\frac{d}{dx}\int\limits_x^\infty \mathbb{P}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) f(y) =$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{\pi}{2}\left(\nu-\frac12\right)\int\limits_x^\infty \mathbb{P}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu-\frac12\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\int\limits_0^x Q_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \int\limits_x^\infty \mathbb{Q}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right]\right).$$

Новая пара ОП

Рассмотрим sin — преобразование, $\varphi(x)=\frac{(x^2+z^2)}{x}$

$$K(b,c)=c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \frac{x}{(x^2+z^2)x^\nu}\sin(bx)J_\nu(cx)\,dx$$

Пусть $c\leqslant b$, $Re\,z>0$, $Re\,\nu>-\frac12$. См. ИР-2, стр. 195, ф.2.

$$K(b,c)=c^{\nu+1}\frac{\pi}{2}\,z^{-\nu}e^{-zb}I_\nu(cz).$$

Пусть $b\leqslant c$, $Re\,z>0$. (см. ф. 3)

$$\nu+2n=1-\nu;\ \nu=\frac12-n;\Rightarrow \frac{x^{1-\nu}}{x^2+z^2}=\frac{x^{\nu+2n}}{x^2+z^n};$$

$$\frac12-n>-\frac12.\ n<1.\quad -n-1<\frac12-n<\frac52-2n;\ n<2.$$

Итак, пусть $\nu=\frac12-n;\ n<2,\ b\leqslant c,\ Re\,z>0.$

$$K(b,c)=c^{\nu+1}(-1)^n z^{\frac12-n+2n-1}\,\mathrm{sh}(bz)K_{\frac12-n}(cz)=$$

$$=c^{\nu+1}(-1)^n z^{n-\frac12}\,\mathrm{sh}(bz)K_{\frac12-n}(cz).$$

Строго говоря — остался один случай $u = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$, так как в ИР-I говорится, что $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$K(b,c) = \frac{\pi}{2}\, z^{-\frac{1}{2}}\, c^{\frac{3}{2}} e^{-zb} I_{\frac{1}{2}}(cz), \quad c \leqslant b$$

$$K(b,c) = z^{-\frac{1}{2}}\, c^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{sh}(bz) K_{\frac{1}{2}-n}(cz), \quad b \leqslant c.$$

$$K(b,c) = \frac{\pi}{2}\, z^{-\frac{1}{2}}\, c^{\frac{3}{2}}\, e^{-zb} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(cz)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{sh}(cz) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{c}{z}\, e^{-zb}\,\mathrm{sh}(cz) = \ (c \leqslant b)$$

$$= z^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{sh}(bz) \sqrt{\frac{\pi}{2cz}} e^{-cz} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{c}{z}\, e^{-zb}\, \mathrm{sh}(bz)\ (b \leqslant c).$$

(см. ИР-2, приложение).

Теперь $b \to x,\ c \to y$.

$$S_{\frac{1}{2},s}^{(\varphi=\ldots)} f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int\limits_0^x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{z}\, e^{-zx}\, \mathrm{sh}(zy) f(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_x^\infty \frac{y}{z}\, e^{-zy}\, \mathrm{sh}(zx) f(y)\, dy \right) =$$

$$= \frac{1}{z} \left(e^{-zx} \int\limits_0^x \mathrm{sh}(zy)\,(y f(y))\ dy + \mathrm{sh}(zx) \int\limits_x^\infty e^{-zy}\,(y f(y))\ dy \right).$$

$y = y^{\nu+\frac{1}{2}}$, $Re\, z > 0$. В частности можно взять $z = 1$.

Ядро "обратного"о.п.

$$G(c,b) = \frac{1}{c^\nu} \int\limits_0^\infty \frac{(x^2+z^2)}{x} \cdot x^{\nu+1} \sin(bx) J_\nu(cx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{c^\nu} \int\limits_0^\infty \left(x + \frac{z^2}{x} \right) \cdot x^{\nu+1} \sin(bx) J_\nu(cx)\, dx =$$

$$= Ker\, P_{\nu,\,s}^{x^{(1)}} + z^2\, Ker\, P_{\nu,\,s}^{x^{(-1)}}.$$

первое ядро определено при ($\alpha = 1$): $-3 - 2Re\,\nu < 1 < -Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$, второе — $-3 - 2Re\,\nu < -1 < -Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{c} -Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 1 \\ -3 - 2Re\,\nu < 1 \\ -3 - 2Re\,\nu < -1 \\ -1 < -Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} \nu < -\frac{3}{2} \\ \nu > -2 \\ \nu > -1 \\ \nu < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing$$

и $Re\, z > 0$ — его не определить по интегральным формулам без сдвига по параметру с дифференцированием.

Теперь с cos — преобразованием, $\varphi(x) = x^2 + z^2$.

$$K(b,c) = c^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \frac{x^{-\nu}}{(x^2 + z^2)} \cos(bx) J_\nu(cx)\, dx.$$

Пусть $c \leqslant b$, $Re\, z > 0$, $Re\,\nu > -\frac{3}{2}$;

$$K(b,c) = c^{\nu+1} \frac{\pi}{2}\, z^{-1-\nu} e^{-bz} I_\nu(cz).$$

Пусть $b \leqslant c$, $-\nu = \nu + 2n + 1$; $\nu = -\frac{1}{2} - n$;

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2} - n > -\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; n < 1 \;\Rightarrow\; n = 0 \\ -n - 1 < -\frac{1}{2} - n < \frac{3}{2} - 2n \;\Rightarrow\; n < 2 \end{array}\right\} n = 0,\;\; \nu = -\frac{1}{2}.$$

$$K(b,c) = c^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{ch}(bz) K_{-\frac{1}{2}}(cz)$$

$$c \leqslant b;\;\; K(b,c) = c^{\frac{1}{2}}\, \frac{\pi}{2}\, z^{-\frac{1}{2}}\, e^{-bz} \sqrt{\frac{2}{\pi c z}}\, \mathrm{ch}(cz) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{z}\, e^{-bz}\, \mathrm{ch}(cz).$$

$$b \leqslant c;\;\; K(b,c) = c^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{ch}(bz) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2cz}} e^{-cz} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{z}\, e^{-cz}\, \mathrm{ch}(bz).$$

Теперь $b \to x,\ c \to y$.

$$S^{(\varphi)}_{-\frac{1}{2},s} f = \frac{1}{z}\left(\int\limits_0^x e^{-zx}\operatorname{ch}(zy) f(y)\, dy + \int\limits_x^\infty e^{-zy}\operatorname{ch}(zx) f(y)\, dy\right).$$

$\left(1 = y^0 = y^{\nu+\frac{1}{2}}\right)$.

3.3 Применения композиционного метода для решения интегродифференциальных уравнений

Следующие формулы из ИР-2 можно использовать для получения явных формул о.п.

стр.	ф.
192	$2,\ 5-6$
193	$7, 8-9, 10-11, 12, 13, 14-15$ и далее
204	$1, 2, 4, 5$
209	$7, 8$

2. стр. 192 ф. 2. Приводит к интегрируемой особенности $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$!
Положим $\varphi(x) = x^{-\nu};\ \alpha = -\nu$;

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \sin(bx) J_\nu(cx)\, dx = c^{\nu+1}(c^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\nu \arcsin\frac{b}{c}\right) =$$

$$b < c,\ Re\,\nu > -2;$$

$$= c^{\nu+1}\frac{c^\nu}{\sqrt{b^2-c^2}}(b+\sqrt{b^2-c^2})^{-\nu}\cos\frac{\pi\nu}{2},\ c < b.$$

$b \to x,\ c \to y$

$$\left(S_{\nu,s}^{(x^{-\nu})}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x\frac{y^{2\nu+1}}{\sqrt{x^2-y^2}}(x+\sqrt{x^2-y^2})^{-\nu}f(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^\infty y^{\nu+1}\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\sin\left(\nu\arcsin\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy.\right.$$

$Re\,\nu>-2.$

Аналогично строится $S_{\nu,s}$ по той же формуле.

$$P_{\nu,s}^{\left(x^{(-\nu-1)+1}\right)}=P_{\nu,s}^{\left(x^{(-\nu-1)}\right)}Df;$$

$$G(c,b)=\frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty\cos(bx)J_\nu(cx)\,dx=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{c^\nu}(c^2-b^2)^{-\frac12}\cos\left(\nu\arcsin\frac{b}{c}\right), & b<c,\quad Re\,\nu>-1\\ -\frac{(b+\sqrt{b^2-c^2})^{-\nu}}{\sqrt{b^2-c^2}}\sin\frac{\pi\nu}{2} & c<b\end{cases}$$

$c\to x,\ b\to y$

$$\left(P_{\nu,s}^{(x^{-\nu})}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x^\nu}\int\limits_0^x\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cos\left(\nu\arcsin\frac{y}{x}\right)(Df(y))\,dy-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_x^\infty\frac{(y+\sqrt{y^2-x^2})^{-\nu}}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(\frac{d}{dy}f(y)\right)dy.\right.$$

$Re\,\nu>-1.$

Аналогично строится и обращается вторая пара.

3. с.192 ф. 5-6

Начнем с sin — преобразования

$$P_{\nu,s}^{\left(x^0\right)},\ \alpha=0;\ \varphi(x)=1.$$

$$G(c,b)=\frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{c^\nu}\,\frac{2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}}(-b)\,c^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)(c^2-b^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}, & b<c\\ \frac{1}{c^\nu}(-1)\frac{2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}}\,b\,c^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\sin\pi\nu\,(b^2-c^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} & c<b\end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}<Re\,\nu<-\frac{1}{2}$$

$$c\to x,\ b\to y$$

$$\left(P_{\nu,\,s}^{\left(x^0\right)}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{2^{\nu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x y(x^2-y^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}f(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{\nu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sin\pi\nu\int\limits_x^\infty y(y^2-x^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}f(y)\,dy\right)=$$

$$=-\frac{2^{\nu+\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\pi}\left(\int\limits_0^x(x^2-y^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}yf(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\sin\pi\nu\int\limits_x^\infty(y^2-x^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}yf(y)\,dy\right)$$

$$-\frac{3}{2}<Re\,\nu<-\frac{1}{2}$$

Обратный получаем по теореме, его не упростить.

$$P_{\nu,\,c}^{\left(x^0\right)},\ \alpha=0;\ \varphi(x)=1.$$

$$G(c,b)=\frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}\cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx=\left|\begin{matrix}\text{с. }193\\ \text{ф. }7\end{matrix}\right|=$$

$$= \frac{1}{c^\nu}\,\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}c^\nu b}{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}(b^2-c^2)_+^{-\nu-\frac{3}{2}} = \ \left(-1 < Re\,\nu < -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}\,b\,(b^2-c^2)_+^{-\nu-\frac{3}{2}}$$

$$\left(P_{\nu,\,c}^{\left(x^0\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} y f(y)\,dy\ \left(-1 < Re\,\nu < -\frac{1}{2}\right)$$

$$S_{\nu,\,c}^{\left(x^0\right)},\ \alpha = 0;\ \varphi(x) = 1.$$

$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty x^{-\nu}\cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx$ — не считается непосредственно. Но можно выразить обратный по т. 8 (с.36).

Пусть $Re\,\nu > -\frac{1}{2}$

$$\left(S_{\nu,\,c}^{\left(x^0\right)} f\right)(x) = \int\limits_x^\infty \mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{x}{y}\right)(y^2-x^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} y^{\nu+\frac{1}{2}} f(y)\,dy$$

$$\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(-\left(\frac{x}{y}\right)^2 - +1\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{(y^2-x^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{y^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(S_{\nu,\,c}^{\left(x^0\right)} f\right)(x) = \frac{1}{2^{\nu-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} y f(y)\,dy.$$

$Re\,\nu > -\frac{1}{2}$.

4. $\varphi = x^{-(2\nu+1)}$, $\alpha = -(2\nu+1)$, $S_{\nu,\,s}$.

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^{-(2\nu+1)}\,x^\nu}\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^{-(2\nu+1)}x^\nu}\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{с. } 192\\ \text{ф. } 5\\ \delta = 1.\end{array}\right| =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{c^\nu}\frac{c^{\nu+1}\,2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}}(-b)\,c^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)(c^2-b^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}, & b<c \\ -\frac{c^{\nu+1}\,2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}}\,b\,c^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\sin\pi\nu\,(b^2-c^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} & c<b \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} < Re\,\nu < -\frac{1}{2}$$

$$\left[S_{\nu,\,s}^{x^{-(2\nu+1)}} f\right](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)\frac{2^{\nu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^x \sin\pi\nu\,x\,y^{2\nu+1}(x^2-y^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}f(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^\infty x\,y^{2\nu+1}(y^2-x^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}f(y)\,dy\right) =$$

$$= -\frac{2^{\nu+\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\pi}x\cdot$$

$$\cdot\left(\sin\pi\nu\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}y^{2\nu+1}f(y)\,dy + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}f(y)\,dy\right)$$

$$-\frac{3}{2} < Re\,\nu < -\frac{1}{2}$$

Обратный: $P_{\nu,\,s}^{x^{-(2\nu+1)}}$, $\alpha = -(2\nu+1)$.

$G(c,b) = \frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^{-\nu}\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx$ — просто не считается.

$\nu + \frac{\alpha}{2} = \nu - \nu - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ — обратный по т. 5 выражается через 2 интеграла от Q.

5. $\varphi = x^{-2\nu}$, $\alpha = -2\nu$, $S_{\nu,\,c}^{\left(x^{-2\nu}\right)}$.

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty x^\nu\cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{ИР-2}\\ \text{с. } 192\\ \text{ф. } 5\\ \delta=0\end{array}\right| =$$

$$= \begin{cases} \frac{c^{\nu+1}\,2^\nu}{\sqrt{\pi}}\, c^\nu\, \Gamma\left(\nu+\frac12\right)(c^2-b^2)^{-\nu-\frac12}, & (b<c) \\ -\frac{c^{\nu+1}\,2^\nu}{\sqrt{\pi}}\, c^\nu\, \Gamma\left(\nu+\frac12\right)\sin\pi\nu\,(b^2-c^2)^{-\nu-\frac12} & (c<b) \end{cases} \; -\frac12 < Re\,\nu < \frac12$$

$$\left(S_{\nu,c}^{\left(x^{-2\nu}\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^x (-\sin\pi\nu)\,(x^2-y^2)^{-\nu-\frac12} y^{2\nu+1} f(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\nu-\frac12} y^{2\nu+1} f(y)\,dy\right) =$$

$$= \frac{2^{\nu+\frac12}\,\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\left(-\sin\pi\nu\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\nu-\frac12} y^{2\nu+1} f(y)\,dy + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\nu-\frac12} y^{2\nu+1} f(y)\,dy\right)$$

$$-\frac12 < Re\,\nu < \frac12$$

Обратный: $P_{\nu,c}^{x^{-(2\nu)}}$.

$G(c,b) = \frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^{1-\nu}\cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx$ — просто не считается. Подстановка дает то же, что и для предыдущего.

6. $\alpha = -(\nu+1)$, $P_{\nu,s}^{\varphi}$.

$$G(c,b) = \left.\begin{cases} \frac{\sin\left(\nu\arcsin\frac{b}{c}\right)}{c^\nu\sqrt{c^2-b^2}}, & (b<c) \\ \cos\frac{\pi\nu}{2}\frac{(b+\sqrt{b^2-c^2})^{-\nu}}{\sqrt{b^2-c^2}}, & (c<b) \end{cases}\right| \; Re\,\nu > -2$$

Пусть $Re\,\nu > -2$

$$\left(P_{\nu,s}^{x^{-(\nu+1)}} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_0^x \frac{\sin\left(\nu\arcsin\frac{y}{x}\right)}{x^\nu\sqrt{x^2-y^2}} f(y)\,dy + \right.$$

$$+\cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_x^\infty \frac{(y+\sqrt{y^2-x^2})^{-\nu}}{\sqrt{x^2-y^2}} f(y)\,dy\Bigg)$$

Обратный $S_{\nu,\,s}^{\left(x^{-(\nu+1)}\right)}$

$$S_{\nu,\,s}^{\left(x^{-(\nu+1)}\right)} = (-D)\,S_{\nu,\,c}^{(x^{-\nu})}$$

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \begin{vmatrix}\text{с. } 192\\ \text{ф. } 2\\ \delta=0\end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} c^{\nu+1}\frac{1}{\sqrt{c^2-b^2}}\,cos\left(\nu\arcsin\frac{b}{c}\right), & b<c\\ -\frac{c^{2\nu+1}}{\sqrt{b^2-c^2}}(b+\sqrt{b^2-c^2})^{-\nu}\sin\frac{\pi\nu}{2}, & c<b\end{matrix}\right| \; Re\,\nu > -1.$$

$$\left(S_{\nu,\,s}^{x^{-(\nu+1)}} f\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot$$

$$\cdot\left(-\sin\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x \frac{(x+\sqrt{x^2-y^2})^{-\nu}}{\sqrt{x^2-y^2}} y^{2\nu+1} f(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^\infty \frac{cos\left(\nu\arcsin\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{y^2-x^2}} y^{\nu+1} f(y)\,dy\right) \; Re\,\nu > -1.$$

7. $\alpha = -(\nu+1)$, $P_{\nu,\,c}^{\varphi}$.

$$G(c,b) = \frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty \cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \begin{vmatrix}\text{с. } 192\\ \text{ф. } 2\\ \delta=0\end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \frac{1}{c^\nu}\frac{1}{\sqrt{c^2-b^2}}\,cos\left(\nu\arcsin\frac{b}{c}\right), & b<c\\ -\frac{(b+\sqrt{b^2-c^2})^{-\nu}}{\sqrt{b^2-c^2}}\sin\frac{\pi\nu}{2}, & c<b\end{matrix}\right| \; Re\,\nu > -1.$$

$$\left(P_{\nu,\,c}^{\left(x^{-(\nu+1)}\right)}f\right)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_0^x\frac{1}{x^\nu}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\,cos\left(\nu\arcsin\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty\sin\frac{\pi\nu}{2}\frac{(y+\sqrt{y^2-x^2})^{-\nu}}{\sqrt{y^2-x^2}}f(y)\,dy\right)\quad Re\,\nu>-1.$$

Обратный $S_{\nu,\,c}$.

$\left(S_{\nu,\,c}^{\left(x^{-(\nu+1)}\right)}f\right)(x)$ — ?

$$K(b,c)=c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty\frac{1}{x}\cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx=\left|\begin{matrix}\text{с. }193\\ \text{ф. }10\\ \delta=0\end{matrix}\right|=$$

$$=\begin{cases}c^{\nu+1}\frac{1}{\nu}\,cos\left(\nu\arcsin\frac{b}{c}\right), & b\leqslant c\\ c^{\nu+1}\frac{c^\nu}{\nu(b+\sqrt{b^2-c^2})^\nu}\cos\frac{\pi\nu}{2}, & c\leqslant b\end{cases}\Bigg|\quad Re\,\nu>0.$$

$$\left(S_{\nu,\,c}^{\left(x^{-(\nu+1)}\right)}f\right)(x)=\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x\frac{y^{2\nu+1}f(y)\,dy}{(y+\sqrt{x^2-y^2})^\nu}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^\infty cos\left(\nu\arcsin\frac{x}{y}\right)y^{\nu+1}f(y)\,dy\right)\quad Re\,\nu>0.$$

8. с. 193, ф.7 $\alpha=-2\nu$, $S_{\nu,\,s}^{\left(x^{-2\nu}\right)}$.

$$K(b,c)=c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty x^\nu\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx=\left|\begin{matrix}\text{с. }193\\ \text{ф. }7\\ \delta=1\end{matrix}\right|=$$

$$=c^{\nu+1}\frac{2^\nu\sqrt{\pi}c^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-c^2)_+^{-\nu-\frac{1}{2}}\quad\left(-1<Re\,\nu<\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(S_{\nu,\,s}^{\left(x^{-2\nu}\right)}f\right)(x)=\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int\limits_0^x(x^2-y^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}y^{2\nu+1}f(y)\,dy$$

$$\left(-1 < Re\,\nu < \frac{1}{2}\right)$$

Обратный $P_{\nu,\,s}^{\left(x^{-2\nu}\right)}$

$$G(c,b) = \frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^{1-\nu}\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \begin{vmatrix} \text{с. } 193 \\ \text{ф. } 12 \\ \delta = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2^{1-\nu}\sqrt{\pi}\,b}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}(c^2-b^2)_+^{\nu-\frac{3}{2}}\;\; Re\,\nu > \frac{1}{2}$$

$$\left(P_{\nu,\,s}^{\left(x^{-2\nu}\right)}f\right)(x) = \frac{2^{\frac{3}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\nu-\frac{3}{2}}yf(y)\,dy$$

$$Re\,\nu > \frac{1}{2}$$

Это ОП СПД

9. с. 193, ф.7 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; $\alpha = -1$; $P_{\nu,\,s}^{\left(\frac{1}{x}\right)}$.

$$G(c,b) = \frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^\nu\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{c^\nu}\frac{2^\nu\sqrt{\pi}c^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-c^2)_+^{-\nu-\frac{1}{2}},\; -1 < Re\,\nu < \frac{1}{2}$$

$c \to x, y \to y$

$$\left(P_{\nu,\,s}^{\left(\frac{1}{x}\right)}f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_x^\infty \frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(y^2-x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}f(y)\,dy\right) =$$

$$= \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}f(y)\,dy$$

$-1 < Re\,\nu < \frac{1}{2}$. Это ОП, родственный СПД.

Теперь обратный

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty x^{1-\nu}\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= \frac{2^{1-\nu}c^{\nu+1}\sqrt{\pi}\,b}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\,c^\nu(c^2-b^2)_+^{\nu-\frac{3}{2}},\ Re\,\nu > \frac{1}{2}.$$

$$\left(S_{\nu,s}^{\left(\frac{1}{x}\right)}f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{1-\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_x^\infty x\,y^{2\nu+1}(y^2-x^2)^{\nu-\frac{3}{2}}f(y)\,dy$$

$$Re\,\nu > \frac{1}{2}.$$

10. $\alpha = -(2\nu+1)$, $S_{\nu,c}^{\left(x^{-(2\nu+1)}\right)}$.

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}\cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \left|\begin{matrix}\text{с. } 193\\ \text{ф. } 7\\ \delta = 0\end{matrix}\right| =$$

$$= c^{\nu+1}\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}c^\nu b}{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}(b^2-c^2)_+^{-\nu-\frac{3}{2}},\ -1 < Re\,\nu < -\frac{1}{2}$$

$$\left(S_{\nu,c}^{x^{-(2\nu+1)}}f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}\,x\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}y^{2\nu+1}f(y)\,dy =$$

$$= \frac{2^{\nu+\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}\,x\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}y^{2\nu+1}f(y)\,dy$$

$$-1 < Re\,\nu < -\frac{1}{2}.$$

$\left(P_{\nu,c}^{x^{-(2\nu+1)}}\right)$ — ? $G(c,b) = \frac{1}{c^\nu}\int\limits_0^\infty x^{-\nu}\cos(bx)\,J_\nu(cx)\,dx$ — не считается просто, можно подставить в т. 8 (с.36). Сдвиг то же не помогает: В т. 8 $\Rightarrow$!!!

$$\alpha + 2\nu = -1;\ -(2\nu+1) < -\left(\nu+\frac{1}{2}\right),\ 2\nu+1 > \left(\nu+\frac{1}{2}\right),\ \nu > -\frac{1}{2}.$$

$$\left(P_{\nu,\,c}^{x^{-(2\nu+1)}} f\right)(x) = \int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy =$$

$$\nu+\alpha+\frac{3}{2} = \nu+\frac{3}{2}-2\nu-1 = \frac{1}{2}-\nu$$

$$= \int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} f(y)\,dy =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{x^{\nu-\frac{1}{2}}} \int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} f(y)\,dy$$

$$Re\,\nu > -\frac{1}{2}.$$

Это СПД.

11. стр. 193, ф. 8-9. $\alpha = 2-\nu$, $S_{\nu,\,s}^{\left(x^{2-\nu}\right)}$.

$$K(b,c) = c^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2} \sin(bx)\, J_\nu(cx)\,dx = \begin{vmatrix} \text{с. } 193 \\ \text{ф. } 8 \\ \delta = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} c^{\nu+1}\left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{\nu^2-1} \sin\left(\nu \arcsin\frac{b}{c}\right) - \frac{b}{\nu(\nu^2-1)} \cos\left(\nu \arcsin\frac{b}{c}\right)\right), & (b<c) \\ c^{\nu+1}(-1) \frac{c^\nu (b+\nu\sqrt{b^2-c^2})}{\nu(\nu^2-1)(b+\sqrt{b^2-c^2})^\nu} \cos\frac{\pi\nu}{2}, & (c<b) \end{cases}$$

$Re\,\nu > 0.$

$$\left(S_{\nu,\,s}^{\left(x^{2-\nu}\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(\nu^2-1)} \left[-\frac{\cos\frac{\pi\nu}{2}}{\nu} \int\limits_0^x \frac{(x+\nu\sqrt{x^2-y^2})}{(x+\sqrt{x^2-y^2})^\nu} y^{2\nu+1} f(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^\infty \left(\sqrt{y^2-x^2} \sin\left(\nu \arcsin\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{\nu} \cos\left(\nu \arcsin\frac{x}{y}\right)\right) y^{\nu+1} f(y)\,dy \right]$$

$$Re\,\nu > 0$$

Обратный $P_{\nu,\,s}^{\left(x^{2-\nu}\right)}$ — не выражается. Но можно сдвинуть (см. с. 44) $\left(P_{\nu,\,s}^{\left(x^{2-\nu}\right)} f\right)(x) = \left[P_{\nu,\,s}^{\left(x^{-\nu}\right)}\left(-D^2 f\right)\right](x)$ и см. с. 52-53 Вообще этот случай можно не рассматривать! Аналогично можно не рассматривать $\alpha = -\nu - 3$.

12. с. 192, ф.10-11 $\alpha = 1 - \nu$, $S_{\nu,\,s}^{\left(x^{1-\nu}\right)}$.

$$K(b,c) = c^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\sin(bx)\,J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \frac{c^{\nu+1}}{\nu}\sin\left(\nu \arcsin\frac{b}{c}\right), & b \leqslant c \\ \frac{c^{\nu+1}}{\nu}\frac{c^\nu}{(b+\sqrt{b^2-c^2})^\nu}\sin\frac{\pi\nu}{2}, & c \leqslant b \end{array}\right| \; Re\,\nu > -1$$

$$\left(S_{\nu,\,s}^{\left(x^{1-\nu}\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\nu}\left[\sin\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x \frac{y^{2\nu+1}f(y)}{(x+\sqrt{x^2-y^2})^\nu}dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^\infty \sin\left(\nu\arcsin\frac{x}{y}\right) y^{\nu+1} f(y)\,dy\right] \; Re\,\nu > -1$$

Обратный $P_{\nu,\,s}^{\left(x^{1-\nu}\right)}$ — не считается. Сбросим две (можно одну) производные

$$\left(P_{\nu,\,s}^{\left(x^{1-\nu}\right)} f\right)(x) = \left(P_{\nu,\,s}^{\left(x^{-(\nu+1)}\right)}\left(-\frac{d^2}{dx^2}f\right)\right)(x) = \ldots \text{ (см. с. 58)}$$

Аналогично разбирается $S_{\nu,\,c}^{\left(x^{1-\nu}\right)}$. ф. 12 на стр. 192 не дает нового

13. с. 193, ф.13 $S_{0,\,s}^{\left(x^{1}\right)}$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$.

$$K(b,c) = c\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\sin(bx)\,J_0(cx)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \arcsin\frac{b}{c}, & b < c \\ \frac{\pi}{2}, & c < b \end{array}\right.$$

$$\left(S_{0,s}^{\left(x^1\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int\limits_0^x \frac{\pi}{2} f(y) dy + \int\limits_x^\infty \arcsin\frac{x}{y} f(y)\, dy \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^x f(y)\, dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_x^\infty \left(\arcsin\frac{x}{y} \right) f(y)\, dy.$$

Это красиво!

Обратный $P_{0,\,s}^{\left(x^1\right)}$ — сразу не идёт.

$$\left(P_{0,\,s}^{\left(x^1\right)} f\right)(x) = \left(P_{0,\,c}^{x^0} Df\right)(x) = \begin{pmatrix} \text{см. с. } 55 \\ Re\,\nu < -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \text{мало} =$$

$$= \left(P_{0,\,s}^{x^{-1}}\left(-D^2 f\right)\right)(x) = (\text{см. с. } 61) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{d^2}{dy^2}\right) f(y)\, dy$$

$Re\,\nu = 0$ — допустимо. Мы получили интересную пару взаимно обратных ОП.

14.

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \nu = 0 \end{cases} P_{0,s}^{\left(x^{-2}\right)} - ?$$

$$G(c,b) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x} \sin(bx)\, J_0(cx)\, dx = \begin{cases} \arcsin\frac{b}{c}, & b < c \\ \frac{\pi}{2}, & c < b \end{cases}$$

$$\left(P_{0,\,s}^{\left(x^{-2}\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int\limits_0^x \arcsin\frac{y}{x} f(y)\, dy + \frac{\pi}{2} \int\limits_x^\infty f(y)\, dy \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \arcsin\frac{y}{x} f(y)\, dy + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_x^\infty f(y)\, dy.$$

$$\left(S_{0,\,s}^{\left(x^{-2}\right)} f\right)(x) = (-D)\, S_{0,\,c}^{\left(x^{-1}\right)} f = \Big|\ \text{с. } 61 \Big|$$

выразить в явном виде не получается — нельзя подставить $\nu = 0$.

Формулы 14-18 на с. 193-195 можно также использовать. Самая элегантная такая

$$\varphi(x) = x^{\frac{1}{2}},\ \alpha = \frac{1}{2}.\ S_{0,\,s}^{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$K(b,c) = c\int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\sin(bx)\,J_0(cx)\,dx = cA_0^0\begin{pmatrix}\text{с. } 193\\ \text{ф. } 18\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\pi c}}\begin{cases} K(k) - K(\sqrt{1-k^2}), & b < c\\ \frac{1}{k}\,K\left(\frac{1}{k}\right), & c < b\end{cases}$$

$$K = \frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{2c}},\ 1-k^2 = 1 - \frac{b+c}{2c} = \frac{c-b}{2c}$$

$$\left(S_{0,\,s}^{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^x \sqrt{\frac{2y}{x+y}}K\left(\sqrt{\frac{2y}{x+y}}\right)\sqrt{y}f(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^\infty \left[K\left(\sqrt{\frac{x+y}{2y}}\right) - K\left(\sqrt{\frac{y-x}{2y}}\right)\right]\sqrt{y}f(y)\,dy\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{x+y}}K\left(\sqrt{\frac{2y}{x+y}}\right)yf(y)\,dy +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_x^\infty \left[K\left(\sqrt{\frac{x+y}{2y}}\right) - K\left(\sqrt{\frac{y-x}{2y}}\right)\right]\sqrt{y}f(y)\,dy.$$

Аналогично остальные

16. Пусть $\varphi(x) = \frac{\ln(ax)}{x^{\nu+1}}$, $P_{0,\,c}^{\varphi}$.

$$G(c,b) = \int\limits_0^\infty \ln(ax)\cos(bx)\,J_0(cx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi}{2}(b^2-c^2)^{-\frac{1}{2}}, & c < b\\ -(c^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[C - \ln\frac{ac}{2} + \ln(c^2-b^2)\right], & b < c\end{cases}$$

$$\left(P_{0,s}^{\left(\frac{\ln(ax)}{x^{\nu+1}}\right)} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)\left(\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left[\gamma - \ln\frac{ax}{2} + \ln(x^2-y^2)\right] f(y)\,dy + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2}\int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{\sqrt{y^2-x^2}}\,dy\right)$$

$C,\ \gamma$ — постоянные Эйлера.

3.4 Расширение композиционного метода на другие классы дифференциальных операторов

В этом пункте на основе композиционного метода строятся гиперболические, эллиптические и параболические по Р. Кэрролу операторы преобразования, обобщенные операторы Эрдейи–Кобера и другие.

Мы используем классификацию операторов преобразования, предложенную Р. Кэрролом и связанную с типом уравнения в частных производных, которому удовлетворяет ядро этого оператора. Так вводятся эллиптические и параболические операторы преобразования, классические же сплетающие операторы Сонина–Пуассона–Дельсарта по этому определению являются гиперболическими. Мы также используем естественные обобщения этих понятий: B — эллиптические, B — гиперболические и B — параболические операторы преобразования. При этом используются определения для соответствующих классов сингулярных уравнений в частных производных, которые были введены И.А. Киприяновым.

3.4.1 B-гиперболические операторы преобразования.

Так будем называть операторы сдвига по параметру оператора Бесселя, удовлетворяющие соотношению

$$TB_\nu = B_\mu T. \tag{3.29}$$

Будем искать такие операторы в факторизованном виде

$$T^{(\varphi)}_{\nu,\mu} = F^{-1}_{\mu}\left(\varphi(t) F_{\nu}\right). \tag{3.30}$$

Если $\nu = -\frac{1}{2}$ или $\mu = -\frac{1}{2}$, то такие операторы сводятся к уже изученным. Будем полагать $\varphi(t) = t^{\alpha}$, $T^{(\varphi)} = T^{(\alpha)}$.

Теорема 3.4.1 *Пусть выполнены условия*

$$-2 - 2Re\,\mu < Re\,\alpha < Re(\nu - \mu).$$

Тогда справедливо интегральное представление

$$\left(T^{(\alpha)}_{\nu,\mu} f\right)(x) = \frac{C_1}{x^{2\mu+\alpha+2}} \int\limits_0^x y^{2\nu+1}\,{}_2F_1\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1, \frac{\alpha}{2} + 1; \nu + 1; \frac{y^2}{x^2}\right) f(y)\,dy +$$

$$+C_2 \int\limits_x^{\infty} y^{-2\mu+2\nu-\alpha-1}{}_2F_1\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1, \mu - \nu + \frac{\alpha}{2} + 1; \mu + 1; \frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\,dy, \tag{3.31}$$

$$C_1 = \frac{2^{\mu-\nu+\alpha+1}\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\nu + 1\right)},\ C_2 = \frac{2^{\mu-\nu+\alpha+1}\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\nu - \mu - \frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\mu + 1\right)},$$

где ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Рассмотрим несколько частных случаев оператора (3.31).

а) Пусть $\alpha = -1 - 2\mu + \nu$, $Re\,\nu > -1$, $Re\,\mu > -1$. Тогда

$$\left(T^{(-1-2\mu+\nu)}_{\nu,\mu} f\right)(x) = 2^{-\mu}\frac{1}{x^{\mu}} \int\limits_x^{\infty} y^{\nu}(y^2 - x^2)^{\frac{\mu}{2}} P^{-\mu}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(1 - 2\frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\,dy +$$

$$+2^{1-\mu}e^{i\mu\pi}\frac{\Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x^{\mu}} \int\limits_0^x y^{\nu}(x^2 - y^2)^{\frac{\mu}{2}} Q^{\mu}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(2\frac{x^2}{y^2} - 1\right) f(y)\,dy.$$

б) Пусть $\alpha = 0$; $-1 < Re\,\mu < Re\,\nu$. В этом случае получается замечательный оператор "спуска"по параметру, который не зависит от начального и конечного значений параметров ν, μ, а зависит лишь от величины "спуска"$\gamma = \nu - \mu$:

$$\left(T^{(0)}_{\nu,\mu} f\right)(x) = \frac{2^{1-(\nu-\mu)}}{\Gamma(\nu - \mu)} \int\limits_x^{\infty} y(y^2 - x^2)^{\nu-\mu-1} f(y)\,dy.$$

Этот оператор лишь числовым множителем отличается от дробного интеграла I_{-,x^2} по функции $g(x) = x^2$. В такой форме он был открыт А. Эрдейи, это частный случай операторов Эрдейи–Кобера или Дж. Лаундеса .

в) Пусть $\alpha = 2\nu$, $-1 < Re(\nu + \mu) < 0$. Тогда

$$\left(T_{\nu,\mu}^{(2\nu)} f\right)(x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} 2^{\mu+\nu+1}\Gamma(\nu+\mu+1)\int\limits_x^{\infty} y^{2\nu+1}(y^2-x^2)^{-\mu-\nu-1}f(y)\,dy-$$

$$-\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} 2^{\mu+\nu+1}\Gamma(\nu+\mu+1)\int\limits_0^{x} y^{2\nu+1}(x^2-y^2)^{-\mu-\nu-1}f(y)\,dy.$$

г) Пусть $\mu = \nu$, $-2Re\,\nu - 2 < Re\,\alpha < 0$. Тогда получаем семейство операторов перестановочных с B_ν:

$$\left(T_{\nu,\nu}^{(\alpha)} f\right)(x) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^{\infty} y^{\nu+\frac{3}{2}}|x^2-y^2|^{-\frac{\alpha}{2}-1} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{\alpha}{2}+1}\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right) f(y)\,dy.$$

д) Пусть $\mu = -\nu$, $2Re\,\nu - 2 < Re\,\alpha < Re\,2\nu$. Тогда

$$\left(T_{\nu,-\nu}^{(\alpha)} f\right)(x) = 2^{-2\nu+\alpha+1}\frac{\Gamma\left(-\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(2\nu-\frac{\alpha}{2}\right)}\,x^{\nu}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{\infty} |y^2-x^2|^{\nu-\frac{\alpha}{2}-1} y^{\nu+1} P_{\nu-\frac{\alpha}{2}-1}^{\nu}\left(\frac{x^2+y^2}{|x^2-y^2|}\right) f(y)\,dy.$$

Другой подход к построению операторов сдвига по параметру заключается в следующем. Пусть по формуле (3.22) построен оператор типа Сонина, для которого выбрано $\varphi = \varphi_1$, а по формуле (3.23) — оператор типа Пуассона при значениях $\nu = \mu$, $\varphi = \varphi_2$. Тогда их композиция

$T = P_\mu S_\nu$ и будет искомым оператором. При этом в случае, если одновременно выбраны или синус или косинус — преобразования Фурье, получится в точности конструкция (3.30), где $\varphi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$. Поэтому вопрос об ограниченности такого оператора в лебеговых пространствах со степенным весом $L_{p,\gamma}(0,\infty)$ сводится к задаче о возможности деления в пространствах мультипликаторов. В случае если выбраны разные преобразования, мы приходим к следующей факторизации:

$$T_{\nu,\mu}^{(\varphi_1,\varphi_2)} = F_\mu^{-1} \cdot \varphi_2(t) \cdot F_{\begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} \cdot F^{-1}_{\begin{Bmatrix} c \\ s \end{Bmatrix}} \frac{1}{\varphi_1(t)} F_\nu. \tag{3.32}$$

Несложно показать, что композиция преобразований Фурье сводится к так называемым преобразованиям Гильберта на полуоси

$$(F_s F_c f)(x) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2 - y^2} f(y)\, dy, \tag{3.33}$$

$$(F_c F_s f)(x) = \int\limits_0^\infty \frac{y}{y^2 - x^2} f(y)\, dy, \tag{3.34}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, причем указанные преобразования унитарны в $L_2(0,\infty)$. Таким образом, в рассматриваемом случае оператор (3.32) факторизуется через два преобразования Фурье–Бесселя и одно из двухвесовых преобразований

$$(A_1 f)(x) = x\, \varphi_2(x) \int\limits_0^\infty \frac{f(y)}{(x^2 - y^2)} \cdot \frac{dy}{\varphi_1(x)},$$

$$(A_2 f)(x) = \varphi_2(x) \int\limits_0^\infty \frac{y}{\varphi_1(x)} \cdot \frac{f(y)}{(y^2 - x^2)}\, dy.$$

Вопрос об ограниченности (3.32) в этом случае сводится к задаче об оценках с двумя весами для полуосевых преобразований Гильберта в соответствующих пространствах.

Другие классы B–гиперболических операторов преобразования можно построить, если использовать вместо преобразования Фурье–Бесселя F_ν преобразование с функцией Неймана $Y_\nu(z)$ в ядре.

3.4.2 B-эллиптические операторы преобразования.

Эти операторы удовлетворяют соотношению

$$TB_\nu = -D^2 T. \tag{3.35}$$

Этот необычный класс ОП осуществляет связь между решениями B — эллиптических и B — гиперболических дифференциальных уравнений, выражая их решения друг через друга.

Построение таких операторов основано на замене в факторизациях (3.22)–(3.23) синус и косинус–преобразований Фурье на преобразование Лапласа или на замене преобразования Фурье–Бесселя на одно из преобразований с функциями Макдональда и Неймана

$$(K_\nu f)(t) = \frac{1}{t^\nu}\int\limits_0^\infty y^{\nu+1} K_\nu(ty) f(y)\,dy, \tag{3.36}$$

$$(Y_\nu f)(t) = \frac{1}{t^\nu}\int\limits_0^\infty y^{\nu+1} Y_\nu(ty) f(y)\,dy. \tag{3.37}$$

Возможно также использование преобразования с функцией Струве в ядре.

Теорема 3.4.2 *Пусть* $|Re\,\nu| + Re(\alpha+\nu) < 1$. *Тогда оператор*

$$\left(A_\nu^\alpha f\right)(x) = F_c^{-1} t^{-\alpha} K_\nu f$$

является B–эллиптическим, удовлетворяющим соотношению (3.35). *Для него справедливо интегральное представление*

$$(A_\nu^\alpha f)(x) = \frac{\pi\Gamma(1-\alpha)}{4\sin\frac{\pi}{2}(1-\alpha-2\nu)}\int\limits_0^\infty y^{\nu+1}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\nu-1}{2}}.$$

$$\cdot \left[P^{-\nu}_{-\alpha-\nu} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) + P^{-\nu}_{-\alpha-\nu} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right] f(y)\, dy.$$

Определим оператор, удовлетворяющий соотношению (3.35), по формуле

$$(C^\alpha_\nu f)(x) = L(t^{-\alpha} F_\nu f),$$

где L — преобразование Лапласа.

Теорема 3.4.3 *Пусть $Re\,\alpha < 1$. Тогда справедливо интегральное представление*

$$(A^\alpha_\nu f)(x) = \Gamma(1-\alpha) \int\limits_0^\infty y^{\nu+1} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\nu-1}{2}} P^{-\nu}_{-\alpha-\nu} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) f(y)\, dy.$$

Аналогичное представление при $|Re\,\nu| + Re(\alpha+\nu) < 1$ справедливо и для оператора

$$L(t^{-\alpha} Y_\nu f)(x) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \Gamma(1-\alpha) \int\limits_0^\infty y^{\nu+1} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\nu-1}{2}} Q^{-\nu}_{-\alpha-\nu} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) f(y)\, dy.$$

Подобные формулы выведены и для более широкого класса B–эллиптических операторов преобразования, сплетающих B_ν и $(-B_\mu)$.

Рассмотрим простейшие из введенных выше операторов A^α_ν и C^α_ν при значениях $\nu = \pm\frac{1}{2}$. Эти операторы будут определяться по формулам

$$\left(A^\beta f\right)(x) = \left(F^{-1}_{\begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} t^\beta L \right) f,$$

$$\left(C^{\beta} f\right)(x) = \left(L t^{-\beta} F_{\begin{Bmatrix} s \\ c \end{Bmatrix}} \right) f,$$

где L — преобразование Лапласа. Они сплетают D^2 и $-D^2$. В этом случае проще вычислить ядра интегральных операторов непосредственно. Это приводит к формулам

$$\left(C^{\beta} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1-\beta)\int\limits_0^{\infty} \frac{f(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1-\beta}{2}}} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} [(1-\beta)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}]dy,$$

$Re\,\beta < 1+\delta$, $\delta = 1$ при выборе синуса, $\delta = 0$ при выборе косинуса.

$$\left(A^{\beta} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1+\beta)\int\limits_0^{\infty} \frac{f(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1+\beta}{2}}} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} [(1+\beta)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}]dy,$$

где $Re\,\beta > -\delta - 1$, δ определенно выше. В частности, при $\beta = 0$ получаем пару операторов преобразования, связанную с интегралами Пуассона для полупространства:

$$\left(C^{0} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \frac{y f(y)}{x^2+y^2}\,dy,$$

$$\left(A^{0} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \frac{x f(y)}{x^2+y^2}\,dy.$$

Эти операторы и операторы C^{β}, A^{β} для частных значений $\beta \in \mathbb{N}$ построены в [236].

3.4.3 B–параболические операторы преобразования.

Этот необычный класс ОП позволяет выражать решения параболических уравнений через гиперболические и наоборот.

Введем интегральные преобразования по формулам

$$(F'_c f)(x) = (F_c f)(\sqrt{x}),\ (F'_s f)(x) = (F_s f)(\sqrt{x}),$$

$$(Pf)(x) = \left(L\varphi(t) F'_{\left\{ \begin{matrix} s \\ c \end{matrix} \right\}} \right)(x).$$

Тогда на финитных функциях оператор P сплетает вторую и первую производные по формулам

$$PD^2 f = DPf.$$

Таким образом, этот оператор является параболическим по терминологии Р.Кэррола.

3.4.4 Операторы сдвига по параметру типа Лаундеса.

Операторы этого типа появились при установлении формул, выражающих решения уравнений Гельмгольца через гармонические функции. Их изучение, начатое в работах И.Н. Векуа и А. Эрдейи было продолжено в работах Дж. Лаундеса.

Рассмотрим оператор

$$T_1 = F_\nu^{-1}\left(\varphi(t) F'_\mu\right),$$

где введено преобразование с параметром λ

$$\left(F'_\mu f\right)(t) = \frac{1}{t^\nu} \int\limits_0^\infty y^{\nu+1} J_\nu(y\sqrt{t^2+\lambda^2}) f(y)\, dy.$$

Оператор T_1 удовлетворяет соотношению

$$T_1 B_\mu = (B_\nu - \lambda^2) T_1. \tag{3.38}$$

Теорема 3.4.4 *При условиях* $-1 < Re\,\nu < Re\,\mu$ *и выборе* $\varphi(x) = x^{\mu}(x^2+\lambda^2)^{-\frac{\mu}{2}}$ *справедливо интегральное представление*

$$(T_1 f)\,(x) = \lambda^{1+\nu-\mu} \int\limits_0^{\infty} y(y^2-x^2)^{\frac{\mu-\nu-1}{2}} J_{\nu-\mu-1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}) f(y)\,dy.$$

Приведем ряд других операторов, получаемых в факторизованном виде.

а) Пусть $\nu = 1$, $\varphi(x) = x^{\mu-2}(x^2+\lambda^2)^{\frac{\mu}{2}}$.

Тогда оператор $T_2 = F_1^{-1}\varphi(t)F'_{\mu}$, удовлетворяющий соотношению

$$T_2 B_{\mu} = (B_1 - \lambda^2)\,T_2,$$

при $Re\,\lambda > 0$, $Re\,\mu > -1$ может быть представлен в виде

$$(T_2 f)(x) = \frac{1}{x^2\lambda^2} \int\limits_0^{\infty} y^{\nu+1} J_{\mu}(\lambda y) f(y)\,dy -$$

$$-\frac{1}{x^2\lambda^2} \int\limits_x^{\infty} y(y^2-x^2)^{\frac{\mu}{2}} J_{\mu}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}) f(y)\,dy.$$

б) Пусть $\varphi(x) = x^{\mu}(x^{\frac{\mu}{2}}+\lambda^2)^2$, $Re\,\lambda > 0$, и пусть $T_3 = F_{\nu}^{-1}\varphi F'_{\mu}$. Тогда если $-1 < Re\,\nu < -Re\mu$, то

$$(T_3 f)(x) = \frac{2\sin(\pi\mu)}{\pi}\lambda^{\mu+\nu+1}\cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{x} y^{2\mu+1}(x^2-y^2)^{-\frac{\mu+\nu+1}{2}} K_{\mu+\nu+1}(\lambda\sqrt{x^2-y^2}) f(y)\,dy +$$

$$+\lambda^{\nu+\mu+1} \int\limits_x^{\infty} y^{2\mu+1}(y^2-x^2)^{-\frac{\mu+\nu+1}{2}} \Big[\sin(\pi\nu) Y_{\mu+\nu+1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}) -$$

$$-\cos(\pi\nu) J_{\nu+\mu+1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2})\Big]\, f(y)\,dy.$$

в) Пусть $\varphi(x) = x^{\mu-1}/(x^2+\lambda^2)(x^2+\frac{\lambda}{2}^2)^{\frac{\mu}{2}}$.
Положим $T_4 = Y_\nu^{-1}\varphi F'_\mu$. Тогда если $Re\,\lambda > 0$, $-\frac{1}{2} < Re\,\nu < 3 + Re\,\mu$, то справедливо соотношение

$$(T_4 f)(x) = -\frac{\lambda^{\nu-\mu-1}}{2^{-\frac{\mu}{2}}} \cdot \frac{K_\nu(\lambda x)}{x^\nu} \int\limits_0^\infty y^{\mu+1} J_\mu\left(\frac{\lambda y}{\sqrt{2}}\right) f(y)\,dy.$$

Приведенные примеры демонстрируют важность свободы выбора функции φ.

Аналогично осуществляется построение операторов T, удовлетворяющих соотношению

$$TB_\mu = (B_\mu + \lambda^2)\,T. \tag{3.39}$$

Например, оператор вида

$$T_5 = (F'_\mu)^{-1}\varphi F_\nu$$

для одной из функций φ является также оператором Дж. Лаундеса

$$(T_4 f)(x) = \frac{\lambda^{\nu-\mu+1}}{x^{2\mu}} \int\limits_0^\infty y^{2\nu+1}(x^2-y^2)^{\frac{\mu-\nu-1}{2}} J_{\mu-\nu-1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}) f(y)\,dy.$$

Отметим, что соотношения (3.38)–(3.39) ввиду линейности входящих в них операторов могут быть переписаны в форме

$$T_1(B_\mu+\lambda^2) = B_\nu T,\ T(B_\nu-\lambda^2) = B_\mu T.$$

Кроме того, во всех операторах можно обосновать замену $\lambda \to i\lambda$. Соотношение для наиболее общих операторов преобразования вида

$$T(B_\nu+\alpha) = (B_\mu+\beta)T \tag{3.40}$$

эквивалентно уже рассмотренным

$$T(B_\nu+\alpha-\beta) = B_\mu T,\ (B_\mu+\beta-\alpha)T = TB_\nu.$$

Впрочем, операторы, для которых выполнено (**??**), могут быть получены и непосредственно. Таким же образом строятся и B–эллиптические операторы типа Лаундеса, удовлетворяющие соотношению

$$T(B_\nu + \lambda) = (-B_\mu + \beta)\, T.$$

При выборе значений параметров $\nu = \mu = -\frac{1}{2}$ получаем операторы, сплетающие D^2 и $D^2 \pm \lambda^2$.

Глава 4

Приложения метода операторов преобразования к интегральным представлениям и оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Сначала в главе излагается решение нескольких задач, связанных с известной задачей Е.М.Ландиса об экспоненциальных оценках решений стационарного уравнения Шрёдингера. Несмотря на отрицательное решение этой проблемы в общей ситуации, полученное В.З.Мешковым, для ряда дифференциальных уравнений простой структуры эта гипотеза оказывается верной, что и доказано в работе. Далее рассматривается усовершенствованный метод получения оценок решений для уравнений с сингулярным потенциалом. Улучшения оценок получаются, во–первых, за счёт более точного выражения ядер ОП и функции Грина в терминах специальных функций, что приводит к избавлению от неэффективных постоянных, и, во–вторых, за счёт нестандартных вариантов расстановки пределов в интегральном уравнении для ядер ОП, что позволяет расширить класс допустимых потенциалов.

4.1 Приложение метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и задаче Е.М.Ландиса

В статье Е.М. Ландиса [93] поставлена следующая задача: доказать, что решение стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом

$$\begin{gathered}\Delta u(x)-q(x)u(x)=0,\ x\in R^n,\ |x|\geqslant R_0>0,\\ |q(x)|\leqslant\lambda^2,\ \lambda>0,\ u(x)\in C^2\left(|x|\geqslant R_0\right),\end{gathered}\tag{4.1}$$

удовлетворяющее оценке вида

$$|u(x)|\leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|},\ \varepsilon>0,$$

тождественно равно нулю.

В.З.Мешковым в известных работах [131]–[132] был дан отрицательный ответ на данный вопрос. Тем не менее, для некоторых классов дифференциальных уравнений проблема решается положительно. При этом используется метод операторов преобразования специального вида.

Далее эта задача решена для случая потенциала, зависящего только от одной переменной: $q(x)=q(x_i)$, где $1\leqslant i\leqslant n$; далее для определённости считается, что $i=1$. Для этого случая в работе доказано обобщение утверждения (4.1) для уравнения

$$\Delta u-q(x_1)u=0,\tag{4.2}$$

в котором потенциал $q(x_1)$ ограничен произвольной неубывающей функцией. Решение основано на использовании операторов преобразования, сводящих уравнение (4.2) к уравнению Лапласа.

1. Условия задачи (4.1) выполнены в полупространстве $x_1\geqslant R_0$ и инвариантны относительно замены переменных $z=x_1-R_0$. Поэтому мы

будем рассматривать задачу (4.1) в полупространстве $z \geqslant 0$ или, сохраняя для переменной x_1 прежнее обозначение, $x_1 \geqslant 0$. Будет доказано, что решение задачи (4.1) равно нулю в полупространстве $x_1 \geqslant 0$, а тогда в силу теоремы Кальдерона о единственности продолжения (см. [134], гл. 6, С. 14) такое решение тождественно равно нулю во всём пространстве R^n.

Обозначим через $T(\delta)$ множество функций, удовлетворяющих в полупространстве $R^n_+ = \{x \in R^n,\ x_1 \geqslant 0\}$ следующим условиям (4.3)–(4.5):

$$u(x) \in C^2\left(R^n_+\right), \tag{4.3}$$

$$|u(x)| \leqslant c_1\, e^{-\delta|x|},\ \delta > 0, \tag{4.4}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leqslant c_2\, e^{-\delta|x|}. \tag{4.5}$$

Построим для функций из $T(\lambda + \varepsilon)$ оператор преобразования вида (см. [?])

$$Su(x) = u(x) + \int\limits_{x_1}^{\infty} K(x_1, t) u(t, x^1)\, dt, \tag{4.6}$$

чтобы выполнялось равенство

$$S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - q(x_1)u\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Su,\ |q(x_1)| \leqslant \lambda^2, \tag{4.7}$$

где, как обычно, через (x_1, x^1) обозначено $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Подстановка выражения (4.6) в формулу (4.7) приводит к равенствам

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} = q(t)K, \tag{4.8}$$

$$3\frac{\partial K(x_1, x_1)}{\partial x_1} = q(x_1), \tag{4.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} K(x_1, t)\frac{\partial u(t, x^1)}{\partial t} - \lim_{t\to\infty} \frac{\partial K(x_1, t)}{\partial t} u(t, x^1) = 0. \tag{4.10}$$

Выполняя стандартную замену переменных $w = \frac{t+x_1}{2},\ v = \frac{t-x_1}{2}$, мы сводим систему (4.8)–(4.9) к более простой (выполнение условия (4.10) на решениях задачи (4.1) будет показано позже)

$$\frac{\partial^2 K}{\partial w \partial v} = q(w+v)K, \tag{4.11}$$

$$K(w,0) = \frac{1}{3}\int\limits_0^w q(s)\,ds, \tag{4.12}$$

которая, в свою очередь, является следствием одного интегрального уравнения

$$K(w,v) = \frac{1}{3}\int\limits_0^w q(s)\,ds +$$

$$+\int\limits_0^w d\alpha \int\limits_0^v q(\alpha+\beta)K(\alpha,\beta)\,d\beta,\ |q| \leqslant \lambda^2,\ w \geqslant v \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.13) отличается от обычно используемого при рассмотрении операторов преобразования на бесконечном интервале интегрального уравнения изменением области интегрирования с полуоси (w,∞) на отрезок $(0,w)$, что влечёт экспоненциальный рост ядра $K\,(x_1,t)$. Далее доказывается, что такое ядро существует и оператор преобразования с таким ядром (4.6) определён на множестве $T\,(\lambda+\varepsilon)$. Возможность сведения задачи (4.8)–(4.10) к неэквивалентным интегральным уравнениям вытекает из недоопределённости задачи Коши (4.11)–(4.12).

Лемма 4.1.1 *Существует единственное непрерывное решение уравнения* (4.13)*, удовлетворяющее неравенству*

$$|K(w,v)| \leqslant \frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{w}{v}}\,I_1\left(2\lambda\sqrt{wv}\right), \tag{4.14}$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя. При этом на допустимом потенциале $q(x_1) \equiv \lambda^2$ в (4.14) достигается знак равенства.

Замечание 4.1.1 *В дальнейшем символом c обозначаются абсолютные положительные постоянные, величина которых не играет роли.*

Доказательство. Введём обозначения

$$K_0(w,v) = \frac{1}{3}\int\limits_0^w q(s)\,ds,$$

$$PK(w,v) = \int\limits_0^w d\alpha \int\limits_0^v q(\alpha+\beta)K(\alpha+\beta)\,d\beta.$$

Тогда уравнение (4.13) запишется в виде $K = K_0 + PK$. Будем искать его решение в виде ряда Неймана

$$K = K_0 + PK_0 + P^2K_0 + \dots \tag{4.15}$$

Для слагаемых ряда (**??**) с учётом условия $|q(x_1)| \leqslant \lambda^2$ получаем

$$|P^nK_0(w_0v)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\lambda^2\right)^{n+1}\frac{w^{n+1}}{(n+1)!}\frac{v^n}{n!},\ n = 0,1,2,\dots \tag{4.16}$$

Отсюда вытекает неравенство (4.14), если использовать представление функции $I_1(x)$ в виде ряда

$$\frac{1}{x}I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!(k+1)!}.$$

Оценка (4.14) является точной, так как при $q(x_1) \equiv \lambda^2$, неравенства (4.16) превращаются в равенства для всех целых $n \geqslant 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.1.2 *В терминах переменных x_1, t справедлива оценка*

$$|K(x_1,t)| \leqslant c\,t\,e^{\lambda t}.$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$\left|\frac{1}{x}I_1(x)\right| \leqslant c\,e^x,\ x \geqslant 0,$$

для проверки истинности которого надо разобрать случаи а) $x \geqslant 1$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$ и использовать известную асимптотику функции $I_1(x)$ при $x \to \infty$ и $x \to +0$ (см. [11]). Отсюда с помощью очевидных неравенств

$$\frac{x_1+t}{2} \leqslant t,\ 2\sqrt{wv} = \sqrt{t^2 - x_1^2} \leqslant t$$

из оценки (4.14) следует утверждение леммы.

Из леммы следует, что выражение (4.6) определено на функциях из $T\left(\lambda+\varepsilon\right)$. Покажем, что выражение (4.6) в действительности задаёт оператор преобразования на $T\left(\lambda+\varepsilon\right)$. Для этого осталось проверить соотношение (4.10). Из того, что $u(x) \in T\left(\lambda+\varepsilon\right)$ и из леммы вытекает равенство

$$\lim_{t\to\infty} K(x_1,t)\frac{\partial u(t,x^1)}{\partial t} = 0.$$

Поэтому осталось доказать, что если $u(x) \in T\left(\lambda+\varepsilon\right)$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial K(x_1,t)}{\partial t} u(x_1,t) = 0,$$

Последнее соотношение следует из оценки

$$\left|\frac{\partial K(x_1,t)}{\partial t}\right| \leqslant c\,t\,e^{\lambda t}. \tag{4.17}$$

Для доказательства неравенства (4.17) нужно перейти к переменным w, v и с использованием уже установленных оценок для ядра $K(x_1,t)$ оценить производные $\frac{\partial K}{\partial w}$, $\frac{\partial K}{\partial v}$,дифференцируя уравнение (4.13). Так как

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial w} + \frac{\partial K}{\partial v}\right)$$

то мы придём к (4.17).

2. Покажем, что любое решение задачи (4.1) принадлежит $T\left(\lambda+\varepsilon\right)$ и, следовательно, на таких решениях определён оператор (4.6). Для этого необходимо проверить выполнение условия (4.5).

Лемма 4.1.3 *Пусть функция $u(x) \in C^2\left(|x| \geqslant R_0\right)$ есть решение задачи* (4.1). *Тогда найдётся такая постоянная $c > 0$, что*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leqslant c\,e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}.$$

Доказательство. В силу априорных оценок Шаудера, в замкнутом шаре $B(x,1)$ единичного радиуса с центром в точке x, $|x| \geqslant R_0+1$, имеем ([133], теорема 33, II)

$$u_1 \leqslant c\left({u_{1,\lambda_1}}^{\frac{1}{1+\lambda_1}} \cdot {u_0}^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}} + u_0\right),$$

где обозначено

$$u_0 = \|u(x)\|_{C^0(B(x,1))},\ u_1 = \|u(x)\|_{C^1(B(x,1))};$$

u_{1,λ_1} есть сумма коэффициентов Гёльдера функции $u(x)$ и её производных первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right| \leqslant c\left(u_{1,\lambda_1}{}^{\frac{1}{1+\lambda_1}} \cdot u_0{}^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}} + u_0\right), \tag{4.18}$$

Отметим, что так как выполнены все условия утверждения 33, V из [**?**], то константа c в формуле (4.18) не зависит от x.

Из результатов Морри (см. [134], теорема 39, IV) вытекает оценка для величины u_{1,λ_1}

$$u_{1,\lambda_1} \leqslant c\left[\|u\|_{L_2(B(x,1))} + \|q\,u\|_{L_2(B(x,1))}\right], \tag{4.19}$$

причём постоянная в (4.19) по-прежнему не зависит от x. Из условий задачи $|q(x_1)| \leqslant \lambda^2$, следовательно, с помощью теоремы о среднем получаем из (4.19)

$$u_{1,\lambda_1} \leqslant c\left(\int\limits_{B(x,1)} |u(y)|^2\,dy\right)^{1/2} \leqslant c^1\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}.$$

Подставляя последнее неравенство в (4.18), получаем

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leqslant c\left[\left(e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}} + e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}\right] \leqslant c\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}.$$

Таким образом, требуемое неравенство установлено для $|x_1| \geqslant R_0+1$. Так как множество $R_0 \leqslant |x| \leqslant R_0+1$ является компактом в R^n, то это неравенство справедливо и при $|x| \geqslant R_0$. Лемма 3 доказана.

Выполняя опять замену координат $z = x_1 - R_0$, получаем, что лемма 3 справедлива в полупространстве $x_1 \geqslant 0$ (мы переобозначим z через x_1).

3. Применим к уравнению (4.2) оператор S. Из тождества (4.7) и перестановочности S с производными $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, получаем, что в полупространстве R_+^n

$$S\left(\Delta u - q(x_1)u\right) = \Delta S u = 0.$$

Обозначим функцию Su через v. Из (4.6), (4.13) следует, что если $u(x) \in C^2\left(R_+^n\right)$, $q(x) \in C\left(R_+^n\right)$, то $v(x) \in C^2\left(R_+^n\right)$. Покажем, что $v(x)$ экспоненциально убывает в R_+^n при $|x| \to \infty$ и, следовательно, равна нулю.

Лемма 4.1.4 *Пусть* $u(x) \in T\left(\lambda + \varepsilon\right)$. *Тогда для* $x \in R_+^n$

$$|v| = |Su| \leqslant c\,|x|\,e^{-\varepsilon|x|},\ \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Из представления (4.6) и леммы 3 получаем

$$|Su| \leqslant |u(x)| + \int\limits_{x_1}^{\infty} t\,e^{\lambda t} c\,e^{-(\lambda+\varepsilon)\sqrt{t^2+|x^1|^2}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\left(e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|} + \int\limits_{x_1}^{\infty} t\,e^{-(\lambda+\varepsilon)\sqrt{t^2+|x^1|^2}}\,dt\right).$$

Вычисляя интеграл с помощью замены переменных по формуле $y = \sqrt{t^2 + |x^1|^2}$ с последующим интегрированием по частям, получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

Итак, $v(x) = 0$ в R_+^n. Определим на $T\left(\lambda + \varepsilon\right)$ обратный к S оператор P по формуле

$$Pu(x) = u(x) + \int\limits_{x_1}^{\infty} N(x_1, t)u(t, x^1)\,dt.$$

Тогда для ядра $N\left(x_1, t\right)$ справедливы утверждения лемм 1–3. Кроме того, если $Su \in T\left(\lambda + \varepsilon\right)$, то

$$PSu(x) = u(x). \tag{4.20}$$

Так как, очевидно, $0 \in T(\lambda+\varepsilon)$, то применяя (4.20) к обеим частям установленного в R^n_+ равенства $Su = 0$, получим $u = 0$ в R^n_+. Выше было показано, что это влечёт $u \equiv 0$ во всём R^n.

Замечание 4.1.2 *Переход к полупространству R^n_+ использовался при доказательстве потому, что выражение (4.6) не определено в области, получаемой пересечением шара $|x| \leqslant R_0$ и бесконечного полуцилиндра $\{|x^1| \leqslant R_0,\ |x_1| \leqslant R_0\}$.*

Итак доказана

Теорема 4.1.1 *Любое решение $u(x) \in C^2(|x| > R_0)$ стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом*

$$\Delta u(x) - q(x_1)u = 0,\ x \in R^n,\ |x| \geqslant R_0 > 0,$$

$$q(x_1) \in C(|x| \geqslant R_0),\ |q(x_1)| \leqslant \lambda^2,\ \lambda > 0,$$

удовлетворяющее оценке

$$|u(x)| \leqslant const\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|},\ \varepsilon > 0,$$

есть тождественный ноль.

4. Использованная техника операторов преобразования позволяет усилить полученный результат. Будем обозначать через $L_{2,\,loc}(x_1 \geqslant R_0)$ множество функций, для которых при любом $x_1 \geqslant R_0$ конечен интеграл $\int\limits_{R_0}^{x_1} \psi^2(s)\, ds$. Пусть далее, задана неотрицательная функция $g(x)$, для которой интеграл $\int\limits_{x_1}^{\infty} t\, g(t, x^1)\, dt = p(x)$ конечен при любом $x_1 \geqslant R_0$ и для некоторой постоянной $\alpha > 0$

$$|p(x)| \leqslant c \cdot \exp\left(-\alpha |x|^\delta\right),\ \delta > 0.$$

Тогда по схеме доказательства предыдущей теоремы может быть установлена

Теорема 4.1.2 *Пусть* $\psi(x_1) \in L_{2,loc}(x_1 \geqslant R_0)$*,* $\psi(x_1)$ *— неубывающая функция, функция* $g(x)$ *удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Тогда любое решение уравнения*

$$\Delta u(x) - q(x_1)u = 0,\ x \in R^n,\ |x| \geqslant R_0 > 0,$$

$$|q(x_1)| \leqslant \psi^2(x_1),$$

для которого выполнено неравенство

$$\psi(x_1)|u(x)| \leqslant const\, e^{-\psi(x_1)|x|} g(x),\ g(x) \geqslant 0,$$

есть тождественный ноль.

В условиях теоремы 1 $g(x) = e^{-\varepsilon|x|}$. Примером другой допустимой $g(x)$ является функция $g(x) = \exp\left(-\varepsilon|x|^{\delta}\right)$, $0 < \delta < 1$.

4.2 Приложения метода операторов преобразования для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Рассматривается задача о построении интегральной формулы для решений дифференциального уравнения с определённой асимптотикой

$$B_\alpha u(x) - q(x)u(x) = 0, \tag{1}$$

где B_α — оператор Бесселя вида

$$B_\alpha u = u''(x) + \frac{2\alpha}{x}u'(x),\ \alpha > 0. \tag{2}$$

Данная задача решается методом операторов преобразования. Для этого достаточно построить оператор преобразования S_α вида

$$S_\alpha u(x) = u(x) + \int_x^\infty P(x,t)u(t)\,dt, \tag{3}$$

с некоторым ядром $P(x,t)$, который сплетает операторы $B_\alpha - q(x)$ и B_α по формуле

$$S_\alpha(B_\alpha - q(x))u = B_\alpha S_\alpha u. \tag{4}$$

на функциях $u \in C^2(0,\infty)$. В результате получится формула, выражающая решения уравнения (1) со спектральным параметром вида

$$B_\alpha u(x) - q(x)u(x) = \lambda^2 u(x)$$

через решения невозмущённого уравнения, то есть через функции Бесселя.

Оригинальная методика для решения поставленной задачи была разработана В.В. Сташевской [179]–[180], что позволило ей включить в рассмотрение сингулярные потенциалы с оценкой в нуле $|q(x)| \leqslant cx^{-3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ при целых α, это методика получила широкое развитие. Случай непрерывной q, $\alpha > 0$ рассмотрен в работах А.С. Сохина [175]–[178], а также [33].

Вместе с тем во многих математических и физических задачах необходимо рассматривать сильно сингулярные потенциалы, например, допускающие произвольную степенную особенность в нуле. В настоящей работе сформулированы результаты по интегральному представлению решений уравнений с подобными сингулярными потенциалами. От потенциала требуется лишь мажорируемость определенной функцией, суммируемой на бесконечности. В частности, к классу допустимых в данной работе относятся сингулярный потенциал $q = x^{-2}$, сильно сингулярный потенциал со степенной особенностью $q = x^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, потенциалы Юкавы типа $q = e^{-\alpha x}/x$, потенциалы Баргмана и Батмана–Шадана [210] и ряд других. При этом на функцию $q(x)$ не накладывается никаких дополнительных условий типа быстрой осцилляции в начале координат или знакопостоянства, что позволяет изучать притягивающие и отталкивающие потенциалы единым методом.

Следует отметить, что в данной работе построены операторы преобразования специального вида, отличающиеся от ранее известных некоторыми деталями. До этого рассматривались лишь случаи одинаковых пределов (оба вида $[0;a]$ или $[a;\infty]$) в основном интегральном уравнении для ядра оператора преобразования. В данной работе показано, что можно рассматривать случай различных пределов в основном интегральном уравнении. Именно такая расстановка пределов и позволила охватить более широкий класс потенциалов с особенностями в нуле. Кроме того, по сравнению с рассуждениями по образцу классической работы Б.М. Левитана [104] мы вносим усовершенствование в эту схему. Используемую в доказательстве функцию Грина как оказалось можно выразить не только через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, но и более конкретно через функцию Лежандра, что позволяет избавиться от неопределённых постоянных в оценках из предыдущих работ.

2. Решение основного интегрального уравнения для ядра оператора преобразования.

Введем новые переменные и функции по формулам:

$$\xi = \frac{t+x}{2},\ \eta = \frac{t-x}{2},\ \xi \geqslant \eta > 0;$$

$$K(x,t) = \left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha} P(x,t),\ u(\xi,\eta) = K(\xi-\eta,\xi+\eta). \tag{5}$$

Обозначим $\nu = \alpha - 1$. Таким образом, для обоснования представления (3) для решения уравнения (1) достаточно определить функцию $u(\xi,\eta)$. Известно [175]–[178], что если существует дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(\xi,\eta)$ интегрального уравнения

$$u(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} R_\nu(s,0;\xi,\eta)q(s)\,ds - \int\limits_{\xi}^{\infty} ds \int\limits_{0}^{\eta} q(s+\tau)R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)u(s,\tau)\,d\tau,$$

при условиях $0<\tau<\eta<\xi<s$, то искомая функция $P(x,t)$ определяется по формулам (5) через это решение $u(\xi,\eta)$. Функция $R_\nu = R_{\alpha-1}$

является функцией Римана, возникающей при решении некоторой задачи Гурса для сингулярного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{4\alpha(\alpha-1)\xi\eta}{(\xi^2-\eta^2)^2}u(\xi,\eta)=q(\xi+\eta)u(\xi,\eta).$$

Эта функция известна в явном виде, см. [175]–[178], она выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1$ по формуле

$$R_\nu=\left(\frac{s^2-\eta^2}{s^2-\tau^2}\cdot\frac{\xi^2-\tau^2}{\xi^2-\eta^2}\right)^\nu {}_2F_1\left(-\nu,-\nu;1;\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2}\cdot\frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\right). \qquad (6)$$

Это выражение упрощено в [8], где показано, что функция Римана в рассматриваемом случае выражается через функцию Лежандра по формуле

$$R_\nu(s,\tau,\xi,\eta)=P_\nu\left(\frac{1+A}{1-A}\right),\ A=\frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\cdot\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2}\,. \qquad (7)$$

Основное содержание этого пункта составляет

Теорема 4.2.1 *Пусть функция $q(r)\in C^1(0,\infty)$ удовлетворяет условию*

$$|q(s+\tau)|\leqslant|p(s)|,\ \forall s,\forall\tau,\ 0<\tau<s,\ \int\limits_\xi^\infty|p(t)|\,dt<\infty,\forall\xi>0. \qquad (8)$$

Тогда существует интегральное представление вида (3), ядро которого удовлетворяет оценке

$$|P(r,t)|\leqslant\left(\frac{t}{r}\right)^\alpha\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{t+r}{2}}^\infty P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right)|p(y)|\,dy\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\left(\frac{t-r}{2}\right)\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{t+r}{2}}^\infty P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right)|p(y)|\,dy\right].$$

При этом ядро оператора преобразования $P(x,t)$, а также решение уравнения (1) являются дважды непрерывно дифференцируемыми на $(0,\infty)$ функциями по своим аргументам.

Доказательство.

Разобьем доказательство теоремы на ряд лемм.

Введем обозначения:

$$I_q(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}R_\nu(y,0;\xi,\eta)|p(y)|\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}P_\nu\left(\frac{y^2(\xi^2+\eta^2)-2\xi^2\eta^2}{y^2(\xi^2-\eta^2)}\right)|p(y)|\,dy, \tag{9}$$

$$u_0(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}R_\nu(s,0;\xi,\eta)|p(s)|\,ds,$$

$$Au_0(\xi,\eta)=-\int\limits_{\xi}^{\infty}ds\int\limits_{0}^{\eta}q(s+\tau)R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)u_0(s,\tau)\,d\tau.$$

Докажем равномерную сходимость операторного ряда Неймана

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k u_0(\xi,y) \tag{10}$$

и возможность его двукратного дифференцирования.

Лемма 4.2.1 *Справедлива оценка*

$$|u_0(\xi,\eta)|\leqslant I_q(\xi,\eta).$$

Доказательство сразу следует из определения (9).

Лемма 4.2.2 *Пусть* $0<\tau<\eta<\xi<s$. *Тогда справедливо неравенство*

$$I_q(s,t)\leqslant I_q(\xi,\eta). \tag{11}$$

Доказательство.

По условию дано $0<\tau<\eta<\xi<s<y$. Покажем, что тогда

$$\frac{\tau^2}{s^2}\cdot\frac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}\leqslant\frac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\frac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}\ (\leqslant 1).$$

Действительно, это неравенство эквивалентно следующему:

$$\tau^2\xi^2(y^2-s^2)(y^2-\eta^2)\leqslant\eta^2 s^2(y^2-\xi^2)(y^2-\tau^2),$$

которое очевидно, так как каждый из сомножителей слева не превосходит соответствующего сомножителя справа. Далее, рассмотрим при $0 < x < 1$ функцию

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \geqslant 1,\ f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0,\ 0 < x < 1.$$

Следовательно, эта функция возрастает по x. Поэтому

$$\frac{1 + \frac{\tau^2}{s^2} \cdot \frac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}}{1 - \frac{\tau^2}{s^2} \cdot \frac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}} \leqslant \frac{1 + \frac{\eta^2}{\xi^2} \cdot \frac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}}{1 - \frac{\eta^2}{\xi^2} \cdot \frac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}}$$

Функция Лежандра $P_\nu(x)$ на интервале $x \in (1, \infty)$ при $\nu > -1$ монотонно возрастает, кроме того, $P_\nu(x) > 1$. Поэтому

$$P_\nu \left(\frac{1 + \frac{\tau^2}{s^2} \cdot \frac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}}{1 - \frac{\tau^2}{s^2} \cdot \frac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}} \right) \leqslant P_\nu \left(\frac{1 + \frac{\eta^2}{\xi^2} \cdot \frac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}}{1 - \frac{\eta^2}{\xi^2} \cdot \frac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}} \right).$$

Последнее неравенство можно записать иначе

$$P_\nu \left(\frac{y^2(s^2+\tau^2) - 2s^2\tau^2}{y^2(s^2-\tau^2)} \right) \leqslant P_\nu \left(\frac{y^2(\xi^2+\eta^2) - 2\xi^2\eta^2}{y^2(\xi^2-\eta^2)} \right).$$

Заметим, что мы фактически доказали неравенство для функции Римана

$$R_\nu(y, 0; s, \tau) \leqslant R_\nu(y, 0; \xi, \eta)\ , \qquad (12)$$

при условиях $0 < \tau < \eta < \xi < s < y$.

Из проведенных вычислений получаем оценку

$$I_q(s, \tau) = \frac{1}{2} \int\limits_s^\infty R_\nu(y, 0; s, \tau) |p(y)|\, dy \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_\xi^\infty R_\nu(y, 0; s, \tau) |p(y)|\, dy$$

Заменяя нижний предел интегрирования s на $\xi < s$, мы можем лишь увеличить значение интеграла, так как функция Римана положительна, $R_\nu > 0$. В результате приходим к оценке (11).

Лемма доказана.

Лемма 4.2.3 *Для n–го члена ряда Неймана (10) справедлива оценка*

$$|u_n(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta)\cdot\frac{[\eta I_q(\xi,\eta)]^n}{n!}. \tag{13}$$

Доказательство.

Применим метод математической индукции. Для $n=0$ неравенство (13) сводится к уже доказанному неравенству из леммы 1. Пусть выполнено (13) для некоторого $n=k$. Тогда для очередного члена ряда Неймана получаем

$$|u_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant |\int\limits_{\xi}^{\infty} ds \int\limits_{0}^{\eta} R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)u_k(s,\tau)q(s+\tau)\,d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\xi}^{\infty} ds \int\limits_{0}^{\eta} R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)|q(s+\tau)|I_q(s,\tau)\frac{[\eta I_q(s,\tau)]^k}{k!}\,d\tau.$$

Повторяя рассуждения предыдущей леммы, получаем

$$R_\nu(s,\tau;\xi,\eta) \leqslant R_\nu(s,0;\xi,\eta), \tag{14}$$

так как

$$R_\nu(s,\tau;\xi,\eta) = P_\nu\left(\frac{1+A}{1-A}\right),\ A=\frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\cdot\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2},$$

а максимальное по τ значение A достигается при $\tau=0$. Учитывая неравенство (14) и предполагаемое неравенство (13), приходим к оценке

$$|u_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta)\frac{[\tau I_q(\xi,\eta)]^k}{k!}\cdot\int\limits_{\xi}^{\infty} R_\nu(s,0;\xi,\eta)\int\limits_{0}^{\eta}|q(s+\tau)|\tau^k\,d\tau\,ds.$$

Мы рассматриваем потенциалы, для которых верно неравенство $|q(s+\tau)| \leqslant |p(s)|,\ 0<\tau<s$. Окончательно получаем

$$|u_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta)\frac{[I_q(\xi,\eta)]^{k+1}}{k!}\cdot\frac{\eta^{k+1}}{(k+1)}.$$

что и доказывает оценку (13) для всех n.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 1. Суммируя все оценки (13), получаем, что ряд Неймана сходится равномерно в области $0 < \eta < \xi$, и его сумма есть некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|u(\xi, \eta)| \leqslant I_q(\xi, \eta) \exp[\eta \cdot I_q(\xi, \eta)]. \tag{15}$$

Из (15) следует, что мы смогли бы доказать сходимость ряда (10) для суммируемого потенциала q, который можно приблизить непрерывными потенциалами.

Возвращаясь к функциям K и P, получаем неравенства

$$|K(x,t)| \leqslant I_q\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) \exp\left[\left(\frac{t-x}{2}\right) I_q\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right)\right],$$

$$|P(x,t)| \leqslant \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} I_q\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) \exp\left[\left(\frac{t-x}{2}\right) I_q\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right)\right].$$

Преобразуем величину I_q, входящую в оценки

$$I_q\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{t+x}{2}}^{\infty} P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+x^2)-(t^2-x^2)}{2txy^2}\right) |p(y)|\, dy.$$

Таким образом, мы приходим к оценке (9).

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось обосновать существование вторых непрерывных производных функции $P(x,t)$ по переменным x, t при условии $q \in C^1(x > 0)$. Очевидно, что это эквивалентно существованию вторых непрерывных производных функции $u(\xi, \eta)$ по переменным ξ, η. Доказательство последнего утверждения проводится по приведенному выше образцу методом последовательных приближений и полностью повторяет соответствующий фрагмент доказательства из [175].

Теорема доказана.

Перечислим классы потенциалов, для которых выполнены условия (8). Если $|q(x)|$ монотонно убывает, то можно принять $p(x) = |q(x)|$. Для потенциалов с произвольной особенностью в начале координат и возрастающих при $0 < x < M$ (например, кулоновских $q = -\frac{1}{x}$), которые обрезаны нулем на бесконечности, $q(x) = 0,\ x > M$, можно принять $p(x) = |q(M)|,\ x < M,\ p(x) = 0,\ x \geqslant M$. Условию (8) будут также удовлетворять потенциалы с оценкой $q(x+\tau) \leqslant c|q(x)| = |p(x)|$. На возможность подобного усиления теоремы 1 внимание автора обратил В. В. Катрахов.

В частности, приведенным условиям удовлетворяют следующие потенциалы, встречающиеся в приложениях: сильно сингулярный потенциал со степенной особенностью вида $q(x) = x^{-2-\varepsilon}$, различные потенциалы Баргмана

$$q_1(x) = -\frac{e^{-ax}}{(1+\beta e^{-ax})^2},\ q_2(x) = \frac{c_2}{(1+c_3x)^2},\ q_3(x) = \frac{c_4}{ch^2(c_5x)},$$

и Юкавы

$$q_4(x) = -\frac{e^{-ax}}{x},\ q_5(x) = \int\limits_x^\infty e^{-at}\,dc(t).$$

(см., например, [210]).

Замечание 4.2.1 *Фактически при доказательстве приведенной теоремы не нужен явный вид функции Римана (7). Используется только существование функции Римана, ее положительность и некоторое специальное свойство монотонности (14). Эти факты являются довольно общими, поэтому полученные результаты можно распространить на достаточно широкий класс дифференциальных уравнений.*

Оценку из теоремы 1 для потенциалов общего вида можно преобразовать в более грубую, но зато и более обозримую.

Теорема 4.2.2 *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для ядра* *оператора преобразования $P(x,t)$ справедлива оценка*

$$|P(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} P_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\int\limits_x^{\infty}|p(y)|\,dy\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-x}{2}\right)P_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\int\limits_x^{\infty}|p(y)|\,dy\right].$$

Отметим, что при $x\to 0$ ядро интегрального представления может иметь экспоненциальную особенность.

3. Оценки для случая степенного сингулярного в нуле потенциала.

Для класса потенциалов со степенной сингулярностью вида

$$q(x) = x^{-(2\beta+1)},\ \beta>0 \tag{16}$$

полученные оценки можно упростить, не снижая их точности. Ограничение на β вызвано условием суммируемости на бесконечности.

Теорема 4.2.3 *Рассмотрим потенциал вида (16). Тогда теорема 1 выполняется с оценкой*

$$|P(x,t)| \leqslant \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}\frac{\Gamma(\beta)4^{\beta-1}}{(t^2-x^2)^{\beta}}\cdot P_{\alpha-1}^{-\beta}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\left(\frac{t-x}{x}\right)\frac{\Gamma(\beta)4^{\beta-1}}{(t^2-x^2)^{\beta}}P_{\alpha-1}^{-\beta}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\right],$$

где $P_{\nu}^{\mu}(\cdot)$ — функция Лежандра, величина β определяется из (16), а величина α — из (2).

Предваряя доказательство отметим, что данная оценка получается после довольно длинных вычислений с использованием знаменитой теоремы Слейтер–Маричева [119], которая помогает вычислить в терминах гипергеометрических функций необходимые интегралы после их сведения к свертке Меллина.

Доказательство.

Для этого класса потенциалов мы упростим оценку (15), составляющую содержание теоремы 1, не снижая её точности. Для этого будет вычислена в явном виде величина I_q, входящая в оценку (15). Доказательство теоремы 3 разобъём на две леммы.

Лемма 4.2.4 *Для потенциала вида (16) справедливо соотношение*

$$I_q(\xi, \eta) = \frac{1}{4\xi^{2\beta}} \int\limits_0^1 P_\nu(2\alpha z + 1)(1 - z)^{\beta - 1}\, dz, \tag{17}$$

где P_ν — функция Лежандра, $\alpha = \eta^2/(\xi^2 - \eta^2)$.

Доказательство.

Рассмотрим величину

$$I_q(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int\limits_\xi^\infty P_\nu \left(\frac{t^2(\xi^2 + \eta^2) - 2\xi^2\eta^2}{t^2(\xi^2 - \eta^2)} \right) \frac{dt}{t^{2\beta+1}}.$$

Выполним замену переменных, обозначив аргумент функции Лежандра через x,

$$x = \frac{t^2(\xi^2 + \eta^2) - 2\xi^2\eta^2}{t^2(\xi^2 - \eta^2)},\ dx = \frac{4\xi^2\eta^2}{t^3(\xi^2 - \eta^2)} dt.$$

При такой замене новыми пределами интегрирования станут числа

$$1,\ 1 + \frac{2\eta^2}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} = B > 1,$$

а переменная t будет вычисляться по формуле

$$t = \xi\eta \left(\frac{2}{\xi^2 + \eta^2 - x(\xi^2 - \eta^2)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это приводит к следующему выражению для I_q:

$$I_q(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int\limits_1^B P_\nu(x) \frac{t^3(\xi^2 - \eta^2)}{4\xi^2\eta^2} \frac{dt}{t^{2\beta+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^B P_\nu(x)\left[\frac{\xi^2-\eta^2}{4\xi^2\eta^2}\right]\cdot\left[\frac{\xi^2+\eta^2-x(\xi^2-\eta^2)}{2\xi^2\eta^2}\right]^{\beta-1} dx.$$

В последнем интеграле выполним еще одну замену переменной по формуле

$$z=(x-1)\frac{\xi^2-\eta^2}{2\eta^2},\ \left(dz=\frac{\xi^2-\eta^2}{2\eta^2}\right) dx.$$

В результате получим

$$I_q(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{4\xi^2\eta^2}\right)\int\limits_0^1 P_\nu(2\alpha z+1)\frac{2\eta^2}{\xi^2-\eta^2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\xi^2+\eta^2-(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{2\eta^2}{\xi^2-\eta^2}z+1\right)}{2\xi^2\eta^2}\right]^{\beta-1} dz=\frac{1}{4\xi^{2\beta}}\int\limits_0^1 P_\nu(2\alpha z+1)(1-z)^{\beta-1}\,dz,$$

где введено обозначение $\alpha=\eta^2/(\xi^2-\eta^2)$. Мы получили формулу (17)

Лемма доказана.

Лемма 4.2.5 *Пусть выполнены условия $a>0,\ \beta>0$. Тогда справедлива формула:*

$$\int\limits_0^1 P_\nu(2\alpha x+1)(1-x)^{\beta-1}\,dx=\Gamma(\beta)\left[\frac{1+\alpha}{\alpha}\right]^{\frac{\beta}{2}} P_\nu^{-\beta}(2\alpha+1). \tag{18}$$

Доказательство.

При доказательстве мы будем использовать обозначения и технику, основанную на теореме Слейтер–Маричева [119].

Произведем в интеграле из (18) замену переменных $t=1/x$. Получим:

$$\int\limits_0^1 P_\nu(2\alpha x+1)(1-x)^{\beta-1}\,dx=\int\limits_1^\infty P_\nu\left(2\frac{\alpha}{t}+1\right)(t-1)^{\beta-1}t^{-\beta}\frac{dt}{t}=$$

$$= \int\limits_0^\infty P_\nu \left(2\frac{\alpha}{t}+1\right)(t-1)_+^{\beta-1} t^{-\beta}\frac{dt}{t} = I(\alpha),$$

где использовано обозначение для усеченной степенной функции x_+^λ. Применим к функции $I(\alpha)$ преобразование Меллина по переменной α ($\alpha > 0$). Используя теорему о свертке Меллина [19], получим:

$$M[I(\alpha)](s) = M[P_\nu(2x+1)](s)\cdot M[x^{-\beta}(x-1)_+^{\beta-1}](s).$$

Используя последовательно соотношения 6(1), (4), 2(4) из [119], приходим к выражению:

$$M[I(\alpha)](s) = -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\frac{\Gamma(s)\Gamma(-\nu-s)\Gamma(1+\nu-s)\Gamma(\beta)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(1+\beta-s)} =$$

$$= -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\,\Gamma(\beta)\,\Gamma\begin{bmatrix} s, & -\nu-s, & 1+\nu-s \\ & 1+\beta-s & \end{bmatrix},$$

где использовано обозначение Слейтер для гамма–функций. В обозначениях теоремы Слейтер–Маричева мы имеем:

$$(a)=(0),\ (b)=(-\nu,1+\nu),\ (c)=\varnothing,\ (d)=(1+\beta),$$

$$A=1,\ B=2,\ C=0,\ D=1.$$

Применяя теорему Слейтер–Маричева, получаем формулы для $I(\alpha)$ при $0<\alpha<1$:

$$I(\alpha) = -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1+\beta)}{}_2F_1(-\nu,1+\nu;1+\beta;-\alpha) =$$

$$= \Gamma(\beta)\alpha^{-\frac{\beta}{2}}(1+\alpha)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{-\beta}(1+2\alpha), \tag{19}$$

где использована формула (3) из ([10], с. 126) и тождество для гамма–функций (см. [10])

$$\Gamma(-\nu) = \frac{\pi}{\nu\,\Gamma(\nu)\sin\pi\nu}.$$

При $\alpha \geqslant 1$ получаем по виду другое выражение:

$$I(\alpha) = -\frac{\sin \pi\nu}{\pi}\Gamma(\beta)\cdot$$

$$\cdot\left\{\alpha^{\nu}\,\Gamma\begin{bmatrix}1+\nu+\nu, & -\nu\\ 1+\beta+\nu & \end{bmatrix}{}_2F_1(-\nu, 1-1-\beta-\nu; 1-1-\nu-\nu; -\frac{1}{\alpha})+\right.$$

$$\left.+\alpha^{-1-\nu}\Gamma\begin{bmatrix}-\nu-1-\nu, & 1+\nu\\ 1+\beta-1-\nu & \end{bmatrix}{}_2F_1(1+\nu, 1-1-\beta+1+\nu; 1+\nu; -\frac{1}{\alpha})\right\} =$$

$$= -\frac{\sin \pi\nu}{\pi}\Gamma(\beta)\cdot\left\{\alpha^{\nu}\frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1+\beta+\nu)}\,{}_2F_1(-\nu, -\beta-\nu; -2\nu; -\frac{1}{\alpha})+\right.$$

$$\left.+\alpha^{-1-\nu}\frac{\Gamma(-1-2\nu)\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\beta-\nu)}\,{}_2F_1(1+\nu, 1+\nu-\beta; 1+\nu; -\frac{1}{\alpha})\right\}.$$

Но из ([10], с. 131, формула (19)) следует, что выражения, полученные для $I(\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$ и при $\alpha \geqslant 1$, совпадают.

Из (19) следует, что нами получена искомая формула (18), однако ее вывод не является полностью строгим, так как мы не проверяли законность применения преобразования Меллина и условия справедливости теоремы Слейтер–Маричева (в нашем случае довольно сложные). Однако теперь мы можем применить преобразование Меллина к обеим частям полученного формального равенства (18). В результате доказываем, что при $\alpha > 0,\ \beta > 0$ соотношение (18) является тождеством.

Лемма доказана.

Как следствие, теперь получаем нужную оценку для теоремы 3.

Теорема доказана.

Простейшая подобная оценка была получена в работе [8] для потенциала $q(x) = cx^{-2}$, для которого $\beta = \frac{1}{2}$. Как следует из [20], в этом случае функция Лежандра $P_{\nu}^{-\frac{1}{2}}(z)$ может быть выражена через элементарные функции. Поэтому и соответствующая оценка может быть выражена через элементарные функции.

Другим потенциалом, для которого полученная оценка может быть ещё упрощена и выражена через элементарные функции, является потенциал вида $q(x) = x^{-(2\beta+1)}$, когда параметры связаны соотношением $\beta = \alpha - 1$.

Следствие 4.2.1 *Пусть выполнено соотношение между параметрами* $\beta = \alpha - 1$*. Тогда оценка из теоремы 3 принимает вид*

$$|P(x,t)| \leqslant \left(\frac{t}{x}\right)^{\beta+1} \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left[\frac{t^2+x^2}{2tx}\right]^{\beta} \cdot \exp\left[\left(\frac{t-x}{2}\right) \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left[\frac{t^2+x^2}{2tr}\right]^{\beta}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\beta} \frac{1}{x^{2\beta+1}} (t^2+x^2)^{\beta} \exp\left[\frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left(\frac{t-x}{2}\right) \left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)^{\beta}\right]. \tag{20}$$

Доказательство.

В этом случае преобразуем оценку из теоремы 3 так:

$$\frac{\Gamma(\beta) 4^{\beta-1}}{(t^2-x^2)^{\beta}} P_{\beta}^{-\beta}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right) = \frac{\Gamma(\beta) 4^{\beta-1}}{(t^2-x^2)^{\beta}} \frac{2^{-\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \left[\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)^2 - 1\right]^{\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \frac{1}{(t^2-x^2)^{\beta}} \frac{(t^2-x^2)^{\beta}(t^2+x^2)^{\beta}}{(2tx)^{\beta}} = \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left[\frac{t^2+x^2}{2tx}\right]^{\beta}, \tag{21}$$

где при преобразованиях использована формула (см. [10])

$$P_{\nu}^{-\nu}(z) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} (z^2-1)^{\frac{\nu}{2}}, \ z > 1.$$

Поэтому неравенство для ядра при $\beta = \alpha - 1$ принимает вид (20).

Следствие доказано.

Отметим, что при $\alpha = 0$ в формулах (1)–(2), теорема 1 сводится к известным оценкам для ядра интегрального представления решений Йоста для уравнения Штурма–Лиувилля.

Изложенная техника полностью переносится и на задачу о построении неклассических операторов обобщенного сдвига. Данная задача по существу эквивалентна выражению решений уравнения

$$B_{\alpha,x}u(x,y) - q(x)u(x,y) = B_{\beta,y}u(x,y) \tag{22}$$

через решения невозмущенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (в несингулярном случае — волнового) при наличии дополнительных условий, обеспечивающих корректность. Такие представления получаются уже из факта существования операторов преобразования и изучались для несингулярного случая ($\alpha = \beta = 0$) в [98]–[100] как следствия теории обобщенного сдвига. Интересная оригинальная методика для получения подобных представлений также в несингулярном случае разработана в работах А. В. Боровских [19]–[20]. Из результатов настоящей работы следуют интегральные представления некоторого подкласса решений уравнения (22) в общем сингулярном случае для достаточно произвольных потенциалов с особенностями в начале координат. При этом оценки для решений не содержат никаких неопределенных постоянных, а для ядер интегральных представлений в явном виде выписываются интегральные уравнения, которым они удовлетворяют.

Глава 5

Некоторые приложения метода операторов преобразования и родственные задачи

Следует отметить, что как в этой, так и в предыдущих главах широко используются многие специальные функции. Для их эффективного применения автором решён целый ряд задач, содержащих различные свойства и оценки специальных функций, соответствующие результаты опубликованы в работах .

В данной главе по необходимости кратко приведено решение ряда задач, которые связаны с рассмотренными ранее операторами преобразования и могут быть использованы для получения дальнейших результатов. В первом пункте проводится построение дробных степеней оператора Бесселя в явном интегральном виде, ранее эти степени вводились только неявно в образах преобразования Ханкеля. Для дробных степеней оператора Бесселя построена также их резольвента. Во втором пункте намечен принадлежащий автору метод уточнения классического неравенства Коши–Буняковского для дискретного и интегрального случаев на основе использования абстрактных средних значений. Полученный набор уточнений интегрального неравенства Коши–Буняковского предлагается использовать для оценки ядер операторов преобразования различных типов, а уточнения дискретного варианта этого неравенства — для оценки приближённых методов вычисления ядер операторов преобразования. В третьем заключительном пункте приводятся некоторые обобщения операторов Бушмана–Эрдейи, изученных во второй главе, со специальными функциями более общего вида в качестве ядер.

5.1 Явное построение дробных степеней оператора Бесселя с приложениями к решению интегро–дифференциальных уравнений дробного порядка

Методы дробного интегродифференцирования в настоящее время являются одним из наиболее плодотворных и активно развивающихся разделов современной математики, они широко применяются как в многочисленных задачах теории, так и в практических приложениях [165], [139]–[141], [293],[31],[285],[294]–[295].

В данном пункте построены в явном интегральном виде дробные степени дифференциального оператора Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x} D,\ \ Re\ \nu \geqslant 0$$

заданного на подходящих гладких функциях. Безусловно, по аналогии с обычными производными, можно определить такие дробные степени на полуоси при помощи естественного свойства, что они действуют как умножение на степень в образах преобразования Ханкеля. Такой подход оправдан за неимением лучшего и позволяет получить ряд интересных результатов, хотя на этом пути невозможно, по–видимому, получить явные представления дробных степеней. Но представим на минуту, что мы умеем определять обычные операторы дробного интегрирования Римана–Лиувилля только через их действие в образах преобразований

Лапласа или Меллина, а интегральные формулы для этих операторов нам неизвестны. Тогда сразу становится ясным, что подобная теория будет достаточно бедной и лишится большинства своих наиболее полезных и красивых результатов. Примерно в таком состоянии сейчас находится теория дробных степеней оператора Бесселя, поэтому их построение в явном интегральном виде является актуальной и интересной задачей.

Определение 5.1 *Пусть $f(x) \in C^{2k}(0,b]$. Определим правосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии $f^{(i)}(b) = 0, 0 \leqslant i \leqslant 2k-1, k \in N$ по формуле*

$$(B_{b-}^{\nu,k} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2k-1} {}_2F_1(k + \frac{\nu - 1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2}) \cdot$$
$$\cdot f(y)\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_x^b (y^2 - x^2)^{k - \frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right) \cdot \tag{5.1}$$
$$\cdot f(y)\, dy.$$

Определение 5.2 *Определим левосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии $f^{(i)}(a) = 0, 0 \leqslant i \leqslant 2k-1, k \in N$ по формуле*

$$(B_{a+}^{\nu,k} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_a^x \Big(\frac{x^2 - y^2}{2x} \Big)^{2k-1} {}_2F_1(k + \frac{\nu - 1}{2}, k; 2k; ; 1 - \frac{y^2}{x^2}) \cdot$$
$$\cdot f(y)\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_a^x (x^2 - y^2)^{\left(k - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right) \cdot \tag{5.2}$$
$$\cdot f(y)\, dy,$$

где ${}_2F_1$ - гипергеометрическая функция Гаусса, $P_\nu^\mu(z)$ - функция Лежандра.

Введённые операторы и являются интегральными реализациями отрицательных целых степеней оператора Бесселя $(B_\nu)^{-k}$. Их распространение на произвольные комплексные значения параметра k проводится аналогично классическому случаю [165]. При $\nu = 0$ оператор Бесселя сводится ко второй производной, а введённые операторы — к дробным интегралам Римана-Лиувилля

$$B_{b-}^{0,k} f = I_{b-}^{2k} f, \quad B_{a+}^{0,k} f = I_{a+}^{2k} f.$$

Определённые выше дробные степени оператора Бесселя (1)–(2) в явном виде как одна из разновидностей операторов дробного интегродифференцирования были определены автором в [131], и затем в [18]. При этом в качестве наводящих соображений были существенно использованы результаты работы [344], в которой рассматривалось решение в явном виде обыкновенных дифференциальных уравнений с целыми степенями операторов Бесселя, а также результаты [262] по теории гипербесселевых операторов. При этом автором было замечено, что выражение гипергеометрических функций Гаусса в формулах (1)–(2) через функции Лежандра существенно упрощает вычисления.

Многочисленные приложения операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля основаны на их вхождении в остаточный член формулы Тэйлора. Поэтому после определения дробных степеней оператора Бесселя сразу возникает задача о построении обобщённой формулы Тэйлора, в которой функция раскладывается по степеням оператора Бесселя. Эта задача возникла достаточно давно и имеет некоторую историю.

Впервые формулы разложения по степеням оператора Бесселя были получены Жаном Дельсартом (ряды Тэйлора–Дельсарта) [256],[99]—[101]. Общий способ их построения изложен в [188] в терминах операторно–аналитических функций. Но ряды Тэйлора–Дельсарта позволяют разложить по степеням оператора Бесселя не обычный, а обобщённый сдвиг. По существу такие разложения являются операторными вариантами рядов для функции Бесселя, так же как обычные ряды Тэйлора являются операторными версиями разложения в ряд экспоненты. Разумеется, ряды Тэйлора–Дельсарта имеют свою область приложений. Но для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных нужны обобщённые формулы и ряды Тэйлора несколько другой природы. При пересчёте решения со слоя на слой, например, методом сеток формулы для обобщённого сдвига совершенно бесполезны, а нужны именно формулы для обычного сдвига, выражающие решение на очередном рассчитываемом слое через его значения на предыдущих слоях. Оказалось, что строить такие формулы для обычного сдвига намного труднее, чем для обобщённого, так как они уже не являются прямыми аналогами известных тождеств для специальных функций.

Впервые с указанной мотивацией для применения к численному решению уравнений с оператором Бесселя методом конечных элементов формула Тэйлора нужного типа была рассмотрена в работе В.В. Катрахова [62]. Но полученный там результат может рассматриваться только как первое приближение для желаемых формул в явном виде, так как коэффициенты выражались неопределёнными постоянными, задаваемыми системой рекуррентных соотношений, а ядро остаточного члена представлялось некоторым многократным интегралом. Это не случайно, угадать одновременно явный вид ядер и остаточных членов невозможно, пока не известны конкретные выражения для остатка в виде дробных степеней оператора Бесселя.

Мы находимся в другой ситуации, когда нужные выражения для дробных степеней уже введены в явном виде (1)–(2), поэтому перейдём к описанию задачи о явном построении обобщённой формулы Тэйлора для разложения обычного сдвига в ряд по степеням оператора Бесселя. Подобная формула в простейшем случае была анонсирована ранее в [139].

Предложение 5.1.1 *Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора Бесселя при $x = b$ с остаточным членом в интеграль-*

ной форме

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\Big(\frac{b^2-x^2}{2b}\Big)^{2i-2}{}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i-1;2i-1;$$
$$1-\frac{x^2}{b^2})(B^{i-1}f)|_b-\frac{1}{\Gamma(2i)}\Big(\frac{b^2-x^2}{2b}\Big)^{2i-1}{}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i;2i;1-\frac{x^2}{b^2})\cdot \quad (5.3)$$
$$\cdot(DB^{i-1}f)|_b\Bigg\}+B_{b-}^{\nu,k}(B^kf),$$

где $B_{b-}^{\nu,k}$ *есть оператор левостороннего дробного интегрирования Бесселя (1),* ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Также справедлива двойственная формула, использующая формально сопряжённый к B_ν оператор

$$C_\nu f=D^2f-D(\frac{\nu}{y}f)=D^2-\frac{\nu}{y}Df+\frac{\nu}{y^2}.$$

Предложение 5.1.2 *Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора* C_ν *при* $x=a$ *с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\Big(\frac{x^2-a^2}{2x}\Big)^{2i-2}(\frac{a}{x})\ {}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i;2i-1;$$
$$1-\frac{a^2}{x^2})(C_\nu^{i-1}f)|_a+\frac{1}{\Gamma(2i)}\Big(\frac{x^2-a^2}{2x}\Big)^{2i-1}\cdot \quad (5.4)$$
$$\cdot\ {}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i;2i;1-\frac{a^2}{x^2})\ a^\nu\ (Dx^{-\nu}C_\nu^{i-1}f)|_a\Bigg\}+B_{a+}^{\nu,k}(C_\nu^kf),$$

где $B_{a+}^{\nu,k}$ *есть оператор правостороннего дробного интегрирования Бесселя (2),* ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Гипергеометрические функции в формулах Тэйлора могут быть выражены через функции Лежандра аналогично определениям (1)–(2). Из формул (3)–(4) сразу следуют модификации операторов дробного интегродифференцирования Бесселя (1)–(2) по Капуто [293]. Для этого нужно в определениях (1)–(2) вычесть из функций начальный отрезок их разложения по соответствующей обобщённой формуле Тэйлора.

Могут быть рассмотрены и более общие комбинированные дробные степени для пары операторов $(\frac{1}{x}D)^m(B_\nu)^k$. Это семейство операторов интересно тем, что содержит обычные операторы Римана –Лиувилля ($m = 0,\ \nu = 0$), дробное интегродифференцирование Бесселя (m=0), операторы Эрдейи–Кобера (k=0). В этом случае также доказаны соответствующие формулы Тэйлора.

Далее приведём выражение для резольвенты дробных степеней оператора Бесселя. Оно обобщает знаменитую формулу для дробных интегралов Римана–Лиувилля, написанную без доказательства Э.Хилле и Я.Д.Тамаркиным в работе 1930 года [288]. В этой работе указывалось, что формула для резольвенты может быть выведена методом преобразования Лапласа с использованием нового на тот момент понятия свёртки в духе работ Дёйтча, но этот способ похоже не был никогда реализован. Формула Тамаркина–Хилле была на самом деле впервые доказана в монографии М.М. Джрбашяна [49] обычным для теории интегральных уравнений методом последовательных приближений, хотя в монографии Мхитара Мкртитевича нет упоминания, что доказательство даётся им впервые, что характеризует этого замечательного математика. Поэтому, возможно, исторически правильным было бы называть формулу для резольвенты операторов дробного интегрирования Римана–Лиувилля формулой *Тамаркина–Хилле–Джрбашяна*. Кроме того, в [49] впервые были подробно изучены свойства функции Миттаг–Лефлёра, из этой книги отечественные математики узнали о существовании подобной функции.

Формула Тамаркина–Хилле–Джрбашяна является самым известным применением функций Миттаг–Лефлёра, а также основой огромного числа работ по приложениям дробного исчисления к дифференциальным уравнениям, итальянские математики R. Gorenflo и F. Mainardi предложили называть функцию Миттаг–Лефлёра королевской функцией теории дробного исчисления (Queen function of the fractional calculus) [285].

Предложение 5.1.3 *Для резольвенты оператора дробного интегрирования Бесселя (2) при $a = 0$, $0 \leqslant \nu < 1$ на подходящих функциях справедливо интегральное представление*

$$R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda} f - \frac{1}{\lambda}\int_0^x K(x,y) f(y)\, dy, \tag{5.5}$$

где ядро $K(x,y)$ выражается по формулам

$$K(x,y) = \frac{2y}{x^2 - y^2}\int_0^1 S_{\alpha,\nu}(z(t))\frac{dt}{(t\,(1-t))^{\frac{\nu+1}{2}}}, \tag{5.6}$$

$$z(t) = \left(\frac{t(1-t)\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(1-\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)t\right)4y^2}\right)^\alpha,$$

$$S_{\alpha,\nu}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \frac{\nu-1}{2})\Gamma(\alpha k - \frac{\nu-1}{2})}$$

—разновидность гипергеометрической функции Райта или Фокса ([300]–[302],[292]).

Подобные функции также встречались в работах А. В. Псху [157], это специальные случаи более общих функций Райта, G–функций Мейера и H–функций Фокса, которые первоначально вводились как обобщения функций Бесселя ([300]–[302],[292]). Интересной задачей является дальнейшее упрощение представления ядра (6), если оно возможно.

Полученная формула для резольвенты дробных степеней оператора Бесселя позволяет рассматривать задачи для обыкновенного интегро–дифференциального уравнения вида

$$B_\nu^\alpha u(x) - \lambda u(x) = f(x),$$

при различных краевых условиях. По аналогии с известными результатами возможно также рассмотрение уравнений в частных производных с дробными степенями оператора Бесселя и их модификациями по Капуто. К числу таких уравнений относится обобщение B–эллиптического по терминологии И.А.Киприянова [67] дробного уравнения Лапласа–Бесселя

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu_k}^{\alpha_k} u(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1, x_2, \dots x_n),$$

нестационарное уравнение вида

$$B_{\nu,t}^{\alpha} u(x,t) = \Delta_x u(x,t) + f(x,t).$$

Отметим, что рассмотрение спектральных свойств подобных уравнений нуждается в изучении асимптотики функции $K(x,y)$ из формулы (6) в комплексной плоскости, а также распределения её корней.

5.2 Приложения обобщений неравенств Коши–Буняковского и неравенств для специальных функций к оценкам ядер интегральных операторов преобразования, сплетающих решения дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах

Известно много обобщений и уточнений неравенства Коши–Буняковского, см., например, [203],[327]. В работах автора был развит метод средних значений для построения некоторых классов таких уточнений. Кратко говоря, суть этого метода заключается в том, что по каждому абстрактному среднему, удовлетворяющему набору естественных аксиом, выписываются в явном виде уточнения дискретного или интегрального неравенств Коши–Буняковского. Указанная методика возникла из анализа одного неравенства Милна [203] и теоремы Карлица–Дэйкина–Элиезера (CDE theorem) для дискретного случая. Изложим кратко основные результаты этого метода и его применения к оценкам интегральных операторов преобразования.

Определение 1. Пусть даны два числа $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Назовём функцию $M(x, y)$ *средним* этих чисел, если для неё выполнены следующие свойства (аксиомы).

1. Свойство промежуточности:

$$min(x, y) \leqslant M(x, y) \leqslant max(x, y).$$

2. Свойство несмещённости:

$$M(x, x) = x.$$

3. Свойство однородности:

$$M(ax, ay) = a \cdot M(x, y).$$

4. Свойство монотонности: если $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$, то

$$M(x_1, y) \leqslant M(x_2, y), \quad M(x, y_1) \leqslant M(x, y_2).$$

Аксиоматическое определение средних используется во многих работах, начиная с Коши. Отметим, что свойства симметричности среднего для наших результатов не требуется, допускаются несимметричные средние.

Среди множества средних наиболее известными являются средние арифметическое, геометрическое, квадратичное, полуквадратичное, гармоническое:

$$A(x, y) = \frac{x + y}{2}, G(x, y) = \sqrt{x, y}, Q(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}},$$

$$S(x, y) = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)^2, H(x, y) = A(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) = \frac{2xy}{x + y}, \ x, y > 0.$$

Нам понадобится понятие дополнительного среднего.

Определение 2. Для среднего $M(x,y)$ *дополнительное* к нему среднее определяется по формуле

$$M^*(x,y) = \frac{xy}{M(x,y)};\ x,y>0. \tag{5.7}$$

Первым из наиболее известных классов средних, зависящих от параметра, являются степенные средние

$$M(x,y) = M_\alpha(x,y) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, -\infty \leqslant \alpha \leqslant \infty\ , \alpha \neq 0\ ; \tag{5.8}$$

$$M_{-\infty}(x,y) = \min(x,y)\ ,\ M_0 = \sqrt{xy}\ ,\ M_\infty(x,y) = \max(x,y)\ .$$

Они образуют параметрическую шкалу

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow M_{\alpha_1}(x,y) \geqslant M_{\alpha_2}(x,y)\ ,\ \forall\ x,y\ .$$

Три исключительных значения $\{\alpha = -\infty, 0, +\infty\}$ получаются из неисключительных при помощи предельных переходов.

Классические средние выражаются через степенные, при этом справедливы известные неравенства

$$M_{-1}(x,y) = H(x,y) \leqslant M_0(x,y) = G(x,y) \leqslant M_{\frac{1}{2}}(x,y) = S(x,y) \leqslant$$

$$\leqslant M_1(x,y) = A(x,y) \leqslant M_2(x,y) = Q(x,y).$$

Для степенных средних от положительных чисел дополнительное среднее находится по формуле

$$(M_\alpha)^* = M_{-\alpha}.$$

Вторым известным классом параметрических средних являются средние Радо

$$R_\beta(x,y) = \left(\frac{x^{\beta+1} - y^{\beta+1}}{(\beta+1)(x-y)}\right)^{\frac{1}{\beta}}, -\infty \leqslant \beta \leqslant \infty,\ \beta \neq 0, -1; \tag{5.9}$$

$$R_{-\infty}(x,y) = \min(x,y), R_\infty(x,y) = \max(x,y).$$

Очевидно

$$R_{-2}(x, y) = M_0(x, y), R_1(x, y) = M_1(x, y).$$

Исключительные значения приводят к логарифмическому среднему

$$R_{-1}(x, y) = L(x, y) = \frac{y - x}{\ln y - \ln x} \tag{5.10}$$

и идентрическому среднему (автор предпочитает термин "многоэтажно–показательное")

$$R_0(x, y) = \frac{1}{e}\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}. \tag{5.11}$$

Средние Радо также образуют параметрическую шкалу

$$\beta_1 > \beta_2 \Rightarrow R_{\beta_1}(x, y) \geqslant R_{\beta_2}(x, y),\ \forall x, y;$$

с четырьмя исключительными значениями $\beta = \{-\infty, -1, 0, +\infty\}$. Дополнительным средним в этом случае является

$$R^*_\beta(x, y) = \frac{1}{R_\beta(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})}.$$

Перед формулировкой дальнейших результатов примем соглашение о том, что все далее встречающиеся функции являются непрерывными, а интегралы понимаются в смысле Римана и существуют, эти условия в формулировках будем опускать, они предполагаются выполненными. В конце работы указано, от каких ограничений можно избавиться. Мы также не будем исследовать важный вопрос, когда в рассматриваемых неравенствах достигается равенство, за исключением основного результата работы.

Одним из основных результатов теории, развитой автором, является следующее уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского.

Теорема 1. Пусть M - произвольное абстрактное среднее, удовлетворяющее перечисленным выше в определении 1 аксиомам 1–4, M^* - дополнительное к нему среднее. Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши–Буняковского вида

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b (M(f,g))^2\,dx \cdot \int_a^b (M^*(f,g))^2\,dx \leqslant \tag{5.12}$$
$$\leqslant \int_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\,dx,$$

Таким образом, мы получаем переформулированный согласно работам автора в терминах средних результат, что справедлив интегральный аналог *достаточной* части теоремы CDE Карлица–Дэйкина–Элиезера для дискретного случая. Также доказан неожиданный результат, что в интегральном случае аналог *необходимой* части этой известной теоремы не выполняется.

Сделаем важное для дальнейшего замечание, что левое неравенство из (5.12) в силу определения дополнительного среднего (5.7) очевидно, так как оно само сводится к обычному неравенству Коши–Буняковского. Таким образом, содержательным в теореме 1 является правое неравенство между произведениями интегралов.

Теперь выбор любых различных средних и дополнительных к ним при помощи теоремы 1 порождает разнообразные обобщения вида (5.12) интегрального неравенства Коши–Буняковского. Например, при выборе степенных средних получается

Теорема 2. Для неотрицательных непрерывных функций $f(x)$, $g(x)$, не обращающихся в ноль на $[a,b]$, справедливо следующее обобщение неравенства Коши–Буняковского:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [M_\alpha(f,g)]^2 dx \cdot \int_a^b [M_{-\alpha}(f,g)]^2 dx = \tag{5.13}$$
$$= \int_a^b (f^\alpha + g^\alpha)^{2/\alpha} dx \cdot \int_a^b f^2 g^2 (f^\alpha + g^\alpha)^{-2/\alpha} dx \leqslant \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx.$$

Выпишем наиболее эффектные из приведённых неравенств с частными случаями степенных средних явно. Они соответствуют выбору среднего полуквадратичного, арифметического и квадратичного:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^4 dx \cdot$$
$$\cdot \int_a^b f^2g^2/\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^4 dx \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx,$$
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx \cdot$$
$$\cdot \int_a^b f^2g^2/(f(x)+g(x))^2\,dx \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx,$$
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(f^2(x)+g^2(x)\right)\,dx \cdot$$
$$\cdot \int_a^b f^2g^2/\left(f^2(x)+g^2(x)\right),dx \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

При $\alpha = 2$ получаем интегральный вариант известного неравенства Милна.

При выборе средних Радо получается

Теорема 3. Справедливо следующее уточнение неравенства Коши-Буняковского:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [R_\beta(f,g)]^2\,dx \cdot \int_a^b \left[\frac{1}{R_\beta\left(\frac{1}{f},\frac{1}{g}\right)}\right]^2 dx \leqslant \tag{5.14}$$
$$\leqslant \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

Выпишем наиболее эффектные из неравенств теоремы 3 с частными случаями средних Радо явно. Они включают выбор среднего логарифмического и многоэтажно–показательного.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(\frac{f-g}{\ln\frac{f}{g}}\right)^2 dx \cdot \int_a^b f^2g^2/\left(\frac{f-g}{\ln\frac{f}{g}}\right)^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx,$$
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left[\frac{f^f}{g^g}\right]^{\frac{2}{f-g}} dx \cdot \int_a^b f^2g^2/\left(\frac{f^f}{g^g}\right)^{\frac{2}{f-g}} dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx,$$
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(f^2+fg+g^2\right) dx \cdot \int_a^b \frac{f^2g^2}{f^2+fg+g^2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

При выборе арифметико–геометрического среднего Гаусса получаем

Следствие. Справедливо следующее уточнение неравенства Коши - Буняковского:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left[\frac{\max(f,g)}{K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)}\right]^2 dx\,\cdot$$
$$\cdot \int_a^b (\min(f,g))^2\left(K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)\right)^2 dx \leqslant \int_a^b f^2\,dx \int_a^b g^2\,dx,$$

где $K(x)$ есть полный эллиптический интеграл Лежандра 1 рода, см. [328].

Отметим совершенно экзотический характер последнего неравенства: это неравенство между *произвольными* функциями, но которые стоят под знаком *конкретной специальной* функции — эллиптического интеграла Лежандра! Вместе с тем неравенства, в которых произвольные функции стоят под знаками *элементарных* функций, например, экспоненты или логарифма, широко используются в математике. Так, подобный вид имеют неравенства Джона–Ниренберга в теории пространств

BMO и неравенства Зигмунда в гармоническом анализе. Подобные неравенства описывают как правило предельно точные свойства некоторых объектов, таких, как предельные допустимые пространства в теоремах вложения или теоремах существования и единственности для дифференциальных уравнений, а также при исследовании различных видов сходимости тригонометрических рядов.

Для оценок интегральных ОП мы получаем следующий результат.

Теорема 5.2.1 *Пусть дан некоторый ОП в интегральном виде*

$$Tf = \int_a^b K(x,t)f(t)dt \tag{5.15}$$

. Тогда справедливо уточнение для его нормы в $L_2(a,b)$

$$\|Tf\|^2 \leqslant \int_a^b M^2(K,f)dt \int_a^b (M^*)^2(K,f) \tag{5.16}$$

dt, где M *— произвольное абстрактное среднее,* M^* *— сопряжённое к нему.*

Теперь можно выписать многочисленные частные случаи с использованием различных средних. Подобные результаты позволяют применять уточнения классических неравенств для оценок норм операторов преобразования.

5.3 Обобщения операторов Бушмана–Эрдейи

Рассмотрим оператор ${}_1S^{\nu}_{0+}$. Он имеет вид

$${}_1S^{\nu}_{0+} = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x K\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy, \tag{5.17}$$

где ядро K выражается по формуле $K(z) = P_\nu(z)$. Простейшие свойства специальных функций позволяют показать, что ${}_1S^{\nu}_{0+}$ можно рассматривать как частный случай оператора вида (5.17) с функцией Гегенбауэра в ядре

$$K(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(2\beta)}{2^{p-\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+2\beta)\ \Gamma(\beta+\frac{1}{2})}(z^{\alpha}-1)^{\beta-\frac{1}{2}}C_{\alpha}^{\beta}(z) \tag{5.18}$$

при значениях параметров $\alpha = \nu,\ \beta = \frac{1}{2}$ или с функцией Якоби в ядре

$$K(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{\rho}\Gamma(\alpha+\rho+1)}(z-1)^{\rho}(z+1)^{\sigma}P_{\alpha}^{(\rho,\sigma)}(z) \tag{5.19}$$

при значениях параметров $\alpha = \nu,\ \rho = \sigma = 0$. Более общим являются операторы с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1$ или с G — функцией Майера в ядрах. Перейдём к их определению.

Операторы с функцией Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ изучались в большом числе работ, см. [165]. Для исследования таких операторов оказываются полезными различные неравенства для гипергеометрических функций.

Введём ещё один класс подобных операторов, обобщающих операторы Бушмана–Эрдейи (2.1)–(2.4).

Определим операторы Гаусса–Бушмана–Эрдейи по следующим формулам:

$${}_1F_{0+}(a,b,c)[f] = \frac{1}{2^{c-1}\Gamma(c)}. \tag{5.20}$$

$$\int\limits_0^x \left(\frac{x}{y}-1\right)^{c-1}\left(\frac{x}{y}+1\right)^{a+b-c} {}_2F_1\left({}^{a,b}_{c}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x}{y}\right) f(y)\, dy,$$

$${}_2F_{0+}(a,b,c)[f] = \frac{1}{2^{c-1}\Gamma(c)}. \tag{5.21}$$

$$\int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}-1\right)^{c-1}\left(\frac{y}{x}+1\right)^{a+b-c} {}_2F_1\left({}^{a,b}_{c}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy,$$

$${}_1F_{-}(a,b,c)[f] = \frac{1}{2^{c-1}\Gamma(c)}. \tag{5.22}$$

$$\int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}-1\right)^{c-1}\left(\frac{y}{x}+1\right)^{a+b-c} {}_2F_1\left({}^{a,b}_{c}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy,$$

$${}_2F_{-}(a,b,c)[f] = \frac{1}{2^{c-1}\Gamma(c)}. \tag{5.23}$$

$$\int_0^x \left(\frac{x}{y}-1\right)^{c-1}\left(\frac{x}{y}+1\right)^{a+b-c} {}_2F_1\left({}^{a,b}_{c}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy,$$

$$ {}_3F_{0+}[f]=\tfrac{d}{dx}{}_1F_{0+}[f], \quad {}_4F_{0+}[f]={}_2F_{0+}\frac{d}{dx}[f], \tag{5.24}$$

$$ {}_3F_{-}[f]={}_1F_{-}(-\tfrac{d}{dx})[f], \;\; {}_4F_{-}[f]=(-\frac{d}{dx}){}_2F_{-}[f]. \tag{5.25}$$

Операторы (5.20)–(5.23) обобщают операторы Бушмана–Эрдейи (2.1)–(2.4) соответственно. Они сводятся к последним при выборе параметров $a=-(\nu+\mu),\ b=1+\nu-\mu,\ c=1-\mu$. На операторы (5.20)–(5.23) с соответствующими изменениями переносятся все полученные выше результаты. В частности они факторизуются через более простые операторы (5.24)–(5.25) при специальном выборе параметров.

Операторы (5.24)–(5.25) обобщают операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости (2.10)–(2.13). Для них справедлива

Теорема 5.3.1 *Операторы* (5.24)–(5.25) *могут быть расширены до изометричных в* $L_2(0,\infty)$ *тогда и только тогда, когда они совпадают с операторами Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости I рода* (2.10)–(2.13) *соответственно при целых значениях параметра* $\nu=\frac{1}{2}(b-a-1)$.

Эта теорема выделяет операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости среди их возможных обобщений по крайней мере вида (5.20)–(5.25). Сами операторы (5.20)–(5.23) интересны как новый класс преобразований, обобщающих операторы дробного интегродифференцирования. Аналогичные обобщения можно проделать и для других операторов.

Более общими являются операторы с G–функцией Майера в ядре. Например, один из таких операторов имеет вид

$$ {}_1G_{0+}(\alpha,\beta,\delta,\gamma)[f]=\frac{2^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\cdot \tag{5.26}$$

$$\int_0^x (\frac{x}{y}-1)^{-\delta}(\frac{x}{y}+1)^{1+\delta-\alpha-\beta} G^{1\ 2}_{2\ 2}\left(\frac{x}{2y}-\frac{1}{2}|^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\right) f(y)\,dy.$$

Остальные получаются при изменении промежутка интегрирования и значений аргумента G – функции. При значениях параметров $\alpha = 1 - a,\ \beta = 1 - b, \delta = 1 - c, \gamma = 0$ (5.26) сводится к (5.20), а при значениях $\alpha = 1 + \nu,\ \beta = -\nu, \delta = \gamma = 0$ (5.26) сводится к оператору Бушмана–Эрдейи I рода нулевого порядка гладкости ${}_1S^{\nu}_{0+}$.

Дальнейшие обобщения возможны в терминах функций Райта или Фокса (см. введение). На этом пути после операторов преобразования Бушмана–Эрдейи и Гаусса–Бушмана–Эрдейи вводятся операторы преобразования Майера–Бушмана–Эрдейи, Райта–Бушмана–Эрдейи и Фокса–Бушмана–Эрдейи различных родов. Отметим, что вводимые конструкции связаны с операторами преобразования для гипербесселевых дифференциальных операторов типа Сонина–Димовски и Пуассона–Димовски [262], [263]–[264], а также обобщёнными интегродифференциальными операторами дробного порядка, которые были введены В. Киряковой [297]–[298].

Литература

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

1. Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // ДАН СССР. — 1984. — Т. 278. — № 4. — С. 797–799.

2. Ситник С.М. Об одной паре операторов преобразования / С.М. Ситник // Сб. науч. тр. : Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. — 1987. — С. 168–173.

3. Ситник С.М. О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений / С.М. Ситник // Дифф. уравн. — 1988. — Т. 24. — № 3. — С. 538–539.

4. Ситник С.М. Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя / С.М. Ситник // Сб. науч. тр. : Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. — 1989. — С. 179–185.

5. Ситник С.М. Метод факторизации в теории операторов преобразования / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // Мемориальный сборник

памяти Бориса Алексеевича Бубнова: неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. — 1990. — С. 104–122.

6. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи / С.М. Ситник // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320. — № 6. — С. 1326–1330.

7. Ситник С.М. Композиционный метод построения B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических операторов преобразования / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // Доклады РАН. — 1994. — Т. 337. — № 3. — С. 307–311.

8. Ситник С.М. Оценки решений Йоста для одномерного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // Доклады РАН. — 1995. — Т. 340. — № 1. — С. 18–20.

9. Ситник С.М. Неравенства для функций Бесселя / С.М. Ситник // Доклады РАН. — 1995. — Т. 340. — № 1. — С. 29–32.

10. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского / С.М. Ситник // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки" . — Вып. 9. — Самара : — 2000. — С. 37–45.

11. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского / С.М. Ситник // Вестник Самарской государственной экономической академии. — Самара : — 2002. — № 1(8). — С. 302–313.

12. Sitnik S.M. for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity / S.M. Sitnik, D. Karp // Journal of Computational and Applied Mathematics. — Amsterdam : Elsevier. — 2007. — № 205. — P. 186-–206.

13. Sitnik S.M. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions / S.M. Sitnik, D. Karp, A. Savenkova // Journal of Computational and Applied Mathematics. Proceedings of The Conference in Honour of Dr. Nico Temme on the Occasion of his 65th birthday. — Amsterdam : Elsevier. — 2007. — V. 207, Issue 2. — P. 331–337.

14. Ситник С.М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений / С.М. Ситник // Вестник Самарского Государственного Университета — Естественнонаучная серия. — № 8/1 (67). — Самара : СамГУ, 2008. — С. 237–248.

15. Sitnik S.M. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function / S.M. Sitnik, D. Karp // Journal of Computational and Applied Mathematics. — Amsterdam : Elsevier. — 2009. — V. 161. — P. 337—352.

16. Sitnik S.M. Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions / S.M. Sitnik, D. Karp // Journal of Computational and Applied Mathematics. — Amsterdam : Elsevier. — 2010. — V. 364. — P. 384–394.

17. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина-Пуассона / С.М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. — Вып. 18. Белгород : НИУ «БелГУ» Издательский дом «Белгород», — 2010. — № 5 (76). — С. 135–153.

18. Ситник С.М. О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям / С.М. Ситник // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2010. — Т. 12. — № 2. — С. 69–75.

19. Ситник С.М. О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах / С.М. Ситник // Владикавказский математический журнал. — Вып. 4. — 2010. — Т. 12. — С. 73–78.

20. Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions / S.M. Sitnik, M.V. Zhuravlev, E.A. Kiselev, L.A. Minin // Journal of Mathematical Sciences. Springer. — 2011. — V. 173. — № 2. — P. 231–241.

21. Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов / С. М. Ситник, Е. А. Киселев, Л.А. Минин, И. Я. Новиков // Математические заметки. — Вып. 2. — 2014. — Т. 96. — С. 239–250.

22. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения / С. М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. — Вып. 39. Белгород : НИУ «БелГУ» Издательский дом «Белгород», — 2015. — № 11(208). — С. 60–76.

23. Sitnik S.M. On Gasparyan's Inequality / S.M. Sitnik, A.B. Pevnyi // Journal Of Mathematical Sciences. Springer. — 2015. — V. 205. — № 2. — P. 304–307.

24. Ситник С.М. Монотонность отношений некоторых гипергеометрических функций / С.М. Ситник, Х. Мехрез. // Сибирские Электронные Математические Известия. — 2016. — Т. 13. — С. 260—268.

25. Ситник С.М. Модифицированное дискретное преобразование Фурье, основанное на перестановках группы комплексных корней из единицы / С.М. Ситник, Е.В. Рыжкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — Вып. 2. — 2016. — Т. 21. — С. 406–414.

26. Sitnik S.M. On monotonicity of ratios of some q-hypergeometric functions / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Matematicki Vesnik. — 2016. — V. 68. — № 3. — P. 225–231.

27. Ситник С.М. Композиционный метод построения операторов преобразования для дифференциальных уравнений / С.М. Ситник, Е.В. Рыжкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — Вып. 1. — 2016. — Т. 21. — С. 95–108.

Прочие публикации

28. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications / S.M. Sitnik // In the book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: Amade 2012. (Edited by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin). — Cambridge : Cambridge Scientific Publishers, Cottenham. — 2013. — P. 171–201.

29. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications / S.M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1304.2114v1 [Электронный ресурс]. — 2013. — 67 p.

30. Ситник С.М. Тета–функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса / С.М. Ситник, М.В. Журавлёв, Е.А. Киселёв, Л.А. Минин // Современная математика и её приложения. Уравнения в частных производных. — Тбилиси : — 2010. — Т. 67. — С. 107–116.

31. Sitnik S.M. Inequalities of Turan type for Mittag-Leffler functions / Kh. Mehrez, S.M. Sitnik // RGMIA Research Report Collection. — 2016. № 19, Article 55. — 8 p.

32. Ситник С.М. Средние Джини / А.Б. Певный, С.М. Ситник // Математическое просвещение: сер. 3, вып. 20. — 2016. — С. 139–146.

33. Ситник С.М. Неравенства для строго положительно определённых функций / А.Б. Певный, С.М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. — Вып. 40. Белгород : НИУ «БелГУ» Издательский дом «Белгород», — 2015. — № 17(214). — С. 106–114.

34. Sitnik S.M. Classification, norm inequalities and applications for Buschman–Erdelyi transmutations / S.M. Sitnik // RGMIA Research Report Collection. — 2015. № 18, Article 124. — 32 p.

35. Ситник С.М. Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина / А.Б. Певный, С.М. Ситник // "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". Материалы восемнадцатого научно-практического семинара. — М. : Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2015. — С. 247–254.

36. Sitnik S.M. On Monotonicity of Ratios of q-Kummer Confluent Hypergeometric and q-Hypergeometric Functions and Associated Turan Types Inequalities / Kh. Mehrez, S.M. Sitnik // RGMIA Research Report Collection. — 2014. № 17, Article 150. — 9 p.

37. Sitnik S.M. Inequalities for Sections of Exponential Function Series and Proofs of Some Conjectures on Monotonicity of Ratios of Kummer, Gauss and Generalized Hypergeometric Functions / Kh. Mehrez, S.M. Sitnik // RGMIA Research Report Collection. — 2014. № 17, Article 132. — 8 p.

38. Sitnik S.M. Conjectures on Monotonicity of Ratios of Kummer and Gauss Hypergeometric Functions / S. M. Sitnik // RGMIA Research Report Collection. — 2014. № 17, Article 107. — 4 p.

39. Sitnik S.M. Proofs of some conjectures on monotonicity of ratios of Kummer, Gauss and generalized hypergeometric functions / Kh. Mehrez,

S.M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1410.6120v2 [Электронный ресурс]. — 2014. — 8 p.

40. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey / S.M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1012.3864 [Электронный ресурс]. — 2010. — 51 p.

41. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey / S.M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1012.3741 [Электронный ресурс]. — 2010. — 141 p.

42. Ситник С.М. Краевые задачи для уравнений с особенностями в работах В.В.Катрахова / С.М. Ситник // Мат. Межд. науч. конф.: "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных". — Москва : Издательство МГУ. — 2016. — С. 72.

43. Ситник С.М. Оператор преобразования специального вида для дифференциального оператора с сингулярным в нуле потенциалом / С.М. Ситник // Сб. науч. раб. : Неклассические уравнения математической физики. (Сборник посвящён 65–летию со дня рождения профессора Владимира Николаевича Врагова). Ответственный редактор: д.ф.-м.н., профессор А.И.Кожанов. — Новосибирск : Издательство института математики им. С.Л.Соболева СО РАН. — 2010. — С. 264–278.

44. Ситник С.М. Ограниченность операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Труды 5-ой межд. конф. "Analytical Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE)" (Аналитические методы Анализа и дифференциальных уравнений). — Т. 1: математический Анализ. — Минск : Национальная Академия наук Белоруси, институт математики. — 2010. — С. 120–125.

45. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств / С.М. Ситник // В. кн.: Итоги науки. Южный федеральный округ.

Серия "Математический форум". — Т. 3. Исследования по математическому анализу. Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. — Владикавказ : Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО Алания. — 2009. — С. 221–266.

46. Ситник С.М. Операторы преобразования и их приложения / С.М. Ситник // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Отв. ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г. — Владикавказ : Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. — 2008. — С. 226–293.

47. Ситник С.М. Леонард Эйлер и теория специальных функций / С.М. Ситник // Мат. Межд. науч. конф. "Леонард Эйлер и современная наука" Санкт-Петербург, 15–18 мая 2007. Под ред. вице–президента РАН, Нобелевского лауреата, академика Ж.И. Алфёрова. Санкт-Петербург : СПГУ. — 2007. — С. 192–200.

48. Ситник С.М. Компьютерный анализ спектральных свойств модифицированных дискретных преобразований Фурье / С.М. Ситник // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2007. — Т. 9. — № 1. — С. 98–103.

49. Sitnik S.M. Two-sided inequalities for generalized hypergeometric function / S.M. Sitnik, D. Karp // RGMIA Research Report Collection. — 2007. № 10(2), Article 7. — 14 p.

50. Ситник С.М. Модифицированные дискретные преобразования Фурье / С.М. Ситник // Вестник Воронежского Института МВД России. — Воронеж : ВИ МВД. — 2006. — № 1(26). — С. 108–113.

51. Ситник С.М. Неравенства для функций гипергеометрического типа / С.М. Ситник // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна. Тезисы докладов. — Воронеж : ВГУ. — 2010. — С. 138–140.

52. Ситник С.М. Описание профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями первого или второго рода — на одном конце и третьего рода или присоединённой массы — на другом / С.М. Ситник, Ф.О. Найдюк, В.Л. Прядиев // Чернозёмный альманах научных исследований. Сер. : Фундаментальная математика. Специальный выпуск: Избранные труды участников Воронежского математического семинара по математическому анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям. — Воронеж. — 2005. — № 1(1). — С. 53–68.

53. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения / С.М. Ситник // Чернозёмный альманах научных исследований. Сер. : Фундаментальная математика. Специальный выпуск: Избранные труды участников Воронежского математического семинара по математическому анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям. — Воронеж. — 2005. — № 1(1). — С. 3–42.

54. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского в математическом анализе / С.М. Ситник, Е.В. Дикарева, С.А. Телкова // Вестник Воронежского Института МВД России. — Воронеж : ВИ МВД. — 2005. — № 5(24). — С. 65–69.

55. Ситник С.М. Средние значения и уточнения неравенств / С.М. Ситник, Е.В. Дикарева, С.А. Телкова // Вестник Воронежского Института МВД России. — Воронеж : ВИ МВД. — 2005. — № 5(24). — С. 57–62.

56. Ситник С.М. Формулы для разложения некоторых дробей на простейшие и их применения к специальным функциям / С.М. Ситник, Д.Б. Карп, Е.В. Костюченко // Вестник Дальневосточной государственной академии экономики и управления. — Владивосток : —

2004. — № 4(32). — С. 82–93.

57. Sitnik S.M. Series expansions and asymptotics for incomplete elliptic integrals via partial fraction decompositions / S.M. Sitnik, D. Karp, A. Savenkova // Proceedings of the fifth annual conference of the Society for special functions and their applications (SSFA). (Editor A.K. Agarval). Zbl 1079.33016. — India : Lucknow. — 2004. — P. 4–30.

58. Sitnik S.M. The Vekua–Erdelyi–Lowndes transmutations / S.M. Sitnik, G.V. Lyakhovetskii // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1994. — 13 с.

59. Ситник С.М. Операторы преобразования Векуа–Эрдейи–Лаундеса / С.М. Ситник, Г.В. Ляховецкий // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1994. — 23 с.

60. Ситник С.М. Дробное преобразование Ханкеля и его приложения в математической физике / С.М. Ситник, Д.Б. Карп // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1994. — 24 с.

61. Ситник С.М. Неравенства для полных эллиптических интегралов Лежандра / С.М. Ситник // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1994. — 17 с.

62. Ситник С.М. Формулы композиций для интегральных преобразований с функциями Бесселя в ядрах / С.М. Ситник, Д.Б. Карп // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1993. — 21 с.

63. Ситник С.М. Оператор преобразования и представление Йоста для уравнения с сингулярным потенциалом / С.М. Ситник // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1993. — 21 с.

64. Ситник С.М. Аппроксимации Паде и специальные функции / С.М. Ситник, Л.А. Минин // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1991. — 22 с.

65. Ситник С.М. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи / С.М. Ситник, Г.В. Ляховецкий // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1991. — 11 с.

66. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости / С.М. Ситник // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1990. — 44 с.

67. Ситник С.М. Об одной паре операторов преобразования / С.М. Ситник, С.А. Фадеев // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.07.1988, N 5629-В88. — Воронеж : Воронежский политехнический институт. — 1988. — 44 с.

68. Ситник С.М. Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя / С.М. Ситник // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 23.01.1987, N 535-В87 — Воронеж : Воронежский университет. — 1986. — 28 с.

69. Ситник С.М. О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений / С.М. Ситник // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.11.1986, N 7771-В86. — Воронеж : Воронежский университет. — 1986. — 19 с.

70. Ситник С.М. Об унитарных операторах преобразования / С.М. Ситник // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.11.1986, N 7771-В86. — Воронеж : Воронежский университет. — 1986. — 9 с.

71. Ситник С.М. Метод операторов преобразования для стационарного уравнения Шрёдингера / С.М. Ситник // Автореферат кандидатской диссертации. — Воронеж : Воронежский государственный университет. — 1987. — 16 с.

72. Ситник С.М. Об одной паре операторов преобразования / С.М. Ситник // Сборник научных трудов: краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). — Новосибирск : — 1987. — С. 168–173.

73. Ситник С.М. О скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера с потенциалом, зависящим от одной переменной / С.М. Ситник // Сборник научных трудов: краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). — Новосибирск : — 1985. — С. 139–147.

74. Ситник С.М. Краевая задача с интегральными граничными условиями для одного класса уравнений с сильным вырождением / С.М. Ситник // В сборнике: Материалы XXI Всесоюзной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. — Новосибирск : — 1983. — С. 55–58.

75. Ситник С.М. Об одном классе операторов преобразования / С.М. Ситник // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. Воронеж : Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова. — 2015. — Т. 3. — № 9–3(20–3). — С. 376–378.

76. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. Воронеж : Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова. — 2015. — Т. 3. — Ч. 2(16–2). — № 5. — С. 41–44.

77. Ситник С.М. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Тезисы докладов 8-го международного научного семинара AMADE (Analytic Methods of Analysis and Differential Equations), 14-19 сентября 2015 г. — Минск : Институт математики НАН Беларуси. — 2015. — С. 75.

78. Ситник С.М. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Тезисы докладов XII Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.). — Владикавказ : Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания (ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А). — 2015. — С. 45–46.

79. Ситник С.М. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Тезисы докладов Российской научной конференции. "Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования". Владикавказ. Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания; Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова. — Владикавказ : Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания. — 2015. — С. 94–95.

80. Ситник С.М. О различных типах эллиптичности одного класса дифференциальных операторов / С.М. Ситник // Третий международный Российско–Казахский симпозиум "Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики". КБР. Терскол. — Нальчик : Институт прикладной математики и автоматизации. КБР. — 2014. — С. 189–191.

81. Sitnik S.M. Buschman–Erdelyi transmutations: classification, analytical properties and applications to differential equations and integral transforms / S.M. Sitnik // International Conference "Mathematics Days in Sofia" . 7th Minisymposium Transform Methods and Special Functions '14 (TMSF–14) in frames of MDS-2014. — Bulgaria, Sofia: Институт по математика и информатика, Българската академия на науките. — 2014. — P. 20–21.

82. Ситник С.М. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Крымская международная математическая конференция (КММК-2013). Сборник тезисов. Украина, Судак. 22.09–04.10.2013 г. — Т. 2. — Симферополь : Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, издательство КНЦ НАНУ. — 2013 г. — С. ???.

83. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи и их приложения / С.М. Ситник // "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (с. Цей, 14–20 июля 2015 г.). — Владикавказ : Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания (ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А). — 2013. — С. 86–87.

84. Ситник С.М. О некоторых задачах в теории операторов преобразования / С.М. Ситник // "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-III" . Конференция памяти И.Б.Симоненко. Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет. — 2013. — С. 40.

85. Sitnik S.M. Some problems in the modern theory of transmutations / S.M. Sitnik // "On actual problems of mathematics and informatics" . Abstracts of the International conference dedicated to the 90–th

anniversary of Haydar Aliyev. May 29-31 2013. — Baku, Azerbaijan : — 2013. — P. 107.

86. Ситник С.М. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Материалы международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". — Белгород : Белгородский государственный национально-исследовательский университет. — 2013. — С. 174–175.

87. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Материалы международной научно-практической конференции "Фундаментальное образование xxi века: наука, практика, методика". — Украина, Харьков : Харьковский национальный университет строительства и архитектуры. — 2013. — С. 152–156.

88. Ситник С.М. Некоторые задачи современной теории операторов преобразования / С.М. Ситник // Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XXIV". — Воронеж : ВГУ. — 2013. — С. 174–175.

89. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Міжнародна науково–практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 19–20 квітня 2013 року, Київ. Матеріали конференції. — Київ : Національний технічний університет України «КПІ». — 2013. — С. 154–157.

90. Ситник С.М. Новые краевые задачи с К-следом для решений с существенными особенностями в работах В.В. Катрахова / С.М. Ситник // Обратные и некорректные задачи математической физики. Международная конференция, посвященная 80–летию со дня рождения академика Михаила Михайловича Лаврентьева. Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012 г. Тезисы докладов. — Новосибирск : Сибирское научное издательство. — 2012. — С. 439.

91. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Тезисы докладов международного научного семинара Аналитические методы Анализа и дифференциальных уравнений. AMADE (Analytic Methods of Analysis and Differential Equations), Минск, Беларусь, 10-14 сентября 2012 г. — Беларусь, Минск : Институт математики НАН Белоруси. — 2012. С. 65–66.

92. Sitnik S.M. Some problems in the modern theory of transmutations / S.M. Sitnik // Spectral theory and differential equations (STDE - 2012). International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday. Kharkiv, Ukraine. August 20-24, 2012. — Ukraine, Kharkiv : B.Verkin Institute for low temperature and engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, V. Karazin Kharkiv National University. — 2012. — P. 101–102.

93. Ситник С.М. Работы В.В. Катрахова по теории операторов преобразования / С.М. Ситник // Материалы второго Российско–Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" . — Нальчик : КБР, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. — 2012. — С. 241–243.

94. Ситник С.М. О некоторых задачах современной теории операторов преобразования / С.М. Ситник // Международная конференция:"Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения". Посвящена памяти Николая Карапетовича Карапетянца (1942–2005). Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, 2012. С. 67–68.

95. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи: история, классификация, основные свойства и приложения / С.М. Ситник // Тезисы докладов международного научного семинара Аналитические методы Анализа и дифференциальных уравнений. AMADE

(Analytic Methods of Analysis and Differential Equations), Минск, Беларусь, 12–17 сентября 2012 г. — Беларусь, Минск : Институт математики НАН Белоруси. — 2011. С. 136–137.

96. Ситник С.М. Спектральные свойства дискретного преобразования Фурье и его модификаций / С.М. Ситник // Материалы 19 международной научно–технической конференции "Прикладные задачи математики и механики" . Севастополь, 12–16 сентября 2011 г. — Севастополь : Севастопольский национальный технический университет (СевНТУ). — 2011. С. 211–213.

97. Ситник С.М. Применение функций Ламберта в комплексном анализе при оценках характеристик роста целых функций / С.М. Ситник // Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" , посвящённой 75-летию Ю.П. Самарина, 2011, Самара. — Самара : Самарский государственный технический университет — 2011. — С. 225–228.

98. Sitnik S.M. The Buschman–Erdelyi transmutations: history, classification, main facts, applications / S.M. Sitnik // International conference dedicated to the 70th anniversary of A.F.Grishin. Kharkiv, Ukraine. August 20-24, 2012. — Ukraine, Kharkiv : B.Verkin Institute for low temperature and engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, V. Karazin Kharkiv National University. — 2011. — P. 38.

99. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи, их различные модификации и приложения / С.М. Ситник // Тезисы докладов международной конференции "Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях" , посвящённой 50–летию механико–математического факультета Харьковского национального университета

им. В.Н.Каразина (17–22 апреля 2011 г.). Харьков : Харьковский национальний университет им. В.Н.Каразина. — 2011. С. 212–213.

100. Ситник С.М. Применение функций Ламберта в задачах об оценках характеристик роста целых функций / С.М. Ситник // Тезисы докладов международной научной конференции "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование", Волгодонск,4—8 июля 2011 г. — Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. — 2011. — С. 41–42.

101. Ситник С.М. Различные классы операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы посвященная 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г.Петровского. 30 мая–4 июня 2011 г. Сборник тезисов. — Москва : МГУ. — 2011. — С. 344–345.

102. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи и их приложения / С.М. Ситник // Международный семинар "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" . 24–28 апреля 2011 г. — Ростов–на–Дону : Южный федеральный университет. — 2011. — С. 26–27.

103. Ситник С.М. Построение унитарных обобщений операторов преобразования Сонина и Пуассона / С.М. Ситник // Тезисы докладов Всероссийского научного семинара "Неклассические уравнения математической физики посвящённого 65–летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова. Ч. II. — Якутск : — 2010. — С. 41–44.

104. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи и их приложения / С.М. Ситник // Материалы международного Российско–Болгарского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" . Нальчик–Хабез, КБР. —

Нальчик : Научно–исследовательский институт прикладной математики и автоматизации. — 2010. — С. 223–224.

105. Ситник С.М. Теория и приложения операторов Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Материалы 13 международной научной конференции имени академика М. Кравчука. Т.2. "Алгебра. Геометрия. Математический и численный анализ". — Киев : — 2010. — С. 249.

106. Ситник С.М. Неравенства для функций гипергеометрического типа / С.М. Ситник // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна. Тезисы докладов. — Воронеж : ВГУ. — 2010. — С. 138–140.

107. Sitnik S.M. Fractional powers of the Bessel differential operator / S.M. Sitnik // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ). Тезисы докладов международной конференции, 14-19 сентября 2009 года, Минск, Беларусь. — Беларусь, Минск. — 2009. — С. 149.

108. Sitnik S.M. Log-convexity and Log-concavity of hypergeomertic–like functions / S.M. Sitnik, D. Karp // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ). Тезисы докладов международной конференции, 14-19 сентября 2009 года, Минск, Беларусь. — Беларусь, Минск. — 2009. — С. 79.

109. Ситник С.М. Неравенства для специальных функций / С.М. Ситник // Материалы Российско–Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы Анализа и информатики " , Эльбрус. — Нальчик : КБНЦ РАН. — 2009. — С. 202–204.

110. Ситник С.М. Обзор теории операторов преобразования / С.М. Ситник // В сб.: Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские

чтения–XX" , посвящённой 70–летнему юбилею академика В. А. Садовничего. — Воронеж : ВГУ. — 2009. — С. 167–168.

111. Ситник С.М. О некоторых задачах теории операторов преобразования / С.М. Ситник // Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений" , посвящённой 70–летнему юбилею академика В. А. Садовничего. — Воронеж : ВГУ. — 2009. — С. 49–50.

112. Ситник С.М. Об одном обобщении операторов Харди методами теории операторов преобразования / С.М. Ситник // В сб.: Международная конференция по математической физике и её приложениям. Самара, Россия, 8–13 сентября 2008 г. Тезисы докладов. — Самара : Самарский государственный университет. — 2008. — С. 191–192.

113. Ситник С.М. О теоремах вложения для пространств С.Л. Соболева и И.А. Киприянова / С.М. Ситник // В сб.: Дифференциальные уравнения, Функциональные пространства, Теория приближений. 5-12 октября 2008. — Новосибирск : — 2008. — С. 359.

114. Ситник С.М. Неравенства для некоторых гипергеометрических функций / С.М. Ситник, Д.Б. Карп // Труды международной школы–семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. 9-15 сентября 2008 г. Абрау-Дюрсо. — Ростов-на-Дону : Южный Федеральный университет. — 2008. — С. 111-112.

115. Ситник С.М. Об одном обобщении неравенства Коши—Буняковского с максимумом и минимумом / С.М. Ситник, Е.В. Дикарева // Труды участников международной школы–семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Абрау–Дюрсо, 9-15 сентября 2008 г. — Ростов–на–Дону : Южный Федеральный университет. — 2008. — С. 107–108.

116. Ситник С.М. О неравенствах для специальных функций / С.М. Ситник // В сб.: Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XIX" . — Воронеж : — ВГУ. — 2008. — С. 198–199.

117. Ситник С.М. Обобщения неравенства Коши–Буняковского методом средних / С.М. Ситник // Третья международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования" , посвящённая 85–летию члена–корреспондента РАН профессора Л. Д. Кудрявцева. Тезисы докладов. — М. : — МФТИ. — 2008. — С. 184–185.

118. Ситник С.М. Унитарные операторы преобразования, связанные с операторами Харди / С.М. Ситник // Третья международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования" , посвящённая 85–летию члена–корреспондента РАН профессора Л. Д. Кудрявцева. Тезисы докладов. — М. : — МФТИ. — 2008. — С. 324–327.

119. Ситник С.М. Перестановочные преобразования Фурье / С.М. Ситник // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100–летию со дня рождения Д.К. Фаддеева. Тезисы докладов. Санкт–Петербург, Россия, 24–29 сентября 2007 года. — Санкт–Петербург : — 2007. — С. 69–71.

120. Ситник С.М. О некоторых обобщениях неравенства Коши–Буняковского / С.М. Ситник // "Международная конференция "Анализ и особенности "посвящённая 70-летию В.И. Арнольда" 20–24 августа 2007 г. Тезисы докладов. — М. : — МИАН. — 2007. — С. 92–94.

121. Ситник С.М. Операторы дробного интегро-дифференцирования для дифференциального оператора Бесселя / С.М. Ситник // Труды

четвёртой Всероссийской научной конференции с международным участием: "Математическое моделирование и краевые задачи" . Ч. 3. — Самара : — 2007. — С. 158–160.

122. Ситник С.М. Обобщения неравенства Коши–Буняковского с использованием средних / С.М. Ситник // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" , посвящённая памяти И.Г. Петровского. Тезисы докладов. — М. : МГУ. — 2007. — С.297–298.

123. Ситник С.М. Построение операторов преобразования Векуа–Эрдейи–Лаундеса. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" . Тезисы докладов. — Новосибирск : — 2007. — С. 469–470.

124. Sitnik S.M. Explicit solutions to a singular differential equation with Bessel operator / S.M. Sitnik // Days on diffraction 2007. International conference. abstracts. — Saint Petersburg : — 2007. — P. 78.

125. Ситник С.М. Об обобщении формулы Хилле-Тамаркина для резольвенты на случай операторов дробного интегрирования Бесселя / С.М. Ситник // III Международная конференция: "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики" . — Нальчик : — 2006. — С. 269–270.

126. Ситник С.М. Представления и неравенства для обобщенной гипергеометрической функции отрицательного аргумента / С.М. Ситник, Д.В. Карп // XXXI Дальневосточная математическая школа–семинар им. академика Е.В.Золотова. Тезисы докладов. — Владивосток : — 2006. — С. 12–13.

127. Ситник С.М. Исторические аспекты доказательства и обобщений некоторых неравенств / С.М. Ситник, В.С. Ситник // Современные

методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XVII" . — Воронеж : ВГУ. — 2006. — С. 170–171.

128. Ситник С.М. Нагруженная струна, краевое условие третьего рода / С.М. Ситник, Ф.О. Найдюк, В.Л. Прядиев // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XVII" . — Воронеж : ВГУ. — 2005. — С. 151–152.

129. Sitnik S.M. Explicit solutions to a singular differential equation with Bessel operator / S.M. Sitnik // Days on diffraction 2007. International conference. abstracts. — Saint Petersburg : — 2004. — P. 71.

130. Ситник С.М. Уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского и их приложения к дифференциальным уравнениям / С.М. Ситник // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" , посвящённая 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского. Москва, МГУ, 16-22 мая 2004 г. — М. : — 2004. — С. 210.

131. Ситник С.М. Дробное интегродифференцирование для дифференциального оператора Бесселя / С.М. Ситник // Материалы международного Российско–Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" . Нальчик-Эльбрус, 22-26 мая 2004 г. — Нальчик : — 2004. — С. 163–167.

132. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши–Буняковского и их приложения / С.М. Ситник // Bunyakovsky International Conference. Kyiv, August 16-21. Abstracts. — Kyiv : — 2004. — С. 119–120.

133. Ситник С.М. О некоторых обобщения дробного интегро–дифференцирования. / С.М. Ситник // Материалы международного Российско–

Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик-Эльбрус, 22-26 мая 2003 г. — Нальчик : — 2004. — С. 86–88.

134. Ситник С.М. Обобщения неравенства Коши–Буняковского в пространствах с индефинитной метрикой / С.М. Ситник // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского. Т. 19. Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции. — Казань : — 2003. — С. 202–203.

135. Ситник С.М. Об уточнениях интегрального неравенства Коши–Буняковского / С.М. Ситник // В сборнике: Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы, посвящённой памяти выдающихся профессоров МГУ Н.К. Бари и Д.Е. Меньшова. Саратов, 28 января-4 февраля 2002 г. — Саратов : — 2002. — С. 191–192.

136. Ситник С.М. Об обобщении биноминальной теоремы, возникающем в теории дифференциальных уравнений / С.М. Ситник // Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции "Охрана и безопасность -2001". — Воронеж : Воронежский институт МВД России. — 2001. — С. 10.

137. Ситник С.М. Полугруппы интегральных преобразований, связанных с ортогональными разложениями / С.М. Ситник, Д. Карп // В сб. тезисов международной конференции INPRIM–98 (Industrial and Applied Mathematics). — Новосибирск : — 1998. — С. 45–46.

138. Ситник С.М. Метод получения последовательных уточнений неравенства Коши-Буняковского и его применения к оценкам специальных функций / С.М. Ситник // В сборнике: Тез. докладов. Воронежская весенняя математическая школа Современные методы в теории

краевых задач. "Понтрягинские чтения-VII" . — Воронеж : ВГУ. — 1996. — С. 164.

139. Ситник С. М. Формула Тэйлора для операторов типа Бесселя / С. М. Ситник, Д. С. Коновалова // В сб.: Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы 'Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения — VII' . — Воронеж : — 1996. — С. 102.

140. Ситник С.М. Формула Тэйлора для операторов типа Бесселя / С.М. Ситник, Д.С. Коновалова // В сборнике: Тез. докладов. Воронежская весенняя математическая школа (17–23 апреля 1996 г.) Современные методы в теории краевых задач. "Понтрягинские чтения–VII" . — Воронеж : ВГУ. — 1996. — С. 102.

141. Ситник С.М. Дробное преобразование Ханкеля и его приложения / С.М. Ситник, Д.В. Карп // В сборнике: Тез. докладов. Воронежская весенняя математическая школа (17–23 апреля 1996 г.) Современные методы в теории краевых задач. "Понтрягинские чтения–VII" . — Воронеж : ВГУ. — 1996. — С. 92.

142. Sitnik S.M. Refinements of the Bunyakovskii-Schwartz inequalities with applications to special functions estimates / S.M. Sitnik // In: Conference in Mathematical Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's Sixtieth Birthday. Linkoping University, Sweden, June 10-15. — Linkoping : Linkoping University. — 1996. — P. 97.

143. Sitnik S.M. Integral operators methods for the Radon Transform in Sobo- lev spaces / S.M. Sitnik, V.V. Katrahov // Abstracts. Ed. by M.M.Lavrent'ev. International symposium on computerized tomography. Novosibirsk, Russia, August 10-14, 1993. — Novosibirsk : — 199. — P. 69.

144. Ситник С.М. Операторы Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // В сборнике тезисов докладов: Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции. Международная научная конференция. Самара. 24-31 мая 1992. — Самара : — 1992. — С. 233–234.

145. Ситник С.М. Формулы соответствия для модельных уравнений с частными производными с особенностями / С.М. Ситник // В сборнике: Математическое моделирование в естествознании и технологии. Тезисы докладов Всесоюзной школы-семинара, Владивосток, 14–21 сентября 1989 г. — Владивосток : —1989. — С. 50–51.

146. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи в функциональных пространствах / С.М. Ситник // В сборнике: "Линейные операторы в функциональных пространствах" . Тезисы докладов Северо-Кавказской региональной конференции. — Грозный : — 1989. — С. 150.

147. Ситник С.М. Об одном классе операторов преобразования / С.М. Ситник // В сборнике: Тезисы докладов Всесоюзной школы молодых учёных "Функциональные методы в прикладной математике и математической физике" . II часть (11-17 мая 1988 г.). Ташкент, 1988. — Ташкент : издательство ТашГу. — 1988. — С. 132.

148. Ситник С.М. L_2–теория операторов преобразования и её приложения к эллиптическим уравнениям / С.М. Ситник // В сборнике резюме: 10-е Чехословацко-Советское совещание: Применение фукциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики. Стара Тура, 26.9-01.10 1988. — Чехословакия : Стара Тура. — 1988. — С. 46.

149. Ситник С.М. Об одной неклассической краевой задаче / С.М. Ситник // В сборнике: Классические и неклассические краевые задачи

для дифференциальных уравнений с частными производными, специальные функции, интегральные уравнения и их приложения. Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции 25-29 апреля 1987 г. — Куйбышев : — 1987. — С. 133.

150. Ситник С.М. Операторы преобразования и краевые задачи в пространствах Фреше / С.М. Ситник // В сборнике: XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Челябинск, 26-30 мая 1986 г. Часть III. — Челябинск : — 1986. — С. 111.

151. Ситник С.М. Краевые задачи и операторы преобразования / С.М. Ситник // В сборнике: Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов Северо-Кавказской региональной конференции. — Махачкала : — 1986. — С. 191–192.

Литература

[1] Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. — М. : Наука, 1979.

[2] Абжандадзе З. Л. Преобразование Фурье–Френеля и некоторые его приложения / З. Л. Абжандадзе, В. Ф. Осипов. — Санкт–Петербург : С.–П.У., 2000.

[3] Абловиц А. Солитоны и метод обратной задачи / А. Абловиц, Х. Сигур. — М. : Мир, 1979.

[4] Агранович З. С. Обратная задача теории рассеяния / З. С. Агранович, В. А. Марченко.—Харьков : изд. ХГУ, 1960.

[5] Аршава Е. А. Обращение интегральных операторов методом операторных тождеств. / Е. А. Аршава // — Белгород : Научные ведомости Белгородского государственного университета. № 13 (68). Выпуск 17/2. — 2009. — С. 18–29.

[6] Ахиезер Н. И. К теории спаренных интегральных уравнений / Н. И. Ахиезер // Уч. зап. Харьковского гос. универ. — 1957. — Т. 80. — С. 5–21.

[7] Баврин И. И. Операторы преобразования для краевых задач, интегральных представлений и восстановления зависимостей / И. И. Баврин, В. Л. Матросов, О. Э. Яремко. — М. : Прометей, 2015.

[8] Багров В.Г. Преобразование Дарбу уравнения Шрёдингера / В.Г. Багров, Б.А Самсонов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1997. — Т. 28. — № 4. — С. 951–1012.

[9] Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж :. ВГУ, 1987.

[10] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. —М. : Наука. Т. 1. Гл. ред. ФМЛ, 1973.

[11] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. —М. : Наука. Т. 2. Гл. ред. ФМЛ, 1966.

[12] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. —М. : Наука. Т. 3. Гл. ред. ФМЛ, 1967.

[13] Беккенбах Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. — М.: Мир, 1965.

[14] Бергман С. Интегральные операторы в теории уравнений с частными производными / С. Бергман. — М. : Мир, 1964.

[15] Беркович Л. М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Л. М. Беркович. — М. : РХД, 2002.

[16] Бицадзе А. В. К теории уравнений Максвелла–Эйнштейна / А. В. Бицадзе // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 216. — № 2.

[17] Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа / А. В. Бицадзе. — М.: изд. АН СССР, 1959.

[18] Блох А. Ш. Об определении дифференциального оператора по его спектральной матрице–функции / А. Ш.Блох // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 92. — № 2. — С. 209–212.

[19] Боровских А. В. Формула распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды / А. В. Боровских // Минск : Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38. — № 6. — С. 758–767.

[20] Боровских А. В. Метод распространяющихся волн / А. В. Боровских // — М. : Труды семинара имени И. Г. Петровского. — 2004. — Вып. 24. — С. 3–43.

[21] Боярский Б. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами / Б. Боярский // — Математический сборник. — 1957. — Т. 43 (85). — № 4. — С. 451–503.

[22] Бурбаки Н. Функции действительного переменного / Н.Бурбаки. — М.: Наука, 1965.

[23] Буренков В. И. Функциональные пространства / В. И. Буренков. — М. : РУДН, 1989.

[24] Буренков В. И. Методические рекомендации к изучению курса "Функциональные пространства"/ В. И. Буренков, М. Л. Гольдман. — М. : РУДН, 1989.

[25] Валицкий Ю.Н. Об операторе преобразования для интегро–дифференциальных операторов типа Вольтерра / Ю.Н. Валицкий // Сб. : Математическая физика. — Киев: Наукова Думка. — 1965. — С. 23–36.

[26] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. —М. : ИЛ. — Т. 1. — 1949.

[27] Векуа И. Н. О решениях уравнения $\Delta u + \lambda^2 u$ / И. Н. Векуа // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. — 1942. — Т. III. — No 4. — С. 307–314.

[28] Векуа И. Н. Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения / И. Н. Векуа // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. — 1945. — Т. VI. — No 3. — С. 177–183.

[29] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И. Н. Векуа. — М.-Л. : ГИТТЛ, 1948.

[30] Векуа И. Н. Обобщённые аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988.

[31] Вирченко Н. А. Основы дробного интегродифференцирования / Н. А. Вирченко, В. Я. Рыбак. — Киев, 2007.

[32] Вирченко Н. А. Классические и обобщённые многопараметрические функции / Н. А. Вирченко, В. Гайдей. — Киев, 2008.

[33] Волк В. Я. О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$ / В. Я. Волк // –М. : УМН. — 1953. — Т. 111. — Вып. 4 (56). — С. 141–151.

[34] Волков И. К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление / И. К. Волков, А. Н. Канатников. — М. : Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

[35] Волкодавов В. Ф. Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов / В. Ф. Волкодавов, М. Е. Лернер, Н. Я. Николаев, В. А. Носов. — Куйбышев : изд. Куйбышев. гос. пед. инст., 1982.

[36] Волкодавов В. Ф. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с некоторыми специальными функциями в ядрах и их приложения / В. Ф. Волкодавов, Н. Я. Николаев. — Самара : изд.-во 'Самарский университет', 1992.

[37] Волкодавов В. Ф. Таблицы функций Римана и Римана–Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n–мерных евкли-

довых пространствах / В. Ф. Волкодавов, В. Н. Захаров. — Самара, 1994.

[38] Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пауссона–Дарбу. Куйбышев, пед. инст., 1984.

[39] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988.

[40] Глушак А. В. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А. В. Глушак // М. : Матем. заметки. — 2005. — Т. 77. — № 1. — С. 28–41.

[41] Глушак А. В. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А. В. Глушак, О. А. Покручин // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т.52. — № 1. — С. 41–59.

[42] Глушак А. В. Начальная задача для слабо нагруженного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А. В. Глушак // Мат. Межд. науч. конф.: "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных". — М. : МГУ. — 2016. — С. 101.

[43] Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г. А. Гринберг. — М. : АН СССР, 1948.

[44] Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости / М. И. Гуревич. — М.: Наука, 1979.

[45] Гусейнов И. М. Об одном операторе преобразования / И. М. Гусейнов // — М. : Матем. заметки. — 1997. — Т. 62. — № 2. —С. 206–215.

[46] Гусейнов И. М. Операторы преобразования и асимптотические формулы для собственных значений полиноминального пучка операторов Штурма–Лиувилля / И. М. Гусейнов, А. А. Набиев, Р. Т.

Пашаев // — Новосибирск : СМЖ. — 2000. — Т. 41. — № 3. — С. 554–566.

[47] Джаяни Г. В. Уравнение Эйлера–Пауссона–Дарбу / Г. В. Джаяни. — Тбилиси : Изд-во Тбилисского университета, 1984, 78 С.

[48] Джаяни Г. В. Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам. / Г. В. Джаяни. — Тбилиси : Изд-во Тбилисского университета, 1982, 178 С.

[49] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. — М. : Наука. — 1966.

[50] Джини К. Средние величины / К. Джини. — М.: Статистика. — 1970.

[51] Динь Х. А. Интегральные уравнения с функцией Лежандра в ядрах в особых случаях / Х. А. Динь // ДАН БССР. — 1989. — Т. 33. — № 7. — С. 591–594.

[52] Жегалов В. И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов. — Казань : Казанское математическое общество, 2001.

[53] Жегалов В. И. Уравнения с доминирующей частной производной / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, Е.А.Уткина. — Казань : Казанский ун-т, 2014.

[54] Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Я.И. Житомирский // — Матем. сб. — 1955. — Т. 36(78). — № 2. — С. 299–310.

[55] Журавлёв В. М. Нелинейные волны. Точно решаемые задачи / В. М. Журавлёв. — Ульяновск, 2001.

[56] Захаров В. Е. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — М. : Наука. — 1980.

[57] Карп Д. Б. Пространства с гипергеометрическими воспроизводящими ядрами и дробные преобразования типа Фурье. / Д. Б. Карп. — Диссертация канд. физ.–мат. наук. Владивосток, 2000.

[58] Катрахов В. В. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / В. В. Катрахов // — М. : ДАН СССР. — 1980. — Т. 251. — № 5. — С. 1048–1051.

[59] Катрахов В. В. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона / В. В. Катрахов // — М. : ДАН СССР. — 1981. — Т. 259. — № 5. — С. 1041–1045.

[60] Катрахов В. В. Об одной сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона / В. В. Катрахов // — М. : Матем. сб. — 1991. — Т. 182. — № 6. — С. 849—876.

[61] Катрахов В. В. Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений в областях с угловыми точками / В. В. Катрахов // — М. : ДАН СССР. — 1991. — С. 1047–1050.

[62] Катрахов В. В. Формула Тэйлора с оператором Бесселя для функций одной и двух переменных / В. В. Катрахов, А. А. Катрахова // —Воронеж : Деп. ВИНИТИ. — 1982. — 23 с.

[63] Качалов А. П. Метод операторов преобразования в обратной задаче рассеяния, одномерный Штарк–эффект / А. П. Качалов, Я. В. Курылёв // — Ленинград : Наука Записки научных семинаров

ЛОМИ. Математические вопросы теории распространения волн, 19. Под ред. В.М. Бабича. — — Т 179. — 1989. С. 73–87.

[64] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // — М. : Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77. — № 1. — С. 181–183.

[65] Килбас А. А. О композиции операторов обобщенного дробного интегрирования с дифференциальным оператором осесимметрической теории потенциала / А. А. Килбас, М. Сайго, В. А. Жук // Минск : Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 9. — С. 1640–1642.

[66] Килбас А. А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с с функцией Лежандра по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // М. : Доклады академии наук РАН. — 2009. Т. 429. № 4. — С. 442–446.

[67] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука-Физматлит, 1997.

[68] Киприянов И. А. Преобразования Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов / И. А. Киприянов // —М. : Труды матем. ин–та АН СССР им. В.А.Стеклова. — 1967. — Т. 89. — С. 130–213.

[69] Киприянов И. А. Об одном классе многомерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // — М. : Матем. сб. — 1977. — Т. 104. — № 1. — С. 49–68.

[70] Киприянов И. А. Об одной сингулярной эллиптической краевой задаче в областях на сфере / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // Препринт ИПМ ДВО РАН. — 1989. — 10 с.

[71] Киприянов И. А. Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений высших порядков / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // Препринт ИПМ ДВО РАН. — 1989. — 26 с.

[72] Киприянов И. А. Об одной краевой задаче для эллиптических уравнений второго порядка в областях на сфере / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // — М. : ДАН СССР. — 1990. — Т. 313. — № 3. — С. 545–548.

[73] Климентов С. Б. Граничные свойства обобщённых аналитических функций / С. Б. Климентов. — Владикавказ, 2014.

[74] Климентов С. Б. Классы Харди обобщённых аналитических функций / С. Б. Климентов // Изв. ВУЗов, Сев.–Кавказ. регион, серия 'Естественные науки'. — 2003. — № 3. — С. 6–10.

[75] Климентов С. Б. Классы Смирнова обобщённых аналитических функций / С. Б. Климентов // Изв. ВУЗов, Сев.–Кавказ. регион, серия 'Естественные науки'. — 2005. — № 1. — С. 13–17.

[76] Климентов С. Б. Классы ВМО обобщённых аналитических функций / С. Б. Климентов // — Владикавказ : Владикавказский математический журнал. — 2006. — Т. 8. — В. 1. — С. 27–39.

[77] Климентов С. Б. Теорема двойственности для классов Харди обобщённых аналитических функций / С. Б. Климентов // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию. —- Владикавказ : Изд-во ВНЦ РАН. — 2006. — С. 63–73.

[78] Ключанцев М. И. О построении r–чётных решений сингулярных дифференциальных уравнений / М. И. Ключанцев // —М. : Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 224. — № 5. — С. 1004–1007.

[79] Ключанцев М. И. Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи / М. И. Ключанцев // —Минск : Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 6. — С. 983–990.

[80] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1981.

[81] Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. — М. : Мир, 1987.

[82] Коробейник Ю. Ф. Операторы сдвига на числовых семействах / Ю. Ф. Коробейник. — Ростов–на–Дону : ИРУ, 1983.

[83] Коробейник Ю. Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных интегральных уравнений / Ю. Ф. Коробейник. — Ростов–на–Дону : ИРУ 2005.

[84] Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А. Н. Кочубей // Минск : Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 8. — С. 1359–1369.

[85] Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка / А. Н. Кочубей // — Минск : Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26. — № 4. — С. 660–770.

[86] Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1962.

[87] Крейн С.Г. Интерполяция линейных операторов / С.Г. Крейн, Ю.И.Петунин, Е.М.Семёнов. — М. : Наука, 1978.

[88] Кудрявцев Л. Д. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения / Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский //— М. : ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Совре-

менные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1988. — С. 5–157.

[89] Кузнецов Н. В. Формулы следа и некоторые их приложения в теории чисел / Н. В. Кузнецов. — Владивосток : Дальнаука, 2003.

[90] Кузнецов Н. В. Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана / Н. В. Кузнецов. — Математический сборник. — 1980. — Т. 111(153). — № 3. — С. 334–383.

[91] Кузнецов Н. В. О собственных функциях одного интегрального уравнения / Н. В. Кузнецов. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ. — 1970. — Т. 17. — № 3. — С. 66–149.

[92] Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы / А. Г. Кусраев. — М. : Наука, 2003.

[93] Ландис Е. М. Задачи Е. М. Ландиса / Е. М. Ландис // — М. : УМН. — 1982. — Т. 37. — № 6. — С. 278–281.

[94] Лакс П. Теория рассеяния / П. Лакс, Р. Филлипс. — М. : Мир, 1971.

[95] Лакс П. Теория рассеяния для автоморфных функций / П. Лакс, Р. Филлипс. — М. : Мир, 1979.

[96] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : ГИТТЛ, 1956.

[97] Левин Б. Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка / Б. Я. Левин // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 106. — № 2. — С. 187–190.

[98] Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка / Б. М. Левитан. —М. : Гостехиздат, 1950.

[99] Левитан Б. М. Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения / Б. М. Левитан. — М. : ГИФМЛ, 1962.

[100] Левитан Б. М. Теория операторов обобщённого сдвига / Б. М. Левитан. — М. : Наука, 1973.

[101] Левитан Б. М. Почти–периодические функции / Б. М. Левитан. — М. : ГИТТЛ, 1953.

[102] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б. М. Левитан. — М. : Наука, 1984.

[103] Левитан Б. М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М. : Наука, 1988.

[104] Левитан Б. М. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. М. Левитан // —М. : УМН. — 1951. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 102–143.

[105] Левитан Б. М.. Дифференциальные уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси и теорема Планшереля / Б. М. Левитан, А. Я. Повзнер // Докл. АН СССР. — 1946. — Т. 52. — № 6. — С. 483–486.

[106] Лейзин М. А. К теоремам вложения для одного класса сингулярных дифференциальных операторов в полупространстве / М. А. Лейзин // Минск : Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 6. — С. 1073–1083.

[107] Лейзин М. А. О вложении некоторых весовых классов / М. А. Лейзин // В сб.: Методы решений операторных уравнений. — Воронеж : изд.–во ВГУ, 1978.—С. 96–103.

[108] Леонтьев А.Ф. Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и её при-

менения к некоторым вопросам теории функций / А.Ф.Леонтьев // — СМЖ. — 1960. — Т. 1. — № 3. — С. 456–487.

[109] Лернер М. Е. Принципы максимума для уравнений гиперболического типа и новые свойства функции Римана / М. Е. Лернер. — Самара: Самарский государственный технический университет, — 2001.

[110] Лизоркин П. И. Классы функций, построенные на основе усреднений по сферам. Случай пространств Соболева / П. И. Лизоркин // — М. : Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. — 1990. — № 192. — С. 122–139.

[111] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. —М. : Мир, 1980.

[112] Ляхов Л. Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом — Воронеж, ВГТА, 1997.

[113] Ляхов Л. Н. B–гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B–потенциальными ядрами / Л. Н. Ляхов. — Липецк, изд. ЛГПУ, 2007.

[114] Маламуд М. М. Об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков / М. М. Маламуд // Киев : Наукова думка. Матем. анализ и теория вероятн. — 1978. — С. 108–111.

[115] Маламуд М. М. Необходимые условия существования оператора преобразования для уравнений высших порядков / М. М. Маламуд // Функцион. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16. — № 3. — С. 74–75.

[116] Маламуд М. М. К вопросу об операторах преобразования / М. М. Маламуд. — Киев : Препринт ИМ АН УССР. — , 1984. — 48 с.

[117] Маламуд М. М. Операторы преобразования для уравнений высших порядков / М. М. Маламуд // Матем. физика и нелин. механика. Киев : Наукова думка. — 1986. — № 6. — С. 108–111.

[118] Маламуд М. М. К вопросу об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений / М. М. Маламуд // М. : Тр. Моск. матем. об–ва. — 1990. — Т. 53. — С. 69–97.

[119] Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций / О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1978.

[120] Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами / О. И. Маричев, А. А. Килбас, О. А. Репин. — Самара, изд. Самарского гос. эконом. унив., 2008.

[121] Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1972.

[122] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1977.

[123] Марченко В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка / В. А. Марченко // — М. : Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 72. – -№ 3. — С. 457–460.

[124] Марченко В. А. Операторы преобразования / В. А. Марченко // — М. : Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 74. — № 2. — С. 185–188.

[125] Марченко В. А. О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка / В. А. Марченко // — М. : Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 74. — № 4. — С. 657–660.

[126] Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка, I / В. А. Марченко // — М. : Тр. Моск. матем. об–ва. — 1952. — I. — С. 327–420.

[127] Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка, II / В. А. Марченко // — М. : Тр. Моск. матем. об–ва. — 1953. — II. — С. 3–82.

[128] Марченко В. А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1986.

[129] Марченко В. А. Обобщённый сдвиг, операторы преобразования и обратные задачи. В сб.: Математические события XX века / В. А. Марченко. — М.: Фазис, 2003.

[130] Мацаев В. И. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков / В. И. Мацаев // — М. : Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 130. — № 3. — С. 499–502.

[131] Мешков В. З. Весовые дифференциальные неравенства и их применение для оценок скорости убывания на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка / В. З. Мешков // — М. : Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. — 1989. — № 190. — С. 139–158.

[132] Мешков В. З. О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка / В. З. Мешков // — М. : Матем. сб. — 1991. — Т. 182. — № 3. — С. 364—383.

[133] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М., 1977.

[134] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М., 1957.

[135] Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И.Моисеев. — М.: изд. МГУ, 1988.

[136] Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А. Б. Муравник // М. : СМФН. — 2014. Т. 52. — С. 3—141.

[137] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк . — М. : Наука, 1969.

[138] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер. — М. : Мир, 1990.

[139] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М. : Высшая Школа, 1995.

[140] Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение / А. М. Нахушев. — Нальчик, 2000.

[141] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003.

[142] Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача теории рассеяния / Л. Н. Нижник. — Киев : Наукова Думка, 1973.

[143] Нижник Л. П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений / Л. Н. Нижник. — Киев: Наук. думка, 1990.

[144] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. — М. : Мир, 1989.

[145] Омельченко А. В. Методы интегральных преобразований в задачах математической физики / А. В. Омельченко. — М. : МЦНМО, 2010.

[146] Осипов В. Ф. Почти периодические функции Бора–Френеля / В. Ф. Осипов. — Санкт–Петербург : изд.–во С.–П.У., 1992.

[147] Пасенчук А. Э. Абстрактные сингулярные операторы / А. Э. Пасенчук.—Новочеркасск, 1993.

[148] Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой / С. С. Платонов // —М. : Изв. РАН. Сер. матем. — 2007. — Т. 71. — № 5. — С. 149—196.

[149] Платонов С. С. Обобщённые сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике L_2–1 / С. С. Платонов // — М. : Труды ПетрГУ. — Сер. Математика. — 2000. — Вып. 7. — С. 70–82.

[150] Платонов С. С. Обобщённые сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике L_2–2 / С. С. Платонов // — М. : Труды ПетрГУ. — Сер. Математика. — 2001. — Вып. 8. — С. 20–36.

[151] Повзнер А. Я. О дифференциальных уравнениях типа Штурма–Лиувилля на полуоси / А. Я. Повзнер // Матем. сборник. — 1948. — Т. 23 (65). — № 1. — С. 3–52.

[152] Положий Г. Н. Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. — М. : Высшая школа, 1964.

[153] Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. P-аналитические и (P, Q)–аналитические функции и некоторые их применения / Г. Н. Положий. — Киев : изд. КГУ, 1965.

[154] Положий Г. Н. Теория и применение p–аналитических функций. 2–е изд., перераб. и доп. / Г. Н. Положий. — Киев: Наукова думка, 1973, 423 с.

[155] Прудников А. П. Вычисление интегралов и преобразование Меллина / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев // ВИНИТИ, Итоги науки и техники, Математический анализ. —М. : — 1989. — Т. 27. — С. 3–146.

[156] Прудников А. П. Интегралы и ряды. В 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев —М. : Наука. — Т.1, 1981. —Т.2, 1983. — Т.3, 1986.

[157] Псху А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А. В. Псху. — Нальчик, 2005.

[158] Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x$ / С. П. Пулькин // — Куйбышев: Уч.зап. Куйбышевского пед. ин-та. — 1958. — Вып. 21. — С. 3–54.

[159] Пулькин С. П. Избранные труды / С. П. Пулькин. — Самара : Универс групп, 2007.

[160] Пулькина Л. С. Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина // — Изв. вузов. Матем. — 1991. — № 11. — С. 48-–51.

[161] Рамм А. Г. Многомерные обратные задачи теории рассеяния / А. Г. Рамм. — М. : Мир, 1994.

[162] Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов / О. А. Репин. — Самара, 1992.

[163] Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., "Мир", 1979.

[164] Сабитов К. Б. Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом спектральным методом / К. Б. Сабитов, Р. Р. Ильясов // — Изв. вузов. Матем. — 2004. — № 2. — С. 64-–71.

[165] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987.

[166] Сахнович Л. А. Спектральный анализ вольтерровских операторов и обратные задачи / Л. А. Сахнович // — М. : Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115. — № 4. — С. 666–669.

[167] Сахнович Л. А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами / Л. А. Сахнович // — М. : Матем. сборник. — 1958. — Т. 46. — № 1. — С. 61–76.

[168] Сахнович Л. А. Необходимые условия наличия операторов преобразования для уравнения четвёртого порядка / Л. А. Сахнович // — М. : УМН. — 1961. — Т. 16. — Вып. 5. — С. 199–205.

[169] Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I / А. Л. Скубачевский // — М. : Соврем. мат. Фундам. направл. —2007. — Т. 26. — С. 3–132.

[170] Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. II / А. Л. Скубачевский // — М. : Соврем. мат. Фундам. направл. —2009. — Т. 3. — С. 3–179.

[171] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М.Смирнов. — М.: Наука, 1970.

[172] Соболев С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1992.

[173] Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / А.П. Солдатов. — М.: Высшая школа, 1991.

[174] Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах / Н. Я. Сонин. —М. : Гостехтеоретиздат, 1954.

[175] Сохин А. С. Об одном классе операторов преобразования / А. С. Сохин // Тр. физ.–тех. ин-та низких температурур АН УССР. — 1969. — Вып. 1. — С. 117–125.

[176] Сохин А. С. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностью / А. С. Сохин // — Тр. физ.–тех. ин-та низких температурур АН УССР. — 1971. — Вып. 2. — С. 182–233.

[177] Сохин А. С. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностями специального вида / А. С. Сохин // — Харьков : Теория функций, функциональный анализ и их приложенияю. — 1973. — № 17. – -С. 36–64.

[178] Сохин А. С. О преобразовании операторов для уравнений с особенностью специального вида / А. С. Сохин // — Харьков : Вестник Харьковского университета. — 1974. — № 113. — С. 36–42.

[179] Сташевская В. В. Метод операторов преобразования / В. В. Сташевская // — М. : ДАН СССР. — 1953. — Т. 113. — № 3. — С. 409–412.

[180] Сташевская В. В. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле / В. В. Сташевская // — Харьков :Уч. зап. Харьковского матем. об–ва. — 1957. — № 5. — С. 49–86.

[181] Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С. А. Терсенов. — Новосибирск : НГУ, 1973. — 143 с.

[182] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. — М.–Л. : ГИТТЛ, 1948.

[183] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. — М. : ИЛ, 1957.

[184] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х.Трибель. — М.: Мир, 1980.

[185] Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007.

[186] Уиттекер Э. Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. / Э. Уиттекер, Дж. Ватсон. — М. : ГИФМЛ, 1963.

[187] Успенский С. В. О теоремах вложения для весовых классов / С. В. Успенский // — М. : Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. — 1961. — № 60. — С. 282–303.

[188] Фаге Д. К., Нагнибида Н. И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов / Д. К. Фаге, Н. И. Нагнибида. — Новосибирск : Наука, 1977.

[189] Фаге М. К. Операторно–аналитические функции одной независимой переменной / М. К. Фаге // — М. : Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 112. — № 5. — С. 1008–1011.

[190] Фаге М. К. Интегральные представления операторно–аналитических функций одной независимой переменной / М. К. Фаге // — М. : Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115. — № 5. — С. 874–877.

[191] Фаге М. К. Построение операторов преобразования и решение одной проблемы моментов для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка / М. К. Фаге // — М. : УМН. — 1957. — Т. 12. — Вып. 1 (73). — С. 240–245.

[192] Фаге М. К. Операторно–аналитические функции одной независимой переменной / М. К. Фаге // — М.: Тр. Моск. матем. об–ва. — 1958. — Т. 7. — С. 227–268.

[193] Фаге М. К. Интегральные представления операторно–аналитических функций одной независимой переменной / М. К. Фаге // — М.: Тр. Моск. матем. об–ва. — 1958. — Т. 8. — С. 3–48.

[194] Фаге М. К. Операторно–аналітичні функції однієї незалежної змінної / Д. К. Фаге. — Львов, Изд. Львовск. ун–та, 1959.

[195] Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния-1 / Л. Д. Фаддеев // УМН. — 1959. — Т. 14. — № 4. — С. 57–119.

[196] Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния-2 / Л. Д. Фаддеев // "Итоги науки и техники" , Современные проблемы математики. Т. 3. — ВИНИТИ. — 1974. — С. 93–180.

[197] Фетисов В. Г. Операторы и уравнения в локально ограниченных пространствах / В. Г. Фетисов. В книге : Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах. — Владикавказ : Изд-во ВНЦ РАН, 2006. — С. 7–142.

[198] Федоров В.Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В.Е. Федоров , Д.М. Гордиевских , М.В. Плеханова // — Минск: Дифференц. уравнения. — 2015. — Т.51. — № 10. — С.1367–1375.

[199] Федоров В.Е. Нелокальная на полуоси задача для вырожденных эволюционных уравнений / Н.Д. Иванова , В.Е. Федоров // Мат. заметки СВФУ. — 2015. — Т.22. — № 1 (85). — С.35–43.

[200] Фишман М. К. Об эквивалентности некоторых линейных операторов в аналитическом пространстве / М. К. Фишман // — М. : Матем. сборник. 1965. — Т. 68 (110). — № 1. — С. 63–74.

[201] Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. Фридрихс. — М., Мир, 1968.

[202] Ханмамедов Аг. Х. Операторы преобразования для возмущённого разностного уравнения Хилла и их одно приложение / Аг. Х. Ханмамедов // М. : СМЖ. — 2003. — Т. 44. — № 4. — С. 926–937.

[203] Харди Г.Г. Неравенства / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полиа. — М.: ИЛ, 1948.

[204] Хачатрян И. Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков / И. Г. Хачатрян // — М. : Изв. АН Арм.ССР. Сер. Математика. — 1978. — Т. 13. — № 3. — С. 215–236.

[205] Хачатрян И. Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющих асимптотику решений / И. Г. Хачатрян // — М. : Изв. АН Арм.ССР. Сер. Математика. — 1979. — Т. 14. — № 6. — С. 424–445.

[206] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. — М. : Мир, 1987.

[207] Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир, 1989.

[208] Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов / А. П. Хромов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — № 10. — С. 3–163.

[209] Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. — М. : МГУ, 1991.

[210] Шадан К. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния / К. Шадан, П. Сабатье. — М. : Мир, 1980.

[211] Шишкина Э. Л. Обобщённая весовая функция r^γ / Э. Л. Шишкина // — Воронеж : Вестник ВГУ, серия физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 215–221.

[212] Шишкина Э. Л. О свойствах одного усредняющего ядра в весовом классе Лебега / Э. Л. Шишкина // — Белгород : Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2016. — Т. 42. № 6(227). — С. 12–19.

[213] Шостак Р.Я. Алексей Васильевич Летников / Р.Я. Шостак // ИМИ. — 1952. — вып. V.

[214] Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А.Юрко. — М.: Наука, 2007.

[215] Янушаускас А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений / А.И.Янушаускас. — Новосибирск: Наука, 1979.

[216] Яремко О. Э. Метод операторов преобразования в задачах математического моделирования / О. Э. Яремко. — Пенза, 2012.

[217] Яремко О. Э. Метод операторов преобразования в задачах математического моделирования / О. Э. Яремко. — Lambert, 2012.

[218] Ярославцева В. Я. Об одном классе операторов преобразования и их приложении к дифференциальным уравнениям / В. Я. Ярославцева // —М. : Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 227. — № 4. — С. 816–819.

[219] Ярославцева В. Я. Неоднородная граничная задача в полупространстве для одного класса сингулярных уравнений / В. Я. Ярославцева // — Минск : Деп. ред. Дифференц. уравнения. — 1989. — 11 с.

[220] Ali I., Kiryakova V., Kalla S.L. Solutions of fractional multi–order integral and differential equations using a Poisson-type transform / I. Ali, V. Kiryakova, S. L. Kalla // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2002. — V. 269. — No. 1. — P. 172–199.

[221] Andrews G. E., Askey R., Roy R. Special Functions / G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy. — Cambridge University Press, 1999.

[222] Antimirov M. Ya. Applied Integral Transforms / M. Ya. Antimirov, A. A. Kolyshkin, R. Vaillancourt. — CRM : Monograph Series, AMS, 1993.

[223] Appell P. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite / P. Appell, J. Kampe de Feriet. — Paris : Gauthier-Villars, 1926.

[224] Applications of Hypergroups and Related Measure Algebras. Edited by Connett W.C., Gebuhrer M.–O., Schwartz F.L. —1995.—AMS Contemporary Mathematics.—No. 83.

[225] Baccar C. Inversion formulas for Riemann–Liouville transform and its dual associated with singular partial differential operators / C. Baccar, N. B. Hamadi, L. T. Achdi // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2006. — P. 1—26.

[226] Bailey W. N. Generalized hypergeometric series / W. N. Bailey. — Cambridge, 1964.

[227] Bers L. On a class of differential equations in mechanics of continua / L. Bers, A. Gelbart // Quart. of Appl. Math. — 1943. — V. 5. — No. 1. — P. 168–188.

[228] Bers L. On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — V. 56. — P. 67–93.

[229] Bers L. A remark on an applications of pseudo–analytic functions / L. Bers // Amer. J. Math. — 1956. — V. 78. — No. 3. — P. 486–496.

[230] Bozhinov N. Convolution Representations of Commutants and Multipliers / N. Bozhinov. —Sofia: Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, 1988.

[231] Bullen P.S. Means and Their Inequalities / P.S. Bullen, D.S. Mitrinovic, P.M. Vasic. — D. Reidel, 1988.

[232] Bullen P.S. Handbook of Means and Their Inequalities / P.S. Bullen. — Kluwer, 2003.

[233] Buschman R. G. An inversion integral for a general Legendre transformation / R. G. Buschman // SIAM Review. — 1963. — Vol. 5. — No. 3. — P. 232–233.

[234] Buschman R. G. An inversion integral for a Legendre transformation / R. G. Buschman // Amer. Math. Mon. — 1962. — V. 69. — No. 4. — P. 288–289.

[235] Carroll R. W. Singular and Degenerate Cauchy problems / R. W. Carroll, R. E. Showalter. — N.Y. : Academic Press, 1976.

[236] Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations / R. Carroll. — North Holland, 1979.

[237] Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / R. Carroll. — North Holland, 1982.

[238] Carroll R. Transmutation Theory and Applications / R. Carroll. — North Holland, 1986.

[239] Carroll R. Topics in Soliton Theory / R. Carroll. — North Holland, 1991.

[240] Carroll R. Toward a general theory of transmutation / R. Carroll, A. Boumenir // arXiv: funct-an/9501006.—1995.—19 p.

[241] Carroll R. Calculus Revisited / R. Carroll. — Springer, 2002.

[242] Chadan K. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems / Chadan K., Cotton D., Paivarinta L., Rundell W. — SIAM, 1997.

[243] Chebli H. Opérateurs de translation généralises et semigroupes de convolution / H. Chebli // — Springer Lect. Notes. — 1974. — No. 404. — P. 35–59.

[244] Chebli H. Sur un thèoréme de Paley–Winer associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm–Liouville sur $(0, \infty)$ / H. Chebli // J. Funct. Anal. — 1974. — No. 17. — P. 447–461.

[245] Chebli H. Positivité des opérateurs de "translation généralises"associé à un opérateur de Sturm–Liouville et quelques applications a l'analyse harmonique / H. Chebli. — These. — Strasbourg, 1974.

[246] Chebli H. Thèoréme de Paley–Winer associé à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$ / H. Chebli // Jour. Math. Pures Appl. — 1979. — No. 58. — P. 1–19.

[247] Cheikh B. Relations between harmonic analysis associated with two differential operators of different orders / B. Cheikh // Journal of

Computational and Applied Mathematics. — 2003. — V. 153. — No. 1. — P. 61–71.

[248] Colton D. Solution of Boundary Value Problems by the Method of Integral Operators / D. Colton. — London : Pitman Press, 1976.

[249] Colton D. Analytic Theory of Partial Differential Equations / D. Colton. — London : Pitman Press, 1980.

[250] Copson E. T. On the Riemann–Green Function / E. T. Copson // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1957/58. — V.1. — P. 324–348.

[251] Copson E. T. On a Singular Boundary Value Problem for an Equation of Hyperbolic Type / E. T. Copson // Arch. Ration.Mech. and Analysis 1. — 1957. No. 1. — P. 349–356.

[252] Copson E. T. On a Partial Differential Equation with Two Singular Lines / E. T. Copson, A. Erdelyi // Arch. Ration.Mech. and Analysis. — 1958. — V. 2. No. 1. — P. 76–86.

[253] Copson E. T. Partial Differential Equations / E. T. Copson. — Cambridge University Press, 1975.

[254] Deans S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications / S. R. Deans. — Dover, 1990.

[255] Delsarte J. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations lineáres aux dèrivées partielles du seconde ordre / J. Delsarte // — Paris : C. R. Acad. Sci. — 1938. — 206. — P. 1780–1782.

[256] Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor / J. Delsarte // Journ. Math. pures et appl. — 1938. — 17. — P. 217–230.

[257] Delsarte J. Une extension nouvelle de la théory de fonction presque périodiques de Bohr / J. Delsarte // Acta Math. — 1939. — 69. — P. 259–317.

[258] Delsarte J.Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation / J. Delsarte // Colloques Internat. Nancy. — 1956. — P. 29–44.

[259] Delsarte J. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe / J. Delsarte, J. L. Lions // Comm. Math. Helv. — 1957. — No. 32. — P. 113–128.

[260] Delsarte J. Moyennes généralisées / J. Delsarte, J. L. Lions // Comm. math. Helv. — 1959. — No. 34. — P. 59–69.

[261] Delsarte J. Lectures on Topics in Mean Periodic Functions And The Two-Radius Theorem / J. Delsarte // Bombay: Tata Institute of Fundamental Research,1961.

[262] Dimovski I. Convolutional Calculus. Kluwer Acad. Publ. / I. H. Dimovski. — Dordrecht, 1990.

[263] Dimovski I. H. Generalized Poisson transmutations and corresponding representations of hyper–Bessel functions / I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova // C. R. de l'Acad. bulgare des Sci. — 1986. — T. 39. — № 10. — P. 29–32.

[264] Dimovski I. H. Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel–type operators via Meijer G-functions / I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova // — Varna : Proc. Conf. Complex Anal. and Appl. 1983, Sofia. — 1985. — P. 45–66.

[265] Dimovski I. Commutants of the Dunkl operators in C(R) / I. Dimovski, V. Hristov, M. Sifi // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2006. — V. 9. — No. 3. — P. 195–213.

[266] Dunkl Ch. Differential–difference operators associated to reflection groups / Ch. Dunkl // —Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 311. — P. 167–183.

[267] Dunkl Ch. Intertwining operators associated to the group S3 / Ch. Dunkl // — Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — V. 347. — P. 3347–3374.

[268] Dunkl Ch. An Intertwining Operator for the Group B2 / Ch. Dunkl // —arXiv: math. CA/ 0607823. — 2006. — 27 p.

[269] Dwork B. Generalized hypergeometric functions / B. Dwork. — Oxford, 1990.

[270] Dwork B. Introduction to G-functions / B. Dwork, S. Gerotto, F.J. Sullivan. — Princeton, 1994.

[271] Dzrbashian M. M. Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain / M. M. Dzrbashian. —Birkhäuser, 1993.

[272] Erdelyi A. Some applications of fractional integration / A. Erdelyi // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note D1–82–0286. — 1963. — No 316. — 23 p.

[273] Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions / A. Erdelyi // SIAM Review. — 1964. — V. 12. — No. 1. — P. 15–30.

[274] Erdelyi A. An application of fractional integrals / A. Erdelyi // J. Analyse Math. — 1965. — V. 14. — P. 113–126.

[275] Erdelyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals / A. Erdelyi // Glasgow Math. J. — 1967. — V. 8. — No. 1. — P. 50–54.

[276] Erdelyi A. On the Euler–Poisson–Darboux equation / A. Erdelyi // J. Analyse Math. — 1970. — V. 23. — P. 89–102.

[277] Estrada R. Null Spaces Of Radon Transforms / Estrada R., Rubin B. // arXiv:1504.03766v1. — 2015. — 24 P.

[278] Exton H. Multiple Hypergeometric Functions and Applications / H. Exton. — New York : John Wiley and Sons, 1976.

[279] Gallardo L. Un analogue d'un theoreme de Hardy pour la transformation de Dunkl / L. Gallardo, Kh. Trimeche // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. — 2002. — V. 334. — P. 849—854.

[280] Gallardo L.A version of Hardy's theorem for the Dunkl transform / L. Gallardo, Kh. Trimeche // J. Aust. Math. Soc. — 2004. — V. 77. — P. 371-385.

[281] Gilbert R. Transformations, Transmutations and Kernel Functions / R. Gilbert, H. Begehr. V. 1–2. — Longman : Pitman, 1992.

[282] Gilbert R. Constructive Methods for Elliptic Equations / R. Gilbert. Springer Lecture Notes Math, 365, 1974.

[283] Gilbert R. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations / R. Gilbert. — N.Y.: Academic Press, 1969.

[284] Golenia J. The general differential–geometric structure of multidimensional Delsarte transmutation operators in parametric functional spaces and their applications in soliton theory / J. Golenia, A. M. Samoilenko, Ya. A. Prykarpatsky, A. K. Prykarpatsky // arXiv: math-ph/0404016. — 2004. — 10 p.

[285] Gorenflo R. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order / R. Gorenflo, F. Mainardi // New York : Springer, Wien. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. — 1997. — P. 223–278.

[286] Gorenflo R. Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications / R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi, S.V. Rogosin. — Springer, 2014.

[287] Higgins T. P. A hypergeometric function transform / T. P. Higgins // SIAM J. — 1964. — V. 12. — No. 3. — P. 601–612.

[288] Hille E. On the theory of linear integral equations / E. Hille, J. D. Tamarkin // Ann. Math. — 1930. — V. 31. — P. 479-528.

[289] Jafford K. Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets / K. Jafford // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1997. — V. 4. — No. 1. — P. 97–112.

[290] Kamoun L. Bessel–Struve intertwining operator and generalized Taylor series on the real line / L. Kamoun, M. Sifi // Integral Transforms and Special Functions. — 2005. — V. 16. — No. 1. — P. 39–55.

[291] Karlsson P. W. Multiple Gaussian hypergeometric series / P. W. Karlsson, H. M. Srivastava. — New York : Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, 1985.

[292] Kilbas A. A. H–transforms. Theory and applications / A. A. Kilbas, M. Saigo. — Chapman and Hall : CRC, 2004.

[293] Kilbas A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Truhillo. — Elsevier : North Holland Mathematical Studies. — V. 204, 2006.

[294] Kilbas A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems. Part I / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // Journal of Applicable Analysis. — 2001. — V. 78. — Nos. 1–2. — P. 153–192.

[295] Kilbas A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems. Part II / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // Journal of Applicable Analysis. — 2001. — V. 81. — No. 2. — P. 435–493.

[296] Kilbas A. A. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $\mathcal{L}_{\nu,r}$- spaces / A. A. Kilbas, O. V.Skoromnik // Integral Transforms and Special Functions. — 2009. V. 20. Issue 9. — P. 653–672.

[297] Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications / V. Kiryakova. — UK : Pitman Research Notes in Math. Series No. 301.—Longman Sci. UK.—1994.

[298] Kiryakova V. S. An explanation of Stokes phenomenon by the method of transmutations / V. S. Kiryakova // Proc. Conf. Diff. Equations and Appl., Rousse. — 1982. — P. 349–353.

[299] Kiryakova V. S. Applications of the generalized Poisson transformation for solving hyper-Bessel differential equations (In Bulgarian) / V. S. Kiryakova // Godishnik VUZ. Appl. Math. — 1986. — V. 22. — No 4. — P. 129–140.

[300] Kiryakova V. All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions / V. Kiryakova // J. Physics A: Math. & General. — 1997. — V. 30. — No. 14. — P. 5085–5103.

[301] Kiryakova V. The multi–index Mittag–Leffler functions as an important class of special functions of fractional calculus / V. Kiryakova // Computers and Mathematics with Applications. — 2010. — V. 59. Issue 5. — P. 1885–1895.

[302] Kiryakova V. Multiple (multiindex) Mittag–Leffler functions and relations to generalized fractional calculus / V. Kiryakova // Journal

of Computational and Applied Mathematics. — 2000. —V. 118.— Iss. 1–2. — P. 241-259.

[303] Kober H. On a Theorem of Schur and On Fractional Integrals of Purely Imaginary Order / H. Kober // Transactions of the American Mathematical Society. — 1941. — V. 50. — No. 1. — P. 160–174.

[304] Koornwinder T. H. Fractional integral and generalized Stieltjes transforms for hypergeometric functions as transmutation operators / T. H. Koornwinder // arXiv:1504.08144v2. — 2015. — 25 P.

[305] Kravchenko V. V. Applied Pseudoanalytic Function Theory / V. V. Kravchenko. — Birkhäuser Verlag, 2009.

[306] Kravchenko V. V. Representation of solutions to the one-dimensional Schr?dinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions / V. V. Kravchenko, L. J. Navarro, S. M. Torba // — 2015. arXiv:1508.02738. — 26 P.

[307] Kravchenko V. V. Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions. Complex Analysis and Operator Theory / V. V. Kravchenko, L. J. Navarro, S. M. Torba // — 2015. V. 9. Issue 2. — P. 379–429.

[308] Kravchenko V. V. Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems / V. V. Kravchenko, S. M. Torba // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2015. V. 275. — P. 1–26.

[309] Kravchenko V. V. Transmutations, L-bases and complete families of solutions of the stationary Schrödinger equation in the plane / H. Campos, V. V. Kravchenko, S. M. Torba // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. V. 389. Issue 2. — P. 1222–1238.

[310] Kravchenko V. V. Transmutations for Darboux transformed operators with applications / V. V. Kravchenko, S. M. Torba // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2012. V. 45. Issue 7. № 075201. — 21 p.

[311] Kufner A. The Hardy Inequality / A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson.—Pilsen, 2007.

[312] Lions J. L. Equations differentielles operationnelles et problémes aux limites / J. L. Lions.—Springer, 1961.

[313] Lions J. L. Opérateurs de Delsarte et problème mixte / J. L. Lions // — France : Bull. Soc. Math. France. — 1956. — No. 84. — P. 9–95.

[314] Lions J. L. Quelques applications d'opérateurs de transmutations / J. L. Lions // Colloques Internat. Nancy. — 1956. — P. 125–142.

[315] Love E. R. Some integral equations involving hypergeometric functions / E. R. Love // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1967. — V. 15. — No. 3. — P. 169–198.

[316] Love E. R. Two more hypergeometric integral equations / / E. R. Love // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1967. — V. 63. — No. 4. — P. 1055–1076.

[317] Lowndes J. S. An application of some fractional integrals / J. S. Lowndes // Glasgow Math. J. — 1979. — V. 20. — No 1. — P. 35–41.

[318] Lowndes J. S. On some generalizations of Riemann–Liouville and Weil fractional integrals and their applications / J. S. Lowndes // Glasgow Math. J. — 1981. — Vol. 22. — No 2. — P. 73–80.

[319] Lowndes J. S. Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients / J. S. Lowndes // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1983. — V. 26. — No 3. — P. 97–105.

[320] Ludwig D. The Radon transform on Euclidean space / D. Ludwig // Math. Meth. in the Appl. Sci. — 1980 (2). — P. 108–109.

[321] Luke Y. L. Mathematical functions and their approximations / Y. L. Luke. — Academic Press, 1975.

[322] Luke Y. L. The special functions and their approximations / Y. L. Luke. – -Academic Press. V. 1, 1969.

[323] Lyakhov L. N. Inversion of general Riesz B-potentials with homogeneous characteristic in weight classes of functions / L. N. Lyakhov, E. L. Shishkina // Doklady Mathematics. — 2009. — 79(3). — P. 377-381.

[324] Lyakhov L. N. On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation / L. N. Lyakhov, I. P. Polovinkin, E. L. Shishkina // — Differential Equations. — 2014. — 50(4). — P. 513–525.

[325] Matveev V. B. Darboux–Backlund transformations and applications / V. B. Matveev, M. I. Salle. — NY, Springer, 1991.

[326] Matveev V. B. Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform, the related functional identities and beyond / V. B. Matveev // Inverse Problems. — 2001. — V. 17. — P. 633-–657.

[327] Mitrinović D.S. Classical and new inequalities in analysis / D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink. — Kluwer, 1993.

[328] Olver F.W.J. NIST Handbook of Mathematical Functions / F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[329] Opic B. Hardy–Type Inequalities / B. Opic, A. Kufner. — Longman, 1990.

[330] Ozaktas H. The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing / H. Ozaktas, Z. Zalevsky, M. Kutay.— Wiley, 2001.

[331] Pike S. Scattering. Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science / S. Pike, P. Sabatier. Vol. 1–2. Academic Press, 2002.

[332] Rodrigues J. Operational calculus for the generalized Bessel operator / J. Rodrigues // SERDICA, Bulgaricae mathematicae publicationes. — 1989. — V. 15. — P. 179–186.

[333] Rösler M. Positivity of Dunkl's intertwining operator / M. Rösler // Duke Math. J. — 1999. — V. 98. — P. 445–463.

[334] Rösler M. Dunkl operators: theory and applications. Orthogonal Polynomials and Special Functions / M. Rösler // — Berlin–Heidelberg–New York : LNIM 1817. Springer. — 2003. — P. 93–135.

[335] Rubin B. Radon transforms and Gegenbauer—Chebyshev integrals, I / Rubin B. // Anal. Math. Phys. — 2016.

[336] Rubin B. Gegenbauer–Chebyshev Integrals And Radon Transforms / Rubin B. // arXiv:1410.4112v2. — 2015. — 58 P.

[337] Rubin B. On the Funk–Radon–Helgason inversion method in integral geometry / Rubin B. // Contemp. Math. — 2013. — V. 599. — P. 175–198.

[338] Samko S. G. Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[339] Samoilenko A. M. The generalized de Rham–Hodge theory aspects of Delsarte-Darboux type transformations in multidimension / A. M. Samoilenko, Ya. A. Prykarpatsky, A. K. Prykarpatsky

// Central European Journal of Mathematics.—2005.—Vol. 3.— No. 3.—P. 529–557.

[340] Shishkina E. L. Inversion of integral of B-potential type with density from Φ_γ / E. L. Shishkina // Journal of Mathematical Sciences. — 2009. — 160(1). — P. 95–102.

[341] Siersma J. Thesis / J. Siersma. — Groningen, 1979.

[342] Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications / A. L. Skubachevskii. — Birkhäuser, 1997.

[343] Slater L. J. Generalized hypergeometric functions / L. J. Slater.— Cambridge University Press, 1966.

[344] Sprinkhuizen-Kuyper I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator / I. G. Sprinkhuizen-Kuyper // J. Math.Analysis and Applications. — 1979. — No. 72. — P. 674-702.

[345] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. — Utrecht: VSP, 2003.

[346] Ta Li. A new class of integral transform / L. Ta // Proc. AMS. — 1960. — V. 11. — No. 2. — P. 290–298.

[347] Ta Li. A note on integral transform / L. Ta // Proc. AMS. — 1961. — V. 12. — No. 6. — P. 556.

[348] Trimeche K. Transformation intégrale de Weil et thèoréme de Paley–Winer associés à un opérateur différentiel singulier sur $(0,\infty)$ / K. Trimeche // Jour. Math. Pures Appl. — 1981. — No. 60. — P. 51–98.

[349] Trimeche K. Transformation intégrale de Riemann–Liouville généralises et convergence des series de Taylor généralisées au

sens de Delsarte / K. Trimeche // Rev. Fac. Sci. Tunis. — 1981. — No. 1. — P. 7–14.

[350] Trimeche Kh. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators / Kh. Trimeche // Mathematical Reports. — V. 4, Part 1. — USA : Harwood Academic Publishers, 1988.

[351] Trimeche Kh. Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets / Kh. Trimeche // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1997. — V. 4. — No. 1. — P. 97-–112.

[352] Trimeche Kh. Generalized Harmonic Analysis and Wavelet Packets (an Elementary Treatment of Theory and Applications) / Kh. Trimeche — Taylor & Francis, 2001.

[353] Trimeche Kh. Inversion of the Dunkl intertwining operator and its dual using Dunkl wavelets / Kh. Trimeche // Rocky Mountain Journal Of Mathematics. — 2002. — V. 32. — No. 2. — P.889–895.

[354] Virchenko N. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications / N. Virchenko, I. Fedotova // — World Scientific, 2001.

[355] Virchenko N. On Some Generalized Symmetric Integral Operators of Buschman-Erdelyi's Type / N. Virchenko // Nonlinear Mathematical Physics. — 1996. — V.3. — No.3—4. — P.421-–425.

[356] Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations / V.V. Volchkov // Kluwer, 2003.

[357] Weinstein A. Discontinuos integrals and generalized theory of potential / A. Weinstein // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — V. 63. — No. 2. — P. 342–354.

[358] Weinstein A. Generalized axially symmetric potential theory / A. Weinstein // Bull. Amer. Math. Soc. — 1953. — V. 59. — P. 20—38.

[359] Weinstein A. Selecta / A. Weinstein. — Pitman, 1978.