ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

МАКАРОВА АЛЛА ВИКТОРОВНА

О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор Ю.Е. Гликлих

Воронеж – 2016

Оглавление

Используемые обозначения

Мы используем координатное описание векторов (как столбцов) и линейных операторов (как матриц). Если X – вектор-столбец, то транспонированный вектор (строка) обозначается X^*. Аналогичный символ $*$ используется для транспонирования матриц. Подобные обозначения используются и для некоторых объектов на гладких многообразиях.

Пространство $n \times n$ матриц обозначается $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символом $\mathrm{S}(n)$ мы обозначаем пространство симметрических $n \times n$ матриц – подпространство в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символ $\mathrm{S}_+(n)$ используется для обозначения множества положительно определенных симметрических $n \times n$ матриц, которые образуют открытое выпуклое подмножество в $\mathrm{S}(n)$. Его замыкание – множество неотрицательно определенных матриц – обозначается $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$. Для группы унимодулярных (т.е. имеющих единичные определитель) $n \times n$ матриц мы используем стандартное обозначение $SL(n)$.

Символ $S_{LC}(n)$ обозначает множество симметрических $n \times n$ положительно определенных матриц с постоянным (равным $C > 0$) определителем.

Везде далее для множества B в $\mathbb{R}^n$ или в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ символ $\|B\|$ означает $\sup\limits_{y \in B} \|y\|$. Это стандартное обозначение теории многозначных отображений, которое, конечно, не означает, что наборы множеств образуют нормированное пространство.

Всюду в работе используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу.

Введение

Понятие производных в среднем было введено Э.Нельсоном (см. [26, 27, 28]) в шестидесятых годах двадцатого века для нужд стохастической механики (варианта квантовой механики). Уравнение движения, в этой теории, было первым примером уравнений с производными в среднем. Затем было показано, что в терминах уравнений с производными в среднем описывается движение вязкой несжимаемой жидкости (см., например, [20, 21, 22]), а также вихри в ней (например в [19]), некоторые модели экономики [18] и многие другие. В работах Ю.Е. Гликлиха [5] было начато изучение уравнений с производными в среднем как отдельного класса стохастических дифференциальных уравнений.

Э.Нельсоном были введены понятия производных слева, производных справа, симметрических производных и антисимметрических производных. Текущая скорость – это симметрическая производная в среднем случайного процесса. Она является естественным аналогом обычной физической скорости детерминированной кривой. Осмотические скорости показывают как быстро изменяется "случайность"процесса. Производная справа дает информацию о сносе случайного процесса.

В работах С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха, построена дополнительно так называемая квадратичная производная в среднем, связанная с коэффициентом диффузии, что позволило корректно поставить задачу о нахождении процесса по его производным в среднем.

Теория стохастических дифференциальных включений, начиная с работ Э.Д. Конвея [17], Кри [24], Ж.П. Обена и Дж. Да Прато [15] и до настоящего времени, активно развивается (см., например, статьи М. Киселевича, М. Михты и Е. Мотыля и литературу в них в специальном выпуске журнала Dynamic Systems and Applications 2007 г., [23, 25]).

Начиная с работ С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха (см. например [12], [14], [13]) , дифференциальные включения с производными в среднем, рассматривались как отдельный класс включений.

В связи с заданием сложных физических процессов уравнениями и включениями с производными в среднем, возникла задача об описании включений с текущими скоростями (в терминах, так называемых, производных в среднем) и о разрешимости этих включений.

В работах С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха [12, 13] было показано, что если заданы текущая скорость и квадратичная производная в среднем (дающая информацию о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную. Если заданы многозначная текущая скорость и квадратичная производная, то уравнение превращается во включение. Для такой задачи у С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха (см. [12]) было получено утверждение о существовании решения для случая, когда заданы многозначная текущая скорость и однозначная квадратичная производная при некоторых очень строгих условиях. Поэтому было важно дальнейшее исследование разрешимости подобного рода включений, в более общих случаях для текущей скорости и квадратичной производной.

В качестве базовой теоремы мы используем теорему о существовании решений для уравнений с текущими скоростями, которая была представлена в работе [13]. Данная теорема требует гладкость правой части уравнений, что существенно усложняет изучение включений с текущими скоростями с помощью аппроксимаций. Отметим, что другие теоремы существования решений для уравнений с текущими скоростями в настоящее время не известны.

Чтобы избежать технических сложностей, мы рассмотрим включение первого порядка с текущими скоростями на плоском n-мерном торе $\mathbb{T}^n$ (т.е. риманова метрика на $\mathbb{T}^n$ наследуется из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решётке). Удобство использования $\mathbb{T}^n$ объясняется тем, что $\mathbb{T}^n$ является компактным многообразием и, следовательно, все гладкие объекты на нём ограничены, и при этом геометрические свойства исследуемых объектов такие же, как в $\mathbb{R}^n$.

Цель работы. Исследование дифференциальных включений с текущими скоростями и доказательство существования их решений.

Методика исследований состоит в использовании современного глобального и стохастического анализа, идей и методов функционального анализа.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Наиболее важными из них являются следующие:

Найдены условия разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями при условии, что правая часть включения с квадратичной производной автономна

1. в случае непрерывных многозначных текущей скорости и квадратичной производной с телесными выпуклыми замкнутыми образами, а также с нетелесными, лежащими в подпространствах постоянной размерности;

2. в случае, когда правые части имеют гладкие ε-аппроксимации с равномерно ограниченными первыми частными производными;

3. в случае полунепрерывных сверху правых частей с выпуклыми замкнутыми ограниченными образами;

4. в случае полунепрерывных многозначных текущих скоростей и многозначных квадратичных производных в среднем со значениями в множестве симметрических матриц с постоянным определителем;

5. в случае полунепрерывных снизу правых частей с выпуклыми замкнутыми ограниченными образами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в работе результаты важны для исследования задач математической физики, экономики и др.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международных математических школах-симпозиумах КРОМШ-2009, КРОМШ-2011, КРОМШ-2015 (Севастополь 2009,2011,2015); на IV Международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования" (Воронеж 2011); Крымской Международной Математической Конференции КММК-2013 (Судак 2013); Российской Школы-Конференции "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании” (Москва 2009); на “Международной конференции по стохастическим методам” Ростов-на-Дону - 2016; на научных сессиях Воронежского государственного университета 2011-2015 годов.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [29] – [41]. Из совместных работ [31, 32, 36, 40] в диссертацию вошли результаты, полученные только лично диссертантом. Работы [31, 32] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 14 параграфов, и списка литературы. Общий объём работы – 80 страниц. Библиография содержит 41 наименование.

Краткое содержание работы.

Первая глава работы носит вспомогательный характер и содержит необходимые сведения из теории многозначных отображений, стохастического анализа. В частности, даются определения классических производных в среднем, задается квадратичная производная.

Пусть $\mathcal{T}^n$ – плоский n-мерный тор. Мы рассматриваем случайные процессы в $\mathcal{T}^n$ заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\xi(t)$ – такой процесс.

Обозначим через $\mathcal{N}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$ порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ отображением $\xi(t) : \Omega \to \mathcal{T}^n$; $\mathcal{N}_t^\xi$ называется “настоящим” для $\xi(t)$.

Обозначим через E_t^ξ условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$.

Определение 1.7 *(i) Производная справа $D\xi(t)$ задается формулой*
$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t\to+0} E_t^{\xi}(\frac{\xi(t+\triangle t)-\xi(t)}{\triangle t}),$$
где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и $\triangle t\to+0$ означает, что $\triangle t$ стремится к нулю и при этом $\triangle t>0$.

Показано, что для диффузионного процесса $\xi(t)$ значение $D\xi(t)$ равно сносу этого процесса, в который подставлено $\xi(t)$. Аналогично вводится понятие производной слева $D_*\xi(t)$.

Определение 1.8 *(ii) производная слева $D_*\xi(t)$ задается формулой*
$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^{\xi}(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t})$$
где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и $\triangle t\to+0$ означает, что $\triangle t$ стремится к нулю и при этом $\triangle t>0$.

Следуя [5], зададим дифференцирование D_2 формулой
$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t\to+0} E_t^{\xi}(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*}{\triangle t}), \qquad (1.6)$$
где $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))$ – вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ – вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор). Результат этого матричного произведения – матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения в множестве симметрических неотрицательно определенных тензоров (матриц) типа $(2,0)$.

Определение 1.9 *Введем симметрическую производную в сред-*

нем $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ *и антисимметрическую производную в среднем* $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$

Рассмотрим также векторы $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}\ (a^\xi(t,x) +\ a^\xi_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}\ (a^\xi(t,x) - a^\xi_*(t,x))$.

Определение 1.10 *Вектор* $v^\xi(t)) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ *называется текущей скоростью процесса* $\xi(t)$, *а* $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ *называется осмотической скоростью процесса* $\xi(t)$.

В работах Э.Нельсона показано, что с физической точки зрения именно текущая скорость является аналогом обычной скорости детерминированных процессов.

Вводится понятие дифференциальных уравнений с текущими скоростями:

Пусть $v(t,m)$ – векторное поле, $\alpha(t,m)$ – симметрическое неотрицательно определенное $(2,0)$-тензорное поле на торе $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) &= v(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) &= \alpha(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{1.7}$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка.*

Определение 1.11 *Говорят, что (1.7) на* $\mathcal{T}^n$ *имеет решение на* $[0,T]$ *с начальным условием* $\xi(0) = \xi_0$ *если существует вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *и процесс,* $\xi(t)$ *заданный на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *и принимающий значения в* $\mathcal{T}^n$, *такой, что* $\xi(0) = \xi_0$ *и для почти всех* $t \in [0,T]$ *уравнение (1.7) выполняется* P-*п.н. для* $\xi(t)$.

Отметим следующее важное обстоятельство. В работе мы используем теорему существования решений уравнения (1.7), доказанную С.В. Азариной и Ю.Е. Гликлихом, в предположениях, что правые части (1.7) гладки и ограничены, а также что плотность распределения начального условия гладка и нигде не равна нулю. Поэтому при исследовании разрешимости включений с текущими скоростями стандартные приемы, использующие существование непрерывных селекторов или непрерывных ε-аппроксимаций требуют модификации.

Вторая глава содержит полученные автором технические утверждения, широко используемы в дальнейшем. Основным результатом §2.1 является описание любой матрицы из $S_{LC}(n)$ с использованием матриц из специальных подпространств пространства матриц $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – пространство $\mathsf{T}_-(n)$ нижне-треугольных $n \times n$ матриц с нулями на диагонали – и $\mathsf{L}_0(n)$ – пространство диагональных матриц с нулевым следом. Связь с этих подпространств с $S_{LC}(n)$ осуществляется специальными отображениями, которые обозначаются T и L_C, соответственно. Это представление позволяет использовать аппарат многозначных отображений с выпуклыми образами, в то время как множество $S_{LC}(n)$ не является линейным пространством и в нем понятие выпуклого подмножества не корректно. Кроме этого описывается конструкция римановой метрики на торе, порожденной гладкой невыроженной правой частью для квадратичной производной в среднем в уравнении с текущими скоростями, а также формы объема этой римановой метрики .

В §2.2 доказывается одно утверждение о слабой компактности мер на пространстве непрерывных кривых, соответствующих решениям уравнений с текущими скоростями.

В **третьей главе** от уравнений мы переходим к включениям с текущими скоростями. Пусть $\mathbf{v}(t, m)$ – многозначное векторное поле,

$\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ – многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in \mathbf{v}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{3.1}$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка. Понятие решение включения (3.1) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в Определении (1.11).

Основным результатом §3.1 является доказательство следующих теорем:

Теорема 3.1 *Пусть* $\mathbf{v}(t,m)$ *– многозначное равномерно ограниченное векторное поле на* $\mathcal{T}^n$*, имеющее гладкий селектор, а* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *– многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле, также имеющее гладкий селектор, со значениями в* $S_+(n)$*. Пусть* ξ *– случайный элемент со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, чья плотность* ρ_0 *гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0)=\xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, которое существует на всем интервале* $t\in[0,T]$.

Далее для телесного замкнутого выпуклого множества A и вектора V в $\mathbb{R}^n$ мы вводим так называемую опорную функцию $\Psi(A,V) = \sup\limits_{y\in A}(y,V)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Рассматриваем многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$, у которого образы телесны, выпуклы и замкнуты. Поскольку касательное расслоение к тору тривиально, мы рассматриваем постоянное векторное поле V на торе. Через $\Psi(t,m,V)$ обозначили опорную функцию $\Psi(\mathbf{v}(t,m),V)$. Пусть также $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ с телесными, выпуклыми, замкнутыми образами. Так как $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ принимает значения в $S_+(n) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, что является линейным пространством, мы строим опорную функцию $\Psi_1(t, m, V_1)$ для $\boldsymbol{\alpha}(t, m)$, по аналогии с приведенной выше схемой, где V_1 постоянное $(2, 0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$.

При следующих условиях мы доказываем теоремы существования решений для случая телесных, выпуклых замкнутых образов:

Условие 3.2 *При любом V и V_1 функции $\Psi(t, m, V)$ и $\Psi_1(t, m, V_1)$ являются гладкими.*

Теорема 3.3 *Пусть $\mathbf{v}(t, m)$ – многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле на $\mathcal{T}^n$ имеющее телесные, выпуклые замкнутые образы и удовлетворяющее Условию (3.2), а $\boldsymbol{\alpha}(m)$ – многозначное $(2, 0)$-тензорное поле так же имеющее телесные, замкнутые, выпуклые образы, и так же удовлетворяющее Условию (3.2). Кроме того, пусть случайный элемент ξ, со значениями в $\mathcal{T}^n$, имеет плотность гладкую, нигде не равную нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (3.1) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0, T]$.*

Далее, мы рассматриваем случай, когда образы $\mathbf{v}(t, m)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, m)$ не телесны. Вместо этого мы предполагаем, что каждое отображение $\mathbf{v}(t, m)$ $(\boldsymbol{\alpha}(t, m))$, принадлежит подпространству в $T_m\mathcal{T}^n$ (подпространству в пространстве $(2, 0)$-тензоров в m, соответственно), причем, указанные подпространства имеют постоянную размерность k (k_1, соответственно) не зависящую от $m \in \mathcal{T}^n$. Если, поставить в соответствие, каждому $m \in \mathcal{T}^n$, вышеуказанное подпространство, то получим отображение Φ из $\mathcal{T}^n$ в многообразие афинных подпространств с размерностью k касательного пространства $T_m\mathcal{T}^n$ (отображение Φ_1 в многообразие афинных подпространств, пространства $(2,0)$- тензоров)

Условие 3.4 *Отображения Φ и Φ_1 являются гладкими*

Теорема 3.5 *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(t,m)$) – многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле ($(2,0)$ - тензорное поле со значениями в $S_+(n)$) на $\mathcal{T}^n$ такое, что каждый образ $\mathbf{v}(t,m)$ лежит подпространстве в $T_m\mathcal{T}^n$ (каждый образ $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ лежит в подпространстве, пространства $(2,0)$-тензоров, соответственно), причем указанные подпространства имеют постоянную размерность $k<n$ ($k_1<n$, соответственно), не зависящую от $m\in\mathcal{T}^n$, и выполнено Условие 3.4. Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$ включение (3.1) имеет решение, которое существует на всем интервале $t\in[0,T]$.*

В §3.2 получен результат для случая, когда существуют ε-аппроксимации правой части включения с равномерно ограниченными первыми частными производными.

Теорема 3.6 *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathbb{T}^n$ и многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathcal{T}^n$ автономны, равномерно ограничены и имеют замкнутые образы. Пусть существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k\to 0$ такая, что для любого ε_k поле $\mathbf{v}(m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(m)$, соответственно)имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_k(m)$ ($\alpha_k(m)$, соответственно)и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности $t\in[0,T]$ и $m\in\mathbb{T}^n$ первые частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial m^k}$ ($\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial q^k}$, соответственно). Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$, включение (3.1) имеет решение, определенное на всем интервале $t\in[0,T]$*

В §3.3 рассматривается случай полунепрерывных сверху правых частей.

Теорема 3.7 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *и многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$*, принимающее значения в* $S_+(n)$*, на* $\mathcal{T}^n$ *автономны, равномерно ограничены, имеют замкнутые выпуклые образы и полунепрерывны сверху. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *с гладкой плотностью нигде не равной нулю, включение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

§3.4 посвящен важному для приложений случаю, когда правая часть соотношения с квадратичной производной принимает значения в симметрических матрицах с постоянным определителем. Мы предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие 3.8

(i) Многозначное $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *на* $\mathcal{T}^n$ *принимает значения в* $S_{LC}(n)$*; оно автономно и полунепрерывно сверху.*

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ *замкнуты и равномерно ограничены.*

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ *множество* $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{T}_-(n)$ *и множество* $\mathsf{L_C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{L}_0(n)$.

Теорема 3.9 *Пусть* $\mathbf{v}(t, m)$ *– многозначное равномерно ограниченное векторное поле на* $\mathcal{T}^n$*, имеющее гладкий селектор* $v(t, m)$*, а* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *– многозначно* $(2,0)$*-тензорное поле, удовлетворяющее условию 3.8. Пусть также* ξ_0 *– случайный элемент со значениями в* $\mathcal{T}^n$*,чье вероятностное распределение, относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$ *где* ρ_0 *гладко и нигде не обращается в ноль. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, определенное при* $t \in [0, T]$.

Частным случаем рассмотренной выше в этом разделе ситуации является **Теорема 3.10**, в условии которой $\mathbf{v}$ имеет гладкий селектор (например, однозначно и гладко), а поле $\boldsymbol{\alpha}$ многозначно и принимает значения в симметрических матрицах с единичным определителем, то есть в $SL(n)\bigcap S_+(n)$.

В §3.4.2 доказывается разрешимость включения (3.1) в случае, когда у поля $\mathbf{v}$ нет гладкого селектора, но существуют гладкие ε-аппроксимации.

Условие 3.11 *Многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы. Существует последовательность положительных чисел* $\varepsilon_k \to 0$ *такая, что для любого* ε_k *поле* $\mathbf{v}(m)$ *имеет гладкую* ε_k*-аппроксимацию* $v_i(m)$ *и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности* $t \in [0,T]$ *и* $m \in \mathbb{T}^n$ *первые частные производные* $\frac{\partial v_i}{\partial m_j}$.

Теорема 3.13 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t,m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *удовлетворяет Условию 3.11, а многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет Условию 3.8.*

Рассмотрим случайный элемент ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого распределение относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$*, где* ρ_0 *гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0)=\xi_0$ *влючение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0,T]$.

В §3.4.3 получен результат для случая существования непрерывных ε-аппроксимаций полей $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\alpha}$.

В этом случае мы накладываем на $\mathbf{v}(t,m)$ следующее условие:

Условие 3.14 *Многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *автономно, полунепрерывно сверху, равномерно ограниченно с замкну-*

тыми выпуклыми образами.

Теорема 3.15 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t,m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *удовлетворяет Условию 3.14 и многозначное* $(2,0)$*- тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет Условию 3.8. Рассмотрим случайный элемент* ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, чья плотность распределения, относительно формы объема* Λ_E *равна* $\sqrt{C}\rho_0$ *где* ρ_0 *гладка и нигде не обращается в ноль. Тогда для начального условия* $\xi(0)=\xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t\in[0,T]$.

И наконец, в §3.5 получены результаты для случая полунепрерывности снизу правой части включения (3.1).

Сначала рассматривается общий случай.

Теорема 3.16. *Пусть поля* $\mathbf{v}$ *и* $\boldsymbol{\alpha}$ *автономны, полунепрерывны снизу, равномерно ограничены в соотвествующих пространствах полей и имеют выпуклые замкнутые образы.*

Рассмотрим случайный элемент ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого плотность* ρ_0 *относительно евклидовой формы объема* Λ_E *гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0)=\xi_0$ *влючение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t\in[0,T]$.

Затем рассматриваентся случай, когда поле $\boldsymbol{\alpha}$ принимает значения в $S_{LC}(n)$.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ удовлетворяет следующим условиям:

Условие 3.17 *(i) Многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *на* $\mathcal{T}^n$ *принимает значения в* $S_{LC}(n)$*; оно автономно и полунепрерывно снизу.*

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ *замкнуты и равномерно ограничены.*

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ множество $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{T}_-(n)$ и множество $\mathsf{L}_\mathsf{C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{L}_0(n)$.

Теорема 3.18 *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathcal{T}^n$ автономно, равномерно ограничено, полунепрерывно снизу и имеет выпуклые образы, а многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(m)$ удовлетворяет Условию 3.17. Рассмотрим случайный элемент ξ_0 со значениями в $\mathcal{T}^n$, у которого плотность ρ_0 относительно евклидовой формы объема Λ_E гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ влючение (3.1) имеет решение, определенное на всем интервале $t \in [0, T]$.*

Глава 1

Предварительные сведения

В этой главе, на основании публикаций [26, 27, 28, 20, 4, 2] приводятся необходимые предварительные сведения из теории многозначных отображений и стохастического анализа. В частности, даются определения классических производных в среднем по Нельсону и понятия стохастических дифференциальных уравнений и включений в терминах, так называемых, текущих скоростей(прямых аналогов обычной скорости детерминированных систем) и квадратичных производных в среднем (дающих информацию на коэффициент диффузии). Дается понятие решения стохастических дифференциальных уравнений и включений с текущими скоростями.

1.1 Многозначные отображения

Рассмотрим метрические пространства X и Y. Пусть F обозначает многозначное отображение из X в Y.

Определение 1.1 *Будем говорить, что при заданном $\varepsilon > 0$ непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ является ε-аппроксимацией многозначного отображения $F : X \to Y$, если график* *отображения f, как множество в $X \times Y$, лежит в ε-окрестности графика отображения F.*

Определение 1.2 *Многозначное отображение $F : x \to Y$ называется полунепрерывным снизу в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x)$ такая, что из $x' \in U(x)$ следует, что $F(x)$ лежит в ε-окрестности множества $F(x')$. F называется поулнепрерывным снизу на X, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке.*

Определение 1.3 *Многозначное отображение называется полунепрерывным сверху в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что из $x' \in U(x)$ следует, что $F(x')$ лежит в ε-окрестности множества $F(x)$. F называется полунепрерывным сверху на X, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке.*

Определение 1.4 *Если отображение F одновременно полунепрерывно снизу и сверху, то оно называется непрерывным по Хаусдорфу (или просто непрерывным).*

Для множеств A и B уклонение и метрика Хаусдорфа вводятся следующим образом

$$\bar{H}(A, B) = \sup_{a \in A} \operatorname{dist}(a, B) \quad \text{и} \quad H(A, B) = \max\{\bar{H}(A, B), \bar{H}(B, A)\}.$$

Отображения непрерывные в смысле определения 1.4 непрерывны относительно метрики Хаусдорфа.

Определение 1.5 *Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется сечением многозначного отображения F, если для каждого $x \in X$ выполняется включение $f(x) \in F(x)$.*

Теорема 1.6 (Майкла) *Если X – произвольное метрическое пространство, а Y – банахово пространство, то полунепрерывное снизу отображение такое, что образ любой точки является выпуклым замкнутым множестовм, имеет непрерывное сечение.*

Известно, что полунепрерывные сверху отображения с выпуклыми замкнутыми значениями обладают ε-аппроксимациями для любого $\varepsilon > 0$ (см. [2])

1.2 Производные в среднем. Текущие скорости

Пусть $\xi(t)$ – стохастический процесс в $\mathbb{R}^n$ при $t \in [0; T]$, определённый на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ такой, что $\xi(t)$ является L^1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

(i) "прошлое" $\mathcal{P}^{\xi}_t$ – порожденное прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $0 < s < t$;
(ii) "будущее" $\mathcal{F}^{\xi}_t$ – порожденное аналогичным образом для $t < s < T$;
(iii) "настоящее" $\mathcal{N}^{\xi}_t$ – порожденное самим отображением $\xi(t)$.

Все семейства должны быть полными, то есть содержать все множества вероятности нуль.

Для удобства обозначим E^{ξ}_t – условным математическим ожиданием. $E(\cdot|\mathcal{N}^{\xi}_t)$ относительно "настоящего" $\mathcal{N}^{\xi}_t$ для $\xi(t)$.

В этом разделе мы используем понятия прошлого, будущего и настоящего, введенные в §1.2. Итак, учитывая изложенное в §1.2, пусть $\mathcal{T}^n$ – плоский n-мерный тор. Мы рассматриваем случайные процессы в $\mathcal{T}^n$ заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$. Напомним, что через E_t^ξ обозначено условное математическое ожидание относительно настоящего процесса $\xi(\cdot)$ в момент времени t. Следуя [26, 27, 28, 20, 4, 2] ведем следующие понятия.

Определение 1.7 *Производная в среднем справа $D\xi(t)$ стохастического процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \downarrow 0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} \Big), \tag{1.1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \downarrow 0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Определение 1.8 *Производной в среднем слева $D_*\xi(t)$ стохастического процесса $\xi(t)$ в момент времени t назовём L_1- случайную величину вида*

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \downarrow 0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t) - \xi(t - \triangle t)}{\triangle t} \Big), \tag{1.2}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \downarrow 0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Как обычно, (см., например, [10]), существуют измеримые по Борелю векторные поля (называемы регересиями) $a^\xi(t, m)$ и $a_*^\xi(t, m)$ такие, что $D\xi(t) = a^\xi(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = a_*^\xi(t, \xi(t))$, соответственно.)

Определение 1.9 *Введем симметрическую производную в среднем $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ и антисимметрическую производную в среднем $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$*

Рассмотрим также векторы $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}\ (a^\xi(t,x) + \ a_*^\xi(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}\ (a^\xi(t,x) - a_*^\xi(t,x))$.

Определение 1.10 *Вектор $v^\xi(t)) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$, а $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

Физический смысл полей v^ξ и u^ξ – следующий (см.[28]). Допустим, $\xi(t)$ описывает движение физического процесса, например, движение частицы (так как любой физический процесс является случайным с маленькой дисперсией настолько, что его можно не считать случайным). Текущая скорость v^ξ является тем, что обычно называют физической скоростью, тогда как осмотическая скорость u^ξ показывает насколько быстро частица "диффундирует"в окружающем пространстве, т.е. показывает насколько быстро меняется "случайность"процесса. Эта интерпретация основана на следующей математической мотивации.

Рассмотрим автономное гладкое поле невырожденных линенйых операторов $A(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{T}^n$. Предположим, что $\xi(t)$ – процесс диффузионного типа, у которого в диффузионном слагаемом подинтегральная функция равна $A(t,\xi(t))$. Тогда его коэффициент диффузии $A(t,x)A^*(t,x)$ является гладким полем симметрических положительно определенных тензоров типа $(2,0)$ с матрицами $\alpha(t,x) = (\alpha^{ij}(t,x))$. Так как все эти матрицы невырождены, поле обратных матриц (α_{ij}) существует и является гладким, кроме того в каждом (t,x) матрица $(\alpha_{ij})(t,x)$ симметрична и положительно определена. Таким образом, на $\mathcal{T}^n$ задаем новую риманову метрику (гладкое поле симметрических положительно определенных $(0,2)$ тензоров) $\alpha(\cdot,\cdot) = \alpha_{ij}dx^i dx^j$. Рассмотрим ее форму объема $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Обозначим через $\rho^\xi(t,x)$ вероятностную плотность процесса $\xi(t)$ относительно формы объема $dt \wedge \Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ на $[0,T] \times \mathcal{T}^n$, т.е. для любой непрерывной ограниченной функции $f : [0,T] \times \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\int_0^T E(f(t,\xi(t)))\, dt = \int_0^T (\int_\Omega f(t,\xi(t))d\mathsf{P})dt$$

$$= \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} f(t,x)\rho^\xi(t,x)dt \wedge \Lambda_\alpha dt \tag{1.3}$$

Тогда

$$u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha^{ij}(t,x)\rho^\xi(t,x))}{\rho^\xi(t,x)}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.4}$$

где (α^{ij}) матричный оператор AA^*. Формула (1.4) доказана в [16].

Для $v^\xi(t,x)$ и $\rho^\xi(t,x)$ выполняется так называемой уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho^\xi(t,x)}{\partial t} = -Div(v^\xi(t,x)\rho^\xi(t,x)) \tag{1.5}$$

где Div обозначает дивергенцию относительно римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$.

Следуя [5], зададим дифференцирование D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi(\frac{(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))^*}{\triangle t}), \tag{1.6}$$

где $(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))$ – вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))^*$ – вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор). Результат этого матричного произведения – матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения в множестве симметрических неотрицательно определенных тензоров (матриц) типа $(2,0)$.

Чтобы избежать технических сложностей, мы будем рассматривать включение первого порядка с текущими скоростями на плоском n-мерном торе $\mathbb{T}^n$ (т.е. риманова метрика на $\mathbb{T}^n$ наследуется из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решётке). Обычно это позволяет рассматривать, поставленную нами задачу, как задачу в $\mathbb{R}^n$ с периодическими данными. Простота использования $\mathbb{T}^n$ объясняется тем, что $\mathbb{T}^n$ является компактным многообразием и, следовательно, все гладкие объекты на нём ограничены.

Заметим, что касательное расслоение $T\mathbb{T}^n$ к $\mathbb{T}^n$ тривиально, то есть $T\mathbb{T}^n=\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$, а значит все векторные поля на $\mathbb{T}^n$ могут быть рассмотрены как отображения из $\mathbb{T}^n$ в $\mathbb{R}^n$, тогда как симметрические неотрицательно определенные $(2,0)$-тензорные поля (такие как α) можно рассмотреть как отображения из $\mathbb{T}^n$ в $\overline{\mathrm{S}}_+(n)$

1.3 Уравнения с текущими скоростями

Пусть $v(t,m)$ – векторное поле, $\alpha(t,m)$ – симметрическое неотрицательно определенное $(2,0)$-тензорное поле на торе $\mathcal{T}^n$. Система

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_S\xi(t) & = & v(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) & = & \alpha(t,\xi(t)) \end{array}\right. \tag{1.7}$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка.*

Определение 1.11 *Говорят, что (1.7) на $\mathcal{T}^n$ имеет решение на $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$ если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и процесс, $\xi(t)$ заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и принимающий значения в $\mathcal{T}^n$, такой, что $\xi(0) = \xi_0$ и для почти всех $t \in [0,T]$ уравнение (1.7) выполняется P-п.н. для $\xi(t)$.*

Из результатов работы [13] а также из того факта, что на компактном многообразии $\mathcal{T}^n$ правая часть уравнения (1.7) и частные производные $\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^i}$ равномерно ограничены, вытекает следующая теорема:

Теорема 1.12 *Пусть $v : [0,T] \times \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладко и $\alpha : \mathcal{T}^n \to \mathrm{S}_+(n)$ – гладко и автономно (так что оно определяет риманову метрику $\alpha(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{T}^n$, введенную выше). Пусть ξ_0 – случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, у которого вероятностная плотность ρ_0 относительно формы объема Λ_α метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{T}^n$ (см. выше) является гладкой и нигде не обращается в ноль. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ уравнение (1.7) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0,T]$.*

Введем $p_0 = \ln \rho_0$ и рассмотрим $p(t,m) = ln\, \rho^\xi(t,m)$, где $\rho^\xi(t,m)$ – плотность (1.3), соответствующая решению $\xi(t)$ уравнения (1.7). В доказательстве [13, Теорема 3] показано, что $p(t,m)$ корректно определено и имеет вид

$$p(t,m) = p_0(g_{-t}(m)) - \int_0^t (\mathrm{Div}\ v)(s, g_s(g_{-t}(m))\, ds, \tag{1.8}$$

где Div – дивергенция относительно $\alpha(\cdot,\cdot)$, а g_t – поток гладкого векторного поля $v(t,m)$.

Глава 2

Некоторые технические конструкции

2.1 Матричные конструкции

Лемма 2.1 *Пусть* $\alpha(t,x)$ *непрерывное отображение из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в* $S_+(n)$. *Тогда существует непрерывное отображение* $A(t,x)$ *из* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ *в пространство* $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *такое, что для любого* $t\in R$, $x\in\mathbb{R}^n$ *выполняется равенство* $A(t,x)A^*(t,x)=\alpha(t,x)$

Доказательство. Так как симметрические матрицы $\alpha(t,x)$ положительно определены, все их угловые миноры положительны и нигде не обращаются в ноль. Тогда на основе разложения Гаусса (см. [12]): $\alpha=\zeta\delta z$, где ζ – нижне-треугольная матрица с единицами на диагонали, z – ее транспонированная, т.е. верхне-треугольная матрица с единицами на диагонали, и δ – диагональная матрица. In addition the elements of ζ, δ и z вновь рационально выражаются через элементы α, т.е., эти матрицы непрерывны по совокупности переменных t,x. из того, что α симметрическая матрица, видно, что $z=\zeta^*$. Следовательно,можем заметить, что в этом случае элементы диагональной матрицы δ положительны. Тогда диагональная матрица $\sqrt{\delta}$ с диагональными элементами $\sqrt{\delta_1}, \ldots, \sqrt{\delta_n}$ на главной диагонали, корректна. Рассмотрим матрицу $A(t,x) = \zeta\sqrt{\delta}$. По построению $A(t,x)$ непрерывны по совокупности переменных t, x и $A(t,x)A^*(t,x) = \zeta(t,x)\delta(t,x)z(t,x) = \alpha(t,x)$. ■

Следствие 2.2 *Если в условиях Леммы 2.1 $\alpha(t,x)$ является гладкой или измеримой по Борелю, существует отображение $A(t,x)$ гладкое или измеримое по Борелю, соответственно, из $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ в пространство $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такое, что для любого $t \in R$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.*

Везде далее мы обозначаем через $S_+(n)$ множество симметрических положительно определенных $n \times n$ матриц.

Пусть, как показано выше, каждая матрица $\alpha \in S_+(n)$ представима в виде $\alpha = \zeta\delta\zeta^*$, где ζ – нижне-треугольная матрица с единицами на диагонали, ζ^* – ее транспонированная, т.е. верхне-треугольная матрица с единицами на диагонали, и δ – диагональная матрица, чьи положительные угловые миноры совпадают с угловыми минорами матрицы α. А диагональные элементы матрицы δ это $\delta_1, \ldots \delta_n$. Тогда по Лемме 2.1 и Следствию 2.2 $A = \zeta\sqrt{\delta}$ такова, что $\alpha = AA^*$.

Если при $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathcal{T}^n$ поле $\alpha(t,m)$, непрерывно (измеримо, гладко), то $A(t,m)$ тоже непрерывно (измеримо, гладко, соответственно).

Обозначим через $\mathsf{T}_-(n)$ множество нижне-треугольных $n \times n$ матриц с нулями на диагонали. Это линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех $n \times n$ матриц. Очевидно, что ζ, описанное выше, принадлежит линейному подмногообразию $\mathsf{T}_-(n) + I$ в $\mathbb{R}^{n^2}$, где I

– единичная $n \times n$ матрица.Обозначим через $\mathsf{T} : S_+(n) \to \mathsf{T}_-(n)$ гладкое отображение $\alpha \in S_+(n)$ в

$$\mathsf{T}\alpha = \zeta - I \in \mathsf{T}_-(n). \tag{2.1}$$

Обозначим через $S_{LC}(n)$ множество симметрических $n \times n$ положительно определенных матриц с постоянным (равным $C > 0$) определителем. То есть $\delta_1 \cdot ... \cdot \delta_n = const = C$,а $\sqrt{\delta_1} \cdot ... \cdot \sqrt{\delta_n} = \sqrt{C}$, где точка обозначает произведение.

Пусть $\mathsf{L}_0(n)$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов $X = (X^1, \ldots, X^n)$ таких, что $X^1 + ... + X^n = 0$. Введем гладкое отображение $\mathsf{L_C} : S_{LC}(n) \to \mathsf{L}_0$, переводящее симметрическую матрицу $\alpha \in S_{LC}(n)$ в

$$\mathsf{L_C}(\alpha) = (\ln \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}}, ..., \ln \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}}) \in \mathsf{L}_0(n). \tag{2.2}$$

Частным случаем, выше изложенного, является следующее предположение, что $\alpha \in S_+(n) \bigcap SL(n)$, т.е. симметрическая и имеет определитель равный 1. То есть, как и выше $\delta_1 \cdot ... \cdot \delta_n = \sqrt{\delta_1} \cdot ... \cdot \sqrt{\delta_n} = 1$, где точка обозначает произведение. Аналогично, пусть $\mathsf{L}_0(n)$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов $X = (X^1, \ldots, X^n)$ таких, что $X^1 + ... + X^n = 0$. Введем гладкое отображение $\mathsf{L} : S_+(n) \bigcap SL(n) \to \mathsf{L}_0$,переводящее симметрическую матрицу $\alpha \in S_+(n) \bigcap SL(n)$ в

$$\mathsf{L}(\alpha) = (\log \sqrt{\delta_1}, ..., \log \sqrt{\delta_n}) \in \mathsf{L}_0(n). \tag{2.3}$$

Собственно, отметим, что $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_0(n)$ – линейные пространства, т.е. понятие выпуклого множества в них корректно определено.

Рассмотрим гладкое поле симметрических $(2,0)$ - тензоров $\alpha(m) = (\alpha^{ij}(m))$ на торе. Напомним, так как все эти матрицы невырождены, поле обратных матриц (α_{ij}) существует и гладко. Кроме того для каждого m матрица $(\alpha_{ij})(m)$ симметрическая, положительно определенная матрица. Соответственно это поле будем рассматривать как новую Риманову метрику на $\mathcal{T}^n$ (поле гладких симметрических, положительно определенных $(0,2)$- тензоров) $\alpha(\cdot,\cdot) = \alpha_{ij}dq^i \otimes dq^j$. Ее форма объема имеет вид $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}dq^1 \wedge dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n$. Напомним, что форма объема метрики, унаследованной из евклидовой метрики на $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке, имеет вид $\Lambda_E = dq^1 \wedge dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n$.

Лемма 2.3 *Для любого гладкого автономного* $(2,0)$*-тензорного поля* $\alpha(m)$ *на плоском торе* $\mathcal{T}^n$ *со значениями в множестве* $S_{LC}(n)$ *симметрических матриц с постоянным определителем, равным* $C > 0$*:*

(i) Форма объема Λ_α *соответствующей римановой метрики* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *(см. выше) равна* $\sqrt{C}\Lambda_E$*, где* Λ_E *– форма объема евклидовой метрики на* $\mathcal{T}^n$*, унаследованной из* $\mathbb{R}^n$ *при факторизации по целочисленной решетке.*

(ii) Для любого гладкого векторного поля $v(t,m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *его дивергенция* $\operatorname{Div} v$ *относительно* Λ_α *совпадает с обычной дивергенцией* $\operatorname{div} v$ *(т.е. относительно* Λ_E*).*

(iii) Для любого случайного элемента со значениями в $\mathcal{T}^n$ *его плотность распределения относительно* Λ_α *равна плотности распределения относительно* Λ_E*, деленной на* $\sqrt{C}$*.*

Доказательство. Действительно, $\Lambda_\alpha = \sqrt{det(\alpha_{ij})}dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$ и поскольку $det(\alpha_{ij}) = C$, то $\Lambda_\alpha = \sqrt{C}\Lambda_E = Cdq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$.

Напомним, что дивергенция $\mathrm{Div}\, v$ находится из равенства

$$\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = (\mathrm{Div} v)\Lambda_\alpha,$$

где $\mathcal{L}_v$ – производная Ли вдоль v (см. подробности, например, в [5]). Напомним также , что $\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = d(v\rfloor\Lambda_\alpha)$, где $\rfloor$ обозначает внутреннее произведение векторов и дифференциальных форм. Поскольку C постоянно, то $d(v\rfloor\Lambda_\alpha) = \frac{\partial v^i}{\partial q^i}\sqrt{C}\Lambda_E = \frac{\partial v^i}{\partial q^i}\Lambda_\alpha$. Следовательно, $\mathrm{Div} v = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} = \mathrm{div} v$.

Утверждение (iii) вытекает из (i). ■

Рассмотрим отдельно случай симметрических матриц с единичным определителем, то есть матриц из $SL(n) \bigcap S_+(n)$.

Лемма 2.4 *Для любого гладкого автономного $(2,0)$-тензорного поля $\alpha(m)$ на плоском торе $\mathcal{T}^n$ со значениями в $S_+(n) \bigcap SL(n)$:*

(i) Форма объема Λ_α соответствующей римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ (см. выше) равна Λ_E, где Λ_E – форма объема евклидовой метрики на $\mathcal{T}^n$, унаследованной из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке.

(ii) Для любого гладкого векторного поля $v(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ его дивергенция $\mathrm{Div}\, v$ относительно Λ_α совпадает с обычной дивергенцией $\mathrm{div}\, v$ (т.е. относительно Λ_E).

(iii) Для любого случайного элемента со значениями в $\mathcal{T}^n$ его плотность распределения относительно Λ_α равна плотности распределения относительно Λ_E.

Доказательство. Действительно, $\Lambda_\alpha = \sqrt{det(\alpha_{ij})}dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$ и поскольку $det(\alpha_{ij}) = 1$, то $\Lambda_E = dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$.

Дивергенция $\operatorname{Div} v$ выражается через компоненты v и Λ_α, где $\Lambda_\alpha = \Lambda_E$, $\operatorname{Div} v = \operatorname{div} v$. Утверждение (iii) вытекает также из совпадения формы объема. $blacksquare$

2.2 Слабая компактность мер, соответствующих решениям уравнений с текущими скоростми

В случае,когда правая часть (3.1) не является непрерывной, но полунепрерывна снизу или сверху мы строим конструкции с гладкими ε – аппроксимациями в первом случае или гладкими селекторами во втором (см., например, [2]). Используя эти аппроксимации мы строим уравнения с текущими скоростями вида (1.7) и после этого мы должны доказать, что множество решений уравнений сходятся к решению (3.1). Следующая теорема может быть полезна в этом случае.

Рассмотрим последовательность уравнений (1.7) на $\mathcal{T}^n$, чья правая часть гладка и равномерно ограниченна для любого k одной и той же константой. Для k-го уравнения обозначим μ_k меру на пространстве непрерывных траекторий $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, соответствующую решению $\xi_k(t)$ k-го уравнения.

Теорема 2.5 *Множество мер μ_k на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что так как все процессы $\xi_k(t)$ принимают значения на компактном торе, все условные математические ожидания $E\xi_k(t)$ равномерно ограничены.

По Лемме 2.1 $A = \zeta\sqrt{\delta}$, такова, что $\alpha = AA^*$. Так как мы имеем дело с гладким полем $\alpha_k(t, m)$, $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathcal{T}^n$, выше упомянутые аппроксимации соответствующих матриц $A_k(t, m)$ также гладкие. Так как $\alpha_k(t, m)$ равномерно ограничены той же константой для всех k, все $A_k(t, m)$ обладают тем же свойством. Выберем два действительных числа $0 \leq s < t \leq T$ с достаточно малой разностью $t - s$. Тогда для любого k приращение ξ_k на $[s, t]$ аппроксимируется выражением $v_k(\frac{s+t}{2})(t-s) + A_k(s)(w(t) - w(s))$. Рассмотрим $E\big((v_k(\frac{s+t}{2})(t-s) + A_k(s)(w(t) - w(s)))(v_k(\frac{s+t}{2})(t-s)$ $+A_k(s)(w(t) - w(s)))^*\big)$. Так как v_k и A_k равномерно ограничены для всех k единственной константой, легко видеть, что среди элементов в полученном выражении, только $\alpha_k(t-s)$ является бесконечно малой величиной тогоже порядка $t-s$, в то время как остальные элементы, являются бесконечно малыми более высокого порядка. Следовательно, существует постоянная h_1, такая что разность $t - s$ достаточно мала, выше упомянутое выражение не больше чем $h_1(t-s)$. Интегрируя можно показать, что существует постоянная $h > 0$,зависимая от T и от константы, которая ограничивает нормы v_k и α_k, такой,что длялюбых $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ и каждого k выполнено неравенство $E(\xi_k(t_2) - \xi_k(t_1))^4 < h(t_2 - t_1)^2$. Таким образом, утверждение теоремы следует из [3, Теорема из §4 Главы VI]. ■

Глава 3

Теоремы существования решений дифференциальных включений с текущими скоростями

Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ – многозначное векторное поле, $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ – многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in \mathbf{v}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{3.1}$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка. Понятие решение включения (3.1) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в Определении 1.11.

В [12, Теорема 4.3] существование решения для (3.1) доказано при условии $\boldsymbol{\alpha} = \sigma^2 I$ где I единичная матрица (т.е. было однозначным, в частности, второе включение (3.1) превращается в уравнение), а $\mathbf{v}$ было автономным,удовлетворяющим некоторым очень ограничительным условиям. Кроме того, предполагалось, что плотности распределения начального условия нигде не равна нулю. Нами доказаны теоремы о существовании решения для несколько иного типа включений.

3.1 Случай гладких селекторов

Рассмотрим случай, когда обе части текущих скоростей многозначны и имеют гладкий селектор (условия, при которых это становится возможным, приведены в [1, 11]).

Теорема 3.1 *Пусть* $\mathbf{v}(t,m)$ *– многозначное равномерно ограниченное векторное поле на* $\mathcal{T}^n$, *имеющее гладкий селектор, а* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *– многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле, имеющее гладкий селектор также, со значениями в* $S_+(n)$. *Пусть также* ξ_0 *– случайный элемент со значениями в* $\mathcal{T}^n$, *чья плотность* ρ_0 *гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0)=\xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, которое существует на всем интервале* $t\in[0,T]$.

Доказательство. Обозначим гладкий селектор $\boldsymbol{\alpha}(m)$ через $\alpha(t,m)$ и гладкий селектор $\mathbf{v}(t,m)$ через $v(t,m)$. Очевидно, что плотность случайного элемента ξ_0, построенная относительно Римановой формы объема из $\alpha(t,m)$, как показано выше, нигде не равна нулю. Тогда по теореме 1.12 равенство

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_S\xi(t) & = & v(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) & = & \alpha(t,\xi(t)) \end{array}\right.$$

имеет решение на всем интервале $t\in[0,T]$,а это и есть, искомое нами решение для (3.1)■

Для телесного замкнутого выпуклого множества A и вектора V в $\mathbb{R}^n$ введем так называемую опорную функцию $\Psi(A,V)=\sup\limits_{y\in A}(y,V)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Рассмотрим многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$, у которого образы телесны, выпуклы и замкнуты. Поскольку касательное расслоение к тору тривиально, мы можем рассмотреть постоянное векторное поле V на торе. Обозначим через $\Psi(t,m,V)$ опорную функцию $\Psi(\mathbf{v}(t,m),V)$. Пусть также $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ с телесными, выпуклыми, замкнутыми образами. Так как $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ принимает значения в $S_+(n)\subset L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, что является линейным пространством, мы можем построить опорную функцию $\Psi_1(t,m,V_1)$ для $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$, по аналогии с приведенной выше схемой, где V_1 постоянное $(2,0)$-тензорное поле на$\mathcal{T}^n$.

Условие 3.2 *При любом V и V_1 функции $\Psi(t,m,V)$ и $\Psi_1(t,m,V_1)$ являются гладкими.*

Теорема 3.3 *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ – многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле на $\mathcal{T}^n$ имеющее телесные, выпуклые замкнутые образы и удовлетворяющее Условию 3.2, а $\boldsymbol{\alpha}(m)$ – многозначное $(2,0)$-тензорное поле так же имеющее телесные, замкнутые, выпуклые образы, и также удовлетворяющее Условию 3.2. Кроме того, пусть случайный элемент ξ_0, со значениями в $\mathcal{T}^n$, имеет плотность гладкую, нигде не равную нулю. Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$ включение (3.1) имеет решение, которое существует на всем интервале $t\in[0,T]$.*

Доказательство. В работе [1] доказано, что при выполнении Условия 3.2 непрерывное многозначное, равномерно ограниченное векторное поле с замкнутыми выпуклыми образами имеет гладкий селектор. Так что утверждение теоремы следует из Теоремы 3.1.■

Далее, рассмотрим случай, когда образы $\mathbf{v}(t,m)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ не телесны. Вместо этого, предположим, что каждое отображение $\mathbf{v}(t,m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(t,m)$), принадлежит подпространству в $T_m\mathcal{T}^n$ (подпространству в пространстве $(2,0)$-тензоров в m, соответственно), причем, указанные подпространства имеют постоянную размерность k (k_1, соответственно) не зависящую от $m \in \mathcal{T}^n$. Если, поставить в соответствие, каждому $m \in \mathcal{T}^n$, вышеуказанное подпространство, то получим отображение Φ из $\mathcal{T}^n$ в многообразие афинных подпространств с размерностью k касательного пространства $T_m\mathcal{T}^n$ (отображение Φ_1 в многообразие афинных подпространств, пространства $(2,0)$- тензоров)

Условие 3.4 *Отображения Φ и Φ_1 являются гладкими.*

Теорема 3.5 *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(t,m)$) – многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле ($(2,0)$ - тензорное поле со значениями в $S_+(n)$) на $\mathcal{T}^n$ такое, что каждый образ $\mathbf{v}(t,m)$ лежит подпространстве в $T_m\mathcal{T}^n$ (каждый образ $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ лежит в подпространстве, пространства $(2,0)$ - тензоров, соответственно), причем указанные подпространства имеют постоянную размерность $k < n$ ($k_1 < n$, соответственно), не зависящую от $m \in \mathcal{T}^n$, и выполнено Условие 3.4. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение ((3.1)) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0,T]$.*

Доказательство. В работе [11] доказано, что в рассматриваемом случае при выполнении Условия 3.4 непрерывное многозначное равномерно ограниченное векторное поле с замкнутыми выпуклыми образами имеет гладкий селектор. Так что утверждение теоремы следует из Теоремы 3.1.■

3.2 Случай ε-аппроксимаций с равномерно ограниченными первыми частными производными

В этом параграфе мы рассмотрим более общий случай, когда гладких селекторов правых частей нет, но существуют гладкие ε-аппроксимации с с равномерно ограниченными первыми частными производными. В частности, из этого условия следует, что правые части имеют непрерывные селекторы.

Теорема 3.6 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *и многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *на* $\mathcal{T}^n$ *автономны, равномерно ограничены и имеют замкнутые образы. Пусть существует последовательность положительных чисел* $\varepsilon_k \to 0$ *такая, что для любого* ε_k *поле* $\mathbf{v}(m)$ *(соотвественно,* $\boldsymbol{\alpha}(m)$*) имеет гладкую* ε_k*-аппроксимацию* $v_i(m)$ *(*$\alpha_i(m)$*, соответственно) и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные* $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ *(*$\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^l}$*, соответственно). Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *с гладкой плотностью нигде не равной нулю, включение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0,T]$.

Доказательство. По условию данной теоремы для последовательности положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$ существуют последовательности $v_i(m)$ ($\alpha_i(m)$, соответственно) ε_i-аппроксимаций и все они гладкие. Тогда по теореме Асколи эти наборы аппроксимаций компактны относительно равномерной номы, то есть можно выделить подпоследовательности v_k (соответственно, α_k) сходящиеся к непрерывным селекторам $v(m)$ ($\alpha(m)$, соответственно) в $\mathbf{v}(m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(m)$, соответственно).

Обозначим компоненты поля $\alpha_k(m)$ через α_k^{ij}. Из тензорных полей $\alpha_k(m)$ построим Римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим последовательность уравнений типа (1.7):

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_S\xi(t) & = & v_k(\xi(t)) \\ D_2\xi(t) & = & \alpha_k(\xi(t)) \end{array}\right. .$$

Для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0.

Аппроксимации v_k и α_k равномерно ограничены одной и той же константой, так как они являются ε_k – аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Также все эти ε_k – аппроксимации, заданные на компактном торе, для любого k, имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ ($\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^l}$, соответственно). Таким образом уравнения (1.7) удовлетворяют теореме 1.12, то есть для каждого уравнения существует решение. Пусть ξ_k – решение k-го уравнения.

На Банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ– алгебру $\mathcal{C}$ порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных σ - под - алгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t \in [0,T]$, и семейство полных σ- под - алгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами Борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Ясно, что $\mathcal{N}_t$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t$ и что $\mathcal{P}_t$ есть "прошлое", а $\mathcal{N}_t$ – "настоящее" для координатного процесса на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu_k)$.

По Теореме 2.5 множество мер $\{\mu_k\}$ на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности, мы можем предположить, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\ \mathcal{T}^n),\ \mathcal{C},\mu)$, то есть для каждого элементарного события $x(\cdot) \in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,x(\cdot)) = m(t)$. Напомним $\mathcal{P}_t$ – "прошлое"$\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – "настоящее"для этого же координатного процесса.

По построению $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t}$$
$$-\alpha_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k = 0$$

Так как $\alpha_k(t,m)$ сходятся равномерно к $\alpha(t,m)$ при $k\to\infty$, выводим, что $\alpha_k(t,m(t))$ стремится к $\alpha(t,m(t))$ равномерно для всех μ_k включая μ.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ так как $\alpha(m)$ непрерывно на $\mathcal{T}^n$.

Из-за равномерной сходимости для всех k, что была описана выше, из ограниченности $f(m(\cdot))$ выводим, что при достаточно больших k

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < \delta.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для всех $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, то есть , их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < 2\delta Q \Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ - произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Функция $\alpha(m(t))$ – μ -п. н. непрерывна и ограничена на $C^0\ ([0,T],\mathcal{T}^n)$ (как показано выше). Ну и так как меры μ_k слабо сходятся к μ, по Лемме [4, параграф VI.1]

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu_k = \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu.$$

Очевидно

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*] f(m(\cdot)) d\mu_k$$

$$= \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*] f(m(\cdot)) d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*}{\Delta t}$$

$$-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu = 0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, это означает, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Далее нас будет интересовать текущая скорость решения.

По построению $D_S\xi_k(t) = v_k(t, \xi_k(t))$ для всех k. Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на $C^0([0,T], \mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при любом k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{\Delta t} - v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k = 0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое,что при $k > K(\varepsilon)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu_k$$
$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu\| < \varepsilon$$

и

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot))v(m(t))d\mu\| < \varepsilon.$$

Такими же рассуждениями, как и выше, докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [v_k(m(t)) - v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k = 0.$$

и что v непрерывна. Напомним, что v ограничено, как селектор ограниченного многозначного отображения.

Тогда по Лемме [4, параграф VI.1] получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu_k = \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t))]f(m(\cdot))d\mu_k$$

$$=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t))]f(m(\cdot))d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{\Delta t}-$$

$$-v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu \;=0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, Это означает, что $D_S\xi(t)=v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t))\in\mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н. ■

3.3 Случай полунепрерывных сверху правых частей

Теорема 3.7 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *и многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$*, принимающее значения в* $S_+(n)$*, на* $\mathcal{T}^n$ *автономны, равномерно ограничены, имеют замкнутые выпуклые образы и полунепрерывны сверху. Тогда для начального условия* $\xi(0)=\xi_0$ *с гладкой плотностью нигде не равной нулю, включение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t\in[0,T]$.

Доказательство. По [20, Теорема 4.11] в условиях теоремы для любой послеовательности положительных чисел $\varepsilon_i\to 0$ существуют поледовательности непрерывных ε_i-аппроксимаций v_i и α_i многозначных отображений $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ соответственно, которые поточечно сходятся к борелевским селекторам этих многозначных отображений. Причем, поскольку $S_+(n)$ является выпуклым множеством в линейном пространстве $S(n)$, то ε_i-аппроксимации α_i примают значения в $S_+(n)$. Без ограничения общности можно считать v_i и α_i гладкими, так как любую непрерывную функцию можно аппроксимировать сколь угодно близкой гладкой.

Обозначим предельные борелевские селекторы символами v и α соответственно.

Рассмотрим последовательность уравнений с текущими скоростями

$$\begin{cases} D_S\xi_i(t) = v_i(\xi_i(t)) \\ D_2\xi_i(t) = \alpha_i(\xi_i(t)) \end{cases} . \tag{3.2}$$

Так как все v_i и α_i гладки и $\mathcal{T}^n$ компактно, первые частные производные указанных полей ограничены некоторым положительным числом, своим для каждого k. Значит все уравнения (3.2) удовлетворяют условиям Теоремы 1.12, то есть каждое из них имеет решение $\xi_i(t)$ с начальным условием ξ_0, существующее на всем промежутке $[0, T]$.

На Банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ– алгебру $\mathcal{C}$ порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных σ - под - алгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t \in [0,T]$, и семейство полных σ- под - алгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами Борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Ясно, что $\mathcal{N}_t$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t$ и что $\mathcal{P}_t$ есть "прошлое", а $\mathcal{N}_t$ – "настоящее" для координатного процесса на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu_k)$.

Так как по построению все v_i и α_i ограничены одной и той же константой, по Теореме 2.5 множество мер $\{\mu_k\}$ на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности, мы можем предположить, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\ \mathcal{T}^n),\ \mathcal{C},\mu)$, то есть для каждого элементарного события $x(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,x(\cdot))=x(t)$. Напомним $\mathcal{P}_t$ – "прошлое" $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – "настоящее" для этого же координатного процесса.

По построению $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t}$$
$$-\alpha_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0$$

Подчеркнем, что поточечная сходимость v_i к v и α_i к α означает сходимость почти наверное по любой мере μ_k из нашей совокупности и по мере μ. По Теореме Егорова (смотри, например, [8]) для любого i существует подмножество $\tilde K^i_\delta\subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde K^i_\delta)>1-\delta$ и последовательность $\alpha_k(m(t))$ на $\tilde K^i_\delta$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно. Введем $\tilde K_\delta=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\tilde K^i_\delta$. Последовательность $\alpha_k(m(t))$ на $\tilde K_\delta$ для всех i сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно и $\mu(\tilde K_\delta)>1-\delta$.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i \to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_i}$. По построению, $\alpha(m(t))$ – равномерный предел последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$. Поэтому $\alpha(m(t))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$, то есть на любом конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}) = 1$.

Из-за равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ для всех k, что была описана выше, из ограниченности $f(m(\cdot))$ выводим, что при достаточно больших k

$$\| \int_{\tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < \delta.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для всех $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, то есть , их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда, так как

$$\mu_k(C^0([0,T],\mathcal{T}^n) \backslash \tilde{K}_\delta) < \delta$$

для всех достаточно больших k, то

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n) \backslash \tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < 2\delta Q \Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ - произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Функция $\alpha(m(t))$ – μ -п. н. непрерывна и ограничена на C^0 $([0,T],\mathcal{T}^n)$ (как показано выше). Ну и так как меры μ_k

слабо сходятся к μ, по Лемме [4, параграф VI.1]

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu_k=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидно

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*]f(m(\cdot))d\mu_k$$

$$=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*]f(m(\cdot))d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t}$$
$$-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu=0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, это означает, что $D_2\xi(t)=\alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t))\in\boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Далее нас будет интересовать текущая скорость решения.

По построению $D_S\xi_k(t)=v_k(t,\xi_k(t))$ для всех k. Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при любом k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{\Delta t}-v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Т.к. μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое,что при $k>K(\varepsilon)$

$$\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu_k$$
$$-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu\|<\varepsilon$$

и

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot))v(m(t))d\mu\| < \varepsilon.$$

Такими же рассуждениями, как и выше, используя теорему Егорова докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [v_k(m(t)) - v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k = 0.$$

и что v непрерывна на множестве полной меры. Напомним, что v ограничено, как селектор ограниченного многозначного отображения.

Тогда по Лемме [4, параграф VI.1] получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu_k = \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t))]f(m(\cdot))d\mu_k$$

$$= \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t))]f(m(\cdot))d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{\Delta t} -$$

$$-v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu \; = 0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, Это означает, что $D_S\xi(t) = v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t)) \in \mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н. ■

3.4 Случай, когда правая часть соотношения с квадратичной производной принимает значения в симметрических матрицах с постоянным определителем

В этом параграфе мы рассматриваем важный для приложений случай, когда правая часть включения с квадратичной производной в системе (3.1) принимает значения во множестве $S_{LC}(n)$ симметрических матриц, имеющих постоянный определитель, равный $C > 0$. Метод исследования использует полученное в работе [14] утверждение, что для полунепрерывного сверху многозначного отображения с выпуклыми, замкнутыми, ограниченными образами для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-аппроксимация, такая, что при $\varepsilon \to 0$ эти аппроксимации поточечно сходятся к селектору многозначного отображения. Однако, множество матриц $S_{LC}(n)$ не является линейным пространством и поэтому требовать выпуклость образов многозначного отображения не корректно. Чтоб применить конструкции из [14], мы используем конструкции с симметрическими матрицами, приведенные в разделе 2.1.

3.4.1 Простейший случай – наличе у поля v гладкого селектора

Мы накладываем на правую часть (3.1) следующие условия.

Условие 3.8 *(i) Многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *на* $\mathcal{T}^n$ *принимает значения в* $S_{LC}(n)$*; оно автономно и полунепрерывно сверху.*

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ *замкнуты и равномерно ограничены.*

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ *множество* $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{T}_-(n)$ *и множество* $\mathsf{L}_\mathsf{C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{L}_0(n)$.

Теорема 3.9 *Пусть* $\mathbf{v}(t,m)$ *– многозначное равномерно ограниченное векторное поле на* $\mathcal{T}^n$*, имеющее гладкий селектор* $v(t,m)$*, а* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *– многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле, удовлетворяющее условию 3.8. Пусть также* ξ_0 *– случайный элемент со значениями в* $\mathcal{T}^n$*,чье вероятностное распределение, относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$ *где* ρ_0 *гладко и нигде не обращается в ноль. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, определенное при* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$. Так как отображения T и L_C гладки, многозначные отображения $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{L}_0(n)$ полунепрерывны сверху, поскольку таково $\boldsymbol{\alpha}$. По Условию 3.8 их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по [14, Теорема 2] (см. также [5, Теорема 4.11]) для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных ε_q-аппроксимаций, которые поточечно сходятся к борелевским селекторам полей $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$, соответственно. Без ограничения общности все эти аппроксимации можно считать гладкими (в противном случае аппроксимируем из гладкими). Таким образом, существует последовательность α_k однозначных гладких и равномерно ограниченных $(2,0)$-тензорных полей из $S_{LC}(n)$, которая поточечно сходится к борелевскому селектору $\alpha(m)$ многозначного поля $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ мы обозначаем α_k^{ij}.

Построим римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ из тензорных полей $\alpha_k(m)$.

Рассмотрим последовательность уравнений типа (1.7):

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_S\xi(t) & = & v(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) & = & \alpha_k(\xi(t)) \end{array}\right. . \tag{3.3}$$

Отметим, что по Лемме 2.3 для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0, поскольку его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой. Каждое из этих уравнений удовлетворяет условиям Теоремы 1.12, так что для каждого уравнения существует решение. Решение k-го уравнения обозначим $\xi_k(t)$.

Из Леммы 2.3 следует, что функции $p(t,m)$, определенные в (1.8) для всех $\xi_k(t)$ совпадают.

На банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ-алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных под-σ-алгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t\in[0,T]$. Из условия теоремы следует, что для мер μ_k выполняются условия Теоремы 2.5, то есть множество мер $\{\mu_k\}$ слабо компактно. Выделим слабо сходящуюся к некоторой мере μ подпоследовательность (для которой сохраним обозначение μ_k).

Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu)$, т.е. для каждого элементарного события $x(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,x(\cdot))=x(t)$. Отметим, что $\mathcal{P}_t$ является “прошлым” для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – “настоящим”. По построению $D_S\xi_k(t) = v(t, \xi_k(t))$ при любом k. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0,T], \mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(t, x(t))] f(x(\cdot)) d\mu_k = 0$$

Определим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k > K(\varepsilon)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(t, x(t))] f(x(\cdot)) d\mu_k$$
$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(t, x(t))] f(x(\cdot)) d\mu \| < \varepsilon.$$

и

$$\| \lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(t, x(t))] f(x(\cdot)) d\mu \| < \varepsilon.$$

Так как ε произвольное положительное число и f произвольная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t^\xi$, то

$$D_S\xi(t) = v(t, \xi(t)). \tag{3.4}$$

По построению для любого $\xi_k(t)$, квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$, а это означает,что для любой функции $f(x(\cdot))$ как и выше мы получили:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{(x(t+\Delta t) - x(t))(x(t+\Delta t) - x(t))^*}{\Delta t}$$
$$-\alpha_k(x(t))] f(x(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Так как $\alpha_k(t, m)$ стремится к $\alpha(t, m)$ при $k \to \infty$ поточечно, $\alpha_k(t, m)$ стремится к $\alpha(t, m)$ п.н. относительно всех мер μ_k и относительно μ.

Выберем $\delta > 0$. По теореме Егорова (см., например, [8]) для любого i существует подмножество $\tilde{K}^i_\delta \subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde{K}^i_\delta) > 1-\delta$ и последовательность $\alpha_k(x(t))$ сходится к $\alpha(x(t))$ равномерно на $\tilde{K}^i_\delta$. Введем $\tilde{K}_\delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{K}^i_\delta$. Последовательность $\alpha_k(x(t))$ сходится к $\alpha(x(t))$ равномерно на $\tilde{K}_\delta$ при всех i и $\mu(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$.

Заметим, что поле $\alpha(x(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i \to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_i}$. По построению $\alpha(x(t))$ является равномерным пределом последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$. Поэтому $\alpha(x(t))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$, т.е. и на любом конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидным образом $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}) = 1$. Из-за описанной выше равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ при всех k мы выводим из ограниченности $f(x(\cdot))$, что при достаточно большом k

$$\| \int_{\tilde{K}_\delta} [\alpha_k(x(t)) - \alpha(x(t))] f(x(\cdot)) d\mu_k \| < \delta.$$

Так как $f(x(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(x(\cdot))| < \Xi$ for all $x(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, т.е. их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда, поскольку

$$\mu_k(C^0([0,T],\mathcal{T}^n) \backslash \tilde{K}_\delta) < \delta$$

при всех достаточно больших k, то

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash \tilde{K}_\delta} [\alpha_k(x(t)) - \alpha(x(t))] f(x(\cdot)) d\mu_k \| < 2\delta Q \Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ – произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\alpha_k(x(t))-\alpha(x(t))]f(x(\cdot))d\mu_k=0.$$

Функция $\alpha(x(t))$ – μ-п.н. непрерывна и ограничена на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ (см. выше). Так как к тому же меры μ_k слабо сходятся к μ, то по лемме из [4, параграф VI.1]

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(x(t))f(x(\cdot))d\mu_k=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(x(t))f(x(\cdot))d\mu.$$

Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^*}{\Delta t}]f(x(\cdot))d\mu_k$$
$$=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^*}{\Delta t}]f(x(\cdot))d\mu.$$

Таким образом

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^*}{\Delta t}$$
$$-\alpha(x(t))]f(x(\cdot))d\mu=0.$$

Поскольку $f(x(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, это означает, что $D_2\xi(t)=\alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t))\in\boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Вместе с (3.4) это означает, что $\xi(t)$ является искомым решением включения (3.1). ■

Частным случаем рассмотренной выше в этом разделе ситуации является важный для приложений случай, когда поле $\mathbf{v}$ имеет гладкий селектор (например, однозначно и гладко), а поле $\boldsymbol{\alpha}$ многозначно и принимает значения в симметрических матрицах с единичным определителем, то есть в $SL(n)\bigcap S_+(n)$.

Теорема 3.10 *Пусть* $\mathbf{v}(t,m)$ *многозначное векторное поле на* $\mathcal{T}^n$, *имеющее гладкий селектор, а многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет таково, что (i) оно принимает значения в* $S_+(n)\bigcap SL(n)$; *оно автономно и полунепрерывно сверху.*

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ *замкнуты и равномерно ограничены.*

(iii) для каждого $m\in\mathcal{T}^n$ *множество* $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{T}_-(n)$ *и множество* $\mathsf{L}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{L}_0(n)$.

Рассмотрим случайный элемент ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$, *у которого плотность вероятности* ρ_0 *относительно формы объема* Λ_E *гладка и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0)=\xi_0$ *влючение*

$$\begin{cases} D_S\xi(t)=v(t,\xi(t)),\\ D_2\xi(t)\in\boldsymbol{\alpha}(\xi(t)).\end{cases}$$

имеет решение, определенное на всем интервале $t\in[0,T]$.

Теорема 3.10 является следствием Теоремы 3.9.

3.4.2 Случай гладких ε-аппроксимаций поля $\mathbf{v}$

В этом разделе, по сравнению с разделом 3.4.1, мы рпассматриваем более общий случай: вместо наличия гладкого селектора поля $\mathbf{v}$, мы предполагаем, что для некоторой последовательности положительных чисел $\varepsilon_k\to 0$ существуют гладкие ε_k-аппроксимации поля $\mathbf{v}$, у которых первыйе частные производные равномерно ограничены одной и той же константой. Непрерывность, полунепрерывность поля $\mathbf{v}$ сверху или снизу не предполагается. В этом случае имеется упрощающая информация, описанная в Лемме 2.4.

Мы накладываем на $\mathbf{v}(t,m)$ следующие условия.

Условие 3.11 *Многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы. Существует последовательность положительных чисел* $\varepsilon_k \to 0$ *такая, что для любого* ε_k *поле* $\mathbf{v}(m)$ *имеет гладкую* ε_k*-аппроксимацию* $v_i(m)$ *и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные* $\frac{\partial v_i}{\partial m_j}$.

Лемма 3.12 *При выполнении Условия 3.11 многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t, m)$ *имеет непрерывный селектор, к которому равномерно сходится подпоследовательность последовательности аппроксимаций* $v_i(m)$ *при* $i \to \infty$.

Действительно, из теоремы Асколи (см. [9]) нетрудно вывести, что при выполнении Условия 3.11 последовательность $v_i(t, m)$ компактна в пространстве непрерывных векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

Теорема 3.13 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t, m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *удовлетворяет Условию 3.11, а многозначное* $(2, 0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет Условию 3.8.*

Рассмотрим случайный элемент ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого распределение относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$*, где* ρ_0 *гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *влючение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Так как отображения T и $\mathsf{L_C}$ гладки, многозначные отображения $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{L}_0(n)$ полунепрерывны сверху, поскольку таково $\boldsymbol{\alpha}$. По По условию теоремы их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по [14, Теорема 2] (см. также [5, Теорема 4.11]) для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных ε_q-аппроксимаций, которые поточечно сходятся к борелевским селекторам полей $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$, соответственно. Выберем указанные последовательности аппроксимаций для последовательности $\varepsilon_k \to 0$ из Условия 3.11. Без ограничения общности все эти аппроксимации можно считать гладкими. Так что существует последовательность $\alpha_k(m)$ однозначных гладких и равномерно ограниченных $(2,0)$-тензорных полей из $S_{LC}(n)$, которая поточечно сходится к борелевскому селектору $\alpha(m)$ многозначного поля $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ мы обозначаем α_k^{ij}.

Построим римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ из тензорных полей $\alpha_k(m)$, как выше.

Рассмотрим последовательность уравнений типа (1.7)

$$\begin{cases} D_S\xi(t) &= v_k(\xi(t)) \\ D_2\xi(t) &= \alpha_k(\xi(t)) \end{cases} . \tag{3.5}$$

Отметим, что по Лемме 2.3 для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0, поскольку его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой. Все уравнения (3.5) удовлетворяют условиям Теоремы 1.12, так что для каждого уравнения существует решение. Решение k-го уравнения обозначим $\xi_k(t)$.

На банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ-алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных под-σ-алгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0, t]$, $t \in [0, T]$, и семейство полных под-σ-алгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Понятно, что $\mathcal{N}_t$ является под-σ-алгеброй в $\mathcal{P}_t$.

Нетрудно видеть, что для уравнений (3.5) применима Теорема 2.5, то есть множество мер $\{\mu_k\}$ слабо компактно. Следовательно, из этой последовательбности мер можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой мере μ. Для этой подпоследовательности мы для удобства сохраним обозначение μ_k. Покажем, что координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], \mathcal{T}^n), \mathcal{C}, \mu)$ является решением (3.1).

Напомним, что координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], \mathcal{T}^n), \mathcal{C}, \mu)$ описывается формулой: для каждого элементарного события $m(\cdot) \in C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$ имеем $\xi(t, m(\cdot)) = m(t)$. Отметим, что $\mathcal{P}_t$ является "прошлым" для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – "настоящим".

По построению $D_S\xi_k(t) = v_k(t, \xi_k(t))$ при любом k. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)}{2\Delta t} - v_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k > K(\varepsilon)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t}] f(m(\cdot)) d\mu_k$$
$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t}] f(m(\cdot)) d\mu \| < \varepsilon$$

и

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu \| < \varepsilon.$$

Наконец, так как $v_k(t,m)$ равномерно сходятся к $v(t,m)$, то равномерно для всех μ_i, включая μ, и равномерно по t

$$\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_i \to \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_i$$

при $k \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует K_1 такое, что при $k > K_1$ при всех i и при всех $t \in [0,T]$

$$\| \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_i - \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_i \| < \varepsilon_1$$

Тогда при $k > max(K, K_1)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$
$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu \| <$$
$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t}] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$
$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{\Delta t}] f(m(\cdot)) d\mu \| +$$
$$+ \| \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_k - \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_k \| +$$
$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu \| < 2\varepsilon + \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t}-v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu=0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, отсюда вытекает, что

$$D_S\xi(t)=v(\xi(t)). \tag{3.6}$$

Напомним, что по построению $v(\xi(t))\in\mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н.

Тот факт, что $D_2\xi(t)=\alpha(\xi(t))$ и $\alpha(\xi(t))\in\boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ п.н., доказывается в точности так же, как в доказательстве Теоремы 3.9. ■

3.4.3 Случай полунепрерывного сверху поля v с замкнутыми выпуклыми образами

В этом разделе мы не предполагаем ни наличия у поля $\mathbf{v}$ гладкого селектора, ни существования его гладких ε_k-аппроксимаций с равномерно ограниченными частными производными. Вместо этого мы предполаем, что $\mathbf{v}$ полунепрерывно сверх, равномерно ограничено и имеет выпуклые замкнутые образы.

Таким образом, пусть $\mathbf{v}(t,m)$ удовлетворяет следующему условию:

Условие 3.14 *Многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathbb{T}^n$ автономно, полунепрерывно сверху, равномерно ограниченно с замкнутыми выпуклыми образами*

Теорема 3.15 *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ удовлетворяет Условию 3.14, а и многозначное $(2,0)$- тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(m)$ удовлетворяет Условию 3.8. Рассмотрим случайный* *элемент* ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, чья плотность распределения, относительно формы объема* Λ_E *равна* $\sqrt{C}\rho_0$ *где* ρ_0 *гладка и нигде не обращается в ноль. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Прежде всего, согласно [20, Theorem 4.11] в Условиях 3.14 для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных ε_q – аппроксимаций v_q поля $\mathbf{v}(t, m)$, которые поточечно сходятся к измеримому по Борелю селектору $\mathbf{v}(t, m)$. Без ограничения общности эти ε_q-аппроксимации можно считать гладкими.

Так как отображения T и L_C гладкие, многозначные отображения $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{L}_0(n)$ полунепрерывны сверху, поскольку по условию теоремы таково $\boldsymbol{\alpha}$. По Условию 3.8 их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по [20, Theorem 4.11] для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных ε_q– аппроксимаций, поточечно сходящихся к измеримым по Борелю селекторам $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$, соответственно. Выберем указанные последовательности аппроксимаций для последовательности $\varepsilon_k \to 0$ как указано выше. Без ограничения общности, будем считать все эти аппроксимации гладкими. Таким образом, существует последовательность $\alpha_k(m)$ однозначно гладких и равномерно непрерывных $(2, 0)$– тензорных полей из $S_{LC}(n)$, поточечно сходящаяся к измеримому по Борелю селектору $\alpha(m)$ многозначного поля $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ обозначим α_k^{ij}.

Построим Римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ из тензорных полей$\alpha_k(m)$, как выше.

Рассмотрим последовательность уравнений типа (1.7):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_S\xi(t) & = & v_k(\xi(t)) \\ D_2\xi(t) & = & \alpha_k(\xi(t)) \end{array} \right. . \tag{3.7}$$

Заметим, что по Лемме 2.3 для всех этих уравнений мы можем рассматривать одно и тоже начальное условие ξ_0,так как его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой. Также заметим, что все v_k и α_k равномерно ограничены одной и той же константой, так как они являются ε– аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Посокольку все эти ε-аппроксимацмм гладки и заданы на компактном торе, их первые частные производные для каждого k равномерно ограничены константой, зависящей от k. Таким образом, уравнения (3.7) удовлетворяет Теореме 1.12, то есть для каждого уравнения существует решение. Обозначим $\xi_k(t)$ решение k-го уравнения.

Как сказано в параграфе 2.1, каждое $\alpha_k(m)$ может быть представлено в виде $\alpha_k(m) = A_k(m)A_k^*(m)$, где $A_k(m)$ гладко и равномерно ограничено.

На банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ– алгебру $\mathcal{C}$ порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных σ - под - алгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t \in [0,T]$, и семейство полных σ- под - алгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами Борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Ясно, что $\mathcal{N}_t$ является σ- под - алгеброй в $\mathcal{P}_t$ и что $\mathcal{P}_t$ есть "прошлое" относительно $\mathcal{N}_t$ являющимся "настоящим" для координатного процесса на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu_k)$. Напомним, что процесс $\zeta(t)$, порожденный мерой μ_ζ на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, может быть представлен как процесс на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu_k)$ как, так называемый, координатный процесс $\zeta(t,x(\cdot)) = x(t)$.

Так как, согласно Теореме 2.5, приведенной в параграфе 2.2 множество мер - $\{\mu_k\}$ на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности, мы можем предположить, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\ \mathcal{T}^n),\ \mathcal{C},\mu)$, то есть для каждого элементарного события $x(\cdot) \in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,x(\cdot)) = m(t)$. Напомним $\mathcal{P}_t$ – "прошлое"для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – "настоящее"для этого же координатного процесса.

По построению $D_S\xi_k(t) = v_k(t,\xi_k(t))$ для всех k. Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при любом k равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{\Delta t} - v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k = 0$$

выполняется.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое,что при $k > K(\varepsilon)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu_k$$
$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu \| < \varepsilon$$

и

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu \| < \varepsilon.$$

По Теореме Егорова (смотри, например, [8]) для любого i существует подмножество $\tilde{K}^i_\delta \subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde{K}^i_\delta) > 1-\delta$ и последовательность $\alpha_k(m(t))$ на $\tilde{K}^i_\delta$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно. Введем $\tilde{K}_\delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{K}^i_\delta$. Последовательность $\alpha_k(m(t))$ на $\tilde{K}_\delta$ для всех i сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно и $\mu(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$.

Поле $v(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i \to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_i}$. По построению, $v(m(t))$ – равномерный предел последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$. Поэтому $v(m(t))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$, то есть на любом конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}) = 1$.

Из-за, описанной выше, равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ для всех k и из ограниченности $f(m(\cdot))$ выводим, что при достаточно больших k

$$\| \int_{\tilde{K}_\delta} [v_k(m(t)) - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < \delta.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для всех $m(\cdot)$. Напомним, что все $v_k(m)$ и

$v(m)$ равномерно ограничены, то есть , их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда, так как

$$\mu_k(C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash\tilde{K}_\delta) < \delta$$

для всех достаточно больших k, то

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash\tilde{K}_\delta} [vk(m(t)) - v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k\| < 2\delta Q\Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ - произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [v_k(m(t)) - v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k = 0.$$

Тогда по Лемме [3, параграф VI.1] получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu_k = \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t))]f(m(\cdot))d\mu_k$$

$$= \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t))]f(m(\cdot))d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} -$$

$$-v(m(t))]f(m(\cdot))d\mu \ = 0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, Это означает, что $D_S\xi(t) = v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t)) \in \mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н.

Тот факт, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$ и $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ п.н., доказывается в точности так же, как в доказательстве Теоремы 3.9.

Это завершает доказательство. ■

3.5 Случай полунепрерывности снизу

В этом параграфе мы исследуем включений типа (3.1) с полунепрерывними снизу текущими скоростями. Сначала рассмотрим сучай включений общего типа.

Теорема 3.16 *Пусть поля* $\mathbf{v}$ *и* $\boldsymbol{\alpha}$ *автономны, полунепрерывны снизу, равномерно ограничены в соотвествующих пространствах полей и имеют выпуклые замкнутые образы.*

Рассмотрим случайный элемент ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого плотность* ρ_0 *относительно евклидовой формы объема* Λ_E *гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *влючение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

Доказательство. По теореме Майкла в условиях теоремы существуют непрерывные селекторы $v(m)$ и $\alpha(m)$ многозначных полей $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, соответственно. Аппроксимируем эти селекторы гладкими полями $v_k(m)$ и $\alpha_k(m)$, равномерно сходящимися к $v(m)$ и $\alpha(m)$, соответственно, при $k \to \infty$. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством Теоремы 3.6. Отметим, что поскольку в нашей ситуации предельные селекторы уже существует, не надо требовать равномерной ограниченности первых производных аппроксимаций – при доказательстве Теоремы 3.6 последнее требование позволяло найти непрерывные предельные селекторы. ■

Теперь перейдем к случаю, когда полу $\boldsymbol{\alpha}$ принимает значения в $S_{LC}(n)$.

Условие 3.17 *(i) Многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *на* $\mathcal{T}^n$ *принимает значения в* $S_{LC}(n)$*; оно автономно и полунепрерывно снизу.*

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ *замкнуты и равномерно ограничены.*

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ *множество* $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{T}_{-}(n)$ *и множество* $\mathsf{L}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{L}_0(n)$*.*

Теорема 3.18 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *автономно, равномерно ограничено, полунепрерывно снизу и имеет выпуклые образы, а многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет Условию 3.17. Рассмотрим случайный элемент* ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого плотность* ρ_0 *относительно евклидовой формы объема* Λ_E *гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *влючение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0,T]$*.*

Доказательство. Так как отображения T и L_{C} многозначные отображения и $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{T}_{-}(n)$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{L}_0(n)$ полунепрерывны снизу; поскольку таково $\boldsymbol{\alpha}$. По Условию 3.17 их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по теореме Майкла существуют непрерывные сечения полей $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathsf{L}\boldsymbol{\alpha}$. Апрпроксимируем эти селекторы гладкими полями, сходящимися к ним по равномерной норме. Таким образом существует последовательность $\alpha_k(m)$ однозначных гладких и равномерно ограниченных $(2,0)$-тензорных полей, которая при $k \to \infty$ равномерно сходится к непрерывному сечению $\alpha(m)$ многозначного поля $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ мы обозначаем α_k^{ij}.

Также по теореме Майкла многозначное поле $\mathbf{v}$ имеет непрерывный селектор $v(m)$. Аппроксимируем этот селектор глакими полями v_k, равномерно сходящимися к v при $k \to \infty$.

Построим римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ из тензорных полей $\alpha_k(m)$, как выше.

Рассмотрим последовательность уравнений типа (1.7):

$$\begin{cases} D_S\xi(t) & = & v_k(\xi(t)) \\ D_2\xi(t) & = & \alpha_k(\xi(t)) \end{cases}. \tag{3.8}$$

Отметим, что по Лемме 2.3 для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0, поскольку его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой. Все уравнения (3.8) удовлетворяют условиям Теоремы 1.12, так что для каждого уравнения существует решение. Решение k-го уравнения обозначим $\xi_k(t)$.

На банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ-алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных σ-подалгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t \in [0,T]$, и семейство полных σ-подалгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Понятно, что $\mathcal{N}_t$ является под-σ-алгеброй в $\mathcal{P}_t$.

Отметим, что уравнения (3.8) удовлетворяют условиям Теоремы 2.5, и поэтому множетсво мер $\{\mu_k\}$ слабо компактно. Выберем подпоследовательность мер, слабо сходящуюся к некоторой мере μ. Для удобства будем считать, что сама последовательность μ_k слабо сходится к μ.

Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu)$, т.е. для каждого элементарного события $m(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,m(\cdot))=m(t)$. Отметим, что $\mathcal{P}_t$ является "прошлым" для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – "настоящим".

По построению $D_S\xi_k(t)=v_k(t,\xi_k(t))$ при любом k. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{2\Delta t}-v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Так как μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k>K(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}&[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu_k\\ -\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}&[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu\|<\varepsilon\end{aligned}$$

и

$$\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu_k-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu\|<\varepsilon.$$

Наконец, так как $v_k(t,m)$ равномерно сходятся к $v(t,m)$, то равномерно для всех μ_i, включая μ, и равномерно по t

$$\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i\to\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i$$

при $k\to\infty$, т.е. для любого $\varepsilon_1>0$ существует K_1 такое, что при $k>K_1$ при всех i и при всех $t\in[0,T]$

$$\|\int_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i-\int_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i\|<\varepsilon_1$$

Тогда при $k > max(K, K_1)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$

$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu \| <$$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t}] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$

$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t}] f(m(\cdot)) d\mu \| +$$

$$+ \| \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_k - \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_k \| +$$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu \| < 2\varepsilon + \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu = 0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, отсюда вытекает, что

$$D_S \xi(t) = v(\xi(t)). \tag{3.9}$$

Напомним, что по построению $v(\xi(t)) \in \mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н.

По построению, для любого $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой функции $f(m(\cdot))$ как выше

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\frac{(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*}{\Delta t}$$

$$-\alpha_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Так как $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ при $k \to \infty$ поточечно, $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ п.н. относительно всех мер μ_k и относительно μ. Выберем $\delta > 0$. По теореме Егорова (см., например,

[8]) для любого i существует подмножество $\tilde{K}^i_\delta \subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde{K}^i_\delta) > 1-\delta$ и последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}^i_\delta$. Введем $\tilde{K}_\delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{K}^i_\delta$. Последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}_\delta$ при всех i и $\mu(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i \to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_i}$. По построению $\alpha(m(t))$ является равномерным пределом последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$. Поэтому $\alpha(m(t))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$, т.е. и на любом конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидным образом $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}) = 1$.

Из-за описанной выше равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ при всех k мы выводим из ограниченности $f(m(\cdot))$, что при достаточно большом k

$$\| \int_{\tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < \delta.$$

Так как $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ for all $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, т.е. их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда, поскольку

$$\mu_k(C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash \tilde{K}_\delta) < \delta$$

при всех достаточно больших k, то

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash \tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < 2\delta Q \Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ – произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\alpha_k(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Функция $\alpha(m(t))$ – μ-п.н. непрерывна и ограничена на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ (см. выше). Так как к тому же меры μ_k слабо сходятся к μ, то по лемме из [4, параграф VI.1]

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu_k=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидным образом

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*]f(m(\cdot))d\mu_k$$

$$=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*]f(m(\cdot))d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[\frac{(m(t+\Delta t)-m(t))(m(t+\Delta t)-m(t))^*}{\Delta t}$$

$$-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu=0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, это означает, что $D_2\xi(t)=\alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t))\in\boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Вместе с (3.9) это означает, что $\xi(t)$ является искомым решением включения (3.1). ■

Литература

[1] Асеев С.М. Существование дифференцируемой однозначной ветви у многозначного отображения // Некоторые вопросы прикладной математики и программного обеспечения ЭВМ.- Москва.- 1982.- С. 36-39

[2] Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман Б.Д., А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский.- М: Комкнига, 2005.- 215с.

[3] Гихман И.И. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход.- Том 1. М.: Физматлит, 1971.- 664 с.

[4] Гихман И.И. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход.- - Т.3. М.: Физматлит, 1975.- 496 с.

[5] Гликлих, Ю.Е. Стохастические уравнения в производных в среднем и их приложения. I / Ю.Е. Гликлих // Известия РАЕН, Серия МММИУ.- 1997.- Т. 1, N 4.- С. 26-52.

[6] Гликлих, Ю.Е. Стохастические уравнения в производных в среднем и их приложения. II / Ю.Е. Гликлих // Известия РАЕН, Серия МММИУ.- 2000.- Т. 4, N 4.- С. 17-36.

[7] Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления/ Д.П. Желобенко.- М.: Физматлит, 1970.- 674 с.

[8] Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида.- М.: Мир, 1967.- 624 с.

[9] Келли Дж. Л. Общая топология / Дж.Л. Келли.- М.: Наука, 1968.- 432 с.

[10] Партасарати К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К.Р. Партасарати. - М.: Мир, 1988.- 344 с.

[11] Фарбер М.Ш. О гладких сечениях пересечения многозначных отображений. Известия академии наук Азербайджанской ССР.- 1979.- N 6.- С. 23-28.

[12] Azarina S.V. Differential inclusions with mean derivatives / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh // Dynamic Sysytems and Applications 16, No. 1 (2007), pp. 49–72

[13] Azarina S.V. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software.- 2015.- Vol. 8.- No. 4.- P. 100 – 106.

[14] Azarina S.V. Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh, A.V. Obukhovskii // Applicable Analysis, 86, No. 9 (2007), pp. 1105–1116

[15] Aubin J.P. Stochastic viability and invariance /J.P. Aubin, G. Da Prato // Annali Scuola Normale Superiore di Pisa. - 1990. Vol. 17.- P. 595-613.

[16] Cresson J. Stochastic embedding of dynamical systems / J. Cresson, S. Darses // Journal of Mathematical Physics.- 2007.- Vol. 48.- P. 072703-1 – 072303-54

[17] Conway, E.D. Stochastic equations with discontinuous drift / E.D. Conway // Trans. Amer. Math. Soc.- 1971.- vol. 157, N 1.- P. 235-245.

[18] Farinelli S. Geometric arbitrage theory and market dynamics / S. Farinelly // Journal of geometric mechanics.- 2015/- Vol. 7.- No. 4.- P. 431 – 471.

[19] He X.: A probabilistic method for Navier-Stokes vorticies. J. Appl. Probab. (2001).- P. 1059-1066.

[20] Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics /Yu.E. Gliklikh // Springer-Verlag London, 2011.- 460 p.

[21] Gliklikh, Yu.E. Ordinary and Stochastic Differential Geometry as a Tool for Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer, 1996.- 205 p.

[22] Gliklikh, Yu.E. Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods / Yu.E. Gliklikh. – New York: Springer-Verlag, 1997.- 229 p.

[23] Kisielewicz, M.L. Backward Stochastic Differential Inclusions / M.L. Kisielewicz // Dynamic Systems and Applications.-2007.- Vol.16.- No. 1.- P. 121-139.

[24] Kree P. Diffusion equation for multivalued stochastic differential equation /P. Kree // J Func Anal.- 1982.- Vol. 49.- P. 73–90

[25] Michta M. Set Valued Stratonovich Integral and Stratonovich Type Stochastic Inclusion / M. Michta, J. Motyl // Dynamic Systems and Applications.-2007.- Vol.16.- No. 1.- P. 141-154.

[26] Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews, 1966.- Vol. 150, No. 4.- P. 1079-1085.

[27] Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.- 142 p.

[28] Nelson E. Quantum fluctuations / E. Nelson.- Princeton: Princeton University Press, 1985.- 147 p.

[29] Makarova A.V. On solvability differential inclusions with current velocities /A.V. Makarova // International conference modern stochastics: Theory and applications II September 7-11, 2010, Kyiv, Ukraine. Abstracts.-Kyiv University, 2010-P.102

[30] Макарова А.В. Одна теорема существования решений для дифференциальных включений с текущими скоростями/А.В. Макарова// Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ

-2011) Материалы IV Международной научной конференции. Воронеж -2011-. С.186-188 3.

[31] Gliklikh Yu.E. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities / Yu. E. Gliklikh, A.V. Makarova // Applicable Analysis, 2012, Vol. 91, Issue 9, P. 1731 - 1739

[32] Гликлих Ю.Е. Теорема существования решений для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями /Ю.Е. Гликлих, А.В. Макарова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика Физика.- 2012.- N 17(136).- Вып. 28.- С. 5-15

[33] Makarova A.V. О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями //Spectral and Evoluation Problems.- 2012.- Vol. 22.- P. 125-128.

[34] Makarova A.V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II / A.V. Makarova // Global and Stochastic Analysis.- 2012.- Vol. 2.- No. 1.- P. 101-112.

[35] Макарова А.В. Новая теорема существования решений для дифференциальных включений с текущими скоростями /А. В. Макарова// Крымская международная математическая конференция. Сборник тезисов. Судак, Украина, 22 сентября - 4 октября 2013.- Т.2.- С. 75

[36] Gliklikh Yu.E., Makarova A.V. On stochastic differential inclusions with current velocities / Yu.E. Gliklikh, A.V. Makarova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. - 2015. - Vol. 2, No. 3.- P. 25-33.

[37] Макарова А.В. Некоторые матричные конструкции/ А. В. Макарова // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей 12-18 июля 2015года).- Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН- 2015. С.149-150

[38] Макарова А.В. О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями с полунепрерывной снизу правой частью /А.В. Макарова // Вестник Липецкого государственного педагогического университета. Серия МИФЕ.-2015. Вып. 1(16).- С. 22-29

[39] Макарова А.В. Некоторые конструкции с симметрическими матрицами I / А. В. Макарова // XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа- симпозиум по спектральным и эволбционным задачам(КРОМШ-2015): сборник тезисов.-Симферополь.- 2015. С.114-115

[40] Gliklikh Yu.E. On existence of solutions to stochastic differential inclusions with current velocities II / Yu.E. Gliklikh, A.V. Makarova // Journal of Computational and Engineering Mathematics.- 2016.- Vol. 3.- No. 1.- P. 48-60

[41] Макарова А. В. О существовании решений стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями I/ А.В. Макарова // XXIV Международная конференция "Математика. Экономика, Образование". IX Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Международная конференция по стохастическим методам. Материалы.Ростов н/Д. -2016. С. 63