На правах рукописи

СИТНИК СЕРГЕЙ МИХАЙЛОВИЧ

Применение операторов преобразования Бушмана–Эрдейи и их обобщений в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Воронеж — 2016

Работа выполнена в ФГКОУ ВО «Воронежский институт Министерства внутренних дел Российской Федерации».

Официальные оппоненты:

Гольдман Михаил Львович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», кафедра нелинейного анализа и оптимизации, профессор;

Фёдоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет», кафедра математического анализа, заведующий кафедрой;

Глушак Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО НИУ «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», кафедра общей математики, профессор.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Защита состоится «13» декабря 2016 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, ВГУ, математический факультет, ауд. 335.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/3559/Диссертация_Ситник_С.М..pdf

Автореферат разослан “ ____ “ сентября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Гликлих Ю. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время теория операторов преобразования (ОП) представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегродифференцирования, теории оптимального управления и динамических систем. Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом её приложений. Особую роль методы операторов преобразования играют в теории дифференциальных уравнений различных типов. С их помощью были доказаны многие фундаментальные результаты для различных классов дифференциальных уравнений.

Методы операторов преобразования были с успехом применены в теории обратных задач, определяя обобщённое преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Гельфанда–Левитана, в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается не менее знаменитое уравнение Марченко, в спектральной теории были получены известные формулы следов и асимптотика спектральной функции, оценки ядер операторов преобразования, отвечающие за устойчивость обратных задач и задач рассеяния(З.С.Агранович, В.А.Марченко [1] [2] [3] Б.М.Левитан [4] [5] [6]); для обоих классов обратных задач операторы преобразования являются основным инструментом, так как перечисленные классические уравнения выписываются для ядер операторов преобразования, а значения ядер на диагонали восстанавливают неизвестные потенциалы в обратной задаче по спектральной функции или данным рассеяния. Для операторов Штурма–Лиувилля были построены ставшие классическими ОП на отрезке (Б.Я.Левин [7]) и полуоси (А.Я.Повзнер [8]). Также была исследована система Дирака и другие матричные системы дифференциальных уравнений (Б.М.Левитан, И.С.Саргсян [9]).

В это же время была развита теория обобщённых аналитических функций, которую можно трактовать как раздел теории операторов преобразова-

[1] Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. Харьков : изд. ХГУ, 1960.

[2] Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев : Наукова Думка, 1972.

[3] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова Думка, 1977.

[4] Левитан Б. М. Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения. М. : ГИФМЛ, 1962.

[5] Левитан Б. М. Теория операторов обобщённого сдвига. М. : Наука, 1973.

[6] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984.

[7] Левин Б. Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 106. — № 2. — С. 187–190.

[8] Повзнер А. Я. О дифференциальных уравнениях типа Штурма–Лиувилля на полуоси // Матем. сборник. — 1948. — Т. 23 (65). — № 1. — С. 3–52.

[9] Левитан Б. М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М. : Наука, 1988.

ния, сплетающих невозмущённые и возмущённые уравнения Коши–Римана (Л.Берс [10] [11], С.Бергман [12], И.Н. Векуа [13] [14]) с приложениями в задачах механики, теории упругости и газодинамики. На основе методов операторов преобразований был создан новый раздел гармонического анализа, изучающий различные модификации операторов обобщённого сдвига и обобщённых операторных свёрток (Ж.Дельсарт [15] [16] [17], Я.И.Житомирский [18], Б.М.Левитан [19] [20]). Была установлена глубокая связь операторов преобразования с теоремами типа Пэли–Винера (В.В.Сташевская [21], Х.Тримеш [22] [23]). Теория операторов преобразования позволила дать новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах (Р.Кэрролл [24] [25] [26], Т.Корвиндер).

В теории нелинейных дифференциальных уравнений был разработан метод Лакса, который использует операторы преобразования для доказательства существования решений и построения солитонов [27], также широкие применения нашли преобразования Дарбу [28], которые можно рассматривать как операторы преобразования, в которых и сплетаемые и сплетающий операторы являются дифференциальными. В квантовой физике при рассмотрении уравнения Шрёдингера и задач теории рассеяния был изучен специальный

---

[10] Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — V. 56. — P. 67–93.

[11] Bers L. A remark on an applications of pseudo–analytic functions // Amer. J. Math. — 1956. — V. 78. — No. 3. — P. 486–496.

[12] Бергман С. Интегральные операторы в теории уравнений с частными производными. М. : Мир, 1964.

[13] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л. : ГИТТЛ, 1948.

[14] Векуа И. Н. Обобщённые аналитические функции. М. : Наука, 1988.

[15] Delsarte J. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéares aux dèrivées partielles du seconde ordre. // Paris : C. R. Acad. Sci. — 1938. — 206. — P. 1780–1782.

[16] Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor. // Journ. Math. pures et appl. — 1938. — 17. — P. 217–230.

[17] Delsarte J. Lectures on Topics in Mean Periodic Functions And The Two-Radius Theorem. // Bombay: Tata Institute of Fundamental Research,1961.

[18] Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. // Матем. сб. — 1955. — Т. 36(78). — № 2. — С. 299–310.

[19] Левитан Б. М. Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения. М. : ГИФМЛ, 1962.

[20] Левитан Б. М. Теория операторов обобщённого сдвига. М. : Наука, 1973.

[21] Сташевская В. В. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле // Харьков :Уч. зап. Харьковского матем. об–ва. — 1957. — № 5. — С. 49–86.

[22] Trimeche K. Transformation intégrale de Weil et thèoréme de Paley–Winer associés à un opérateur différentiel singulier sur $(0,\infty)$. // Jour. Math. Pures Appl. — 1981. — No. 60. — P. 51–98.

[23] Trimeche Kh. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators. // Mathematical Reports. — V. 4, Part 1. — USA : Harwood Academic Publishers, 1988.

[24] Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations. North Holland, 1979.

[25] Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions. North Holland, 1982.

[26] Carroll R. Transmutation Theory and Applications. North Holland, 1986.

[27] Carroll R. Topics in Soliton Theory. North Holland, 1991.

[28] Matveev V. B., Salle M. I. Darboux–Backlund transformations and applications. NY, Springer, 1991.

класс операторов преобразования — волновые операторы [29] [30].

Таким образом, методы теории ОП и связанные с ними задачи в той или иной степени применялись в работах многих математиков. Перечислим некоторых из них: A.I. Aliev, H. Begehr, J. Betancor, A. Boumenir, R. Carroll, H. Chebli, I. Dimovski, C. Dunkl, J. Delsarte, R. Gilbert, T.H. Koornwinder, V. Kiryakova, J. Lions, B. Rubin, K. Stempak, K. Trimèche, Агранович З.С., Баскаков А.Г., Валицкий Ю.Н., Волк В.Я., Волчков В.В., Гаджиев А.Д., Глушак А.В., Горбачук М.Л., Гулиев В.С., Житомирский Я.И., Катрахов В.В., Качалов А.П., Килбас А.А, Киприянов И.А., Ключанцев М.И., Кононенко В.И., Кравченко В.В., Левин Б.Я., Левитан Б.М., Леонтьев А.Ф., Ляхов Л.Н., Маламуд М.М., Марченко В.А., Мацаев В.И., Нагнибида Н.И., Платонов С.С., Повзнер А.Я., Сохин А.С., Сташевская В.В., Торба С.М., Фаддеев Л.Д., Фаге Д.К., Хачатрян И.Г., Хромов А.П., Шишкина Э.Л., Шмулевич С.Д., Ярославцева В.Я. Разумеется, этот список не полон и может быть существенно расширен.

Отдельной областью применения ОП стала теория дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, особенно с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx}. \tag{1}$$

На первоначальном этапе исследований уравнений этого класса применялась пара известных ОП Сонина и Пуассона. Как ОП эти операторы впервые были введены в работах Жана Дельсарта [31] [32] [33] [34], а затем на основе идей Дельсарта их изучение продолжилось в работах Дельсарта и Лионса [35] [36] [37]

[29] Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния-1. // УМН. — 1959. — Т. 14. — № 4. — С. 57–119.

[30] Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния-2 . // "Итоги науки и техники" , Современные проблемы математики. Т. 3. — ВИНИТИ. — 1974. — С. 93–180.

[31] Delsarte J. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations lineáres aux dèrivées partielles du seconde ordre. Paris : C. R. Acad. Sci. — 1938. — 206. — P. 1780–1782.

[32] Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor. // Journ. Math. pures et appl. — 1938. — 17. — P. 217–230.

[33] Delsarte J. Une extension nouvelle de la théory de fonction presque périodiques de Bohr. // Acta Math. — 1939. — 69. — P. 259–317.

[34] Delsarte J.Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation. // Colloques Internat. Nancy. — 1956. — P. 29–44.

[35] Delsarte J., J. L. Lions. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe. // Comm. Math. Helv. — 1957. — No. 32. — P. 113–128.

[36] Delsarte J., J. L. Lions. Moyennes généralisées.// Comm. math. Helv. — 1959. — No. 34. — P. 59–69.

[37] Delsarte J. Lectures on Topics in Mean Periodic Functions And The Two-Radius Theorem. // Bombay: Tata Institute of Fundamental Research,1961.

[38] [39] [40], см. также известную статью Б.М. Левитана [41].

Ж.Дельсартом на базе ОП СПД было введено фундаментальное понятие обобщённого сдвига. Были разработаны многочисленные конструкции обобщённого гармонического анализа, основанные на определениях обобщённого сдвига и вводимых с его помощью групповых структурах. Направление обобщённых почти–периодических функций с использованием ОП типа СПД и операторов обобщённого сдвига было заложено в работах Ж.Дельсарта 1938 г. и продолжено Дельсартом и Лионсом в перечисленных выше работах, а также Б.М.Левитаном. Следует отметить, что первоначальным источником и прототипом большинства вариантов обобщённого гармонического анализа были операторы Бесселя и связанные с ними дифференциальные уравнения.

Теория вырождающихся, смешанных, сингулярных и неклассических уравнений различных типов разрабатывалась многими математиками, в том числе Ф. Трикоми, Е. Хольмгреном, С. Геллерстедом, М. Проттером, М. Чибрарио, Г. Фикерой, С.А. Алдашевым, А.А. Андреевым, Ф.Т. Барановским, А.В. Бицадзе, А.А. Вашариным, И.Н. Векуа, М.И. Вишиком, В.Ф. Волкодавовым, В.Н. Враговым, В.П. Глушко, Г.В. Джаяни, И.Е.Егоровым, А.Н. Зарубиным, А.М. Ильиным, Т.Ш. Кальменовым, М.В. Капилевичем, А.А. Килбасом, А.И. Кожановым, Л.Д. Кудрявцевым, П.И. Лизоркиным, О.И. Маричевым, Л.Г. Михайловым, С.Г. Михлиным, А.М. Нахушевым, Н.Я. Николаевым, С.М. Никольским, О.А. Олейник, Л.С. Парасюком, С.В. Поповым, С.П. Пулькиным, Л.С. Пулькиной, Н. Раджабовым, О.А. Репиным, К.Б. Сабитовым, М.С. Салахитдиновым, А.Л. Скубачевским, М.М. Смирновым, С.Руткаускасом, С.А. Терсеновым, В.Е.Фёдоровым, Ф.И. Франклем, Л.И. Чибриковой, А.И. Янушаускасом и многими другими.

Особо отметим один класс уравнений с частными производными с особенностями, типичным представителем которого является B–эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1,\ldots,x_n) = f, \tag{2}$$

аналогично рассматриваются B–гиперболические и B–параболические

[38] Lions J. L. Opérateurs de Delsarte et problème mixte. // France : Bull. Soc. Math. France. — 1956. — No. 84. — P. 9–95.

[39] Lions J. L. Equations differentielles operationnelles et problémes aux limites. Springer, 1961.

[40] Lions J. L. Quelques applications d'opérateurs de transmutations. // Colloques Internat. Nancy. — 1956. — P. 125–142.

[41] Левитан Б. М. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // М. : УМН. — 1951. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 102–143.

уравнения, эта удобная терминология была введена И.А.Киприяновым [42]. Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу, продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала А. Вайнштейна (теория GASPT — Generalized Axially Symmetric Potential Theory), Л.Берса и в трудах математиков И.Е. Егорова, Я.И. Житомирского, А.А.Килбаса, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, О.И.Маричева, М.И. Матийчука, Л.Г. Михайлова, М.Н. Олевского, С.П.Пулькина, М.М. Смирнова, С.А. Терсенова, Хе Кан Чера, А.И. Янушаускаса и других. Важность уравнений из этих классов определяется также их использованием в приложениях к задачам теории осесимметрического потенциала, уравнениям Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) , преобразованию Радона и томографии, газодинамики и акустики, теории струй в гидродинамике, линеаризованным уравнениям Максвелла–Эйнштейна, механике, теории упругости и пластичности и многим другим.

Наиболее полно весь круг вопросов для уравнений с операторами Бесселя был изучен воронежским математиком Иваном Александровичем Киприяновым и его учениками Л.А. Ивановым, А.В. Рыжковым, В.В. Катраховым, В.П. Архиповым, А.Н. Байдаковым, Б.М. Богачёвым, А.Л. Бродским, Г.А. Виноградовой, В.А. Зайцевым, Ю.В. Засориным, Г.М. Каганом, А.А. Катраховой, Н.И. Киприяновой, В.И. Кононенко, М.И. Ключанцевым, А.А. Куликовым, А.А. Лариным, М.А. Лейзиным, Л.Н. Ляховым, А.Б. Муравником, И.П. Половинкиным, А.Ю. Сазоновым, С.М. Ситником, В.П. Шацким, В.Я. Ярославцевой; основные результаты этого направления представлены в монографии [43]. Для описания классов решений соответствующих уравнений И.А. Киприяновым были введены и изучены функциональные пространства [44], позднее названные его именем. Задачи для операторно–дифференциальных (абстрактных) уравнений вида (2), берущие начало в известной монографии [45], рассматривали А.В. Глушак, С.Б. Шмулевич и другие. Важные результаты по изучению псевдодифференциальных операторов на основе ОП СПД были получены В.В. Катраховым [46], они также изложены в специально переработанном Р. Кэрролом виде в отдельной главе в [47].

В настоящее время уравнения с оператором Бесселя и связан-

[42] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М. : Наука–Физматлит, 1997.

[43] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М. : Наука-Физматлит, 1997.

[44] Киприянов И. А. Преобразования Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов. // М. : Труды матем. ин–та АН СССР им. В.А.Стеклова. — 1967. — Т. 89. — С. 130–213.

[45] Carroll R. W., Showalter R. E. Singular and Degenerate Cauchy problems. N.Y. : Academic Press, 1976.

[46] KiKa1

[47] Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions. North Holland, 1982.

ные с ними вопросы изучают А.В. Глушак, В.С. Гулиев, Л.Н. Ляхов, Л.С.Пулькина, К.Б.Сабитов, В.В.Кравченко со своими коллегами и учениками, а также А.Б.Муравник (дифференциально–функциональные уравнения), В.В.Волчков, И.П.Половинкин (теоремы о среднем для уравнений с операторами Бесселя), Э.Л.Шишкина (B — гиперболические потенциалы и обобщённые средние), В.Д.Репников (стабилизация решений) и другие.

Важным разделом теории ОП стал специальный класс — ОП Бушмана–Эрдейи. Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП СПД и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока. Интегральные операторы указанного вида с функциями Лежандра в ядрах впервые встретились в работах E.T. Copson по уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу в конце 1950-х годов [48]. Впервые подробное изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960–х годах в работах Р. Бушмана [49] [50] и А. Эрдейи [51] [52] [53] [54] [55]. Операторы Бушмана–Эрдейи или их аналоги изучались также в работах T.P. Higgins, Ta Li, E.R. Love, G.M. Habibullah, K.N. Srivastava, Динь Хоанг Ань, В.И. Смирнова, Б.Рубина, Н.А. Вирченко, И. Федотовой, А.А. Килбаса, О.В. Скоромник и целом ряде других. При этом в основном изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения. Эти результаты частично упомянуты в монографии [56], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается, некоторые результаты для особого выбора пределов были добавлены в английское расширенное издание этой монографии [57].

---

[48] Copson E. T. On a Singular Boundary Value Problem for an Equation of Hyperbolic Type. // Arch. Ration.Mech. and Analysis 1. — 1957. No. 1. — P. 349–356.

[49] Buschman R. G. An inversion integral for a general Legendre transformation. // SIAM Review. — 1963. — Vol. 5. — No. 3. — P. 232–233.

[50] Buschman R. G. An inversion integral for a Legendre transformation. // Amer. Math. Mon. — 1962. — V. 69. — No. 4. — P. 288–289.

[51] Erdelyi A. Some applications of fractional integration. // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note D1–82–0286. — 1963. — No 316. — 23 p.

[52] Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions. // SIAM Review. — 1964. — V. 12. — No. 1. — P. 15–30.

[53] Erdelyi A. An application of fractional integrals. // J. Analyse Math. — 1965. — V. 14. — P. 113–126.

[54] Erdelyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals. // Glasgow Math. J. — 1967. — V. 8. — No. 1. — P. 50–54.

[55] Erdelyi A. On the Euler–Poisson–Darboux equation. // J. Analyse Math. — 1970. — V. 23. — P. 89–102.

[56] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987.

[57] Samko S. G.,Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

Термин "операторы Бушмана–Эрдейи" как наиболее исторически оправданный был введён автором в [58] [59], впоследствии он использовался и другими авторами.

Из относительно недавних работ, в которых изучались операторы Бушмана–Эрдейи как интегральные операторы, отметим работы Н.А. Вирченко, А.А. Килбаса, Б.Рубина, А.В.Глушака и их учеников. Так в работах А.А. Килбаса и О.В. Скоромник [60] [61] рассматривается действие операторов Бушмана–Эрдейи в весовых пространствах Лебега, а также многомерные обобщения в виде интегралов по пирамидальным областям. В монографии Н.А. Вирченко и И. Федотовой [62] вводятся некоторые обобщения стандартных функций Лежандра, а затем рассматриваются напоминающие операторы Бушмана–Эрдейи, но не содержащие их как частные случаи, интегральные операторы с введёнными функциями в ядрах на всей положительной полуоси (операторы Бушмана–Эрдейи определены на части положительной полуоси). В работах Б.Рубина среди других результатов описаны множества определения и образы интегральных операторов Бушмана–Эрдейи (Гегенбауэра–Чебышёва) в некоторых функциональных пространствах [63] [64] [65] [66] с приложениями результатов к теории преобразования Радона и томографии. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи используются также в недавних работах А.В.Глушака [67] [68].

Несмотря на вышеизложенное, в теории операторов преобразования остаются существенные пробелы и многие нерешённые задачи. Так, для операто-

[58] Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости. // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1990. — 44 с.

[59] Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи. // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320. — № 6. — С. 1326–1330.

[60] Килбас А. А., Скоромник О. В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с с функцией Лежандра по пирамидальной области. // М. : Доклады академии наук РАН. — 2009. Т. 429. № 4. — С. 442–446.

[61] Kilbas A. A., O. V. Skoromnik. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $\mathcal{L}_{\nu,r}$- spaces. // Integral Transforms and Special Functions. — 2009. V. 20. Issue 9. — P. 653–672.

[62] Virchenko N., Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications. // — World Scientific, 2001.

[63] Estrada R., Rubin B. Null Spaces Of Radon Transforms // arXiv:1504.03766v1. — 2015. — 24 P.

[64] Rubin B. Radon transforms and Gegenbauer—Chebyshev integrals, I // Anal. Math. Phys. — 2016.

[65] Rubin B. Gegenbauer–Chebyshev Integrals And Radon Transforms. // arXiv:1410.4112v2. — 2015. — 58 P.

[66] Rubin B. On the Funk–Radon–Helgason inversion method in integral geometry. // Contemp. Math. — 2013. — V. 599. — P. 175–198.

[67] Глушак А. В., Покручин О. А. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т.52. — № 1. — С. 41–59.

[68] Глушак А. В. Начальная задача для слабо нагруженного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. Межд. науч. конф.: "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных". — М. : МГУ. — 2016. — С. 101.

ров преобразования, сплетающих дифференциальные операторы или решения дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, включая дифференциальные операторы Бесселя, отсутствует подробная классификация с описанием основных свойств. Подробно изучены и описаны в литературе свойства и приложения простейшего класса ОП Сонина и Пуассона, но отсутствует систематическое изложение и доказательства многих свойств для их важных обобщений — операторов Бушмана–Эрдейи. До работ автора не отмечалось, что интегральные операторы Бушмана–Эрдейи являются ОП для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Не существует общих схем для построения ОП нужных классов, доведённых до возможности построения на их основе явных формул, сплетающих решения различных дифференциальных уравнений. Практически отсутствуют работы, вскрывающие связь ОП с основными конструкциями дробного исчисления. Не рассматривались возможные применения ОП к доказательствам вложений функциональных пространств, таких, как пространства С.Л.Соболева и И.А.Киприянова, в том числе энергетических пространств для сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя по одной или нескольким переменным. Для операторов второго порядка с переменными коэффицентами при построении ОП использовались методы, дающие грубые оценки ядер ОП с неопределёнными постоянными, неточные требования на коэффициенты дифференциальных уравнений приводили к сужению их классов, например, классов допустимых потенциалов для задач Штурма–Лиувилля и их обобщений для дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Методы ОП практически не применялись к получению точных оценок для решений дифференциальных уравнений, например, в таких задачах, как известная задача Е.М.Ландиса. Также сложилась парадоксальная ситуация, когда дробные степени оператора Бесселя, которые используются во многих работах, определяются исключительно неявно в терминах преобразования Фурье–Бесселя или Ханкеля, а при этом отсутствуют формулы для их явного определения в интегрального виде, хотя именно с таких представлений начиналась теория классических дробных интегралов Римана–Лиувилля. Многие простые и естественные конструкции ОП для стандартных пар дифференциальных операторов не построены в явном виде. Также не вводились и не рассматривались общие схемы для оценок ядер ОП в широко используемых функциональных пространствах, требующие уточнений и обобщений классических неравенств. Полученные в последнее время точные неравенства для многих специальных функций не находили применения для оценки ядер ОП. Перечисленные проблемы и ограничения в значительной степени сняты в данной диссертации.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является дальнейшая разработка метода операторов преобразования и его приложения в теории дифференциальных уравнений. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи:

- Приложения метода операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к решению ряда задач для дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.
- Получение результатов об эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева с использованием операторов преобразования.
- Разработка и систематическое приложение общего композиционного метода построения новых классов операторов преобразования.
- Получение формул факторизации для операторов преобразования Бушмана–Эрдейи через весовые интегральные преобразования с приложениями к представлению решений дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя.
- Получение явных интегральных представлений для дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложения к решению дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.
- Разработка метода оценок решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе применения метода операторов преобразования и точных неравенств для специальных функций.
- Приложение теории операторов преобразования к получению оценок экспоненциального убывания решений уравнений с частными производными эллиптического и ультрагиперболического типов.
- Приложения обобщений неравенства Коши–Буняковского к оценке ядер операторов преобразования.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, теории специальных функций, теории неравенств, теории операторов преобразования, теории интегральных преобразований, теории дробного интегродифференцирования.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Изучены новые свойства, введены новые классы, произведена классификация операторов преобразования Бушмана–Эрдейи и рассмотрены их приложения к решению ряда задач для дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

2. С использованием операторов преобразования Бушмана–Эрдейи решена проблема об эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева.

3. Доказаны формулы обращения для различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи в стандартных функциональных пространствах и с их использованием получены формулы связи решений для дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

4. Предложен новый общий композиционный метод построения различных классов операторов преобразования и получения на его основе формул соответствия между классами решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

5. Получены формулы факторизации для операторов преобразования Бушмана–Эрдейи через весовые интегральные преобразования Фурье и Ханкеля с приложениями к представлению решений дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя.

6. Получены новые интегральные представления для различных модификаций дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложения к решению дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

7. Разработан метод для оценок решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сингулярными потенциалами на основе применения метода операторов преобразования и точных неравенств для специальных функций.

8. Рассмотрены приложения теории операторов преобразования к получению оценок экспоненциального убывания решений уравнений с частными производными эллиптического и ультрагиперболического типов, выделены классы дифференциальных уравнений, для которых известная проблема Е.М.Ландиса имеет положительное решение.

9. Разработан метод оценок ядер операторов преобразования в формулах связи решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах на основе уточнений неравенства Коши–Буняковского.

Практическая и теоретическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться в теории дифференциальных уравнений, включая обыкновенные, в частных производных и интегродифференциальные уравнения, теории оптимального управления, при рассмотрении стохастических методов для динамических систем. Они могут также найти приложения в задачах компьютерной томографии и преобразования Радона, теории нелинейных уравнений и солитонов, изучении обратных задач и теории рассеяния, задачах фильтрации, геофизики, трансзвуковой газодинамики и теоретической механики.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались более чем на 70 всесоюзных, всероссийских и международных конференциях за период 1983–2016 гг., а также на ряде научных семинаров.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 45], из них работы [1 – 27] опубликованы в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных статей [1], [5], [7], [8], [12], [13], [15], [16], [18], [20], [21], [23]–[27] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 307 страницах и состоит из введения, пяти глав, разбитых в общей сложности на 21 параграф, и списка цитируемой литературы, включающего 359 наименований.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава содержит предварительные сведения и обозначения, которые используются в работе, касающиеся специальных функций, функциональных пространств, интегральных преобразований и основных известных классов операторов преобразований.

Вторая глава посвящена классификации и свойствам различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи с приложениями к теории дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Определение 1. *Операторами Бушмана–Эрдейи первого рода называются интегральные операторы*

$$B_{0+}^{\nu,\mu}f=\int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt, \tag{3}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu}f=\int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt, \tag{4}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu}f=\int_x^\infty \left(t^2-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt, \tag{5}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu}f=\int_x^\infty \left(t^2-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt. \tag{6}$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$—функция Лежандра первого рода, $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$—та же функция на разрезе $-1\leq t\leq 1$, $f(x)$—локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x\to 0, x\to\infty$. Параметры μ,ν—комплексные числа, $\Re\mu<1$, можно ограничиться значениями $\Re\nu\geq -1/2$.

Определение 2. *Введём при $\mu=1$ операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам*

$$B_{0+}^{\nu,1}f={}_1S_{0+}^\nu f=\frac{d}{dx}\int_0^x P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \tag{7}$$

$$E_{0+}^{\nu,1}f={}_1P_{-}^\nu f=\int_0^x P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\,dt, \tag{8}$$

$$B_{-}^{\nu,1}f={}_1S_{-}^\nu f=\int_x^\infty P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) (-\frac{df(t)}{dt})\,dt, \tag{9}$$

$$E_{-}^{\nu,1}f={}_1P_{0+}^\nu f=(-\frac{d}{dx})\int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \tag{10}$$

где $P_\nu(z)=P_\nu^0(z)$—функция Лежандра.

Приведём основные результаты второй главы.

Теорема 1. *Пусть или* $Re\,\mu < 0$, *или* $\mu = m \in \mathbb{N}$, $-m \le \nu \le m-1$, $\nu \in \mathbb{Z}$. *Тогда справедливы тождества*

$$\tfrac{d}{dx} B_{0+}^{\nu,\,\mu} f = B_{0+}^{\nu,\,\mu+1} f, \qquad E_{0+}^{\nu,\,\mu} \frac{d\,f}{dx} = E_{0+}^{\nu,\,\mu+1} f, \tag{11}$$

$$B_{-}^{\nu,\,\mu} \left(-\tfrac{d\,f}{dx}\right) = B_{-}^{\nu,\,\mu+1} f, \ \ \left(-\frac{d}{dx}\right) E_{-}^{\nu,\,\mu} f = E_{-}^{\nu,\,\mu+1} f. \tag{12}$$

если все указанные операторы определены.

Эта теорема позволяет доопределить операторы Бушмана–Эрдейи и на значения $Re\mu \ge 1$, переопределив их для натуральных μ.

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}, \tag{13}$$

который при $\nu \in \mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливают легко проверяемые формулы связи, приведём их.

Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетает L_ν и вторую производную:

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \tag{14}$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \tag{15}$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетает оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{16}$$

Теорема 2. *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана–Эрдейи через операторы дробного интегродифференцирования и Эрдейи–Кобера:*

$$B_{0+}^{\nu,\,\mu} = I_{0+}^{\nu+1-\mu} I_{0+;\,2,\,\nu+\frac{1}{2}}^{-(\nu+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1}, E_{0+}^{\nu,\,\mu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I_{0+;\,2,\,-\frac{1}{2}}^{\nu+1} I_{0+}^{-(\nu+\mu)}, \tag{17}$$

$$B_{-}^{\nu,\,\mu} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I_{-;\,2,\,\nu+1}^{-(\nu+1)} I_{-}^{\nu-\mu+2}, E_{-}^{\nu,\,\mu} = I_{-}^{-(\nu+\mu)} I_{-;\,2,\,0}^{\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}. \tag{18}$$

Операторы нулевого порядка гладкости выделяются тем, что только для них можно доказать оценки в *одном* пространстве типа $L_p(0,\infty)$. При этом, учитывая структуру этих операторов, удобно пользоваться техникой преобразования Меллина и теоремой Слейтер (см. гл. 1).

Теорема 3. *1). Операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости действуют в образах преобразования Меллина как умножение на соответствующий мультипликатор. Для их мультипликаторов справедливы формулы:*

$$m_{{}_1S^{\nu}_{0+}}(s)=\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}= \tag{19}$$

$$=\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)}{\Gamma(1-s)}, Re\, s<\min(2+Re\,\nu,1-Re\,\nu);$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{0+}}(s)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})},\ \ Re\, s<1; \tag{20}$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{-}}(s)=\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}, Re\, s>\max(Re\,\nu,-1-Re\,\nu); \tag{21}$$

$$m_{{}_1S^{\nu}_{-}}(s)=\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})}, Re\, s>0. \tag{22}$$

2). Кроме того, выполняются следующие соотношения для мультипликаторов:

$$m_{{}_1P^{\nu}_{0+}}(s)=1/m_{{}_1S^{\nu}_{0+}}(s),\ m_{{}_1P^{\nu}_{-}}(s)=1/m_{{}_1S^{\nu}_{-}}(s) \tag{23}$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{-}}(s)=m_{{}_1S^{\nu}_{0+}}(1-s),\ m_{{}_1P^{\nu}_{0+}}(s)=m_{{}_1S^{\nu}_{-}}(1-s) \tag{24}$$

3). Справедливы следующие формулы для норм операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2*:*

$$\|{}_1S^{\nu}_{0+}\|=\|{}_1P^{\nu}_{-}\|=1/\min(1,\sqrt{1-\sin\pi\nu}), \tag{25}$$

$$\|{}_1P^{\nu}_{0+}\|=\|{}_1S^{\nu}_{-}\|=\max(1,\sqrt{1-\sin\pi\nu}). \tag{26}$$

4). Нормы операторов (7) – (10) *периодичны по* ν *с периодом 2, то есть* $\|x^{\nu}\|=\|x^{\nu+2}\|$, *где* x^{ν} *— любой из операторов* (7) – (10).

5). Нормы операторов ${}_1S^{\nu}_{0+}$, ${}_1P^{\nu}_{-}$ *не ограничены в совокупности по* ν, *каждая из этих норм не меньше* 1. *Если* $\sin\pi\nu\le 0$, *то эти нормы равны* 1. *Указанные операторы неограничены в* L_2 *тогда и только тогда, когда* $\sin\pi\nu=1$ *(или* $\nu=(2k)+1/2,\ k\in\mathbb{Z}$*).*

6). Нормы операторов ${}_1P^{\nu}_{0+}$, ${}_1S^{\nu}_{-}$ ограничены в совокупности по ν, каждая из этих норм не больше $\sqrt{2}$. Все эти операторы ограничены в L_2 при всех ν. Если $\sin \pi\nu \geq 0$, то их L_2 – норма равна 1. Максимальное значение нормы, равное $\sqrt{2}$, достигается тогда и только тогда, когда $\sin \pi\nu = -1$ (или $\nu = -1/2 + (2k),\ k \in \mathbb{Z}$).

Важнейшим свойством операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν. Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике, параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения. Сформулируем один из основных результатов данной главы.

Теорема 4. *Для унитарности в L_2 операторов* (7) – (10) *необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов $({}_1S^{\nu}_{0+},\ {}_1P^{\nu}_{-})$ и $({}_1S^{\nu}_{-},\ {}_1P^{\nu}_{0+})$ взаимно обратны.*

Из этой теоремы следует известный факт об унитарности сдвинутых операторов Харди, так как справедливы представления

$$ {}_1P^1_{0+}f = (I - H_1)f,\ {}_1S^1_{-}f = (I - H_2)f, \tag{27} $$

где $H_1,\ H_2$ – операторы Харди.

Следствие 1. *Операторы* (27) *являются унитарными взаимно обратными в L_2 операторами. Они сплетают дифференциальные выражения d^2/dx^2 и $d^2/dx^2 - 2/x^2$.*

Таким образом, операторы Бушмана–Эрдейи можно рассматривать как некоторые обобщения операторов Харди. Отметим также важность изучения унитарности для теории интегральных уравнений. В этом случае обратный оператор необходимо искать в виде интеграла с другими, чем у исходного, пределами интегрирования.

Во втором параграфе подробно изучен новой класс ОП Бушмана–Эрдейи второго рода с функциями Лежандра второго рода в ядре. Для этого класса получены аналогичные результаты, как и для ОП Бушмана–Эрдейи первого рода, мы не будем их приводить.

В третьем параграфе введены унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова, которые уже являются унитарными для всех значений параметра.

$$ S^{\nu}_{U}f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2S^{\nu}f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1S^{\nu}_{-}f, \tag{28} $$

$$ P^{\nu}_{U}f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2P^{\nu}f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1P^{\nu}_{-}f. \tag{29} $$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана–Эрдейи 1 и 2 рода нулевого порядка гладкости.

Теорема 5. *Операторы* (28)–(29) *при всех ν являются унитарными, взаимно сопряжёнными и обратными в L_2. Они являются сплетающими и действуют по формулам* (13). *При этом S_U^ν является оператором типа Сонина (Сонина–Катрахова), а P_U^ν — типа Пуассона (Пуассона–Катрахова). Для них справедливы интегральные представления*

$$S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + +\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy -\right.$$

$$\left. -\int_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right), \tag{30}$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right) f(y)\,dy - -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy -\right.$$

$$\left. -\int_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy\right). \tag{31}$$

В четвёртом параграфе рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах. Получена новая форма известной леммы Копсона.

Теорема 6. *Рассмотрим задачу Дирихле в четверти плоскости для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в условиях леммы Копсона. Тогда между данными задачи Дирихле справедливы соотношения, выражающиеся через операторы Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости:*

$$\frac{c_\beta}{x^\beta} E_{0+}^{-\alpha,1-\beta}(y^{\alpha+\beta+1} f(y)) = \frac{c_\alpha}{x^\alpha} E_{0+}^{-\beta,1-\alpha}(y^{\alpha+\beta+1} g(y)), c_\beta = 2\Gamma(\beta+1/2), \tag{32}$$

$$\frac{c_\beta}{x^\beta} {}_1P_{0+}^{-\alpha} I_{0+}^{\beta}(y^{\alpha+\beta+1} f(y)) = \frac{c_\alpha}{x^\alpha} {}_1P_{0+}^{-\beta} I_{0+}^{\alpha}(y^{\alpha+\beta+1} g(y)), \tag{33}$$

Важно отметить, что любую из рассмотренных в этой главе пар операторов преобразования, сплетающих операторы Бесселя и вторую производную, можно использовать для установления связей между решениями дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах с операторами Бесселя вида

$$\sum a_k B_{\nu_k, x_k} u(x) = f(x), x \in \mathbb{R},$$

и невозмущённого уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum a_k \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_k^2} = g(x).$$

При этом если пары взаимообратных ОП действуют по каждой переменной по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu, \tag{34}$$

то решения возмущённого и невозмущённого уравнений связаны соотношениями

$$u(x) = \prod_k S_{\nu_k} v(x), \quad v(x) = \prod_k P_{\nu_k} u(x)$$

(операторы типа Сонина и Пуассона). При этом результаты об ограниченности, оценках норм, унитарности операторов преобразований приводят автоматически к соответствующим утверждениям для пар решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим подробно один пример, позволяющий использовать построенные ОП различных классов и их оценки для получения решений одного из нелинейных уравнений. В работе А.В.Бицадзе [69] указано, что в математической физике ряд задач сводятся к решению нелинейных уравнений Максвелла–Эйнштейна вида

$$\Delta u + \frac{1}{x} u_x - \frac{1}{u}(1 - \frac{u^2}{A^2 - u^2})(u_x^2 + u_y^2) = 0, \tag{35}$$

$$\Delta u + \frac{1}{x} u_x - \frac{1}{u}(u_x^2 + u_y^2) = 0, \tag{36}$$

Используя результаты этой работы А.В.Бицадзе и развитую нами технику ОП, получаем следующее приложение рассмотренных классов ОП к нелинейным уравнениям математической физики Максвелла–Эйнштейна.

Теорема 7. *Пусть P — произвольный оператор преобразования типа Пуассона, удовлетворяющий сплетающему свойству на гладких функциях*

$$P\ D^2 = (\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx})\ P, \tag{37}$$

$g(x,y)$ — произвольная гармоническая функция. Тогда функция $u_1(x,y) = \frac{A}{\mathrm{ch}(CP_x g(x,y))}$ является решением нелинейного уравнения (35), а функция $u_2(x,y) = \exp(KP_x g(x,y))$ является решением нелинейного уравнения (36), C, K — произвольные постоянные.

[69] Бицадзе А. В. К теории уравнений Максвелла–Эйнштейна // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 216. — № 2.

В работе построены различные классы ОП типа Пуассона: Бушмана–Эрдейи первого, второго родов, нулевого порядка гладкости, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова и другие, следовательно, их можно использовать в приведённой теореме для получения представлений решений нелинейных уравнений Максвелла–Эйнштейна через гармонические функции.

Также в четвёртом параграфе приведена общая схема, позволяющая по данной паре ОП для дифференциального оператора Бесселя вводить новые классы задач Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с нелокальными начальными условиями, которые выражаются через данную произвольную пару ОП.

В пятом параграфе рассмотрены приложения унитарных операторов Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению соответствующих интегродифференциальных уравнений.

Теорема 8. *Пусть функции $f(x),\ g(x) \in L_2(0,\infty)$ и непрерывно дифференцируемы на полуоси. Тогда следующие интегро–дифференциальные уравнения взаимно обратны и решаются по приведённым формулам:*

$$g(x) = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right),$$

$$f(x) = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right) g(y)\,dy - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) g(y)\,dy -\right.$$

$$\left.-\int_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) g(y)\,dy\right).$$

При этом в указанном пространстве нормы решений и правых частей равны.

Это приложение теоремы об унитарности ОП Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова. Отметим, что при специальных значениях параметра ν, при которых функции Лежандра выражаются через более простые функции, получается список конкретных интегро–дифференциальных уравнений, для которых получены явные решения с их оценками.

Также рассмотрены задачи о решении интегродифференциальных уравнений для операторов Бушмана–Эрдейи введённых классов, содержащие новые и уточняющие некоторые известные ранее результаты.

В шестом параграфе рассмотрены приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к установлению эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева. Пространства И.А.Киприянова, как было показано в его работах и в работах представителей его научной школы, идеально подходят для изучения B — эллиптических уравнений с частными производными. Поэтому свойства этих пространств играют существенную роль при изучении дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. В данном пункте доказано, что в одномерном случае нормы в пространствах И.А.Киприянова эквивалентны нормам в весовых пространствах С.Л.Соболева. Этот результат справедлив и для некоторых модельных областей в многомерных пространствах. При этом соответствующие результаты по существу являются переформулировками результатов предыдущего параграфа об условиях ограниченности и унитарности в пространствах Лебега на полуоси операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости. Таким образом, указанные результаты об условиях ограниченности и унитарности в пространствах Лебега на полуоси операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости имеют важное значение для теории уравнений с частными производными с операторами Бесселя, находя в этой области свои как стандартные, так и неожиданные приложения. Получаемые результаты относятся также к энергетическим пространствам для соответствующих дифференциальных уравнений. Приведём здесь окончательный результат.

Теорема 9. *а) при всех* $\alpha \in \mathbb{R}$ *пространство* $\widehat{W}_2^\alpha$ *непрерывно вложено в* W_2^α*, причём*

$$\|f\|_{W_2^\alpha} \leq A_1 \|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha}, \tag{38}$$

где $A_1 = \max(1, \sqrt{1+\sin \pi\alpha})$.

б) Пусть $\sin \pi\alpha \neq -1$ *или* $\alpha \neq -\frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$. *Тогда справедливо обратное вложение* W_2^α *в* $\widehat{W}_2^\alpha$*, причём*

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} \leq A_2 \|f\|_{W_2^\alpha}, \tag{39}$$

где $A_2 = 1/\min(1, \sqrt{1+\sin \pi\alpha})$.

в) Пусть $\sin \pi\alpha \neq -1$*, тогда пространства* W_2^α *и* $\widehat{W}_2^\alpha$ *изоморфны, а их нормы эквивалентны.*

г) Константы в неравенствах вложений (38)–(39) *точные.*

Эта теорема фактически является следствием результатов по ограниченности операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2, а именно теоремы 3.

Третья глава содержит изложение нового композиционного метода построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Перечисленные ранее классы ОП строились каждый своими методами. Поэтому возникает необходимость в разработке общей схемы построения ОП. Такая схема—метод факторизации или композиционный метод—предлагается в настоящей главе. Метод основан на представлении ОП в виде композиции интегральных преобразований. Композиционный метод даёт алгоритмы не только для построения новых ОП, но содержит как частные случаи ОП СПД, Векуа–Эрдейи–Лаундеса, Бушмана–Эрдейи различных типов, унитарные ОП Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова, обобщённые операторы Эрдейи–Кобера, а также введённые Р. Кэрролом классы эллиптических, гиперболических и параболических ОП. В работе вводятся их обобщения: классы B — эллиптических, B — гиперболических и B — параболических ОП.

Из многочисленных результатов этой главы приведём для примера один из основных.

Теорема 10. *Определим операторы преобразования, сплетающие B_ν и D^2, по формулам*

$$S^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s\\ c\end{smallmatrix}\right\}} = F^{-1}_{\left\{\begin{smallmatrix} s\\ c\end{smallmatrix}\right\}}\left(\frac{1}{\varphi(t)}F_\nu\right), P^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s\\ c\end{smallmatrix}\right\}} = F_\nu^{-1}\left(\varphi(t)F_{\left\{\begin{smallmatrix} s\\ c\end{smallmatrix}\right\}}\right).$$

Тогда при выборе весовой функции $\varphi = x^\alpha$ для прямого и обратного ОП получаем интегральные представления

$$\left(S^{(x^\alpha)}_{\nu,s}f\right)(x) = \frac{2}{\pi}\Big[-i\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot e^{(\nu+\alpha)\pi i}\cdot\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac14}Q^{\frac12-\alpha-\nu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac12}f(y)\,dy+$$

$$+\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot \tag{40}$$

$$\cdot\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac14}\left(\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac12}_{\nu-\frac12}\left(-\frac{x}{y}\right)-\mathbb{P}^{\alpha+\nu-\frac12}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)\right)y^{\nu+\frac12}f(y)dy\Big] =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-i\,e^{(\nu+\alpha)\pi i}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac14}Q^{\frac12-\alpha-\nu}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac12}f(y)\,dy+\right.$$

$$+\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac12-\frac{\alpha}{2}-\nu\right)}{2^{2\alpha+2\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot \tag{41}$$

$$\cdot\left(\frac{2}{\pi}\sin\pi(\alpha+2\nu)\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac14}\mathbb{Q}^{\alpha+\nu-\frac12}_{\nu-\frac12}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac12}f(y)dy-\right.$$

$$-\,(1+\cos\pi(\alpha+2\nu))\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathbb{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\alpha+\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}f(y)dy\Bigg),\, -Re\left(\nu+\frac{1}{2}\right)<Re\,\alpha<2.$$

Далее в третьей главе рассмотрены дальнейшие применения композиционного метода к решению различных интегродифференциальных уравнений, а также построению специальных классов ОП, а именно B — эллиптических, B — гиперболических и B — параболических ОП, которые позволяют установить формулы связи между решениями возмущённых дифференциальных уравнений с особенностями с невозмущёнными.

Четвёртая глава посвящена приложениям метода операторов преобразования к интегральным представлениям и оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Сначала в главе излагается решение нескольких задач, связанных с известной задачей Е.М.Ландиса об экспоненциальных оценках решений стационарного уравнения Шрёдингера. Несмотря на отрицательное решение этой проблемы в общей ситуации, полученное В.З.Мешковым, для ряда дифференциальных уравнений простой структуры эта гипотеза оказывается верной, что и доказано в работе. Далее рассматривается усовершенствованный метод получения оценок решений для уравнений с сингулярным потенциалом. Улучшения оценок получаются, во–первых, за счёт более точного выражения ядер ОП и функции Грина в терминах специальных функций, что приводит к избавлению от неэффективных постоянных, и, во–вторых, за счёт нестандартных вариантов расстановки пределов в интегральном уравнении для ядер ОП, что позволяет расширить класс допустимых потенциалов.

Теорема 11. *Любое решение $u(x)\in C^2\left(|x|>R_0\right)$ стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом*

$$\Delta u(x)-q(x_1)u=0,\ x\in R^n,\ |x|\geq R_0>0,$$

$$q(x_1)\in C\left(|x|\geq R_0\right),\ |q(x_1)|\leq\lambda^2,\ \lambda>0,$$

удовлетворяющее оценке

$$|u(x)|\leq const\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|},\ \varepsilon>0,$$

есть тождественный ноль.

Использованная техника операторов преобразования позволяет усилить полученный результат. Будем обозначать через $L_{2,\,loc}\left(x_1\geq R_0\right)$ множество функций, для которых при любом $x_1 \geq R_0$ конечен интеграл $\int\limits_{R_0}^{x_1} \psi^2(s)\,ds$. Пусть далее, задана неотрицательная функция $g(x)$, для которой интеграл $\int\limits_{x_1}^{\infty} t\,g(t,x^1)\,dt = p(x)$ конечен при любом $x_1 \geq R_0$ и для некоторой постоянной $\alpha > 0$

$$|p(x)| \leq c \cdot \exp\left(-\alpha|x|^{\delta}\right),\ \delta > 0.$$

Тогда может быть установлена

Теорема 12. *Пусть $\psi(x_1) \in L_{2,loc}(x_1 \geq R_0)$, $\psi(x_1)$ — неубывающая функция, функция $g(x)$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Тогда любое решение уравнения*

$$\Delta u(x) - q(x_1)u = 0,\ x \in R^n,\ |x| \geq R_0 > 0,$$

$$|q(x_1)| \leq \psi^2(x_1),$$

для которого выполнено неравенство

$$\psi(x_1)|u(x)| \leq const\, e^{-\psi(x_1)|x|} g(x),\ g(x) \geq 0,$$

есть тождественный ноль.

В условиях теоремы предыдущей теоремы $g(x) = e^{-\varepsilon|x|}$. Примером другой допустимой $g(x)$ является функция $g(x) = \exp\left(-\varepsilon|x|^{\delta}\right)$, $0 < \delta < 1$.

Во втором параграфе рассматривается задача о построении интегральной формулы для решений дифференциального уравнения с определённой асимптотикой

$$B_\alpha u(x) - q(x)u(x) = 0, \tag{42}$$

где B_α — оператор Бесселя вида

$$B_\alpha u = u''(x) + \frac{2\alpha}{x}u'(x),\ \alpha > 0.$$

Данная задача решается методом операторов преобразования. Для этого достаточно построить оператор преобразования S_α вида

$$S_\alpha u(x) = u(x) + \int\limits_x^{\infty} P(x,t)u(t)\,dt, \tag{43}$$

с некоторым ядром $P(x,t)$, который сплетает операторы $B_\alpha - q(x)$ и B_α по формуле

$$S_\alpha(B_\alpha - q(x))u = B_\alpha S_\alpha u.$$

на функциях $u \in C^2(0,\infty)$. В результате получится формула, выражающая решения уравнения (42) со спектральным параметром вида

$$B_\alpha u(x) - q(x)u(x) = \lambda^2 u(x)$$

через решения невозмущённого уравнения, то есть через функции Бесселя.

Оригинальная методика для решения поставленной задачи была разработана В.В. Сташевской [70] [71], что позволило ей включить в рассмотрение сингулярные потенциалы с оценкой в нуле $|q(x)| \le cx^{-3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ при целых α, это методика получила широкое развитие. Случай непрерывной q, $\alpha > 0$ рассмотрен в работах А.С. Сохина [72] [73] [74] [75] , а также [76].

Вместе с тем во многих математических и физических задачах необходимо рассматривать сильно сингулярные потенциалы, например, допускающие произвольную степенную особенность в нуле. В настоящей работе сформулированы результаты по интегральному представлению решений уравнений с подобными сингулярными потенциалами. От потенциала требуется лишь мажорируемость определенной функцией, суммируемой на бесконечности. В частности, к классу допустимых в данной работе относятся сингулярный потенциал $q = x^{-2}$, сильно сингулярный потенциал со степенной особенностью $q = x^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, потенциалы Юкавы типа $q = e^{-\alpha x}/x$, потенциалы Баргмана и Батмана–Шадана и ряд других. При этом на функцию $q(x)$ не накладывается никаких дополнительных условий типа быстрой осцилляции в начале координат или знакопостоянства, что позволяет изучать притягивающие и отталкивающие потенциалы единым методом.

Отметим, что в работе построены операторы преобразования специального вида, отличающиеся от ранее известных некоторыми существенными дета-

[70] Сташевская В. В. Метод операторов преобразования // М. : ДАН СССР. — 1953. — Т. 113. — № 3. — С. 409–412.

[71] Сташевская В. В. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле // Харьков :Уч. зап. Харьковского матем. об–ва. — 1957. — № 5. — С. 49–86.

[72] Сохин А. С. Об одном классе операторов преобразования // Тр. физ.–тех. ин-та низких температурур АН УССР. — 1969. — Вып. 1. — С. 117–125.

[73] Сохин А. С. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностью // Тр. физ.–тех. ин-та низких температурур АН УССР. — 1971. — Вып. 2. — С. 182–233.

[74] Сохин А. С. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностями специального вида // Харьков : Теория функций, функциональный анализ и их приложенияю. — 1973. — № 17. – -С. 36–64.

[75] Сохин А. С. О преобразовании операторов для уравнений с особенностью специального вида / А. С. Сохин // Харьков : Вестник Харьковского университета. — 1974. — № 113. — С. 36–42.

[76] Волк В. Я. О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$ // М. : УМН. — 1953. — Т. 111. — Вып. 4 (56). — С. 141–151.

лями. До этого рассматривались лишь случаи одинаковых пределов (оба вида $[0; a]$ или $[a; \infty]$) в основном интегральном уравнении для ядра оператора преобразования. В данной работе показано, что можно рассматривать случай различных пределов в основном интегральном уравнении. Именно такая расстановка пределов и позволила охватить более широкий класс потенциалов с особенностями в нуле. Кроме того, по сравнению с рассуждениями по образцу классической работы Б.М. Левитана [77] мы вносим усовершенствование в эту схему. Используемую в доказательстве функцию Грина как оказалось можно выразить не только через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, но и более конкретно через функцию Лежандра, что позволяет избавиться от неопределённых постоянных в оценках из предыдущих работ.

Основное содержание этого параграфа составляет

Теорема 13. *Пусть функция* $q(r) \in C^1(0, \infty)$ *удовлетворяет условию*

$$|q(s+\tau)| \le |p(s)|, \ \forall s, \forall \tau, \ 0 < \tau < s, \ \int\limits_{\xi}^{\infty} |p(t)|\, dt < \infty, \forall \xi > 0. \qquad (8)$$

Тогда существует интегральное представление вида (43), *ядро которого удовлетворяет оценке*

$$|P(r,t)| \le \left(\frac{t}{r}\right)^{\alpha} \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{t+r}{2}}^{\infty} P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right) |p(y)|\, dy \cdot$$
$$\cdot \exp\left[\left(\frac{t-r}{2}\right) \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{t+r}{2}}^{\infty} P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right) |p(y)|\, dy\right].$$

При этом ядро оператора преобразования $P(x,t)$, *а также решение уравнения* (42), *являются дважды непрерывно дифференцируемыми на* $(0, \infty)$ *функциями по своим аргументам.*

Для потенциалов со степенной оценкой роста получены более точные результаты в терминах оценок ядер ОП через функции Лежандра.

Пятая глава включает два параграфа, в первом из них проводится построение дробных степеней оператора Бесселя в явном интегральном виде,

[77] Левитан Б. М. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // М. : УМН. — 1951. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 102–143.

ранее эти степени вводились только неявно в образах преобразования Ханкеля. Для дробных степеней оператора Бесселя построена также их резольвента. Во втором пункте намечен принадлежащий автору метод уточнения классического неравенства Коши–Буняковского для дискретного и интегрального случаев на основе использования абстрактных средних значений. Полученный набор уточнений интегрального неравенства Коши–Буняковского предлагается использовать для оценки ядер операторов преобразования различных типов.

Определение 3. *Пусть $f(x) \in C^{2k}(0,b]$. Определим правосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии $f^{(i)}(b)=0, 0 \le i \le 2k-1, k \in N$ по формуле*

$$(B_{b-}^{\nu,k} f)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_x^b (y^2-x^2)^{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right) f(y)\, dy.$$

Определение 4. *Определим левосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии $f^{(i)}(a)=0, 0 \le i \le 2k-1, k \in N$ по формуле*

$$(B_{a+}^{\nu,k} f)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_a^x (x^2-y^2)^{\left(k-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right) f(y)\, dy,$$

где $P_\nu^\mu(z)$ - функция Лежандра.

Введённые операторы и являются интегральными реализациями отрицательных целых степеней оператора Бесселя $(B_\nu)^{-k}$. Их распространение на произвольные комплексные значения параметра k проводится аналогично классическому случаю. При $\nu=0$ оператор Бесселя сводится ко второй производной, а введённые операторы — к дробным интегралам Римана-Лиувилля

$$B_{b-}^{0,k} f = I_{b-}^{2k} f, \quad B_{a+}^{0,k} f = I_{a+}^{2k} f.$$

Изучены основные свойства введённых операторов дробного интегродифференцирования Бесселя, для них доказаны обобщения формул Тэйлора, выведены явные формулы для резольвент. Полученные результаты могут быть применены к решению соответствующих интегродифференциальных уравнений дробного порядка, а также обобщению известных классов дифференциальных уравнений дробного порядка с операторами Римана–Лиувилля или Герасимова–Капуто на уравнения с дробными степенями операторов Бесселя.

Второй параграф посвящен изложению уточнений неравенств Коши–Буняковского в дискретном и непрерывном случаях методом средних значений и их применению в теории операторов преобразования. Суть этого метода заключается в том, что по каждому абстрактному среднему, удовлетворяющему набору естественных аксиом, выписываются в явном виде уточнения дискретного или интегрального неравенств Коши–Буняковского. Указанная методика возникла из анализа одного неравенства Милна и теоремы Карлица–Дэйкина–Элиезера (CDE theorem) для дискретного случая. Основные результаты этого метода находят применения к оценкам ядер интегральных операторов преобразования. Результаты для дискретного случая могут быть применены для решения численных задач с применением метода операторов преобразования для оценки аппроксимаций на каждом шаге алгоритма.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

1. Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // ДАН СССР. — 1984. — Т. 278. — № 4. — С. 797–799.

2. Ситник С.М. Об одной паре операторов преобразования / С.М. Ситник // Сб. науч. тр. : Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. — 1987. — С. 168–173.

3. Ситник С.М. О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений / С.М. Ситник // Дифф. уравн. — 1988. — Т. 24. — № 3. — С. 538–539.

4. Ситник С.М. Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя / С.М. Ситник // Сб. науч. тр. : Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. — 1989. — С. 179–185.

5. Ситник С.М. Метод факторизации в теории операторов преобразования / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова: неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. — 1990. — С. 104–122.

6. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи / С.М. Ситник // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320. — № 6. — С. 1326–1330.

7. Ситник С.М. Композиционный метод построения B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических операторов преобразования / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // Доклады РАН. — 1994. — Т. 337. — № 3. — С. 307–311.

8. Ситник С.М. Оценки решений Йоста для одномерного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // Доклады РАН. — 1995. — Т. 340. — № 1. — С. 18–20.

9. Ситник С.М. Неравенства для функций Бесселя / С.М. Ситник // Доклады РАН. — 1995. — Т. 340. — № 1. — С. 29–32.

10. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского / С.М. Ситник // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки" . — Вып. 9. — Самара : — 2000. — С. 37–45.

11. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского / С.М. Ситник // Вестник Самарской государственной экономической академии. — Самара : — 2002. — № 1(8). — С. 302–313.

12. Sitnik S.M. for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity / S.M. Sitnik, D. Karp // Journal of Computational and Applied Mathematics. — Amsterdam : Elsevier. — 2007. — № 205. — P. 186-–206.

13. Sitnik S.M. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions / S.M. Sitnik, D. Karp, A. Savenkova // Journal of Computational and Applied Mathematics. Proceedings of The Conference in Honour of Dr. Nico Temme on the Occasion of his 65th birthday. — Amsterdam : Elsevier. — 2007. — V. 207, Issue 2. — P. 331–337.

14. Ситник С.М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений / С.М. Ситник // Вестник Самарского Государственного Университета — Естественнонаучная серия. — № 8/1 (67). — Самара : СамГУ, 2008. — С. 237–248.

15. Sitnik S.M. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function / S.M. Sitnik, D. Karp // Journal of Computational and Applied Mathematics. — Amsterdam : Elsevier. — 2009. — V. 161. — P. 337—352.

16. Sitnik S.M. Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions / S.M. Sitnik, D. Karp // Journal of Computational and Applied Mathematics. — Amsterdam : Elsevier. — 2010. — V. 364. — P. 384–394.

17. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина-Пуассона / С.М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. — Вып. 18. Белгород : НИУ «БелГУ» Издательский дом «Белгород», — 2010. — № 5 (76). — С. 135–153.

18. Ситник С.М. О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям / С.М. Ситник // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2010. — Т. 12. — № 2. — С. 69–75.

19. Ситник С.М. О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах / С.М. Ситник // Владикавказский математический журнал. — Вып. 4. — 2010. — Т. 12. — С. 73–78.

20. Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions / S.M. Sitnik, M.V. Zhuravlev, E.A. Kiselev, L.A. Minin // Journal of Mathematical Sciences. Springer. — 2011. — V. 173. — № 2. — P. 231–241.

21. Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов / С. М. Ситник, Е. А. Киселев, Л.А. Минин, И. Я. Новиков // Математические заметки. — Вып. 2. — 2014. — Т. 96. — С. 239–250.

22. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения / С. М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. — Вып. 39. Белгород : НИУ «БелГУ» Издательский дом «Белгород», — 2015. — № 11(208). — С. 60–76.

23. Sitnik S.M. On Gasparyan's Inequality / S.M. Sitnik, A.B. Pevnyi // Journal Of Mathematical Sciences. Springer. — 2015. — V. 205. — № 2. — P. 304–307.

24. Ситник С.М. Монотонность отношений некоторых гипергеометрических функций / С.М. Ситник, Х. Мехрез. // Сибирские Электронные Математические Известия. — 2016. — Т. 13. — С. 260—268.

25. Ситник С.М. Модифицированное дискретное преобразование Фурье, основанное на перестановках группы комплексных корней из единицы / С.М. Ситник, Е.В. Рыжкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — Вып. 2. — 2016. — Т. 21. — С. 406–414.

26. Sitnik S.M. On monotonicity of ratios of some q-hypergeometric functions / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Matematicki Vesnik. — 2016. — V. 68. — № 3. — P. 225–231.

27. Ситник С.М. Композиционный метод построения операторов преобразования для дифференциальных уравнений / С.М. Ситник, Е.В. Рыжкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — Вып. 1. — 2016. — Т. 21. — С. 95–108.

Прочие публикации

28. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications / S.M. Sitnik // In the book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: Amade 2012. (Edited by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin). — Cambridge : Cambridge Scientific Publishers, Cottenham. — 2013. — P. 171–201.

29. Ситник С.М. Тета–функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса / С.М. Ситник, М.В. Журавлёв, Е.А. Киселёв, Л.А. Минин // Современная математика и её приложения. Уравнения в частных производных. — Тбилиси : — 2010. — Т. 67. — С. 107–116.

30. Sitnik S.M. Classification, norm inequalities and applications for Buschman–Erdelyi transmutations / S.M. Sitnik // RGMIA Research Report Col-lection. - 2015. № 18, Article 124. - 32 p.

31. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey / S.M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1012.3864 [Электронный ресурс]. - 2010. - 51 p.

32. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey / S.M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1012.3741 [Электронный ресурс]. - 2010. - 141 p.

33. Ситник С.М. Краевые задачи для уравнений с особенностями в работах В.В.Катрахова / С.М. Ситник // Мат. Межд. науч. конф.: "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных". - Москва : Издательство МГУ. - 2016. - С. 72.

34. Ситник С.М. Оператор преобразования специального вида для дифференциального оператора с сингулярным в нуле потенциалом / С.М. Ситник // Сб. науч. раб. : Неклассические уравнения математической физики. (Сборник посвящён 65–летию со дня рождения профессора Владимира Николаевича Врагова). Ответственный редактор: д.ф.-м.н., профессор А.И.Кожанов. — Новосибирск : Издательство института математики им. С.Л.Соболева СО РАН. — 2010. — С. 264–278.

35. Ситник С.М. Ограниченность операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник // Труды 5-ой межд. конф. "Analytical Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE)" (Аналитические методы Анализа и дифференциальных уравнений). - Т. 1: математический Анализ. - Минск : Национальная Академия наук Белоруси, институт математики. - 2010. - С. 120-125.

36. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств / С.М. Ситник // В. кн.: Итоги науки. Южный федеральный округ. Серия "Математический форум" . - Т. 3. Исследования по математическому анализу. Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. - Владикавказ : Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО Алания. - 2009. - С. 221-266.

37. Ситник С.М. Операторы преобразования и их приложения / С.М. Ситник // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Отв. ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г. — Владикавказ : Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. — 2008. — С. 226–293.

38. Ситник С.М. Операторы преобразования Векуа–Эрдейи–Лаундеса / С.М. Ситник, Г.В. Ляховецкий // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1994. — 23 с.

39. Ситник С.М. Дробное преобразование Ханкеля и его приложения в математической физике / С.М. Ситник, Д.Б. Карп // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. - Владивосток : - 1994. - 24 с.

40. Ситник С.М. Оператор преобразования и представление Йоста для уравнения с сингулярным потенциалом / С.М. Ситник // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. - Владивосток : - 1993. - 21 с.

41. Ситник С.М. Формулы композиций для операторов Бушмана–Эрдейи / С.М. Ситник, Г.В. Ляховецкий // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1991. — 11 с.

42. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости / С.М. Ситник // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. — Владивосток : — 1990. — 44 с.

43. Ситник С.М. Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя / С.М. Ситник // Сборник научных трудов: краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). - Новосибирск : - 1989. - С. 179-185.

44. Ситник С.М. Об одной паре операторов преобразования / С.М. Ситник // Сборник научных трудов: краевые задачи для неклассических уравнений математической физики (ответственный редактор В.Н. Врагов). - Новосибирск : - 1987. - С. 168-173.

45. Ситник С.М. О скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера с потенциалом, зависящим от одной переменной / С.М. Ситник // Сборник научных трудов: краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В.Н. Врагов). — Новосибирск : — 1985. — С. 139–147.