

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

КИСЕЛЕВ ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ  
БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ  
НЕПОЛНЫХ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ  
СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико - математических наук

Научный руководитель  
кандидат физико-математических  
наук, доцент Минин Л. А.

ВОРОНЕЖ — 2016

# Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Введение</b>  | <b>4</b>  |
| <b>1 Основные методы, применяемые при работе с неортогональными системами функций</b>                        | <b>19</b> |
| 1.1 Пространства со скалярным произведением и преобразование Фурье . . . . .                                 | 19        |
| 1.2 Ортогонализация и биортогональные системы . . . . .  | 21        |
| 1.3 Обзор некоторых математических моделей в физике, приводящих к неортогональным системам функций . . . . . | 25        |
| 1.4 Константы Рисса и устойчивость разложения по неортогональным системам . . . . .                          | 29        |
| 1.5 Интерполяция по системам равномерных сдвигов . . . . .   | 31        |
| <b>2 Системы равномерных сдвигов, порожденные функциями Гаусса и Лоренца</b>                                 | <b>35</b> |
| 2.1 Узловые функции . . . . .  | 35        |
| 2.2 Биортогональные системы . . . . .  | 38        |
| 2.3 Константы Рисса . . . . .  | 47        |
| 2.4 Предельные соотношения . . . . .   | 48        |
| 2.5 Теоретический анализ устойчивости методов . . . . .  | 52        |
| <b>3 Вычислительные особенности аппроксимации с помощью функций Гаусса и Лоренца</b>                         | <b>54</b> |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.1      | Построение узловых функций для систем равномерных сдвигов . . . . .                  | 54        |
| 3.2      | Применение интерполяционного метода . . . . .  | 57        |
| 3.3      | Использование биортогональных систем . . . . .                                       | 62        |
| 3.4      | Биортогональные системы для функций Гаусса и Лоренца<br>разной ширины . . . . .      | 64        |
| 3.5      | Системы равномерных сдвигов, порожденные сверткой функций Гаусса и Лоренца . . . . . | 71        |
| <b>4</b> | <b>Подсистемы когерентных состояний, заданные на прямоугольных решетках</b>          | <b>75</b> |
| 4.1      | Когерентные состояния и фреймы . . . . .   | 75        |
| 4.2      | Константы Рисса для полной системы . . . . .   | 78        |
| 4.3      | Анализ неустойчивости полной системы . . . . .                                       | 82        |
| 4.4      | Константы Рисса для неполных систем . . . . .  | 85        |
| 4.5      | Применение когерентных состояний . . . . .   | 88        |
|          | <b>Заключение</b>  | <b>93</b> |
|          | <b>Литература</b>  | <b>94</b> |

# Введение

**Актуальность темы диссертации.** В настоящее время происходит стремительное развитие информационных технологий. Они активно применяются в науке, технике и медицине. Одной из основных задач в этой области является генерация, эффективная передача и расшифровка цифровых сигналов. Это требует применения специфического математического аппарата.

Сигналы, получаемые при исследовании различных явлений и процессов, часто имеют сложную структуру, поэтому важной задачей является разложение составного сигнала на простые компоненты. Для физических экспериментов и медицинских исследований весьма характерной является ситуация, когда в изучаемой зависимости наблюдаются особенности в виде пиков различной формы. К таким сигналам можно отнести спектры различной природы (атомные, молекулярные, ядерные и пр.), электрокардиограммы и многие другие биомедицинские сигналы.

Эффективность использования ортогональных систем функций для цифровой обработки сигналов доказана множеством работ. Их несомненным преимуществом является наличие универсального метода разложения. Однако, недостатком многих активно применяемых в настоящее время ортогональных систем типа всплесков или ортогональных полиномов является их сложная структура и неясный физический механизм, приводящий к такой форме экспериментальной зависимости. Напротив, семейства функций, возникающие при моделировании различных явлений и процессов зачастую являются именно неортогональными.

Неортогональные системы функций в настоящее время являются гораздо менее изученными, по сравнению с ортогональными, поэтому разработка методов и алгоритмов для их применения является актуальной задачей. Так как цифровые сигналы, как правило, задаются на дискретной сетке с равномерным шагом, то наибольший интерес представляют системы, состоящие из равномерных сдвигов одной функции.

Из всего многообразия функций, в качестве объекта исследования в данной работе выбираются наиболее часто встречающиеся в различных физических приложениях функция Гаусса  $\exp(-x^2/(2\sigma^2))$  и функция Лоренца  $\sigma^2/(\sigma^2 + x^2)$ , которая также носит название распределение Коши и функция Брейта-Вигнера. Сдвигам функции Гаусса посвящено достаточно много работ ([12], [13], [55], [56], [57] и др.), в то же время система сдвигов функции Лоренца в научной литературе практически не рассматривалась. Поэтому в настоящей работе производится разработка соответствующего математического аппарата. Важным является анализ свойств исследуемых систем функций в зависимости от их параметра  $\sigma$  с целью оптимизации алгоритмов, построенных на их основе. Значительная часть работы посвящена именно этому вопросу.

Естественным обобщением семейств сдвигов являются оконные системы  $g(x - a)e^{ibx}$ , где  $g(x)$  называется функцией окна, а параметры  $a$  и  $b$  обычно изменяются с равномерным шагом. Эти системы представляют собой своеобразный синтез сдвигов и тригонометрических рядов Фурье. В данной диссертационной работе рассматриваются семейства такого рода с окном в виде функции Гаусса, в физике получившие названия когерентные состояния. Некоторые их свойства оказываются не до конца изученными. Их исследование может открыть весьма полезный математический аппарат для цифровой обработки сигналов, а также для анализа квантового хаоса [15], [26].

**Цель работы.** Изучение неортогональных семейств сдвигов, оконных систем функций и разработка новых эффективных способов разло-

жения в ряды по этим системам.

Для достижения цели в работе решались следующие задачи:

1. Построение интерполирующей функции на основе равномерных сдвигов функции Лоренца и изучение ее свойств.
2. Нахождение удобных с точки зрения построения алгоритмов биортогональных систем для сдвигов функции Гаусса и Лоренца.
3. Создание и численная проверка алгоритмов на основе разработанного математического аппарата.
4. Анализ устойчивости разложения по исследуемым системам, оценка границ применимости разработанных алгоритмов.

**Методика исследований.** В работе используются методы теории функций, линейного функционального анализа, линейной алгебры, теории всплесков, специальных функций и вычислительной математики.

**Научная новизна и значимость полученных результатов.** Следующие результаты, полученные в работе, являются новыми.

1. Получены формулы для коэффициентов узловой функций, порожденной системой целочисленных сдвигов функции Лоренца.
2. Доказано, что узловая функция, порожденная системой целочисленных сдвигов функции Лоренца, при стремлении параметра ширины  $\sigma$  к бесконечности, стремится по норме пространства  $L_2(\mathbb{R})$  к функции отсчетов  $\text{sinc}(\pi x)$ .
3. Построена биортогональная система для семейства равномерных сдвигов функции Лоренца, принадлежащая образованному ими подпространству, а также два новых параметрических семейства биортогональных систем для равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца, лежащие вне подпространств исходных сдвигов.
4. Построена биортогональная система и установлена ее связь с узловой функцией для семейства равномерных сдвигов, порожденного сверткой функций Гаусса и Лоренца.

5. Проведена оценка устойчивости процедуры разложения по исследуемым системам при помощи констант Рисса. Проанализированы базисные свойства систем сдвигов функций Гаусса и Лоренца в зависимости от параметра  $\sigma$ .
6. Получены формулы для констант Рисса некоторых неполных подсистем когерентных состояний и показано, что нельзя провести устойчивую ортогонализацию для полной системы, а при переходе к вдвое прореженной неполной – можно.

**Практическая и теоретическая значимость** заключается в том, что разработанный математический аппарат может быть использован для более эффективной цифровой обработки некоторых типов экспериментальных сигналов. Также результаты работы могут быть востребованы в квантовой теории хаоса.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на всероссийской конференции "Телематика'2014" в г. Санкт-Петербург в 2014 г., на международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" в г. Воронеж в 2015 г., в Воронежской весенней математической школе в 2016 г., а также на семинарах Воронежского государственного университета в 2011-2014 гг.

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в работах автора [62]–[68]. Из совместных публикаций [62], [63], [67], [68] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Работы [62], [63], [66], [67], [68] опубликованы в изданиях, соответствующих списку ВАК РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 68 наименований. Общий объем диссертации 101 страница.

**Краткое содержание диссертации.**

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной рабо-

ты, сформулированы цели и задачи исследования, определены научная новизна и практическая значимость.

**Первая глава** является вводной. Она содержит основные обозначения, определения и результаты, используемые далее в диссертации.

В работе рассматривается пространство комплекснозначных функций  $L_2(\mathbb{R})$ . Скалярное произведение и норма задаются обычным образом

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g^*(x) dx, \|f\|_{L_2} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Прямое и обратное преобразование Фурье используется в диссертации в следующей форме

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ix\xi} dx, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{ix\xi} d\xi.$$

При работе с неортогональными системами функций наиболее часто используются три основных подхода: ортогонализация, построение биортогональной (двойственной) системы и интерполяция. Как следует из статьи Н. К. Бари [1] устойчивые процедуры ортогонализации и построения биортогональной системы возможны для систем Рисса.

**Определение 1.** ([29, с. 13], [37, с. 124]) *Функции  $\varphi_k(x)$  образуют систему Рисса с положительными константами  $A$  и  $B$ , если для любого набора коэффициентов  $\{c_k\} \in l_2$  выполнена двусторонняя оценка*

$$A\|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2}^2 \leq B\|c\|_{l_2}^2,$$

где нормы задаются обычным образом:

$$\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad \|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Под  $A$  и  $B$  обычно понимаются их наилучшие оценки. Тогда наибольшее значение  $A$  называют нижней константой Рисса, наименьшая величина  $B$  – верхней константой Рисса. Для ортонормированных систем



функций  $A$  и  $B$  равны 1. С точки зрения методов вычислений отношение констант Рисса равно числу обусловленности матрицы Грама и поэтому рассматривается нами как один из базовых критериев для оценки устойчивости разрабатываемых алгоритмов разложения.

Объектами исследования в работе выбраны системы равномерных сдвигов функции Гаусса

$$\varphi_G(x - k) = \exp\left(-\frac{(x - k)^2}{2\sigma^2}\right), \sigma > 0, k \in \mathbb{Z},$$

равномерных сдвигов функции Лоренца

$$\varphi_L(x - k) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x - k)^2}, \sigma > 0, k \in \mathbb{Z},$$

когерентные состояния гармонического осциллятора

$$\varphi_{km}(x) = \exp\left(-\frac{(x - \omega_1 k)^2}{2}\right) \cdot e^{i\omega_2 m x}, k, m \in \mathbb{Z},$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – вещественные положительные параметры, а также некоторые модификации перечисленных систем.

Первые два типа функций применяются в физике в моделях спектров различного происхождения [6, гл. 4], [10, гл. 1], [24, гл. 6], [52, гл. 2]. Когерентные состояния имеют важное значение в квантовой лазерной и статистической физике [5], [26, Дополнение].

В качестве базовых методов в настоящей работе не используется ортогонализация, поскольку представляет собой достаточно громоздкую процедуру. Кроме того, она часто является излишней, так как обычно ставится задача разложить сигнал именно по заданной системе. В этой ситуации можно применить другой, более простой прием – построение биортогональной системы (двойственной или дуальной системы).

**Определение 2.** ([16, с. 7], [29, с. 19]) *Функции  $\varphi_k(x), \psi_n(x), k, n \in \mathbb{Z}$ , образуют биортогональную систему, если*

$$(\varphi_k, \psi_n) = \delta_{kn}.$$

Для целочисленных сдвигов  $\varphi_k(x) = \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}$ , являющихся системами Рисса, известен следующий результат [37, с. 133]: если

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2}, \quad (1)$$

тогда  $\psi(x - k), k \in \mathbb{Z}$  вместе с набором  $\varphi(x - k)$  образуют биортогональную систему, причем функция  $\psi(x)$  представляет собой линейную комбинацию  $\varphi(x - k)$ .

Существует альтернативный биортогональным системам метод, не требующий численного интегрирования, это – интерполяция. Основным инструментом интерполяции является узловая функция.

**Определение 3.** Функция  $\tilde{\varphi}(x)$ , являющаяся линейной комбинацией  $\varphi(x - k)$ ,

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \varphi(x - k),$$

называется узловой, если для нее выполнена система равенств

$$\tilde{\varphi}(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для построения узловой функции необходимо найти набор коэффициентов  $d_k$ .

**Вторая глава** посвящена изучению систем равномерных сдвигов, порожденных функциями Гаусса и Лоренца. Все величины, относящиеся к функции Гаусса мы будем обозначать индексом  $L$  внизу, а к функции Гаусса – индексом  $G$ , а также они будут рассматриваться как некоторые функции, зависящие от параметра  $\sigma$ .

В монографии В. Мазьи и Г. Шмидта [56, с. 152] решена интерполяционная задача с помощью равномерных сдвигов функции Гаусса. В настоящей работе получено выражение для  $d_{L,k}$ .

**Теорема 1.** Для коэффициентов узловой функции, построенной по

системе сдвигов функции Лоренца, справедлива формула

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int_0^\pi \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(\sigma t)} dt. \quad (2)$$

Перейдем к биортогональным системам. В случае, когда  $\varphi_k(x)$  представляют собой целочисленные сдвиги одной функции достаточно найти функцию  $\psi(x)$ , удовлетворяющую соотношению

$$(\varphi_k, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - k) \cdot \psi^*(x) dx = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Тогда  $\psi_m(x) = \psi(x - m)$  вместе с  $\varphi_k(x) = \varphi(x - k)$  образуют искомую биортогональную систему. Назовем  $\varphi(x)$  базовой функцией, а  $\psi(x)$  – базовой дуальной функцией. Для неполных систем, каковыми являются два рассматриваемых набора сдвигов, биортогональная система определяется, вообще говоря, неоднозначно [16, с. 7]. Пусть  $H_\varphi$  – подпространство, образованное линейной оболочкой сдвигов  $\varphi(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Если  $\psi(x) \in H_\varphi$ , то обозначим ее как  $\psi^{in}(x)$ , если же  $\psi(x) \notin H_\varphi$ , то будем использовать обозначение  $\psi^{out}(x)$ .

В упомянутой выше книге В. Мазьи и Г. Шмидта [56, с. 162] приводится формула для построения биортогональной системы в случае сдвигов функции Гаусса, являющаяся следствием соотношения (1). Аналогично для функции Лоренца нами получен следующий результат.

**Теорема 2.** *Справедливо равенство*

$$\widehat{\psi}_L^{in}(\xi, \sigma) = \frac{2 \operatorname{sh}(2\sigma\pi) e^{-\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}} \operatorname{ch}(2\sigma(\xi \bmod 2\pi - \pi))}.$$

Функция  $\psi^{in}(x)$  определяется единственным образом. Для построения  $\psi^{out}(x)$  в работе применяется следующий прием. Заменим в формуле (3) целое  $k$  действительной переменной  $y$  и рассмотрим функцию

$$\lambda(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - y) \cdot \psi^*(x) dx. \quad (4)$$

При этом требуется, чтобы  $\lambda(k) = \delta_{k0}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Функцию  $\lambda(y)$  можно выбирать достаточно произвольно и получать при этом различные  $\psi^{out}(x)$ , решая уравнение типа свертки (4). С помощью этого метода нами построено несколько новых биортогональных систем для сдвигов функций Гаусса и Лоренца.

Обозначив через  $\psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)$  и  $\psi_{L,n}^{out}(x, \sigma)$  базовые дуальные функции, получающиеся при выборе  $\lambda(y) = \text{sinc}^n(\pi y)$ , придем к следующему результату.

**Теорема 3.** *Справедливы формулы*

$$\widehat{\psi}_{G,n}^{out}(\xi, \sigma) = \frac{1}{2\sigma\pi} \exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \cdot B_n\left(\frac{\xi}{2\pi} + \frac{n}{2}\right), n \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{\psi}_{L,n}^{out}(\xi, \sigma) = \frac{2}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\sigma|\xi|} \cdot B_n\left(\frac{\xi}{2\pi} + \frac{n}{2}\right), n \in \mathbb{N},$$

где  $B_n(x)$  – базисный сплайн порядка  $n$  [37, гл. 4].

Выбирая  $\lambda(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2s^2}\right) \cdot \text{sinc}(\pi y)$  в случае функции Гаусса и  $\lambda(y) = \frac{s^2}{s^2+y^2} \cdot \text{sinc}(\pi y)$  в случае функции Лоренца, получим другие семейства базовых дуальных функций, которые мы обозначим через  $\psi_{G,s}^{out}(x, \sigma)$  и  $\psi_{L,s}^{out}(x, \sigma)$  соответственно.

**Теорема 4.** *Пусть  $s > \sigma$ . Тогда справедливы формулы*

$$\widehat{\psi}_{G,s}^{out}(\xi, \sigma) = \frac{\exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)}{4\sigma\pi} \left( \text{erf}\left(\frac{s(\xi + \pi)}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{s(\xi - \pi)}{\sqrt{2}}\right) \right),$$

$$\widehat{\psi}_{L,s}^{out}(\xi, \sigma) = \begin{cases} \frac{2e^{\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (1 - e^{-s\pi} \cdot \text{ch}(s\xi)), & |\xi| \leq \pi; \\ \frac{2e^{\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \text{sh}(s\pi) \cdot e^{-s|\xi|}, & |\xi| > \pi, \end{cases}$$

где  $\text{erf}(x)$  – функция ошибок [35, с. 120]

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Наличие явных формул для биортогональных систем позволяет получать более эффективные вычислительные алгоритмы. Неоднозначность

выбора базовой дуальной функции является характерной чертой любого конечномерного приближения и следует, на наш взгляд, использовать это обстоятельство, оптимизируя выбор параметров под конкретную задачу.

Во второй главе также дана теоретическая оценка устойчивости разработанных методов с помощью констант Рисса. В статье [13] найдены константы Рисса для целочисленных сдвигов функции Гаусса. В настоящей работе получены явные выражения для констант Рисса в случае функции Лоренца.

**Теорема 5.** *Целочисленные сдвиги функции Лоренца образуют систему Рисса с константами*

$$A_L(\sigma) = \frac{\sigma^2 \pi^2}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}, \quad B_L(\sigma) = \frac{\sigma^2 \pi^2 \operatorname{ch}(2\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}. \quad (5)$$

Из формул (5) в частности следует, что, как и в случае функции Гаусса, отношение констант Рисса  $B_L(\sigma)/A_L(\sigma)$  неограниченно возрастает с увеличением параметра  $\sigma$ .

Установлено также еще несколько важных фактов. В статьях [13] и [68] М. В. Журавлев, Л. А. Минин и С. М. Ситник показали, что отношение констант Рисса системы сдвигов узловой функции, порожденной функцией Гаусса стремится в пределе при  $\sigma \rightarrow +\infty$  не к бесконечности, а к 2. Мы доказали аналогичный результат для функции Лоренца.

**Теорема 6.** *Для констант Рисса  $\tilde{A}_L(\sigma)$  и  $\tilde{B}_L(\sigma)$  системы равномерных сдвигов узловой функции, порожденной функцией Гаусса, справедливы следующие соотношения:*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{A}_L(\sigma) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{B}_L(\sigma) = 1.$$

Также нами доказана

**Теорема 7.** *Справедливо предельное соотношение:*

$$\tilde{\varphi}_L(x, \sigma) \xrightarrow[\sigma \rightarrow +\infty]{L_2(\mathbb{R})} \operatorname{sinc}(\pi x).$$

Аналогичный результат для функции Гаусса доказали ранее авторы статьи [57].

**Третья глава** посвящена анализу вычислительных особенностей процедуры разложения по системам сдвигов функций Гаусса и Лоренца, а также некоторых их модификаций. Преимущественно внимание уделяется именно функции Лоренца, поскольку случай функции Гаусса детально изучен во многих других работах (см., например, [12], [13], [55], [56], [57]).

По соотношению (2) с помощью квадратурных формул рассчитаны коэффициенты  $d_{L,k}(\sigma)$ . Также проведена численная проверка теоремы 7. Выполнен ряд вычислительных экспериментов с тестовыми функциями по оценке эффективности анализа и синтеза функций с помощью интерполяционного метода и биортогональных систем, построенных во второй главе. Для этого задавалась функция  $f(x)$ , состоящая из суперпозиции  $r$  сдвигов функции Лоренца, а также аддитивного шума. С помощью описанных выше методов строилась аппроксимирующая функция  $\tilde{f}(x)$  после чего оценивалась их разность  $\tilde{f}(x) - f(x)$  по абсолютной величине и среднеквадратичной норме.

Установлено, что в отсутствие шума интерполяционный алгоритм обеспечивает хорошее качество восстановления вплоть до  $\sigma = 7$ : визуально исходная и восстановленная функции неразличимы, погрешность в среднем не превышает 0.01% от максимального значения исходной функции. При  $\sigma > 7$  алгоритм работает неустойчиво. Как показали вычисления, для нахождения амплитуд и положений пиков алгоритм, однако, оказывается малоприменимым, поскольку не позволяет обнаруживать пики, которые расположены не в узлах сетки.

Эксперименты с добавлением случайного шума показали, что алгоритм продолжает работать стабильно (погрешность при восстановлении не более 1%), составляет 10 % относительно амплитуды исходной функциональной зависимости. Допустимые значения  $\sigma$  при этом становятся ограничены величиной 4.

Биортогональные системы в целом показали схожее поведение. Алгоритм биортогональных систем обеспечивает хорошее качество восста-

новления в отсутствие шума при  $\sigma < 5$ , т. е. в этой ситуации несколько уступает алгоритму интерполяции. Однако, при добавлении 10 %-го случайного шума, граница  $\sigma = 5$  не понижается. Алгоритм позволяет решить задачу синтеза функций, однако, как и интерполяция не позволяет производить нахождение амплитуд и положений пиков. Для покомпонентного анализа функциональных зависимостей следует использовать поэтому иные методы.

Далее в качестве еще одной иллюстрации эффективности предложенного во второй главе способа построения биортогональных систем в некоторых простейших случаях рассчитаны базовые дуальные функции для функций Гаусса и Лоренца разной ширины  $\sigma$ , но с общим центром в начале координат.

В случае функции Гаусса, если исследуемая зависимость  $f(x)$  состоит всего из двух компонент с разными параметрами ширины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $\sigma_2 > \sigma_1$ ):

$$f(x) = A_1 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right),$$

то биортогональную систему вместе с этими компонентами образуют, например, функции

$$\psi_1(x) = \frac{(\sigma_1^4 + \sigma_2^4)^2}{4\sigma_1^4 \sigma_2^4 (\sigma_2^4 - \sigma_1^4)} |x|^3 \cos\left(\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right),$$

$$\psi_2(x) = \frac{(\sigma_1^4 + \sigma_2^4)^2}{4\sigma_1^4 \sigma_2^4 (\sigma_1^4 - \sigma_2^4)} |x|^3 \cos\left(\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

Если  $f(x)$  состоит из двух функций Лоренца с параметрами  $\sigma_1, \sigma_2$

$$f(x) = A_1 \frac{\sigma_1^2}{x^2 + \sigma_1^2} + A_2 \frac{\sigma_2^2}{x^2 + \sigma_2^2},$$

то примером двойственных функций будут

$$\psi_{1,2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( A_{1,2} \frac{a}{x^2 + a^2} - B_{1,2} \frac{b}{x^2 + b^2} \right),$$

где

$$A_{1,2} = \frac{(\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+a)}{\sigma_{1,2}\sqrt{2\pi}((\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+a)-(\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{2,1}+b))},$$

$$B_{1,2} = \frac{(\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+b)}{\sigma_{1,2}\sqrt{2\pi}((\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+a)-(\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{2,1}+b))},$$

Также в третьей главе рассмотрена система целочисленных сдвигов, порожденная сверткой функций Гаусса и Лоренца (контур Фойгта в теории атомных спектров [6, гл. 4], [52, гл. 2]):

$$\varphi(x - k, \sigma, s) = \frac{s}{\sigma\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - k - t)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{s^2 + t^2} dt, k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Установлено, что семейство функций (6) образует систему Рисса и проведена оценка констант Рисса. Как показывают расчеты при  $\sigma = s = 0.5$  отношение констант  $B/A \approx 136.4$ . При увеличении  $\sigma$  оно стремительно возрастает:  $s = 0.5, \sigma = 1, B/A \approx 2.2 \cdot 10^5$ ;  $s = 0.5, \sigma = 2, B/A \approx 1.6 \cdot 10^{18}$ . Несколько медленнее отношение констант увеличивается с ростом  $s$ :  $s = 2, \sigma = 0.5, B/A \approx 1.7 \cdot 10^6$ ;  $s = 5, \sigma = 0.5, B/A \approx 2.6 \cdot 10^{14}$ . Таким образом, при больших значениях  $\sigma$  или  $s$  матрица Грама исследуемой системы сдвигов становится плохо обусловленной, причем более чувствительна система к изменениям именно параметра  $\sigma$ .

Установленный нами факт, что равномерные сдвиги контура Фойгта образуют систему Рисса, позволяет построить биортогональную систему по формуле (1). Базовая дуальная функция  $\psi(x, \sigma, s)$  представляется в виде линейной комбинации сдвигов  $\varphi(x - k, \sigma, s)$  с некоторыми коэффициентами  $\psi_k(\sigma, s)$ . Вычисления показали следующие особенности в поведении этих коэффициентов. Во-первых, при некоторых параметрах наблюдается нарушение чередования знаков у коэффициентов. Например, при  $s = 0.1$  и  $\sigma = 0.5$ :  $\psi_{15}(0.1, 0.5) = -0.00029$ ,  $\psi_{16}(0.1, 0.5) = -0.00024$  (все значащие цифры верные с точностью до округления). Нарушение чередования знаков особенно явно выражено при больших значениях параметра  $s$  по сравнению с  $\sigma$ , когда преобладающую роль в свертке играет именно функция Лоренца. Во-вторых, коэффициенты  $\psi_k(\sigma, s)$  с увеличением  $\sigma$  и  $s$  возрастают по абсолютной величине. Например,  $\psi_0(1, 1) \approx 3.2 \cdot 10^4$ , но  $\psi_0(1, 2) \approx 7.0 \cdot 10^{17}$ ,  $\psi_0(2, 1) \approx 1.4 \cdot 10^8$ . Следовательно, ряды с участием  $\psi_k(\sigma, s)$  будут сходиться медленнее, при вычислениях



потребуется учитывать все больше слагаемых. Это одно из проявлений потери устойчивости с ростом параметров  $\sigma$  и  $s$ .

Построение узловой функции для сдвигов контура Фойгта, приводит к следующему результату.

**Теорема 8.** *Между коэффициентами  $\psi_k(\sigma, s)$  биортогональной системы и коэффициентами узловой функции  $d_k(\sigma, s)$  для системы целочисленных сдвигов контура Фойгта (6) имеет место соотношение*

$$d_k(\sigma, s) = \psi_k(\sigma/\sqrt{2}, s/2).$$

**Четвертая глава** посвящена исследованию подсистем когерентных состояний с точки зрения возможности их устойчивой ортогонализации и построения биортогональной системы. Основным параметром данных семейств является величина  $\omega_1 \cdot \omega_2$ . Известно следующее утверждение [30, с. 30], [41], установленное А. М. Переломовым и В. Баргманом с соавторами: при  $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$  система когерентных состояний переполнена и остается такой при отбрасывании любого конечного числа функций. При  $\omega_1 \cdot \omega_2 > 2\pi$  система не полна. При  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$  система полна и она остается полной при отбрасывании любой одной функции, но становится неполной при отбрасывании любых двух функций.

Подсистемы когерентных состояний, при  $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$  образуют так называемые фреймы [9, с. 96], [47] и достаточно хорошо изучены. Поэтому наше исследование посвящено случаю  $\omega_1 \cdot \omega_2 \geq 2\pi$ .

При  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$  нами получены следующие формулы.

**Теорема 9.** *Пусть  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ . Тогда для любого набора коэффициентов  $c_{km}$  с единичной нормой  $\|c\|_{l_2}^2 = 1$  справедливы соотношения*

$$\min_{x,y \in [0,1]} (F(x, y)) \leq \left\| \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} c_{km} \varphi_{km}(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \max_{x,y \in [0,1]} (F(x, y)),$$

где

$$F(x, y) = \omega_1 \left| \sum_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2}\right) \cdot e^{i2\pi ky} \right|^2.$$

На основании теоремы 9 в данной работе показано, что нижняя константа Рисса системы когерентных состояний (4) при  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$  равна нулю, причем даже после отбрасывания одной любой функции. Следовательно, устойчивая процедура ортогонализация для полной системы оказывается невозможна.

Для некоторых неполных систем нами доказано следующее утверждение.

**Теорема 10.** Пусть  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi N, N = 1, 2, \dots$ . Тогда семейство когерентных состояний является системой Рисса с константами  $A$  и  $B$ , определяемыми формулами

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\pi} \theta_3 \left( \frac{\pi}{2}, \exp \left( -\frac{\omega_1^2}{4} \right) \right) \cdot \theta_3 \left( \frac{\pi}{2}, \exp \left( -\frac{\omega_2^2}{4} \right) \right), \\ B &= \sqrt{\pi} \theta_3 \left( 0, \exp \left( -\frac{\omega_1^2}{4} \right) \right) \cdot \theta_3 \left( 0, \exp \left( -\frac{\omega_2^2}{4} \right) \right), \end{aligned}$$

где  $\theta_3(x, q)$  – третья тета-функция Якоби [36, гл. 21]

$$\theta_3(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx}, |q| < 1.$$

Известно, что  $\theta_3(x, q)$  на вещественной оси конечна и не обращается в нуль. Отсюда следует, что рассматриваемая подсистема когерентных состояний является системой Рисса и для нее возможна устойчивая процедура разложения и устойчивая ортогонализация, которая может быть положена в основу алгоритмов. Возможность построения хорошо локализованного ортогонального базиса является важной в квантовой теории хаоса [26, Дополнение], [38].

В **заключении** кратко формулируются основные результаты диссертационной работы.

# Глава 1

## Основные методы, применяемые при работе с неортогональными системами функций

В данной главе излагается математический аппарат, который будет использоваться в диссертации. Дается краткая характеристика базовым методам, которые применяются при работе с неортогональными системами функций, проводится обзор некоторых важных результатов, полученных другими авторами в этом направлении.

### 1.1 Пространства со скалярным произведением и преобразование Фурье

Рассматривается пространство комплекснозначных функций  $L_2(\mathbb{R})$  со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g^*(x) dx.$$

Здесь  $g^*(x)$  означает комплексное сопряжение к функции  $g(x)$ . Связанная с этим скалярным произведением норма

$$\|f\|_{L_2} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

носит также название среднеквадратичная норма.

Прямое преобразование Фурье мы будем использовать в следующей форме

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ix\xi} dx. \quad (1.1)$$

В этом случае (1.1) будет являться унитарным преобразованием из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(\mathbb{R})$ , поскольку для него справедливо равенство Парсеваля (теорема Планшереля) [25, гл. 7]

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}), \quad \|f\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{L_2}. \quad (1.2)$$

Формула обратного преобразования Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{ix\xi} d\xi.$$

Свертка функций, заданных на всей оси, определяется так:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot g(t) dt.$$

Для преобразования Фурье свертки тогда справедлива формула

$$((f * g)(x))^\wedge(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi). \quad (1.3)$$

В дальнейшем изложении важную роль играет формула суммирования Пуассона

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot e^{ikx}, \quad (1.4)$$

которая имеет место, если функция  $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$  удовлетворяет следующим условиям [37, гл. 2]:

1) ряд в левой части равенства (1.4) сходится всюду к некоторой непрерывной функции;

2) ряд Фурье в правой части этого же равенства сходится при всех  $x \in [0, 2\pi]$ .

Перечисленные условия заведомо выполняются, если при всех  $x, \xi \in \mathbb{R}$  справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\varepsilon}}, |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^{1+\varepsilon}}, \quad (1.5)$$

для некоторых вещественных положительных констант  $\varepsilon$  и  $C$ . Соотношения (1.5) более удобно проверять на практике.

Если подставить в формулу суммирования Пуассона (1.4) функцию Гаусса  $f(x) = \exp(-\sigma^2 x^2/2)$ , то получится так называемая формула тета-преобразования

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2(x + 2\pi k)^2}{2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \theta_3\left(\frac{x}{2}, \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\right),$$

где  $\theta_3(x, q)$  – третья тета-функция Якоби [36, гл. 21]

$$\theta_3(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx}, |q| < 1.$$

## 1.2 Ортогонализация и биортогональные системы

Процедура разложения по полной ортогональной системе функций в гильбертовом пространстве чисто теоретически достаточно проста: она сводится к нахождению соответствующих скалярных произведений. В реальных задачах могут появляться вычислительные трудности различного характера, рассматриваемые базисы могут иметь сложную структуру, но в нашем распоряжении имеется общая методика разложения.

Иначе обстоит дело с неортогональными системами. Одним из самых очевидных методов в этой ситуации является ортогонализация.

Вначале напомним метод ортогонализации Грама-Шмидта. Пусть в евклидовом пространстве задана некоторая система линейно независимых функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ . Ортогонализация Грама-Шмидта проводится тогда следующим образом [17, ч. 2]:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \varphi_1(x), \\ h_2(x) &= \varphi_2(x) - \frac{(\varphi_2, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1(x), \\ h_3(x) &= \varphi_3(x) - \frac{(\varphi_3, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1(x) - \frac{(\varphi_3, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2(x), \\ &\dots \\ h_n(x) &= \varphi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\varphi_n, h_k)}{(h_k, h_k)} h_k(x). \end{aligned}$$

Система функций  $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$  будет являться ортогональной.

Приведем несколько примеров. Применение ортогонализации Грама-Шмидта к многочленам  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$  относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx,$$

при выборе различных пределов интегрирования  $a, b$  и разных весовых функций  $\rho(x)$ , приводит к различным семействам ортогональных многочленов.

### 1. Многочлены Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

возникают, при ортогонализации на отрезке  $[-1, 1]$  и выборе весовой функции  $\rho(x) = 1$ .

2. Многочлены Чебышева 1-го рода

$$T_n(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} = \cos(n \arccos x)$$

получаются, если выбрать отрезок  $[-1, 1]$  и  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

3. Многочлены Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

образуются при ортогонализации на всей оси  $(-\infty, \infty)$  и весовой функции  $\rho(x) = e^{-x^2}$ .

4. Многочлены Лагерра

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

получаются на отрезке  $[0, \infty)$  и  $\rho(x) = e^{-x}$ .

При использовании ортогонализации Грама–Шмидта, образующаяся ортогональная система, вообще говоря, зависит от того, в каком порядке были расположены исходные функции: их перестановка может привести к другой системе. Еще одним существенным недостатком ортогонализации Грама–Шмидта является то, что она не сохраняет структуру исходного базиса, что делает неудобным построение алгоритмов разложения.

Для некоторых классов функций разработаны методы ортогонализации с сохранением структуры. Для систем сдвигов такая ортогонализация была предложена в 1970 году Е. Вигнером и Х. Швайнлером [58]. Опишем, следуя [37, гл. 3], данную процедуру. Пусть  $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ . Предположим, что семейство ее целочисленных сдвигов  $\varphi(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  образует так называемую систему Рисса. Тогда, если в образах Фурье задать функцию  $\hat{h}(x)$  формулой

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2\right)^{1/2}}, \quad (1.6)$$

система функций  $h(x - k), k \in \mathbb{Z}$  будет ортонормированной, а переход от  $\varphi(x)$  к  $h(x)$  в этом случае называется ортонормализацией. Строгое определение системы Рисса будет дано позднее, в параграфе 1.4, а пока отметим лишь, что это требование в рассматриваемой ситуации сводится к тому, что ряд в знаменателе формулы (1.6) конечен и отделен от нуля.

Для конкретных классов функций процедура ортонормализации впервые была реализована Стрембергом [29, гл. 1], [60]. В качестве  $\varphi(x)$  выбирались базисные сплайны различного порядка, а функция  $h(x)$  строилась в виде линейной комбинации их целочисленных сдвигов.

Ортогонализация как с сохранением структуры, так и без, в общем случае представляет собой достаточно громоздкую процедуру. Кроме того, она часто является излишней, поскольку обычно ставится задача провести разложение именно по заданной системе: после ортогонализации, сначала необходимо провести разложение по новой ортогональной системе, а затем вернуться к исходной неортогональной. В этой ситуации можно применить другой, более простой прием: построение биортогональной системы (используются также термины двойственная или дуальная система).

**Определение 1.1** ([16, с. 7], [29, с. 19]) *Функции  $\varphi_k(x), \psi_n(x), k, n \in \mathbb{Z}$ , образуют биортогональную систему, если*

$$(\varphi_k, \psi_n) = \delta_{kn}.$$

Здесь стоит отметить, что в практических задачах как правило рассматривается конечная система функций. Это важно с точки зрения вопросов о сходимости рядов и перестановочности операций суммирования и интегрирования. В этом предположении, если дана некоторая функция

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \varphi_k(x),$$

коэффициенты разложения  $c_k$  можно найти по формуле

$$c_k = (f, \psi_k). \tag{1.7}$$



Приведем примеры биортогональных систем.

1. Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – набор линейно независимых векторов в 3-х мерном евклидовом пространстве. Тогда полученные с помощью операций векторного и смешанного произведений векторы

$$\vec{f}_1 = \frac{[\vec{e}_2 \times \vec{e}_3]}{(\vec{e}_1, [\vec{e}_2 \times \vec{e}_3])}, \vec{f}_2 = \frac{[\vec{e}_3 \times \vec{e}_1]}{(\vec{e}_1, [\vec{e}_2 \times \vec{e}_3])}, \vec{f}_3 = \frac{[\vec{e}_1 \times \vec{e}_2]}{(\vec{e}_1, [\vec{e}_2 \times \vec{e}_3])}$$

вместе с  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  образуют биортогональную систему.

2. Системы целочисленных сдвигов. Пусть  $\varphi_k(x) = \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $\psi(x - k), k \in \mathbb{Z}$ , где

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2}, \quad (1.8)$$

вместе с набором  $\varphi(x - k)$  будут образовывать биортогональную систему [37, гл. 3]. Здесь также предполагается, что исходное семейство функций является системой Рисса.

Отметим, что формула (1.8) несколько проще, чем (1.6), так как не требует извлечения квадратного корня из знаменателя. Таким образом, построение биортогональной системы действительно оказывается более простой процедурой, чем ортогонализация.

### 1.3 Обзор некоторых математических моделей в физике, приводящих к неортогональным системам функций

**Атомные и молекулярные спектры.** Спектральные линии в дискретных спектрах испускания или поглощения не являются строго монохроматическими. Действие различных механизмов уширения приводит

к образованию некоторого спектрального распределения интенсивности вблизи частоты  $\omega_0$  квантового перехода в атоме или молекуле.

Контур спектральной линии определяется механизмом уширения. При ударном и радиационном уширениях, в случаях, когда мал эффект Доплера, форма линий атомных и молекулярных спектров достаточно хорошо описывается лоренцевским контуром [10, гл. 1], [52, гл. 2]. Распределение интенсивности  $g(\omega)$  отдельной спектральной линии, нормированное на единицу ( $\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)d\omega = 1$ ), тогда имеет вид

$$g_L(\omega) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \alpha)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (1.9)$$

Здесь  $\Gamma$  – параметр ширины спектральной линии,  $\alpha$  – сопровождающий уширение сдвиг.

При доплеровском уширении возникает гауссов контур:

$$g_D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \exp\left(-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_D}\right)^2\right), \quad (1.10)$$

где  $\Delta\omega_D = \omega_0 \frac{v_0}{c}$  – полуширина спектральной линии,  $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$  – наиболее вероятная скорость,  $c$  – скорость света,  $M$  – масса атома,  $T$  – температура излучающего вещества,  $k$  – постоянная Больцмана.

При одновременном статистически независимом действии гауссова и лоренцевского типов уширения контур спектральной линии описывается сверткой функций (1.9) и (1.10) (контур Фойгта) [6, гл. 4], [52, гл. 2]:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_D(\omega - x) \cdot g_L(x) dx. \quad (1.11)$$

Во всех перечисленных случаях, спектральные линии описываются функциями, которые не являются ортогональными друг другу ни при каких соотношениях параметров. В настоящее время существует множество методов аппроксимации при помощи сдвигов функции Гаусса (см. например [12], [13], [39], [44], [55], [56], [57]). В то же время, насколько

нам известно, вопрос о разложении по функциям Лоренца в литературе подробно не изучался. Поэтому в последующих главах проводится разработка соответствующего математического аппарата, который может иметь важное значение для цифровой обработки атомных и молекулярных спектров.

Отметим также, что функции Гаусса и Лоренца описывают некоторые спектральные пики в ядерной физике. Вместо названия лоренцевский контур в этой области используется термин распределение Брейта-Вигнера [24, гл. 6].

**Когерентные состояния гармонического осциллятора.** Системы функций вида

$$\varphi_{km}(x) = \exp\left(-\frac{(x - \omega_1 k)^2}{2}\right) \cdot e^{i\omega_2 m x}, k, m \in \mathbb{Z}, \quad (1.12)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  - вещественные положительные параметры, нашли свое применение в квантовой механике с первых же лет возникновения этой дисциплины. После работ Р. Глаубера [5] они получили название когерентные состояния. Основным параметром данных систем является величина  $\omega_1 \cdot \omega_2$ . В своей статье 1929 года, посвященной доказательству квантовой эргодической теоремы, И. Нейман [26, Дополнение] выдвинул гипотезу о том, что при выполнении условия

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi,$$

система (1.12) полна и с помощью ортогонализации Грама-Шмидта из нее может быть получен хорошо локализованный базис. Под полнотой здесь понимается равенство нулю ортогонального дополнения.

Позднее в 50-70-е годы А. М. Переломовым [31], [32] и В. Баргманом с соавторами [41] было доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.1** ([30, с. 30]). *При  $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$  система функций (1.12) неполна и остается такой при отбрасывании любого конечного числа функций. При  $\omega_1 \cdot \omega_2 > 2\pi$  система не полна. При  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$  система*

*полна и она остается полной при отбрасывании любой одной функции, но становится неполной при отбрасывании любых двух функций.*

Поскольку при  $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$  система когерентных состояний является переполненной, то вопрос об ортогонализации имеет смысл только при  $\omega_1 \cdot \omega_2 \geq 2\pi$ . В более простой ситуации, для однопараметрической системы целочисленных сдвигов, как уже упоминалось, процедуру ортогонализации с сохранением структуры сдвигов предложили в 1970 году Е. Вигнер, Х. Швайнлер [58]. Для базисов типа оконного преобразования Фурье Бальяном [40] и Лоу [53], в 1981 году была доказана теорема, из которой следует, что при  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$  ортогонализация с одновременным сохранением структуры и локализации невозможна. Когерентные состояния относятся к данному типу базисов с окном, задаваемым функцией Гаусса. В монографии И. Добеши [9, гл. 4] дано подробное описание этой проблемы.

Таким образом, единственной возможностью подтвердить гипотезу Неймана является проведение ортогонализации системы (1.12) без сохранения структуры. В статье Ж. Бургена [43] проводится ортогонализация Грама-Шмидта базиса с окном, задаваемым финитной функцией, близкой по норме к функции Гаусса. Тем самым Ж. Бурген показал возможность чисто теоретического построения хорошо локализованного ортонормированного базиса, однако не из системы функций (1.12), а близкой к ней. В настоящей работе будет изучен вопрос о возможности устойчивой ортогонализации без сохранения структуры именно исходной системы (1.12), поскольку эта задача имеет и самостоятельное значение. Подробнее о данной проблеме будет рассказано в главе 4.

Если отвлечься непосредственно от гипотезы И. Неймана, то ключевым вопросом при работе с любой системой функций, является алгоритм разложения. В случае переполненных систем, т. е. при  $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$ , система когерентных состояний (1.12) образует так называемый фрейм [9, глава 3], для которого теоретически указан алгоритм разложения (см., на-

пример [27],[50],[54]). В данной работе подробно будет исследован вопрос о процедуре разложения и ее устойчивости в случае, когда  $\omega_1 \cdot \omega_2 \geq 2\pi$ .

## 1.4 Константы Рисса и устойчивость разложения по неортогональным системам

Важными характеристиками неортогональных систем функций являются константы Рисса. Определение систем Рисса впервые было введено в 1951 в статье Н. К. Бари "Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве" [1].

**Определение 1.2** ([29, с. 13],[37, с. 124]) *Функции  $\varphi_k(x)$  образуют систему Рисса с положительными константами  $A$  и  $B$ , если для любого набора коэффициентов  $c_k \in l_2$  выполнена двусторонняя оценка*

$$A\|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2}^2 \leq B\|c\|_{l_2}^2, \quad (1.13)$$

где нормы задаются обычным образом:

$$\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad \|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Под  $A$  и  $B$  обычно понимаются их наилучшие оценки. Тогда наибольшее значение  $A$  называют нижней константой Рисса, наименьшая величина  $B$  во втором неравенстве – верхней константой Рисса. Для ортонормированных систем функций  $A$  и  $B$  равны 1.

Чтобы подчеркнуть важность данного понятия, отметим, что устойчивые процедуры ортогонализации и построения биортогональных функций по формулам (1.6) и (1.8) возможны лишь для систем Рисса.

Запишем квадрат нормы линейной комбинации  $\varphi_k(x)$  в случае некоторого конечного набора из  $n$  функций

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2}^2 = \sum_{k, l=1}^n c_k c_l^* (\varphi_k, \varphi_l).$$

Мы видим, что рассматриваемый квадрат нормы является квадратичной формой относительно коэффициентов  $c_k$  с матрицей Грама. Ее элементы представляют собой скалярные произведения  $(\varphi_k, \varphi_l)$ . Для линейно независимого набора функций матрица Грама является самосопряженной и положительно определенной [2, гл. 4]. Запишем также формулу (1.13) для рассматриваемого конечного набора функций:

$$A \|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi(x) \right\|_{L_2}^2 \leq B \|c\|_{l_2}^2.$$

Из сравнения последних двух выражений следует, что наибольшее значение  $A$  равно минимальному, а наименьшее значение  $B$  – максимальному из собственных чисел матрицы Грама. Отношение  $B$  к  $A$  тогда равно числу обусловленности матрицы Грама, которое является в вычислительной математике очень важным параметром [2, гл. 4]. Если оно оказывается большим, то матрица называется плохо обусловленной, и при работе с ней необходимо использовать специальные приемы для обеспечения устойчивости вычислений.

Для расчета констант Рисса систем целочисленных сдвигов одной функции обычно используется следующее утверждение.

**Теорема 1.2** ([29, с. 16], [37, с. 131]) Пусть  $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ . Для того чтобы семейство функций  $\varphi(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  являлось системой Рисса с постоянными  $A$ ,  $B$ , необходимо и достаточно, чтобы для почти всех  $\xi \in \mathbb{R}$  выполнялось соотношение

$$A \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \leq B. \quad (1.14)$$

Сумма в неравенстве (1.14) представляет собой периодическую функцию от  $\xi$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому, если обозначить

$$P(\xi) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2, \quad (1.15)$$

то константы Рисса можно находить с помощью следующих соотношений

$$A = \inf_{0 \leq \xi \leq 2\pi} P(\xi), \quad B = \sup_{0 \leq \xi \leq 2\pi} P(\xi).$$

Заметим, что бесконечный ряд в формуле (1.15) возникает и при ортогонализации в формуле (1.6), и при построении биортогональной системы (1.8). Следовательно, для возможности осуществить данные процедуры, очевидно необходимо, чтобы ряд в знаменателе не обращался в нуль и не был расходящимся. Это эквивалентно существованию оценки вида (1.14), т. е. когда  $\varphi_k(x)$  образуют систему Рисса. Указанные рассуждения носят на самом деле более общий характер и справедливы не только для систем сдвигов [1].

## 1.5 Интерполяция по системам равномерных сдвигов

Применение метода биортогональных систем подразумевает вычисление набора скалярных произведений (1.7). В пространстве  $L_2(\mathbb{R})$  это сводится к вычислению интегралов по бесконечному промежутку. На практике соответствующие интегралы могут быть вычислены лишь приближенно. Исследуемая зависимость обычно представляет собой не непрерывную функцию, а дискретный ряд значений. Поэтому, удобнее использовать методы, которые сразу подразумевают использование дискретных данных. Одним из таких методов является интерполяция.

Наиболее часто на практике используется равномерная сетка отсчетов, поэтому важное значение имеют семейства функций, составленные

из равномерных сдвигов. Не ограничивая общности, здесь и далее примем шаг сетки равным единице.

Рассматривается заданная на всей вещественной оси функция  $\varphi(x)$  и отвечающая ей система целочисленных сдвигов

$$\varphi_j(x) = \varphi(x - j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Задача интерполяции формулируется следующим образом. Пусть дана функция  $f(x)$ . Требуется построить функцию  $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_j \varphi(x - j), \quad (1.16)$$

совпадающую в целых точках с  $f(x)$ , т. е.

$$\tilde{f}(m) = f(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Одним из основных способов решения данной задачи является построение узловой функции.

**Определение 1.3** Функция  $\tilde{\varphi}(x)$ , являющаяся линейной комбинацией  $\varphi(x - k)$ ,

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \varphi(x - k), \quad (1.18)$$

называется узловой, если для нее выполнена система равенств

$$\tilde{\varphi}(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.19)$$

Для построения  $\tilde{\varphi}(x)$  фактически требуется решить бесконечную систему линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных  $d_k$ :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \varphi(m - k) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.20)$$

Формула (1.20) представляет собой систему типа свертки. Подобные уравнения в непрерывном случае обычно решаются с помощью преобразования Фурье, в дискретном бесконечномерном случае для этого применяются ряды Фурье, а в конечномерном – дискретное преобразование Фурье.



**Определение 1.4** ([29, с. 23], [37, с. 10]) *Ряд Фурье*

$$D(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-ikt}$$

называется символом или маской бесконечной последовательности  $\{d_k\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $\Phi(t)$  – маска, построенная по значениям функции  $\varphi(x)$  в целых узлах, т. е.

$$\Phi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j) e^{-ijt}.$$

Имеет место следующее утверждение [37, с. 168], [56, с. 152]: если ряды Фурье  $D(t)$  и  $\Phi(t)$  сходятся абсолютно, то для них справедливо равенство

$$D(t) \cdot \Phi(t) = 1. \quad (1.21)$$

Таким образом, бесконечная система уравнений (1.20) в этом случае сводится к функциональному равенству (1.21). Тогда для определения коэффициентов  $d_k$  необходимо разложить функцию  $1/\Phi(t)$  в ряд Фурье. Это обстоятельство позволяет не решать напрямую систему уравнений (1.20).

На основании (1.19) решение задачи (1.16), (1.17) теперь легко получить с помощью узловой функции  $\tilde{\varphi}(x)$ :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \cdot \tilde{\varphi}(x - m).$$

Приведем один пример. Пусть  $\chi_{[a,b]}(x)$  – характеристическая функция отрезка  $[a, b]$ . Определим базисные сплайны  $B_n(x)$  с помощью свертки [37, гл. 4]:

$$B_1(x) = \chi_{[0,1]}(x),$$

$$B_n(x) = (B_{n-1} * B_1)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{n-1}(x - t) \cdot B_1(t) dt.$$

Узловая функция  $\tilde{B}_n(x)$ , составленная из линейной комбинации сдвигов  $B_n(x)$  называется фундаментальным сплайном [37, гл. 4]

$$\begin{aligned}\tilde{B}_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot B_n(x - k), \\ \tilde{B}_n(m) &= \delta_{0m}, m \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Маска  $D(t)$  в этом случае вычисляется и может быть выражена через так называемые многочлены Эйлера-Фробениуса [37, гл., 4]. Таким образом, благодаря соотношению (1.21), в ряде случаев задача интерполяции может быть решена аналитически.

Для возможности построения узловой функции (1.18) необходимым является чтобы маска  $\Phi(t)$  не обращалась в нуль и была конечной. В более общем случае, если речь идет не о системах сдвигов, на вопрос о возможности процедуры интерполяции требует серьезного исследования в каждой конкретной ситуации. Поэтому нельзя отдать безоговорочного предпочтения интерполяции по сравнению с другими рассмотренными методами. Тем не менее, как видим, для семейств равномерных сдвигов интерполяция, как и построение биортогональной системы по формуле (1.8), представляется методом более простым в реализации, чем ортогонализация. По этой причине в дальнейшем как основу для построения алгоритмов разложения ортогонализацию мы рассматривать не будем. Исключение составляет глава 4, где будет рассмотрена задача, в которой ортогонализация имеет самостоятельное значение.

## Глава 2

# Системы равномерных сдвигов, порожденные функциями Гаусса и Лоренца

В данной главе рассматриваются теоретические основы аппроксимации функциональных зависимостей с использованием систем равномерных сдвигов, порожденных функциями Гаусса и Лоренца. С помощью замены переменных, задача всегда может быть сведена к разложению по системам целочисленных сдвигов, которые мы и будем рассматривать. Проводится разработка и анализ нескольких способов разложения по указанным системам функций, а также оценка их устойчивости. Дается теоретическая оценка границ применимости разработанных алгоритмов. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [63], [65] и [68].

### 2.1 Узловые функции

Для всех величин, относящихся к функции Гаусса далее используется индекс  $G$ , к функции Лоренца – индекс  $L$ . В данной главе все изучаемые величины рассматриваются как функции, зависящие от параметра  $\sigma > 0$ . В таблице 2.1 для удобства приведены основные используемые обозначения. Для упрощения математических преобразований некото-

рые из них отличаются от применявшихся ранее в главе 1.

Таблица 2.1: Основные обозначения

| Исходная функция<br>$\varphi(x)$                     | Функция Гаусса<br>$\varphi_G(x, \sigma) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ | Функция Лоренца<br>$\varphi_L(x, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+x^2}$ |
|--|--|---|
| Константы Рисса для системы сдвигов $\varphi(x - k)$ | $A_G(\sigma), B_G(\sigma)$   | $A_L(\sigma), B_L(\sigma)$  |
| Коэффициенты $d_k$ ряда (1.18) для узловой функции   | $d_{G,k}(\sigma)$  | $d_{L,k}(\sigma)$   |
| Узловая функция $\tilde{\varphi}(x)$                 | $\tilde{\varphi}_G(x, \sigma)$   | $\tilde{\varphi}_L(x, \sigma)$  |
| Константы Рисса для сдвигов узловой функции          | $\tilde{A}_G(\sigma), \tilde{B}_G(\sigma)$   | $\tilde{A}_L(\sigma), \tilde{B}_L(\sigma)$                                |

Для построения узловой функции необходимо найти коэффициенты  $d_k$  в формуле (1.18). В случае функции Гаусса аналитическое выражение для них приведено в [56, с. 152]:

$$d_{G,k}(\sigma) = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

В настоящей работе получено выражение для  $d_{L,k}$ .

**Теорема 2.1** *Для коэффициентов узловой функции, построенной по системе сдвигов функции Лоренца, справедлива формула*

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(\sigma t)} dt. \quad (2.1)$$

*Доказательство.* Запишем маску  $\Phi_L(t, \sigma)$

$$\Phi_L(t, \sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + k^2} \cdot e^{-ikt}.$$

Для вычисления  $\Phi_L(t, \sigma)$ , применим формулу суммирования Пуассона (1.4). Образ Фурье по переменной  $x$  для функции Лоренца определяется выражением

$$\widehat{\varphi}_L(\xi, \sigma) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\xi|}. \quad (2.2)$$

Положим в формуле (1.4)  $f(x) = \sigma \pi e^{-\sigma|x|}$ . Это дает

$$\sigma \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|x+2\pi k|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + k^2} \cdot e^{ikx}.$$

Отсюда, заменив  $x$  на  $-t$  и пользуясь свойствами модуля, получаем следующее выражение для  $\Phi_L(t, \sigma)$

$$\Phi_L(t, \sigma) = \sigma \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|t+2\pi k|}.$$

Поскольку  $\Phi_L(t, \sigma)$  периодическая функция, раскроем модули, считая, что  $t \in [0, 2\pi]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_L(t, \sigma) &= \sigma \pi \left( \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{\sigma(t+2\pi k)} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sigma(t+2\pi k)} \right) = \\ &= \sigma \pi \left( e^{\sigma t} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sigma 2\pi k} + e^{-\sigma t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sigma 2\pi k} \right). \end{aligned}$$

Получившиеся в последней формуле ряды легко вычисляются как суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий. В результате имеем:

$$\Phi_L(t, \sigma) = \sigma \pi \frac{\operatorname{ch}(\sigma(t - \pi))}{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.3)$$

Так как  $\Phi_L(t, \sigma) > 0$  при всех значениях  $t$ , то на основании формулы (1.21)

$$D_L(t, \sigma) = \frac{1}{\Phi_L(t, \sigma)} = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma \pi \operatorname{ch}(\sigma(t - \pi))} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k}(\sigma) \cdot e^{-ikt}.$$

Отсюда находим

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}{2\sigma\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\operatorname{ch}(\sigma(t-\pi))} dt.$$

Преобразуем последнюю формулу, сделав в интеграле замену переменных  $t - \pi = x$

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi) \cdot e^{ik\pi}}{2\sigma\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikx}}{\operatorname{ch}(\sigma x)} dx = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi) \cdot (-1)^k}{\sigma\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{\operatorname{ch}(\sigma x)} dx.$$

Теорема доказана.

## 2.2 Биортогональные системы

В случае, когда  $\varphi_k(x)$  представляют собой целочисленные сдвиги одной функции, для построения биортогональной системы достаточно найти функцию  $\psi(x)$ , удовлетворяющую соотношению

$$(\varphi_k, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) \cdot \psi^*(x) dx = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Тогда  $\psi_m(x) = \psi(x-m)$  вместе с  $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$  образуют искомую биортогональную систему. Назовем  $\varphi(x)$  базовой функцией, а  $\psi(x)$  – базовой дуальной функцией.

Предположим, что функции  $\varphi(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  образуют систему Рисса. Обозначим через  $H_\varphi$  подпространство  $L_2(\mathbb{R})$ , получающееся при замыкании линейной оболочки этих функций. Прежде всего заметим, что обе рассматриваемые системы сдвигов не являются полными ни при каких  $\sigma$ , поэтому пространство  $L_2(\mathbb{R})$  шире, чем  $H_\varphi$ . Неполнота двух систем следует из наличия функций пространства  $L_2(\mathbb{R})$ , ортогональных указанным системам сдвигов. Приведем примеры таких функций.

1. Семейство функций

$$f(x) = \exp\left(-\frac{\beta x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sin(\pi x(1 + \beta)), \quad (2.5)$$

где  $\beta > 0$  ортогонально сдвигам  $\varphi_G(x - k, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Семейство функций

$$f(x) = \frac{\sigma(s^2 - \sigma^2 - x^2)e^{-(s+\sigma)\pi}}{((s - \sigma)^2 + x^2)((s + \sigma)^2 + x^2)} + \frac{s(s^2 - \sigma^2 - x^2) \cos \pi x - 2s\sigma x \sin \pi x}{((s - \sigma)^2 + x^2)((s + \sigma)^2 + x^2)}, \quad (2.6)$$

где  $s > \sigma$  ортогонально сдвигам  $\varphi_L(x - k, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x-k)^2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Способ построения таких функций, позволяющий получить эти и другие примеры, будет указан в конце данного параграфа.

Для неполных систем базовая дуальная функция определяется, вообще говоря, неоднозначно [16, с. 7]. Если  $\psi(x) \in H_\varphi$ , то обозначим ее как  $\psi^{in}(x)$ , если же  $\psi(x) \notin H_\varphi$ , то используем обозначение  $\psi^{out}(x)$ . Функция  $\psi^{in}(x)$  определяется единственным образом и в образах Фурье для нее справедливо соотношение [37, с. 133], которое уже приводилось в качестве примера биортогональных систем в главе 1 (см. формулу (1.8)):

$$\widehat{\psi}^{in}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2}. \quad (2.7)$$

В случае функции Гаусса для базовой дуальной функции, принадлежащей  $H_\varphi$ , в монографии [56, с. 162] получено соотношение

$$\widehat{\psi}_G^{in}(\xi, \sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \theta_3\left(\frac{\xi}{2}, q\right)}, \quad q = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right).$$

В случае функции Лоренца нами получен следующий результат.

**Теорема 2.2** *Справедливо равенство*

$$\widehat{\psi}_L^{in}(\xi, \sigma) = \frac{2 \operatorname{sh}(2\sigma\pi) e^{-\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}} \operatorname{ch}(2\sigma(\xi \bmod 2\pi - \pi))}. \quad (2.8)$$

*Доказательство.* Применим формулу (2.7). Прежде всего отметим, что ряд в знаменателе (2.7) является периодической функцией по  $\xi$  с периодом  $2\pi$ , поэтому рассмотрим отрезок  $[0, 2\pi]$ . Подставим преобразование Фурье функции Лоренца (2.2) в (2.7)

$$\widehat{\psi}_L^{in}(\xi, \sigma) = \frac{e^{-\sigma|\xi|}}{\pi\sigma\sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma|\xi+2\pi k|}}, \xi \in [0, 2\pi].$$

Ряд в знаменателе вычисляется аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.1, поэтому приведем окончательный результат

$$\widehat{\psi}_L^{in}(\xi, \sigma) = \frac{\operatorname{sh}(2\sigma\pi) e^{-\sigma|\xi|}}{\pi\sigma\sqrt{2\pi} \operatorname{ch}(2\sigma(\xi - \pi))}, \xi \in [0, 2\pi].$$

Продолжая периодически функцию в знаменателе, получим непосредственно формулу (2.8). Теорема доказана.

Для построения  $\psi^{out}(x)$  предлагается следующий прием. Заменяем в формуле (2.4) целое  $k$  действительной переменной  $y$  и рассмотрим функцию

$$\lambda(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) \cdot \psi^*(x) dx. \quad (2.9)$$

При этом требуется, чтобы  $\lambda(k) = \delta_{k0}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Поэтому  $\lambda(y)$  можно выбирать достаточно произвольно и получать при этом различные  $\psi^{out}(x)$ , решая уравнение типа свертки (2.9). Самым простым вариантом является  $\lambda(y) = \operatorname{sinc}(\pi y)$ , поскольку для функции отсчетов  $\operatorname{sinc}(y)$  справедливо представление в виде бесконечного произведения [35, с. 41]

$$\operatorname{sinc}(y) = \frac{\sin y}{y} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2 k^2}\right).$$



Обозначив через  $\psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)$  и  $\psi_{L,n}^{out}(x, \sigma)$  базовые дуальные функции, получающиеся при выборе  $\lambda(y) = \text{sinc}^n(\pi y)$ , приходим к следующему результату.

**Теорема 2.3** *Справедливы формулы*

$$\widehat{\psi}_{G,n}^{out}(\xi, \sigma) = \frac{1}{2\sigma\pi} \exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \cdot B_n\left(\frac{\xi}{2\pi} + \frac{n}{2}\right), n \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

$$\widehat{\psi}_{L,n}^{out}(\xi, \sigma) = \frac{2}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\sigma|\xi|} \cdot B_n\left(\frac{\xi}{2\pi} + \frac{n}{2}\right), n \in \mathbb{N}, \quad (2.11)$$

где  $B_n(x)$  – базисный сплайн порядка  $n$ .

*Доказательство.* Вычислим скалярное произведение

$$(\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - k)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \psi_{G,n}^{out}(x, \sigma) dx.$$

Воспользовавшись соотношением

$$\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)^\wedge(\xi) = \sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)$$

и унитарностью преобразования Фурье (1.2), получим

$$(\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \cdot e^{-ik\xi} \cdot \widehat{\psi}_{G,n}^{out}(\xi, \sigma) d\xi.$$

Подставим в последнюю формулу выражение (2.10) для  $\widehat{\psi}_{G,n}^{out}(\xi, \sigma)$

$$(\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_n\left(\frac{\xi}{2\pi} + \frac{n}{2}\right) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Сделаем замену переменных  $\eta = \xi/2\pi$

$$(\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)) = \int_{-\infty}^{\infty} B_n\left(\eta + \frac{n}{2}\right) e^{-i2\pi k\eta} d\eta.$$

Известно [37, гл. 4], что

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_n \left( \eta + \frac{n}{2} \right) e^{-ix\eta} d\eta = \text{sinc}^n(x/2).$$

Это приводит к соотношению

$$(\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)) = \text{sinc}^n(\pi k) = \delta_{0k}, k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,  $\psi_{G,n}^{out}(x, \sigma)$ , определяемая соотношением (2.10), является базовой дуальной функцией.

Перейдем теперь к случаю функции Лоренца

$$\begin{aligned} (\varphi_L(x - k, \sigma), \psi_{L,n}^{out}(x, \sigma)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x - k)^2} \cdot \psi_{L,n}^{out}(x, \sigma) dx = \\ &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|\xi|} \cdot e^{-ik\xi} \cdot \widehat{\psi}_{L,n}^{out}(\xi, \sigma) d\xi. \end{aligned}$$

Подставив в последнюю формулу выражение (2.11) для  $\widehat{\psi}_{L,n}^{out}(\xi, \sigma)$ , получим

$$(\varphi_L(x - k, \sigma), \psi_{L,n}^{out}(x, \sigma)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_n \left( \frac{\xi}{2\pi} + \frac{n}{2} \right) e^{-ik\xi} d\xi,$$

откуда следует, что

$$(\varphi_L(x - k, \sigma), \psi_{L,n}^{out}(x, \sigma)) = \delta_{0k}, k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема доказана.

Применяя обратное преобразование Фурье, в некоторых случаях можно получить аналитические выражения и для самих  $\psi^{out}(x)$ . Например, для функции Лоренца при  $n = 1$  имеет место равенство

$$\psi_{L,1}^{out}(x, \sigma) = \frac{e^{\sigma\pi}}{\sigma\pi^2} \cdot \frac{\sigma \cos \pi x + x \sin \pi x - \sigma e^{-\sigma\pi}}{\sigma^2 + x^2}.$$

Выбирая  $\lambda(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2s^2}\right) \cdot \text{sinc}(\pi y)$  в случае функции Гаусса и  $\lambda(y) = \frac{s^2}{s^2 + y^2} \cdot \text{sinc}(\pi y)$  в случае функции Лоренца, получим другие семейства базовых дуальных функций, которые мы обозначим через  $\psi_{G,s}^{out}(x, \sigma)$  и  $\psi_{L,s}^{out}(x, \sigma)$  соответственно.

**Теорема 2.4** Пусть  $s > \sigma$ . Тогда справедливы формулы

$$\widehat{\psi}_{G,s}^{out}(\xi, \sigma) = \frac{\exp\left(\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right)}{4\sigma\pi} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi + \pi)}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi - \pi)}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad (2.12)$$

$$\widehat{\psi}_{L,s}^{out}(\xi, \sigma) = \begin{cases} \frac{2e^{\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (1 - e^{-s\pi} \cdot \operatorname{ch}(s\xi)), & |\xi| \leq \pi; \\ \frac{2e^{\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sh}(s\pi) \cdot e^{-s|\xi|}, & |\xi| > \pi, \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $\operatorname{erf}(x)$  – функция ошибок [35, с. 120]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

*Доказательство.* Аналогично доказательству теоремы 2.2 вычислим скалярные произведения базовых дуальных функций и рассматриваемых систем сдвигов, с учетом унитарности преобразования Фурье.

Для сдвигов функции Гаусса имеем

$$\begin{aligned} (\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,s}^{out}(x, \sigma)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - k)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \psi_{G,s}^{out}(x, \sigma) dx = \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right) \cdot e^{-ik\xi} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right)}{4\sigma\pi} \times \\ &\quad \times \left( \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi + \pi)}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi - \pi)}{\sqrt{2}}\right) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi + \pi)}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi - \pi)}{\sqrt{2}}\right) \right) \cdot e^{-ik\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Последняя формула представляет собой преобразование Фурье. Разность двух функций ошибок в подынтегральном выражении удобно записать в виде свертки следующим образом

$$\operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi + \pi)}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi - \pi)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\frac{s(\xi + \pi)}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt - \int_0^{\frac{s(\xi - \pi)}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{s(\xi-\pi)}{\sqrt{2}}}^{\frac{s(\xi+\pi)}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\pi,\pi]} \left( \frac{t\sqrt{2}}{s} - \xi \right) e^{-t^2} dt.$$

После замены переменных  $\frac{t\sqrt{2}}{s} = x$ , с учетом четности характеристической функции  $\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ , последнее выражение приобретает вид

$$s\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi - x) e^{-\frac{s^2 x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \chi_{[-\pi,\pi]}(x) * se^{-\frac{s^2 x^2}{2}} \right) (\xi).$$

Далее воспользуемся свойством преобразования Фурье свертки (1.3)

$$\begin{aligned} & (\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,s}^{out}(x, \sigma)) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{s(\xi + \pi)}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{s(\xi - \pi)}{\sqrt{2}} \right) \right) \cdot e^{-ik\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \chi_{[-\pi,\pi]}(x) * se^{-\frac{s^2 x^2}{2}} \right) (\xi) \cdot e^{-ik\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \chi_{[-\pi,\pi]}(x) \right)^\wedge(k) \cdot \left( se^{-\frac{s^2 x^2}{2}} \right)^\wedge(k). \end{aligned}$$

Известно, что  $\left( \chi_{[-\pi,\pi]}(x) \right)^\wedge(\xi) = \sqrt{2\pi} \operatorname{sinc}(\pi\xi)$ , а  $\left( se^{-\frac{s^2 x^2}{2}} \right)^\wedge(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2s^2}}$ .

Это приводит к соотношению

$$(\varphi_G(x - k, \sigma), \psi_{G,s}^{out}(x, \sigma)) = e^{-\frac{k^2}{2s^2}} \operatorname{sinc}(\pi k) = \delta_{0k}, k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,  $\psi_{G,s}^{out}(x, \sigma)$ , определяемая соотношением (2.12) является базовой дуальной функцией.

Перейдем теперь к случаю функции Лоренца

$$\begin{aligned} (\varphi_L(x - k, \sigma), \psi_{L,s}^{out}(x, \sigma)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x - k)^2} \cdot \psi_{L,s}^{out}(x, \sigma) dx = \\ &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|\xi|} \cdot e^{-ik\xi} \cdot \widehat{\psi}_{L,n}^{out}(\xi, \sigma) d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{-\pi} e^{\sigma\xi} \cdot e^{-ik\xi} \cdot \frac{2e^{-\sigma\xi}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sh}(s\pi) \cdot e^{s\xi} d\xi + \\
&+ \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\sigma|\xi|} \cdot e^{-ik\xi} \cdot \frac{2e^{\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (1 - e^{-s\pi} \cdot \operatorname{ch}(s\xi)) d\xi + \\
&+ \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\pi}^{\infty} e^{-\sigma\xi} \cdot e^{-ik\xi} \cdot \frac{2e^{\sigma\xi}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sh}(s\pi) \cdot e^{-s\xi} d\xi = \\
&= \frac{\operatorname{sh}(s\pi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\pi} e^{-ik\xi+s\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\xi} (1 - e^{-s\pi} \cdot \operatorname{ch}(s\xi)) d\xi + \\
&+ \frac{\operatorname{sh}(s\pi)}{2\pi} \int_{\pi}^{\infty} e^{-ik\xi-s\xi} d\xi = \frac{\operatorname{sh}(s\pi)}{2\pi(s-ik)} e^{ik\pi-s\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\xi} d\xi - \\
&- \frac{e^{-s\pi}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\xi} (e^{s\xi} + e^{-s\xi}) d\xi + \frac{\operatorname{sh}(s\pi)}{2\pi(s+ik)} e^{-ik\pi-s\pi} = \\
&= \frac{(e^{s\pi} - e^{-s\pi})(-1)^k}{4\pi(s-ik)} e^{-s\pi} + \delta_{0k} - \frac{e^{-s\pi}}{4\pi} \left( \frac{e^{s\pi-ik\pi}}{s-ik} + \frac{e^{-s\pi-ik\pi}}{-s-ik} \right) + \\
&+ \frac{e^{-s\pi}}{4\pi} \left( \frac{e^{-s\pi+ik\pi}}{s-ik} + \frac{e^{s\pi+ik\pi}}{-s-ik} \right) + \frac{(e^{s\pi} - e^{-s\pi})(-1)^k}{4\pi(s+ik)} e^{-s\pi}.
\end{aligned}$$

После группировки все слагаемые кроме  $\delta_{0k}$  уничтожаются и окончательно получается выражение

$$(\varphi_L(x-k, \sigma), \psi_{L,s}^{out}(x, \sigma)) = \delta_{0k}, k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема доказана.

Примеры функций ортогональных исходным системам сдвигов могут быть получены по этой же методике. Для этого нужно выбрать справа в (2.9) функцию  $\lambda(y)$ , которая обращается в нуль при всех целых значениях  $y$ . Так, например, если положить в формуле (2.9)

$$\lambda(y) = \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sin(\pi y),$$

причем  $\alpha = \frac{\beta+1}{\beta}$ , то с точностью до постоянного множителя получается функция (2.5). В примере для функции Лоренца (2.6), было взято

$$\lambda(y) = \frac{s^2}{s^2 + y^2} \sin(\pi y), s > \sigma.$$

Наличие явных формул для биортогональных систем позволяет получать более эффективные вычислительные алгоритмы. Неоднозначность выбора базовой дуальной функции является характерной чертой любого конечномерного приближения и следует, на наш взгляд, использовать это обстоятельство, оптимизируя выбор параметров под конкретную задачу. Для двух рассматриваемых классов функций формулы (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) предоставляют достаточно широкий выбор.

Особую роль играет параметр  $\sigma$ . С его ростом наблюдается потеря устойчивости разложения как по системе сдвигов функции Гаусса, так и функции Лоренца. Причины этого и количественные оценки неустойчивости будут рассмотрены в следующем параграфе, а пока продемонстрируем сам эффект на примере формулы (2.10) при  $n = 1$ :

$$\widehat{\psi}_{G,1}^{out}(\xi, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi). \quad (2.14)$$

Из-за наличия в правой части (2.14) характеристической функции отрезка  $[-\pi, \pi]$  получается, что  $\widehat{\psi}_{G,1}^{out}(\xi)$  достигает максимума при  $\xi = \pi$ . Уже при  $\sigma = 2$  значение  $\exp\left(\frac{\sigma^2\pi^2}{2}\right)$  составляет величину порядка  $10^8$ , а при  $\sigma = 3$  – порядка  $10^{19}$ . Следовательно, наблюдается усиление высокочастотных компонент, что и влечет за собой неустойчивость. Если вернуться в пространство исходных функций (выполнить обратное преобразование Фурье), то это означает, что базовая дуальная функция будет сильно осциллирующей, что делает неточным численное нахождение интегралов с ее участием, необходимых для вычисления скалярных произведений (1.7).

## 2.3 Константы Рисса

В статье [13] показано, что целочисленные сдвиги функции Гаусса образуют систему Рисса с константами

$$A_G(\sigma) = \sigma\sqrt{\pi}\theta_3\left(\frac{\pi}{2}, q\right), \quad B_G(\sigma) = \sigma\sqrt{\pi}\theta_3(0, q), \quad (2.15)$$

где  $q = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right)$ .

В настоящей работе получены явные выражения для констант Рисса в случае функции Лоренца.

**Теорема 2.5** *Целочисленные сдвиги функции Лоренца образуют систему Рисса с константами*

$$A_L(\sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2}{\text{sh}(2\sigma\pi)}, \quad B_L(\sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2 \text{ch}(2\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)}. \quad (2.16)$$

*Доказательство.* Подставляя образ Фурье функции Лоренца (2.2) в формулу (1.15), получим

$$P_L(\xi, \sigma) = \sigma^2\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma|\xi+2\pi k|}.$$

Разбив, как и при доказательстве теоремы 2.1, последний ряд в сумму двух геометрических прогрессий, получим

$$P_L(\xi, \sigma) = \sigma^2\pi^2 \left( \frac{e^{2\sigma\xi-4\sigma\pi}}{1 - e^{-4\sigma\pi}} + \frac{e^{-2\sigma\xi}}{1 - e^{-4\sigma\pi}} \right) = \frac{\sigma^2\pi^2 \text{ch}(2\sigma(\xi - \pi))}{\text{sh}(2\sigma\pi)}.$$

Минимальное значение  $\text{ch}(2\sigma(\xi - \pi))$  достигается при  $\xi = \pi$ , а максимальное – при  $\xi = 0$  и  $\xi = 2\pi$ . Следовательно

$$A_L(\sigma) = P_L(\pi, \sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2}{\text{sh}(2\sigma\pi)}, \quad B_L(\sigma) = P_L(0, \sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2 \text{ch}(2\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)}.$$

Теорема доказана.

Численные значения констант Рисса для обоих случаев представлены в таблице 2.2. Все значащие цифры – верные (с точностью до округления).

Таблица 2.2: Значения констант Рисса для систем сдвигов, порожденных функцией Гаусса и функцией Лоренца

| $\sigma$ | $A_G(\sigma)$          | $B_G(\sigma)$ | $B_G(\sigma)/A_G(\sigma)$ | $A_L(\sigma)$         | $B_L(\sigma)$ | $B_L(\sigma)/A_L(\sigma)$ |
|----------|------------------------|---------------|---------------------------|-----------------------|---------------|---------------------------|
| 0.2      | 0.353                  | 0.356         | 1.01                      | 0.245                 | 0.464         | 1.90                      |
| 0.4      | 0.415                  | 1.009         | 2.43                      | 0.258                 | 1.600         | 6.21                      |
| 0.6      | 0.130                  | 2.262         | 17.46                     | 0.164                 | 3.557         | 21.70                     |
| 1.0      | $6.45 \cdot 10^{-4}$   | 6.283         | $9.67 \cdot 10^3$         | 0.037                 | 9.870         | 267.75                    |
| 2.0      | $3.60 \cdot 10^{-16}$  | 25.13         | $6.98 \cdot 10^{16}$      | $2.75 \cdot 10^{-4}$  | 39.48         | $1.43 \cdot 10^5$         |
| 3.0      | $3.00 \cdot 10^{-37}$  | 56.55         | $1.88 \cdot 10^{38}$      | $1.16 \cdot 10^{-6}$  | 88.83         | $7.68 \cdot 10^7$         |
| 4.0      | $5.28 \cdot 10^{-67}$  | 100.53        | $1.91 \cdot 10^{68}$      | $3.84 \cdot 10^{-9}$  | 157.91        | $4.11 \cdot 10^{10}$      |
| 5.0      | $2.18 \cdot 10^{-105}$ | 157.08        | $7.19 \cdot 10^{106}$     | $1.12 \cdot 10^{-11}$ | 246.74        | $2.20 \cdot 10^{13}$      |

## 2.4 Предельные соотношения

Ключевой особенностью рассматриваемых систем является неограниченный рост отношения констант Рисса  $B/A$  с увеличением параметра  $\sigma$ . Для сдвигов функции Лоренца это видно непосредственно из формул (2.16). Для системы сдвигов функции Гаусса это следует из формул (2.15) и того факта, что  $\theta_3(\pi/2, q) \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow 1$  [22]. Поэтому, при больших параметрах  $\sigma$  обе системы становятся неустойчивыми. Этому факту можно дать следующую интерпретацию. Дело в том, что с ростом ширины близкие пики становятся практически неотличимыми друг от друга. Поэтому соответствующие системы сдвигов становятся близкими к линейно зависимым. Это означает, что в формуле (1.13) можно составить линейные комбинации  $\sum_k c_k \varphi_k(x)$  сколь угодно близкие к нулю, но с ненулевыми коэффициентами  $c_k$ . Это влечет за собой малость нижней константы Рисса  $A$ , а, следовательно, рост отношения  $B/A$ .

Ввиду указанного обстоятельства, в статье [13] было предложено использовать системы сдвигов узловой функции, вместо исходной системы сдвигов. Подпространства, порожденные сдвигами узловой функции, совпадают с подпространствами, порожденными сдвигами исходной



функции, но константы Рисса отличаются, поскольку базисы разные. В статьях [13], [68] для случая функции Гаусса было показана, что при увеличении  $\sigma$  отношение констант Рисса стремится в пределе не к бесконечности, а к 2:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{A}_G(\sigma) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{B}_G(\sigma) = 1.$$

Мы докажем аналогичный результат для функции Лоренца.

**Теорема 2.6** *Справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{A}_L(\sigma) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{B}_L(\sigma) = 1.$$

*Доказательство.* Сначала найдем образ Фурье узловой функции:

$$\widehat{\tilde{\varphi}}_L(\xi, \sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k} \cdot \widehat{\varphi}_L(\xi, \sigma) e^{-ik\xi} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\xi|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k}(\sigma) e^{-ik\xi}.$$

Следовательно

$$\widehat{\tilde{\varphi}}_L(\xi, \sigma) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\xi|} \cdot D_L(\xi, \sigma) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\xi|} \frac{1}{\Phi_L(\xi, \sigma)}. \quad (2.17)$$

Вычислим  $\tilde{P}_L(\xi, \sigma)$  с помощью (1.15):

$$\tilde{P}_L(\xi, \sigma) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\xi+2\pi k|}}{\Phi_L(\xi + 2\pi k, \sigma)} \right|^2 = \sigma^2 \pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\sigma|\xi+2\pi k|}}{|\Phi_L(\xi + 2\pi k, \sigma)|^2}.$$

В силу периодичности  $\Phi_L(\xi, \sigma)$  и с учетом (2.3) получим:

$$\tilde{P}_L(\xi, \sigma) = \frac{\sigma^2 \pi^2}{|\Phi_L(\xi, \sigma)|^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma|\xi+2\pi k|} = \frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \frac{\text{ch}(2\sigma(\xi - \pi))}{\text{ch}^2(\sigma(\xi - \pi))}. \quad (2.18)$$

Для нахождения констант Рисса необходимо теперь найти максимум и минимум полученной функции на отрезке  $\xi \in [0, 2\pi]$ . Преобразуем последнее выражение:

$$\frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \frac{\text{ch}(2\sigma(\xi - \pi))}{\text{ch}^2(\sigma(\xi - \pi))} = \frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \frac{2 \text{ch}^2(\sigma(\xi - \pi)) - 1}{\text{ch}^2(\sigma(\xi - \pi))} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \left( 2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\sigma(\xi - \pi))} \right).$$

Полученная функция минимальна при  $\xi = \pi$  и максимальна при  $\xi = 0$  или  $\xi = 2\pi$ . Таким образом, получаем

$$\tilde{A}_L(\sigma) = \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}, \quad \tilde{B}_L(\sigma) = \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)} \left( 2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\sigma\pi)} \right).$$

Осталось перейти к пределу при  $\sigma \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{A}_L(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}{2 \operatorname{ch}(\sigma\pi)} = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{th}(\sigma\pi)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{B}_L(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)} \right) \cdot \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\sigma\pi)} \right) = 1.$$

Соответственно, предел отношения верхней константы Рисса к нижней для узловых функций равен 2. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь поведение самих узловых функций при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Известно [57], что в случае функции Гаусса

$$\tilde{\varphi}_G(x, \sigma) \xrightarrow[\sigma \rightarrow \infty]{L_2(\mathbb{R})} \operatorname{sinc}(\pi x).$$

Нами установлено аналогичное утверждение и для функции Лоренца.

**Теорема 2.7** *Справедливо предельное соотношение*

$$\tilde{\varphi}_L(x, \sigma) \xrightarrow[\sigma \rightarrow +\infty]{L_2(\mathbb{R})} \operatorname{sinc}(\pi x).$$

*Доказательство.* Так как преобразование Фурье (1.1) унитарно в  $L_2(\mathbb{R})$ , а образ Фурье функции  $\operatorname{sinc}(\pi x)$  равен  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$ , где  $\chi_{[a, b]}(\xi)$  – характеристическая функция отрезка  $[a, b]$ , то доказательство теоремы удобно проводить в образах Фурье. Согласно равенству Парсеваля и формуле (2.17)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_L(x, \sigma) - \operatorname{sinc}(\pi x)\|_{L_2}^2 &= \|\widehat{\tilde{\varphi}_L}(\xi, \sigma) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)\|_{L_2}^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\xi|}}{\Phi_L(\xi, \sigma)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Возведем подынтегральное выражение в квадрат. Обозначим интеграл (2.19) через  $I$  и разобьем его на три слагаемых:  $I = I_1(\sigma) - 2I_2(\sigma) + I_3(\sigma)$ , где

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \frac{\sigma^2 \pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{-\sigma|\xi|}}{\Phi_L(\xi, \sigma)} \right)^2 d\xi; \\ I_2(\sigma) &= \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|\xi|}}{\Phi_L(\xi, \sigma)} \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) d\xi; \\ I_3(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)|^2 d\xi = 1. \end{aligned}$$

Для вычисления  $I_1(\sigma)$  разобьем  $\mathbb{R}$  на отрезки  $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ :

$$I_1(\sigma) = \frac{\sigma^2 \pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-2\sigma|\xi|}}{(\Phi_L(\xi, \sigma))^2} d\xi.$$

В каждом из интегралов сделаем замену переменных  $\xi \rightarrow \xi - 2\pi n$ . С учетом того, что знаменатель является  $2\pi$ -периодической функцией, получим

$$I_1(\sigma) = \frac{\sigma^2 \pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2\sigma|\xi+2\pi n|}}{(\Phi_L(\xi, \sigma))^2} d\xi.$$

Так как функция в знаменателе  $\Phi_L(\xi, \sigma)$  непрерывна и строго положительна, а числитель экспоненциально убывает, то операции суммирования и интегрирования можно поменять местами. Получающуюся бесконечную сумму мы уже вычисляли в пункте 3.1 (см. формулу (2.18)):

$$I_1(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{\text{ch}(2\sigma(\xi - \pi))}{\text{ch}^2(\sigma(\xi - \pi))} d\xi. \quad (2.20)$$

Интеграл (2.20) с использованием формулы для гиперболического косинуса двойного угла вычисляется аналитически. Приведем окончательный результат:

$$I_1(\sigma) = \left( 1 - \frac{1}{2\sigma\pi} \cdot \text{th}(\sigma\pi) \right) \cdot \text{th}(\sigma\pi).$$

Поскольку  $\text{th}(\sigma\pi) \rightarrow 1$  при  $\sigma \rightarrow +\infty$ , то  $I_1(\sigma) \rightarrow 1$ .

Осталось рассмотреть слагаемое  $I_2(\sigma)$ . Пределы интегрирования здесь становятся конечными из-за наличия множителя  $\chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$ . Кроме того, подынтегральная функция четная, поэтому

$$I_2(\sigma) = \sigma \int_0^{\pi} \frac{e^{-\sigma\xi}}{\Phi_L(\xi, \sigma)} d\xi = \frac{\text{sh}(\sigma\pi)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\sigma\xi}}{\text{ch}(\sigma(\xi - \pi))} d\xi. \quad (2.21)$$

Интеграл (2.21) также легко вычисляется аналитически:

$$I_2(\sigma) = (1 - e^{-2\sigma\pi}) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2\sigma\pi} \ln \left( \frac{1 + e^{-2\sigma\pi}}{2} \right) \right). \quad (2.22)$$

Оба сомножителя в (2.22) стремятся к 1 при  $\sigma \rightarrow +\infty$ , следовательно, и  $I_2(\sigma) \rightarrow 1$ . Таким образом, окончательно получаем:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \|\tilde{\varphi}_L(x, \sigma) - \text{sinc}(\pi x)\|_{L_2}^2 = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} I_1(\sigma) - 2 \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} I_2(\sigma) + \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} I_3(\sigma) = 0.$$

Теорема доказана.

Функция отсчетов порождает ортонормированную систему целочисленных сдвигов. Следовательно, в результате оказывается, что предел нижней константы Рисса для обеих изучаемых узловых функций не равен нижней константе от предельной функции.

## 2.5 Теоретический анализ устойчивости методов

Как уже говорилось выше, у системы сдвигов функции Гаусса наблюдается очень быстрое убывание нижней константы Рисса и, следовательно, быстрый рост отношения этих констант  $B/A$ . Таким образом, система целочисленных сдвигов функции Гаусса с ростом параметра  $\sigma$  становится неустойчивой. Поясним, что это означает на практике. Для надежного определения параметров пика в исследуемой зависимости частота дискретизации выбирается так, чтобы на одном пике было порядка 10–20 отсчетов. Следовательно, характерной является ситуация, когда  $\sigma = 5$  или более. Как видно из таблицы 2.2, отношение констант

Рисса для  $\sigma = 5$  равно  $7.19 \cdot 10^{106}$ . Отсюда следует, что из сдвигов функции Гаусса с очень большими коэффициентами, например порядка  $10^{10}$ , можно составить функцию, с практической точки зрения неотличимую от шума. Другими словами, система функций Гаусса становится близкой к линейно зависимой. Поэтому, ввиду того в реальных сигналах и спектрах всегда присутствует некоторая погрешность, возникает неоднозначность, а именно: исходный сигнал в пределах экспериментальной погрешности можно представить несколькими существенно различными линейными комбинациями сдвигов функции Гаусса. Отсюда можно сделать вывод, что без дополнительных предположений коэффициентам разложения при отдельных гауссовых функциях нельзя придать какой-либо физический смысл. Приемлемыми с этой точки зрения являются значения  $\sigma < 1.5$ . Чтобы добиться практически значимых значений  $\sigma = 5$  или более, необходимо модифицировать методы разложения.

Перейдем к анализу устойчивости функции Лоренца. Как видно из таблицы 2.2, отношение  $B/A$  также увеличивается с ростом  $\sigma$ , но не так быстро, как было в случае системы гауссовых сдвигов. Например, при  $\sigma = 5$ ,  $B/A = 2.20 \cdot 10^{13}$  для системы лоренцевых сдвигов,  $B/A = 7.19 \cdot 10^{106}$  для системы гауссовых сдвигов. Таким образом, разложение по системе сдвигов функции Лоренца можно проводить до несколько больших  $\sigma$  – порядка 6-7, т. е. имеется большой запас устойчивости, чем у сдвигов функции Гаусса. Поэтому для моделирования широких пиков более эффективной в ряде задач может оказаться функция Лоренца.

## Глава 3

# Вычислительные особенности аппроксимации с помощью функций Гаусса и Лоренца

Глава посвящена созданию и анализу алгоритмов аппроксимации функциональных зависимостей на основе математического аппарата, разработанного во второй главе. Производятся вычислительные эксперименты с тестовыми функциями, дается практическая оценка устойчивости алгоритмов. Также рассмотрены некоторые модификации, рассмотренных во второй главе семейств функций. Основные результаты этой главы опубликованы в статьях [64], [66] и [67].

### 3.1 Построение узловых функций для систем равномерных сдвигов

В данном параграфе будет рассмотрена система сдвигов функции Лоренца, поскольку случай функции Гаусса детально изучался во многих других работах (см. например [12], [55]).

Как уже говорилось ранее, узловая функция (1.18) является основным инструментом для интерполяции. Во второй главе нами было получено выражение в виде интеграла (2.1) для коэффициентов узловой функции

$d_{L,k}(\sigma)$ . Коэффициенты  $d_{L,k}(\sigma)$  легко найти с помощью квадратурных формул. Несколько значений  $d_{L,k}(\sigma)$  при различных  $\sigma$  приведено в таблице 3.1. Все значащие цифры верные (с точностью до округления).

Таблица 3.1: Значения коэффициентов  $d_{L,k}(\sigma)$  узловой функции, порожденной системой сдвигов функции Лоренца

| Параметр $\sigma$ | $d_0$             | $d_1$              | $d_{10}$              |
|-------------------|-------------------|--------------------|-----------------------|
| 0.5               | 1.08              | -0.200             | $-8.52 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.0               | 1.74              | -0.783             | $-9.96 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.5               | 3.89              | -2.49              | $-7.68 \cdot 10^{-4}$ |
| 2.0               | 10.6              | -8.06              | $7.30 \cdot 10^{-3}$  |
| 2.5               | 32.8              | -27.3              | 0.122                 |
| 3.0               | 110               | -96.1              | 1.17                  |
| 5.0               | $2.11 \cdot 10^4$ | $-2.01 \cdot 10^4$ | $1.82 \cdot 10^3$     |
| 7.0               | $5.77 \cdot 10^6$ | $-5.63 \cdot 10^6$ | $1.21 \cdot 10^6$     |

Как видно из таблицы 3.1, с ростом  $\sigma$  возрастают и коэффициенты узловой функции. Значения становятся большими по абсолютной величине и медленнее убывают при увеличении их порядкового номера по сравнению со случаем, когда, например,  $\sigma = 0.5$ . По этой причине ряды для узловой функции  $\tilde{\varphi}_L(x, \sigma)$  и интерполирующей функции  $\tilde{f}(x)$  будут сходиться медленно и для устойчивых вычислений требуется больше коэффициентов, чем при  $\sigma = 0.5$ . Как результат, происходит потеря точности интерполяционной формулы (1.16). Этим и обусловлена теоретическая и практическая граница устойчивости метода.

Отметим, что расчет коэффициентов  $d_{L,k}(\sigma)$  также параллельно проводился авторами статьи [23] при помощи дискретного преобразования Фурье. Численные результаты с хорошей точностью согласуются. Также интересно отметить, что в работе [23] были открыты многие другие важные закономерности в поведении коэффициентов  $d_{L,k}(\sigma)$ , которые отличаются от свойств коэффициентов узловой функции на базе сдвигов функции Гаусса, т. е. эти системы сдвигов все же являются не полностью

аналогичными.

На рис. 3.1 изображен график узловой функции  $\tilde{\psi}_L(x, \sigma)$ , при  $\sigma = 2$ . На следующем рис. 3.2 показано, что при  $\sigma = 4$  узловая функция уже практически не отличается от функции отсчетов  $\text{sinc}(\pi x)$  (изображена пунктиром) в полном соответствии с доказанной нами в параграфе 2.4 теоремой 2.7.

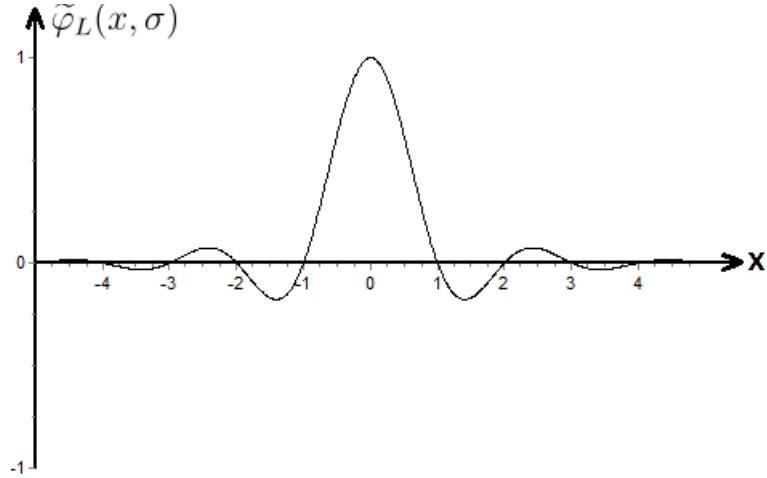


Рис. 3.1: График узловой функции, порожденной системой сдвигов функции Лоренца, при  $\sigma = 2$

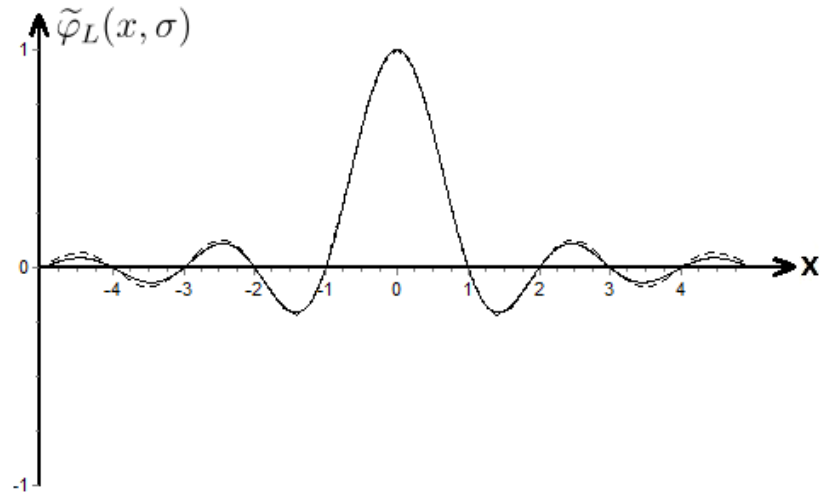


Рис. 3.2: Графики узловой функции (сплошная линия), порожденной системой сдвигов функции Лоренца, при  $\sigma = 4$  и функции отсчетов  $\text{sinc}(\pi x)$  (пунктирная линия)



## 3.2 Применение интерполяционного метода

Структура предлагаемого алгоритма будет выглядеть следующим образом. Пусть имеется некоторая функция  $f(x)$ , которая состоит из суперпозиции  $r$  функций Лоренца с положениями  $m_k$ , амплитудами  $A_k$ , а также аддитивного шума  $\varepsilon(x)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^r A_k \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x - m_k)^2} + \varepsilon(x). \quad (3.1)$$

Входными данными для алгоритма будут значения исследуемой функции на равномерной сетке точек  $f(jh)$ ,  $j = -N, \dots, 0, 1, \dots, N$ . Шаг дискретной сетки отсчетов  $h$  здесь и далее, не ограничивая общности, примем в качестве единицы измерения, поэтому вначале следует провести пересчет значений входной функциональной зависимости в безразмерных величинах  $x/h$ . Затем производится выбор параметра характерной ширины пиков  $\sigma$ . В первом приближении  $\sigma$  выбирается произвольно.

По формуле (2.1)

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int_0^\pi \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(\sigma t)} dt, \quad k = -M, -M + 1, \dots, 0, 1, \dots, M.$$

рассчитываются коэффициенты узловой функции, соответствующие выбранному  $\sigma$ . В силу очевидного свойства  $d_{L,-k}(\sigma) = d_{L,k}(\sigma)$ , вычисления можно проводить только для  $k = 0, 1, \dots, M$ . Необходимое количество  $2M + 1$  коэффициентов зависит от величины  $\sigma$  и выбирается автоматически так, чтобы последний рассчитанный коэффициент  $d_{L,M}(\sigma)$  по модулю был меньше некоторой пороговой величины  $d_{limit} > 0$ , которая входит в настраиваемые параметры алгоритма.

С помощью коэффициентов узловой функции  $d_{L,k}(\sigma)$  и  $f(j)$  вычисляются коэффициенты интерполяции  $\tilde{f}_j$

$$\tilde{f}_j = \sum_{k=j-N}^{j+N} d_{L,k}(\sigma) f(j-k), \quad j = -N - M, \dots, 0, 1, \dots, N + M.$$

Если индекс  $k$  в последней формуле выходит за пределы отрезка  $[-M, M]$ , то  $d_{L,k}(\sigma)$  полагается равным нулю. Затем строится интерполирующая функция (1.16)

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=-N-M}^{N+M} \tilde{f}_j \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x - j)^2}.$$

После проведенных расчетов происходит оценка качества восстановления исходного сигнала  $f(x)$ . Делается это путем визуального контроля, а также рассчитывается среднеквадратичное отклонение :

$$CKO^2 = \frac{\sum_{k=-N}^N |\tilde{f}(k) - f(k)|^2}{2 * N + 1}.$$

Для величины

$$\gamma = \frac{CKO}{f_{max}}, f_{max} = \max(f(k)),$$

в параметрах алгоритма можно установить определенное пороговое значение  $\gamma_{limit}$ , которое она не должна превышать. Если качество восстановления исследуемой функции в соответствии с установленными критериями по каким-либо причинам неудовлетворительное, необходимо вернуться к выбору параметра  $\sigma$ , где задается новое значение  $\sigma$ .

Выходными данными будет набор коэффициентов  $\tilde{f}_j$ , обеспечивших требуемое качество восстановления. Если этого достигнуть не удастся в пределах допустимого диапазона  $\sigma$  (напомним, что по теоретическим оценкам при  $\sigma > 7$  теряется устойчивость вычислений), то слишком велик уровень шума и требуются какие-либо дополнительные меры.

Перейдем к вычислительным экспериментам. В отсутствие шума алгоритм обеспечивает хорошее качество восстановления вплоть до  $\sigma = 7$ : визуально исходная и восстановленная функции неразличимы, параметр  $\gamma$  порядка  $10^{-5}$ ). При  $\sigma > 7$ , как и предполагалось, алгоритм работает неустойчиво. На рис. 3.3 приведен пример работы алгоритма. На графике одновременно изображены исходная и восстановленная функции, внизу изображена их разность. Параметр  $\gamma$  составил величину  $\sim 10^{-6}$ ,

т. е. погрешность менее 0.01 % от максимального значения функции. Исходная зависимость на рис. 3.3 состоит из 3 функций Лоренца с шириной  $\sigma = 5$ , расположенных в узлах сетки. В таблице 3.2 приведены положения и амплитуды исходных пиков и найденных с помощью алгоритма.

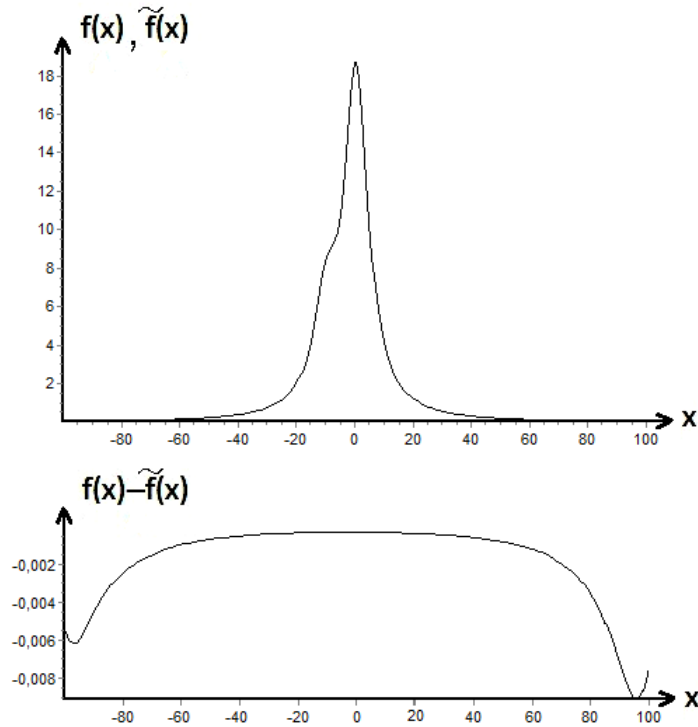


Рис. 3.3: Графики исходной (сплошная линия), восстановленной функции (пунктирная линия) и погрешности (нижний график) в отсутствие шума

Как видно из таблицы 3.2 амплитуды и положения пиков найдены достаточно надежно. Посторонние пики, являющиеся следствием погрешности вычислений, имеют амплитуды порядка  $10^{-5}$  и легко отличимы от истинных пиков.

Ситуация меняется, когда пики расположены не в узлах сетки. Для примера рассмотрим функцию, состоящую всего из одного пика амплитудой  $A = 10$  с  $\sigma = 5$ , расположенного в точке 0.5. Применение интерполяционного алгоритма дает картину, изображенную на рис. 3.4. В таблице 3.3 приведены значения рассчитанных амплитуд вблизи расположения истинного пика.

Таблица 3.2: Исходные амплитуды пиков, расположенных в узлах сетки, и амплитуды, рассчитанные с помощью интерполяционного алгоритма

| Номер отсчета | Исходная амплитуда | Рассчитанная амплитуда |
|---------------|--------------------|------------------------|
| -11           | 0                  | $1.03 \cdot 10^{-5}$   |
| -10           | 5                  | 5.00                   |
| -9            | 0                  | $1.02 \cdot 10^{-5}$   |
| -8            | 0                  | $1.01 \cdot 10^{-5}$   |
| -7            | 0                  | $1.01 \cdot 10^{-5}$   |
| -6            | 0                  | $1.01 \cdot 10^{-5}$   |
| -5            | 0                  | $1.01 \cdot 10^{-5}$   |
| -4            | 0                  | $1.02 \cdot 10^{-5}$   |
| -3            | 0                  | $1.03 \cdot 10^{-5}$   |
| -2            | 0                  | $1.04 \cdot 10^{-5}$   |
| -1            | 0                  | $1.06 \cdot 10^{-5}$   |
| 0             | 10                 | 8.00                   |
| 1             | 8                  | 10.0                   |
| 2             | 0                  | $1.06 \cdot 10^{-5}$   |

Таблица 3.3: Амплитуды, рассчитанные с помощью интерполяционного алгоритма, в ситуации, когда функция состоит из одного пика, расположенного между отсчетов

| Номер отсчета | Рассчитанная амплитуда |
|---------------|------------------------|
| -4            | 0.517                  |
| -3            | -0.749                 |
| -2            | 1.15                   |
| -1            | -2.05                  |
| 0             | 6.34                   |
| 1             | 6.34                   |
| 2             | -2.05                  |
| 3             | 1.15                   |
| 4             | -0.749                 |

Качество восстановления по-прежнему является хорошим (параметр  $\gamma \approx 3.8 \cdot 10^{-6}$ ), однако, как видно из таблицы 3.3, определить место-

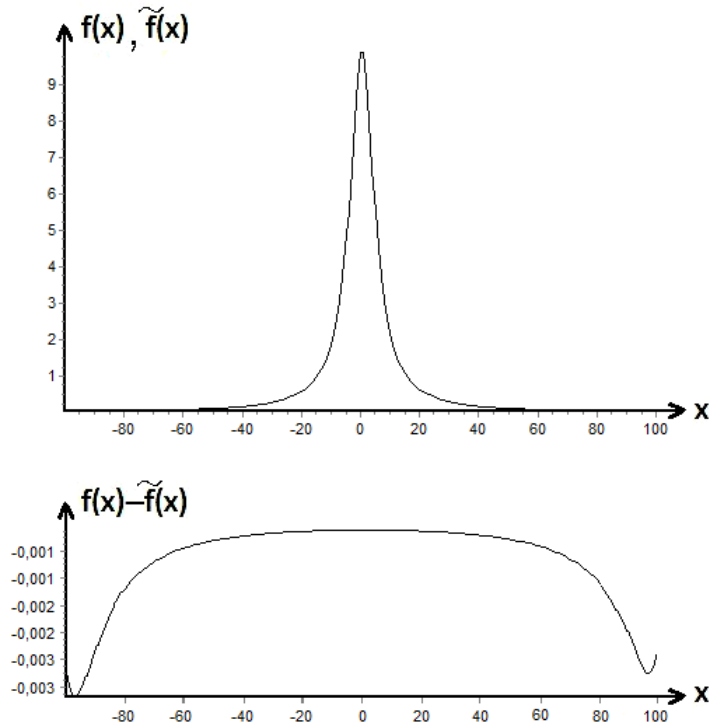


Рис. 3.4: Графики исходной (сплошная линия), восстановленной функции (пунктирная линия) и погрешности (нижний график) в отсутствие шума

положение и амплитуду пика с помощью алгоритма не удается. Таким образом, предложенный интерполяционный алгоритм обеспечивает надежный синтез, но для анализа реальных функциональных зависимостей является неприменимым, так как способен распознавать только пики, находящиеся в узлах сетки.

В заключении оценим эффективность синтеза при наличии шума. Для этого к функции, состоящей из нескольких функций Лоренца добавляется случайный шум различной амплитуды. Как показали расчеты, максимальный уровень шума, при котором алгоритм продолжает работать стабильно ( $\gamma \sim 0,001$ ), составляет 10 % относительно амплитуды исходной функциональной зависимости. Значения  $\sigma$  при этом становятся ограничены величиной 4. На рис. 3.5 представлен пример работы алгоритма в этом предельном случае.

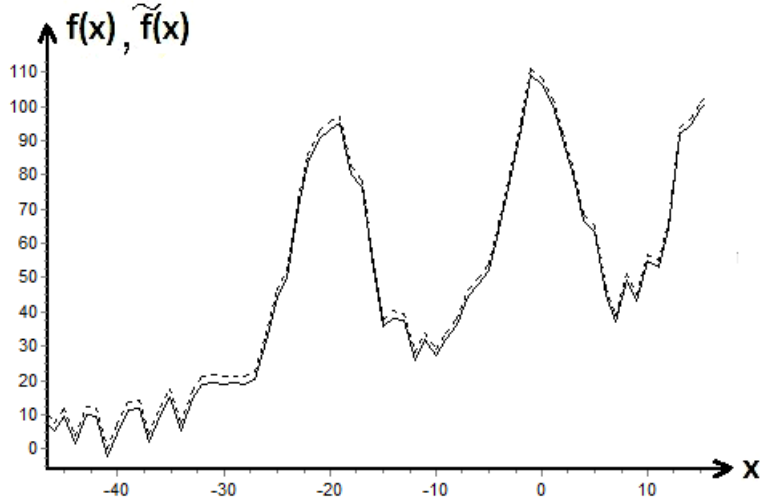


Рис. 3.5: Графики исходной (сплошная линия) и восстановленной функции (пунктирная линия) в присутствии 10 % – го случайного шума

### 3.3 Использование биортогональных систем

На входе, как и в случае с интерполяционным алгоритмом, имеется некоторая дискретная зависимость, содержащая  $2N + 1$  точек, которая состоит из нескольких функций Лоренца и шума  $\varepsilon(x)$  (см. формулу (3.1)).

Вначале также следует произвести пересчет входных значений в безразмерных величинах. Затем задается параметр характерной ширины пиков  $\sigma$ . Выбирается функция, определяемая одним из соотношений (2.8), (2.11), (2.13) или др., сдвиги которой вместе со сдвигами функции Лоренца образуют биортогональную систему, задаются их параметры.

С помощью квадратурных формул рассчитываются скалярные произведения

$$\tilde{A}_k = (f(x), \psi(x - k)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi^*(x - k)dx,$$

где  $\psi(x)$  – выбранная ранее базовая дуальная функция. Численное интегрирование ограничено отрезком  $[-M, M]$ , где  $M$  удобно выбрать на-

туральным числом. Затем строится синтезированная зависимость

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-N+M}^{N-M} \tilde{A}_k \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x - k)^2}.$$

После синтеза происходит оценка качества восстановления исходной зависимости  $f(x)$ . Делается это также, как и при интерполяции. Если качество восстановления неудовлетворительное возвращаемся к этапу выбора параметра  $\sigma$ , где используем другие параметры, либо завершаем алгоритм. Выходными данными будет набор коэффициентов  $\tilde{A}_k$ , обеспечивших требуемое качество восстановления сигнала.

Перейдем к анализу результатов расчетов. Все используемые биортогональные системы показали схожее поведение, поэтому для примера остановимся на базовой дуальной функции (2.2)

$$\psi_{L,1}^{out}(x, \sigma) = \frac{e^{\sigma\pi}}{\sigma\pi^2} \cdot \frac{\sigma \cos \pi x + x \sin \pi x - \sigma e^{-\sigma\pi}}{\sigma^2 + x^2}.$$

Алгоритм биортогональных систем обеспечивает хорошее качество восстановления в отсутствие шума при  $\sigma < 5$ , т. е. в этой ситуации несколько уступает алгоритму интерполяции. Однако, при добавлении 10 %-го случайного шума, граница  $\sigma = 5$  не понижается. На рис. 3.6 представлен график исходной и восстановленной зависимости как раз в этом случае ( $\gamma = 6.11 \cdot 10^{-4}$ ). Таким образом данный алгоритм менее чувствителен к случайному шуму, чем интерполяционный.

Алгоритм позволяет решить задачу синтеза функций, однако, как и интерполяция не позволяет производить нахождение амплитуд и положений пиков. Для покомпонентного анализа функциональных зависимостей следует использовать поэтому иные методы.

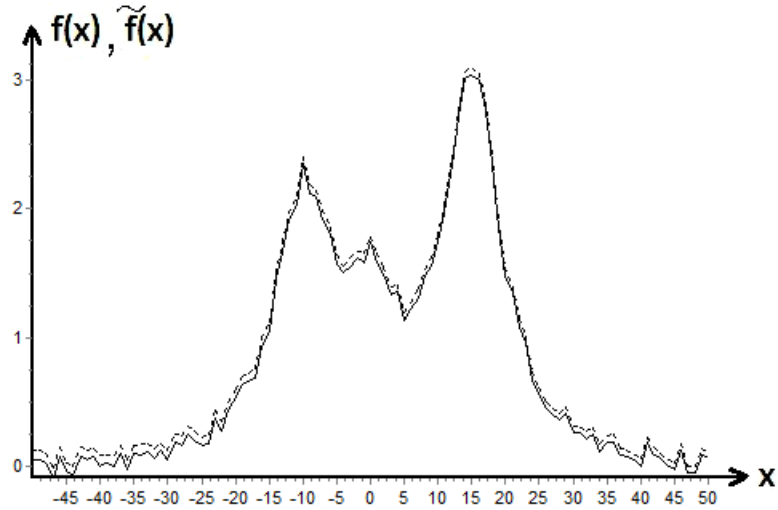


Рис. 3.6: Графики исходной (сплошная линия) и восстановленной функции (пунктирная линия) в присутствии 10 % – го случайного шума

### 3.4 Биортогональные системы для функций Гаусса и Лоренца разной ширины

В предыдущих параграфах рассматривались функции, состоящие из пиков одной фиксированной ширины. На практике часто приходится работать со сложными зависимостями, состоящими из компонент, ширина которых может варьироваться. В данном параграфе в качестве еще одной иллюстрации возможностей метода биортогональных систем, мы покажем каким образом можно проводить разделение нескольких функций Гаусса и нескольких функций Лоренца разной ширины, но с общим центром.

**Функции Гаусса разной ширины.** Пусть исследуемая зависимость  $f(x)$  представляет собой сумму  $N$  функций Гаусса с центром в начале координат

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_k^2}\right).$$

Требуется найти амплитуду  $A_k$  каждой присутствующей в  $f(x)$  компоненты.



Построим биортогональную систему для  $\varphi_k(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_k^2}\right)$ , т.е. будем искать набор функций  $\psi_k(x)$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_k x^2} \psi_m^*(x) dx = \delta_{km}, k, m \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

где  $\alpha_k = \frac{1}{2\sigma_k^2}$ . Пользуясь неоднозначностью в нахождении дуальных функций, для простоты будем в дальнейшем предполагать  $\psi_k(x)$  вещественными и четными. После замены переменных  $y = x^2$ , условие (3.2) преобразуется к виду:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha_k y} \cdot \frac{\psi_m(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy = \delta_{km}, k, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Для построения  $\psi_k(x)$  применим следующий прием. Заменяем в формуле (3.3)  $\alpha_k$  комплексной переменной  $z$  и рассмотрим функции

$$\lambda_m(z) = \int_0^{\infty} e^{-zy} \cdot \frac{\psi_m(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy, m \in \mathbb{Z}.$$

При этом требуется, чтобы  $\lambda_m(\alpha_k) = \delta_{km}, k, m \in \mathbb{Z}$ . Вводя обозначение  $\Omega_m(y) = \frac{\psi_m(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$ , получим формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-zy} \cdot \Omega_m(y) dy = \lambda_m(z), \quad (3.4)$$

которая представляет собой преобразование Лапласа функции  $\Omega_m(y)$ . Правую часть (3.4) можно выбирать различными способами и получать при этом разные  $\psi_k(x)$ , используя формулу обращения преобразования Лапласа. Дальнейшие рассуждения зависят от значений, которые может принимать  $\alpha_k$ .

Для примера рассмотрим случай, когда исследуемая зависимость  $f(x)$  состоит всего из двух компонент с разными параметрами ширины  $\sigma_1$  и

$\sigma_2$  ( $\sigma_2 > \sigma_1$ ):

$$f(x) = A_1 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

В качестве  $\lambda_{1,2}(z)$  выберем функции следующего типа:

$$\lambda_{1,2}(z) = C_{1,2} \cdot \frac{z^2 - \alpha_{2,1}^2}{(z^2 + \alpha_{2,1}^2)^2}.$$

Параметры подбираются следующим образом. Функция  $\lambda_1(z)$  должна обращаться в нуль, при  $z = \alpha_2 = \frac{1}{2\sigma_2}$ , а  $\lambda_2(z)$  – при  $z = \alpha_1 = \frac{1}{2\sigma_1}$ . Константы  $C_{1,2}$  обеспечивают нормировку на единицу в интеграле (3.2):

$$C_{1,2} = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2}{\alpha_{1,2}^2 - \alpha_{2,1}^2}.$$

Вычислим теперь  $\psi_1(x)$  (для  $\psi_2(x)$  все аналогично). По замене  $\Omega_m(y) = \frac{\psi_m(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$ , откуда

$$\psi_1(x) = \sqrt{x^2} \cdot \Omega_1(x^2). \quad (3.5)$$

Чтобы найти функцию  $\Omega_1(y)$ ,  $y > 0$  необходимо применить обратное преобразование Лапласа к  $\lambda_1(z)$ , прямое вычисление которого приводит к достаточно громоздким математическим выкладкам, поэтому ограничимся лишь некоторыми комментариями. По таблице преобразований Лапласа (см., например [35, с. 810]) можно найти, что оригиналом для функции  $\frac{z^2 - \alpha_2^2}{(z^2 + \alpha_2^2)^2}$  является  $y \cos(\alpha_2 y)$ ,  $y > 0$ . Отсюда

$$\Omega_1(y) = C_1 y \cos(\alpha_2 y).$$

Подставляя последнее выражение в формулу (3.5), получим

$$\psi_1(x) = C_1 \sqrt{x^2} \cdot x^2 \cos(\alpha_2 x^2).$$

Используя выражения для  $C_1, C_2$ , окончательный ответ в терминах  $\sigma_1, \sigma_2$ , можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{(\sigma_1^4 + \sigma_2^4)^2}{4\sigma_1^4 \sigma_2^4 (\sigma_2^4 - \sigma_1^4)} |x|^3 \cos\left(\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right), \\ \psi_2(x) &= \frac{(\sigma_1^4 + \sigma_2^4)^2}{4\sigma_1^4 \sigma_2^4 (\sigma_1^4 - \sigma_2^4)} |x|^3 \cos\left(\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее функции  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  могут быть использованы, чтобы определить амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  компонент сигнала  $f(x)$ :

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_1^*(x)dx$$

$$A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_2^*(x)dx.$$

Перейдем к вычислительным экспериментам. Алгоритм разложения по структуре будет практически полностью повторять алгоритм для систем сдвигов, только теперь необходимо задать два параметра  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Пусть имеется некоторая входная зависимость, состоящая из двух функций Гаусса с параметрами  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и аддитивного шума  $\varepsilon(x)$

$$f(x) = A_1 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} + A_2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}} + \varepsilon(x). \quad (3.7)$$

Применим построенные нами базовые дуальные функции  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ . С помощью скалярных произведений, находим компоненты синтезированного сигнала  $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$

$$\widetilde{A}_{1,2} = (f(x), \psi_{1,2}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{1,2}^*(x)dx.$$

Интегралы вычисляются по квадратурным формулам с использованием равномерной сетки, на которой задан исходный сигнал.

В таблице 3.4 показаны результаты расчетов амплитуд с использованием тестового сигнала вида (3.7) при различных значениях ширин, с добавлением искусственного случайного шума (уровень шума указан в % от минимальной амплитуды  $A_{1,2}$ ).

Из таблицы 3.4 видно, что при малых уровнях шума амплитуды в составе исходной функции восстанавливаются достаточно надежно, даже при близких значениях ширин  $\sigma_1, \sigma_2$ . Рост уровня шума, как и ожидается, ведет к ухудшению разрешающей способности алгоритма. Стоит отметить, что точность расчета амплитуд практически не зависит от их соотношения у разных компонент.

Таблица 3.4: Расчет амплитуд при различных параметрах  $\sigma_1, \sigma_2$  и уровне случайного шума

| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $\widetilde{A}_1$ | $\widetilde{A}_2$ | Шум (%) |
|------------|------------|-------|-------|-------------------|-------------------|---------|
| 1          | 2          | 1     | 3     | 1.0435            | 2.9537            | 0.5%    |
| 1          | 1.2        | 1     | 3     | 1.0932            | 2.9055            | 0.5%    |
| 1          | 2          | 1     | 3     | 0.9381            | 3.0657            | 1%      |
| 1          | 1.2        | 1     | 3     | 0.7548            | 3.2488            | 1%      |
| 1          | 2          | 1     | 3     | 1.3196            | 2.6604            | 5%      |
| 1          | 1.2        | 1     | 3     | 0.5006            | 3.5067            | 5%      |
| 1          | 2          | 5     | 1     | 5.0258            | 0.9726            | 0.5%    |
| 1          | 1.2        | 5     | 1     | 5.1341            | 0.8639            | 0.5%    |

**Функции Лоренца разной ширины.** В этом случае будем считать, что исследуемая зависимость  $f(x)$  представляет собой сумму  $N$  функций Лоренца с центром в начале координат

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + x^2}.$$

Построим биортогональную систему для  $\varphi_k(x) = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + x^2}$ , т. е. будем искать функции  $\psi_k(x)$  такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + x^2} \psi_m^*(x) dx = \delta_{km}, k, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

В случае функции Лоренца удобнее условие (3.8) записать в терминах преобразования Фурье, используя его свойство унитарности (1.2) и формулу (2.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_k \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma_k |\xi|} \widehat{\psi}_m^*(\xi) d\xi = \delta_{km}, k, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Если искать четные  $\psi_k(x)$ , формула (3.9) запишется в виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma_k \xi} \widehat{\psi}_m^*(\xi) d\xi = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \delta_{km}, k, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Заменим в формуле (3.10)  $\sigma_k$  комплексной переменной  $z$  и рассмотрим функции

$$\lambda_m(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\xi} \widehat{\psi}_m^*(\xi) d\xi, m \in \mathbb{Z},$$

т.е. снова приходим к преобразованию Лапласа, при этом

$$\lambda_m(\sigma_k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \delta_{km}, k, m \in \mathbb{Z}.$$

Для примера, снова предположим, что  $f(x)$  состоит из двух компонент с разными параметрами ширины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $\sigma_2 > \sigma_1$ ):

$$f(x) = A_1 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + x^2} + A_2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + x^2}.$$

Выбрать  $\lambda_{1,2}(z)$  такие же как в случае функции Гаусса теперь нельзя, поскольку  $\widehat{\psi}_{1,2}^*(\xi)$  тогда не будут принадлежать пространству  $L_2(\mathbb{R})$ . Подходящими с этой точки зрения являются функции вида

$$\lambda_{1,2}(z) = \frac{A_{1,2}}{z+a} - \frac{B_{1,2}}{z+b}.$$

Чтобы  $\lambda_{1,2}(z)$  удовлетворяли требуемым условиям, параметры должны иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \frac{(\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+a)}{\sigma_{1,2}\sqrt{2\pi}((\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+a) - (\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{2,1}+b))}, \\ B_{1,2} &= \frac{(\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+b)}{\sigma_{1,2}\sqrt{2\pi}((\sigma_{1,2}+b)(\sigma_{2,1}+a) - (\sigma_{1,2}+a)(\sigma_{2,1}+b))}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

причем  $a, b$  – произвольные параметры (могут даже быть разными отдельно для каждой функции  $\lambda_1(z)$  и  $\lambda_2(z)$ ), с тем лишь требованием, чтобы  $a \neq b$ , а также  $a > 0, b > 0$ . Это обстоятельство может быть полезным с точки зрения настройки алгоритмов для конкретной задачи.

Известно, что  $\frac{1}{z+a}$  является преобразованием Лапласа функции  $e^{-a\xi}$  [35, с. 809], тогда  $\widehat{\psi}_{1,2}^*(\xi)$  с учетом их четности запишутся в виде

$$\widehat{\psi}_{1,2}^*(\xi) = A_{1,2}e^{-a|\xi|} - B_{1,2}e^{-b|\xi|}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим окончательный ответ

$$\psi_{1,2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( A_{1,2} \frac{a}{x^2 + a^2} - B_{1,2} \frac{b}{x^2 + b^2} \right), \quad (3.12)$$

где  $A_{1,2}$  и  $B_{1,2}$  определяются соотношениями (3.11).

Пусть исследуемая зависимость состоит из двух функций Лоренца с параметрами  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и аддитивного шума  $\varepsilon(x)$ . В таблице 3.5 приведены результаты расчетов. При малых уровнях шума амплитуды в составе исходной функциональной зависимости как и в случае функции Гаусса восстанавливаются достаточно надежно, причем точность расчета амплитуд также практически не зависит от их соотношения.

Таблица 3.5: Расчет амплитуд при различных параметрах  $\sigma_1, \sigma_2$  и уровне случайного шума

| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $\widetilde{A}_1$ | $\widetilde{A}_2$ | Шум (%) |
|------------|------------|-------|-------|-------------------|-------------------|---------|
| 1          | 2          | 1     | 3     | 1.0435            | 2.9537            | 0.5%    |
| 1          | 1.2        | 1     | 3     | 1.0932            | 2.9055            | 0.5%    |
| 1          | 2          | 1     | 3     | 0.9381            | 3.0657            | 1%      |
| 1          | 1.2        | 1     | 3     | 0.7548            | 3.2488            | 1%      |
| 1          | 2          | 1     | 3     | 1.3196            | 2.6604            | 5%      |
| 1          | 1.2        | 1     | 3     | 0.5006            | 3.5067            | 5%      |
| 1          | 2          | 5     | 1     | 5.0258            | 0.9726            | 0.5%    |
| 1          | 1.2        | 5     | 1     | 5.1341            | 0.8639            | 0.5%    |

В завершение укажем некоторые возможные способы обобщения, представленного алгоритма. В случае множества пиков (реально не больше 10, иначе задача становится неустойчивой) функции  $\psi_m(t)$  могут быть построены, если заменить косинус в формуле (3.6) тригонометрическим полиномом, а в формуле (3.12) использовать больше слагаемых в виде функций Лоренца с различными параметрами. Коэффициенты могут быть найдены, исходя из того, что функция  $\lambda_m(z)$  должна обращаться в нуль в требуемых точках. Также, возможно использование более

сложных модификаций  $\lambda_m(z)$ , введение дополнительных параметров, с помощью которых можно оптимизировать алгоритм.

### 3.5 Системы равномерных сдвигов, порожденные сверткой функций Гаусса и Лоренца

Речь пойдет о контуре Фойгта, упомянутом в параграфе 1.3. Для удобства математических преобразований в формулах (1.9)–(1.11) введем следующие обозначения:  $\Gamma = 2s$ ,  $\Delta\omega_D = \sigma\sqrt{2}$ . Отвлекаясь от реальной природы получаемого спектра, обозначим исследуемую зависимость  $f(x)$ . Требуется построить линейную комбинацию функций  $\varphi_k(x)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , тем или иным образом приближающую  $f(x)$ . Система  $\varphi_k(x)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  в нашем случае будет представлять собой равномерные сдвиги функции вида (1.11). Как и прежде с помощью соответствующего выбора единиц измерения задача может быть сведена к рассмотрению целочисленных сдвигов, поэтому введем обозначения

$$\varphi_k(x, \sigma, s) = \varphi(x - k, \sigma, s),$$

где

$$\varphi(x, \sigma, s) = \frac{s}{\sigma\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{s^2+t^2} dt. \quad (3.13)$$

Для функции  $\varphi(x, \sigma, s)$  тогда будет справедливо соотношение:

$$\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) e^{-s|\xi|}. \quad (3.14)$$

Начнем с оценки констант Рисса. Снова воспользуемся соотношением (1.15). Для интересующего нас контура Фойгта (3.13) с учетом (3.14) имеем

$$P(\xi, \sigma, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sigma^2(\xi + 2\pi k)^2\right) e^{-2s|\xi+2\pi k|}. \quad (3.15)$$

Как показывают расчеты при  $\sigma = s = 0.5$  отношение констант  $B/A \approx 136.4$ . При увеличении  $\sigma$  оно стремительно возрастает:  $s = 0.5, \sigma = 1, B/A \approx 2.2 \cdot 10^5$ ;  $s = 0.5, \sigma = 2, B/A \approx 1.6 \cdot 10^{18}$ . Несколько медленнее отношение констант увеличивается с ростом  $s$ :  $s = 2, \sigma = 0.5, B/A \approx 1.7 \cdot 10^6$ ;  $s = 5, \sigma = 0.5, B/A \approx 2.6 \cdot 10^{14}$ . Таким образом, при больших значениях  $\sigma$  или  $s$  матрица Грама исследуемой системы сдвигов становится плохо обусловленной, причем более чувствительна система к изменениям именно параметра  $\sigma$ .

Установленный нами факт, что равномерные сдвиги контура Фойгта образуют систему Рисса, позволяет нам построить биортогональную систему по формуле (1.8). Предварительно отметим несколько особенностей  $P(\xi, \sigma, s)$  в нашем случае. Во-первых, по теореме Вейерштрасса ряд (3.15) сходится равномерно на отрезке  $\xi \in [0, 2\pi]$ , так как справедлива оценка

$$\exp(-\sigma^2(\xi + 2\pi k)^2) e^{-2s|\xi+2\pi k|} \leq e^{-2s|\xi+2\pi k|} \leq e^{-4s\pi(|k|-1)}$$

и при этом

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-4s\pi(|k|-1)} < +\infty$$

Отсюда следует, что  $P(\xi, \sigma, s)$  является непрерывной по  $\xi$  функцией. Аналогично можно показать, что  $P(\xi, \sigma, s)$  имеет непрерывную производную, за исключением точек  $\xi = 0$  и  $\xi = 2\pi$ . Во-вторых, поскольку все слагаемые ряда для  $P(\xi, \sigma, s)$  строго положительны и  $P(\xi, \sigma, s)$  – непрерывна, то  $\exists \varepsilon > 0 : P(\xi, \sigma, s) > \varepsilon$ . Тогда при всех  $\xi \in \mathbb{R}$  определена функция  $1/P(\xi, \sigma, s)$ , которая также будет непрерывной и имеет кусочно-непрерывную производную. Следовательно,  $1/P(\xi, \sigma, s)$  можно разложить в ряд Фурье, который равномерно сходится к ней. Обозначим коэффициенты этого ряда через  $\psi_k(\sigma, s)$ , т. е.

$$\frac{1}{P(\xi, \sigma, s)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k(\sigma, s) e^{-ik\xi}.$$



Запишем теперь соотношение (1.8) для нашего случая

$$\widehat{\psi}(\xi, \sigma, s) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, s)}{P(\xi, \sigma, s)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k(\sigma, s) \widehat{\varphi}(\xi, \sigma, s) e^{-ik\xi}.$$

Равномерно сходящийся ряд справа можно почленно интегрировать, поэтому применяя к последней формуле обратное преобразование Фурье, получим

$$\psi(x, \sigma, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k(\sigma, s) \varphi(x - k, \sigma, s).$$

Таким образом,  $\psi(x, \sigma, s)$  представляется в виде линейной комбинации сдвигов  $\varphi(x - k, \sigma, s)$  с коэффициентами  $\psi_k(\sigma, s)$ , которые можно найти, разложив функцию  $1/P(\xi, \sigma, s)$  в ряд Фурье на отрезке  $\xi \in [0, 2\pi]$ .

Рассмотрим значения коэффициентов при конкретных  $\sigma$  и  $s$ . Во-первых, при некоторых параметрах наблюдается нарушение чередования знаков у коэффициентов. Например, при  $s = 0.1$  и  $\sigma = 0.5$ :  $\psi_{15}(0.1, 0.5) = -0.00029$ ,  $\psi_{16}(0.1, 0.5) = -0.00024$  (все значащие цифры верные с точностью до округления). Выяснение того, когда именно следует ожидать подобный эффект, требует отдельного теоретического исследования. Заметим лишь, что нарушение чередования знаков особенно явно выражено при больших значениях параметра  $s$  по сравнению с  $\sigma$ , когда преобладающую роль в свертке играет именно функция Лоренца. Во-вторых, коэффициенты  $\psi_k(\sigma, s)$  с увеличением  $\sigma$  и  $s$  возрастают по абсолютной величине. Например,  $\psi_0(1, 1) \approx 3.2 \cdot 10^4$ , но  $\psi_0(1, 2) \approx 7.0 \cdot 10^{17}$ ,  $\psi_0(2, 1) \approx 1.4 \cdot 10^8$ . Следовательно, ряды с участием  $\psi_k(\sigma, s)$  будут сходиться медленнее, при вычислениях потребуется учитывать все больше слагаемых. Это одно из проявлений потери устойчивости с ростом параметров  $\sigma$  и  $s$ .

Построение узловой функции для сдвигов контура Фойгта, приводит к следующему результату.

**Теорема 3.1** *Между коэффициентами  $\psi_k(\sigma, s)$  для биортогональной системы и коэффициентами узловой функции  $d_k(\sigma, s)$  для системы цело-*

численных сдвигов контура Фойгта (3.13) имеет место соотношение

$$d_k(\sigma, s) = \psi_k(\sigma/\sqrt{2}, s/2).$$

*Доказательство.* Применим формулу суммирования Пуассона (1.4), где вместо  $f(x)$  подставим функцию (3.13):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k, \sigma, s) e^{-ik\xi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\xi + 2\pi k)^2}{2}\right) e^{-s|\xi + 2\pi k|}. \quad (3.16)$$

Ряд в правой части представляет собой функцию  $P(\xi, \sigma/\sqrt{2}, s/2)$ . Поэтому оба требования, необходимые для применимости (1.4), как это следует из проведенного выше анализа  $P(\xi, \sigma, s)$ , выполняются и формула (3.16) является справедливой при всех  $\xi \in \mathbb{R}$ . Для функции  $1/P(\xi, \sigma/\sqrt{2}, s/2)$  существует равномерно сходящийся к ней ряд Фурье, а его коэффициентами будут  $\psi_k(\sigma/\sqrt{2}, s/2)$ . Теорема доказана.

## Глава 4

# Подсистемы когерентных состояний, заданные на прямоугольных решетках

В этой главе рассматриваются свойства оконных систем функций с окном в виде функции Гаусса, в физике получивших название когерентные состояния. Из всего семейства когерентных состояний, как уже было сказано, можно выделить различные полные или неполные подсистемы. Параметризация при этом может быть различной, однако наиболее удобной и часто используемой является прямоугольная решетка. Для оценки базисных свойств таких подсистем, возможности построения устойчивых алгоритмов разложения функций, используются два взаимосвязанных понятия: система Рисса и фрейм. Основные результаты данной главы опубликованы в статье [62].

### 4.1 Когерентные состояния и фреймы

Для систем Рисса важным условием является линейная независимость, но при этом не требуется полнота во всем пространстве. Под полнотой понимается отсутствие ненулевой функции, ортогональной всем функциям системы. В случае линейно зависимых наборов функций, для характеристики их базисных свойств используется понятия фрейма.

**Определение 4.1** ([9, с. 96], [29, с. 74], [37, с. 121]) Семейство функций  $\varphi_k(x)$  из гильбертова пространства  $\mathbb{H}$  называется фреймом, если существуют такие  $A_F > 0$  и  $B_F < +\infty$ , что для всех  $f \in \mathbb{H}$  верны оценки

$$A_F \|f\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq B_F \|f\|^2.$$

Наибольшая из величин  $A_F$  называется нижней границей фрейма, а наименьшая из величин  $B_F$  называется верхней границей фрейма. Для полных ортонормированных систем обе константы  $A_F$  и  $B_F$  равны 1, т. е. в этом случае имеем фактически равенство Парсеваля.

Система функций может быть фреймом только в том случае, если она полна (или переполнена). Действительно, если она неполна, то существует ненулевая  $f$  такая, что  $(f, \varphi_k) = 0$  для всех  $k \in \mathbb{Z}$ . В этом случае  $A_F = 0$ , что противоречит определению фрейма. Рассматриваемые нами подсистемы когерентных состояний (1.12), при  $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$  являются переполненными и образуют фреймы [9, гл. 4], [30, гл. 1], [47]. В статье [46] приведены некоторые формулы для оценки границ  $A_F$  и  $B_F$ .

С помощью систем функций, образующих фрейм, теоретически можно представить любую функцию  $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ . Однако, если система переполнена, то способ этого представления становится неоднозначным, а сама система имеет неясную структуру. Это делает переполненные фреймы непригодными в задачах покомпонентного анализа функциональных зависимостей. Избыточность фреймов также делает неэффективным их применение в задачах сжатия информации. Другое важное обстоятельство заключается в том, что на практике всегда используются конечные наборы функций, которые заведомо неполны, а все вычисления являются приближенными.

Дальнейшее исследование в основном будет посвящено подсистемам когерентных состояний для которых  $\omega_1 \cdot \omega_2 \geq 2\pi$ . При  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$  система

когерентных состояний остается полной (при этом ровно с одной лишней функцией [30, гл. 1]), однако уже не является фреймом [9, гл. 4].

Если  $\omega_1 \cdot \omega_2 > 2\pi$ , то когерентные состояния являются неполной системой и поэтому не образуют фрейм. Неполнота системы (1.12) показана в целом ряде работ [31], [41]. Можно это сделать и напрямую с помощью техники, аналогичной использовавшейся нами ранее в главе 2 для построения биортогональных систем. Однако, ввиду того, что система теперь двухпараметрическая, имеется ряд особенностей. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Пусть  $f(x)$  некая функция ортогональная семейству функций (1.12). Обозначим  $a = \omega_1 k$ ,  $b = \omega_2 m$  и запишем скалярное произведение  $f(x)$  и  $\varphi_{km}(x)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-\frac{(x+a)^2}{2}\right) \cdot \exp(-ibx) dx = \\ & = \exp(-a^2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \exp(-(a+ib)x) dx = 0 \end{aligned}$$

в силу их ортогональности. Будем рассматривать этот интеграл как функцию комплексной переменной  $z = a + ib$ . Введем функции:

$$\varphi(x) = f(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad \lambda(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp(-zx) dx \quad (4.1)$$

$\lambda(z)$  представляет собой двустороннее преобразование Лапласа, формула обращения для которого имеет вид:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) \exp(zt) dy, \quad z = x + iy.$$

$f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ , поэтому если учесть замену (4.1), очевидно, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) \exp(-zx) dx = -\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp(-zx) dx$$

сходится. Следовательно  $\lambda(z)$  – целая функция. Выбирая конкретную подсистему, мы задаем значения переменной  $z_{km}$ , при которых  $\lambda(z_{km}) = 0$ . Отсюда следует, что

$$\lambda(z) = g(z) \cdot \prod_{k,m \in \mathbb{Z}} (z - z_{km}),$$

где  $g(z)$  – также некая целая функция (это есть не что иное как разложение аналитической функции по корням). В нашем примере необходимо взять  $z_{km} = \omega_1 k + i\omega_2 m$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ . Произведение  $\prod_{k,m \in \mathbb{Z}} (z - z_{km})$  представляет собой разложение по корням третьей тета-функции Якоби  $\theta_3\left(\frac{\pi}{\omega}\left(z + \frac{i\omega_2}{2}\right), q\right)$  с параметром  $q = -\exp\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\right)$ .

Возьмем для примера функцию  $g(z) = e^{z^2}$ . Вычисляя обратное преобразование Лапласа, тогда получим следующий результат. Пусть  $S = \omega_1\omega_2 > 2\pi$ . Введем параметры  $\alpha$  и  $q$ :

$$\frac{\pi}{2S} < \alpha < \frac{1}{2}, q = \exp\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(1 - \frac{\pi}{2\alpha S}\right)\right).$$

Тогда функция  $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ ,

$$f(x) = \theta_3\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{x}{2\alpha\omega_2} - \frac{i}{2}\right), q\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\right)$$

ортогональна всем функциям (1.12). Заметим, что подобная функция существует только при  $S > 2\pi$  в полном соответствии с теоремой 1.1 А. М. Переломова.

В настоящей работе будет исследован вопрос о том, являются ли неполные подсистемы когерентных состояний системами Рисса, что является ключевым при их возможном практическом применении.

## 4.2 Константы Рисса для полной системы

Для системы целочисленных сдвигов одной функции имеется хорошо разработанная методика оценки констант Рисса, описанная в параграфе 1.4. Однако рассматриваемые нами функции (1.12) зависят от двух

целых индексов  $k$  и  $m$ . Поэтому нахождение констант Рисса требует специального подхода, который изложен ниже.

Напомним введенное в первой главе обозначение

$$\varphi_{km}(x) = \exp\left(-\frac{(x - \omega_1 k)^2}{2}\right) \cdot e^{i\omega_2 m x}.$$

Нам надо оценить следующий квадрат нормы

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k,m} c_{km} \cdot \varphi_{k,m}(t) \right\|_{L_2}^2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k,m} c_{km} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \omega_1 k)^2}{2}\right) \cdot e^{i\omega_2 m x} \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В дальнейшем, если границы сумм не указаны, то предполагается, что все индексы меняются в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Удобнее всего в данной ситуации воспользоваться так называемым преобразованием Зака, которое ставит в соответствие некоторой функции  $g(x)$  функцию двух переменных  $Z[g](x, y)$  по следующему правилу

$$Z[g](x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(x - p) \cdot e^{2\pi i p y}.$$

Для применимости преобразования Зака достаточно выполнение условия (1.5), которому очевидно удовлетворяют когерентные состояния.

Перечислим основные свойства преобразования Зака [9, с. 162].

### 1. Линейность

$$Z[c_1 f(t) + c_2 g(t)](x, y) = c_1 Z[f(t)](x, y) + c_2 Z[g(t)](x, y). \quad (4.3)$$

### 2. Унитарность

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^1 \int_0^1 |Z[f](x, y)|^2 dx dy. \quad (4.4)$$

3. На функции типа оконного преобразования Фурье преобразование Зака действует так:

$$Z[g(t - k) \cdot e^{2\pi imt}](x, y) = e^{2\pi imx} e^{-2\pi icy} Z[g(t)](x, y) \quad (4.5)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.1** Пусть  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ . Тогда для системы функций (1.12) справедливы соотношения

$$\min_{x, y \in [0, 1]} (F(x, y)) \cdot \|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{k, m} c_{km} \cdot \varphi_{km}(x) \right\|_{L_2}^2 \leq \max_{x, y \in [0, 1]} (F(x, y)) \cdot \|c\|_{l_2}^2,$$

где

$$F(x, y) = \omega_1 \left| \sum_k \exp\left(-\frac{(x - k)^2}{2}\right) \cdot e^{i2\pi ky} \right|^2. \quad (4.6)$$

*Доказательство.* Сделаем в правой части формулы (4.2) в интеграле замену переменных  $t = x/\omega_1$ . С учетом того, что  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k, m} c_{km} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \omega_1 k)^2}{2}\right) \cdot e^{i\omega_2 mx} \right|^2 dx = \\ & = \omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k, m} c_{km} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_1^2 (t - k)^2}{2}\right) \cdot e^{i2\pi mt} \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся свойствами унитарности (4.4) и линейности (4.3)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k, m} c_{km} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_1^2 (t - k)^2}{2}\right) \cdot e^{i2\pi mt} \right|^2 dt = \\ & = \int_0^1 dx \int_0^1 \left| Z \left[ \sum_{k, m} c_{km} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_1^2 (t - k)^2}{2}\right) \cdot e^{i2\pi mt} \right] (x, y) \right|^2 dy = \\ & = \int_0^1 dx \int_0^1 \left| \sum_{k, m} c_{km} \cdot Z \left[ \exp\left(-\frac{\omega_1^2 (t - k)^2}{2}\right) \right] \cdot e^{i2\pi mt} \right|^2 dy. \end{aligned}$$



Применим далее свойство (4.5)

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \left| Z \left[ \exp \left( -\frac{\omega_1^2 t^2}{2} \right) \right] (x, y) \right|^2 \left| \sum_{k,m} c_{km} \cdot e^{i2\pi mx} \cdot e^{-i2\pi ky} \right|^2 dy.$$

Обозначив  $F(x, y) = \omega_1 \left| Z \left[ \exp \left( -\frac{\omega_1^2 t^2}{2} \right) \right] (x, y) \right|^2$  как это сделано в формуле (4.6), получим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k,m} c_{km} \cdot \varphi_{k,m}(x) \right\|_{L_2}^2 = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) \cdot \left| \sum_{k,m} c_{km} \cdot e^{i2\pi mx} \cdot e^{-i2\pi ky} \right|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Поскольку  $\left| \sum_{k,m} c_{km} \cdot e^{i2\pi mx} \cdot e^{-i2\pi ky} \right|^2 \geq 0$  и обе подынтегральные функции интегрируемы, то можно воспользоваться теоремой о среднем. С учетом равенства Парсеваля, получим:

$$\min_{x,y \in [0,1]} (F(x, y)) \cdot \|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{k,m} c_{km} \cdot \exp \left( -\frac{(x - \omega_1 k)^2}{2} \right) \cdot e^{i\omega_2 mx} \right\|_{L_2}^2,$$

$$\left\| \sum_{k,m} c_{km} \cdot \exp \left( -\frac{(x - \omega_1 k)^2}{2} \right) \cdot e^{i\omega_2 mx} \right\|_{L_2}^2 \leq \max_{x,y \in [0,1]} (F(x, y)) \cdot \|c\|_{l_2}^2.$$

Теорема доказана.

Обсудим, каковы численные значения констант Рисса. Согласно сообщению С. М. Ситника, функцию  $F(x, y)$  в формуле (4.6) можно выразить в терминах третьей тета-функции Якоби

$$F(x, y) = \omega_1 \exp(-x^2) \left| \theta_3 \left( \pi y + i\frac{x}{2}, q = \exp \left( -\frac{1}{2} \right) \right) \right|^2.$$

Тета-функция достигает своего минимального значения в точке  $x = \frac{1}{2}$ , где она оказывается равной нулю, т. е.  $A = \min_{x,y \in [0,1]} (F(x, y)) = 0$ . Таким образом, нижняя константа Рисса системы когерентных состояний (1.12) при  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$  тоже равна нулю.

### 4.3 Анализ неустойчивости полной системы

Как уже было сказано в первой главе для систем Рисса возможны устойчивые процедуры ортогонализации и построения биортогональной (двойственной) системы. Рассмотрим случай, когда некоторая система функций  $\varphi_k(x)$ , полна в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$ , а нижняя константа Рисса равна нулю. Предположим, что ортогонализация проведена, причем переход от исходной системы функций к ортонормированной системе  $h_m(x)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , осуществляется по формулам

$$h_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{km} \varphi_k(x). \quad (4.8)$$

Тогда для разложения произвольной функции  $f(x)$  по исходной системе надо получить ее разложение в ортонормированном базисе

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m h_m(x), \quad d_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot h_m^*(x) dx,$$

а затем с помощью (4.8) перейти к представлению

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (4.9)$$

где для коэффициентов  $c_k$  справедливы соотношения

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{km} d_m. \quad (4.10)$$

Равенства (4.10) задают линейный оператор  $T : l_2 \rightarrow l_2$ . Если нижняя константа Рисса равна нулю, то для любого  $\varepsilon > 0$  существует линейная комбинация вида (4.9) с конечным числом ненулевых коэффициентов  $c_k$ ,  $\|c\|_{l_2} = 1$ , такая, что  $\|f\|_{L_2} < \varepsilon$ . С другой стороны, согласно равенству Парсеваля

$$\|f\|_{L_2} = \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} |d_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как  $\|c\|_{l_2} \leq \|T\|_{l_2 \rightarrow l_2} \cdot \|d\|_{l_2}$ , то  $\|T\|_{l_2} \geq 1/\varepsilon$ . В силу произвольности  $\varepsilon$  оператор  $T$  оказывается неограниченным, а процедура ортогонализации (4.8) – неустойчивой.

При доказательстве полноты рассматриваемой системы когерентных состояний А.М. Переломов установил [31], что система (1.12) остается полной при выбрасывании любой одной функции, но перестает быть полной при выбрасывании двух функций. Покажем, что это обстоятельство никак не сказывается на устойчивости. Для этого вернемся к теореме 4.1.

Практический механизм получения констант Рисса с помощью теоремы о среднем в интеграле (4.7) таков: за счет выбора коэффициентов  $c_{km}$  строится функция

$$P(x, y) = \sum_{k,m} c_{km} \cdot e^{2\pi i(mx+ky)},$$

локализованная в окрестности точки минимума  $F(x, y)$  (например, ступенька или функция Хаара). Покажем, что выбрасывание одного из коэффициентов, например  $c_{00}$ , не мешает этой процедуре. Рассмотрим финитную функцию

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in [0.5, 0.5 + \delta], y \in [0.5 - \delta, 0.5 + \delta], \\ -1, & x \in [0.5 - \delta, 0.5), y \in [0.5 - \delta, 0.5 + \delta], \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

Указанная функция имеет нулевое среднее значение, поэтому в ее ряде Фурье коэффициент  $c_{00} = 0$ . Однако, при возведении в квадрат мы получаем обычную ступеньку, поэтому результат применения теоремы о среднем будет тем же. Таким образом, при удалении из набора одной функции, когерентные состояния перестают быть переполненными, но все равно не будут являться системой Рисса.

Факт неустойчивости системы (1.12) известен, но формулируется в достаточно запутанной форме: данная система не является фреймом [9, гл. 4], следовательно, это и не система Рисса, поскольку полная система Рисса является фреймом [29, гл.1]. Полученный в теореме 4.1 результат представляется более удобным, поскольку позволяет ответить на вопрос об ортогонализации и дает конструктивный способ получения функций, на которых проявляется неустойчивость. Для этого достаточно взять коэффициенты Фурье функции  $P(x, y)$  и составить линейную комбинацию из когерентных состояний с этими коэффициентами.

Переход от полных систем к переполненным с целью достижения устойчивости является главной идеей теории фреймов [9], [29], [37]. В нашем случае для получения фрейма надо рассмотреть систему (1.12) с условием  $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$ . Но у такого подхода есть два существенных недостатка:

1) коэффициенты разложения любой функции по элементам фрейма в силу переполненности системы определяются неоднозначно, следовательно, непонятен физический смысл этих коэффициентов;

2) сама процедура разложения сводится к решению достаточно сложного интегрального уравнения и требует анализа получающейся при этом погрешности [9, гл. 3].

Различные эффекты неоднозначности подробно обсуждаются в [21, гл. 11]. Можно использовать и другие базисы, не связанные с когерентными состояниями, но здесь возникает другая проблема. Поскольку главной целью рассматриваемых задач является переход от микроскопиче-

ских явлений к макроскопическим, то необходимо проводить усреднение. Данная процедура корректна при равномерной ограниченности дисперсий случайных величин (см., например, [26, с. 348]), что равносильно равномерной ограниченности констант неопределенности базисных функций. Традиционно используемые плоские волны в ограниченной области и функции Эрмита (см., например, [18, с. 290], [3, с. 144, 155]) таковыми не являются. В книге [21, гл. 11] приводятся примеры усреднений с неограниченными дисперсиями, но при этом делаются дополнительные предположения, т. е. фактически используется неполная система функций.

Первый пример ортонормированного базиса с равномерно ограниченной константой неопределенности предложил в 1986 году на семинаре общества Бурбаки Ив Мейер [29]. С этого примера и началась современная теория всплесков.

Таким образом, система когерентных состояний (1.12), которую И. Нейман в своей работе [26] планировал использовать для получения хорошо локализованного ортогонального базиса является неустойчивой. Этот факт, однако, не отражается на его доказательстве квантовой эргодической теоремы, которое остается справедливым. Тем не менее, указанное обстоятельство говорит о том, что некоторые аспекты математического аппарата квантовой теории все еще требуют детального изучения, что отражено в трудах современных авторов (см., например [8], [34]).

#### 4.4 Константы Рисса для неполных систем

**Теорема 4.2** Пусть  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда семейство функций (1.12) является системой Рисса с константами  $A$  и  $B$ , определя-

емыми формулами

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\pi} \theta_3 \left( \frac{\pi}{2}, \exp \left( -\frac{\omega_1^2}{4} \right) \right) \cdot \theta_3 \left( \frac{\pi}{2}, \exp \left( -\frac{\omega_2^2}{4} \right) \right), \\ B &= \sqrt{\pi} \theta_3 \left( 0, \exp \left( -\frac{\omega_1^2}{4} \right) \right) \cdot \theta_3 \left( 0, \exp \left( -\frac{\omega_2^2}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

*Доказательство.* Запишем выражение для матрицы Грама:

$$G_{kk'mm'} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{(t - \omega_1 k)^2}{2} \right) \cdot \exp \left( -\frac{(t - \omega_1 k')^2}{2} \right) \cdot e^{i\omega_2(m-m')t} dt. \quad (4.12)$$

Интеграл (4.12) легко вычисляется. С учетом того, что  $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , получается выражение

$$G_{kk'mm'} = \sqrt{\pi} \exp \left( -\frac{\omega_1^2(k-k')^2}{4} \right) \cdot \exp \left( -\frac{\omega_2^2(m-m')^2}{4} \right). \quad (4.13)$$

Экспоненту  $\exp \left( -\frac{\omega_1^2(k-k')^2}{4} \right)$  запишем в следующем виде

$$\exp \left( -\frac{\omega_1^2(k-k')^2}{4} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_3 \left( \frac{x}{2}, \exp \left( -\frac{\omega_1^2}{4} \right) \right) \cdot e^{i(k-k')x} dx.$$

Аналогично в виде интеграла представим и вторую экспоненту в формуле (4.13). В результате придем к следующему выражению для матрицы Грама

$$G_{kk'mm'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} F(x, y) \cdot e^{i(k-k')x} e^{i(m-m')y} dy,$$

где

$$F(x, y) = \sqrt{\pi} \theta_3 \left( \frac{x}{2}, \exp \left( -\frac{\omega_1^2}{4} \right) \right) \cdot \theta_3 \left( \frac{y}{2}, \exp \left( -\frac{\omega_2^2}{4} \right) \right).$$

Чтобы получить значения констант Рисса, осталось теперь найти минимальное и максимальное значение  $F(x, y)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Известно, что минимум  $\theta_3(x, q)$  на отрезке  $[0, \pi]$  достигается в точке  $x = \pi/2$ , а максимум в точке  $x = 0$ , откуда и следует формула (4.11). При этом,

поскольку  $\theta_3(x, q), |q| < 1$  строго положительна при  $x \in \mathbb{R}$  обе константы  $A, B > 0$ , поэтому рассматриваемый набор функций  $\varphi_{k,m}(t)$  является системой Рисса. Теорема доказана.

Главное отличие от теоремы 1 состоит в том, что третья тета-функция на вещественной оси не обращается в ноль, т. е. система (1.12) становится устойчивой. В таблице 4.1 приведены несколько значений констант Рисса при разных пропорциях между параметрами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Таблица 4.1: Константы Рисса в случае  $\omega_1\omega_2 = 4\pi, \omega_2 = l\omega_1$ .

| $l$ | $A$                  | $B$  | $B/A$             |
|-----|----------------------|------|-------------------|
| 1   | 1.48                 | 2.09 | 1.41              |
| 2   | 1.04                 | 2.53 | 2.43              |
| 5   | 0.16                 | 3.96 | 25.4              |
| 10  | $4.35 \cdot 10^{-3}$ | 5.60 | $1.29 \cdot 10^3$ |
| 20  | $2.39 \cdot 10^{-6}$ | 7.93 | $3.32 \cdot 10^6$ |
| 30  | $1.14 \cdot 10^{-9}$ | 9.71 | $8.55 \cdot 10^9$ |

Наблюдается рост отношения  $B/A$  с ростом коэффициента пропорциональности  $l$ . Аналогичный эффект имеет место и для границ фреймов в случае переполненных систем [9, гл. 3]. Приведем цитату из монографии Л. Манделя, Э. Вольфа [21]: "...дисперсия одной из переменных  $\hat{p}$  или  $\hat{q}$  может быть сделана произвольно малой подходящим выбором  $\theta$  за счет соответствующего увеличения дисперсии второй канонической переменной. Такие состояния являются примером так называемых сжатых состояний...". На наш взгляд, необходимо обсуждение устойчивости данной процедуры в соответствии с теоремой 4.2 и данными таблицы 4.1.

В данном параграфе показано, что подсистема когерентных состояний 1.12 при  $\omega_1\omega_2 = 4\pi$  является системой Рисса, причем отношение констант при правильном выборе параметров принимает значения порядка единицы. Отсюда следует, что для рассматриваемой подсистемы возможна устойчивая процедура разложения и устойчивая ортогонали-

зация, которая может быть положена в основу алгоритмов.

## 4.5 Применение когерентных состояний

Одним из возможных физических приложений рассмотренного в предыдущем разделе математического аппарата представляется анализ хаотической динамики в квантовых системах низкой размерности. Для этого кратко напомним основные понятия хаотической динамики классических систем. К таким относится понятие фазовой капли. Это область в фазовом пространстве, описывающая статистический ансамбль динамических систем, мгновенное состояние каждой из которых представляется точкой в фазовом пространстве.

В процессе эволюции динамических систем, определяемой уравнениями Гамильтона, каждая точка, описывает некоторую траекторию в фазовом пространстве. Соответственно, фазовая капля в целом также движется и испытывает при этом определенную деформацию.

Динамическая система называется эргодической, если в процессе движения по фазовой траектории, фазовая точка проходит сколь угодно близко к любой точке фазового пространства, а усреднение по фазовому пространству эквивалентно усреднению по времени для движущейся фазовой точки (усреднению по ансамблю эквивалентно усреднению по траектории – эргодическая гипотеза).

Однако, если эволюция системы является эргодической, то это еще не позволяет утверждать, что в данной системе наблюдается хаос в том смысле, как это понимается в теории хаоса динамических систем. Поясним о чем идет речь. Для статистической физики фундаментальными является понятие энтропии. С точностью до константы, энтропия фазовой капли представляет собой логарифм ее фазового объема.

Как известно, реальные термодинамические процессы подчиняются второму началу термодинамики и, следовательно при эволюции дина-



мической системы ее энтропия должна возрастать. Между тем, согласно теореме Лиувилля для Гамильтоновых систем, объем фазовой капли замкнутой и не зависящей от времени Гамильтоновой системы, остается постоянным. Соответственно постоянной остается и ее энтропия. Тем самым имеет место противоречие. С одной стороны объем фазовой капли должен возрастать (в соответствии со вторым началом термодинамики). С другой стороны он должен оставаться постоянным (в соответствии с теоремой Лиувилля). Для устранения этого противоречия, вводится во-первых понятие перемешивания, во-вторых, процедура огрубления фазовой капли. Под перемешиванием понимают "амебообразное" расплывание (см. рис. 4.1) фазовой капли по фазовому пространству [15, гл. 4]. Количественной характеристикой этого процесса может служить увеличение фазового объема огрубленной фазовой капли. Процедура огрубления состоит в следующем: огрубленная фазовая капля включает в себя каждую точку исходной фазовой капли вместе с ее  $\varepsilon$ -окрестностью, ( $\varepsilon$ -фиксировано). Если в динамической системе имеет место перемешивание, то со временем объем ее огрубленной фазовой капли возрастает. Назовем огрубленной энтропией логарифм этого огрубленного фазового объема. Она будет также возрастать. Тем самым, отмеченное выше противоречие между теоремой Лиувилля и вторым началом термодинамики может быть устранено следующим образом: энтропия, возрастающая в соответствии со вторым началом термодинамики есть огрубленная энтропия, определенная выше. Отметим, что понятие огрубленной энтропии, используемое нами здесь, тесно связано с понятием энтропии Колмогорова-Синяя [15], [38].

Для анализа сложного поведения динамических систем, представляющих собой квантовый аналог классических хаотических систем, представлялось бы плодотворным иметь в распоряжении понятийный аппарат, аналогичный тому, что кратко здесь описан для классических систем. Возникающая при этом сложность, связана с невозможностью

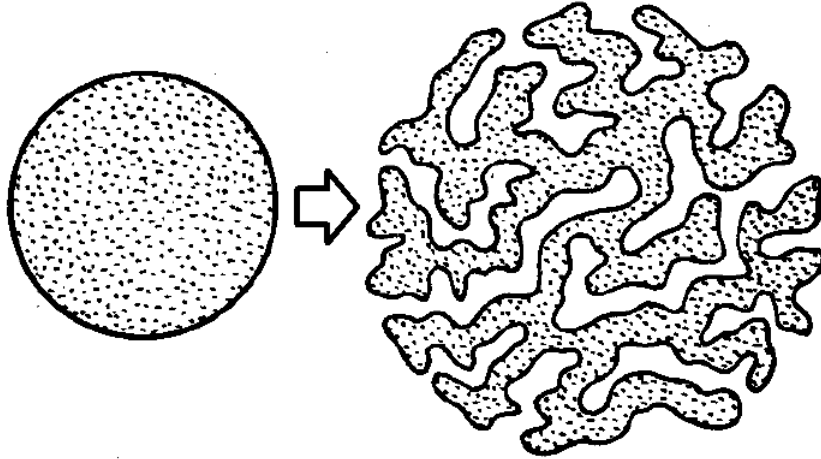


Рис. 4.1: Расплывание фазовой капли при перемешивании

прямого перенесения на квантовые системы самого первичного в данном случае понятия фазовой капли. Дело в том, что мгновенное состояние квантовой динамической системы не может быть представлено точкой в фазовом пространстве. Соответственно и понятие фазовой капли, как множество таких точек, теряет смысл. Это не позволяет ввести непосредственно и понятие усреднения по ансамблю. Между тем, процедура разложения по ортонормированной системе функций с равномерно ограниченной неопределенностью, позволяет выйти из этого затруднения [26]. В качестве квантового аналога функции распределения по фазовому пространству, возьмем множество квадратов модулей коэффициентов разложения волновой функции по данной ортонормированной системе. Это дает возможность ввести квантовый аналог для процедуры усреднения по ансамблю. Это есть усреднение с весом, равным квадрату модуля коэффициента разложения. Дальнейшее развитие такого подхода, позволяет построить квантовый аналог огрубленной энтропии и использовать его для анализа динамических квантовых систем с целью выявления в них хаотической динамики и оценки скорости нарастания хаотизации. При этом может быть использована та же самая техника, которая была разработана при доказательстве эргодической теоремы И. Нейманом [26].

Поясним кратко о чем идет речь. Как уже упоминалось основная про-

блема состоит в перенесении на квантовый случай понятия фазового пространства. Ввиду совместной неизмеримости координаты и импульса (их операторы  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  не коммутируют:  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ ) состояние системы нельзя описывать фазовой точкой. Следуя Нейману, рассмотрим другие, связанные с координатами и импульсами, физические величины (это могут быть, например, показания прибора) с операторами  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$  такими, что  $[\hat{Q}, \hat{P}] = 0$ . Эти величины, следовательно будут одновременно точно измеримы. Тогда они должны обладать общей ортонормированной системой собственных функций  $\varphi_k(x)$ . Обозначим соответствующие собственные значения  $Q_k$  и  $P_k$ . Кроме того, потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$Q_k = \int \varphi_k^*(x) \hat{q} \varphi_k(x) dx, \quad P_k = \int \varphi_k^*(x) \hat{p} \varphi_k(x) dx \quad (4.14)$$

Это означает совпадение значений  $Q_k$ ,  $P_k$  и математических ожиданий истинных координаты и импульса в состояниях  $\varphi_k(x)$ .

Для систем с равномерно ограниченной дисперсией имеют место соотношения

$$\Delta q_k \leq \xi, \quad \Delta p_k \leq \eta, \quad (4.15)$$

где  $\Delta q_k$  и  $\Delta p_k$  – дисперсии координаты и импульса соответственно в состоянии  $\varphi_k(x)$ . При этом, согласно принципу неопределенностей  $\xi\eta = C\frac{\hbar}{2}$ , с константой  $C \geq 1$ . Условия (4.14) означают совпадение точных значений  $Q_k$  и  $P_k$  и математических ожиданий истинных координаты и импульса соответственно. Условия (4.15) означают ограниченность дисперсий и требуется для того, чтобы истинные средние значения  $(q, p)$  и измеренные  $(Q, P)$  не сильно отличались.

Далее возникает вопрос о построении самих операторов  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$ . Это можно осуществить, если построить систему функций  $\varphi_k(x)$ , которая должна быть, во-первых, ортонормированной, во-вторых, иметь равномерно ограниченную константу неопределенности.

Затем на этой основе (зная указанную систему  $\varphi_k(x)$ ), строится кван-

товомеханический аналог огрубленной энтропии [26]. Изложенный алгоритм опирается на существование указанного ортонормированного базиса  $\varphi_k(x)$ . Его существование И. Нейманом было лишь теоретически постулировано – в явном виде такая система функций им не была предъявлена. Построение такой системы открывает возможность для практической реализации данного алгоритма и дает в руки исследователей эффективный инструмент для анализа квантового хаоса – огрубленную квантовомеханическую энтропию. Возрастание этой энтропии может служить критерием наличия квантового хаоса, а скорость ее возрастания может характеризовать быстроту этого процесса хаотизации.

Предлагаемый Ж. Бургенем [43] способ построения таких хорошо локализованных систем функций, основанный на ортогонализации Грама-Шмидта, позволяет записать результат в виде бесконечных рядов, имеющих очень сложную структуры, что делает его малоприменимым для практической реализации. Поэтому для решения этой задачи, нами предлагается использовать неполную подсистему когерентных состояний с  $\omega_1\omega_2 = 4\pi$  (как нами было показано, для нее возможна устойчивая ортогонализация), с последующим дополнением ее до базиса всего пространства  $L_2(\mathbb{R})$ . Это можно сделать, например, при помощи метода, аналогичного тому, который мы использовали при построении базовых дуальных функций (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) во второй главе. Так как  $\omega_1\omega_2 = 4\pi$ , условия теоремы Бальяна-Лоу [40], [53] нарушаются, что допускает возможность получения хорошо локализованного базиса.

Несмотря на неполноту, подсистема когерентных состояний при  $\omega_1\omega_2 = 4\pi$  представляет собой достаточно богатый набор функций и может быть использована в задачах сглаживания или сжатия оцифрованных сигналов. Возможность сохранения структуры оконного преобразования Фурье при построении биортогональной системы и ортогонализации [62] позволяет разработать эффективные алгоритмы разложения по данной неортогональной системе функций.

# Заключение

## Основные результаты диссертации.

1. Получены формулы для коэффициентов узловой функций, порожденной системой целочисленных сдвигов функции Лоренца.
2. Доказано, что узловая функция, порожденная системой целочисленных сдвигов функции Лоренца, при стремлении параметра ширины  $\sigma$  к бесконечности, стремится по норме пространства  $L_2(\mathbb{R})$  к функции отсчетов  $\text{sinc}(\pi x)$ .
3. Вычислены константы Рисса для семейства целочисленных сдвигов функции Лоренца и проведен анализ устойчивости разложения по этой системе.
4. Построены два новых параметрических семейства биортогональных систем для целочисленных сдвигов функций Гаусса и Лоренца.
5. Рассчитаны константы Рисса для полной системы когерентных состояний, заданной на прямоугольной решетке, и прореженных в  $k$ -кратное число раз неполных систем. Показано, что нельзя провести устойчивую ортогонализацию для полной системы, а при переходе к вдвое прореженной неполной – можно.

# Литература

- [1] Бари Н. К. *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве* / Н. К. Бари // Ученые записки МГУ. – 1951. – Т. 4, № 148. – С. 69–107.
- [2] Бахвалов Н. С. *Численные методы: учебное пособие для студентов вузов* / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
- [3] Боголюбов Н. Н. *Введение в квантовую статистическую механику* / Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.). – М.: Наука, 1984. – 384 с.
- [4] Борн М. *Основы оптики* / М. Борн, Э. Вольф; пер. с англ. С. Н. Бреуса, А. И. Головашкина, А. А. Шубина; под ред. Г. П. Мотулевич. – М.: Наука: Физматлит, 1973. – 855 с.
- [5] Глаубер Р. *Оптическая когерентность и статистика фотонов: курс лекций* / Р. Глаубер. – М.: МИР, 1966. – 189 с.
- [6] Грим Г. *Уширение спектральных линий в плазме* / Г. Грим; пер. с англ. под ред. Г. А. Кобзева, Г. В. Шолина. – М.: Мир, 1978. – 491 с.
- [7] Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра: теория и приложения* / Дж. Деммель; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. – М.: Мир, 2001. – 429 с.
- [8] Дмитриев Н. А. *Теорема фон Неймана о невозможности введения в квантовую механику скрытых параметров* / Н. А. Дмитриев // ТМФ. – 2005. – Т. 143, № 3. – С. 431–436.

- [9] Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам* / И. Добеши; пер. с англ. Е. В. Мищенко; под ред. А. П. Петухова. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 464 с.
- [10] Дробышев А. И. *Основы атомного спектрального анализа: учебное пособие* / А. И. Дробышев. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1997. – 198 с.
- [11] Дьяконов В. П. *MATLAB. Обработка сигналов и изображений: специальный справочник* / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. – СПб.: Питер, 2002. – 602 с.
- [12] Журавлев М. В. *О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций* / М. В. Журавлев, Л. А. Минин, С. М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – № 13(68). – вып. 17/2. – С. 89–99.
- [13] Журавлев М. В. *О константах Рисса для систем целочисленных сдвигов функции Гаусса* / М. В. Журавлев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2011. – № 5(100). – вып. 22. – С. 39–46.
- [14] Завьялов Ю. С. *Методы сплайн-функций* / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко; под ред. Н. Н. Яненко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
- [15] Заславский Г. М. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса* / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
- [16] Кашин Б. С. *Ортогональные ряды* / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. – 2-е изд., доп. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 550 с.

- [17] Кострикин А. И. *Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие для мех.-мат. специальностей вузов* / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
- [18] Ландау Л. Д. *Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория)* / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; под ред. Л. П. Питаевского. – 5-е изд., стер. – М.: Наука, 2002. – 723 с.
- [19] Малла С. *Вэйвлеты в обработке сигналов: учебное пособие для студентов вузов* / С. Малла; пер. со 2-го англ. изд. Я. М. Жилейкина. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
- [20] Мамфорд Д. *Лекции о тета-функциях* / Д. Мамфорд; пер. с англ. Д. Ю. Манина; под ред. Ю. И. Манина. – М.: Мир, 1988. – 446 с.
- [21] Мандель Л. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* / Л. Мандель, Э. Вольф; пер. с англ. С. Н. Андрианова и др.; под ред. В. В. Самарцева. – М.: Физматлит, 2000. – 895 с.
- [22] Минин Л. А. *О неравенствах для тета-функций Якоби* / Л. А. Минин, С. М. Ситник // Черноземный альманах научных исследований. Серия «Фундаментальная математика». Спец. выпуск, посвященный 85-летию со дня рождения И. А. Киприянова. – Воронеж, 2009. – С. 3–73.
- [23] Минин Л. А. *Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса* / Л. А. Минин, С. М. Ситник, С. Н. Ушаков // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 12(183), вып. 35. – С. 214–217.
- [24] Мухин К. Н. *Экспериментальная ядерная физика. В 3-х т. Т. 2* / К. Н. Мухин. – СПб.: Лань, 2009. – 336 с.



- [25] Наттерер Ф. *Математические аспекты компьютерной томографии* / Ф. Наттерер; пер. с англ. И. В. Паламодова, под ред. В. П. Паламодова. – М.: Мир, 1990. – 288 с.
- [26] Нейман И. *Математические основы квантовой механики* / И. Нейман; пер. с нем. М. К. Поливанова, Б. М. Степанова; под ред. Н. Н. Боголюбова. – Новокузнецк: Новокузнецкий физ.-мат. институт, 2000. – 367 с.
- [27] Неретин Ю. А. *Задача Переломова об обращении преобразования Баргмана-Сигала* / Ю. А. Неретин // *Функциональный анализ и его приложения*. – 2006. – Т. 40, вып. 4. – С. 104–107.
- [28] Новиков И. Я. *Основы теории всплесков* / И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин // *Успехи математических наук*. – 1998. – Т. 53, № 6. – С. 53–128.
- [29] Новиков И. Я. *Теория всплесков* / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. – М.: Физматлит, 2005. – 616 с.
- [30] Переломов А. М. *Обобщенные когерентные состояния и их применения* / А. М. Переломов. – М.: Наука, 1987. – 268 с.
- [31] Переломов А. М. *Замечание о полноте системы когерентных состояний* / А. М. Переломов // *ТМФ*. – 1971. – Т. 6, № 2. – С. 213–224.
- [32] Переломов А. М. *Когерентные состояния и тэта-функции* / А. М. Переломов // *Функциональный анализ и его приложения*. – 1972. – Т. 6, вып. 4. – С. 47–57.
- [33] Прудников А. П. *Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 1. Элементарные функции* / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – 2-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 630 с.

- [34] Сарры А. М. *К теории функционала плотности* / А. М. Сарры, М. Ф. Сарры // *Физика твердого тела*. – 2012. – Т. 54, вып 6. – С. 1237–1243.
- [35] *Справочник по специальным функциям: с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; пер. с англ. под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Карамзиной. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
- [36] Уиттекер Э. Т. *Курс современного Анализа: Ч.2. Трансцендентные функции* / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон; пер. с англ. под ред. Ф. В. Широкова. – Изд. 2-е. – М.: Физматлит, 1963. – 515 с.
- [37] Чуи Ч. *Введение в вейвлеты: учебное пособие для студентов вузов* / Ч. Чуи; пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
- [38] Шустер Г. Г. *Детерминированный хаос: Введение* / Г. Г. Шустер; пер. с англ. Ф. М. Израйлева, М. И. Малкина и А. М. Реймана; под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
- [39] Ascensi G. *On approximations by shifts of the Gaussian function* / G. Ascensi // arXiv:0812.0476v1 [math.CA]. – 2008. – 8 p.
- [40] Balian R. *Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique* / R. Balian // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1981. – № 292. – P. 1357–1362.
- [41] Bargmann V. *On the completeness of coherent states* / V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J. R. Klauder // Rep. Math. Phys.. – 1971. – № 2. – P. 221 – 228.
- [42] Battle G. *Heisenberg Inequalities for Wavelets States* / G. Battle // Appl. Comp. Harm. Anal. – 1997. – № 4. – P. 119-146.

- [43] Bourgain J. *A Remark on the Uncertainty Principle for Hilbertian Basis* / J. Bourgain // Journal of Functional Analysis. – 1988. – № 79. – P. 136-143.
- [44] Calcaterra C. *Approximating with Gaussians* / C. Calcaterra, A. Boldt // arXiv:0805.3795v1 [math.CA]. – 2008. – 17 p.
- [45] Chu E. *Discrete and continuous Fourier transforms analysis, applications and algorithms* / E. Chu. – Taylor and Francis Group, LLC Chapman & Hall, 2008. – 400 p.
- [46] Daubechies I. *Frames in the Bargmann space of entire functions* / I. Daubechies, A. Grossman, Y. Meyer // Comm. Pure Appl. Math. – 1988. – V. 41. – P. 151-164.
- [47] Daubechies I. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis* / I. Daubechies, A. Grossman, Y. Meyer // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1990. – V. 35. – P. 961-1005.
- [48] Gazeau V. P. *Coherent States in Quantum Physics* / V. P. Gazeau. – WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.KGaA, Weinheim, 2009. – 358 p.
- [49] Gill P. *The Prism Algorithm for Two-Electron Integrals* / P.Gill, J.Pople. – International journal of quantum chemistry. – 1991. – V. 40. – P. 153–772
- [50] Janssen A. J. E. M. *Signal analitic proofs of two basic results on lattice expansions* / A. J. E. M. Janssen // Appl. Comput. Harmon. Anal., 1994. – V. 1. – P. 350–354.
- [51] Jensen F. *Introduction to Computational Chemistry* / F. Jensen. – John Wiley and Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO19 1UD, England, 1999. – 430 p.
- [52] Lang K. R. *Astrophysical Formulae* / K. R. Lang. – Springer Verlag, New York, 1980. – 784 p.

- [53] Low F. *Complete sets of wave packets* / F. Low // A Passion for Physics – Essays in Honor of Geoffrey Chew, World Scientific, Singapore, 1985. – P. 17-22.
- [54] Lyubarskii Yu. I. *Frames in the Bargmann space of entire functions* / Yu. I. Lyubarskii // Entire and Subharmonic Functions – Adv. Soviet Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992. – V. 11. – P. 167–180.
- [55] Maz'ya V. *On approximate approximations using Gaussian kernels* / V. Maz'ya, G. Schmidt // IMA J. Num. Anal. – 1996. – V. 16. – P. 13–29.
- [56] Maz'ya V. *Approximate approximations* / V. Maz'ya, G. Schmidt. – AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2007. – V. 141. – 350 p.
- [57] Schlumprecht Th. *On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian* / Th. Schlumprecht, N. Sivakumar // Journal of Approximation Theory. – 2009. – V. 151, № 1. – P. 128–153.
- [58] Schweinler H. C. *Orthogonalization methods* / H. C. Schweinler, E. P. Wigner // J. Math. Phys. – 1970. – P. 1693–1694.
- [59] Strang G. *The discrete cosine transform* / G. Strang // SIAM Review. – 1999. – V. 41, № 1. – P. 135–147.
- [60] Stromberg J. O. *A modified Franklin system and higher order spline systems on  $\mathbb{R}^n$  as unconditional bases for Hardy spaces* / J. O. Stromberg // Conf. in honor of A. Zygmund. – Wadsworth. Beckner et al. – 1981. – V. 2. – P. 475–493.
- [61] Unser M. *Sampling-50 Years After Shannon* / M. Unser // Proceedings of the IEEE. – 2000. – V. 88, № 4. – P. 569–587.
- [62] Киселев Е. А. *Вычисление констант Русса и ортогонализация для неполных систем когерентных состояний с помощью тета-функций* / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков // Математический сборник. – 2016. – Т. 207, № 8. – С. 101–116.

- [63] Киселев Е. А. *О построении биортогональных систем подпространств, порожденных целочисленными сдвигами одной функции* / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, вып. 3. – С. 468–470.
- [64] Киселев Е. А. *Построение биортогональных систем для функций Лоренца разной ширины и с общим центром* / Е. А. Киселев // Современные методы краевых задач: матер. междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения XVII". – Воронеж, 2016. – С. 141–143.
- [65] Киселев Е. А. *Построение функций, ортогональных некоторым семействам целочисленных сдвигов* / Е. А. Киселев // Современные методы краевых задач: матер. междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения XVII". – Воронеж, 2016. – С. 143–144.
- [66] Киселев Е. А. *Системы целочисленных сдвигов, порожденные сверткой функций Гаусса и Лоренца* / Е. А. Киселев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 4. – С. 41–49.
- [67] Минин Л. А. *Метод выделения спектральных компонент в сигналах путем интерполяции с помощью систем целочисленных сдвигов* / Л. А. Минин, Насер Нихад Махмуд, Е. А. Киселев, С. Д. Кургалин // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 4. – С. 9–12.
- [68] *О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов* / Е. А. Киселев [и др.] // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, вып. 2. – С. 239–250.