ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Савастеев Денис Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Пенкин О.М.

Воронеж – 2016

Содержание

Введение

Актуальность темы. В последнее время всё большее внимание специалистов привлекают дифференциальные уравнения на так называемых стратифицированных множествах. Грубо говоря, стратифицированное множество – это множество, составленное из “кусков” (стратов) различной размерности. Такими множествами удобно описывать различные физические системы, которые состоят из элементов различных размерностей или с разными физическими характеристиками. Процессы, протекающие в таких системах, приводят к необходимости обобщения понятия “дифференциального уравнения” на случай стратифицированного множества.

Например, мы можем рассмотреть систему из мембран, одни участки границы которых закреплены, а другие склеены между собой некоторым образом. Формально, для изучения подобных систем строить теорию уравнений на стратифицированных множествах не требуется. Каждый элемент описывается неким дифференциальным уравнением, а их взаимодействие между собой – некими дифференциальными соотношениями (обычно называемыми условиями трансмиссии). В первых работах на эту тему (G. Lumer [30, 31], S. Nicaise [32, 33], J. von Belov [34, 35] и др.) так и делалось. Но в основном все вопросы сводились только к разрешимости соответствующих краевых задач.

Однако для получения результатов качественного характера – принципа максимума, леммы о нормальной производной, неравенства Харнака, теоремы об устранимой особенности и т.д., потребовался иной подход, первоначально применённый при изучении так называемых дифференциальных уравнений на геометрических графах (Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин и др.). Он основан на интерпретации всех дифференциальных соотношений, возникающих в системах подобного типа, в виде одного уравнения, содержащего операции дифференцирования по так называемой стратифицированной мере.

У этого подхода есть два преимущества. Во-первых, он согласуется с физической природой рассматриваемых задач. А во-вторых, он позволяет обнаружить аналогию с классическим случаем. Это обстоятельство позволило существенно продвинуться в изучении вопросов качественной теории. Однако, как правило, они получались при ограничениях на размерность стратифицированных множеств. Лишь недавно стали получаться результаты общего характера.

Данная работа посвящена развитию некоторых известных и получению новых результатов качественного характера. Основным результатом работы является теорема об устранимой особенности для гармонических функций на стратифицированных множествах. Она утверждает, что объединение стратов, размерность которых не превышает $n-2$, где n – максимальная из размерностей стратов, образуют устранимое множество. Это открывает дорогу для доказательства классической разрешимости задачи Дирихле для лапласиана на стратифицированном множестве методом Перрона-Пуанкаре. Ранее это удавалось сделать только для двумерного случая (S. Nicaise, О.М. Пенкин).

Кроме того, получено продвижение (в сравнении с имеющимися результатами) в вопросах сильного принципа максимума и леммы о нормальной производной и доказано неравенство Харнака для аналога оператора Лапласа на стратифицированном множестве.

Цель работы. Доказательство аналога теоремы об устранимой особенности для гармонической функции на стратифицированном множестве, обобщение леммы о нормальной производной и сильного принципа максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве, получение неравенства Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве.

Методика исследования. В работе использованы методы классического математического и функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными, а так же элементы математического анализа на стратифицированных множествах.

Научная новизна. Все результаты автора, приведённые в диссертации, являются новыми. В числе них отметим следующие:

1. теорема об устранимой особенности для гармонической функции на стратифицированном множестве,
2. лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве,
3. лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для параболического оператора на стратифицированном множестве,
4. неравенство Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве.

Приведённые выше результаты являются аналогами классических теорем для случая стратифицированных множеств. Они доказаны в общем виде, в такой постановке они получены впервые. Теорема об устранимой особенности рассматривается впервые. Лемма о нормальной производной, сильный принцип максимума для эллиптического и параболического операторов на стратифицированном множестве и неравенство Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве ранее были доказаны для двумерного случая. Также лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для эллиптического оператора были доказаны для многомерного случая, но с ограничением на геометрию стратифицированного множества (случай симплициального комплекса) или с ограничением на структуру оператора.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы при изучении эллиптических и параболических операторов как в классическом случае, так и на стратифицированных множествах.

Апробация. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздаль [5], воронежских зимних и весенних математических школах [6], международной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования" в г. Воронеж [7], международной конференции "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий" в г. Воронеж [8].

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1-8]. Из совместных работ [1, 2, 5] в диссертацию включены только результаты, лично принадлежащие автору. Работы [1-4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 20 параграфов и списка литературы из 39 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 103 страниц машинописного текста. Текст иллюстрируют 9 рисунков.

Краткое содержание работы. Перейдём к краткому описанию результатов по главам. Работа состоит из введения и четырёх глав. В первой главе даётся краткое описание основных понятий теории стратифицированных множеств и эллиптических уравнений на них. Сюда относятся: стратифицированное множество, мера на нём, касательное векторное поле, дивергенция и эллиптический оператор, определяемые по стратифицированной мере.

Под стратифицированным множеством в $\mathbb{R}^d$ будем понимать связное объединение конечного числа ограниченных плоских многообразий различной размерности – мы будем называть их стратами, которые примыкают друг к другу специальным образом:

- никакие два страта не пересекаются,
- граница каждого страта является объединением конечного числа других стратов (будем называть их гранями).

Далее, мы разбиваем Ω на два подмножества. Одно интерпретируется как внутренность и обозначается Ω_0, другое – как граница $\partial\Omega$. Разбиение это выбирается произвольно. Предполагается только, что множество Ω_0 составлено целиком из стратов, а также открыто, связно и плотно в Ω (все топологические понятия определяются в смысле топологии, индуцируемой из объемлющего пространства $\mathbb{R}^d$).

В общем случае страты могут быть произвольными гладкими многообразиями, примыкающие друг к другу специальным образом. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением плоских многообразий в качестве стратов, т.к. это заметно упрощает рассмотрения. Если страт является граничным, мы можем ослабить ограничение и считать его произвольным гладким многообразием.

Следующий важный компонент – это стратифицированная мера. Мера множества является суммой мер его k-мерных фрагментов – пересечений со стратами σ_{kj} по всем k и j

$$\mu(G) = \sum_{k,j} \mu_k(G \cap \sigma_{kj}).$$

В качестве σ-алгебры рассматривается семейство подмножеств Ω, пересечения которых с каждым стратом σ_{kj} измеримы по k-мерной мере Лебега на этом страте.

Дивергенция касательного векторного поля определяется исключительно формально с помощью равенства

$$\nabla \vec{F}(X) = \nabla_k \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}_{k+1i}(X) \cdot \nu_i.$$

Здесь $\nabla_k \vec{F}$ означает обычную k-мерную дивергенцию поля $\vec{F}_{kj}$ на страте σ_{kj}. $\vec{F}_{k+1i}(X)$ – это предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \to X$, $Y \in \sigma_{k+1,i}$. Выражение $\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}$ означает, что страт σ_{k+1i} примыкает к страту σ_{kj}, ν_i – единичный нормальный вектор в точке X по направлению $\sigma_{k+1,i}$. Таким образом, суммирование ведётся по всем примыкающим стратам на единицу большей размерности.

Подходящее для рассмотрения дивергенции множество полей обозначается $\vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$. Оно определяется как множество всех векторных полей обладающих следующими свойствами. Поле $\vec{F} \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$ должно быть непрерывным на замыкании каждого страта и гладким на относительной внутренности каждого страта.

Далее, для таких функций p и u, что поле $p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$, имеет смысл следующее выражение, являющееся естественным аналогом лапласиана

$$\Delta_p u = \nabla(p\nabla u) = \Delta_p u_{kj}(X) + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} p\frac{\partial u_{k+1i}}{\partial \nu_i}(X).$$

Мы обозначаем через $C^2_\sigma(\Omega_0)$ пространство всех таких u, что $\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$.

Мы в основном рассматриваем случай, когда $p \equiv 1$ на так называемых свободных стратах, т.е тех стратах, которые не лежат в границе других, и $p \equiv 0$ на остальных стратах. Такой случай мы называем мягким лапласианом. Рассматривается также недивергентная форма эллиптического оператора

$$Lu(X) = a^{qr}(X)D_{qr}u + b^q(X)D_iu + \sum_{\sigma_{k+1,i}\succ\sigma_{kj}} p\frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X),$$

где на коэффициенты a^{qr} и b^q накладываются стандартные требования, обеспечивающие эллиптичность оператора, а p предполагается непрерывной и положительной.

Заметим, что функция, принадлежащая пространству $C^2_\sigma(\Omega_0)$, не обязана быть непрерывной в целом на Ω_0. Она может претерпевать скачки при переходе с одного страта на другой. Поскольку для большинства вопросов условие непрерывности оказывается важным, мы в основном работаем с пространством $C^2_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$.

Во второй главе рассматриваются сильный принцип максимума и лемма о нормальной производной. Сначала доказывается аналог леммы о нормальной производной. Аналогом нормальной производной функции u в граничной точке $X \in \sigma_{kj} \subset \partial\Omega$ мы называем следующее выражение.

$$(\nabla u)_n(X) = \sum_{\sigma_{k+1,i}\succ\sigma_{kj}} \vec{\nabla} u_{k+1i}(X) \cdot n_i.$$

Здесь суммирование ведётся по всем стратам $\sigma_{k+1,i}$, примыкающих к σ_{kj} и лежащих в Ω_0, а не в $\partial\Omega$. Мы называем это выражение нормальной производной на том основании, что оно возникает в формуле Грина (на стратифицированном множестве) именно в том месте, где в классической формуле Грина стоит нормальная производная. Естественность такой интерпретации нормальной производной подтверждается тем, что формулировка леммы о нормальной производной для недивергентного эллиптического оператора L, упомянутого выше, вполне аналогична классической.

Лемма 2.1 *Пусть Ω – стратифицированное множество, а $\sigma_k \in \partial\Omega$ – плоский изолированный граничный страт. Пусть функция u удовлетворяет на Ω_0 неравенству $Lu \geq 0$ и достигает своего максимума в некоторой точке $X_0 \in \sigma_k$. И пусть также выполняется строгое неравенство $u(X) < u(X_0)$ для всех точек $X \in \Omega_0$. Пусть ν – одно из примыкающих направлений в точке X_0, и существует нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ в точке X_0.*

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} < 0.$$

Заметим, что в формулировке присутствует условие на граничный страт, он должен быть плоским изолированным. Это условие является аналогом условия внутренней сферы в классическом случае. Изолированность граничного страта означает, что к нему не примыкают никакие другие граничные страты большей размерности.

Лемма о нормальной производной была доказана сначала в двумерном случае (А.А. Гаврилов, О.М. Пенкин). Затем результат был обобщён на стратифицированное множество, составленное из симплексов (см. [2]). Мы же даём доказательство для случая произвольных плоских стратов. Основная трудность в доказательстве этого утверждения состоит в построении подходящих барьеров (см. работы Олейник, Хопфа). В нашем случае барьер получается комбинированием двух функций со специальными свойствами.

Основываясь на лемме о нормальной производной, удаётся доказать следующий вариант сильного принципа максимума.

Теорема 2.1 *Пусть Ω – стратифицированное множество, и L – эллиптический оператор на Ω_0. Пусть $u \in C(\Omega) \cap C^2_\sigma(\Omega_0)$ удовлетворяет неравенству $Lu \geq 0$. Тогда у функции u на Ω_0 не может быть точек локального нетри-*

виального максимума.

Мы говорим, что точка X_0 является точкой локального нетривиального максимума функции u, если существует окрестность, в которой $u(X) \leq u(X_0)$, и ни в какой окрестности функция u не является постоянной.

Первые версии принципа максимума относились к началу 2000-х годов (А.А. Гаврилов, О.М. Пенкин). В общем случае (без ограничения размерности) принцип максимума для оператора вида

$$\nabla(p\nabla u)$$

был получен в работе [1]. Лемма о нормальной производной сделала, наконец, возможным доказательство и для недивергентных операторов.

Во второй главе дополнительно доказывается лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для параболических уравнений. Доказательство леммы и принципа максимума использует те же техники, что и в случае эллиптических уравнений.

Как обычно, параболический оператор определяется в цилиндре $\Omega \times [0, T]$ и имеет вид

$$\mathbb{T}u = Lu - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Он рассматривается в пространстве функций, которые принадлежат $C^2_\sigma(\Omega^t_0)$ для каждого сечения Ω^t_0 и в каждой точке $X \in \Omega_0 \times (0, T]$ имеют непрерывную производную по t. Такой класс функций мы обозначим через $C^2_{\sigma,t}(\Omega_0 \times (0, T])$.

Для параболического оператора на стратифицированном множестве доказывается принцип максимума.

Теорема 2.4 *Пусть*

$$u \in C(\Omega \times [0, T]) \cap C^2_{\sigma,t}(\Omega_0 \times (0, T]).$$

И пусть для неё выполняется неравенство $\mathbb{T}u \geq 0$. Тогда функция u не может иметь внутри цилиндра и на верхней крышке локального нетривиального максимума.

В следующих двух главах речь пойдёт о специальном случае эллиптического оператора на стратифицированном множестве – мягком лапласиане Δ_p. Функция p, фигурирующая в определении Δ_p, полагается равной единице на свободных стратах и нулю на несвободных. Мы будем рассматривать стратифицированные множества, у которых все свободные страты имеют одинаковую размерность n. В этом случае, согласно нашему определению, оператор Δ_p совпадает с классическим лапласианом на стратах размерности n, на стратах размерности $n-1$ равен сумме нормальных производных по всем примыкающим стратам большей размерности, а на стратах размерности $k \leq n-2$ полагается равным нулю на любой функции. Особенность мягкого лапласиана заключается в том, что он является наиболее близким аналогом классического лапласиана. Например, для решения уравнения $\Delta_p u = 0$ на Ω_0 выполняется теорема о среднем для любой сферы достаточно малого радиуса.

Непрерывное, достаточно гладкое решение уравнения $\Delta_p u = 0$ на Ω_0 будем называть гармонической функцией. Термин "достаточно гладкая" означает, что гармоническая функция должна принадлежать некоторому классу гладкости, в котором корректно определён мягкий лапласиан. Выбор подходящего класса гладкости играет важную роль в изучении гармонических функций.

Ранее в качестве такого класса мы использовали $C^2_\sigma(\Omega_0)$. Напомним, что принадлежность $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$ влечёт, помимо прочего, гладкость функции u на каждом страте. Но т.к. функция p равна нулю на стратах размерности меньше n, то функции u не обязательно быть гладкой на таких стратах. Поэтому мы вводим новое, более широкое, пространство $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ – класс функций u, для которых $p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$.

Мы будем рассматривать гармонические функции на так называемых усиленно прочных стратифицированных множествах. Подобного рода условие возникало ранее и при рассмотрении других вопросов (в основном связанных с разрешимостью задачи Дирихле). Мы называем стратифицированное множество усиленно прочным, если для любого страта σ_k размерности $k \leq n-2$ и любого шара B с центром на страте σ_k и достаточно малого радиуса, множество $B \cap \Omega_0 \setminus \sigma_k$ является связным.

Суть этого условия иллюстрирует следующий пример.

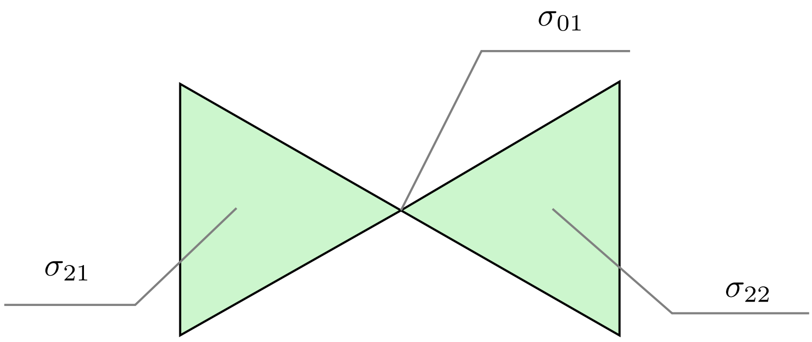

Рис. 1: Пример нарушения прочности множества

В условиях приведённого рисунка мягкий лапласиан совпадает с классическим в двумерных стратах, а на одномерных стратах, не входящих в границу, равен нормальной производной по внутреннему направлению. На нульмерных стратах, в частности в точке стыка двух треугольников, требуется только непрерывность функции.

Мы вводим условие усиленной прочности, т.к. оно существенно упрощает рассмотрение гармонических функций, а в некоторых вопросах (например, в теореме об устранимой особенности) является необходимым условием. Это связано с тем, что на стратах размерности $k \leq n-2$ в уравнении $\Delta_p u = 0$ с мягким лапласианом нет никаких дифференциальных соотношений, от решения требуется только непрерывность. Если разбить стратифицированное множество на усиленно прочные компоненты, то сужении гармонической функции на каждую компоненту будет по прежнему гармонической функцией. Поэтому мы можем рассматривать каждую усиленно прочную компоненту по отдельности.

Условие усиленной прочности имеет также физическую интерпретацию. Рассмотрим, например, систему из двух кубов, которые примыкают друг к другу по ребру. Пусть эта система находится в тепловом равновесии. Эту конструкцию из двух кубов можно рассматривать как стратифицированное множество. Функция температуры будет гармонической на каждом кубе. Очевидно, что тепловой обмен между двумя этими кубами невозможен, т.к. зона контакта между ними имеет нулевую площадь. Т.е. по сути эти два куба являются независимыми.

Третья глава посвящена неравенству Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве.

Теорема 3.1 (неравенство Харнака) *Пусть Ω – усиленно прочное стратифицированное множество. И пусть $H \subset \Omega_0$ – некоторый компакт. Тогда существует такая константа $C > 0$, зависящая от Ω и H, что для любой гармонической функции u на Ω_0 выполняется неравенство*

$$\sup_H u \leq C \inf_H u.$$

Как и в классическом случае, существенную роль в доказательстве играет теорема о среднем. Однако в случае стратифицированного множества данная теорема выполняется только для сфер достаточно малых радиусов (так называемые допустимые радиусы). Из-за этого перенос классического доказательство на случай стратифицированных множеств становится затруднительным. Поэтому наше доказательство существенно отличается от классического.

В конце главы мы переносим неравенство Харнака на более широкий класс функций. А именно, на класс непрерывных функций на Ω_0, для которых выполняется теорема о среднем для любых сфер допустимого радиуса. Заметим, что в классическом случае из теоремы о среднем следует достаточная гладкость (и, соответственно, гармоничность) функции. В случае стратифицированных множеств это не так. Как известно, гармоническая функция в области с негладкой границей может иметь особенности градиента в угловых точках. Поэтому можно привести пример функции, для которой выполняется теорема о среднем, но которая имеет особенность градиента на стратах размерности $k \leq n-2$. Такая функция не будет принадлежать пространству $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$, т.к. последнее должно гарантировать непрерывность градиента на замыкании каждого свободного страта.

Центральным результатом четвёртой главы является теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Она играет важную роль при распространении метода Перрона-Пуанкаре доказательства разрешимости задачи Дирихле на случай мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Ранее, в виду отсутствия теоремы об устранимой особенности, метод Перрона-Пуанкаре удавалось реализовать только для мягкого лапласиана на двумерном стратифицированном множестве (S. Nicaise, О.М. Пенкин).

Напомним, что классическая теорема об устранимой особенности утверждает, что если функция u гармоническая в области, кроме множества так называемой нулевой ёмкости, то её можно доопределить до гармонической функции во всей области. На стратифицированном множестве понятие ёмкости ещё не обсуждалось. Но для упомянутых выше целей (реализация метода Перрона-Пуанкаре) оказывается достаточным следующий вариант этой теоремы.

Теорема 4.1 (об устранимой особенности) *Пусть Ω – n-мерное усиленно прочное стратифицированное множество. Положим Σ_{n-2} – объединение всех стратов размерности $k \leq n-2$. Пусть функция $u : \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2} \to \mathbb{R}$ ограни-*

ченная гармоническая. Тогда её можно доопределить на всё Ω_0 так, что она будет гармонической на всём Ω_0.

Ранее мы писали, что пространство $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ является слишком ограничительным – в него не входят функции, которые имеют особенности градиента на стратах размерности $k \leq n-2$. При этом, с формальной точки зрения, оператор Δ_p для таких функций определён корректно, т.к. на стратах размерности $k \leq n-2$ он полагается равным нулю на любой функции. Кроме того, для гармонических функций, определённых относительно $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$, теорема об устранимой особенности оказывается неверна. Поэтому мы вводим новое пространство $C^{2*}_{\sigma,p}$, которое отличается от $C^2_{\sigma,p}$ тем, что допускает особенности градиента на стратах размерности $k \leq n-2$. Соответственно, понятие гармонической функции, фигурирующее в теореме об устранимой особенности, рассматривается относительного нового класса $C^{2*}_{\sigma,p}$.

В классическом случае теорема об устранимой особенности доказывается в рамках теории потенциала. Для этого используется представление гармонической функции с помощью потенциала. В случае стратифицированных множеств теория потенциала ещё не развита, поэтому для доказательства теоремы используются совершенно другие методы. Согласно определению гармоничности, на стратах размерности $k \leq n-2$ нет никаких дифференциальных соотношений. Предполагается только непрерывность функции. Поэтому фактически от нас требуется только продолжить функцию u по непрерывности.

Доказательство состоит из двух этапов. На первом этапе мы рассматриваем сферу допустимого радиуса $S_R(X)$ с центром в точке $X \in \sigma_k$, $k \leq n-2$. Мы показываем, что среднее по любой сфере $S_R(X)$ допустимого радиуса существует и не зависит от R. На втором этапе мы показываем, что, положив функцию u в точке X равной среднему значению по некоторой сфере $S_R(X)$, мы получим непрерывную функцию на Ω_0. Здесь ключевую роль играет неравенство Харнака, доказанное в предыдущей главе.

При доказательстве теоремы об устранимой особенности важную роль играет так называемая внутренняя оценка градиента. Эта оценка представляет самостоятельный интерес и может использоваться при дальнейшем изучении гармонических функций.

Теорема 4.2 *Пусть Ω – n-мерное усиленно прочное стратифицированное множество, а Σ_{n-2} – объединение всех стратов Ω_0 размерности $k \leq n-2$. И пусть функция $u : \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2} \to \mathbb{R}$ ограниченная гармоническая. Тогда, если $X \in \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2}$, то выполняется оценка*

$$|\nabla u| \leq \frac{C}{\rho},$$

где

$$\rho = \operatorname{dist}(X, \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega).$$

Автор выражает благодарность О.М. Пенкину за постановку задачи и полезные обсуждения.

1 Некоторые сведения из теории стратифицированных множеств

В этом параграфе мы приведём основную терминологию из теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах. Подробную информацию по стратифицированным множествам и дифференциальным уравнениям на них можно найти в [9].

1.1 Стратифицированное множество

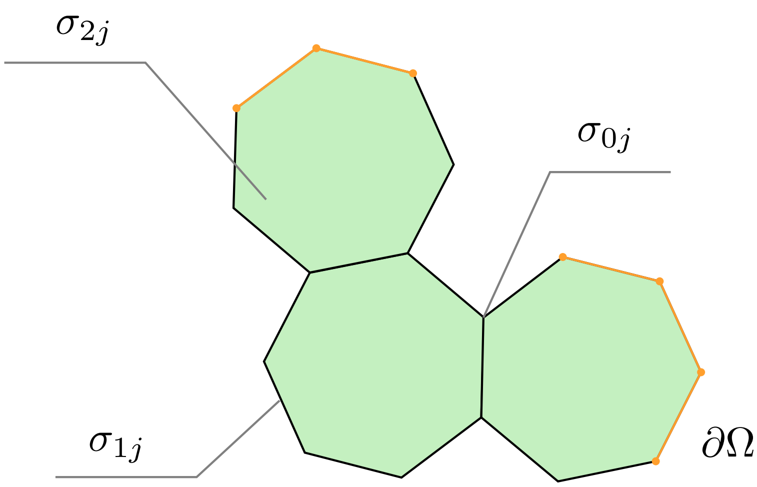

Рис. 2: Пример стратифицированного множества

Под стратифицированным множеством будем понимать тройку $(\Omega, \Sigma, \Omega_0)$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – связное ограниченное множество с индуцированной из $\mathbb{R}^d$ топологией и метрикой. Далее, предполагается, что Ω разбито на конечное число многообразий различной размерности. Набор этих многообразий обозначается через Σ. Каждое многообразие из Σ мы будем называть стратом и обозначать σ_{kj}. В обозначении страта σ_{kj} k – его размерность ($k = 0, \ldots, K$), j – порядковый номер ($j = 1, \ldots, J(k)$). Мы также допускаем использование σ_k для обозначения произвольного страта размерности k. Множество $\partial\sigma_k = \bar{\sigma}_k \setminus \sigma_k$ мы будем называть границей страта. Требования на гладкость стратов мы приведём позже.

Для разбиения Ω на страты предполагается выполнение следующих условий:

1. никакие два страта не пересекаются, $\sigma_{kj} \cap \sigma_{mi} = \emptyset$ при $k \neq m$ или $j \neq i$;
2. граница каждого страта является объединением некоторых других стратов из Σ,

$$\partial \sigma_{kj} = \bigcup_{\sigma_{mi} \in \Sigma' \subset \Sigma} \sigma_{mi}.$$

Свойства (1) – (2) являются аналогами правил взаимного расположения симплексов в симплициальном комплексе (см., например, [13]).

Если $\sigma_k \subset \partial \sigma_m$, то будем называть σ_k гранью σ_m, говорить, что σ_m примыкает к σ_k, и записывать $\sigma_k \prec \sigma_m$. Из свойств 1 и 2 следует, что любая грань одного страта и любая грань другого либо не пересекаются, либо совпадают. Если страт не является ничьей гранью, то такой страт мы называем свободным. Любой страт максимальной размерности является свободным. Размерностью стратифицированного множества будем называть максимальную размерность его стратов. Заметим, что размерность стратифицированного множества вообще говоря не совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^d$.

Далее, третий элемент тройки $(\Omega, \Sigma, \Omega_0)$ – это такое множество $\Omega_0 \subset \Omega$, что выполняются условия:

1. Ω_0 представимо в виде объединения некоторого числа стратов из Σ,

$$\Omega_0 = \bigcup_{\sigma_{mi} \in \Sigma_0 \subset \Sigma} \sigma_{mi};$$

2. Ω_0 – открытое, связное в топологии Ω, и $\bar{\Omega}_0 = \Omega$.

Множество Ω_0 мы будем называть внутренностью стратифицированного множества. А множество $\partial\Omega = \Omega \setminus \Omega_0$ – границей стратифицированного множества.

Приведём теперь условия на гладкость стратов. Для этого нам потребуется понятие "плоского" многообразия.

Определение 1.1 *Пусть $M_k \subset \mathbb{R}^d$ – произвольное k-мерное многообразие. Будем называть M_k плоским, если существует такое линейное многообразие $L_k \subset \mathbb{R}^d$ размерности k, что $M_k \subset L_k$.*

Будем предполагать, что каждый внутренний страт σ_k (т.е. такой, что $\sigma_k \in \Omega_0$) является плоским. А каждый граничный страт – гладкий. На этом определение стратифицированного множества окончено.

Заметим, что выбор стратификации множества Ω (т.е. разбиение Ω на страты) и выбор внутренности Ω_0 являются частью определения стратифицированного множества. Выбор новой стратификации и новой внутренности при том же Ω задаёт новое стратифицированное множество.

Хотя формальное определение стратифицированного множества предполагает задание его в виде тройки $(\Omega, \Sigma, \Omega_0)$, мы позволим себе использовать в качестве обозначения для стратифицированного множества символ Ω, если его стратификация и внутренность были заданы ранее и не меняются в ходе рассуждений.

1.2 Стратифицированный шар

Пусть $X \in \Omega$ – некоторая точка. Рассмотрим шар с центром в точке X радиуса R.

Определение 1.2 *Будем называть радиус R допустимым, если соответ-*

ствующий шар с центром в точке x пересекает только те страты, расстояние до которых от точки X равно нулю.

В примере ниже шар с центром в точке A является допустимым, а шар с центром в точке B – нет.

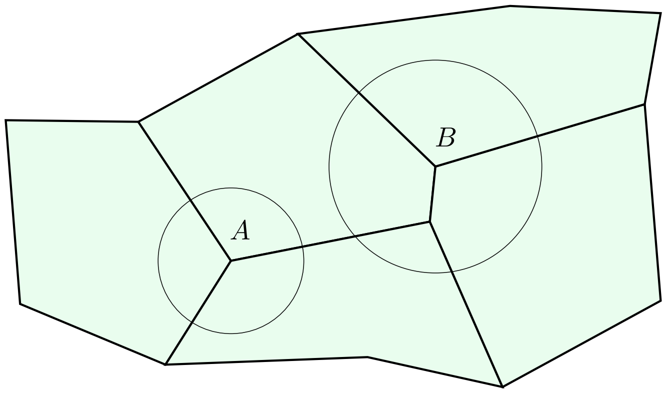

Рис. 3: Пример допустимой и не допустимой сфер

Определение 1.3 *Стратифицированное множество, образованное пересечением с шаром допустимого радиуса, будем называть стратифицированным шаром допустимого радиуса. Пересечение стратифицированного множества со сферой допустимого радиуса будем называть стратифицированной сферой допустимого радиуса.*

Рассмотрим внутреннюю точку $X \in \sigma_k \subset \Omega_0$. Пусть $B(X)$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ допустимого радиуса с центром в точке X, $B_0(X)$ – его внутренность, $S(X)$ – соответствующая сфера. Положим $\Omega' = \Omega \cap B(X)$. Множество Ω' можно рассматривать как самостоятельное стратифицированное множество. Его стратами будут пересечения $B_0(X)$ и $S(X)$ со стратами множества Ω. Его внутренностью будет $\Omega'_0 = B_0(X) \cap \Omega$.

Иногда нам придётся дополнительно включать в границу $\partial\Omega'$ страт σ'_k, где σ'_k – страт, содержащий точку X, центр стратифицированного шара. В этом

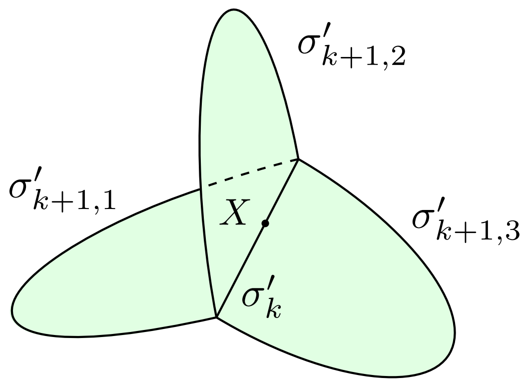

Рис. 4: Пример стратифицированного шара

случае внутренность стратифицированного шара Ω'_0 может оказаться несвязной. Тогда, с формальной точки зрения, мы не можем рассматривать Ω' как стратифицированное множество. В этом случае мы разобьём Ω'_0 на компоненты связности Ω^i_0. Замыкание каждой компоненты связности будем обозначать через Ω^i. Каждое Ω^i мы будем рассматривать как самостоятельное стратифицированное множество. Его границей будет

$$\partial\Omega^i = \sigma'_k \cup S^i,$$

где S^i – участок стратифицированной сферы $S(X)$, соответствующий компоненте связности Ω^i_0.

1.3 Векторные поля и дивергенция

Пусть $\vec{F} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^d$ – векторное поле.

Определение 1.4 *Будем называть $\vec{F}$ касательным, если для любого страта σ_k и любой точки $X \in \sigma_k$ вектор $\vec{F}(X)$ является касательным к страту σ_k в точке X.*

Пусть X – точка k-мерного страта σ_k. Построим стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке X. Будем рассматривать его как самостоятельное стратифицированное множество, обозначим его страты через σ'_{mi}. Рассмотрим все $(k+1)$-мерные страты σ'_{k+1i}, каждый такой страт является $(k+1)$-мерным полушарием.

Определение 1.5 *Вектор нормали в точке X в направлении страта σ'_{k+1i} будем называть примыкающим направлением в точке X и обозначать через ν_i. Набор всех ν_i в точке X будем обозначать через $N(X)$.*

Заметим, что набор стратов σ'_{k+1i} может не соответствовать однозначно набору стратов σ_{k+1j}, примыкающих к σ_k. Возможна ситуация (см. рис. ниже), когда страт σ_{k+1j} примыкает к σ_k более одного раза с разных сторон. В этом случае одному примыкающему страту σ_{k+1j} будут соответствовать несколько примыкающих направлений ν_i.

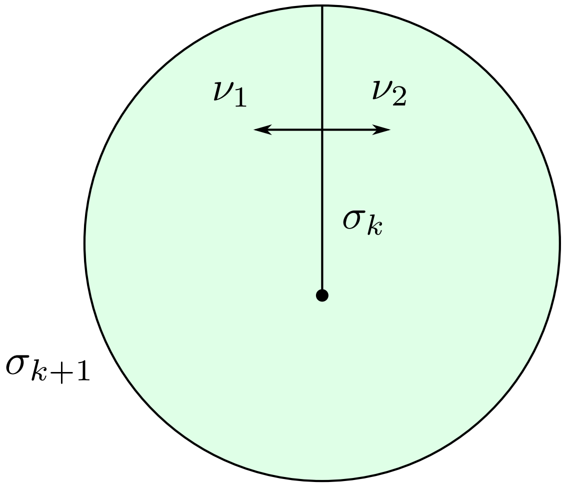

Рис. 5: Пример примыкающих направлений

Пусть ν_i – некоторое фиксированное примыкающее направление в точке $X \in \sigma_k$. Рассмотрим последовательность точек X_j, которые лежат на прямой (X, ν_i) и сходятся к X. Т.к. все страты плоские, то все точки прямой (X, ν_i) в окрестности X принадлежат тому страту σ_{k+1}, в сторону которого смотрит направление ν_i. Значит в точках X_j определена последовательность векторов $\vec{F}(X_j)$. Если для поля $\vec{F}$ существует предел $\vec{F}(X_j)$ при $X_j \to X$, который не зависит от выбора последовательности точек X_j на прямой (X, ν_i), то значение этого предела обозначим через $\vec{F}|_i(X)$.

Определим теперь понятие дивергенции касательного поля в точке X. Причину, по которой именно так определяется дивергенция, см. в [9].

Определение 1.6 *Для любого $\sigma_k \subset \Omega_0$ дивергенция $\operatorname{div} \vec{F}$ векторного поля $\vec{F}$ в точке $X \in \sigma_k$ определяется по формуле*

$$\operatorname{div} \vec{F}(X) = \operatorname{div}_k \vec{F}(X) + \sum_{\nu_i \in N(X)} \vec{F}|_i(X) \cdot \nu_i.$$

Здесь $\operatorname{div}_k \vec{F}$ означает классическую k-мерную дивергенцию сужения поля $\vec{F}$ на страт σ_k. Суммирование ведётся по всем примыкающим направлениям ν_i. Если точка X принадлежит свободному страту, то множество примыкающих направлений пусто. Тогда сумма полагается равной нулю. В этом случае дивергенция совпадает с классической.

Класс полей, для которых дивергенция существует, описывается в следующем параграфе.

1.4 Функциональные пространства

Рассмотрим функцию $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Пусть сужение функции u на каждый внутренний страт $\sigma_k \subset \Omega_0$ является гладкой функцией.

Определение 1.7 *Стратифицированным градиентом функции u на множестве Ω_0 будем называть такое векторное поле, которое для любого страта $\sigma_k \subset \Omega_0$ в каждой точке $X \in \sigma_k$ определяется как вектор градиента от сужения функции u на σ_k.*

Мы будем обозначать стратифицированный градиент через ∇u. Из определения следует, что поле ∇u является касательным к стратифицированному множеству.

Нам понадобятся следующие функциональные пространства.

- $C_\sigma(\Omega_0)$ – пространство функций на Ω_0, сужение которых на каждый страт $\sigma_k \subset \Omega_0$ является непрерывной функцией.
- $\vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$ – пространство касательных векторных полей на Ω_0, сужение которых на каждый страт $\sigma_k \subset \Omega_0$ является полем класса $C^1(\sigma_k) \cap C(\bar{\sigma}_k \cap \Omega_0)$.
- $C^1_\sigma(\Omega_0)$ – пространство функций на Ω_0, сужение которых на каждый страт $\sigma_k \subset \Omega_0$ является функцией класса $C^1(\sigma_k) \cap C(\bar{\sigma}_k \cap \Omega_0)$.
- $C^2_\sigma(\Omega_0)$ – пространство функций u на Ω_0 таких, что $\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$.
- $C(\Omega)$ – пространство непрерывных функций на всём Ω.

Заметим, что из всех приведённых пространств только $C(\Omega)$ гарантирует непрерывность на всём Ω. В основном мы будем рассматривать класс функций $C(\Omega)\cap C^2_\sigma(\Omega_0)$.

Из определения пространств следует, что принадлежность $\vec{F} \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$ является достаточным условием существования дивергенции $\operatorname{div}\vec{F}$ в каждой точке Ω_0.

1.5 Мера и поток

Пусть на каждом страте σ_{kj} задана k-мерная лебегова мера μ_{kj}, индуцированная из объемлющего пространства $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим произвольное множество $G \subset \Omega$. Назовём G измеримым, если его пересечение с каждым стратом $G \cap \sigma_{kj}$ измеримо по соответствующей мере μ_{kj}. Сумму мер всех пересечений назовём мерой G и обозначим через $\mu(G)$

$$\mu(G) = \sum_{kj} \mu_{kj}(G \cap \sigma_{kj}).$$

Эту меру мы будем называть стратифицированной мерой на Ω.

Через μ^k будем обозначать меру на Ω, которая совпадает с μ на k-мерных стратах и равна нулю на всех остальных.

Введём понятие потока векторного поля $\vec{F}$ через границу $\partial\Omega$. Для этого в каждой точке $X \in \partial\Omega$ среди всех примыкающих направлений (см. определение 1.5) выберем только те, которые смотрят в сторону примыкающих стратов из Ω_0.

Определение 1.8 *Совокупность всех внутренних примыкающих направлений мы будем называть пучком внутренних примыкающих направлений и будем обозначать $N_0(X)$, а сами эти направления –через n_i.*

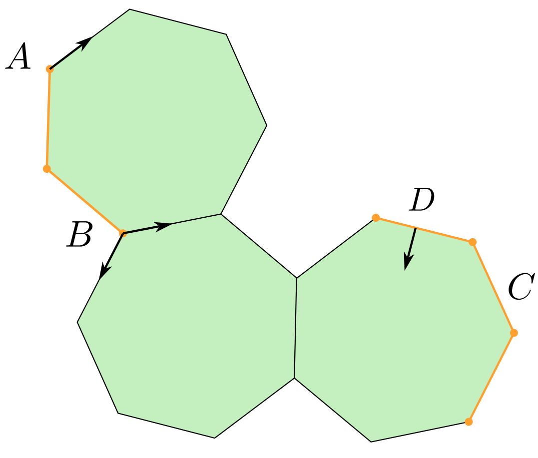

Рис. 6: Пример внутренних примыкающих направлений.

Предположим, что в точке X существует предел поля $\vec{F}$ со стороны n_i. Обозначим этот предел через $\vec{F}|_i(X)$. Положим

$$F_n(X) = \sum_{n_i \in N_0(X)} \vec{F}|_i(X) \cdot n_i.$$

Суммирование ведётся по всем внутренним примыкающим направлениям n_i. Если множество направлений n_i пусто, то F_n полагаем равным нулю.

Определение 1.9 *Интеграл*

$$\int\limits_{\partial\Omega} F_n \, d\mu.$$

будем называть потоком векторного поля по внутреннему направлению через границу $\partial\Omega$.

Имеет место аналог теоремы Гаусса о дивергенции (доказательство см. в [9]).

Теорема 1.1 *Для поля* $\vec{F} \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div} \vec{F} \, d\mu = -\int\limits_{\partial\Omega} F_n \, d\mu.$$

Пусть $B \subset \Omega_0$ – стратифицированный шар допустимого радиуса, B_0 – его внутренность, S – соответствующая стратифицированная сфера. Стратифицированная мера μ порождает на S стратифицированную меру площади, которую мы обозначим через μ_s. Теорема о дивергенции для сужения поля $\vec{F}$ на B тогда примет вид

$$\int\limits_{B_0} \operatorname{div} \vec{F} \, d\mu = -\int\limits_{S} F_n \, d\mu_s.$$

1.6 Дифференциальные операторы

Пусть $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$. И пусть $p \in C^1_\sigma(\Omega_0)$ – положительная функция на каждом свободном страте и неотрицательная на каждом несвободном. Тогда $p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$. Определим оператор

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(p\nabla u).$$

Такой оператор мы будем называть эллиптическим в дивергентной форме.

Согласно определению дивергенции, имеем в точке $X \in \sigma_k$

$$\Delta_p u(X) = \mathrm{div}_k(p\nabla u)(X) + \sum_{\nu_i \in N(X)} p|_i(X)\frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X).$$

Здесь $p|_i(X)$ предел функции p в точке x со стороны ν_i. Суммирование ведётся по всем примыкающим направлениям.

Как видим, эллиптический оператор представляет собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое мы будем называть классической частью, т.к. оно представляет из себя классический эллиптический оператор. Второе слагаемое будем называть неклассической частью. На свободных стратах вторая часть формально равна нулю, т.к. суммирование ведётся по пустому множеству примыкающих направлений. Поэтому на свободных стратах стратифицированный эллиптический оператор совпадает с классическим.

Помимо оператора в дивергентной форме, мы будем рассматривать эллиптический оператор в координатной форме. Для этого на каждом страте σ_k введём k-мерную ортонормированную систему координат $(x^1, \dots, x^k)$. И рассмотрим оператор вида

$$Lu(X) = a^{qr}(X)D_{qr}u(X) + b^q(x)D_q u(X) + \sum_{\nu_i \in N(X)} p|_i(X)\frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X)$$

- D_{qr} и D_q – символы взятия производной по направлениям x_q и x_r, суммирование ведётся по повторяющимся элементам;
- a^{qr} и b^q принадлежат пространству $C_\sigma(\Omega_0)$;
- матрица a^{qr} – положительно определённая;
- $N(X)$ – набор примыкающих направлений в точке X;
- $p \in C_\sigma(\Omega_0)$ продолжаема по непрерывности на $\bar{\sigma}_k \cap \Omega_0$ для любого страта

$\sigma_k \subset \Omega_0$; $p|_i(X)$ – предел функции p в точке X со стороны ν_i; $p(X) \geq p_0 > 0$;

- $\lambda(X) \geq \lambda_0 > 0$, $\Lambda(X) < \infty$, $b^q(X) < \infty$ и $p(X) < \infty$, где $\Lambda(X)$ и $\lambda(X)$ – максимальное и минимальное собственные значения матрицы $a^{qr}(X)$.

Оператор L является аналогом строго и равномерно эллиптического оператора для стратифицированного множества. Первые три условия и последнее – это стандартные условия для строго и равномерно эллиптического оператора (см., например, [12]).

Оператор L мы будем называть эллиптическим оператором в координатной форме. Сумму

$$a^{qr}(X)D_{qr}u(X) + b^q(x)D_q u(X)$$

будем называть классической частью оператора L.

1.7 Гармонические функции

Рассмотрим отдельно оператор Δ_p для случая, когда $p \equiv 1$ на свободных стратах и $p \equiv 0$ на всех остальных. Такой оператор мы будем называть мягким лапласианом. Кроме того, будем предполагать, что все свободные страты множества Ω имеют одинаковую размерность n. В этом случае имеет место следующее представление. На всех свободных стратах имеем

$$\Delta_p u = \Delta u,$$

а на стратах размерности $k = n - 1$

$$\Delta_p u = \sum_{\nu_i} \frac{\partial u}{\partial \nu_i}.$$

Это прямое следствие разложения оператора на классическую и неклассическую части. На всех стратах размерности $k \leq n-2$ оператор Δ_p вырождается, и на любой функции $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$ становится равен нулю.

Введём для удобства ещё одно пространство

- $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ – пространство функций u на Ω_0 таких, что $p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$.

Тогда мягкий лапласиан определён для любой функции из $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$.

Если $u \in C(\Omega_0) \cap C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ и

$$\Delta_p u = 0,$$

то функцию u будем называть гармонической на Ω_0.

При работе с мягким лапласианом удобно ограничиться мерами μ^n и μ^{n-1} (см. определение в §1.5). Теорема 1.1 о дивергенции для мягкого лапласиана примет вид

Теорема 1.2 *Если $u \in C(\Omega) \cap C^2_{\sigma,p}(\Omega)$, то*

$$\int\limits_{\Omega_0} \Delta_p u \, d\mu = -\int\limits_{\partial\Omega} (p\nabla u)_n \, d\mu = -\int\limits_{\partial\Omega} (\nabla u)_n \, d\mu^{n-1}.$$

Для гармонических функций имеет место теорема о среднем (см. доказательство в [9]).

Теорема 1.3 *Пусть u – гармоническая функция на Ω_0. Тогда для любого стратифицированного шара B допустимого радиуса с центром в точке $X \in \Omega_0$ и соответствующей стратифицированной сферы S выполняется*

$$u(X) = \frac{1}{\mu_s^{n-1}(S(X))} \int\limits_{S(X)} u \, d\mu_s^{n-1} = \frac{1}{\mu^n(B(X))} \int\limits_{B(X)} u \, d\mu^n.$$

Здесь μ_s^{n-1} – стратифицированная мера площади на сфере S (см. определение в §1.5).

2 Сильный принцип максимума

В этой главе будут доказаны лемма о нормальной производной для эллиптического оператора на стратифицированном множестве, сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве и сильный принцип максимума для параболического оператора на стратифицированном множестве.

2.1 Лемма о нормальной производной

Лемма о нормальной производной играет ключевую роль при доказательстве сильного принципа максимума. Кроме того, она представляет самостоятельный интерес.

Пусть Ω – стратифицированное множество. Будем рассматривать эллиптический оператор следующего вида

$$Lu = a^{qr} D_{qr} u + b^q D_q u + \sum_{\nu_i} p|_i \frac{\partial u}{\partial \nu_i}$$

(см. определение в §1.6).

Определение 2.1 *Назовём граничный страт $\sigma_k \in \partial\Omega$ изолированным, если к нему не примыкают никакие другие граничные страты большей размерности.*

Лемма 2.1 (о нормальной производной) *Пусть Ω – стратифицированное множество, а $\sigma_k \in \partial\Omega$ – плоский изолированный граничный страт. Пусть функция u удовлетворяет на Ω_0 неравенству*

$$Lu \geq 0$$

и достигает своего максимума в некоторой точке $X_0 \in \sigma_k$. И пусть также выполняется строгое неравенство $u(X) < u(X_0)$ для всех точек $X \in \Omega_0$. Пусть ν – одно из примыкающих направлений в точке X_0, и существует нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ в точке X_0.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} < 0.$$

Доказательство: Рассмотрим стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке X_0. Будем рассматривать его как самостоятельное стратифицированное множество и обозначать через Ω'. Т.к. утверждение леммы носит локальный характер, то дальнейшие рассуждения мы будем проводить на множестве Ω'.

Обозначим через σ'_k страт в Ω', в котором лежит точка X_0, и который образован пересечением Ω' с σ_k. Положим в качестве границы множества Ω'

$$\partial\Omega' = S \cup \sigma'_k.$$

В этом случае множество $\Omega'_0 = \Omega' \setminus \partial\Omega'$ может оказаться несвязным (см. подробнее в §1.2). Без ограничения общности будем считать, что Ω'_0 состоит из одной компоненты связности. В противном случае перейдём к той компоненте связности Ω^i_0, в сторону которой смотрит примыкающее направление ν. Обозначим страт, в сторону которого смотрит направление ν, через σ'_{k+1}.

Ключевым моментом доказательства является построение барьерной функции, т.е. функции, имеющей положительную нормальную производную, и которая при сложении с функцией u сохраняет все условия леммы и усиливает дифференциальное неравенство до строгого (и тогда неположительность в точке максимума граничной производной от суммы немедленно влечёт отрицательность граничной производной от u). Мы будем обозначать её через ϕ.

Описание процесса построения барьерной функции ϕ мы начнём со вспомогательного утверждения.

Определение 2.2 *Будем говорить, что вектор перпендикулярен плоскому многообразию, если он перпендикулярен его касательному пространству.*

Утверждение 2.1 *Существует такой вектор $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$, который перпендикулярен страту σ'_k, образует острый угол с направлением ν, а его проекция на все страты из Ω'_0 ненулевая.*

Доказательство: Положим N_k и N_{mj} – линейные пространства векторов из $\mathbb{R}^d$, перпендикулярных к σ'_k и σ'_{mj} соответственно, где σ'_{mj} – произвольный страт из Ω'_0. Тогда N_k имеет размерность $(d-k)$, а N_{mj} – $(d-m)$. Т.к. Ω' – стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке $X_0 \in \sigma'_k$, и страт σ'_k является граничным, то все страты $\sigma'_{mj} \subset \Omega'_0$ имеют размерность больше k. Тогда $d-k > d-m$, следовательно множество

$$N_k \setminus \Big(\bigcup_{mj} N_{mj} \Big)$$

непусто и, более того, плотно в N_k. Поэтому для вектора ν, который по условию леммы принадлежит N_k, можно выбрать такой вектор

$$\vec{b} \in N_k \setminus \Big(\bigcup_{mj} N_{mj} \Big),$$

который будет образовывать с ν острый угол. Т.к. $\vec{b} \notin \bigcup_{mj} N_{mj}$, то его проекция на все страты из Ω'_0 будет ненулевая. Утверждение доказано. ■

Построим теперь вспомогательную функцию $h: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ следующего вида

$$h(X) = \langle \vec{b}, X - X_0 \rangle,$$

где X_0 – центр шара Ω', X – произвольная точка $\mathbb{R}^d$, $X - X_0$ – вектор, соединяющий точки X_0 и X и направленный в сторону X, $\vec{b}$ – вектор, фигурирующий в утверждении 2.1, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Отметим некоторые свойства функции h. Это будет аффинная функция. Её значение в точке X_0 равно нулю. Её градиент во всех точках равен $\vec{b}$. Её значение в каждой точке $X \in \sigma'_k$ равно нулю, т.к. $h(X_0) = 0$ и $\vec{b} \perp \sigma'_k$. Производная h по направлению ν в точке X_0 больше нуля, т.к., по построению, $\langle \vec{b}, \nu \rangle > 0$. Сужение функции h на любой страт $\sigma'_{mj} \subset \Omega'_0$ является аффинной функцией, т.к. каждый страт $\sigma'_{mj} \subset \Omega'_0$ плоский. Градиент функции, полученной в результате сужения h на σ'_{mj}, постоянен на каждом σ'_{mj} (т.к. равен проекции вектора $\vec{b}$ на касательное пространство σ'_{mj}) и отличен от нуля (по построению $\vec{b}$). Следовательно модуль стратифицированного градиента функции h как функции на Ω'_0 отделён от нуля

$$|\nabla h| > \delta > 0.$$

Положим теперь для любого $X \in \Omega'$

$$\phi(X) = e^{\alpha h(X)} - 1 - \varepsilon_1 |X - X_0|^2,$$

где α и ε_1 – некоторые положительные числа, которые будут заданы позже. Т.к. ϕ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^d$, то $\phi \in C^2_\sigma(\Omega'_0) \cap C(\Omega')$.

Утверждение 2.2 *Для функции ϕ выполняются свойства:*

1. $\phi(X_0) = 0$.
2. *существует такая окрестность $U(\sigma'_k)$, что во всех точках $U(\sigma'_k) \cap \partial\Omega'$ выполняется $\phi \leq 0$.*
3. $L\phi \geq C > 0$ *на* Ω'_0.

4. $\left.\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|_{X=X_0} > 0.$

Доказательство: Т.к. $h(X_0) = 0$, то $\phi(X_0) = 0$ (свойство 1).

Проверим свойство 3. Результат применения оператора L к функции $e^{\alpha h}$ равен

$$(Le^{\alpha h})(X) =$$
$$= e^{\alpha h(X)}\Big(\alpha^2 a^{qr}(X)D_q h(X)D_r h(X) + \alpha b^q(X)D_q h(X) + \alpha\sum_{\nu_i} p|_i(X)\frac{\partial h}{\partial\nu}(X)\Big) \geq$$
$$\geq e^{\alpha h(X)}\Big(\alpha^2\lambda(X)|\nabla h|^2 + \alpha b^q(X)D_q h(X) + \alpha\sum_{\nu_i} p|_i(X)\frac{\partial h}{\partial\nu}(X)\Big)$$

Т.к. функция h ограниченная, то величина $e^{\alpha h(X)}$ отделена от нуля. Т.к. $|\nabla h|^2$ и $\lambda(X)$ больше некоторой положительной константы ($|\nabla h|^2$ – по построению, $\lambda(X)$ – по определению оператора L), а величины

$$b^q(X)D_q h(X) \text{ и } p|_i(X)\frac{\partial h}{\partial\nu}(X)$$

ограниченны, то, выбирая α достаточно большим, получим неравенство

$$L(e^{\alpha h} - 1)(X) \geq C_1 > 0.$$

Положим $g(X) = |X - X_0|^2$. Результат применения оператора L к функции g равен

$$\Big|Lg(X)\Big| = \Big|a^{qr}(X)D_{qr}g(X) + b^q(X)D_q g(X) + \sum_{\nu_i} p|_i(X)\frac{\partial g}{\partial\nu}(X)\Big| \leq$$
$$\leq C_2\Big(\Lambda(X) + |b^q(X)| + \sum_{\nu_i} p|_i(X)\Big) \leq C_3.$$

Выбирая теперь ε_1 достаточно малым, получим

$$L\phi(X) \geq C_1 - \varepsilon_1 C_3 > C > 0.$$

(свойство 3).

Проверим свойство 2. В случае, когда σ'_k имеет размерность ноль (т.е. σ'_k состоит из одной точки X_0), сфера S находится от него на ненулевом расстоянии. Это значит, что существует такая окрестность $U(\sigma'_k)$, что её пересечение с S пусто. И т.к.

$$\partial\Omega' = \sigma'_k \cup S,$$

то

$$U(\sigma'_k) \cap \partial\Omega' = U(\sigma'_k) \cap \sigma'_k = X_0,$$

в которой $\phi(X_0) = 0$.

Пусть $k > 0$. Имеет место представление

$$U(\sigma'_k) \cap \partial\Omega' = \big(U(\sigma'_k) \cap \sigma'_k\big) \cup \big(U(\sigma'_k) \cap S\big) = \sigma'_k \cup \big(U(\sigma'_k) \cap S\big).$$

В точках страта σ_k выполняется $e^{\alpha h} - 1 = 0$ (т.к., по построению, $h = 0$ во всех точках σ_k). Поэтому при $X \in \sigma'_k$ выполняется $\phi(X) \leq 0$.

Рассмотрим теперь множество $U(\sigma'_k) \cap S$. Обозначим радиус S через R. Во всех точках сферы S

$$-\varepsilon_1 |X - X_0|^2 = -\varepsilon_1 R^2 < 0.$$

Поэтому при $X \in \sigma_k \cap S$

$$\phi(X) \leq -\varepsilon_1 R^2 < 0.$$

В силу непрерывности функции ϕ, найдётся такая окрестность $U_1(\sigma_k \cap S)$ множества $\sigma_k \cap S$, в которой $\phi \leq 0$. Т.к. $\sigma'_k \subset \sigma_k$, то существует такая окрестность $U(\sigma'_k)$ множества σ'_k, что

$$U(\sigma'_k) \cap S \subset U_1(\sigma_k \cap S).$$

Поэтому получаем при $X \in U(\sigma'_k) \cap S$ неравенство $\phi(X) \leq 0$. Свойство 2 доказано.

И наконец, т.к. производная h по направлению ν в точке X_0 больше нуля, а производная $|X-X_0|^2$ по направлению ν в точке X_0 равна нулю, то производная ϕ по направлению ν в точке X_0 будет больше нуля (свойство 4). Утверждение доказано. ■

Итак, мы построили барьерную функцию ϕ с заданными свойствами. Положим $\tilde{u} = u + \varepsilon\phi$.

Утверждение 2.3 *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для всех точек* $X \in \Omega'$ *выполняется неравенство* $\tilde{u}(X) \leq \tilde{u}(X_0)$.

Доказательство: Разобьём границу $\partial\Omega'$ на два подмножества. Первое –

$$\sigma_k' \cup (U(\sigma_k') \cap S),$$

где $U(\sigma_k')$ – окрестность множества σ_k', фигурирующая в пункте 2 утверждения 2.2. Второе – оставшаяся часть границы.

На первом множестве, согласно пункту 2 утверждения 2.2, $\phi \leq 0$. Поэтому $\tilde{u}(X) \leq u(X_0)$. Оставшаяся часть границы является замкнутым множеством и, по построению множества Ω', лежит в Ω_0, на котором $u(X) < u(X_0)$. Поэтому на этой части границы имеет место оценка $u(X) < u(X_0) - \delta$. Т.к. ϕ ограниченная, то при некотором $\varepsilon > 0$ будет $\varepsilon\phi < \delta$. Следовательно $\tilde{u}(X) < u(X_0)$.

Итак, имеем при $X \in \partial\Omega'$ неравенство $\tilde{u}(X) \leq u(X_0)$. Т.к. $\phi(X_0) = 0$, то $\tilde{u}(X) \leq \tilde{u}(X_0)$. Покажем теперь, что значения функции $\tilde{u}$ на Ω_0' не превосходят значений на $\partial\Omega'$.

Предположим противное, пусть

$$\sup_{\Omega_0'} \tilde{u} > \sup_{\partial\Omega'} \tilde{u}.$$

В силу непрерывности $\tilde{u}$, найдётся такая точка $X \in \Omega_0'$, которая будет точкой нетривиального максимума функции $\tilde{u}$. В этой точке

$$L\tilde{u}(X) = a^{qr}(X)D_{qr}\tilde{u}(X) + b^q(X)D_q\tilde{u}(X) + \sum_{\nu_i} p|_i(X)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_i}(X) > 0.$$

В точке $X \in \Omega_0'$ предполагаемого максимума все производные функции $\tilde{u}$ по направлениям ν_i будут неположительные. Значит в точке X выполняется неравенство

$$a^{qr}(X)D_{qr}\tilde{u}(X) + b^q(X)D_q\tilde{u}(X) > 0.$$

В левой части неравенства стоит классический эллиптический оператор на страте σ_k'. Т.к. все коэффициенты и все производные, фигурирующие в этом неравенстве, непрерывны в пределах страта, то это неравенство выполняется в некоторой окрестности точки X страта σ_k'. Что противоречит наличию в точке X максимума, в силу классического принципа максимума для эллиптического оператора.

Итак, мы получили при любом $X \in \Omega'$ неравенство $\tilde{u}(X) \leq \tilde{u}(X_0)$. Утверждение доказано. ■

Т.к. X_0 – точка максимума функции $\tilde{u}$, и производная функции $\tilde{u}$ по направлению ν в точке X_0 существует, то она неположительна. А т.к. производная ϕ по направлению ν в точке X_0 строго больше нуля, то

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} - \varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} < 0.$$

Лемма доказана. ■

2.2 Сильный принцип максимума для эллиптического оператора

Определение 2.3 *Назовём $X \in \Omega_0$ точкой локального нетривиального максимума функции u, если X – точка локального максимума функции u, и для любой окрестности $U(X)$ точки X функция u не является константой на множестве $U(X) \cap \Omega_0$.*

Теорема 2.1 (сильный принцип максимума) *Пусть Ω – стратифицированное множество, и L – эллиптический оператор на Ω_0. Пусть $u \in C(\Omega) \cap C^2_\sigma(\Omega_0)$ удовлетворяет неравенству*

$$Lu \geq 0.$$

Тогда у функции u на Ω_0 не может быть точек локального нетривиального максимума.

Доказательство: Предположим противное. Пусть на Ω_0 имеются точки локального нетривиального максимума. Выберем такую из них (обозначим её X_0), которая лежит на страте максимально возможной размерности σ_k.

Из классического принципа максимума следует, что σ_k не является свободным стратом, т.к. на всех свободных стратах оператор L совпадает с классическим. Поэтому к σ_k примыкают страты σ_{mj} размерности $m > k$. Т.к. X_0 – точка нетривиального максимума на страте максимально возможной размерности k, то для любой точки $X \in \sigma_{mj}$ при $m > k$ либо выполняется неравенство $u(X) < u(X_0)$ в некоторой окрестности точки X_0, либо X – точка тривиального максимума.

Построим стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке X_0. Будем рассматривать его как самостоятельное стратифицированное множество и обозначать через Ω'. У него есть естественная граница – стратифицированная сфера, которую мы обозначим через S. Помимо неё, включим в границу $\partial\Omega'$ страт σ'_k

$$\partial\Omega' = S \cup \sigma'_k,$$

где σ'_k – страт в Ω', в котором лежит точка X_0, и который образован пересечением Ω' с σ_k. При этом множество $\Omega'_0 = \Omega' \setminus \partial\Omega'$ может оказаться несвязным (см. подробнее в §1.2).

Рассмотрим по отдельности все компоненты связности Ω_0^i множества Ω'_0.

Утверждение 2.4 *Для любой компоненты связности Ω_0^i имеет место следующая альтернатива. Либо функция u равна константе на всём Ω_0^i, либо для любой точки $X \in \Omega_0^i$ выполняется неравенство $u(X) < u(X_0)$.*

Доказательство: Рассмотрим множество всех точек максимума функции u на Ω_0^i. Согласно выбору точки X_0, множество таких точек максимума либо пусто, либо состоит из точек тривиального максимума. Легко видеть, что множество точек тривиального максимума открыто в Ω_0^i, т.к. каждый тривиальный максимум содержится в нём вместе с некоторой окрестностью таких же тривиальных максимумов. С другой стороны, множество точек максимума замкнуто в Ω_0^i, т.к. функция u непрерывна. И т.к. Ω_0^i связно, то множество точек максимума на Ω_0^i либо совпадает со всем Ω_0^i, либо пусто.

Если множество точек максимума на Ω_0^i совпадает со всем Ω_0^i, то функция u является на Ω_0^i константой. Если множество точек максимума на Ω_0^i пусто, то, по построению, для любой точки $X \in \Omega_0^i$ выполняется неравенство $u(X) < u(X_0)$. Утверждение доказано. ∎

Если функция u равна константе на Ω_0^i, то по всем примыкающим направлениям в пределах Ω_0^i нормальная производная равна нулю. Если функция u

не равна константе, то выполняются все условия леммы о нормальной производной. Следовательно по любому примыкающему направлению в пределах Ω_0^i нормальная производная меньше нуля.

Т.к. X_0 – точка нетривиального максимума, то существует хотя бы одна компонента связности, на которой u не равна константе. Т.к. функция p, фигурирующая в определении оператора L, предполагалась больше некоторого положительного числа, то

$$\sum_{\nu_i} p|_i(X_0)\frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X_0) < 0.$$

Значит классическая часть оператора L больше нуля

$$a^{qr}(X_0)D_{qr}u(X_0) + b^q(X_0)D_q u(X_0) > 0,$$

что противоречит классическому принципу максимума, применённому к сужению функции u на σ_k. Теорема доказана. ■

2.3 Замечания

Замечание 2.1 *В отличие от классического случая, на стратифицированном множестве решение неравенства*

$$Lu \geq 0$$

не будучи константой на Ω вообще говоря может иметь тривиальные локальные максимумы.

Приведём пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ стратифицированное множество Ω как на рисунке ниже.

Здесь страты σ_{21} и σ_{23} лежат в одной плоскости, параллельной оси x^3, а

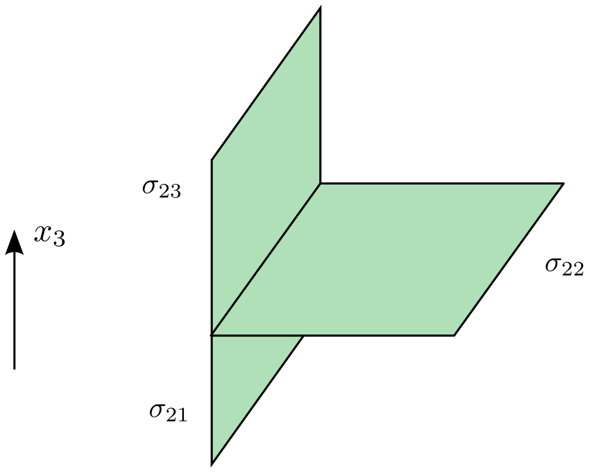

Рис. 7: Пример

страт σ_{22} лежит в плоскости, параллельной плоскости x^1Ox^2.

Пусть L – эллиптический оператор, который при $X \in \sigma_k$ имеет вид

$$Lu(X) = \Delta_k u(X) + \sum_{\nu_i} \frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X),$$

где Δ_k – классический лапласиан размерности k на страте σ_k. Положим $u(X) = x^3$. Легко видеть, что функция u удовлетворяет равенству $Lu = 0$. При этом на страте σ_{22} функция u является константой, т.е. состоит из локальных тривиальных максимумов.

Замечание 2.2 *Если формулировать сильный принцип максимума для глобальных максимумов, то от требования нетривиальности можно избавиться.*

Теорема 2.2 *Пусть $u \in C(\Omega) \cap C^2_\sigma(\Omega_0)$ удовлетворяет неравенству*

$$Lu \geq 0.$$

Тогда функция u может иметь на Ω_0 глобальный максимум в том и только в том случае, если u является константой на всём Ω_0.

Доказательство: Рассмотрим на Ω_0 множество тривиальных максимумов.

Очевидно, что это множество открыто, т.к. каждый тривиальный максимум содержится в Ω_0 с некоторой окрестностью тривиальных максимумов. Далее, т.к. u непрерывна на Ω_0, то множество всех глобальных максимумов u замкнуто относительно Ω_0. А т.к. по доказанной теореме множество максимумов совпадает с множеством тривиальных максимумов, то последнее тоже замкнуто.

Таким образом, множество тривиальных максимумов одновременно и открыто, и замкнуто относительно Ω_0. Т.к. Ω_0 связно, то множество точек максимума либо пусто, либо совпадает со всем Ω_0. ■

Замечание 2.3 *Стандартным образом можно получить принцип максимума для оператора вида $L - q$, где $q \in C_\sigma(\Omega_0)$.*

Теорема 2.3 *Пусть $q \in C_\sigma(\Omega_0)$ – неотрицательная функция, и*

$$u \in C^2_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega_0)$$

– решение неравенства $Lu - qu \geq 0$. Тогда u не может иметь в Ω_0 точек положительного локального нетривиального максимума.

Доказательство: В самом деле, пусть такой максимум существует. Тогда в его окрестности функция u строго положительна. Перенося qu в правую часть, получим

$$Lu \geq qu \geq 0.$$

Следовательно, внутреннего нетривиального максимума быть не может. ■

2.4 Принцип максимума для параболического оператора

2.4.1 Постановка задачи

Пусть Ω – стратифицированное множество. Рассмотрим декартово произведение $\Omega \times [0, T]$. Полученное множество будем называть стратифицированным цилиндром. Множество $\Omega_0 \times (0, T)$ будем называть внутренностью цилиндра. Множества $\Omega_0 \times \{0\}$ и $\Omega_0 \times \{T\}$ будем называть нижней и верхней крышкой цилиндра, множество $\partial\Omega \times [0, T]$ - боковой границей. Будем называть параболической границей цилиндра объединение боковой границы и нижней крышки.

При фиксированном $t \in [0, T]$ сечение цилиндра представляет из себя копию стратифицированного множества Ω, сдвинутое на величину t. Такое сечение мы будем обозначать Ω^t. Если $u \in C^2_\sigma(\Omega^t_0)$, то для сужения u на Ω^t_0 определён эллиптический оператор L. Он состоит из двух частей – классической и неклассической части. Каждую нормальную производную, фигурирующую в определении оператора L, мы будем называть нормальной производной в пределах сечения.

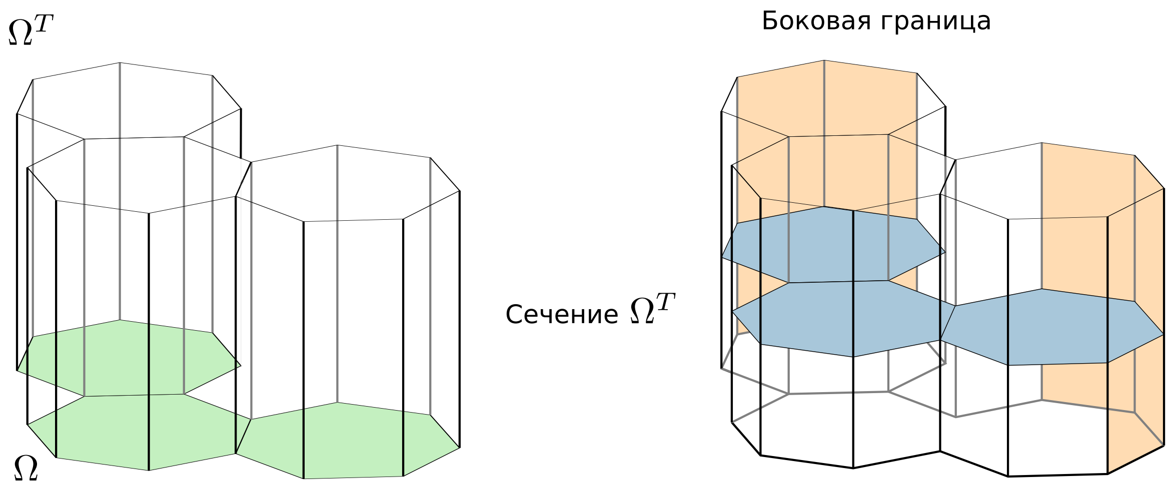

Рис. 8: Пример стратифицированного цилиндра

Рассмотрим в произвольной точке $X \in \Omega^t$ единичный вектор, перпендикулярный сечению Ω^t и смотрящий в сторону возрастания t. Производную функции u по направлению этого вектора будем обозначать

$$\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Потребуем от функции u выполнения следующих свойств. Для каждого сечения Ω_0^t сужение функции u принадлежит $C^2_\sigma(\Omega_0^t)$ и в каждой точке $x \in \Omega_0 \times (0,T]$ функция u имеет непрерывную производную по t. Такой класс функций мы обозначим через $C^2_{\sigma,t}(\Omega_0 \times (0,T])$ Для таких функций u определим оператор

$$\mathbb{T}u = Lu - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Оператор $\mathbb{T}$ мы будем называть параболическим.

Определение 2.4 *Назовём $X \in \Omega_0 \times (0,T]$ точкой локального нетривиального максимума функции u, если X – точка локального максимума функции u, и для любой окрестности $U(X)$ точки X функция u не является константой на множестве $U(X) \cap (\Omega_0 \times (0,T])$.*

Теорема 2.4 (сильный принцип максимума) *Пусть*

$$u \in C(\Omega \times [0,T]) \cap C^2_{\sigma,t}(\Omega_0 \times (0,T]).$$

И пусть для неё выполняется неравенство $\mathbb{T}u \geq 0$. Тогда функция u не может иметь внутри цилиндра и на верхней крышке локального нетривиального максимума.

2.4.2 Лемма о нормальной производной

Для доказательства принципа максимума нам понадобится лемма о нормальной производной для параболического оператора.

Лемма 2.2 *Пусть $\Omega \times (0,T]$ – стратифицированный цилиндр. Пусть*

$$u \in C(\Omega \times [0,T]) \cap C^2_{\sigma,t}(\Omega_0 \times (0,T])$$

удовлетворяет на $\Omega_0 \times (0,T]$ неравенству $\mathbb{T}u \geq 0$ и достигает своего максимума в некоторой точке X_0, лежащей на боковой границе цилиндра. И пусть также выполняется строгое неравенство $u(X) < u(X_0)$ для всех точек $X \in \Omega_0 \times (0,T]$.

Пусть Ω^t – сечение, которому принадлежит точка X_0, ν – одно из примыкающих направлений в точке X_0 в пределах этого сечения Ω^t, а граничный страт сечения, содержащий точку X_0, изолированный и плоский. Тогда, если существует производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, то она меньше нуля.

Доказательство: Доказательство аналогично эллиптическому случаю. Рассмотрим сечение Ω^t. Рассмотрим в Ω^t шар допустимого радиуса с центром в точке X_0. Обозначим его через Ω' и будем считать без ограничения общности, что его внутренность Ω'_0 связна (см. подробнее в §1.2). Обозначим через σ'_k страт из Ω', в котором лежит точка X_0, и который образован пересечением Ω' с σ^t_k. Граница $\partial\Omega'$ имеет вид

$$\partial\Omega' = S \cup \sigma'_k,$$

где S – участок $\partial\Omega'$, который приходится на стратифицированную сферу. Обозначим страт, в сторону которого смотрит направление ν, через σ'_{k+1}.

Построим на Ω' барьерную функцию ϕ', как при доказательстве леммы о нормальной производной для эллиптического оператора. Для функции ϕ' будут выполняться следующие свойства.

1. $\phi'(X_0) = 0$.

2. существует такая окрестность $U(\sigma'_k)$, что во всех точках $U(\sigma'_k) \cap \partial\Omega'$ вы-

полняется $\phi' \leq 0$.

3. $L\phi' \geq C > 0$ на Ω'_0.

4. $\left.\frac{\partial \phi'}{\partial \nu}\right|_{X=X_0} > 0$, где ν – примыкающее направление из условия леммы.

Построим цилиндр $\Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$ достаточно малой высоты и такой, что множество Ω'_0 оказывается его верхней крышкой. До конца доказательства все рассмотрения будем вести в новом цилиндре $\Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$. Введём на $\mathbb{R}^{d+1}$, в котором содержится цилиндр $\Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$, координаты (x, t) так, чтобы при фиксированном $t = \tau$ множество точек $X = (x, \tau)$ пробегало сечение Ω^τ. Положим на $\Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$ функцию

$$\phi(x, t) = \phi'(x) + \varepsilon_2(t - \tau_2).$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon_2 > 0$ имеем

$$\mathbb{T}\phi(x, t) = L\phi(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = L\phi'(x) - \varepsilon_2 \geq C - \varepsilon_2 > 0.$$

Далее, существует такая окрестность $U(\sigma'_k \times [\tau_1, \tau_2])$, что для всех точек параболической границы в этой окрестности $\phi \leq 0$. В самом деле, рассмотрим по отдельности боковую границу и нижнюю крышку цилиндра. Т.к. ϕ' не зависит от t, то, согласно свойству 2 функции ϕ', существует такая окрестность $U_1(\sigma'_k \times [\tau_1, \tau_2])$, что для всех точек боковой границы в этой окрестности $\phi' \leq 0$. Тогда в этих точках боковой границы

$$\phi'(x) + \varepsilon_2(t - \tau_2) \leq 0.$$

В точках множества $\sigma'_k \times \{\tau_1\}$ имеем

$$\phi'(x) + \varepsilon_2(\tau_1 - \tau_2) = -\varepsilon_2(\tau_2 - \tau_1) < 0.$$

Значит существует такая окрестность $U_2(\sigma'_k \times [\tau_1, \tau_2])$, что во всех точках нижней крышки цилиндра в этой окрестности $\phi \leq 0$. Выбирая теперь $U = U_1 \cap U_2$, получим нужную окрестность.

Положим $\tilde{u} = u + \varepsilon\phi$.

Утверждение 2.5 *Существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех точек $X \in \Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$ выполняется неравенство $\tilde{u}(X) \leq \tilde{u}(X_0)$.*

Доказательство: Разобьём параболическую границу цилиндра $\Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$ на два подмножества. Первое – часть параболической границы в окрестности $U(\sigma'_k \times [\tau_1, \tau_2])$, которую мы построили выше. Второе – оставшаяся часть границы.

На первом множестве $\phi \leq 0$. Поэтому $\tilde{u}(X) \leq u(X_0)$. Оставшаяся часть границы является замкнутым множеством и, по построению цилиндра $\Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$, лежит в Ω_0, на котором $u(X) < u(X_0)$. Поэтому на этой части параболической границы имеет место оценка $u(X) < u(X_0) - \delta$. Т.к. ϕ ограниченная, то при некотором $\varepsilon > 0$ будет $\varepsilon\phi < \delta$. Следовательно $\tilde{u}(X) < u(X_0)$.

Итак, если X принадлежит параболической границе цилиндра, то $\tilde{u}(X) \leq u(X_0)$. Т.к. $\phi(X_0) = 0$, то $\tilde{u}(X) \leq \tilde{u}(X_0)$. Покажем теперь, что значения функции $\tilde{u}$ на $\Omega'_0 \times (\tau_1, \tau_2]$ не превосходят значений на параболической границе цилиндра.

Предположим противное. Тогда, в силу непрерывности $\tilde{u}$, найдётся точка $X \in \Omega'_0 \times (\tau_1, \tau_2]$, которая будет точкой нетривиального максимума функции $\tilde{u}$. В этой точке

$$\mathbb{T}u(X) = L\tilde{u}(X) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(X) =$$
$$= a^{qr}(X) D_{qr}\tilde{u}(X) + b^q(X) D_i\tilde{u}(X) + \sum_{\nu_i} p\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_i}(X) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(X) > 0.$$

В точке X предполагаемого максимума все производные функции $\tilde{u}$ по направлениям ν_i будут неположительные. Значит в точке X выполняется неравенство

$$a^{qr}(X)D_{qr}\tilde{u}(X) + b^q(X)D_q\tilde{u}(X) - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(X) > 0.$$

В левой части неравенства стоит классический параболический оператор на $\sigma'_k \times (\tau_1, \tau_2]$. Т.к. все коэффициенты и все производные, фигурирующие в этом неравенстве, непрерывны в пределах $\sigma'_k \times (\tau_1, \tau_2]$, то это неравенство выполняется в некоторой окрестности точки X множества $\sigma'_k \times (\tau_1, \tau_2]$. Но, в силу классического принципа максимума для параболического оператора, решение $\tilde{u}$ не может иметь нетривиального максимума внутри цилиндра и на верхней крышке. Что немедленно влечёт противоречие.

Итак, мы получили для всех точек $X \in \Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$ неравенство $\tilde{u}(X) \leq \tilde{u}(X_0)$. Утверждение доказано. ■

Т.к. X_0 – точка максимума функции $\tilde{u}$ на множестве $\Omega' \times [\tau_1, \tau_2]$, и существует производная функции $\tilde{u}$ по направлению ν в точке X_0, то эта производная неположительная. А т.к. производная ϕ по направлению ν в точке X_0 строго больше нуля, то

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} - \varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\Big|_{X=X_0} < 0.$$

Лемма доказана. ■

2.4.3 Доказательство принципа максимума

Предположим, что утверждение, сформулированное в теореме **??**, неверно. Пусть у функции u существует точка нетривиального максимума. Выберем среди всех точек нетривиального максимума такую (обозначим её X_0), что её проекция на основание Ω_0 лежит на страте максимальной размерности σ_k.

Из классического принципа максимума для параболического оператор следует, что σ_k не является свободным стратом, т.к. в этом случае оператор $\mathbb{T}$ на $\sigma_k \times (0, T]$ совпадает с классическим. Поэтому к σ_k примыкают страты σ_{mj} размерности $m > k$. Т.к. X_0 выбрано специальным образом, то для любой точки $X \in \sigma_{mj} \times (0, T]$ при $m > k$, либо выполняется неравенство $u(X) < u(X_0)$ в некоторой окрестности точки X_0, либо X – точка тривиального максимума.

Вырежем в окрестности точки X_0 новый цилиндр. Тогда для каждой компоненты связности внутренности цилиндра либо выполняется неравенство $u(X) < u(X_0)$ для любой точки X, либо функция u равна константе (см. доказательство утверждения 2.4).

Т.к. X_0 – точка нетривиального максимума, то существует хотя бы одна компонента связности, на которой u не равна константе. Т.к. функция p, фигурирующая в определении оператора $\mathbb{T}$, больше некоторого положительного числа, то

$$\sum_{\nu_i} p \frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X_0) < 0.$$

Значит классическая часть оператора $\mathbb{T}$ больше нуля, что противоречит классическому принципу максимума, применённому к сужению функции u на множество $\sigma_k \times (0, T]$. ■

3 Неравенство Харнака

В этой главе будет доказано неравенство Харнака для гармонических функций на стратифицированных множествах.

3.1 Постановка задачи

Для формулировки теоремы нам понадобится ограничение на структуру стратифицированного множества.

Определение 3.1 *Будем называть n-мерное стратифицированное множество Ω усиленно прочным, если для любого страта σ_k размерности $k \leq n-2$ и любой точки $X \in \sigma_k$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой окрестности U в Ω, радиуса меньше ε и с центром в точке X, множество $U \setminus \sigma_k$ связное.*

Следующий рисунок иллюстрирует пример нарушения усиленной прочности.

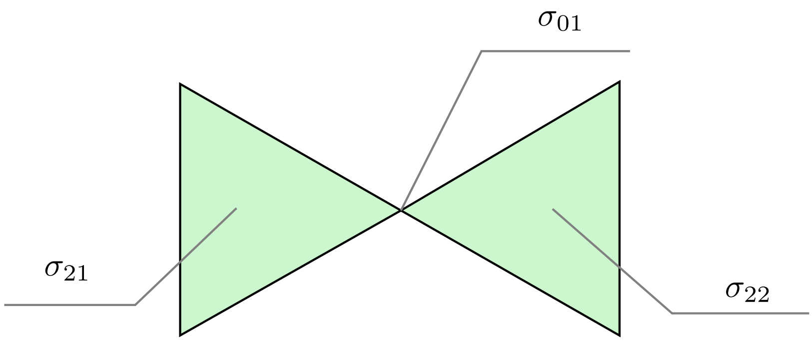

Рис. 9: Пример нарушения прочности множества

Лемма 3.1 *Если Ω – усиленно прочное стратифицированное множество, то все его свободные страты имеют одинаковую размерность.*

Доказательство: Если у Ω только один свободный страт, то утверждение тривиально. Предположим, что у Ω более одного свободного страта, и существуют свободные страты разной размерности.

Обозначим через F_m – объединение всех свободных стратов размерности m. Тогда объединение всех F_m по всем возможным m будет плотно в Ω, т.к. любой несвободный страт является гранью некоторого свободного. Т.к. Ω связное, то любая окрестность множества F_m пересекает некоторое множество F_q, $q \neq m$. Поэтому существуют два свободных страта σ_m и σ_q, которые имеют общую грань и разную размерность.

Рассмотрим их общую грань σ_k максимально возможной размерности k. Тогда $k < \min(m, q)$. Возьмём точку $X \in \sigma_k$ и окрестность произвольного допустимого радиуса. В окрестность, помимо подмножества σ_k, попадут подмножества стратов σ_m и σ_q, а также подмножества граней размерности больше k (т.к. мы выбрали окрестность допустимого радиуса). Но, по построению, ни одна из этих граней не является общей, т.к. мы выбирали грань максимально возможной размерности. Тогда, удаляя из окрестности страт σ_k, получим несвязное множество. ■

Теорема 3.1 (неравенство Харнака) *Пусть Ω – усиленно прочное стратифицированное множество. И пусть $H \subset \Omega_0$ – некоторый компакт. Тогда существует такая константа $C > 0$, зависящая от Ω и H, что для любой гармонической функции u на Ω_0 выполняется неравенство*

$$\sup_H u \leq C \inf_H u.$$

3.2 Доказательство

Основная часть доказательства относится к случаю, когда компакт H является стратифицированным шаром допустимого радиуса. Если неравенство Харнака в этом случае выполняется, то доказательство для произвольного компакта H получается стандартным образом с помощью конечного покрытия шарами допустимого радиуса (см. подробнее в конце параграфа).

Теорема 3.2 *Пусть Ω – усиленно прочное стратифицированное множество, и $B(X_0, R) \subset \Omega_0$ – шар допустимого радиуса R с центром в некоторой точке $X_0 \in \Omega_0$. Тогда существует такая константа $C > 0$, зависящая только от Ω и $B(X_0, R)$, что для любой гармонической функции u на Ω_0 выполняется неравенство*

$$\sup_{B(X_0,R)} u \le C \inf_{B(X_0,R)} u.$$

Доказательство: Ключевую роль в доказательстве играет следующая лемма.

Лемма 3.2 *Пусть $B(X_0)$ – стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке X_0, а соответствующая сфера – его граница. Пусть $\{u_i\}$ – последовательность гармонических неотрицательных функций на $B_0(X_0) = B(X_0) \setminus \partial B(X_0)$. И пусть $\{X_i\}$ – такая последовательность точек из $B_0(X_0)$, что*

$$\operatorname{dist}(X_i, \partial B(X_0)) > \delta > 0,$$

Тогда

- *a) если последовательность значений $\{u_i(X_i)\}$ отделена от нуля, то последовательность $\{u_i(X)\}$ тоже отделена от нуля ;*
- *b) если последовательность значений $\{u_i(X_i)\}$ неограниченна сверху, то последовательность $\{u_i(X)\}$ тоже неограниченна сверху;*
- *c) если последовательность $\{u_i\}$, помимо прочего, равномерно ограниченная, и $u_i(X_i) \to 0$ при $i \to \infty$, то $u_i(X) \to 0$ при $i \to \infty$.*

Чтобы не загромождать доказательство основной теоремы деталями, мы отложим доказательство леммы до следующего параграфа и перейдём к доказательству неравенства Харнака.

Доказательство теоремы 3.2: Пусть $B(X_0,R) \subset \Omega$ – стратифицированный шар допустимого радиуса. Докажем, что существует такая константа $C>0$, зависящая только от множеств Ω и $B(X_0,R)$, что для любой гармонической неотрицательной функции u на Ω_0 выполняется неравенство

$$\sup_{B(X_0,R)} u \leq C \inf_{B(X_0,R)} u.$$

Предположим противное, пусть для любой константы $C>0$ существует такая неотрицательная гармоническая функция u, что

$$\sup_{B(X_0,R)} u > C \inf_{B(X_0,R)} u. \tag{1}$$

Полагая $C_i = i \in \mathbb{N}$, построим для каждой константы C_i соответствующую неотрицательную гармоническую функцию u_i,

$$\sup_{B(X_0,R)} u_i > i \inf_{B(X_0,R)} u_i. \tag{2}$$

Т.к. все u_i неотрицательные, то

$$\sup_{B(X_0,R)} u_i > i \inf_{B(X_0,R)} u_i \geq 0.$$

Поэтому мы можем нормировать все функции u_i так, чтобы выполнялось равенство $\sup_{B(X_0,R)} u_i = 1$. При этом, очевидным образом, неравенство 2 останется в силе, а функции u_i будут равномерно ограниченны на $B(X_0,R)$.

Утверждение 3.1 *Существует такой стратифицированный шар $B(X_0,R+\varepsilon)$ допустимого радиуса $R+\varepsilon$ с центром в точке X_0, на котором функции u_i будут равномерно ограниченны.*

Доказательство: Окружим каждую точку $Y \in B(X_0, R)$ шаром $B(Y)$ допустимого радиуса для данной точки Y. Выберем конечное подпокрытие $\{B(Y_j)\}$ и положим $\varepsilon = r/2$, где r – минимальный из радиусов шаров $\{B(Y_j)\}$. Возьмём в качестве упомянутого выше $B(X_0, R+\varepsilon)$ шар радиуса $R+\varepsilon$ с центром в точке X_0. Тогда шар $B(X_0, R+\varepsilon)$ будет покрыт шарами $\{B(Y_j)\}$.

Предположим, что функции u_i не являются равномерно ограниченными на $B(X_0, R+\varepsilon)$. Тогда существует такая последовательность точек $X_i \in B(X_0, R+\varepsilon)$, что $u_i(X_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Без ограничения общности будем считать, что все X_i принадлежат некоторому допустимому шару $B(Y_q)$ из построенного выше конечного покрытия $\{B(Y_j)\}$. Более того, будем считать, что все точки X_i лежат строго внутри стратифицированного шара $B(Y_q)$, т.е.

$$\operatorname{dist}(X_i, \partial B(Y_q)) > \delta > 0.$$

В противном случае мы всегда можем увеличить радиус шара с сохранением его допустимости.

Тогда, полагая в лемме 3.2 $B = B(Y_q)$, получим $u_i(Y_q) \to \infty$ при $i \to \infty$. А т.к. Y_q, по построению, принадлежит $B(X_0, R)$, то это противоречит равномерной ограниченности функций u_i на $B(X_0, R)$. Утверждение доказано. ■

Вернёмся к шару $B(X_0, R)$. Из неравенства 2 следует, что $\inf_{B(X_0,R)} u_i \to 0$ при $i \to \infty$. Значит существует такая последовательность $\{X_i\}$, $X_i \in B(X_0, R)$, что $u_i(X_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Т.к. $B(X_0, R)$ имеет меньший радиус, чем $B(X_0, R+\varepsilon)$, то

$$\operatorname{dist}(X_i, \partial B(X_0, R+\varepsilon)) \geq \varepsilon > 0.$$

Полагая в лемме 3.2 $B = B(X_0, R+\varepsilon)$, получим $u_i(X) \to 0$ при $i \to \infty$.

Напомним, что, по построению, $\sup_{B(X_0,R)} u_i = 1$. Это значит, что существует такая последовательность $\{X_i\}$, $X_i \in B(X_0, R)$, что последовательность значений $\{u_i(X_i)\}$ отделена от нуля. При этом выполняется

$$\mathrm{dist}(X_i, \partial B(X_0, R+\varepsilon)) \geq \varepsilon > 0.$$

Полагая в лемме 3.2 $B = B(X_0, R+\varepsilon)$, получим, что последовательность значений $\{u_i(X)\}$ тоже отделена от нуля. Но это противоречит доказанному выше утверждению, что $u_i(X) \to 0$ при $i \to \infty$. Получили противоречие. Теорема 3.2 доказана. ■

Теперь, когда мы доказали неравенство Харнака для случая шара, мы можем перейти к случаю произвольного компакта.

Доказательство теоремы 3.1: Окружим каждую точку $Y \in H$ шаром допустимого радиуса и перейдём к конечному подпокрытию $\{B(Y_j)\}$. Для каждого $\{B(Y_j)\}$ выполняется соответствующее неравенство Харнака

$$\sup_{B(Y_j)} u \leq C_i \inf_{B(Y_j)} u.$$

Без ограничения общности будем считать, что H связно. В противном случае всегда можно перейти к некоторому другому компакту, который будет связным и будет содержать H. Пусть X и Y – точки в H, в которых достигается $\sup_H u$ и $\inf_H u$ соответственно. Соединим эти точки с помощью непрерывной кривой Γ. Пусть $\{B_i\}$ – набор шаров из $\{B(Y_j)\}$, покрывающий кривую Γ. Пронумеруем B_i от 1 до некоторого K так, чтобы $X \in B_1$, $Y \in B_K$ и любые два соседних шара B_i и B_{i+1} пересекались. Тогда

$$\begin{aligned}\sup_H u = u(X) \leq \sup_{B_1} u \leq C_1 \inf_{B_1} u \leq C_1 \inf_{B_1\cap B_2} u \leq C_1 \sup_{B_1\cap B_2} u \leq C_1 \sup_{B_2} u \leq \\ \leq (C_1 \cdot \ldots \cdot C_{K-1}) \sup_{B_K} u \leq (C_1 \cdot \ldots \cdot C_K) \inf_{B_K} u \leq Cu(Y) = C \inf_H u.\end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

3.3 Вспомогательные леммы

Сначала мы докажем ослабленную версию леммы 3.2, которая получается путём введения дополнительных условий.

Лемма 3.3 *Пусть $B(X_0)$ – стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке X_0, а соответствующая сфера – его граница. Пусть $\{u_i\}$ – последовательность гармонических неотрицательных функций на $B_0(X_0) = B(X_0)\backslash\partial B(X_0)$. И пусть $\{X_i\}$ – такая последовательность точек из $\sigma_k \subset B_0$, что*

$$\mathrm{dist}(X_i, \partial\sigma_k) > \delta > 0.$$

Тогда

- *a) если последовательность значений $\{u_i(X_i)\}$ отделена от нуля, то последовательность $\{u_i(X)\}$ тоже отделена от нуля ;*
- *b) если последовательность значений $\{u_i(X_i)\}$ неограниченна сверху, то последовательность $\{u_i(X)\}$ тоже неограниченна сверху;*
- *c) если последовательность $\{u_i\}$, помимо прочего, равномерно ограниченная, и $u_i(X_i) \to 0$ при $i \to \infty$, то $u_i(X) \to 0$ при $i \to \infty$.*

Обратим внимание, что в лемме 3.3 мы ввели дополнительное ограничение на последовательность точек $\{X_i\}$. Мы требуем, чтобы все точки X_i принадлежали одному страту σ_k и находились на большем, чем δ, расстоянии от его границы. Остальные условия такие же, как в лемме 3.2.

Мы разобьём доказательство на две части. В первой части мы докажем пункты a) и b), во второй – c).

Доказательство частей a)-b): Окружим каждую точку X_i шаром $B(X_i)$

допустимого радиуса. Т.к.

$$\mathrm{dist}(X_i, \partial\sigma_k) > \delta > 0,$$

то радиус каждого шара $B(X_i)$ можно выбрать не зависящим от i. Тогда по теореме о среднем для гармонической функции на стратифицированном множестве

$$u_i(X) = \frac{1}{\mu^n(B(X_0))} \int\limits_{B(X_0)} u_i \, d\mu^n \geq \frac{1}{\mu^n(B(X_0))} \int\limits_{B(X_i)} u_i \, d\mu^n = u_i(x_i)\,\frac{\mu^n(B(X_i))}{\mu^n(B(X_0))}.$$

Здесь μ^n – n-мерная стратифицированная мера на $B(X_0)$ (см. определение в §1.7). Т.к. $\mu^n(B(X_i))$ фиксировано, а последовательность $\{u_i(X_i)\}$ отделена от нуля (соответственно, неограниченна сверху), то последовательность $u_i(X)$ тоже отделена от нуля (неограниченна сверху). Первая часть леммы доказана. ■

При доказательстве второй части леммы мы будем опираться на следующий специальный частный случай неравенства Харнака.

Теорема 3.3 *Пусть Ω – n-мерное усиленно прочное стратифицированное множество, и $H \subset \Omega_0$ – некоторый компакт, который содержит только точки стратов размерности n и $n-1$. Тогда существует такая константа C, зависящая от Ω и H, что для любой гармонической функции u на Ω_0 выполняется неравенство*

$$\sup_H u \leq C \inf_H u.$$

Эта теорема сначала доказывается для любого стратифицированного шара с центром на страте размерности n и $n-1$ с использованием формулы Пуассона для шара. Затем стандартными методами переносится на всё множество H. Подобный подход применялся при доказательстве неравенства Харнака для двумерного стратифицированного множества (см. подробнее в [29]), поэтому мы не будем здесь подробно останавливаться.

Доказательство части с): Окружим каждую точку X_i шаром $B(X_i)$ допустимого радиуса. Т.к. все точки X_i принадлежат одному страту σ_k и лежат на ненулевом расстоянии от границы $\partial\sigma_k$, то радиусы всех шаров можно выбрать одинаковыми.

Если точки X_i не лежат в свободном страте, то найдётся такой свободный страт σ_n, для которого точки X_i будут граничными. Т.к. радиусы шаров $B(X_i)$ равны между собой, то найдётся такая последовательность точек $Y_i \in \sigma_n$ и такое число R, что каждую точку Y_i можно окружить шаром $B(Y_i)$ допустимого радиуса R, для которого будет выполняться $B(Y_i) \subset B(X_i)$. Если все точки X_i принадлежат свободному страту σ_n, то каждый шар $B(X_i)$ целиком лежит в σ_n. В этом случае положим $Y_i = X_i$ и $B(Y_i) = B(X_i)$.

Согласно теореме о среднем для гармонической функции на стратифицированном множестве

$$u_i(X_i) = \frac{1}{\mu^n(B(X_i))} \int\limits_{B(X_i)} u_i \, d\mu^n \geq \frac{1}{\mu^n(B(X_i))} \int\limits_{B(Y_i)} u_i \, d\mu^n.$$

Т.к. $\mu^n(B(X_i))$ и $\mu^n(B(Y_i))$ фиксированы, то из $u(X_i) \to 0$ при $i \to \infty$ следует

$$\int\limits_{B(Y_i)} u_i \, d\mu^n \to 0, \ (i \to \infty).$$

Значит

$$\inf_{B(Y_i)} u_i \to 0, \ (i \to \infty).$$

Положим G – замыкание объединения $B(Y_i)$ по всем i. Тогда

$$\inf_G u_i \to 0, (i \to \infty).$$

При этом множество G лежит в σ_n и

$$\operatorname{dist}(G, \partial\sigma_n) > \delta > 0.$$

Тогда по теореме 3.3 для любого компакта $H \subset B$, который содержит G и пересекает только страты размерности n и $n-1$, выполняется

$$\sup_H u_i \to 0, (i \to \infty).$$

Вернёмся к точке X_0. Напомним, что в качестве стратифицированного множества в этой лемме мы рассматриваем стратифицированный шар $B(X_0)$ с центром в точке X_0. Положим $\varepsilon > 0$ и разобьём $B(X_0)$ на два подмножества – B_1 и B_2. Первое подмножество B_1 выбрано лежащим в некоторой достаточно малой окрестности объединения всех стратов $\sigma_k \subset B_0(X_0)$ размерности $k \leq n-2$. Поэтому, в силу равномерной ограниченности функций u_i,

$$\int\limits_{B_1} u_i \, d\mu^n < \varepsilon.$$

Множество B_2 будет лежать на ненулевом расстоянии от всех стратов размерности $k \leq n-2$. Тогда на B_2 функции u_i равномерно стремятся к нулю. Поэтому

$$\int\limits_{B_2} u_i \, d\mu^n < \varepsilon,$$

начиная с некоторого i. Складывая оба интеграла, получим

$$\int\limits_{B(X_0)} u_i \, d\mu^n < 2\varepsilon,$$

начиная с некоторого i. Тогда из теоремы о среднем следует, что $u_i(X) \to 0$ при $i \to \infty$. Вторая часть леммы доказана. ■

Перед тем, как перейти к доказательству леммы 3.2, проведём вспомогательные рассуждения. Напомним, что все рассмотрения мы ведём на стратифицированном шаре $B(X_0)$ с центром в точке X_0.

Определение 3.2 *Будем называть два стратифицированных шара*

$$B(X_1, R_1) \subset B(X_0),\ B(X_2, R_2) \subset B(X_0)$$

(их стратификация предполагается порождённой стратификацией шара $B(X_0)$) подобными, если они имеют допустимые радиусы, и их центры лежат на одном страте $\sigma_k \subset B_0$.

Мы называем такие шары подобными, потому что один из них можно отобразить на другой с помощью композиции параллельного переноса вдоль σ_k и преобразования подобия. Такое отображение $B(X_1, R_1) \to B(X_2, R_2)$ мы будем обозначать T_{12}. При отображении T_{12} точка X_1 перейдёт в X_2, а любая точка $X \in \sigma_k \cap B(X_1, R_1)$ перейдёт в $T_{12}(X) \in \sigma_k \cap B(X_2, R_2)$.

Пусть теперь на $B(X_1, R_1)$ задана неотрицательная гармоническая функция u. Тогда функция $u'(X)$ при $X \in B(X_2, R_2)$, полученная по формуле

$$u'(X) = u(T_{12}^{-1}(X)),$$

будет неотрицательной гармонической на $B(X_2, R_2)$. Очевидно также, что если функция u ограничена константой C на $B(X_1, R_1)$, то функция u' ограничена той же константой C на $B(X_2, R_2)$.

Теперь мы можем перейти к доказательству леммы 3.2. Напомним её формулировку.

Лемма 3.2 *Пусть $B(X_0)$ – стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке X_0, а соответствующая сфера – его граница. Пусть $\{u_i\}$ – последовательность гармонических неотрицательных функций на $B_0(X_0) =$*

$B(X_0)\setminus\partial B(X_0)$. И пусть $\{X_i\}$ – такая последовательность точек из $B_0(X_0)$, что

$$\operatorname{dist}(X_i, \partial B(X_0)) > \delta > 0,$$

Тогда

a) *если последовательность значений $\{u_i(X_i)\}$ отделена от нуля, то последовательность $\{u_i(X)\}$ тоже отделена от нуля ;*

b) *если последовательность значений $\{u_i(X_i)\}$ неограниченна сверху, то последовательность $\{u_i(X)\}$ тоже неограниченна сверху;*

c) *если последовательность $\{u_i\}$, помимо прочего, равномерно ограниченная, и $u_i(X_i) \to 0$ при $i \to \infty$, то $u_i(X) \to 0$ при $i \to \infty$.*

Доказательства всех трёх частей леммы аналогичны между собой. Поэтому мы приведём доказательство только части a), а слова, относящиеся к b) и c), дадим в скобках.

Доказательство: Пусть $\{X_i\}$ – произвольная последовательность точек из $B(X_0)$, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{dist}(X_i, \partial B) > \delta > 0.$$

Без ограничения общности будем считать, что $X_i \to X^*$ (при некотором $X^* \in B_0$) при $i \to \infty$. Покажем сначала, что последовательность $\{u_i(X^*)\}$ отделена от нуля (соответственно, неограниченна сверху, стремится к нулю). Пусть k – размерность страта, содержащего точку X^*. Будем доказывать утверждение методом математической индукции, начиная с $k = n$ и затем уменьшая k.

Итак, пусть $X^* \in \sigma_n$. Это значит, что X^* принадлежит свободному страту. Тогда, начиная с некоторого номера, все X_i лежат на ненулевом расстоянии от границы $\partial\sigma_n$. Значит, согласно лемме 3.3, последовательность $\{u_i(X^*)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю).

Предположим теперь, что мы доказали отделённость от нуля (неограниченность сверху, сходимость к нулю) последовательности $\{u_i(X^*)\}$ для случая, когда X^* принадлежит страту размерности больше k. Докажем это утверждение для случая $X^* \in \sigma_k$.

Обозначим через L_k – линейное многообразие размерности k, содержащее страт σ_k. Т.к. все X_i, начиная с некоторого номера, принадлежат шару допустимого радиуса с центром в точке X^*, и $X^* \in \sigma_k$, то проекции точек X_i на L_k, начиная с некоторого номера, принадлежат σ_k. Обозначим их через Y_i; будем считать, что все Y_i лежат в σ_k.

Утверждение 3.2 *Последовательность значений $\{u_i(Y_i)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю).*

Доказательство: В самом деле, без ограничения общности будем считать, что

$$\mathrm{dist}(X_i, Y_i) < \frac{1}{2} R_i,$$

где R_i – допустимые радиусы в точках Y_i.

Окружим каждый Y_i стратифицированным шаром $B(Y_i)$ радиуса $2\ \mathrm{dist}(X_i, Y_i)$. Все Y_i и точка X^* лежат на одном страте. Положим T_i – отображение $B(Y_i) \to B(X^*)$, описанное выше. Тогда $T_i(Y_i) = X^*$.

Т.к. каждый Y_i – это проекция X_i на σ_k, и все шары $B(Y_i)$ имеют радиусы, равные $2\ \mathrm{dist}(X_i, Y_i)$, то все образы $T(X_i)$ лежат на ненулевом расстоянии от границы $\partial B(X^*)$ и от страта σ_k. Следовательно существует такой компакт $H \subset B(X^*)$, который лежит на ненулевом расстоянии от границы $\partial B(X^*)$ и от страта σ_k и содержит все точки $T_i(X_i)$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, будем считать, что $T_i(X_i)$ сходятся к некоторой точке $X' \in H \subset B(X^*)$. Т.к. $B(X^*)$ – стратифицированный шар допустимого радиуса, то все его внутренние страты, кроме σ_k, имеют размерность больше k. Поэтому точка X' принадлежит страту размерности больше k.

Положим при $X \in B(X^*)$

$$u'_i(X) = u_i(T_i^{-1}(X)).$$

Как было показано ранее, все $u'_i(X)$ будут неотрицательными гармоническими (и равномерно ограниченными в случае c)) на $B(X^*)$. Тогда, согласно лемме 3.3, последовательность $\{u'_i(X^*)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю). Возвращаясь к точкам Y_i, получим, что последовательность $\{u_i(Y_i)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю). что и требовалось доказать. ■

Итак, мы получили последовательность $\{Y_i\}$, все точки которой лежат на том же страте σ_k, что и X^*, сходятся к X^*, и последовательность $\{u_i(Y_i)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю). Если размерность страта $k = 0$, то все Y_i совпадают с X^*, значит последовательность $\{u_i(X^*)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю). Если $k \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$\operatorname{dist}(Y_i, \partial\sigma_k) > \delta > 0.$$

Тогда, согласно лемме 3.3, последовательность $\{u_i(X^*)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю).

Теперь, когда мы получили, что последовательность $\{u_i(X^*)\}$ отделена от нуля (неограниченна сверху, стремится к нулю), переход к точке X_0 выполняется опять с помощью леммы 3.3. Для этого достаточно положить $X_i = X^*$ при любом i. Лемма доказана. ■

3.4 Замечания о гармоничности

Мы определяли гармоническую функцию u как функцию из $C(\Omega_0)$, для которой $p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$ и

$$\Delta_p u = 0,$$

где функция p равна единице на всех свободных стратах и нулю на остальных. При этом в доказательстве мы используем в основном теорему о среднем. В классическом случае определение гармонической функции как решения уравнения Лапласа и как функции, для которой выполняется равенство средних, эквивалентны (см. например в [12]). В случае стратифицированных множеств это не так (см. подробнее в следующей главе).

Определение 3.3 *Пусть для функции $u \in C(\Omega)$ выполняется теорема о среднем для любой сферы допустимого радиуса в любой точке $x \in \Omega_0$. Тогда функцию u будем называть гармонической в смысле равенства средних.*

Докажем несколько свойств таких функций.

Утверждение 3.3 *Для гармонической функции u (в смысле равенства средних) выполняется теорема о среднем для любого шара $B(X)$ допустимого радиуса с центром в точке $x \in \Omega_0$*

$$u(X) = \frac{1}{\mu(B(X))} \int\limits_{B(X)} u \, d\mu^n.$$

Для доказательства достаточно проинтегрировать по всем сферам с центром в точке X радиуса от 0 до R, где R – радиус шара.

Утверждение 3.4 *Для любой гармонической функции u (в смысле равенства средних) и компакта $H \subset \Omega_0$, который содержит только точки стратов размерности n и $n-1$, выполняется*

$$p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(H)$$

и $\Delta_p u = 0$ на H.

Доказательство: Рассмотрим произвольную точку $X \in H$ и шар допустимого радиуса $B(X)$. Т.к. шар $B(X)$ не пересекает страты размерности $k \leq n-2$, то на нём разрешима задача Дирихле для оператора Δ_p с краевым условием $u\Big|_{\partial B(X)}$ (см. доказательство в [9]). Тогда из теоремы о среднем следует, что полученное решение задачи Дирихле совпадает с u на $B(X)$ (стандартные рассуждения на эту тему см., например, в [12]).

Т.к. точку X мы выбирали произвольно, то u является решением уравнения Лапласа на всём H. ■

Из этого утверждения следует, в частности, что для гармонической функции в смысле равенства средних выполняется неравенство Харнака для любого компакта H, который не пересекает страты размерности $k \leq n-2$.

Таким образом доказательство неравенства Харнака, которое мы привели в этой главе, без изменений переносится на класс гармонических функций в смысле равенства средних.

4 Теорема об устранимой особенности

В этой главе будет доказана теорема об устранимой особенности для гармонических функций на стратифицированных множествах.

4.1 Постановка задачи

При изучении гармонических функций на стратифицированных множествах в основном используется пространство $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ (см. определение в §1.7). Однако при изучении вопросов разрешимости краевых задач и, в частности, теоремы об устранимой особенности, такое функциональное пространство оказывается слишком ограничительным. Теорема об устранимой особенности в этом случае оказывается неверной (см. подробнее в заключительных замечаниях в §4.5). Поэтому мы расширим класс функций.

Положим

- $\vec{C}^{1*}_{\sigma}(\Omega_0)$ – пространство касательных векторных полей на Ω_0, сужение которых на каждый страт гладкое внутри страта и непрерывное вплоть до всех граней на единицу меньшей размерности.
- $C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$ – пространство функций u на Ω таких, что $p\nabla u \in \vec{C}^{1*}_{\sigma}(\Omega_0)$.

Напомним, что функция p равна единице на свободных стратах, и нулю на несвободных. В этом случае принадлежность $p\nabla u \in \vec{C}^{1*}_{\sigma}(\Omega_0)$ означает гладкость градиента ∇u на всех свободных стратах σ_{nj} и непрерывность вплоть до стратов $\sigma_{n-1i} \preceq \sigma_{nj}$. Другими словами, отличие $C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$ от $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ состоит в том, что первое пространство допускает особенности градиента в некоторых точках Ω_0.

Определение мягкого лапласиана для функций из $C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$ остаётся неизменным (см. определение в §1.7). Всюду далее мы будем рассматривать гармонические функции как функции из $C(\Omega_0) \cap C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$, для которых

$$\Delta_p u = 0.$$

Для таких функций мы можем сформулировать теорему об устранимой особенности.

Теорема 4.1 (об устранимой особенности) *Пусть Ω – n-мерное усиленно прочное стратифицированное множество. Положим Σ_{n-2} – объединение всех стратов размерности $k \leq n-2$. Пусть функция $u : \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2} \to \mathbb{R}$ ограниченная гармоническая. Тогда её можно доопределить на всё Ω_0 так, что она будет гармонической на всём Ω_0.*

Заметим, что как бы мы не продолжили функцию u на страты размерности $k \leq n-2$, мы автоматически получим принадлежность новой функции пространству $C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$ и выполнение равенства $\Delta_p u = 0$ (см. подробнее в §1.7). Поэтому фактически от нас требуется только показать возможность продолжения функции по непрерывности.

Доказательство будет состоять из двух этапов. На первом этапе мы рассмотрим сферу допустимого радиуса $S_R(X)$ с центром в точке $X \in \sigma_k$, $k \leq n-2$. Мы покажем, что среднее по любой сфере $S_R(X)$ допустимого радиуса существует и не зависит от R. На втором этапе мы покажем, что, положив функцию u в точке X равной среднему значению по некоторой сфере $S_R(X)$, мы получим непрерывную функцию на Ω_0.

4.2 Внутренняя оценка градиента

Перед тем, как перейти к основному доказательству теоремы об устранимой особенности, получим сначала внутреннюю оценку градиента гармонической функции на стратифицированном множестве.

В классическом случае, если u – гармоническая и ограниченная функция в области $G \subset \mathbb{R}^n$, то имеет место оценка градиента в точке $X \in G$

$$|\nabla u| \leq \frac{C}{\rho},$$

где ρ – расстояние от X до границы G (см., например, [12]). Для стратифицированного множества Ω мы докажем аналогичную оценку.

Теорема 4.2 *Пусть Ω – n-мерное усиленно прочное стратифицированное множество, а Σ_{n-2} – объединение всех стратов Ω_0 размерности $k \leq n-2$. И пусть функция $u : \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2} \to \mathbb{R}$ ограниченная гармоническая. Тогда, если $X \in \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2}$, то выполняется оценка*

$$|\nabla u| \leq \frac{C}{\rho},$$

где

$$\rho = \mathrm{dist}(X, \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega).$$

Перед тем, как перейти к доказательству оценки, приведём некоторые сведения из классической теории гармонических функций.

Под ядром Пуассона для шара $B \subset \mathbb{R}^n$ будем понимать такую функцию $H(x,y)$, что для любой гармонической функции v на шаре B и любой точки $x \in B$ выполняется равенство

$$v(x) = \int\limits_{\partial B} H(x,y) v(y)\, dy.$$

При этом имеет место явное представление

$$H(x,y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{R^2 - |x|^2}{R\,|y-x|^n}$$

(см., например, [17]).

Рассмотрим в пространстве функций $f(x, y)$ оператор вида

$$\nabla_1 = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}).$$

И рассмотрим случай, когда $|y| = R$ (т.е. y принадлежит только границе шара) и $|x| < R/2$. В этом случае расстояние между x и y будет ограничено снизу положительной константой $R/2$. Поэтому функция H при таких ограничениях будет регулярной, и мы сможем найти оценку градиента $\nabla_1 H(x, y)$.

$$\begin{aligned}
&|\frac{\partial H(x,y)}{\partial x^i}| = \\
&\quad = \frac{1}{\omega_n}\Big|\frac{-2x^i R|y-x|^n - (R^2-|x|^2)Rn/2(|y-x|^2)^{n/2-1}(-2(y^i-x^i))}{R^2|y-x|^{2n}}\Big| = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\omega_n}\Big|\frac{-2x^i + (R^2-|x|^2)n|y-x|^{-2}(y^i-x^i)}{R|y-x|^n}\Big| \le \\
&\quad \le \frac{1}{\omega_n}\Big(\frac{|2x^i|}{R|y-x|^n} + \frac{|(R^2-|x|^2)n(y^i-x^i)|}{R|y-x|^{n+2}}\Big) \le \frac{1}{\omega_n}\Big(\frac{2}{|y-x|^n} + \frac{nR^2}{|y-x|^{n+2}}\Big).
\end{aligned}$$

При $|y| = R$ и $|x| < R/2$ имеем $|y - x| > R/2$. Тогда

$$\frac{1}{\omega_n}\Big(\frac{2}{|y-x|^n} + \frac{nR^2}{|y-x|^{n+2}}\Big) \le \frac{1}{\omega_n}\Big(\frac{2^{n+1}}{R^n} + \frac{n2^{n+2}}{R^n}\Big) = \frac{1}{\omega_n}2^{n+1}(2n+1)\frac{1}{R^n}.$$

Итак, полагая

$$C_1 = \frac{1}{\omega_n}2^{n+1}(2n+1),$$

получаем оценку

$$|\nabla_1 H(x,y)| \le \frac{C_1}{R^n} \tag{3}$$

при $|x| < R/2$.

Вернёмся к стратифицированному множеству Ω и теореме 4.2. Рассмотрим сначала случай, когда Ω имеет структуру стратифицированного шара допустимого радиуса с центром в точке страта размерности n или $n - 1$. Для размерности n имеем классический случай, поэтому перейдём сразу к случаю размерности $n-1$.

Теорема 4.3 *Пусть Ω имеет структуру n-мерного стратифицированного шара допустимого радиуса R с центром в точке X_0 $(n-1)$-мерного страта, а соответствующая стратифицированная сфера – его граница. Пусть u – ограниченная гармоническая функция на Ω_0. Тогда существует такая константа $C > 0$, что для любой точки $X \in \Omega_0$ и такой, что $|X - X_0| < R/2$, выполняется оценка*

$$|\nabla u(X)| \leq \frac{C}{R}.$$

Доказательство: Т.к. Ω имеет структуру стратифицированного шара допустимого радиуса, то в Ω_0 включены только один $(n-1)$-мерный страт σ_{n-1} и конечное число n-мерных стратов σ_{nj}, каждый из которых является n-мерным полушаром.

Введём на σ_{n-1} $(n-1)$-мерную декартову систему координат, а на каждом σ_{nj} – n-мерную. Согласуем все системы координат так, чтобы первые $n-1$ координатные оси на стратах σ_{nj} совпадали с координатными осями на страте σ_{n-1}. Таким образом каждой точке $X \in \Omega$ соответствует набор из n координат. Этот набор координат будем обозначать через x. В случае, когда $X \in \sigma_{n-1}$, полагаем $x^n = 0$. Точку X_0 будем считать началом данной системы координат.

Для Ω существует функция Грина (см. подробнее в [9]), которая выглядит следующим образом

$$G_\sigma(X,Y) = \begin{cases} \frac{p_l+P_l}{Pp_l}G(x,y) + \frac{p_l-P_l}{Pp_l}G(x,y),\ x,y \in B_l; \\ \frac{2}{P}G(\widehat{x},y),\ x \in B_j, y \in B_l, l \neq j. \end{cases}$$

Здесь

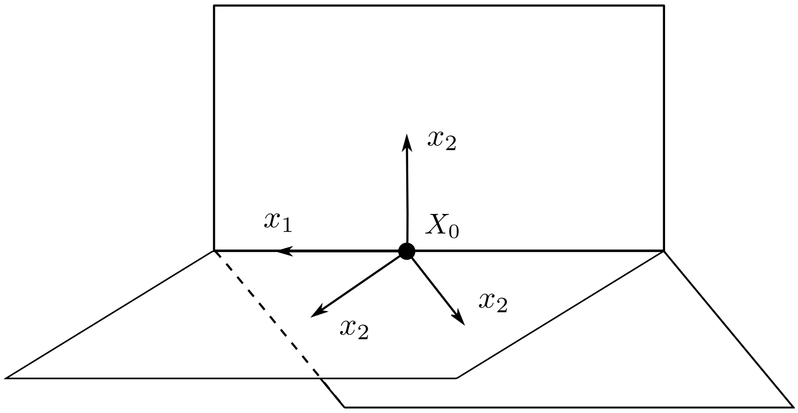

Рис. 10: Пример системы координат

- x – набор координат точки X, y – набор координат точки Y, $\widehat{x}$ – набор из n координат таких, что

$$\widehat{x}^i = x^i,\ i = 1, \ldots, n-1;$$

$$\widehat{x}^n = -x^n;$$

- $G(x, y)$ – функция Грина для n-мерного шара в $\mathbb{R}^n$;
- P, P_l и p_l – специальные константы (см. подробнее в [9]).

Положим

$$H_\sigma(X, Y) = \frac{\partial G_\sigma(X, Y)}{\partial n_Y},$$

где n_Y – единичный вектор нормали в точке Y по внешнему направлению, дифференцирование выполняется относительно аргумента Y. Т.к. величины p_l, P_l и P – константы, то

$$H_\sigma(X, Y) = \begin{cases} \frac{p_l + P_l}{P p_l} H(x, y) + \frac{p_l - P_l}{P p_l} H(x, y),\ x, \tau \in B_l; \\ H(\widehat{x}, y),\ x \in B_j, \tau \in B_l, l \neq j. \end{cases}$$

Для гармонической функции u имеет место представление через интеграл

Пуассона (см. подробнее в [9])

$$u(X) = \int\limits_{\partial\Omega} H_\sigma(X,Y)u(Y)\, d\mu_s^{n-1}.$$

Используя это представление, а так же оценку (3) градиента классического ядра Пуассона, мы можем получить оценку градиента функции u в шаре $|X - X_0| < R/2$.

При $Y \in \partial\Omega$ и $|X - X_0| < R/2$ имеем $|y| = R$, $|x| < R/2$ и $|\widehat{x}| < R/2$. Тогда

$$|\nabla_1 H_\sigma(X,Y)| \le C_2 |\nabla_1 H(x,y)| \le \frac{C_3}{R^n}. \tag{4}$$

Пусть δ – вектор достаточно малой длины, касательный к Ω_0 в точке X и такой, что $|X + \delta - X_0| < R/2$. Рассмотрим выражение

$$\frac{u(X+\delta) - u(X)}{|\delta|} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{H_\sigma(X+\delta,Y) - H_\sigma(X,Y)}{|\delta|} u(Y)\, d\mu_s^{n-1}.$$

По теореме о промежуточном значении в сочетании с оценкой (4), получим

$$\frac{H_\sigma(X+\delta,Y) - H_\sigma(X,Y)}{|\delta|} \le (\nabla_1 H_\sigma)(X^*,Y) \le \frac{C_3}{R^n}.$$

Выполняя интегрирование по $\partial\Omega$ и используя ограниченность функции u, получим

$$\frac{u(X+\delta) - u(X)}{|\delta|} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{H_\sigma(X+\delta,Y) - H_\sigma(X,Y)}{|\delta|} u(Y)\, d\mu_s^{n-1} \le$$

$$\le \frac{C_3}{R^n}\mu(\partial\Omega)\sup u = \frac{C_3}{R^n}\omega R^{n-1}\sup u = \frac{C}{R}.$$

Устремляя $|\delta| \to 0$, получим

$$|\nabla u(X)| \le \frac{C}{R}.$$

Теорема доказана. ■

Итак, мы получили оценку градиента для случая, когда Ω – стратифицированный шар. Перед тем, как перейти к доказательству общего случая – теоремы 4.2, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1 *Пусть S_1 и S_2 – два симплекса в $\mathbb{R}^d$ вообще говоря различной размерности, которые пересекаются друг с другом по общей грани P. Тогда существует такое $\alpha > 0$, что для любой точки $X \in S_1$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{dist}(X, S_2) > \alpha \operatorname{dist}(x, P).$$

Доказательство: В самом деле, проведём через грань P гиперплоскость H так, чтобы S_1 и S_2 оказались в разных полупространствах. Тогда

$$\operatorname{dist}(X, S_2) \geq \operatorname{dist}(X, H).$$

Далее, т.к. все грани симплекса S_1, смежные с гранью P, образуют с H ненулевой угол, то найдётся такое α, не зависящее от x, что

$$\operatorname{dist}(X, H) > \alpha \operatorname{dist}(X, S_2).$$

■

Лемма 4.2 *Пусть σ_k и σ_m – два страта с плоскими гранями из Ω, которые примыкают друг к другу по общей грани P. Тогда существует такое $\alpha(\sigma_k, \sigma_m) > 0$, что для любой точки $X \in \sigma_k$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{dist}(X, \sigma_m) > \alpha(\sigma_k, \sigma_m) \operatorname{dist}(X, P).$$

Доказательство: Т.к. страты и их грани плоские, то их можно разбить на конечное число симплексов, которые либо не пересекаются, либо пересекаются по общей грани. Если S_1 – некоторый симплекс из σ_k, и S_2 – некоторый симплекс из σ_m, то они либо не пересекаются, либо их общая грань лежит в P. Если S_1 и S_2 пересекаются, то существует такое $\alpha(S_1, S_2)$, не зависящее от $X \in S_1$, что

$$\operatorname{dist}(X, S_2) > \alpha(S_1, S_2) \operatorname{dist}(X, S_1 \cap S_2) \geq \alpha_1(S_1, S_2) \operatorname{dist}(X, P).$$

Если S_1 и S_2 не пересекаются, то расстояние между ними отделено от нуля. А т.к. величина $\operatorname{dist}(X, P)$ ограниченная, то существует такое $\alpha_2(S_1, S_2)$, не зависящее от $X \in S_1$, что

$$\operatorname{dist}(X, S_2) > \alpha_2(S_1, S_2) \operatorname{dist}(X, P).$$

Выбирая теперь $\alpha(\sigma_k, \sigma_m)$ минимальным по всем парам симплексов, получим требуемое утверждение. ■

Лемма 4.3 *Пусть Ω – стратифицированное множество с плоскими граничными стратами. Тогда существует такое $\alpha > 0$, что для любого страта σ_k и любого $x \in \sigma_k$ величина*

$$\alpha \operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k)$$

является допустимым радиусом для точки X.

Доказательство: Положим α минимальным по всем $\alpha(\sigma_q, \sigma_s)$ из предыдущей леммы. Согласно определению, шар допустимого радиуса в точке X может пересекать только страт σ_k, и все страты, для которых σ_k является граничным. Поэтому рассмотрим произвольный страт σ_m, для которого σ_k не является граничным. Если σ_k и σ_m примыкают друг к другу по общей грани P, то

$$\alpha \operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k) \leq \alpha \operatorname{dist}(X, \partial P) < \alpha \operatorname{dist}(X, \sigma_m).$$

Т.е. шар радиуса $\alpha \operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k)$ с центром в точке X не будет пересекать σ_m.

Если же σ_k и σ_m не примыкают друг к другу, то они лежат на ненулевом расстоянии друг от друга. Тогда, уменьшая при необходимости α, снова получим неравенство

$$\alpha \operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k) < \alpha \operatorname{dist}(X, \sigma_m).$$

Таким образом, радиус $\alpha \operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k)$ является допустимым в точке X. ■

Если граница стратифицированного множества $\partial\Omega$ содержит неплоские страты, то можно сформулировать аналогичную лемму.

Лемма 4.4 *Пусть Ω – стратифицированное множество. Тогда существует такое $\alpha > 0$, что для любого страта $\sigma_k \subset \Omega_0$ и любого $X \in \sigma_k$ величина*

$$\alpha \operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k \cup \partial\Omega)$$

является допустимым радиусом для точки X.

Доказательство: Положим

$$r = \operatorname{dist}(X, \partial\Omega).$$

Тогда существует такое стратифицированное подмножество $\Omega' \subset \Omega$ с плоскими граничными стратами и такое, что

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega', \partial\Omega) < \frac{r}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(X, \partial\sigma'_k) \geq \operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k \cap \partial\Omega') = \min(\operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k), \operatorname{dist}(X, \partial\Omega')) > \\ > \min(\operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k), \frac{1}{2}\operatorname{dist}(X, \partial\Omega)) > \frac{1}{2}\min(\operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k), \operatorname{dist}(X, \partial\Omega)) = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(X, \partial\sigma_k \cup \partial\Omega).\end{aligned}$$

Т.к. величина

$$\alpha \operatorname{dist}(X, \partial\sigma'_k)$$

является допустимым радиусом для точки X, то величина

$$\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{dist}(X, \partial\sigma_k \cup \partial\Omega)$$

тоже является допустимым радиусом. ■

Теперь всё готово для того, чтобы доказать теорему 4.2.

Доказательство теоремы 4.2: Зафиксируем достаточно малое $\rho > 0$. Напомним, что Σ_{n-2} – объединение всех стратов размерности $k \leq n-2$. Положим

$$H = \{X \in \Omega_0 : \ \mathrm{dist}(X, \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega) > \rho\}.$$

Построим для множества H специальное покрытие шарами допустимого радиуса.

Начнём со стратов размерности $n-1$. Зафиксируем некоторый страт σ_{n-1} и рассмотрим произвольную точку $Y \in \sigma_{n-1} \cap H$. Тогда

$$\mathrm{dist}(Y, \partial\sigma_{n-1} \cup \partial\Omega) \geq \mathrm{dist}(Y, \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega) > \rho.$$

Следовательно, по лемме 4.4, величина $\alpha\rho$ будет допустимым радиусом для точки Y. Окружим каждую точку $Y \in H \cap \sigma_{n-1}$ шаром половинного радиуса $\alpha\rho/2$ и повторим эту процедуру для всех стратов размерности $n-1$. Полученную систему шаров обозначим через $B_1(Y)$.

Рассмотрим теперь оставшуюся часть множества H. Пусть $X \in \sigma_n$ – точка из H, которая не лежит ни в каком шаре $B_1(Y)$. Обозначим объединение всех стратов из Ω_0 размерности $k = n-1$ через Σ'_{n-1}. Т.к. точка X не принадлежит никакому шару покрытия B_1, то

$$\mathrm{dist}(X, \Sigma'_{n-1}) \geq \alpha\rho/2.$$

В другой стороны, по построению множества H,

$$\operatorname{dist}(X, \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega) > \rho.$$

Полагая без ограничения общности, что $\alpha < 1$, получим

$$\operatorname{dist}(X, \partial\sigma_n \cup \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(X, \Sigma'_{n-1} \cup \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega) \geq \min(\rho, \alpha\rho/2) = \alpha\rho/2.$$

Тогда по лемме 4.4 величина $\alpha(\alpha\rho/2)$ будет допустимым радиусом для точки X. Окружив каждую точку $X \in \sigma_n$ радиусом $\alpha(\alpha\rho/2)$ и повторив эту процедуру для всех стратов σ_n, получим покрытие $B_2(X)$. Объединяя покрытия B_1 и B_2, получим итоговое покрытие всего множества H шарами допустимого радиуса .

Итак, любая точка $X \in H$ либо принадлежит некоторому шару $B_1(Y)$ радиуса $\alpha\rho/2$, либо является центром шара $B_2(X)$ радиуса $\alpha^2\rho/2$. В первом случае шар $B_1(Y)$ имеет радиус меньше половины от допустимого. Значит существует ещё один шар $B'_1(Y)$ допустимого радиуса $R' = \alpha\rho$ и такой, что $|X - Y| < R'/2$. Применяя теорему 4.3, получим оценку

$$|\nabla u| < \frac{C_1}{R'} = \frac{C_1}{\alpha\rho}.$$

Во втором случае, согласно теореме 4.3, имеем оценку

$$|\nabla u| < \frac{C_2}{R} = C_2 \frac{2}{\alpha^2} \frac{1}{\rho}.$$

Объединяя эти оценки, получим требуемое утверждение. ■

4.3 Поток поля градиента

Важную роль в доказательстве теоремы об устранимой особенности играет понятие потока поля $p\nabla u$ через стратифицированную сферу допустимого радиуса, т.е. интеграл вида

$$\int\limits_{\partial\Omega} p\frac{\partial u}{\partial n}\, d\mu_s = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\mu_s^{n-1}.$$

Заметим, что для произвольной функции из $C^{2*}_{\sigma,p}$ этот интеграл может не существовать. Это связано с тем, что пространство $C^{2*}_{\sigma,p}$ допускает особенности градиента на стратах размерности $k \leq n-2$. Этот параграф посвящён изучению потоков поля градиента в случае, когда u – ограниченная гармоническая функция.

Следующие две леммы являются вспомогательными и не затрагивают стратифицированных множеств. Пусть P – кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что каждый её участок гладкости равномерно гладкий в том смысле, что вектор нормали непрерывен вплоть до краёв каждого участка. Таким образом, в каждой точке P либо определена касательная плоскость, либо определено множество предельных касательных плоскостей.

Определение 4.1 *Пусть L – линейное многообразие. Будем говорить, что P пересекает L под ненулевым углом, если для любой точки $Y \in P \cap L$ угол между L и касательной плоскостью T_Y в точке Y отличен от нуля.*

Лемма 4.5 *Пусть L_k – линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$, $k \leq n-2$, и P – ограниченная кусочно-гладкая поверхность, которая пересекает L_k под ненулевым углом. И пусть в $\mathbb{R}^n$ задана функция*

$$f(X) = \frac{1}{\operatorname{dist}(X, L_k)}.$$

Тогда функция f интегрируема на P.

Доказательство: Пусть P_j – участок гладкости поверхности P. Рассмотрим точку $Y \in L_k \cap P_j$. Пусть T_Y – соответствующая касательная плоскость, и ν_Y – нормальный вектор к плоскости T_Y. По условию леммы плоскость T_Y пересекает L_k под ненулевым углом. Поэтому найдётся такая прямая $s \subset L_k$, которая образует с ν_Y острый угол. Построим в точке Y такой шар, в котором угол между прямой s и нормальным вектором к поверхности P_j остаётся острым и, более того, отделён положительной константой от $\pi/2$.

Пусть $P_{jm} \subset P_j$ участок, образованный пересечением поверхности P_j с этим шаром. Выберем новую декартову систему координат так, чтобы ось x_n совпадала с прямой s. Т.к. s образует острый угол с любым нормальным вектором поверхности P_{jm}, то P_{jm} можно представить как график некоторой функции γ

$$P_{jm} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) : \ x_n = \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Положим x' – набор из первых $n-1$ координаты точки x. Напомним, что, по построению, угол между прямой x_n и произвольным нормальным вектором к P_{jm} отделён положительной константой от $\pi/2$. Поэтому существует такая константа $C > 0$, что для элемента площади ds поверхности P_{jm} выполняется неравенство

$$ds < C dx'.$$

Значит имеет место оценка интеграла

$$\int\limits_{P_{jm}} f(X) ds < C \int\limits_{A} f(x', x_n) dx',$$

где A – область интегрирования по переменной x'. Т.к. плоскость $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ перпендикулярна линейному многообразию L_k, то

$$C \int\limits_{A} f(x', x_n) dx' = C \int\limits_{A} f(x', 0) dx' = C \int\limits_{A} \frac{1}{\operatorname{dist}((x', 0), L_k)} dx'.$$

Последний интеграл является табличным. И т.к. для размерностей L_k и $\mathbb{R}^n$

выполняется неравенство $k \le n-2$, то этот интеграл сходится.

Итак, мы получили интегрируемость функции f в пересечении P с некоторым шаром. Т.к. пересечение P и L_k замкнуто, мы можем выбрать конечное подпокрытие соответствующими шарами. В каждом шаре f будет интегрируема на P. Оставшаяся часть поверхности P находится на ненулевом расстоянии от L_k, поэтому на ней функция f ограниченная. ■

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано ещё одно линейное многообразие $L_q \subset L_k$, $q \le k$. Обозначим для произвольной точки $X \in \mathbb{R}^n$ её проекцию на L_q через X'. Пусть $G \subset L_q$ – некоторая область. Рассмотрим при $r \in [0, r_0]$ поверхность $\Gamma(r)$ вида

$$\Gamma(r) = \{X \in \mathbb{R}^n : \ X' \in G \wedge \operatorname{dist}(X, X') = r\}. \tag{5}$$

Лемма 4.6 *Если $q \le n-3$, то при $\alpha \to 0$*

$$\int\limits_{\Gamma(r)} f(X)\, ds \to 0.$$

Если $k = n-2$ и $q = n-2$, то имеет место оценка

$$|\int\limits_{\Gamma(r)} f(X)\, ds| < C\mu(G),$$

где $\mu(G)$ – мера G на L_k, C не зависит от выбора G и от r.

Доказательство: Разобьём $\Gamma(r)$ на два подмножества – $\Gamma^0(r)$ и $\Gamma^1(r)$. Пусть $\Gamma^0(r)$ лежит в достаточно малой окрестности L_k. Разобьём это подмножество на участки P_{jm} как в предыдущем доказательстве. Т.к. при уменьшении r угол между вектором нормали в произвольной точке $X \in \Gamma(r)$ и многообразием L_k не меняется, то константу C в оценке

$$ds < C dx'$$

можно выбрать не зависящей от r.

Применяя те же рассуждения, что и в предыдущем доказательстве, получим

$$\int\limits_{P_{jm}} f(X)ds < C \int\limits_{A} \frac{1}{\operatorname{dist}((x',0),L_k)} dx'.$$

Т.к. мера множества A стремится к нулю при $r \to 0$, а интеграл от функции

$$\frac{1}{\operatorname{dist}((x',0),L_k)}$$

сходится, то интеграл по A стремится к нулю.

Далее, подмножество $\Gamma^1(r)$ находится от L_k на ненулевом расстоянии. Поэтому при уменьшении r для каждой точки X выполняется оценка

$$f(X) < \frac{C_1}{r}.$$

Площадь поверхности $\Gamma^1(r)$ при этом уменьшается соразмерно r^{n-q-1}.

Итак, имеем

$$\Big| \int\limits_{\Gamma^1(r)} f(X)ds \Big| \le \frac{C_1}{r}\, r^{n-q-1} \mu(\Gamma^1(r_0)) = C_2 r^{n-q-2} \mu(\Gamma^1(r_0)).$$

При $q \le n-3$ эта величина стремится к нулю, а при $q = n-2$ равна $C_2\mu(\Gamma^1(r_0))$. Выбирая подходящую константу C, получим

$$C_2\mu(\Gamma^1(r_0)) = C\mu(G).$$

■

Вернёмся к стратифицированному множеству Ω и гармонической функции u. Пусть P – замкнутая кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^d$, которая пересекает все страты под ненулевым углом и не пересекает $\partial\Omega$. Стратифицированную меру площади на P будем обозначать через μ_s. Рассмотрим поток поля $p\nabla u$

через $P \cap \Omega_0$ (см. подробнее в §1.5). Т.к. функция p равна единице только на свободных стратах (мы напоминаем, что все свободные страты имеют размерность n), а на остальных стратах равна нулю, то вместо поля $p\nabla u$ мы будем рассматривать поле ∇u, но интегрирование будем вести по мере μ_s^{n-1}.

Лемма 4.7 *Пусть Ω – n-мерное стратифицированное множество, Σ_{n-2} – объединение всех стратов размерности $k \leq n-2$. Пусть u – ограниченная гармоническая функция на $\Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2}$. И пусть P – замкнутая кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^d$, которая пересекает все страты под ненулевым углом и не пересекает $\partial\Omega$. Тогда существует поток поля градиента ∇u через $P \cap \Omega_0$ по мере $d\mu_s^{n-1}$.*

Доказательство: Т.к. интегрирование ведётся по мере $d\mu_s^{n-1}$, то

$$\int\limits_{P\cap\Omega_0} (\nabla u)_n \, d\mu_s^{n-1} = \sum_{\sigma_{nj}} \int\limits_{P\cap\sigma_{nj}} (\nabla u)_n \, d\mu_s^{n-1}.$$

Таким образом достаточно показать существование потока через $P \cap \sigma_{nj}$.

Т.к. поверхность P кусочно-гладкая, то почти во всех точках $X \in P \cap \sigma_{nj}$ существует нормальная производная, для которой по теореме 4.2 выполняется оценка

$$|\frac{\partial u}{\partial n}| \leq |\nabla u| \leq \frac{C}{\rho},$$

где $\rho = \operatorname{dist}(X, \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega)$. Т.к. P находится на ненулевом расстоянии от $\partial\Omega$, то будем считать, что $\rho = \operatorname{dist}(X, \Sigma_{n-2})$.

Рассмотрим произвольный страт σ_{kj}. Пусть L_{kj} – k-мерное многообразие, которое покрывает σ_{kj}. Т.к.

$$\rho = \min_{kj, k\leq n-2} \operatorname{dist}(X, \sigma_{kj}),$$

и $\operatorname{dist}(X, \sigma_{kj}) \geq \operatorname{dist}(x, L_{kj})$, то

$$\rho \geq \min_{kj, k \leq n-2} \operatorname{dist}(X, L_{kj}).$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho} \leq \max_{kj, k \leq n-2} \frac{1}{\operatorname{dist}(X, L_{kj})} \leq \sum_{kj, k \leq n-2} \frac{1}{\operatorname{dist}(X, L_{kj})}.$$

Таким образом, модуль градиента $|\nabla u|$ мажорируется суммой функций, каждая из которых интегрируема на $P \cap \sigma_{nj}$ по мере $d\mu_s^{n-1}$ (см. лемму 4.5), поэтому поток ∇u через $P \cap \Omega_0$ существует. ■

Аналогичным образом (через оценку нормальной производной суммой функций вида $1/\operatorname{dist}(X, L_{kj})$) доказывается следующая лемма.

Лемма 4.8 *Пусть σ_q – некоторый страт, и $G \subset \sigma_q$ – некоторая область. Пусть*

$$\Gamma(r) = \{X \in \mathbb{R}^d : \ X' \in G \wedge \operatorname{dist}(X, X') = r\},$$

где X' – проекция X на σ_q. Тогда, если $q \leq n-3$, то при $r \to 0$

$$\int\limits_{\Gamma(r) \cap \Omega_0} |(\nabla u)_n| \, d\mu_s^{n-1} \to 0.$$

Если $q = n-2$, то имеет место оценка

$$\int\limits_{\Gamma(r) \cap \Omega_0} |(\nabla u)_n| \, d\mu_s^{n-1} < C\mu(G),$$

где $\mu(G)$ – мера G на σ_q, C не зависит от выбора G и от r.

Как видим, если $q = n-2$, мы не можем утверждать, что интеграл стремится к нулю. Однако, если перейти от интеграла от модуля нормальной производной к интегралу от нормальной производной (т.е. потоку через $\Gamma(r) \cap \Omega_0$), то можно показать его сходимость к нулю при $r \to 0$.

Пусть Ω имеет структуру стратифицированного шара допустимого радиуса с центром в точке страта σ_k, $k = n-2$. Пусть G и $\Gamma(r)$ такие же, как в предыдущей лемме.

Лемма 4.9 *Поток поля ∇u через $\Gamma(r) \cap \Omega_0$ стремится к нулю при $r \to 0$.*

Доказательство: Обозначим поток как

$$\Psi(r) = \int\limits_{\Gamma(r)\cap\Omega_0} (\nabla u)_n \, d\mu_s^{n-1}.$$

Покажем сначала, что предел $\Psi(r)$ при $r \to 0$ существует.

В самом деле, зафиксируем достаточно малое $R > 0$, всюду далее будем считать, что $r < R$. Введём поверхность

$$S(r, R) = \{X \in \mathbb{R}^d : \ X' \in \partial G\}.$$

Вместе с $\Gamma(r)$ и $\Gamma(R)$ они образуют замкнутую поверхность, которая пересекает только страты размерности n и $n-1$. Тогда, по теореме Гаусса о дивергенции для случая стратифицированного множества, поток через $\Gamma(r)$ по внешнему направлению равен сумме потоков по внешнему направлению через $S(r, R)$ и $\Gamma(R)$. Но при $r = 0$ $S(0, R)$ и $\Gamma(R)$ образуют замкнутую поверхность, через которую существует поток поля ∇u. Поэтому предел $\Psi(r)$ при $r \to 0$ существует.

Предположим, что предел не равен нулю. Для определённости будем считать, что он равен $C > 0$. Т.к. функция u гладкая на стратах размерности n и $n-1$, то поток $\Psi(r)$ непрерывно зависит от r. Значит, начиная с некоторого r_0, поток будет больше некоторого $\delta > 0$.

Введём специальную систему координат. Положим L_k – линейное многообразие, покрывающее σ_k. Перейдём к координатам вида (x', r, ϕ). Здесь x' – набор из k координат точки X' – проекции X на L_k – в декартовых координатах на L_k, а (r, ϕ) – сферическая система координат с центром в точке X' в ортогональном пространстве $L_k^{\perp}$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{r_0} \frac{1}{r} \Psi(r)\, dr = \int\limits_0^{r_0} \frac{1}{r} \int\limits_{\Gamma(r)\cap\Omega_0} (\nabla u)_n \, d\mu_s^{n-1} dr.$$

Т.к.

$$d\mu_s^{n-1} = r^{n-k-1} dx' d\phi,$$

и $n - k = 2$, то

$$\Big| \int\limits_0^{r_0} \frac{1}{r} \int\limits_{\Gamma(r)\cap\Omega_0} (\nabla u)_n \, d\mu_s^{n-1} dr \Big| = \int\limits_0^{r_0} \int\limits_G \int\limits_\Phi r^{n-k-2} \frac{\partial u}{\partial r}(x', r, \phi)\, d\phi dx' dr =$$

$$= \Big| \int\limits_0^{r_0} \int\limits_G \int\limits_\Phi \frac{\partial u}{\partial r}(x', r, \phi)\, d\phi dx' dr \Big| = \Big| \int\limits_G \int\limits_\Phi \Big(u(x', r_0, \phi) - u(x', 0, \phi) \Big)\, d\phi dx' \Big| \leq$$

$$\leq (u_{max} - u_{min}) \mu(G) \mu(\Phi).$$

Т.е. интеграл ограничен.

С другой стороны, если предположить, что поток $\Psi(r)$ больше некоторого $\delta > 0$ на отрезке $[0, r_0]$, то

$$\int\limits_0^{r_0} \frac{1}{r} \Psi(r)\, dr > \delta \int\limits_0^{r_0} \frac{1}{r}\, dr = \infty.$$

Что влечёт противоречие. ■

Важным моментом доказательства являлось то, что поверхность $\Gamma(r)$ при $r \to 0$ менялась подобным образом. Поэтому, когда мы переходили к координатам (x', r, ϕ), то интегрирование по переменной r велось на отрезке $[0, r_0]$.

Пусть Ω по-прежнему имеет структуру стратифицированного шара допустимого радиуса с центром в точке страта σ_k, $k = n-2$. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана кусочно-гладкая замкнутая поверхность P, которая лежит в шаре, образующем стратифицированное множество Ω. И пусть множество G (на основе которого мы строим поверхность $\Gamma(r)$) выбрано таким образом, что проекция P на страт σ_k лежит в G.

Рассмотрим поверхность $\Gamma(r)$ достаточно малого радиуса r. Обозначим через $\Gamma'(r)$ – участок поверхности, который лежит внутри области, ограниченной поверхностью P. Устремим r к нулю. Теперь поверхность $\Gamma'(r)$ уже не будет меняться подобным образом, поэтому мы не можем применить к ней предыдущую лемму. Тем не менее, мы можем сформулировать аналогичную.

Лемма 4.10 *Поток поля ∇u через $\Gamma'(r) \cap \Omega_0$ стремится к нулю при $r \to 0$.*

Доказательство: Рассмотрим область $G_1 \subset G$, которая лежит на ненулевом расстоянии от границы ∂G. Найдётся такая ε-окрестность множества G, которая не пересекает поверхность P. Пусть $r < \varepsilon$. Обозначим через $\Gamma'_1(r)$ участок поверхности $\Gamma'(r)$, проекция которого на σ_k даёт множество G_1. Положим $G_2 = G \setminus G_1$, $\Gamma'_2(r) = \Gamma'(r) \setminus \Gamma'_1(r)$.

Т.к. мы выбрали $r < \varepsilon$, то проекция $\Gamma'_1(r)$ на σ_k при любом r равна G_1. Поэтому, по предыдущей лемме, предел потока через $\Gamma'_1(r) \cap \Omega_0$ стремится к нулю. Поток же через $\Gamma'_2(r) \cap \Omega_0$, по лемме 4.8, с точностью до константы ограничен мерой проекции $\Gamma'_2(r)$ на σ_k. При $r \to 0$ эта величина стремится к $C\mu(G_2)$. Т.к. мы выбирали G произвольно, то величина $C\mu(G_2)$ будет сколь угодно мала. Отсюда следует, что предел потока поля ∇u через $\Gamma'(r) \cap \Omega_0$ стремится к нулю при $r \to 0$. ■

Теперь мы можем перейти к последней лемме данного параграфа.

Лемма 4.11 *Пусть Ω – n-мерное стратифицированное множество, Σ_{n-2} – объединение всех стратов размерности $k \leq n-2$. Пусть u – ограниченная гармоническая функция на $\Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2}$. И пусть P – замкнутая кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^d$, которая пересекает все страты под ненулевым углом и не пересекает $\partial\Omega$. Тогда поток поля градиента ∇u через поверхность $P \cap \Omega_0$ по мере $d\mu_s^{n-1}$ равен нулю.*

Доказательство: Проведём доказательство методом математической индукции. Пусть поверхность P пересекает только страты размерности n и $n-1$. Т.к. по условию леммы функция u принадлежит пространству $C^{2*}_{\sigma,p}$, то она принадлежит и пространству C^2_σ (см. определения соответствующих пространств). Следовательно выполняется теорема о дивергенции, и поток через $P \cap \Omega_0$ равен нулю.

Предположим, что лемма выполняется для всех случаев, когда P пересекает страты размерности больше k. Пусть теперь P пересекает страты размерности k. Рассмотрим множество $P \cap \sigma_{kj}$ для некоторого страта σ_{kj}. Это множество будет изолированно от других стратов размерности k, поэтому будем считать без ограничения общности, что σ_{kj} – единственный страт размерности k, который пересекает поверхность P. Более того, для простоты будем считать, что Ω имеет структуру стратифицированного шара допустимого радиуса с центром в некоторой точке $X_0 \in \sigma_{kj}$.

Пусть L_k – k-мерное линейное многообразие, которое покрывает σ_{kj}. Положим достаточно малое $r > 0$, и окружим L_k поверхностью $\Gamma(r)$ вида

$$\Gamma(r) = \{X \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}(X, L_k) = r\}.$$

Обозначим через $P'(r)$ участок поверхности P, который оказался за пределами области, ограниченной поверхностью $\Gamma(r)$. Обозначим через $\Gamma'(r)$ участок

$\Gamma(r)$, который оказался внутри области, ограниченной P. Тогда поверхность $P'(r) \cup \Gamma'(r)$ будет замкнутой, кусочно-гладкой и будет пересекать все страты под ненулевым углом. Следовательно, по предположению индукции, поток через $(P'(r) \cup \Gamma'(r)) \cap \Omega_0$ равен нулю.

Устремим теперь r к нулю. Тогда по лемме 4.8 (при $k \le n-3$) или по лемме 4.10 (при $k = n-2$) поток через $\Gamma'(r) \cap \Omega_0$ стремится к нулю. И т.к. поток через $P \cap \Omega_0$ существует, то он равен нулю. ■

4.4 Доказательство теоремы об устранимой особенности

Наконец мы можем перейти к доказательству теоремы об устранимой особенности.

Зафиксируем $X_0 \in \Omega_0$. Пусть S_r – стратифицированная сфера допустимого радиуса r с центром в точке X_0. Рассмотрим интеграл вида

$$M[S_r]u = \frac{1}{\omega r^{n-1}} \int\limits_{S_r} u \, d\mu_s^{n-1},$$

где ω – мера единичной стратифицированной сферы. Интегрирование ведётся по мере $d\mu_s^{n-1}$ (см. подробнее в §1.5), т.е. по тем участкам стратифицированной сферы, которые образованы пересечением со свободными n-мерными стратами. Т.к. функция u непрерывна и ограниченна на этих стратах, то величина $M[S_r]u$ определена корректно.

Теорема 4.4 (равенство средних) *Для любой точки $X_0 \in \Omega_0$ и любых допустимых радиусов r_1 и r_2*

$$M[S_{r_1}(X_0)]u = M[S_{r_2}(X_0)]u.$$

Доказательство: Без ограничения общности будем считать, что Ω имеет структуру стратифицированного шара допустимого радиуса с центром в точке X_0. Перейдём к сферическим координатам (r, ϕ) с центром в точке X_0. Тогда

$$\frac{1}{r^{n-1}} d\mu_s^{n-1} = d\phi.$$

Рассмотрим при достаточно малом $\delta > 0$ величину

$$\frac{M[S_{r+\delta}(X_0)]u - M[S_r(X_0)]u}{\delta} = \frac{1}{\omega} \int\limits_{\Phi} \frac{u(r+\delta, \phi) - u(r, \phi)}{\delta} \, d\phi,$$

где Φ – множество направлений, соответствующих $(n-1)$-мерным участкам стратифицированной сферы $S_r(X_0)$. Т.к. u гладкая на свободных стратах, то при $\delta \to 0$

$$\frac{u(r+\delta r, \phi) - u(r, \phi)}{\delta r} \to \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r}.$$

Далее, по теореме о промежуточном значении

$$\frac{u(r+\delta, \phi) - u(r, \phi)}{\delta} = \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r}\bigg|_{r=r^*} \le (\nabla u)(r^*, \phi)$$

Согласно теореме 4.2,

$$(\nabla u)(r^*, \phi) \le \frac{1}{\mathrm{dist}(X(r^*, \phi), \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega)} \le \frac{1}{\mathrm{dist}(X(r, \phi), \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega)}.$$

Последнее неравенство выполняется ввиду того, что при движении по лучу (X_0, ϕ) в сторону точки X_0 расстояние от точки $X(r, \phi)$ до каждого страта размерности $k \le n-2$ монотонно убывает. Таким образом, величина

$$\frac{u(r+\delta, \phi) - u(r, \phi)}{\delta}$$

при любом достаточно малом δ мажорируется интегрируемой функцией. Тогда при $\delta \to 0$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости (см., например, [16])

$$\frac{M[S_{r+\delta}(X)]u - M[S_r(X)]u}{\delta} \to \frac{1}{\omega} \int\limits_{\Phi} \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r}\, d\phi = \frac{1}{\omega r^{n-1}} \int\limits_{S_r} \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial n}\, d\mu_s^{n-1}.$$

Последний интеграл равен нулю по лемме 4.7.

Собирая начало и конец, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} M[S_r(X)] = 0.$$

Значит значение $M[S_r(X)]u$ не зависит от r. ■

Положим $C(X)$ – среднее значение $M[S(X)]u$ по некоторой стратифицированной сфере $S(X)$ допустимого радиуса с центром в точке X.

Лемма 4.12 *Пусть $X_i \in \sigma_k \subset \Omega_0$, $X^* \in \sigma_k \subset \Omega_0$ и $X_i \to X^*$. Тогда $C(X_i) \to C(X^*)$.*

Доказательство: Построим в каждой точке X_i и точке X^* стратифицированные сферы одинакового допустимого радиуса $S(X_i)$ и $S(X^*)$. Т.к. X_i и X^* лежат на одном страте, а радиусы сфер равны, то любую сферу $S(X_i)$ можно отобразить на $S(X^*)$ с помощью параллельного переноса. Пусть X – произвольная точка сферы $S(X^*)$. Обозначим через X' её образ при отображении $S(X^*) \to S(X_i)$ при фиксированном i. Положим

$$u_i(X) = u(X').$$

Таким образом все u_i и u определены на сфере $S(X^*)$.

Т.к. X_i сходятся к X^*, и все сферы имеют одинаковый радиус, то u_i сходятся к u поточечно. Т.к. u_i и u непрерывны почти всюду на $S(X^*)$ и равномерно ограниченны, то

$$\int\limits_{S(X^*)} u_i\, ds \to \int\limits_{S(X^*)} u\, ds.$$

В конечном итоге имеем

$$C(X_i) = M[S(X_i)]u = M[S(X^*)]u_i \to M[S(X^*)]u = C(X^*).$$

Что и требовалось доказать. ■

Лемма 4.13 *Пусть $X_i \in \Omega_0 \setminus \sigma_k$, $X^* \in \sigma_k \subset \Omega_0$ и $X_i \to X^*$. Тогда $u(X_i) \to C(X^*)$.*

Доказательство: Если $k = n-2$, то на всех стратах большей размерности по условию теоремы функция u является гармонической. Если $k < n-2$, то будем считать без ограничения общности, что для стратов большей размерности мы уже доказали теорему об устранимой особенности и можем считать функцию u непрерывной. Это значит, согласно предыдущему параграфу, что на стратах большей размерности выполняется теорема о среднем. Отсюда следует (см. замечание в §3.4), что на стратах большей размерности выполняется неравенство Харнака. Этот факт играет ключевую роль при доказательстве.

Будем предполагать для простоты, что Ω имеет структуру стратифицированного шара допустимого радиуса. Это означает, что σ_k – единственный страт размерности k, а все остальные страты из Ω_0 имеют бо́льшую размерность. Следовательно u является гармонической на $\Omega_0 \setminus \sigma_k$.

Рассмотрим все частичные пределы функции u в точке X^*. Т.к. функция u ограниченная, то верхний и нижний пределы ограниченные. Обозначим их через M и m соответственно.

Утверждение 4.1 *$C(X^*) = m$.*

Доказательство: Следующие рассуждения во многом повторяют рассуждения в доказательстве леммы 3.2.

Выберем последовательность $X_i \in \Omega_0 \setminus \sigma_k$ так, чтобы $X_i \to X^*$ и $u(X_i) \to m$. Обозначим через L_k – линейное многообразие размерности k, покрывающее страт σ_k. Т.к. все X_i начиная с некоторого номера принадлежат шару допустимого радиуса с центром в точке X^*, и $X^* \in \sigma_k$, то проекции точек X_i на L_k начиная с некоторого номера принадлежат σ_k. Обозначим их через Y_i; будем считать, что все Y_i лежат в σ_k.

Т.к. $X_i \to X^*$ и $Y_i \to X^*$, то без ограничения общности будем считать, что

$$\operatorname{dist}(X_i, Y_i) < \frac{1}{2} R_i,$$

где R_i – допустимые радиусы в точках Y_i. Окружим каждый Y_i стратифицированным шаром $B(Y_i)$ радиуса $2 \operatorname{dist}(X_i, Y_i)$. Т.к. радиусы шаров $B(Y_i)$ стремятся у нулю, а m – это нижний предел функции u в точке X^*, то

$$\inf_{B(Y_i)} u \to m, \ (i \to \infty).$$

Положим на $B(Y_i)$

$$\bar{u}_i = u - \inf_{B(Y_i)} u.$$

Тогда все функции $\bar{u}_i$ будут неотрицательными на $B(Y_i)$ и ограниченными гармоническими на $B(Y_i) \setminus \sigma_k$. Также будет выполняться

$$\bar{u}_i(X_i) \to 0, \ (i \to \infty).$$

Т.к. все Y_i и X^* лежат на одном страте, то все шары $B(Y_i)$ подобны шару $B(X^*)$ (см. определение 3.2). Отобразим каждый шар $B(Y_i)$ на $B(X^*)$ с помощью отображения T_i – композиции параллельного переноса и преобразования подобия. Тогда $T_i(Y_i) = X^*$ при любом i. И т.к. радиус шара $B(Y_i)$ мы выбрали равным $2\,\mathrm{dist}(X_i, Y_i)$, и Y_i реализует расстояние от X_i до σ_k, то образы $T_i(X_i)$ будут лежать на расстоянии $R/2$ от страта σ_k и от границы $\partial B(X^*)$, где R – радиус шара $B(X)$.

Перенесём функции $\bar{u}_i$ на шар $B(X^*)$ с помощью отображения T_i. А именно, положим при $X' \in B(X^*)$

$$u_i'(X') = \bar{u}_i(T_i^{-1}(X')).$$

Тогда все функции u_i' будут неотрицательными, ограниченными и гармоническими на $B(X^*) \setminus \sigma_k$.

Как ранее было замечено, образы $T_i(X_i)$ лежат на расстоянии $R/2$ от страта σ_k и от границы $\partial B(X^*)$, где R – радиус шара $B(X^*)$. Тогда существует компакт $H \subset (B(X^*) \setminus \sigma_k)$, который лежит на ненулевом расстоянии от страта σ_k и от границы $\partial B(X^*)$ и содержит все точки $T_i(X_i)$. Т.к.

$$u_i'(T_i(X_i)) = \bar{u}_i(X_i) \to 0, \ (i \to \infty),$$

и u' неотрицательные, то

$$\inf_H u_i' \to 0, \ (i \to \infty).$$

Итак, мы получили все условия для неравенства Харнака, из которого следует, что функции u_i' равномерно стремятся к нулю на H. Т.к. мы можем выбрать компакт H сколь угодно близким к σ_k, то, в сочетании с равномерной ограниченностью функций u_i', это означает, что для некоторой стратифицированной сферы допустимого радиуса $S'(X^*)$ среднее функций u_i' по этой сфере стремится к нулю.

Возвращаясь к функции u, получим

$$M[S(Y_i)]u \to m,$$

где $S(Y_i) = T_i^{-1}(S'(X^*))$. Исходя из равенства средних, имеем

$$C(Y_i) \to m,$$

что по лемме 4.12 означает $C(X^*) = m$. Утверждение доказано. ■

Утверждение 4.2 $C(X) = M$.

Доказательство: Для доказательства достаточно перейти к функции $-u$. Эта функция также будет гармонической и ограниченной, среднее значение по сферам для неё будет равно $-C(X)$, а инфимум по всем частичным пределам будет равен $-M$. ■

Т.к. $M = m = C(X)$, то для любой последовательности $x_i \in \Omega_0 \setminus \sigma_k$, $x_i \to X$, выполняется $u(x_i) \to C(X)$. Лемма доказана. ■

Собирая вместе две предыдущие леммы, получим итоговую теорему этого параграфа.

Теорема 4.5 (о продолжении по непрерывности) *Положим $u^*(X) = u(X)$ при $X \in \Omega_0 \setminus \sigma_k$ и $u^* = C(X)$ при $X \in \sigma_k$. Тогда u^* будет непрерывна на Ω_0.*

Отсюда в конечном итоге следует теорема 4.1 об устранимой особенности.

4.5 Замечания

Замечание 4.1 *Теорема об устранимой особенности в классе $C(\Omega_0) \cap C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ вообще говоря не выполняется.*

Рассмотрим двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$. И рассмотрим круговой сектор с центром в точке X, единичного радиуса и угловым раствором равным α. Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Лапласа в этом множестве. При $\alpha > \pi$ существуют примеры решений (см., например, в [20]), которые имеют особенность градиента в угловой точке X, т.е. не принадлежат $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$.

Рассмотрим сектор как стратифицированное множество Ω. Его стратами будут двумерная внутренность, три граничных участка и три вершины. Круговой участок и две примыкающие вершины положим в границу $\partial\Omega$. Тогда любое решение задачи Неймана является гармонической функцией на Ω_0. Таким образом, существует гармоническая функция u на Ω_0, которая принадлежит $C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$, но не принадлежит $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$. При этом

$$u \in C^2_{\sigma,p}(\Omega_0 \setminus \{X\}).$$

Это значит, что теорема об устранимой особенности в классе $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ не выполняется для точки X.

Заметим также, что хоть пространство $C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$ и является более широким, чем $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$, но при этом оно не является "слишком широким". Например, как было показано ранее, для гармонической функции в смысле пространства $C(\Omega_0) \cap C^{2*}_{\sigma,p}(\Omega_0)$ выполняется теорема о среднем. Отсюда следует теорема о единственности решения задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta_p u = 0$$

с мягким лапласианом.

Замечание 4.2 *Требование усиленной прочности существенно.*

Рассмотрим пример двумерного множества Ω, который состоит из двух треугольников, которые примыкают друг к другу по единственной общей вершине X. Положим u нулём на одном треугольнике, и единицей на другом. Такая функция будет гармонической всюду, кроме точки X. При этом продолжить u на X мы не можем даже по непрерывности.

Список литературы

[1] Ощепкова С.Н, Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве // Матем. заметки, 92:2 (2012), 276–290.

[2] Ощепкова С.Н, Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Лемма о нормальной производной для лапласиана на полиэдральном множестве // Матем. заметки, 96:1 (2014), 116–125.

[3] Савастеев Д.В. Теорема об устранимой особенности для гармонической функции на двумерном стратифицированном множестве // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки, т. 21, вып. 1, 2016, с. 108-116.

[4] Савастеев Д.В. Сильный принцип максимума для параболического оператора на стратифицированном множестве // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №6(227), 2016, с. 24-32.

[5] Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Об одном дифференциальном неравенстве // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 2008, С. 199-200.

[6] Савастеев Д.В. Лемма о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве // Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Сборник тезисов. Воронеж, 2011, С. 296-297.

[7] Савастеев Д.В. Лемма о нормальной производной для уравнения диффу-

зии на полиэдре // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012). Материалы V Международной конференции. Воронеж, 2012, С. 247-248.

[8] Савастеев Д.В. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций на стратифицированных множествах // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015). Сборник трудов VIII Международной конференции. Воронеж, 2015, С. 318-321.

[9] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В. [и др.]. М.:Физматлит, 2005. 272 с.

[10] Зорич В.А. Математический анализ, Ч.1. М.:Наука, 1981. 554 с.

[11] Зорич В.А. Математический анализ, Ч.2. М.:Наука, 1981. 640 с.

[12] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.:Наука, 1989. 464 с.

[13] Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. 3-е изд. М.: Наука., 1986. 120 с.

[14] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.:Мир, 1966. 352 с.

[15] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М.:Физматлит, 2004. 572с.

[16] Либ Э., Лосс М. Анализ. Новосибирск: Научная книга, 1998, 276 с.

[17] L.C. Evans Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Providence, 1991, 662 pp.

[18] Олейник О.А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Матем. сб. (н. сер.), 30:3 (1952), 695-702.

[19] E. Hopf A remark on linear elliptic differential equation of second order. Proc. Amer. Math. Soc, 3 (1952), 791–793.

[20] Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.:Наука, 1991. 336с.

[21] Пенкин О.М. О принципе максимума для эллиптического уравнения на двумерном клеточном комплексе. Доклады РАН. 1997. -Т.352, № 4. - С. 462-465.

[22] Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О дифференциальных неравенствах для эллиптических уравнений на сложных многообразиях. Доклады РАН. 1998. - Т.360, № 4. - С. 456-458.

[23] Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О несовместных неравенствах для эллиптических уравнений на стратифицированных множествах. Дифференц. уравнения. 1998. - Т.34, № 8. - С. 1107-1113.

[24] Пенкин О.М., Богатов Е.М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах. Матем. заметки. 2000. – Т.68., М. – С. 874-886.

[25] Пенкин О.М. Метод Перрона для задачи Дирихле на клеточном комплексе. Дифф. уравнения. 2001. - Т.37, № 11. -С. 1580.

[26] Гаврилов А.А., Пенкин О.М. Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. Дифференц. уравн., 2000, Т.36, №2, С.226-232.

[27] Ощепкова С.Н., Пенкин О.М. Об одном необходимом условии экстремума на стратифицированном множестве. ДАН. – 2007,Т.416, No1. – С.22–25.

[28] Ощепкова С.Н., Пенкин О.М., Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве, Матем. заметки, 2007, Т.81, вып.3, С.417-426

[29] Беседина С.В. Неравенство Харнака для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2004. - №1. - С. 77-81.

[30] Lumer G. Espaces ramifies et diffusions sur les reseaux topologiques. C.R.Acad.Sci Paris. Ser. A-B. – T.291 – №12 – P. 627-630

[31] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network Lect. Notes Math. V. 787 – Berlin: Springer, 1980. – P. 219-234

[32] Nicaise S. Diffusion sur les espaces ramifies Thesis. Universite de Monsб 1986. fini C.R. Acad. Sc. Paris. Serie 1. – 1986. – T. 303, №8. – P. 343-346

[33] Nicaise S. Le laplacien sur les reseaux deux-dimensionnels polygonaux topologiques J.-Math.-Pures-Appl. – 1988. – V.9,№2. – P.93-113

[34] von Below J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks J. Differential Equation. – 1988. – V.72. – P.316-337

[35] von Below J.Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks Math. Meth. Appl. Sc. – 1988. – V.10. – P.383-395.

[36] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднения дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993. 464 с.

[37] Жиков В.В Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Математический сборник. 1996. - Т.187, № 8. - С. 3-40.

[38] Покорный Ю.В. О краевых задачах на графах // Численные методы и оптимизация. Материалы IV симпозиума АН ЭССР. Таллин, 1988. С. 158-161.

[39] Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц. уравнения. 1989. - Т.25, № 7. - С. 1141-1150.