На правах рукописи

Макарова Алла Викторовна

О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж 2016

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,

профессор **Гликлих Юрий Евгеньевич**.

Официальные оппоненты:

Павлов Игорь Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный техничечский университет, кафедра высшей математики, заведующий

Корнев Сергей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный педагогический университет, кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация **Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина**

Защита состоится 13 декабря 2016 года в 16 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл. 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/3585/Диссертация_Макарова_А.В..pdf

Автореферат разослан "____" октября 2016 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Гликлих Ю.Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Понятие производных в среднем было введено Э.Нельсоном в шестидесятых годах двадцатого века для нужд стохастической механики (варианта квантовой механики). Уравнение движения, в этой теории, было первым примером уравнений с производными в среднем. Затем было показано, что в терминах уравнений с производными в среднем описывается движение вязкой несжимаемой жидкости , а также вихри в ней , некоторые модели экономики и многие другие. В работах Ю.Е. Гликлиха было начато изучение уравнений с производными в среднем как отдельного класса стохастических дифференциальных уравнений.

Э.Нельсоном были введены понятия производных слева, производных справа, симметрических производных и антисимметрических производных. Текущая скорость – это симметрическая производная в среднем случайного процесса. Она является естественным аналогом обычной физической скорости детерминированной кривой. Осмотические скорости показывают как быстро изменяется "случайность"процесса. Производная справа дает информацию о сносе случайного процесса.

В работах С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха, построена дополнительно так называемая квадратичная производная в среднем, связанная с коэффициентом диффузии, что позволило корректно поставить задачу о нахождении процесса по его производным в среднем.

Теория стохастических дифференциальных включений, начиная с работ Э.Д. Конвея , Кри , Ж.П. Обена и Дж. Да Прато и до настоящего времени, активно развивается (см., например, статьи М. Киселевича, М. Михты и Е. Мотыля и литературу в них в специальном выпуске журнала Dynamic Systems and Applications 2007 г.).

Начиная с работ С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха, дифференциальные включения с производными в среднем, рассматривались как отдельный класс включений. В связи с заданием сложных физических процессов уравнениями и включениями с производными в среднем, возникла задача об описании включений с текущими скоростями (в терминах, так называемых, производных в среднем) и о разрешимости этих включений.

В работах С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха было показано, что если заданы текущая скорость и квадратичная производная в среднем (дающая информацию о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную. Если заданы многозначная текущая скорость и квадратичная производная, то уравнение превращается во включение. Для такой задачи у С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха было получено утверждение о существовании решения для случая, когда заданы многозначная текущая скорость и однозначная квадратичная производная при некоторых очень строгих условиях. Поэтому было важно дальнейшее исследование разрешимости подобного рода включений, в более общих случаях для текущей скорости и квадратичной производной.

Цель работы. Исследование дифференциальных включений с текущими скоростями и доказательство существования их решений.

Методы исследования. Методика исследования состоит в использовании современного глобального и стохастического анализа, идей и методов функционального анализа.

Научная новизна.
Все основные результаты диссертации являются новыми. Наиболее важными из них являются следующие:

1. Доказана разрешимость дифференциальных включений с текущими скоростями (симметрическими производными в среднем) при наличии гладких селекторов.

2. Доказана разрешимость дифференциальных включений с текущими скоростями в случае существования ε–аппроксимаций с равномерно ограниченными первыми частными производными.

3. Доказана разрешимость дифференциальных включений с текущими ско-

ростями в случае полунепрерывных сверху правых частей с равномерно ограниченными выпуклыми замкнутыми образами.

4. Доказана разрешимость дифференциальных включений с текущими скоростями в случае когда правая часть соотношения с квадратичной производной принимает значения в симметрических матрицах с постоянным определителем.

5. Доказана разрешимость дифференциальных включений с текущими скоростями в случае полунепрерывных снизу правых частей с равномерно ограниченными выпуклыми замкнутыми образами.

Практическая и теоретическая значимость.
Работа носит теоретический характер. Полученные в работе результаты важны для исследования задач математической физики, экономики и др.

Апробация результатов диссертации.
Результаты диссертации докладывались на международных математических школах-симпозиумах КРОМШ-2009, КРОМШ-2011, КРОМШ-2015 (Севастополь 2009,2011,2015); на IV Международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования" (Воронеж 2011); Крымской Международной Математической Конференции КММК-2013 (Судак 2013); Российской Школы-Конференции "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании" (Москва 2009); на "Международной конференции по стохастическим методам" Ростов-на-Дону - 2016; на научных сессиях Воронежского государственного университета 2011-2015 годов. Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержана грантом Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект №15-01-00620).

Публикации.
Основные результаты опубликованы в работах [1 – 13]. Из совместных работ [3,4,8,12] в диссертацию вошли результаты, полученные только лично диссертантом. Работы [3,4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых

научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трех глав, разбитых на 14 параграфов, и списка литературы. Общий объём работы 80 страниц. Библиография содержит 41 наименование.

Содержание диссертации.

Чтобы избежать технических сложностей, мы рассмотрим включение первого порядка с текущими скоростями на плоском n-мерном торе $\mathbb{T}^n$ (т.е. риманова метрика на $\mathbb{T}^n$ наследуется из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решётке). Удобство использования $\mathbb{T}^n$ объясняется тем, что $\mathbb{T}^n$ является компактным многообразием и, следовательно, все гладкие объекты на нём ограничены, и при этом геометрические свойства исследуемых объектов такие же, как в $\mathbb{R}^n$.

Первая глава работы носит вспомогательный характер и содержит необходимые сведения из теории многозначных отображений, стохастического анализа. В частности, даются определения классических производных в среднем, задается квадратичная производная.

Всюду в работе используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу.

Пусть $\mathcal{T}^n$ – плоский n-мерный тор. Мы рассматриваем случайные процессы в $\mathcal{T}^n$ заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\xi(t)$ – такой процесс.

Обозначим через $\mathcal{N}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$ порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ отображением $\xi(t) : \Omega \to \mathcal{T}^n$; $\mathcal{N}_t^\xi$ называется "настоящим" для $\xi(t)$.

Обозначим через E_t^ξ условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$.

Определение 1.7 *(i) Производная справа $D\xi(t)$ задается формулой*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\Big),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означа-

ет, что $\triangle t$ стремится к нулю и при этом $\triangle t > 0$.

Показано, что для диффузионного процесса $\xi(t)$ значение $D\xi(t)$ равно сносу этого процесса, в который подставлено $\xi(t)$. Аналогично вводится понятие производной слева $D_*\xi(t)$.

Определение 1.8 *(ii) производная слева $D_*\xi(t)$ задается формулой*

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t})$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к нулю и при этом $\triangle t > 0$.

Следуя [5], зададим дифференцирование D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi(\frac{(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))^*}{\triangle t}), \tag{1.6}$$

где $(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))$ – вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))^*$ – вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор). Результат этого матричного произведения – матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения в множестве симметрических неотрицательно определенных тензоров (матриц) типа $(2, 0)$.

Определение 1.9 *Введем симметрическую производную в среднем $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ и антисимметрическую производную в среднем $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$*

Рассмотрим также векторы $v^\xi(t, x) = \frac{1}{2}\ (a^\xi(t, x) + a_*^\xi(t, x))$ и $u^\xi(t, x) = \frac{1}{2}\ (a^\xi(t, x) - a_*^\xi(t, x))$.

Определение 1.10 *Вектор $v^\xi(t)) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$, а $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

В работах Э.Нельсона показано, что с физической точки зрения именно текущая скорость является аналогом обычной скорости детерминированных процессов.

Вводится понятие дифференциальных уравнений с текущими скоростями:

Пусть $v(t,m)$ – векторное поле, $\alpha(t,m)$ – симметрическое неотрицательно определенное $(2,0)$-тензорное поле на торе $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_S\xi(t) & = & v(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) & = & \alpha(t,\xi(t)) \end{array}\right. \tag{1.7}$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка.*

Определение 1.11 *Говорят, что (1.7) на $\mathcal{T}^n$ имеет решение на $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0)=\xi_0$ если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и процесс, $\xi(t)$ заданный на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и принимающий значения в $\mathcal{T}^n$, такой, что $\xi(0)=\xi_0$ и для почти всех $t\in[0,T]$ уравнение (1.7) выполняется P-п.н. для $\xi(t)$.*

Отметим следующее важное обстоятельство. В работе мы использем теорему существования решений уравнения (1.7), доказанную С.В. Азариной и Ю.Е. Гликлихом, в предположениях, что правые части (1.7) гладки и ограничены, а также что плотность распределения начального условия гладка и нигде не равна нулю. Поэтому при исследовании разрешимости включений с текущими скоростями стандартные приемы, использующие существование непрерывных селекторов или непрерывных ε-аппроксимаций требуют модификации.

Вторая глава содержит полученные автором технические утверждения, широко используемы в дальнейшем. Основным результатом §2.1 является описание любой матрицы из $S_{LC}(n)$ (множество симметрических $n\times n$ матриц с постоянным определителем, равным C) с использованием матриц из специальных подпространств пространства матриц $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$: пространства $\mathsf{T}_-(n)$ нижне-треугольных $n\times n$ матриц с нулями на диагонали и пространства $\mathsf{L}_0(n)$ диагональных матриц с нулевым следом. Связь с этих подпространств с $S_{LC}(n)$ осуществляется специальными отображениями, которые обозначаются T и L_C, соответственно. Это представление позволяет использовать аппарат многозначных отображений с выпуклыми образами, в то время как множество $S_{LC}(n)$ не является линейным пространством и в нем понятие выпуклого подмножества не корректно. Кроме этого описывается конструкция римановой метрики на торе, порожденной гладкой невырожденной правой частью для квадратичной производной в среднем в уравнении с текущими скоростями, а также формы объема этой римановой метрики .

В §2.2 доказывается одно утверждение о слабой компактности мер на пространстве непрерывных кривых, соответствующих решениям уравнений с текущими скоростями.

В **третьей главе** от уравнений мы переходим к включениям с текущими скоростями. Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ – многозначное векторное поле, $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ – многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in \mathbf{v}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{3.1}$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка. Понятие решение включения (3.1) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в Определении (1.11).

Основным результатом §3.1 является доказательство следующих теорем:

Теорема 3.1 *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ – многозначное равномерно ограниченное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, имеющее гладкий селектор, а $\boldsymbol{\alpha}(m)$ – многозначное $(2,0)$-тензорное поле, также имеющее гладкий селектор, со значениями в $S_+(n)$. Пусть ξ – случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, чья плотность ρ_0 гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$ включение (3.1) имеет решение, которое существует на всем интервале $t\in[0,T]$.*

Далее для телесного замкнутого выпуклого множества A и вектора V в $\mathbb{R}^n$ мы вводим так называемую опорную функцию $\Psi(A,V)=\sup\limits_{y\in A}(y,V)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Рассматриваем многозначное векторное поле

$\mathbf{v}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$, у которого образы телесны, выпуклы и замкнуты. Поскольку касательное расслоение к тору тривиально, мы рассматриваем постоянное векторное поле V на торе. Через $\Psi(t,m,V)$ обозначили опорную функцию $\Psi(\mathbf{v}(t,m),V)$. Пусть также $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ с телесными, выпуклыми, замкнутыми образами. Так как $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ принимает значения в $S_+(n) \subset L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, что является линейным пространством, мы строим опорную функцию $\Psi_1(t,m,V_1)$ для $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$, по аналогии с приведенной выше схемой, где V_1 постоянное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$.

При следующих условиях мы доказываем теоремы существования решений для случая телесных, выпуклых замкнутых образов:

Условие 3.2 *При любом V и V_1 функции $\Psi(t,m,V)$ и $\Psi_1(t,m,V_1)$ являются гладкими.*

Теорема 3.3 *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ – многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле на $\mathcal{T}^n$ имеющее телесные, выпуклые замкнутые образы и удовлетворяющее Условию* (3.2)*, а $\boldsymbol{\alpha}(m)$ – многозначное* $(2,0)$*-тензорное поле так же имеющее телесные, замкнутые, выпуклые образы, и так же удовлетворяющее Условию* (3.2)*. Кроме того, пусть случайный элемент ξ, со значениями в $\mathcal{T}^n$, имеет плотность гладкую, нигде не равную нулю. Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$ включение* (3.1) *имеет решение, которое существует на всем интервале $t\in[0,T]$.*

Далее, мы рассматриваем случай, когда образы $\mathbf{v}(t,m)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ не телесны. Вместо этого мы предполагаем, что каждое отображение $\mathbf{v}(t,m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(t,m)$), принадлежит подпространству в $T_m\mathcal{T}^n$ (подпространству в пространстве $(2,0)$-тензоров в m, соответственно), причем, указанные подпространства имеют постоянную размерность k (k_1, соответственно) не зависящую от $m\in\mathcal{T}^n$. Если, поставить в соответствие, каждому $m\in\mathcal{T}^n$, вышеуказанное подпространство, то получим отображение Φ из $\mathcal{T}^n$ в многообразие афинных подпространств с размерностью k касательного пространства $T_m\mathcal{T}^n$ (отображение Φ_1 в многообразие афинных подпространств, пространства $(2,0)$- тензоров)

Условие 3.4 *Отображения Φ и Φ_1 являются гладкими*

Теорема 3.5 *Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(t,m)$) – многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле ($(2,0)$ - тензорное поле со значениями в $S_+(n)$) на $\mathcal{T}^n$ такое, что каждый образ $\mathbf{v}(t,m)$ лежит подпространстве в $T_m\mathcal{T}^n$ (каждый образ $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ лежит в подпространстве, пространства $(2,0)$-тензоров, соответственно), причем указанные подпространства имеют постоянную размерность $k<n$ ($k_1<n$, соответственно), не зависящую от $m\in\mathcal{T}^n$, и выполнено Условие 3.4. Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$ включение (3.1) имеет решение, которое существует на всем интервале $t\in[0,T]$.*

В §3.2 получен результат для случая, когда существуют ε-аппроксимации правой части включения с равномерно ограниченными первыми частными производными.

Теорема 3.6 *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathbb{T}^n$ и многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathcal{T}^n$ автономны, равномерно ограничены и имеют замкнутые образы. Пусть существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k\to 0$ такая, что для любого ε_k поле $\mathbf{v}(m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(m)$, соответственно)имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_k(m)$ ($\alpha_k(m)$, соответственно)и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности $t\in[0,T]$ и $m\in\mathbb{T}^n$ первые частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial m^k}$ ($\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial q^k}$, соответственно). Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$, включение (3.1) имеет решение, определенное на всем интервале $t\in[0,T]$*

В §3.3 рассматривается случай полунепрерывных сверху правых частей.

Теорема 3.7 *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathbb{T}^n$ и многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$, принимающее значения в $S_+(n)$, на $\mathcal{T}^n$ автономны, равномерно ограничены, имеют замкнутые выпуклые образы и полунепрерывны сверху. Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$ с гладкой плотностью нигде не равной нулю, включение (3.1) имеет решение, определенное на всем интервале $t\in[0,T]$.*

§3.4 посвящен важному для приложений случаю, когда правая часть соотношения с квадратичной производной принимает значения в симметрических матрицах с постоянным определителем. Мы предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие 3.8

(i) Многозначное $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *на* $\mathcal{T}^n$ *принимает значения в* $S_{LC}(n)$*; оно автономно и полунепрерывно сверху.*

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ *замкнуты и равномерно ограничены.*

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ *множество* $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{T}_-(n)$ *и множество* $\mathsf{L}_\mathsf{C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ *выпукло в* $\mathsf{L}_0(n)$*.*

Теорема 3.9 *Пусть* $\mathbf{v}(t,m)$ *– многозначное равномерно ограниченное векторное поле на* $\mathcal{T}^n$*, имеющее гладкий селектор* $v(t,m)$*, а* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *– многозначно* $(2,0)$*-тензорное поле, удовлетворяющее условию 3.8. Пусть также* ξ_0 *– случайный элемент со значениями в* $\mathcal{T}^n$*,чье вероятностное распределение, относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$ *где* ρ_0 *гладко и нигде не обращается в ноль. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, определенное при* $t \in [0,T]$*.*

Частным случаем рассмотренной выше в этом разделе ситуации является **Теорема 3.10**, в условии которой $\mathbf{v}$ имеет гладкий селектор (например, однозначно и гладко), а поле $\boldsymbol{\alpha}$ многозначно и принимает значения в симметрических матрицах с единичным определителем, то есть в $SL(n)\bigcap S_+(n)$.

В §3.4.2 доказывается разрешимость включения (3.1) в случае, когда у поля $\mathbf{v}$ нет гладкого селектора, но существуют гладкие ε-аппроксимации.

Условие 3.11 *Многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы. Существует последовательность положительных чисел* $\varepsilon_k \to 0$ *такая, что для любого* ε_k *поле* $\mathbf{v}(m)$ *имеет гладкую* ε_k*-аппроксимацию* $v_i(m)$ *и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности* $t \in [0,T]$ *и* $m \in \mathbb{T}^n$ *первые частные производные* $\frac{\partial v_i}{\partial m_j}$*.*

Теорема 3.13 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t,m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *удо-*

влетворяет Условию 3.11, а многозначное $(2,0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет Условию 3.8.*

Рассмотрим случайный элемент ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого распределение относительно формы объема* Λ_E *равно* $\sqrt{C}\rho_0$*, где* ρ_0 *гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *влючение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

В §3.4.3 получен результат для случая существования непрерывных ε-аппроксимаций полей $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\alpha}$.

В этом случае мы накладываем на $\mathbf{v}(t, m)$ следующее условие:

Условие 3.14 *Многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *автономно, полунепрерывно сверху, равномерно ограниченно с замкнутыми выпуклыми образами.*

Теорема 3.15 *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(t, m)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *удовлетворяет Условию 3.14 и многозначное* $(2,0)$*- тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}(m)$ *удовлетворяет Условию 3.8. Рассмотрим случайный элемент* ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, чья плотность распределения, относительно формы объема* Λ_E *равна* $\sqrt{C}\rho_0$ *где* ρ_0 *гладка и нигде не обращается в ноль. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *включение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

И наконец, в §3.5 получены результаты для случая полунепрерывности снизу правой части включения (3.1).

Сначала рассматривается общий случай.

Теорема 3.16. *Пусть поля* $\mathbf{v}$ *и* $\boldsymbol{\alpha}$ *автономны, полунепрерывны снизу, равномерно ограничены в соотвествующих пространствах полей и имеют выпуклые замкнутые образы.*

Рассмотрим случайный элемент ξ_0 *со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого плотность* ρ_0 *относительно евклидовой формы объема* Λ_E *гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *влючение* (3.1) *имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

Затем рассматриваентся случай, когда поле $\boldsymbol{\alpha}$ принимает значения в

$S_{LC}(n)$.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ удовлетворяет следующим условиям:

Условие 3.17 *(i) Многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathcal{T}^n$ принимает значения в $S_{LC}(n)$; оно автономно и полунепрерывно снизу.*

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ замкнуты и равномерно ограничены.

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ множество $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{T}_{-}(n)$ и множество $\mathsf{L_C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{L}_0(n)$.

Теорема 3.18 *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathcal{T}^n$ автономно, равномерно ограничено, полунепрерывно снизу и имеет выпуклые образы, а многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(m)$ удовлетворяет Условию 3.17. Рассмотрим случайный элемент ξ_0 со значениями в $\mathcal{T}^n$, у которого плотность ρ_0 относительно евклидовой формы объема Λ_E гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ влючение (3.1) имеет решение, определенное на всем интервале $t \in [0,T]$.*

Публикации автора по теме диссертации

1. Makarova A.V. On solvability differential inclusions with current velocities /A.V. Makarova // International conference modern stochastics: Theory and applications II September 7-11, 2010, Kyiv, Ukraine. Abstracts.-Kyiv University, 2010-P.102

2. Макарова А.В. Одна теорема существования решений для дифференциальных включений с текущими скоростями/А.В. Макарова// Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ -2011) Материалы IV Международной научной конференции. Воронеж -2011-. С.186-188 3.

3. Gliklikh Yu.E. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities / Yu. E. Gliklikh, A.V. Makarova //Applicable Analysis, 2012, Vol. 91, Issue 9, P. 1731 - 1739

4. Гликлих Ю.Е. Теорема существования решений для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями /Ю.Е. Гликлих, А.В.

Макарова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика Физика.- 2012.- N 17(136).- Вып. 28.- С. 5-15

5. Makarova A.V. О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями //Spectral and Evoluation Problems.- 2012.- Vol. 22.- P. 125-128.

6. Makarova A.V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II / A.V. Makarova // Global and Stochastic Analysis.- 2012.- Vol. 2.- No. 1.- P. 101-112.

7. Макарова А.В. Новая теорема существования решений для дифференциальных включений с текущими скоростями /А. В. Макарова// Крымская международная математическая конференция. Сборник тезисов. Судак, Украина, 22 сентября - 4 октября 2013.- Т.2.- С. 75

8. Gliklikh Yu.E., Makarova A.V. On stochastic differential inclusions with current velocities / Yu.E. Gliklikh, A.V. Makarova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. - 2015. - Vol. 2, No. 3.- P. 25-33.

9. Макарова А.В. Некоторые матричные конструкции/ А. В. Макарова // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей 12-18 июля 2015года).- Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН- 2015. С.149-150

10. Макарова А.В. О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями с полунепрерывной снизу правой частью /А.В. Макарова // Вестник Липецкого государственного педагогического университета. Серия МИФЕ.-2015. Вып. 1(16).- С. 22-29

11. Макарова А.В. Некоторые конструкции с симметрическими матрицами I / А. В. Макарова // XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа- симпозиум по спектральным и эволбционным задачам(КРОМШ-2015): сборник тезисов.-Симферополь.-2015. С.114-115

12. Gliklikh Yu.E. On existence of solutions to stochastic differential inclusions with current velocities II / Yu.E. Gliklikh, A.V. Makarova // Journal of Computational and Engineering Mathematics.- 2016.- Vol. 3.- No. 1.- P. 48-60

13. Макарова А. В. О существовании решений стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями I/ А.В. Макарова // XXIV Международная конференция "Математика. Экономика, Образование". IX Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Международная конференция по стохастическим методам. Материалы.Ростов н/Д. -2016. С. 63

Работы [3,4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Подписано в печать 05.10.2016 г.

Формат 60×90 1/16. Объем 1 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 448

Отпечатано в УОП ФГБОУ ВО «ВГЛТУ»

394087, г. Воронеж, ул. Докучаева, 10