На правах рукописи

Лапшина Марина Геннадьевна

B-ПОТЕНЦИАЛЫ НЬЮТОНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ РАДОНА И РАДОНА-КИПРИЯНОВА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВО "Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Ляхов Лев Николаевич**.

Официальные оппоненты:

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Челябинский государственный университет, математический факультет, кафедра математического анализа, заведующий кафедрой.

Ситник Сергей Михайлович, кандидат физико-математических наук, Воронежский институт МВД России, кафедра математики и моделирования систем, доцент.

Ведущая организация: Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых.

Защита состоится 15 ноября 2016 г. в 16.30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/3557/Диссертация_Лапшина_М.Г..pdf

Автореферат разослан «   » сентября 2016.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор физико-математических наук, профессор

Гликлих Ю.Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. B-потенциалами называются операторы, построенные по схеме классических потенциалов на основе специального сдвига

$$T^y: \ f(x) \to (T^y f)(x) =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha\,, \ x,\, y \geq 0\,,$$

принадлежащего классу обобщенных сдвигов Б.М. Левитана, и приспособленные для работы с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

Термин "обобщенный сдвиг" для T^y одновременно появился в работах А. Вайнштейна и Ж. Дельсарта в 30-40 -х годах, а общая теория обобщенных сдвигов была построена Б.М. Левитаном в 40-70 -х годах прошлого века. Впервые потенциалы, порожденные обобщенным сдвигом, изучались А. Вайнштейном. Он называл их "осесимметрическими" , поскольку они проявляются при исследовании задач с элементами сферической симметрии.

Смешанный обобщенный сдвиг (по одной переменной обобщенный сдвиг, а по остальным – обычный) применялся И.А. Киприяновым (1967) для исследования уравнений, содержащих по одному из направлений дифференцирования сингулярный оператор Бесселя. Таким образом, B-потенциалы известны с середины прошлого века. Однако их общая теория не построена.

B-потенциалы Рисса появляются в исследованиях уравнений с оператором Бесселя. В этой связи можно отметить работы И.А. Киприянова, А.Д. Гаджиева, В.С. Гулиева, Л.А. Иванова, В.В. Катрахова, В.И. Кононенко, Л.Н. Ляхова, Ф.Г. Мухлисова и др. Теория B-потенциалов, отвечающих бесконечно дифференцируемой плотности, построена Л.Н. Ляховым. Известно, что классические потенциалы Ньютона обладают замечательными (и специфическими) свойствами. То же надо сказать и о B-потенциалах Ньютона, чем обусловлен интерес к их изучению. Из монографии И.А. Киприянова "Сингулярные эллиптические краевые задачи" (1997) известно, что B-потенциалы Ньютона являются решениями сингулярного уравнения Пуассона, если правая часть уравнения дважды непрерывно дифференцируемая функция. Для классических потенциалов справедлив и более тонкий результат: такими решениями являются потенциалы с непрерывной по Гельдеру плотностью. В данной диссертации обобщаются результаты И.А. Киприянова именно в этом направлении: изучаются B-потенциалы Рисса с непрерывной по Гельдеру плотностью. Для этого оказалось необходимым исследовать дополнительные свойства

B-потенциала, не изученные ранее. В частности, возникает необходимость в формулах для вычисления первой, второй и B-производной (производной, порожденной обобщенным сдвигом) B-потенциала Ньютона. При этом формулы первой и второй производной аналогичны классическим. Формула для B-производной B-потенциала принципиально отличается от классической присутствием сингулярной составляющей оператора Бесселя в подынтегральных выражениях поверхностных интегралов. Разумеется, это приводит к необходимости введения новых ограничений на плотность B-потенциала. Во всех полученных формулах производные не применяются непосредственно к плотности. Это, как и в классическом случае, дает возможность распространить результаты работы на B-потенциалы с непрерывной по Гельдеру плотностью, подправленную понятием "четности по Киприянову" вблизи сингулярных гиперплоскостей. Но здесь возникли трудности другого характера, преодоление которых вынуждает вводить вращения. В результате обычно вырезаемый шар с центром в особой точке превращается в тор. Такое расширение евклидова пространства не дает возможности воспользоваться классической схемой. Это создает существенные сложности в изучении теории.

Актуальность данной работы в том, что полученные в ней результаты могут быть использованы при построении общей теории B-потенциалов. Кроме того, результаты, полученные относительно B-потенциалов Ньютона, могут использоваться в задачах фундаментальной физики, механики, интегральной геометрии и вычислительной томографии в которых присутствуют центральные, осевые и многоосевые симметрии.

Цель работы. Целью работы является изучение B-потенциалов с гельдеровской плотностью и их приложений к преобразованиям Радона и Радона-Киприянова.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Изучение B-потенциала и B-потенциала Ньютона с кусочно-гладкой плотностью, с гельдеровской плотностью и его основных свойств: непрерывность, ограниченность, дифференцируемость.

2. Получение формул обращения для некоторых операторов типа "плоская весовая волна".

3. Получение формул обращения преобразования Радона-Киприянова гельдеровской функции для случая, когда число $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ — натуральное.

4. Получение формул обращения преобразования Радона непрерывной функции от многоосевой сферической симметрии.

Научная новизна. Следующие результаты работы являются новыми.

1. Получены формулы второй производной и B-производной B-потенциала с непрерывной по Гельдеру плотностью. Доказано, что B-потенциал с удовлетворяющей условию Гельдера плотностью f является решением сингулярного уравнения Пуассона $\Delta_B\, u = C\, f$.

2. Получены формулы обращения некоторых интегральных операций с ядром типа "весовая плоская волна".

3. Доказана теорема о непрерывности преобразования Радона-Киприянова в весовых функциональных классах Лебега со специальным сингулярным весом.

4. Найдены формулы обращения преобразование Радона-Киприянова гельдеровской функции соответствующим B-потенциалом в случае, когда число $|\gamma|$ – натуральное. Установлено, что эти же формулы справедливы для обращения преобразования Радона гельдеровской функции, зависящей от многоосевой сферической симметрии.

Методы исследования. В работе используются методы теории функций, функционального анализа, а также методы, развитые в работах научной школы И.А. Киприянова при исследовании весовых функциональных пространств и сингулярных дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут оказаться полезными при исследовании решений сингулярных дифференциальных уравнений и могут быть включены в общую теорию B-потенциалов. Кроме того, возможно использование результатов диссертационного исследования при чтении курсов по выбору в университетах для студентов физико-математических специальностей.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались в Воронежской зимней математической школе в 2014 г. и в 2016 г., в школе молодых ученых Липецкой области "Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания" в 2015 г., на Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" в г. Ростове-на-Дону в 2015 г. и 2016 г., на Международной конференции по математической теории управления и механике в г. Суздале в 2015 г., на международной научной конференции "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных", посвященной памяти А.В. Бицадзе, в г. Москве в 2016 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] — [14]. В совместно опубликованных работах [1] – [4] Л.Н. Ляхову принадлежит постановка задач. Доказательства результатов получены лично диссертантом. Работы [1] – [3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка цитируемой литературы, включающего 47 наименований. Общий объем диссертации 124 страницы.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дается обоснование актуальности выбранной темы, приводится методика исследования, дан краткий обзор содержания диссертации и приведены основные научные результаты.

Нумерация изложенных ниже определений и утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

В первой главе даются определения преобразований Радона и Радона-Киприянова. Вводится определение смешанного обобщенного сдвига и описываются его основные свойства. Приведены некоторые, известные из работ Л.Н. Ляхова, Е.Г. Гоц, О.И. Поповой, свойства преобразования Радона-Киприянова.

Пусть натуральные числа N и n фиксированы, $1 \leq n \leq N$. Через $\mathbb{R}_N$ будем обозначать евклидово пространство точек $x{=}(x', x'')$, где $x' \in \mathbb{R}_n$, $x'' \in \mathbb{R}_{N-n}$. Так же введем обозначение $(x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}$, где мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел, его длина $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Функции $f(x)$, определенные в части пространства $\mathbb{R}_N^+$, будем называть x_i-четными по Киприянову (или x_i-четными), если они допускают четное продолжение с сохранением класса гладкости. Если функция всего лишь непрерывна (в том числе по Гельдеру), она будет называться x_i-четной по Киприянову, когда в некоторой положительной полуокрестности координатной гиперплоскости $x_i = 0$ она имеет первую непрерывную производную и выполняется условие

$$\forall i = \{1, n\}, \quad \lim_{x_i \to 0} f'_{x_i} = 0\,. \tag{1.1.1}$$

Функцию x_i-четную по каждой координате вектора $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ будем называть x'-четной по Киприянову (чаще просто — x'-четной функцией).

Все рассматриваемые далее функции предполагаются x'-четными в соответствующем классе. Носители таких функций $supp\, f = \Omega_N^+$ рассматриваются в области $\mathbb{R}_N^+$ евклидова пространства $\mathbb{R}_N$ с положительными весовыми переменными. Наибольший интерес представляют области, которые примыкают к координатным гиперплоскостям $x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Части границ таких областей, принадлежащих $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, будем обозначать Γ_N^0. Другую часть границы, принадлежащую $\mathbb{R}_N^+$, будем обозначать Γ_N^+. Теперь отметим, что граница Γ_N^0 — скорее граница симметрии, а не граница области. Поэтому всюду под областью задания x'-четной функции нам удобно понимать частично замкнутое множество, включающее в себя границу симметрии функции, т. е. $\Omega_N^+ \cup \Gamma_N^0$. Это множество будем обозначать тем же символом Ω_N^+.

Через $L_p^\gamma(\Omega_N^+)$ $\quad (p \geq 1,\ \Omega_N^+ \subseteq \mathbb{R}_N^+)$ будем обозначать множество измеримых и x'-четных функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega_N^+)} = \left(\int\limits_{\Omega_N^+} |f(x)|^p \, (x')^\gamma \, dx \right)^{1/p} .$$

Пусть $\delta(P)$ — δ-функция, сосредоточенная на $(N-1)$-мерной поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_N^+$.

Преобразованием Радона-Киприянова x'-четной функции f будем называть следующую конструкцию

$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x)\, \mathcal{P}_{x'}^\gamma\, \delta(p - \langle x, \xi \rangle)\, (x')^\gamma \, dx \,, \tag{1.1.4}$$

где символ $\mathcal{P}_{x'}^\gamma$ обозначает действие многомерного оператора Пуассона по совокупности переменных $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ по следующей формуле:

$$\mathcal{P}_{x'}^\gamma g(x', x'') = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi g(x_1 \cos\alpha_1, \ldots, x_n \cos\alpha_n \,, x'') \, \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \,. \tag{1.1.5}$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{N+n}^+$, полученном вращениями $x_i \to \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2}$ исходного пространства $\mathbb{R}_N^+$ на угол π, преобразование K_γ (1.1.4) примет вид

$$K_\gamma[f](\widetilde{\xi}, p) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_{\{\langle z, \widetilde{\xi} \rangle = p\}^+} \widetilde{f}(z) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1} d\Gamma \,, \tag{1.1.6}$$

где $z=(\mathbf{z_1},\mathbf{z_2},x'')=(z_1,z_2,\ldots,z_{2n-1},z_{2n},\,x'')\in\mathbb{R}^+_{N+n}$,
$\mathbf{z}_1=(z_1,z_3,\,\ldots\,,z_{2n-1})\in\mathbb{R}_n$, $\mathbf{z}_2=(z_2,z_4,\ldots,z_{2n})\in\mathbb{R}^+_n=\{z_{2i}>0,\ i=\overline{1,n}\}$,
$\widetilde{f}(z)=f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-1}^2+z_{2n}^2},\,x''\right)\in\mathbb{R}^+_{N+n}$ – функция от вращений, построенная по $f(x)\in\mathbb{R}^+_N$, $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+$ – гиперплоскость, с единичным вектором нормали $\widetilde{\xi}=(\xi_1,0,\,\ldots\,,\xi_n,0,\,\xi'')$, p — число, модуль которого есть расстояние от плоскости до начала координат, а элемент поверхности на гиперплоскости $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+\in\mathbb{R}^+_{N+n}$ определяется равенством

$$d\Gamma=\frac{(-1)^{j-1}}{\widetilde{\xi}_j}\,dz_1\,dz_2\,\ldots\,dz_{j-1}\,dz_{j+1}\,\ldots\,dz_{N+n}\,,\ \ j\neq N+n\,,\ \widetilde{\xi}_j\neq 0\,.$$

Ориентация гиперплоскости $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+$ выбрана так, чтобы она являлась границей полупространства $\{\langle z,\,\widetilde{\xi}\rangle<p\}^+$.

Следуя Б.М. Левитану, действие смешанного обобщенного сдвига $f(x)\to(T^yf)(x)=(T^{y'}_{x'}f)(x',x''-y'')=\prod\limits_{i=1}^{n}(T^{y_i}_{x_i}f)(x',x''-y'')$ на x'-четную функцию f определяем равенством

$$(T^yf)(x)=C(\gamma)\int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\pi}f(x'\to_\alpha y'\,,x''-y'')\,sin^{\gamma-1}\alpha' d\alpha'\,, \qquad (1.2.2)$$

где через

$$x'\to_\alpha y'=\sqrt{x'^2+y'^2-2x'y'\cos\alpha'} \qquad (1.2.3)$$

обозначен n-мерный вектор с координатами, порожденными евклидовыми расстояниями $\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i}$, $1\leq i\leq n\leq N$, а также

$$C(\gamma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\,,\quad sin^{\gamma-1}\alpha'=\prod_{i=1}^{n}\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,,\quad d\alpha'=d\alpha_1\ldots d\alpha_n\,.$$

Во второй главе изучаются B-потенциалы и их основные свойства. Доказана теорема о дифференцируемости B-потенциала ограниченной функции. Основным результатом второй главы являются теоремы о дифференцировании и B-дифференцировании B-потенциалов Ньютона с гельдеровской плотностью. Вводится условие гельдеровской непрерывности для функций от вращений.

Известно, что если обобщенный сдвиг отвечает порядку γ, то B-производная с точностью до константы совпадает с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя, отвечающим тому же параметру γ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{T^hf(t)-f(t)}{(h/2)^2}=\mathcal{B}_\gamma f(t)=(\gamma+1)^{-1}B_\gamma=(\gamma+1)^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}\right)\,. \quad (2.1.2)$$

Сингулярную производную первого порядка обозначаем

$$B^1_{\gamma_i}=\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\gamma_i}{x_i}\,. \tag{2.1.3}$$

Ядром B-потенциала Рисса порядка $\lambda\in(0,N+|\gamma|)$ является функция

$$k^{(\lambda)}_{N,\gamma}(|x|)=\left\{\begin{array}{ll}|x|^{-\lambda}\,, & \lambda\neq 2k\\ |x|^{-\lambda}\,\ln\left|\frac{1}{x}\right|\,, & \lambda=2k\end{array}\right|\quad k=1,2,\,\ldots\ .$$

Определение 2.2.1 *B-потенциал Рисса порядка λ y'-четной по Киприянову функции f определяется выражением*

$$U^\lambda_B[f](x)=\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}f(y)\;T^yk^{(\lambda)}_{N,\gamma}(|x|)\;(y')^\gamma dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^+_N}f(y)\;T^{y'}_{x'}k^{(\lambda)}\left(\sqrt{|x'|^2+|x''-y''|^2}\,\right)\;(y')^\gamma dy\,. \tag{2.2.1}$$

Функция f называется плотностью B-потенциала. При $\lambda{=}N{+}|\gamma|{-}2$ конструкция U^λ_B называется B-потенциалом Ньютона. Для него введем обозначение

$$U_B[f](x)=\int\limits_{\Omega^+_N}f(y)\;\left(T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\;(y')^\gamma\,dy\,. \tag{2.2.2}$$

Пусть $\mathbb{B}^+_\rho(N)\;=\;\big\{x:\;x\in\mathbb{R}^+_N,\;|x|<\rho\big\}$ и $\mathcal{X}_\rho(x)$ – характеристическая функция этого шара.

Лемма 2.2.1 *Для всех λ , $0<\lambda<N+|\gamma|$ справедлива оценка*

$$U^\lambda_B[\mathcal{X}_R](x)\leq\left\{\begin{array}{ll}C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda}\,, & \lambda\neq 2k\\ C_\lambda R^{N+|\gamma|-\lambda}\,\ln\frac{1}{R}\,, & \lambda=2k\end{array}\right|\quad k=1,2,\,\ldots\ . \tag{2.2.8}$$

Класс абсолютно интегрируемых с весом $(x')^\gamma$ функций в любой ограниченной части Ω^+_N n-полупространства $\mathbb{R}^+_N$ будем обозначать через $L^\gamma_{1,loc}(\Omega^+_N)$.

Лемма 2.2.2 *Пусть $f(y)$ – y'-четная функция. Если $supp\,f\in\Omega^+_N$, Ω^+_N – ограниченная область и $f\in L^\gamma_1(\Omega^+_N)$, то $U^\lambda_B[f]\in L^\gamma_{1,loc}(\mathbb{R}^+_N)$.*

Лемма 2.2.3 *Пусть f – y'-четная функция. Если $supp\,f\in\Omega^+_N$, Ω^+_N – ограниченная область и $f\in L^\gamma_1(\Omega^+_N)$, то при $|x|\to\infty$*

$$\frac{\partial^\beta U^\lambda_B[f](x)}{\partial x_i^\beta}=\left\{\begin{array}{ll}O\left(|x|^{-\lambda-|\beta|}\right)\,, & \lambda\neq 2k\\ O\left(|x|^{-\lambda-|\beta|}\left|\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right|\right)\,, & \lambda=2k\end{array}\right|\quad k=1,2,\,\ldots\ . \tag{2.2.16}$$

Следующую теорему будем называть теоремой о гладкости B-потенциалов.

Теорема 2.2.1 *Пусть y'-четная функция f ограничена и имеет носитель в конечной области Ω_N^+, $|f(y)| \leq M$ почти везде в Ω_N^+. Тогда $U_B^\lambda[f](x)\in C^p\left(\overline{\mathbb{R}_N^+}\right)$, где p — наибольшее целое число такое, что $\lambda+p<N+|\gamma|$. Соответствующие производные функции $U_B^\lambda[f]$ получаются дифференцированием под знаком интеграла.*

Теорема 2.3.1 *Пусть функция f – y'-четная, функция $|f|$ ограничена в области $\overline{\Omega_N^+}$, тогда B-потенциал Ньютона (2.2.2) и его первые производные всюду равномерно непрерывны, справедлива формула*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}U_B[f](x) = \int\limits_{\Omega_N^+} f(y)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,T^y|x|^{2-N-|\gamma|}(y')^\gamma\,dy\,. \tag{2.2.28}$$

Теорема 2.5.1 *Пусть носитель y'-четной функции f, удовлетворяющей условию Гельдера, принадлежит ограниченной области Ω_N^+. Тогда B-потенциал Ньютона (2.2.2) имеет равномерно непрерывные первые производные, получаемые дифференцированием под знаком интеграла и непрерывные вторые производные, которые даются формулой:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\,U_B[f](x){=}-\,f(x)\int\limits_{\Gamma_N^+}\cos\nu_k\ \left(\frac{\partial}{\partial x_k}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\,(y')^\gamma\,d\Gamma_N+$$

$$+\int\limits_{\Omega_N^+}(f(y){-}f(x))\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\,(y')^\gamma\,dy\,, \tag{2.4.1}$$

где ν_k — угол между направлением внешней нормали и направлением оси Ox_k.

Теорема 2.5.2 *Пусть y'-четная функция f удовлетворяет условию Гельдера, и ее носитель принадлежит ограниченной области Ω_N^+. Тогда B-потенциал Ньютона (2.2.2) имеет равномерно непрерывные первые производные, получаемые дифференцированием под знаком интеграла и непрерывные B-производные, которые даются формулой*

$$(\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}U_B[f](x) = -f(x)\int\limits_{\Gamma_N^+}\cos\nu_i\ \left(\mathcal{B}^1_{\gamma_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\,(y')^\gamma\,d\Gamma_N+$$

$$+\int\limits_{\Omega_N^+}(f(y){-}f(x))\ \left((\mathcal{B}_\gamma)_{x_i}T^y|x|^{2-N-|\gamma|}\right)\,(y')^\gamma\,dy\,,$$

где $\nu_i = \nu(x_i)$ — *угол между направлением внешней нормали и оси* Ox_i, $\mathcal{B}_\gamma^1 = \frac{1}{\gamma+1} B_\gamma^1$, B_γ^1 — *сингулярный дифференциальный оператор первого порядка (2.1.3).*

Третья глава посвящена задаче обращения B-потенциалов Ньютона с гельдеровской плотностью и обращения некоторых операторов типа "плоская весовая волна" для случая, когда число $N+|\gamma|$ — натуральное.

Функция одного переменного $f(t)$, определенная в $\mathbb{R}_N$ в виде функции от скалярного произведения N-мерных векторов $f(\langle x\,,\,\xi\rangle)$, называется плоской волной. Соответственно интегральная операция

$$Au(x) = \int f(\langle x\,,\,\xi\rangle)\; u(\xi)\; d\mu(\xi)$$

называется операцией типа плоская волна.

В общем виде функция "плоская весовая волна" задается в виде действия многомерного оператора Пуассона на функцию "плоская волна": $\mathcal{P}_{x'}^{\gamma} f(\langle x\,,\,\xi\rangle)$, где оператор Пуассона $\mathcal{P}_{x'}^{\gamma} f(x', x'')$ отвечает мультииндексу $\gamma{=}(\gamma_1,\,\ldots\,,\,\gamma_n)$, состоящему из фиксированных положительных чисел.

Теорема 3.1.1 *Пусть y'-четная функция f удовлетворяет условию Гельдера, ее носитель принадлежит ограниченной области Ω_N^+. Тогда B-потенциал $U_{B,f}$ удовлетворяет сингулярному уравнению Пуассона*

$$\Delta_B U_B[f](x) = (2-N-|\gamma|)|S_1^+(N)|_\gamma f(x)\,, \tag{3.1.1}$$

где $|S_1^+(N)|_\gamma$ – весовая площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}_N^+$, $\Delta_B = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{\gamma_i} + \sum\limits_{j=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, а $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ – сингулярный дифференциальный оператор Бесселя.

Имеет место следующая теорема, представляющая собой один из вариантов теоремы о сферическом уплотнении.

Теорема 3.2.1 *Если $u = u(|\mathbf{x}^1|,\,\ldots\,,|\mathbf{x}^n|,\,x'')$, где $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}_{m_i}$, то*

$$Au(x) = Au(r, x'') = \prod_{i=1}^{n} |S_1(m_i)| \int\limits_{\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}} \mathcal{P}_r^{\gamma} f\left(\langle (r,\,x''), (\rho, \xi'')\rangle\right) u(\xi)\, \rho^{\gamma}\, d\rho\, d\xi''\,,$$

где $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i = |\mathbf{x}^i|$, $|S_1(m_i)|$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}_{m_i}^+$, r и $\rho \in \mathbb{R}_n^+$, $\mathcal{P}_r^{\gamma}$ — многомерный оператор Пуассона, отвечающий целочисленному мультииндексу $\gamma = (m_1-1,\,\ldots\,,m_n-1)$.

Теорема 3.2.2 *Пусть носитель ξ'-четной непрерывной по Гельдеру функции f принадлежит ограниченной области Ω_N^+, число $N+|\gamma|>2$ на-*

туральное нечетное и $k = 1, 3, 5, \ldots$. *Тогда*

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k\ (x')^\gamma\ dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$

$$= 2^{N+|\gamma|-2n+1}\ \pi^{N-n-1} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^2 \left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\ i^{N+|\gamma|-1}\, k!\, f(\eta)\,. \qquad (3.2.6)$$

Теорема 3.2.3 *Пусть* f *–* ξ'*-четная непрерывная по Гельдеру функция, носитель которой принадлежит ограниченной области* Ω_N^+*, число* $N+|\gamma| > 2$ *натуральное четное и* $k = 0, 2, 4, \ldots$. *Тогда*

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1(N)} \mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma} |\langle x, \xi\rangle|^k\, \ln|\langle x, \xi\rangle| (x')^\gamma\, dS(x)\, (\xi')^\gamma\, d\xi =$$

$$= -\pi^{N-n} 2^{N+|\gamma|-2n} i^{N+|\gamma|} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^2 \left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) k\,!\, f(\eta)\,. \qquad (3.2.13)$$

Четвертая глава посвящена задаче Радона об обращении интегралов по плоскостям от функций от многоосевой сферической симметрии. Решение этой задачи сводится к обращению преобразования Радона-Киприянова, когда мультииндекс этого преобразования γ является целочисленным. Это связано с тем, что преобразование Радона функций от осевой или многоосевой сферических симметрий есть преобразование Радона-Киприянова с целочисленным мультииндексом γ.

Рассмотрим множество функций $\{g_\xi(s)\}$ одного переменного s, зависящих от параметра ξ ($|\xi| = 1$), который считается фиксированным. Предположим, что $supp\ \ g_\xi(s)$ принадлежит интервалу $(-R, R)$ и пусть

$$\rho = \rho(s) = \frac{1}{(R^2 - s^2)^{\frac{(n+\gamma-1)\,p}{2q}}}\ \ , \qquad (4.2.1)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Эта функция будет использована в качестве сингулярного веса при определении пространств, приспособленных для работы с преобразованием Радона-Киприянова финитных функций, принадлежащих весовым лебеговым классам $L_\gamma^p(\Omega_N^+)$.

Для ρ, определенного по формуле (4.2.1), и каждого фиксированного единичного вектора ξ введем следующее множество функций

$$\mathcal{L}^p([-R; R], \rho) = \left\{ g_\xi(s) :\ \left(\int\limits_{-R}^{R} |g_\xi(s)|^p\ \rho(s)\ ds \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Теорема 4.2.1 *Пусть мультииндекс* $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ *состоит из фиксированных положительных чисел,* $f\in L_\gamma^p(\Omega_N^+)$ $(1\leq p<\infty)$, *и пусть* $supp\, f\in\{|x|<R\}_N^+=\{x:|x|<R,\ x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,n\}$, $\quad R<\infty$. *Тогда существует независимая от функции* f *константа* C *такая, что*

$$\|K_\gamma[f]\|_{\mathcal{L}^p([-R;+R],\rho)}\leq C\,\|f\|_{L_\gamma^p(\Omega_N^+)}\,,$$

где сингулярный вес $\rho=\rho(s)$ *определен по формуле (4.2.1).*

Теорема 4.3.1 *Пусть носитель* ξ'*-четной функции* f, *удовлетворяющей условию Гельдера, принадлежит ограниченной области* Ω_N^+, $K_\gamma[f]$ – *преобразование Радона-Киприянова функции* f. *Формула обращения этого преобразования для натуральных нечетных чисел* $N+|\gamma|>2$ *имеет вид:*

$$f(\eta)=\frac{2^{2n-|\gamma|-N}\pi^{n+1-N}}{i^{N+|\gamma|-1}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\triangle_B^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}K_\gamma[f](x;\langle x,\eta\rangle)(x')^\gamma dS(x)\,. \quad (4.3.1)$$

Теорема 4.3.2 *Пусть носитель* ξ'*-четной функции* f *принадлежит ограниченной области* Ω_N^+, *и функция* f *удовлетворяет условию Гельдера,* $K_\gamma[f]$ – *ее преобразование Радона-Киприянова. Формула обращения этого преобразования для натуральных четных чисел* $N+|\gamma|>2$ *имеет вид:*

$$f(\eta)=-\frac{2^{2n-|\gamma|-N}}{\pi^{N-n}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}(x')^\gamma dS(x)\,\times$$

$$\times\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}\left(\frac{1}{\langle x,\eta\rangle-p}\right)dK_\gamma[f](x;p)\,. \quad (4.3.3)$$

Теорема 4.4.1 *Пусть* $m_i>1$ — *натуральные числа,* $\xi^i\in\mathbb{R}_{m_i}$ *и* f *измеримая суммируемая функция от многоосевой симметрии в* $\mathbb{R}_{m_i}$*:* $f=f(|\xi^1|,\ldots,|\xi^n|,\xi'')$. *Причем, как радиальная*

$$f=f(r,\xi''),\quad r=(r_1,\ldots,r_n),\quad r_i=|\xi^i|$$

она является r*-четной по Киприянову и непрерывна по Гельдеру. Для преобразования Радона этой функции имеют место следующие формулы обращения* *a) при* $N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n$ *— нечетном*

$$f(\eta)=\frac{2^{3n-\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-N}\,\pi^{n+1-N}}{i^{N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n-1}\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{m_j}{2}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}|S_1(m_j)|}\times$$

$$\times\,\triangle_B^{\frac{N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n-1}{2}}\int\limits_{S_1^+(N)}\mathcal{P}_{\eta'}^{\gamma}R[f](x;\langle x,\eta\rangle)\prod_{j=1}^{n}x_j^{m_j-1}dS(x)\,;$$

b) при $N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n$ *— четном*

$$f(\eta)=-\frac{2^{3n-\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-N}}{\pi^{N-n}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{m_i}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}|S_1(m_i)|}\,\Delta_B^{\frac{N+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i-n-2}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_{S_1^+(N)}\prod_{i=1}^{n}r_i^{m_i-1}dS(x)\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\mathcal{P}_{\eta_i}^{m_i-1}\left(\frac{1}{\langle x,\eta\rangle-p}\right)dR[f](x;p)\,,$$

где

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{n}B_{m_i-1}+\sum_{j=n+1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\,,\quad B_{m_i-1}=\frac{\partial^2}{\partial r_i^2}+\frac{m_i-1}{r_i}\,\frac{\partial}{\partial r_i}\,,\quad \gamma_i>0\,,$$

$R[f](x;p)=R[f](|\mathbf{x}^1|,|\mathbf{x}^2|,\ldots|\mathbf{x}^n|,x'';\langle x,\eta\rangle)$ *– преобразование Радона функции от многоосевой сферической симметрии,* $|\mathbf{x}^i|=x_i$ *– длина радиуса-вектора точки* $\mathbf{x}^i\in\mathbb{R}_{m_i}$, $x=(r,x'')\in\mathbb{R}_N^+$.

В заключение автор выражает благодарность профессору Л.Н. Ляхову за постановку задачи и помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Публикации автора по теме диссертации

1. Lapshina M.G. Radon-Kipriyanov transform of weighted lebesgue classes of compactly supported functions/ Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Journal of Mathematical Sciences. – Springer. – 2015. – Vol. 205. – N 2. –pp 247-254.

2. Lapshina M.G. B-Potentials of Holder functions / Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Journal of Mathematical Sciences. – Springer. – 2016. – Vol. 231. – N 4. – pp 551-560.

3. Lapshina M.G. Inversion Formulas for Integral Operations of Weighted Plane Wave Tipe / Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Journal of Mathematical Sciences. – Springer. – 2016. – Vol. 216. – № 2. – pp 270-279.
4. Лапшина М.Г. Преобразование Радона-Киприянова весовых лебеговых классов финитных функций/ Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Проблемы математического анализа. – 2014. – Выпуск 77. – С.111-117.
5. Лапшина М.Г. B-потенциалы непрерывных по Гельдеру функций /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V» в г. Ростове-на-Дону. – Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2015. – С. 206-207.
6. Лапшина М.Г. Непрерывность первой производной B-потенциала Ньютона /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции по математической теории управления и механике в г. Суздаль. – Тезисы докладов. – Суздаль, 2015. – С. 82-83.
7. Лапшина М.Г. О гладкости B-потенциалов /М.Г. Лапшина // Вестник ПММ Воронежского государственного университета. – Воронеж: Научная книга. – 2015. – Выпуск 10. – С. 114-128.
8. Лапшина М.Г. B-производная B-потенциала /М.Г. Лапшина // Вестник ПММ Воронежского государственного университета. – Воронеж: Научная книга. – 2015. – Выпуск 11. – С. 116-128.
9. Лапшина М.Г. B-потенциалы Ньютона с кусочно-гладкой плотностью /М.Г. Лапшина // Материалы областного профильного семинара «Школа молодых ученых» по проблемам естественных наук. — «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания». — Липецк. – 2015 – С. 58-66.
10. Лапшина М.Г. Непрерывность B-потенциалов Ньютона кусочно-дифференцируемых функций /М.Г. Лапшина // Вестник ЛГПУ. Серия МИФЕ. — Липецк: ЛГПУ. — 2015. — Выпуск 1(16). – С. 18 – 21.
11. Лапшина М.Г. Об обращении B-потенциала /М.Г. Лапшина// Вестник ЛГПУ. Серия МИФЕ. — Липецк: ЛГПУ. — 2015. — Выпуск 4 (19). – С. 27-31.

12. Лапшина М.Г. Обращение преобразования Радона-Киприянова в нечетно-мерном пространстве /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016». – Воронеж: ВГУ, 2016. – С. 266-270.

13. Лапшина М.Г. Обращение некоторых весовых интегральных операций /М.Г. Лапшина // Материалы международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI» в г. Ростове-на-Дону. – Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2016. – С. 105.

14. Лапшина М.Г. Непрерывность преобразования Радона-Киприянова в весовых функциональных классах Лебега /М.Г. Лапшина // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященной памяти А.В. Бицадзе. – г. Москва, 2016. – С. 117.

Работы [1] – [3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.