На правах рукописи

Поляков Дмитрий Михайлович

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2016

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
профессор Баскаков Анатолий Григорьевич.

Официальные оппоненты: Шульман Виктор Семенович,
доктор физико–математических наук,
доцент, Вологодский государственный
университет, кафедра высшей математики,
профессор.

Баданин Андрей Васильевич,
кандидат физико–математических наук,
доцент, Санкт-Петербургский
государственный университет
кафедра высшей математики и
математической физики, доцент.

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Защита состоится 15 ноября 2016 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/3558/Диссертация_Поляков_Д.М.pdf

Автореферат разослан "   " сентября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие задачи математической физики приводят к изучению спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов. Наиболее известным объектом в спектральной теории операторов является одномерный оператор Шрёдингера, который определяется дифференциальным выражением $-y'' - qy$, где q — потенциал. При исследовании операторов, порождаемых таким дифференциальным выражением, на конечном интервале $[0, \omega]$, $\omega > 0$, стандартным условием на потенциал является его непрерывность. В последние годы, под влиянием работы А.М. Савчука и А.А. Шкаликова[1], стала активно развиваться спектральная теория оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Другим направлением исследований является спектральная теория дифференциальных операторов с негладким (принадлежащим классу $\mathrm{L}_2[0, \omega]$) потенциалом. Операторы с такими потенциалами изучались в работах В.А. Марченко, М.А. Наймарка, А.М. Савчука, А.А. Шкаликова, П. Джакова, Б.С. Митягина и др. Обзор наиболее интересных результатов в этой области приведен в статье П. Джакова и Б.С. Митягина[2].

В настоящее время активно проводятся исследования по теории дифференциальных операторов высших порядков с негладкими потенциалами. Это связано с тем, что такие дифференциальные операторы широко используются в различных задачах механики (например, оператор четвертого порядка описывает движение балки или пластины с различным закреплением[3]), а также в теории бифуркаций [4]. Большое количество работ посвящено изучению асимптотики собственных значений, поведения

[1]Савчук А. М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 897–912.

[2]Джаков П. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П. Джаков, Б. С. Митягин // Успехи математических наук. – 2006. – Т. 61, № 4. – С. 77–182.

[3]Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

[4]Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1961. – 341 с.

спектральных зон, оценок длины спектральных зон операторов четвертого и более высших порядков. Отметим важные результаты, полученные в этом направлении А.В. Баданиным, Е.Л. Коротяевым, В.А. Михайлецом, В.Н. Молибогой, О.А. Велиевым и др.

В настоящей диссертации исследуются спектральные свойства двух классов дифференциальных операторов: дифференциального оператора четвертого порядка общего вида с негладкими комплекснозначными потенциалами и четырьмя типами краевых условий и одномерного оператора Шрёдингера с негладким комплекснозначным потенциалом с краевыми условиями Дирихле.

Цель работы. 1) Построение метода подобных операторов в адаптированном для исследуемых дифференциальных операторов виде. 2) Исследование спектральных свойств дифференциального оператора четвертого порядка с негладким комплекснозначным потенциалом, определяемого на конечном промежутке периодическими, антипериодическими краевыми условиями, а также краевыми условиями Дирихле и Неймана-Дирихле. 3) Исследование спектральных свойств оператора Шрёдингера с негладким комплекснозначным потенциалом, определяемого на отрезке $[0, \omega]$, $\omega > 0$, краевыми условиями Дирихле.

Методы исследования. Для проведения спектрального анализа рассматриваемых операторов используется метод подобных операторов. Метод основан на преобразовании подобия изучаемого оператора в оператор более простой структуры, спектральные свойства которого легко вычисляются.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Из них выделим следующие:

1) Построены два варианта метода подобных операторов для абстрактных операторов, спектральные свойства которых близки к изучаемым дифференциальным операторам четвертого порядка и оператору Шрёдингера.

2) Установлены спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка с негладким потенциалом, определяемого периодическими, антипериодическими краевыми условиями и краевыми условиями Дирихле и Неймана-Дирихле. А именно, получены асимптотика собственных значений, оценки отклонений спектральных проекторов, оценки равносходимости спектральных разложений. Изучено асимптотическое поведение полугруппы операторов, генератором которой является взятый со знаком минус исследуемый дифференциальный оператор.

3) Установлены спектральные свойства оператора Шрёдингера с негладким потенциалом, определяемого краевыми условиями Дирихле. Получена асимптотика собственных значений, оценки отклонений спектральных проекторов, оценки равносходимости спектральных разложений. Доказана спектральность оператора Шрёдингера. Изучено асимптотическое поведение полугруппы операторов, генератором которой является взятый со знаком минус исследуемый дифференциальный оператор.

Практическая и теоретическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при изучении различных задач математической физики. Применяемый в диссертации адаптированный вариант метода подобных операторов может быть использован для исследования спектральных свойств других классов дифференциальных операторов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались автором на международных конференциях: Крымских Осенних математических школах–симпозиумах (Украина–Россия, Ласпи–Батилиман, 2010-2012, 2015), «15th Internet Seminar: Operator Semigroups for Numerical Analysis» (Germany, Blaubeuren, 2012), Крымской осенней математической конференции (Украина, Крым, Судак, 2013), на конференции «Spectral theory and differential Equations», посвященной 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана (Россия, Москва, МГУ, 2014), «Дифференциальные и функционально–дифференциальные уравнения» (Россия, Москва, 2014), «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Россия, Улан-Удэ, Байкал, 2015), «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VI» (Россия, Ростов-на-Дону, 2016), на семинаре под руководством Г. В. Демиденко в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН, на семинаре под руководством Т. А. Суслиной в Санкт-Петербургском государственном университете, на семинарах НИИ математики (ВГУ, 2012–2016); на семинаре под руководством А. Г. Баскакова; на научных сессиях ВГУ (2011–2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [10]. Работы [1], [5] – [8] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 51 наименование. Общий объем диссертации - 114 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении приводится обзор литературы и формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации приводятся основные понятия из спектральной теории операторов, теории полугрупп, а также основные положения метода подобных операторов.

Во второй главе проводится спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями. Рассматривается оператор $L_{bc} : \mathrm{D}(L_{bc}) \subset \mathrm{L}_2[0,1] \to \mathrm{L}_2[0,1]$, который определяется следующим дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathrm{L}_2[0,1]. \tag{1}$$

Область определения задается одним из краевых условий bc:

(a) периодические $bc = per : y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1),\ j = 0, 1, 2, 3;$

(b) антипериодические $bc = ap : y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(1),\ j = 0, 1, 2, 3.$

Таким образом, полагается, что $\mathrm{D}(L_{bc}) = \{y \in W_2^4[0,1] : y$ удовлетворяет условию $bc\}$. Если $a = b = 0$, то полученный оператор четвертого порядка будем обозначать через $\mathcal{L}_{bc}^0$, $bc \in \{per, ap\}$.

Так как потенциалы $a, b \in \mathrm{L}_2[0,1]$, то имеют место следующие разложения: $a(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, $b(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, где a_l, b_l — коэффициенты Фурье функций a, b соответственно.

Сформулируем основные результаты второй главы. Первая теорема посвящена асимптотике собственных значений оператора L_{bc}.

Теорема 2.3.1. *Дифференциальный оператор L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$, является оператором с компактной резольвентой и его спектр представим в виде $\sigma(L_{bc}) = \widetilde{\sigma}_m \cup \{\widetilde{\lambda}_n^{\mp}, n \geqslant m+1\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\widetilde{\sigma}_m$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m.*

Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{\mp}$, $n \geqslant m+1$, оператора L_{bc} допускают следующее асимптотическое представление:

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+\theta)\big)^4 + (\pi(2n+\theta))^2 a_0 - (2n+\theta)^2 \cdot$$
$$\cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a_{n+l+\theta}a_{-n-l-\theta} + a_{n-l}a_{l-n})(2l+\theta)^2}{(2l+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \mp (\pi(2n+\theta))^2 \Bigg(a_{-2n-\theta}a_{2n+\theta} +$$
$$+ \frac{4}{\pi^4}\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-\theta}(2l+\theta)^2}{(2l+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+\theta}a_{n-l}(2l+\theta)^2}{(2l+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \Bigg) -$$
$$- \frac{2a_{-2n-\theta}}{\pi^2} \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+\theta}a_{n-l}(2l+\theta)^2}{(2l+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} - \frac{2a_{2n+\theta}}{\pi^2} \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-\theta}(2l+\theta)^2}{(2l+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \Bigg)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \widetilde{\gamma}_n n^2, n \geqslant m+1.$$

Или в краткой форме

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+\theta)\big)^4 + (\pi(2n+\theta))^2 a_0 + \widetilde{\gamma}_n^{\mp} n^2, \quad n \geqslant m+1,$$

где $\theta = 0$ *для случая* $bc = per$ *и* $\theta = 1$ *для* $bc = ap$. *Здесь* $(\widetilde{\gamma}_n)$, $(\widetilde{\gamma}_n^{\mp})$ — *последовательности, суммируемые со степенью* $\frac{4}{3}$ *и* 2 *соответственно.*

Теорема 2.3.2. *Если функции* a *и* b *являются функциями ограниченной вариации, то собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n^{\mp}$ *допускают следующую асимптотику*

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+\theta)\big)^4 + (\pi(2n+\theta))^2 a_0 + \mathcal{O}(1),$$

где $\theta = 0$ *для случая* $bc = per$ *и* $\theta = 1$ *для* $bc = ap$.

В следующей теореме символ $\widetilde{P}_n$, $n \geqslant m+1$ (число $m \in \mathbb{N}$ взято из теоремы 2.3.1), обозначает проектор Рисса, построенный по множествам $\{\widetilde{\lambda}_n^{\mp}\}$ из спектра $\sigma(L_{bc})$ оператора L_{bc}. Через P_n, $n \in \mathbb{N}$, обозначается ортогональный проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, где λ_n — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{bc}^0$. Если Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, m\}$, то $\widetilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$ — проектор Рисса, построенный по множеству $\{\widetilde{\lambda}_k^{\mp}, k \in \Omega\}$. Аналогично $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$. Далее, через $\widetilde{P}_{(m)}$ будет обозначаться проектор Рисса, построенный для оператора L_{bc} по спектральному множеству $\widetilde{\sigma}_m$, и через $P_{(m)}$ — проектор $P_1 + \cdots + P_m$.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, $\operatorname{End}\mathcal{H}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта-Шмидта. Через $\|\cdot\|_2$ будет обозначаться норма Гильберта-Шмидта.

Теорема 2.4.1. *Система проекторов Рисса* $\widetilde{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$ *и* $\widetilde{M} > 0$ — *постоянная, не зависящая от* $k(\Omega)$.

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы 2.4.1 справедлива следующая оценка*

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \leqslant \frac{M_1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M_1 > 0$ — *некоторая константа. В этом случае* Ω — *одноточечное* *множество* $\{n\}$.

Теорема 2.4.2. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов* L_{bc} *и* $\mathcal{L}^0_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$*:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $\widetilde{M} > 0$ *— константа из теоремы 2.4.1.*

Следствие 2.4.3. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов* L_{bc} *и* $\mathcal{L}^0_{bc}$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

Последним основным результатом второй главы является теорема об асимптотическом поведении аналитической полугруппы операторов, генератором которой является оператор $-L_{bc}$.

Теорема 2.5.1. *Дифференциальный оператор* $-L_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$, *является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов* $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\,\mathrm{L}_2[0,1]$. *Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида* $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, *действующей в* $\mathrm{L}_2[0,1] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, *где* $\mathcal{H}_{(m)} = \mathrm{Im}\, P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \mathrm{Im}\,(I - P_{(m)})$. *Полугруппа* $T^{(m)}(t)$ *допускает представление вида:*

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{C_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0,1], \quad C_k \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k = \mathrm{Im}\, P_k.$$

В третьей главе диссертации исследуется дифференциальный оператор четвертого порядка с краевыми условиями Дирихле и Неймана-Дирихле. Рассматриваются операторы $L_i : D(L_i) \subset \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, которые определяются дифференциальным выражением (1) с коэффициентами a, $b \in \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. В качестве отрезка $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ для оператора L_1 будет использоваться отрезок $[0,1]$, а для оператора L_2 — отрезок $[-1,1]$. Область определения оператора L_1 задается краевыми условиями

$(bc)_1:$ Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, $y''(0) = y''(1) = 0$;

а L_2 — краевыми условиями:

$(bc)_2:$ Неймана-Дирихле $y(-1) = y(1) = 0$, $y'(-1) = y'(1) = 0$.

Следовательно, $\mathrm{D}(L_i) = \{y \in W_2^4[\mathbf{a}, \mathbf{b}] : y$ удовлетворяет условию $(bc)_i\}$, $i = 1, 2$. Если $a = b = 0$, то полученный дифференциальный оператор будет обозначаться через L_{0i}, $i = 1, 2$.

Перейдем к формулировке основных результатов главы. Первая теорема посвящена асимптотике собственных значений операторов L_i, $i = 1, 2$.

Теорема 3.3.2. *Дифференциальные операторы L_i, $i = 1, 2$, являются операторами с компактной резольвентой, и их спектр представим в виде $\sigma(L_i) = \widetilde{\sigma}_m \cup \{\widetilde{\lambda}_n, n \geqslant m + 1\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\widetilde{\sigma}_m$ — конечное множество, с числом точек не превосходящим m. Все собственные значения $\widetilde{\lambda}_{m+1}, \widetilde{\lambda}_{m+2}, \ldots$ оператора L_1 являются простыми и допускают следующую асимптотику*

$$\widetilde{\lambda}_n = (\pi n)^4 + (\pi n)^2 \int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t - (\pi n)^2 \int_0^1 a(t) \cos 2\pi n t\,\mathrm{d}t - \\ - n^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln} l^2}{l^4 - n^4} + \zeta_n n^2, \quad n \geqslant m + 1,$$

где (ζ_n) — суммируемая последовательность и $a_{nl} = \int_0^1 a(t) \cos \pi(l - n)t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 a(t) \cos \pi(l + n)t\,\mathrm{d}t$, $n, l \geqslant 1$.

Для оператора L_2 асимптотика собственных значений для нечетных n имеет вид:

$$\widetilde{\lambda}_n = \big(-\tfrac{\pi}{4} + \pi n\big)^4 - \big(-\tfrac{\pi}{4} + \pi n\big)^2 \Bigg(\tfrac{1}{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \int_{-1}^1 a(t)(\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)t} + \\ + \mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2} - 2\pi n)t})\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^1 a(t)\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^1 a(t) \cos\big(-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\big)t\,\mathrm{d}t\Bigg) - \\ - \big(-\frac{\pi}{4} + \pi n\big)^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln} (-\frac{\pi}{4} + \pi l)^2}{\lambda_l - \lambda_n} + \gamma_n n^2, \quad n \geqslant m + 1,$$

где $\lambda_n = (-\frac{\pi}{4} + \pi n)^4$. *Для четных* n *асимптотика допускает следующее представление:*

$$\widetilde{\lambda}_n = \big(\tfrac{\pi}{4} + \pi n\big)^4 - \big(\frac{\pi}{4} + \pi n\big)^2 \Bigg(\tfrac{1}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \int_{-1}^{1} a(t)(\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t} +$$

$$+\mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t})\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} a(t)\mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} a(t)\cos\big(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\big)t\,\mathrm{d}t\Bigg) -$$

$$-\big(\frac{\pi}{4} + \pi n\big)^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl}a_{ln}(\frac{\pi}{4} + \pi l)^2}{\lambda_l - \lambda_n} + \gamma_n n^2, \quad n \geqslant m+1,$$

где (γ_n) *— суммируемая последовательность,* $\lambda_n = (\frac{\pi}{4} + \pi n)^4$, $a_{nl} = \int_{-1}^{1} a(t)e_n(t)e_l(t)\,\mathrm{d}t$, $n, l \geqslant 1$, *и* e_n *— собственные функции оператора* L_{02}.

Следствие 3.3.1. *Операторы* L_1, L_2 *спектральны по Данфорду.*

Следующая теорема будет посвящена оценкам отклонений спектральных проекторов. При формулировке мы будем использовать те же обозначения для спектральных проекторов, что и при описании предыдущей главы.

Теорема 3.4.1. *Система проекторов Рисса* $\widetilde{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{M\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$ *и* $M > 0$ *— постоянная, не зависящая от* $k(\Omega)$.

Следствие 3.4.1. *В условиях теоремы 3.4.1 имеет место оценка*

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\| \leqslant \frac{M_3}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M_3 > 0$ *— некоторая постоянная. В этом случае* Ω *— одноточечное множество* $\{n\}$.

Приведем результаты, касающиеся равносходимости спектральных разложений.

Теорема 3.4.2. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов* L_i *и* L_{0i}, $i = 1, 2$:

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 \leqslant \frac{M(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $M > 0$ — постоянная из теоремы 3.4.1.

Следствие 3.4.3. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов L_i и L_{0i}, $i = 1, 2$:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

Теорема 3.5.1. *Дифференциальный оператор $-L_i$, $i = 1, 2$, является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$. Полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида:*

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

где собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m + 1$, и число m определены в теореме 3.3.2.

Четвертая глава диссертации посвящена исследованию спектральных свойств одномерного оператора Шрёдингера. Рассматривается оператор $S : D(S) \subset \mathrm{L}_2[0, \omega] \to \mathrm{L}_2[0, \omega]$, порожденный на промежутке $[0, \omega]$, $\omega > 0$, дифференциальным выражением

$$s(y) = -y'' - vy, \quad v \in \mathrm{L}_2[0, \omega].$$

Область определения задается следующим образом $D(S) = \{y \in W_2^2[0, \omega] : y(0) = y(\omega) = 0\}$. Предполагается, что потенциал v принадлежит гильбертову пространству $\mathrm{L}_2[0, \omega]$, и всюду используется его разложение в ряд Фурье: $v(t) = \sqrt{2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k \cos \frac{\pi k}{\omega} t$, $t \in [0, \omega]$. Если $v = 0$, то оператор второго порядка S мы будем обозначать через S_0.

Введем в рассмотрение последовательность α, которая определяется следующим образом

$$\alpha(n) = \left(\frac{\|v\|_2^2}{n^2} + \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \frac{|v_{n-p}|^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что эта последовательность суммируема с квадратом.

Первая теорема четвертой главы посвящена асимптотическому поведению собственных значений оператора S.

Теорема 4.3.1. *Оператор S является оператором с компактной резольвентой. Его спектр допускает представление вида*

$$\sigma(S) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{n \geqslant m+1} \sigma_n \Big), \tag{2}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m, а множества $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n\}$, $n \geqslant m+1$, одноточечны. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, представимы в виде

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega}t\,\mathrm{d}t + \eta(n), \quad n \geqslant m+1,$$

где последовательность $\eta : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m+1\} \to [1,\infty)$ допускает оценки вида $|\eta(n)| \leqslant \dfrac{M_{dir}}{n}\alpha(2n)$, $n \geqslant m+1$, для некоторой постоянной $M_{dir} > 0$.

Следствие 4.3.1. *Оператор S является спектральным (по Данфорду).*

Теорема 4.3.2. *Если v — функция ограниченной вариации, то для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n$ имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega}t\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant m+1.$$

Перейдем к теореме об отклонениях спектральных проекторов. В следующей теореме число m взято таким же, как и в теореме 4.3.1. Через $P_{(m)}$ обозначается проектор $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,m\}$. Проектор Рисса $P(\Delta, S_0)$, построенный по множеству $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_k, k \in \Omega\}$, где λ_k — собственные значения оператора S_0, определим равенством $P(\Delta, S_0)x = \sum\limits_{n\in\Omega} P_n x$, $x \in \mathrm{L}_2[0,\omega]$.

Теперь рассмотрим множество $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(\Omega) = \cup_{k\in\Omega}\sigma_k$, где σ_k определяется в теореме 4.3.1. Символом $\widetilde{P}_n$ обозначим проектор Рисса, построенный по множеству σ_n, $n \geqslant m+1$. Тогда проектор $P(\widetilde{\Delta}, S)$ зададим равенством $P(\widetilde{\Delta}, S)x = \sum\limits_{k \in \Omega} \widetilde{P}_k x$, $x \in \mathrm{L}_2[0,\omega]$.

Теорема 4.4.1. *Для любого подмножества Ω из $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m\}$ имеют место следующие оценки отклонений спектральных проекторов, построенных по операторам S и S_0:*

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - P(\Delta, S_0)\|_2 \leqslant \frac{M}{k^{\frac{1}{2}}(\Omega)},$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная и $k(\Omega) = \min\limits_{k \in \Omega} k$.

Кроме того, существует оператор Гильберта-Шмидта $\mathcal{U}$ с нормой $\|\mathcal{U}\|_2 \leqslant \frac{1}{2}$ такой, что справедлива оценка

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - (I+\mathcal{U})^{-1} P(\Delta, S_0)(I+\mathcal{U})\|_2 \leqslant \frac{M_1}{k(\Omega)},$$

где $M_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Следствие 4.4.1. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов S и S_0:*

$$\left\| P(\sigma_{(m)}, S) + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - \sum_{k=0}^{n} P_k \right\|_2 \leqslant \frac{M_2}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $M_2 > 0$ — некоторая постоянная.

Так же как и при описании предыдущих глав, мы приведем результат об асимптотическом поведении полугруппы операторов.

Теорема 4.5.1. *Дифференциальный оператор $-S$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\, \mathrm{L}_2[0,\omega]$. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[0,\omega] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \mathrm{Im}\, P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \mathrm{Im}\,(I - P_{(m)})$. Полугруппа $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида:*

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0,\omega],$$

где собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, определяются в теореме 4.3.1.

Автор выражает самую искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору А. Г. Баскакову за постановку задач, внимание и помощь на протяжении всей работы над диссертацией. Также автор хотел бы поблагодарить профессора В. Г. Звягина за полезные замечания и внимание к работе.

Список публикаций по теме диссертации

[1] Поляков Д. М. Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков // Вестник ВГУ, Серия Физика-Математика. – 2012. – № 1. – С. 179–181.

[2] Поляков Д. М. Об исследовании спектральных свойств дифференциального оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков // Крымская международная математическая конференция (КММК-2013). Сборник тезисов. Т. 1. – 2013. – С. 61–62.

[3] Polyakov D. M. Spectral properties of non-self adjoint differential operator of fourth order / D. M. Polyakov // The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts. – 2014. – pp. 95–96.

[4] Polyakov D. M. Spectral properties of differential operator of fourth order with periodic and semi-periodic boundary conditions / D. M. Polyakov // Международная конференция "Спектральная теория и дифференциальные уравнения", посвященная 100-летию Б.М. Левитана. Сборник тезисов. – 2014. – С. 24–26.

[5] Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков// Дифференциальные уравнения. – 2015. - Т. 51, № 3. – С. 417–420.

[6] Поляков Д. М. Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами / Д. М. Поляков // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 1. – С. 165–184.

[7] Поляков Д. М. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 75–79.

[8] Поляков Д. М. Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Алгебра и анализ. – 2015. – Т. 27, № 5. – С. 117–152.

[9] Поляков Д. М. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с L_2 потенциалом / Д. М. Поляков // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование". Тезисы докладов. – 2015. – С. 231–233.

[10] Поляков Д. М. Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка / Д. М. Поляков // Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2015). Сборник тезисов. – 2015. – С. 24–25.

Работы [1], [5] – [8] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.