Воронежский государственный педагогический университет

на правах рукописи

Корнев Сергей Викторович

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВКЛЮЧЕНИЙ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

доктор физико-математических наук,

профессор В.В. Обуховский

Воронеж – 2017

Оглавление

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A \cap B$ – пересечение множеств A и B

$A \subset B$ – A подмножество B

$a \in A$ – a принадлежит A

$A \times B$ – декартово произведение множеств A и B

$A + B$ – алгебраическая сумма множеств A и B

$\emptyset$ – пустое множество

$\overline{A}$ – замыкание множества A

∂A – граница множества A

$\mathrm{co}\, A$ – выпуклая оболочка множества A

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ – $n-1$-мерная сфера единичного радиуса

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ – n-мерный шар единичного радиуса

$W_\varepsilon(A)$ – ε-окрестность множества A

$\rho_X(\cdot, \cdot)$ – расстояние между точкой и множеством в метрическом пространстве X

$\mathrm{dom}\, l$ – область определения оператора l

$\mathrm{Coin}\,(l, G)$ – множество решений включения $l(x) \in G(x)$

$\mathrm{Fix}\, F$ – множество неподвижных точек мультиотображения F

$\| \cdot \|$ – норма элемента

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение элементов

Введение

Тридцатые годы прошлого века считаются периодом зарождения теории дифференциальных включений, а работы французского математика А. Маршо и польского математика С. Зарембы - пионерскими. Но только в середине прошлого века теория дифференциальных включений получила мощный импульс развития. Это связано в первую очередь с тем, что дифференциальные включения являются очень удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в ряде разделов теории оптимального управления, математической экономики, математической физики и др. (см., например, [3], [4], [12], [43], [48], [55], [56], [58], [61]-[64], [72], [73], [90], [100], [119], [121], [122], [152], [154]). В силу этого, задачи о периодических колебаниях, о глобальной структуре множества периодических решений, об асимптотическом поведении решений для систем такого рода являются весьма актуальными. Периодические задачи для дифференциальных включений исследовались в работах В.И. Благодатских, Ю.Г. Борисовича, А.И. Булгакова, Е.А. Ганго, Б.Д. Гельмана, М.И. Каменского, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, А.И. Поволоцкого, Л.И. Родиной, А.А. Толстоногова, Е.Л. Тонкова, В.В. Филиппова, И.А. Финогенко, J.P. Aubin'a, A. Cellina, K. Deimling'a, L. Górniewicz'a, N.V. Loi'a, N.S. Papageorgiou, S. Plaskacz'a, P. Zecca и др. (см., например, [3], [11], [12], [15]-[19], [28], [43], [46], [47], [59], [71], [73], [78], [90], [94], [100], [101], [113], [115]-[119], [138],

[139], [148]).

Изучению бифуркационного феномена в нелинейных системах посвящены работы М.А. Красносельского, А.В. Арутюнова, Ю.Г. Борисовича, В.Г. Звягина, А.Ф. Измаилова, М.И. Каменского, А.М. Красносельского, В.В. Обуховского, Д.И. Рачинского, Ю.И. Сапронова, J.C. Alexander'а, S. Domachowsk'го, P.M. Fitzpatrick'а, L. Górniewicz'а, J. Gulgowsk'го, W. Kryszewsk'го, N.V. Loi'а, J. Mawhin'а, J. Pejsachowicz'а, P. Rabinovich'а, J.-C. Yao, J.A. Yorke и других исследователей (см., например, [25], [29], [34], [35], [69], [70], [91], [100], [103], [104], [124], [125], [127], [131], [144]-[147]).

Вышеупомянутые задачи потребовали для своего изучения развития геометрических и топологических методов анализа многозначных отображений (мультиотображений). Геометрические и топологические методы анализа, применяемые к задачам о нелинейных колебаниях динамических систем, восходят к именам А. Пуанкаре, Л. Брауэра, П.С. Александрова, Г. Хопфа, Ж. Лере, Ю. Шаудера. В дальнейшем эти методы были развиты и продемонстрировали свою эффективность в трудах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, М.И. Каменского, А.М. Красносельского, В.В. Обуховского, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Д.И. Рачинского, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, K. Deimling'а, A. Fonda, L. Górniewicz'а, J. Mawhin'а и др. Отметим, в частности, чрезвычайно плодотворное направление, связанное с понятием направляющей функции, основу которого заложили разработки М.А. Красносельского и А.И. Перова ([37]-[41], [49]-[51]).

Кроме того, достаточно действенной здесь оказалась теория топологической степени мультиполей с выпуклыми значениями, разработке которой посвящены труды Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, Ю.Е. Гликлиха, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, А.С. Потапова, J.-P. Aubin'а, R. Bader'а, A.

Cellina, J. Dugundji, H. Frankowska, A. Granas'a, A. Lasota, Z. Opial'a и др. (см., например, [2], [6]-[8], [10]-[12], [45], [52], [72], [73], [77], [84], [85], [102], [105]-[107], [112], [128], [129]). Однако в ряде задач теории периодических решений дифференциальных включений аппарат выпуклозначных мультиотображений не может быть непосредственно применен. Достаточно заметить, что многозначный оператор сдвига по траекториям дифференциальных включений не является выпуклозначным даже в простейших случаях.

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке новых геометрических и топологических методов анализа мультиотображений, позволяющих эффективно решать задачи о существовании периодических и ограниченных решений, а также задачу о качественном поведении решений дифференциальных уравнений и включений различных классов.

В работе развивается теория топологической степени мультиполей, соответствующих новым классам мультиотображений, которые естественным образом возникают в приложениях. Один из таких классов составляют мультиотображения, представимые в виде композиции аппроксимируемых мультиотображений и однозначных отображений. Этот класс достаточно обширен: он включает в себя как выпуклозначные полунепрерывные сверху мультиотображения, так и многозначные операторы сдвига по траекториям дифференциальных включений и дифференциальных уравнений, не обладающих свойством единственности решения. Второй рассматриваемый класс – это мультиотображения, обладающие непрерывными сечениями.

Для обоих классов строится топологическая степень совпадения, которая находит приложения в обосновании методов направляющих функций на заданном множестве и интегральных направляющих функций.

Развитые методы применяются к различным категориям задач.

Первым типом рассматриваемых задач является задача о периодических решениях систем, описываемых дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. Для эффективного решения этой задачи применяется модификация классического понятия направляющей функции – направляющая функция на заданном множестве. Существенным преимуществом по сравнению с классическим подходом является возможность "локализовать" проверку основного условия "направляемости" на области пространства, зависящей от самой направляющей функции.

Другим важным развитием метода направляющих функций, получившим отражение в диссертации, является метод многолистных направляющих функций. Он позволяет существенно расширить классы систем, к которым применимы геометрические методы отыскания периодических решений.

Несомненным достоинством этого метода является не только наличие преимуществ предыдущего подхода, но и возможность проверки основного условия "направляемости" на области не всего пространства, а его подпространства меньшей размерности.

При исследовании периодической задачи для дифференциальных включений помимо метода строгих многолистных направляющих функций вводится его более общий случай: метод обобщенных многолистных направляющих функций. Не менее эффективным оказался и метод нескольких многолистных направляющих функций. Применение комплекса этих методов позволило получить ряд существенно новых результатов о существовании периодических решений дифференциальных уравнений и включений.

В диссертации рассматривается также задача о периодических решениях систем, описываемых функционально-дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. Для ее решения был введен новый класс направляющих функций – интегральные направляющие функции.

Существенным развитием метода интегральных направляющих функций является его обобщение на включения с каузальными операторами. Отметим, что это понятие было впервые введенно Л. Тонелли (см. [155]) и А.Н. Тихоновым (см. [54]) в первой половине прошлого века и оказалось мощным инструментом для унификации задач в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений с конечным или бесконечным запаздыванием, интегральных уравнений Вольтерра, функциональных уравнений нейтрального типа и др. (см. [87]). Различные задачи для функционально-дифференциальных уравнений с каузальными операторами были рассмотрены в работах [17, 24, 92, 93, 114, 132, 143]. В частности, граничная и периодическая проблемы изучались в [93] и [132].

В классических работах по методу направляющих функций, как правило, предполагается, что эти функции являются гладкими на всем фазовом пространстве. Это условие может представиться ограничительным, например, в таких ситуациях, когда направляющие потенциалы различны в различных областях пространства. Для снятия указанного ограничения в диссертации рассматриваются негладкие направляющие потенциалы для каждого класса направляющих функций и их обобщенные градиенты.

Универсальность рассматриваемых в диссертации методов позволяет применять их и к задаче о существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений и включений, а также функционально-дифференциальных уравнений и включений различных классов.

Еще одним типом рассматриваемых задач является исследование асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных и дифференциальных включений различных классов. Разработанные в диссертации методы позволяют получить существенно новые оценки норм траекторий соответствующих дифференциальных включений.

Завершается ряд рассматриваемых в диссертации проблем задачей о бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений и включений. Для ее решения предлагается новый подход на основе понятия многолистной направляющей функции, позволяющий значительно облегчить нахождение ключевой характеристики данной задачи – бифуркационного индекса.

Значительная часть результатов, полученных в диссертационной работе для дифференциальных включений, является новой и для теории дифференциальных уравнений.

Цель диссертационной работы. Разработка теории топологической степени для новых классов мультиотображений. Развитие на этой основе метода направляющих функций трех новых типов: направляющих функций на заданном множестве, интегральных и многолистных направляющих функций. Получение новых приложений разработанных методов к задачам о существовании периодических и ограниченных решений, о качественном поведении решений дифференциальных уравнений и включений.

Методы исследования. При решении изложенных выше задач используются методы многозначного анализа, нелинейного функционального анализа, негладкого анализа, качественной теории дифференциальных уравнений и включений, а также теории бифуркаций.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. Наиболее значимыми являются следующие результаты:

1) построена теория топологической степени мультиполей, соответствующих новым классам мультиотображений с невыпуклыми значениями в

конечномерном и нормированном пространствах;

2) развита на основе построенной топологической степени теория степени совпадения для соответствующих классов мультиотображений и линейных фредгольмовых отображений;

3) введено понятие набора направляющих функций для случая дифференциальных включений и получены достаточные условия существования их периодических решений;

4) осуществлена локализация метода направляющих функций для дифференциальных включений;

5) введен в рассмотрение класс интегральных направляющих функций для исследования существования периодических решений функционально-дифференциальных включений;

6) обобщен метод интегральных направляющих функций на случай дифференциальных включений с каузальными операторами и получены новые достаточные условия существования их периодических решений;

7) введен класс многолистных векторных направляющих функций (МВНФ) как новый инструмент исследования вынужденных колебаний в динамических системах, описываемых дифференциальными включениями;

8) получены в терминах полного набора строгих (обобщенных) МВНФ и правильной МВНФ новые достаточные условия существования периодических решений дифференциальных уравнений и включений;

9) указанные выше классы направляющих функций применены к новым задачам исследования асимптотического поведения решений дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и включений;

10) все предложенные классы направляющих функций расширены на случай негладких потенциалов;

11) существенно расширены классы динамических систем, к которым

применимы разработанные в диссертации методы (в частности, на случай систем, описываемых дифференциальными и функционально-дифференциальными включениями, правые части которых не обладают свойством выпуклости значений и являются, например, нормальными мультиотображениями);

12) распространен метод МВНФ на задачу исследования бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений и включений.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В диссертационной работе разработан достаточно широкий спектр новых методов нелинейного и многозначного анализа, которые эффективно применены в исследовании периодических и ограниченных решений систем, описываемых различными классами дифференциальных уравнений и включений, асимптотического поведения решений, а также бифуркации периодических решений. Результаты диссертационной работы могут применяться в теории оптимального управления, в задачах математической экономики и физики, теории игр. Отдельные элементы диссертации включены в программу дисциплины "Математические методы в решении прикладных задач", читаемой в рамках магистерской программы "Математическое образование" в Воронежском госпедуниверситете.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались на международной научной конференции "Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения" (Воронеж, 2000), Воронежских зимних математических школах (Воронеж, 2002, 2004, 2008, 2015, 2016), Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2002, 2014–2016), международных школах-семинарах по геометрии и анализу (Абрау-Дюрсо, 2002, 2004), международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Воронеж, 2003), международных научных конференциях "Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики" (Тамбов, 2003, 2015), международной научной конференции "Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения" (Воронеж, 2005), международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология" (Москва, 2008), международных научных конференциях "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум"(Крым, 2009, 2014–2016), международной открытой конференции "Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях" (Воронеж, 2014), международной математической конференции "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям" (Минск, 2015), международных молодежных симпозиумах "Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения" (Воронеж, 2014, 2015), Всероссийской конференции с международным участием "Теория управления и математическое моделирование"(Ижевск, 2015), международной научно-практической конференции "Молодежный форум: технические и математические науки" (Воронеж, 2015), международной школе-семинаре "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" (Иркутск, 2016), Symposium on Nonlinear Analysis (Торунь, Польша, 2007, 2015), International Symposium on Optimization and Optimal Control (Гаосюн, Тайвань, 2009), The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Москва, 2014), International Workshop on Nonlinear and Variational Analysis (Гаосюн, Тайвань, 2016) и других конференциях. Результаты обсуждались на семинарах под руководством профессора А.И. Перова (Воронеж, 2002, 2003), профессора В.В. Обуховского (Воронеж, 2000–2016), профессора М. И. Каменского (Воронеж, 2006, 2011), профессора Л.И. Родиной (Ижевск, 2015), а также во время стажировки в Национальном университете им. Сун Ят-Сена (Гаосюн, Тайвань, июль-август, 2016).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны РФФИ грант № 03-01-06293 "Молодые ученые, аспиранты и студенты" (2003); грантом для молодых участников проекта VZ–010 "Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах "Минобразования РФ и CRDF (США) (2004) и грантом на участие в работе школы "SPDE in Hydrodynamics: Recent Progress and Prospects" фонда CIME (Италия) (2005).

Предложенные понятия, утверждения, методы исследования вошли в отчеты по грантам Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 02-01-00189, 05-01-00100-a, 08-01-00192-a, 09-01-92003-ННС-а, 09-01-92429-КЭ_а, 11-01-00328-а, 12-01-00392-а, 14-01-92004 ННС_а, 14-01-00468 А, 16-01-00386 А), Министерства образования и науки РФ (проект № 3488) и Российского научного фонда (проект № 14-21-00066).

В 2014 г. за монографию "Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis" диссертант был удостоен в составе авторского коллектива премии правительства Воронежской области за достижения в области науки и образования.

Публикации. Основные результаты отражены в работах [1-37], в том числе в монографии [1] и статьях [2-22], опубликованных в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1], [3-8], [10], [15], [17], [19], [21-26] и [30] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 272 страницах и состоит из введения, пяти глав, содержащих 13 параграфов, и списка цитируемой литературы, включающего 155 наименований.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Обозначения и некоторые сведения из анализа

Пусть X – линейное нормированное пространство.

1. Множество $U \subset X$ называется *относительно компактным*, если любая последовательность элементов этого множества содержит сходящуюся подпоследовательность. Если пределы указанных подпоследовательностей принадлежат U, то множество называется *компактным*. Множество всех непустых, компактных подмножеств X обозначим $K(X)$.

2. Множество $U \subset X$ называется *выпуклым*, если оно содержит наряду с любыми двумя точками $x, y \in U$ их линейную комбинацию $\lambda x + (1-\lambda)y$ при любом $\lambda \in (0, 1)$.

Множество $\operatorname{co} U$ всевозможных конечных линейных (или выпуклых) комбинаций $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и каждое x_i принадлежит U, является наименьшим выпуклым множеством, содержащим U, и называется выпуклой оболочкой множества U. Множество $\overline{\operatorname{co}}\, U = \overline{\operatorname{co} U}$ называется *выпуклым замыканием* множества U.

Теорема 1.1.1. *(см., например, [27, с. 196]) Пусть A – замкнутое, ограниченное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда выпуклая оболочка множества A замкнута,* $\operatorname{co} A = \overline{\operatorname{co}}\, A$.

Теорема 1.1.2 (Мазура). *(см., например, [67, с. 16]) Если X – банахово пространство и $A \subset X$ – компактное множество, то выпуклое замыкание $\overline{\mathrm{co}}\,A$ также компактно.*

3. Точка $x \in M \subset X$ называется *неподвижной точкой* отображения $f : M \to X$, если $x = f(x)$.

Теорема 1.1.3 (Шаудера). *(см., например, [60, с. 320]) Пусть X – линейное нормированное пространство, M – выпуклое, замкнутое множество в X, $f : M \to M$ – непрерывное отображение, $f(M)$ – относительно компактное множество в X. Тогда f имеет неподвижную точку.*

4. Пусть X – банахово пространство, $N \subset E$ – непустое подмножество. Непрерывное отображение $g : N \to X$ называется *вполне непрерывным* на множестве N, если всякое ограниченное подмножество этого множества оно переводит в относительно компактное (см., например, [60, с. 287]).

5. Выпуклое множество K элементов линейного пространства называется *конусом*, если это множество содержит вместе с каждым элементом $x(x \neq 0)$ все элементы вида tx при $t \geq 0$ и не содержит элемента $-x$ (см., например, [60, с. 385]).

Пусть K – компакт, $C(K)$ – пространство непрерывных функций $f : K \to \mathbb{R}^n$ с метрикой равномерной сходимости ρ.

6. Семейство H функций $f \in C(K)$ называется *равномерно ограниченным*, если существует такая постоянная c, что $|f(x)| \leq c$ для всех $f \in H$ при любом $x \in K$.

7. Семейство H функций $f \in C(K)$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех $f \in H$ соотношение $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ справедливо при $\rho(x, y) < \delta$.

8.

Теорема 1.1.4 (Арцела-Асколи). *(см., например, [130, с. 236]) Для того чтобы семейство непрерывных функций $M \subset C(K)$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

9.

Теорема 1.1.5 (Титце-Дугунджи). *(см., например, [14, с. 86]) Пусть A – замкнутое множество метрического пространства X, а Y – локально выпуклое пространство. Тогда всякое отображение $f : A \to Y$ имеет непрерывное продолжение $\widetilde{f} : X \to Y$. Более того, все значения этого продолжения $\widetilde{f}$ могут быть взяты из выпуклой оболочки $\mathrm{co}\, f(A)$ множества $f(A)$.*

10.

Лемма 1.1.1 (Гронуолла). *(см., например, [66, с. 37]) Пусть $u, \upsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывные неотрицательные функции; $C \geq 0$ – некоторая постоянная и*

$$\upsilon(t) \leq C + \int_a^t u(s)\upsilon(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда

$$\upsilon(t) \leq Ce^{\int_a^t u(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

11. Пусть E – сепарабельное банахово пространство; $L^1([0,d];E)$ – банахово пространство суммируемых по Бохнеру функций $f : [0,d] \to E$.

Непустое множество $M \subset L^1([0,d];E)$ называется *разложимым*, если для любых $f, g \in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m \subset [0,d]$ выполнено

$$f\kappa_m + g\kappa_{([0,d]\setminus m)} \in M,$$

где κ_m – характеристическая функция множества m (см., например, [119, с. 163]).

1.2 Обозначения и некоторые сведения из теории многозначных отображений

Пусть X, Y – произвольные множества; $P(Y)$ – множество всех непустых подмножеств Y.

12. *Многозначным отображением, или мультиотображением,* F множества X в множество Y называется соответствие, которое сопоставляет каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом x. Это соответствие записывается в виде $F : X \to P(Y)$.

Класс мультиотображений включает в себя и обычные, однозначные отображения; для них каждый образ состоит из единственной точки. Всюду в дальнейшем, если это не оговорено специально, многозначные отображения обозначаются прописными буквами, а однозначные – строчными.

Для любого множества $A \subseteq X$ множество $F(A) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} F(\alpha)$ называется *образом множества* A при мультиотображении F.

13. Пусть $F : X \to P(Y)$ – мультиотображение. Множество Γ_F в декартовом произведении $X \times Y$,

$$\Gamma_F = \{(x, y) \mid \ (x, y) \in X \times Y, \quad y \in F(x)\}$$

называется *графиком мультиотображения* F.

14. *Малым прообразом множества* $D \subset Y$ называется множество

$$F_+^{-1}(D) = \{x \mid \ x \in X, \quad F(x) \subset D\}.$$

Полным прообразом множества $D \subset Y$ называется множество

$$F_-^{-1}(D) = \{x \mid \ x \in X, \quad F(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

15. Пусть X, Y, Z – произвольные множества, $F_0 : X \to P(Y)$, $F_1 : Y \to P(Z)$ – мультиотображения.

Мультиотображение $F_1 \circ F_0 : X \to P(Z)$,

$$(F_1 \circ F_0)(x) = F_1(F_0(x)),$$

называется *композицией отображений* F_0 и F_1.

16. Пусть X, Y – топологические пространства, $F : X \to P(Y)$ – мультиотображение.

Мультиотображение F называется *полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке* $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(U(x)) \subset V$.

Мультиотображение F называется *пн. св.*, если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Приведем некоторые равносильные формулировки (см., например, [12, с. 29]).

Теорема 1.2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) мультиотображение $F : X \to P(Y)$ *пн. св.;*

(ii) для любого открытого множества $V \subset Y$ *множество* $F_+^{-1}(V)$ *открыто в* X*;*

(iii) для любого замкнутого множества $Q \subset Y$ *множество* $F_-^{-1}(Q)$ *замкнуто в* X*.*

17. Пусть X, Y – топологические пространства, $F : X \to P(Y)$ – мультиотображение.

Мультиотображение F называется *полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке* $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \cap V \neq \emptyset$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(x') \cap V \neq \emptyset$ для любого $x' \in U(x)$.

Мультиотображение F называется *пн. сн.*, если оно пн. сн. в каждой точке $x \in X$.

Полунепрерывность снизу также допускает эквивалентные формулировки (см., например, [12, с. 30]).

Теорема 1.2.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) мультиотображение $F : X \to P(Y)$ пн. сн.;

(ii) для любого открытого множества $V \subset Y$ множество $F_-^{-1}(V)$ открыто в X;

(iii) для любого замкнутого множества $Q \subset Y$ множество $F_+^{-1}(Q)$ замкнуто в X.

Мультиотображение F, которое полунепрерывно и сверху и снизу, называется *непрерывным*.

18. Мультиотображение F называется *замкнутым*, если его график Γ_F есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.

Теорема 1.2.3. *(см., например, [12, с. 33]) Следующие условия эквивалентны:*

(i) мультиотображение F замкнуто;

(ii) для любой пары $x \in X, y \in Y$ такой, что $y \notin F(x)$, существуют окрестности $U(x)$ точки x и $V(y)$ точки y такие, что $F(U(x)) \cap V(y) = \emptyset$;

(iii) для любых направленностей $\{x_\alpha\} \subset X$, $\{y_\alpha\} \subset Y$ таких, что $\{y_\alpha\} \in F(x_\alpha)$, если $x_\alpha \to x$ и $y_\alpha \to y$, то $y \in F(x)$.

Если топологическое пространство Y линейно, то символами $Cv(Y), Kv(Y)$ обозначаются совокупности, которые состоят из всех непустых выпуклых замкнутых или, соответственно, компактных подмножеств пространства Y.

19. Мультиотображение F называется *компактным*, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y, т.е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y.

Мультиотображение F называется *локально компактным*, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью $U(x)$ такой, что сужение F на $U(x)$ компактно.

Теорема 1.2.4. *(см., например, [12, с. 35]) Пусть $F : X \to K(Y)$ – замкнутое мультиотображение. Если оно локально компактно, то оно пн. св.*

Теорема 1.2.5. *(см., например, [12, с. 36]) Пусть $F : X \to C(Y)$ – замкнутое мультиотображение. Если $A \subset X$ – компактное множество, то его образ $F(A)$ замкнут в Y.*

Теорема 1.2.6. *(см., например, [12, с. 36]) Пусть $F : X \to K(Y)$ – пн. св. мультиотображение. Если $A \subset X$ – компактное множество, то его образ $F(A)$ компактен.*

20. Пусть $\{F_j\}_{j \in J}$, $F_j : X \to P(Y)$ – некоторое семейство мультиотображений.

Теорема 1.2.7. *(см., например, [12, с. 50]) Если мультиотображения $F_0 : X \to P(Y)$, $F_1 : Y \to P(Z)$ пн. св. (пн. сн.), то их композиция $F_1 \circ F_0 : X \to P(Z)$,*

$$(F_1 \circ F_0)(x) = F_1(F_0(x)),$$

также пн. св. (соответственно, пн. сн.).

Теорема 1.2.8. *(см., например, [12, с. 51-52]) Если мультиотображения $F_0 : X \to K(Y)$, $F_1 : X \to K(Z)$ пн. св. (пн. сн.), то их декартово произведение $F_0 \times F_1 : X \to K(Y \times Z)$,*

$$(F_0 \times F_1)(x) = F_0(x) \times F_1(x)$$

также пн. св. (соответственно, пн. сн.).

Теорема 1.2.9. *(см., например, [12, с. 45]) Пусть $F_0 : X \to (Y)$ – замкнутое мультиотображение, $F_1 : X \to K(Y)$ – пн. св. мультиотображение и*

$$F_0(x) \cap F_1(x) \neq \emptyset \quad \text{для всех } x \in X.$$

Тогда их пересечение $F_0 \cap F_1 : X \to K(Y)$,

$$(F_0 \cap F_1)(x) = F_0(x) \cap F_1(x)$$

является пн. св.

Пусть X – топологическое пространство, Y – линейное топологическое пространство, $F_0, F_1 : X \to P(Y)$ – мультиотображения.

Теорема 1.2.10. *(см., например, [12, с. 53]) Если мультиотображения $F_0, F_1 : X \to K(Y)$ пн. св. (пн. сн.), то их сумма $F_0 + F_1 : X \to K(Y)$,*

$$(F_0 + F_1)(x) = F_0(x) + F_1(x)$$

также пн. св. (соответственно, пн. сн.).

Теорема 1.2.11. *(см., например, [12, с. 54]) Если мультиотображение $F : X \to K(Y)$ пн. св. (пн. сн.), а функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, то их произведение $f \cdot F : X \to K(Y)$,*

$$(f \cdot F)(x) = f(x) \cdot F(x)$$

является пн. св. (соответственно, пн. сн.).

Теорема 1.2.12. *(см., например, [12, с. 54]) Пусть Y – банахово пространство. Если мультиотображение $F : X \to K(Y)$ пн. св. (пн. сн.), то выпуклое замыкание $\overline{\text{co}}\, F : X \to Kv(Y)$ также пн. св. (соответственно, пн. сн.).*

21. *Покрытием множества* X называется система Σ подмножеств X, объединение которых совпадает с X.

Покрытие Σ топологического пространства X называется *локально конечным*, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью U, пересекающейся лишь с конечным числом множеств из Σ.

22. Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется *сечением мультиотображения* F, если

$$f(x) \in F(x) \quad \text{для каждого} \;\; x \in X.$$

Теорема 1.2.13. *(см., например, [119, с. 19]) Пусть X – метрическое пространство; Y – банахово пространство. Тогда каждое пн. сн. мультиотображение $F : X \to Cv(Y)$ имеет непрерывное сечение.*

Теорема 1.2.14. *(см., например, [83], [96], [97]) Пусть X – сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн. сн. мультиотображение $F : X \multimap L^1([a, b]; E)$ с замкнутыми разложимыми значениями имеет непрерывное сечение.*

23. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Метрику ρ в произведении пространств $X \times Y$ определим равенством

$$\rho\left((x, y), (x', y')\right) = \max\left\{\rho_X(x, x'), \rho_Y(y, y')\right\}.$$

Пусть $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Непрерывное отображение $g_\varepsilon : X \to Y$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-аппроксимацией мультиотображения* F, если для каждого $x \in X$ найдется $x' \in W_\varepsilon(x)$ такое, что

$$g_\varepsilon(x) \in W_\varepsilon(F(x')).$$

Ясно, что это понятие может быть равносильно выражено утверждением, что

$$g_\varepsilon(x) \in W_\varepsilon(F(W_\varepsilon(x))) \quad \text{для всех} \;\; x \in X,$$

или, что

$$\Gamma_{g_\varepsilon} \subset W_\varepsilon(\Gamma_F),$$

где $\Gamma_{g_\varepsilon}, \Gamma_F$ – графики отображений g_ε и F соответственно, а окрестность графика мультиотображения F выбирается относительно метрики ρ.

Теорема 1.2.15. *(см., например, [12, с. 62]) Пусть X – метрическое пространство, Y – нормированное пространство. Всякое пн. св. мультиотображение $F : X \to Cv(Y)$ для любого $\varepsilon > 0$ обладает ε-аппроксимацией $g_\varepsilon : X \to Y$ такой, что $g_\varepsilon(X) \subset \operatorname{co} F(X)$.*

Тот факт, что отображение g_ε является ε-аппроксимацией мультиотображения F будем обозначать символом $g_\varepsilon \in a(F, \varepsilon)$.

Важные свойства ε-аппроксимаций могут быть описаны в следующем утверждении (см., например, [100, с. 111-116]).

Теорема 1.2.16. *Пусть $F : X \to K(Y)$ пн. св. мультиотображение.*

(i) Пусть X_1 – компактное подмножество X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $g \in a(F, \delta)$ влечет $g|_{X_1} \in a(F|_{X_1}, \varepsilon)$;

(ii) Пусть X – компактное, Y_1 – метрическое пространства и $f : Y \to Y_1$ – непрерывное отображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $g \in a(F, \delta)$ влечет $fg \in a(fG, \varepsilon)$;

(iii) Пусть X – компактное пространство, $H : X \times [0, 1] \to K(Y)$ – пн. св. мультиотображение. Тогда для любого $\lambda \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $h \in a(H, \delta)$ влечет $h(\cdot, \lambda) \in a(H(\cdot, \lambda), \varepsilon)$;

(iv) Пусть Y_1 – метрическое пространство, $F_1 : X \to K(Y_1)$ – пн. св. мультиотображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $g \in a(F, \delta)$ и $g_1 \in a(F_1, \delta)$ влечет $g \times g_1 \in a(F \times F_1, \varepsilon)$.

24. Пусть Δ – измеримое подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$, снабженной мерой Лебега μ.

Мультиотображение $F : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ называется *измеримым*, если для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ множество $F_+^{-1}(V)$ измеримо.

Теорема 1.2.17. *(см., например, [12, с. 65]) Мультиотображение $F : \Delta \to K(R^n)$ измеримо тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: а) для любого замкнутого множества $W \subset \mathbb{R}^n$ множество $F_+^{-1}(W)$ измеримо; а) для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ множество $F_-^{-1}(V)$ измеримо.*

Из определения измеримого мультиотображения и теоремы 1.2.17 вытекает, что пн. св. мультиотображение $F : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ является измеримым.

25. Однозначное отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ называется *измеримым сечением мультиотображения* $F : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$, если отображение f измеримо и является сечением отображения F.

Теорема 1.2.18. *(см., например, [12, с. 67]) Пусть $F : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ – мультиотображение. Следующие условия эквивалентны:*

(а) отображение F измеримо;

(б) для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$, имеющей рациональные координаты, функция $\varphi_x : \Delta \to \mathbb{R}$, $\varphi_x(t) = \rho(x, F(t))$, измерима ($\rho$ – метрика в $\mathbb{R}^n$);

(в) существует счетное множество $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ измеримых сечений F, значения которых, $\{f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, плотны в $F(t)$ для каждого $t \in \Delta$ (т.е. $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} f_m(t) = F(t)$ для всех $t \in \Delta$);

(г) для любого $\delta > 0$ существует замкнутое множество $\Delta_\delta \subset \Delta$ такое, что $\mu(\Delta \backslash \Delta_\delta) \le \delta$ и сужение F на Δ_δ непрерывно (аналог C-свойства Лузина).

Следствие 1.2.1. *(см., например, [12, с. 71]) (а) Если мультиотображения из семейства $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$, $F_j : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримы и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} F_j(t) \neq \emptyset$ для каждого $t \in \Delta$, то пересечение $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} F_j : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримо.*

(б) Если мультиотображения $F_1, F_2 : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримы, то их декартово произведение $F_1 \times F_2 : \Delta \to K(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и сумма $F_1 + F_2 \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримы.

(в) Если мультиотображение $F : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримо, а $f : \Delta \to \mathbb{R}$ – измеримая функция, то произведение $f \cdot F : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримо.

(г) Если мультиотображение $F : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримо, то его выпуклое замыкание $\overline{\mathrm{co}}\, F : \Delta \to Kv(\mathbb{R}^n)$ измеримо.

26. Пусть E – банахово пространство.

Мультиотображение $F : \Delta \times E \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет *верхним (нижним) условиям Каратеодори*, если:

1) для каждого фиксированного $x \in E$ мультиотображение $F(\cdot, x) : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ измеримо;

2) почти для всех фиксированных $t \in \Delta$ мультиотображение $F(t, \cdot) : E \to K(\mathbb{R}^n)$ пн. св. (пн. сн.).

Если мультиотображение F удовлетворяет и верхним и нижним условиям Каратеодори, то оно называется удовлетворяющим *условиям Каратеодори.*

Мультиотображение $F : \Delta \times E \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет *условию подлинейного роста*, если существует положительная суммируемая по Лебегу на Δ функция $\alpha(\cdot)$ такая, что почти для всех (п.в.) $t \in \Delta$

$$\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

Каждое мультиотображение $F : \Delta \times E \to K(\mathbb{R}^n)$ определяет некоторый оператор, сопоставляющий многозначному отображению $Q : \Delta \to P(E)$ мультиотображение $\Phi : \Delta \to P(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\Phi(t) = (t, Q(t)).$$

Теорема 1.2.19. *(см., например, [12, с. 79]) Пусть мультиотображение $F : \Delta \times E \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори. Пусть $q : \Delta \to E$ – измеримое отображение. Тогда существует измеримое мультиотображение $\Phi : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ такое, что*

$$\Phi(t) \subset F(t, q(t))$$

для всех $t \in \Delta$.

Следствие 1.2.2. *(см., например, [12, с. 83]) Если мультиотображение $F : \Delta \times E \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и $q : \Delta \to E$ – измеримое отображение, то мультиотображение $\Phi : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(t) = F(t, q(t))$, обладает измеримым сечением.*

Следствие 1.2.3. *(см., например, [12, с. 83]) Если мультиотображение $F : \Delta \times \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и $Q : \Delta \to K(\mathbb{R}^m)$ – мультиотображение, то существует измеримое мультиотображение $\hat{\Phi} : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\hat{\Phi}(t) \subset F(t, Q(t))$ для всех $t \in \Delta$ и, следовательно, мультиотображение $\Phi : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(t) = F(t, Q(t))$, обладает измеримым сечением.*

27. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – непустое ограниченное множество. Нормой множества A назовем величину

$$\|A\| = \sup_{\alpha \in A} \|\alpha\| .$$

Пусть мультиотображение $F : \Delta \times E \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори (1), (2) и дополнительному условию

3) существуют такие суммируемые (по Лебегу) функции $\alpha, \beta : \Delta \to \mathbb{R}$, что

$$\|F(t, x)\| \le \alpha(t) + \beta(t) \|x\|_E \quad \text{для всех } (t, x) \in \Delta \times E.$$

Символом $L_1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ обозначается пространство суммируемых по Лебегу функций из Δ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть мультиотображение $F : \Delta \times E \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). *Мультиоператором суперпозиции*, порожденным отображением F, называется мультиотображение $P_F : C(\Delta, E) \to P(L_1(\Delta, \mathbb{R}^n))$, сопоставляющее каждому отображению $q \in C(\Delta, E)$ множество всех измеримых сечений мультиотображения $\Phi : \Delta \to K(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(t) = F(t, q(t))$.

Теорема 1.2.20. *(см., например, [12, с. 85]) Пусть мультиотображение $F : \Delta \times E \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям (1)–(3); E_1 – банахово пространство, $\alpha : L_1(\Delta, \mathbb{R}^n) \to E_1$ – непрерывный линейный оператор. Тогда мультиотображение $\alpha \circ P_F : C(\Delta, E) \to Cv(E_1)$ замкнуто.*

Следствие 1.2.4. *(см., например, [12, с. 86]) Пусть мультиотображение $F : \Delta \times E \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Тогда оператор суперпозиции $P_F : C(\Delta, E) \to Cv(L_1(\Delta, \mathbb{R}^n))$ замкнут.*

28. Пусть $X, Y, X \subseteq Y$ – некоторые множества, $F : X \to P(Y)$ – мультиотображение.

Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой мультиотображения* F, если $x \in F(x)$.

Множество всех неподвижных точек F обозначается в дальнейшем $\mathrm{Fix}\, F$.

Пусть $X \subset E$; всякое мультиотображение $F : X \to P(Y)$ определяет мультиотображение $\Phi : X \to P(E)$, $\Phi(x) = x - F(x)$, называемое *многозначным векторным полем (мультиполем)*, соответствующим мультиотображению F. Если обозначить $i : X \to E$ отображение вложения, то $\Phi = i - F$.

Точка $x \in X$ такая, что $0 \in \Phi(x)$, называется *особой точкой мультиполя* Φ.

Если $\operatorname{Fix} F = \emptyset$, то мультиполе $\Phi = i - F$ называется *невырожденным.*

29. Компактное на каждом ограниченном подмножестве X и пн. св. мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *вполне непрерывным.*

Аналогично, *вполне непрерывным или компактным* называется однозначное отображение, непрерывное и компактное на ограниченных подмножествах области определения или, соответственно, непрерывное и компактное на всей области определения.

Вполне непрерывными или компактными называются и соответствующие векторные поля.

30. Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется *почти пн. сн.*, если существует последовательность непересекающихся компактных множеств $\{I_n\}, I_n \subseteq I$, таких, что

(i) $\mu(I \setminus \bigcup\limits_n I_n) = 0$, где μ – мера Лебега;

(ii) сужение F на каждое множество $J_n = I_n \times X$ является пн. сн. мультиотображением.

31. Ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ называется *нормальным*, если найдется мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, называемое *нормальным квазисечением* мультиотображения $\mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(ii) $F(t, x) \cap R(t, x) \neq \emptyset$ для всех $t \in I,\ x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) каждое решение $x : I \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения $x'(t) \in F(t, x(t))$ является также решением включения $x'(t) \in R(t, x(t))$.

Очевидно, что всякое ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста, является нормальным. Отметим также (см., например, [81]), что всякое ограниченное почти пн. сн. мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным. Кроме того, всякое ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее условиям Каратеодори, является нормальным.

32. Пусть $\mathcal{K}$ является конусом в $\mathbb{R}^n$, а (Y, ρ_Y) – метрическим пространством. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to Y$ называется *$\mathcal{K}$-непрерывным в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $x \in B(x_0, \delta) \cap (x_0 + \mathcal{K})$ (см., например, [80], [82], [100, с. 82]).

Отображение f называется *$\mathcal{K}$-непрерывным на некотором множестве* $G \subset \mathbb{R}^n$, если оно $\mathcal{K}$-непрерывно в каждой точке $x \in G$.

Теорема 1.2.21. *(см., например, [100, с. 84]) Пусть $F : \mathbb{R}^n \to C(Y)$ является пн. сн. мультиотображением. Тогда для каждого конуса $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ мультиотображение F допускает $\mathcal{K}$-непрерывное сечение.*

33. Пусть $T > 0$ и $\sigma \geq 0$ - данные числа. Символами $C([kT - \sigma, (k + 1)T]; \mathbb{R}^n)$ и $L^1((kT, (k + 1)T); \mathbb{R}^n)$, где $k \in \mathbb{Z}$, обозначим соответствующие пространства непрерывных и суммируемых функций с обычными нормами.

Для подмножества $\mathcal{N} \subset L^1((kT, (k + 1)T); \mathbb{R}^n)$ и $\tau \in (kT, (k + 1)T)$ сужение $\mathcal{N}$ на (kT, τ) определяется как

$$\mathcal{N}\mid_{(kT,\tau)} = \{f\mid_{(kT,\tau)} : f \in \mathcal{N}\}.$$

Будем говорить, что $\mathcal{Q}$ - *каузальный мультиоператор*, если для каждого $k \in \mathbb{Z}$ мультиотображение

$$\mathcal{Q} : C([kT - \sigma, (k + 1)T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT, (k + 1)T); \mathbb{R}^n)$$

задано таким образом, что для каждого $\tau \in (kT, (k + 1)T)$ и для любых

$$u(\cdot), v(\cdot) \in C([kT - \sigma, (k + 1)T]; \mathbb{R}^n)$$

условие $u\mid_{[kT-\sigma,\tau]}=v\mid_{[kT-\sigma,\tau]}$ влечет $\mathcal{Q}(u)\mid_{(kT,\tau)}=\mathcal{Q}(v)\mid_{(kT,\tau)}$.

Рассмотрим примеры каузальных мультиоператоров. Обозначим $\mathcal{C}$ банахово пространство $C([-\sigma,0];\mathbb{R}^n)$.

Пример 1. Пусть мультиотображение $F:\mathbb{R}\times\mathcal{C}\to Kv\left(\mathbb{R}^n\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ мультифункция $F\left(\cdot,c\right):\mathbb{R}\to Kv\left(\mathbb{R}^n\right)$ допускает измеримое сечение для каждого $c\in\mathcal{C}$;

$(F2)$ мультиотображение $F\left(t,\cdot\right):\mathcal{C}\to Kv\left(\mathbb{R}^n\right)$ пн. св. для п.в. $t\in\mathbb{R}$;

$(F3)$ для любого $r>0$ найдется локально суммируемая неотрицательная функция $\eta_r(\cdot)\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right)$ такая, что

$$\|F\left(t,c\right)\|:=\sup\{\|y\|:y\in F\left(t,c\right)\}\le\eta_r\left(t\right)\quad\text{п.в. } t\in\mathbb{R}\ ,$$

для всех $c\in\mathcal{C}$, $\|c\|\le r$.

Известно (см., например, [89], [118]), что при условиях $(F1)-(F3)$ для каждого $k\in\mathbb{Z}$ определен мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F:C\left([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n\right)\multimap L^1\left((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n\right),$$

$$\mathcal{P}_F\left(u\right)=\left\{f\in L^1\left((kT,(k+1)T];\mathbb{R}^n\right):\ f\left(t\right)\in F\left(t,u_t\right)\right\}.$$

п.в. $t\in(kT,(k+1)T)$. Здесь $u_t\in\mathcal{C}$ определено как $u_t(\theta)=u(t+\theta)$, $\theta\in[-\sigma,0]$. Мультиоператор $\mathcal{P}_F$ является каузальным.

Пример 2. Пусть $F:\mathbb{R}\times\mathcal{C}\to Kv(\mathbb{R}^n)$ - мультиотображение, удовлетворяющее условиям $(F1)-(F3)$ примера 1. Пусть $\{K(t,s):-\infty<s\le t<+\infty\}$ - непрерывное семейство линейных операторов в $\mathbb{R}^n$ и $m\in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ - данная локально суммируемая функция. Для каждого $k\in\mathbb{Z}$ рассмотрим интегральный мультиоператор типа Вольтерра $\mathcal{G}:C\left([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n\right)\multimap L^1\left((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n\right)$, определенный как

$$\mathcal{G}(u)(t)=m(t)+\int_{kT}^{t}K(t,s)F(s,u_s)ds,$$

т.е.

$$\mathcal{G}(u) =$$
$$\left\{y \in L^1\left((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n\right) : y(t) = m(t) + \int_{kT}^{t} K(t,s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F(u)\right\}.$$

Мультиоператор $\mathcal{G}$ также является каузальным.

Пример 3. Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующему условию почти пн. сн.:

(F_L) найдется последовательность непересекающихся замкнутых множеств $\{J_n\}$, $J_n \subseteq \mathbb{R}$ $n = 1, 2, \ldots$ такая, что: (i) $meas\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_n J_n\right) = 0$; (ii) сужение F на каждое множество $J_n \times \mathcal{C}$ пн. сн.

При условиях (F_L), $(F3)$ (см., например, [89], [118]) для каждого $k \in \mathbb{Z}$ мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F : C\left([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n\right) \multimap L^1\left((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n\right)$$

также определен и каузален.

Обозначим C_T пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве L^2,

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^T \|x(s)\|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для определения понятия периодического каузального мультиоператора рассмотрим для $k \in \mathbb{Z}$ следующий оператор сдвига

$$j_k : L^1\left((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n\right) \to L^1\left((0,T);\mathbb{R}^n\right) :$$

$$j_k(f)(t) = f(t+kT).$$

Каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$ называется *T-периодическим*, если для каждых $x \in C_T$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$j_k(\mathcal{Q}(x\mid_{[kT-\tau,(k+1)T]})) = \mathcal{Q}(x\mid_{[-\tau,T]}).$$

Для обеспечения периодичности каузальных мультиоператоров в вышеуказанных примерах, достаточно полагать, что мультиотображения F являются T-периодичными по первому аргументу:

$$F(t+T,c) = F(t,c)$$

для всех $(t,c) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ и в примере 2 дополнительно считать, что функция $m(t)$ и семейство $K(t,s)$ также T-периодичны:

$$m(t+T) = m(t) \quad \text{для всех } \ t \in \mathbb{R};$$

$$K(t+T, s+T) = K(t,s) \quad \text{для всех } \ -\infty < s \le t < +\infty.$$

Ясно, что условие T-периодичности каузального мультиоператора позволяет рассматривать его только на пространстве $C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$.

34. Функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *локально липшицевой*, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ найдутся постоянная $L > 0$ и окрестность U точки x такие, что выполняется $|V(x_1) - V(x_2)| \le L\|x_1 - x_2\|$ для любых $x_1, x_2 \in U$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана локально липшицева функция $V(x)$.

Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ *обобщенная производная Кларка* $V^0(x_0;\nu)$ *функции* $V(x)$ *в точке* x_0 *по направлению* ν задается выражением

$$V^0(x_0;\nu) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0+}}} \frac{V(x+t\nu) - V(x)}{t},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$.

34. *Обобщенный градиент Кларка* $\partial V(x)$ *функции* $V(x)$ *в точке* x_0 определяется следующим образом:

$$\partial V(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, \nu \rangle \le V^0(x_0;\nu) \quad \textit{для всех } \ \nu \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Мультиотображение $\partial V(x)$ имеет выпуклые компактные значения и полунепрерывно сверху (см., например, [23]). Поэтому любое ее измеримое сечение $v(t) \in \partial V(x(t)), \ t \in [0,T]$, суммируемо.

36. Локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *регулярной*, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x, \nu)$ и она совпадает с $V^0(x, \nu)$.

Известно, что выпуклые функции являются регулярными.

1.3 Обозначения и некоторые сведения из теории бифуркации

37. Пусть $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$, где A – компактное, а U – открытое множества в $\mathbb{R}^n$. Будем отождествлять n-мерную сферу $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ с $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Символом Π_k, $k \geq 0$, обозначается k-ая устойчивая группа гомотопий сферы, т.е.

$$\Pi_k := \varinjlim_{n \geq 0} \pi_{n+k}(S^n).$$

Пусть X, Y – паракомпактные топологические пространства. Пусть также $\mathcal{A}$ обозначает пучок абелевых групп над Y, $f : X \to Y$ – замкнутое сюрьективное отображение, символ $\mathcal{A}_y$ обозначает слой пучка $\mathcal{A}$ для $y \in Y$. Символ $\mathcal{A}^*$ обозначает прообраз пучка $\mathcal{A}$ при действии отображения f. Для целого $k \geq 1$ пусть

$$s^0(f; \mathcal{A}) := \{y \in Y \mid H^0(f^{-1}(y); \mathcal{A}^*) \neq \mathcal{A}_y\},$$

$$s^k(f; \mathcal{A}) := \{y \in Y \mid H^k(f^{-1}(y); \mathcal{A}^*) \neq 0\},$$

где $H^*(\cdot; \mathcal{A})$ обозначает группы когомологий Чеха с коэффициентами в $\mathcal{A}$. Для целых $N \geq 1$ индекс Виеториса отображения f определяется как

$$i^N(f; \mathcal{A}) := \inf\{n \geq 0 \mid \max_{0 \leq k \leq N-1} \{rd_Y(s^k(f; \mathcal{A})) + k\} + 1 < n\},$$

где $A \subset Y$, $rd_Y(A) := \sup\{\dim C \mid C \subset A \; - \;$ замкнутое множество$\}$ и $\dim$ обозначает топологическую размерность множества (см. [1]).

Пусть $i(f; \mathcal{A}) = \sup_{N \geq 0} i^N(f; \mathcal{A})$. Если пучок $\mathcal{A}$ является постоянным и эквивалентным $\mathbb{Z}$, то $i(f; \mathbb{Z})$ обозначается как $i(f)$.

Определение 1.3.1. [127, с. 83] Пусть $\nu : Z \to X$. Говорят, что ν действует в классе $\mathcal{V}$ (ν является $\mathcal{V}$-оператором), если

(i) ν является вполне сюрьективным отображением, т.е., замкнутым сюрьективным отображением с компактными слоями;

(ii) $i(\nu) < \infty$.

Отображение $\nu : Z \to X$ называется $\widetilde{\mathcal{V}}$-отображением, если ν является $\mathcal{V}$-отображением и

(iii) $\dim \nu := \sup_{x \in X} \dim \nu^{-1}(x) < \infty$.

Пусть $(X, X'), (Y, Y')$ – пары паракомпактных топологических пространств и $m \geq 0$. Обозначим символом $D_m(X, X'; Y, Y')$ (соотв. $\widetilde{D}_m(X, X'; Y, Y')$) класс всех триад

$$(X, X') \overset{\nu}{\leftarrow} (Z, Z') \overset{\chi}{\rightarrow} (Y, Y'),$$

где ν является $\mathcal{V}_m$-отображением (соотв. $\widetilde{\mathcal{V}}_m$-отображением), а χ – непрерывным отображением. Кроме того, пусть

$$D(X, X'; Y, Y') := \bigcup_{m \geq 0} D_m(X, X'; Y, Y')$$

(соотв. $\widetilde{D} = \bigcup_{m \geq 0} \widetilde{D}_m$); следовательно, $\widetilde{D} \subset D$.

Определение 1.3.2. [127, с. 85] Говорят, что триады

$$(X, X') \overset{\nu_i}{\leftarrow} (Z_i, Z_i') \overset{\chi_i}{\rightarrow} (Y, Y'), \quad i = 1, 2,$$

из $D(X, X'; Y, Y')$ (соотв. $\widetilde{D}$) являются эквивалентными (т.е. $(\nu_1, \chi_1) \approx (\nu_2, \chi_2)$), если существует триада

$$(X, X') \overset{\nu}{\leftarrow} (Z, Z') \overset{\chi}{\rightarrow} (Y, Y')$$

(с соотв. отображением ν) и $\mathcal{V}_0$-отображения $f_i : (Z, Z') \to (Z_i, Z_i')$ такие, что $\nu_i \circ f_i = \nu$ и $\chi_i \circ f_i = \chi$, $i = 1, 2$.

Определение 1.3.3. Элементы фактор-группы

$$M(X, X'; Y, Y') = D(X, X'; Y, Y')/ \approx$$

или

$$\widetilde{M}(X, X'; Y, Y') = \widetilde{D}(X, X'; Y, Y')/ \approx$$

называются морфизмами (соотв. конечномерными морфизмами).

Символом $M_m(X,X';Y,Y')$ (соотв. $\widetilde{M}_m(X,X';Y,Y')$, $m \geq 0$, обозначается множество всех морфизмов из $M(X,X';Y,Y')$ (соотв. $\widetilde{M}$), которые представлены триадами $(\nu,\chi) \in D_m(X,X';Y,Y')$ (соотв. $\widetilde{D}_m$).

38. Символом $\mathcal{C}(m,n)$, $m \geq n$, обозначается класс всех пар (f,U), где U открытое ограниченное множество $\mathbb{R}^m$ и $f : (\overline{U},\partial U) \to (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ является непрерывным отображением.

Скажем, что $(f_0,U),(f_1,U)$ из $\mathcal{C}(m,n)$ являются гомотопными, если существует гомотопия $h : (\overline{U} \times [0,1], \partial U \times [0,1]) \to (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ такая, что $h(\cdot,i) = f_i,\ i = 0,1$.

Пусть B^m – замкнутый шар с центром в нуле радиуса $r = 1$, $(f,U) \in \mathcal{C}(m,n)$ где $n \leq m < 2n-2$. Предположим без ограничения общности, что $\overline{U} \subset B^m$ и $\dim \partial U \leq m-1$. Рассмотрим следующую последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\pi^{n-1}(\partial U) \xrightarrow{\delta_1} \pi^n(\overline{U},\partial U) \xleftarrow{j^\sharp} \pi^n(B^m,B^m \backslash U) \xrightarrow{i^\sharp} \pi^n(B^m,S^{m-1}) \xleftarrow{\delta_2} \pi^{n-1}(S^{m-1}),$$

здесь δ_1 обозначает граничный гомоморфизм пары $(\overline{U},\partial U)$, $j : (\overline{U},\partial U) \to (B^m,B^m \backslash U)$ и $i : (B^m,S^{m-1}) \to (B^m,B^m \backslash U)$ являются операторами вложения и δ_2 является граничным гомоморфизмом пары (B^m,S^{m-1}). Очевидно $j^\sharp$ является изоморфизмом и δ_2 является изоморфизмом в виду точности когомотопий последовательности пары (B^m,S^{m-1}).

Пусть

$$\kappa = \delta_2^{-1} \circ i^\sharp \circ (j^\sharp)^{-1} \circ \delta_1$$

и $\eta := [f|\partial U] \in \pi^{n-1}(\partial U)$, где символ $[f|\partial U]$ обозначает класс гомотопий $f|\partial U$ и $\pi^{n-1}(\partial U)$ обозначает $(n-1)$-ую когомотопию групп ∂U. Без ограничения общности здесь отождествляется $[\partial U;\mathbb{R}^n \setminus 0]$ с $\pi^{n-1}(\partial U)$.

Определение 1.3.4. [127, с. 117] *Обобщенная степень отображения f на*

U определяется как

$$\deg(f, U) := \kappa(\eta) \in \pi^{n-1}(S^{m-1}) \cong \Pi_{m-n}.$$

39. Пусть U открытое подмножество $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Рассматривается задача бифуркации решений включения

$$0 \in \Phi(z, \lambda), \tag{1.1}$$

где $\Phi : U \multimap \mathbb{R}^n$ является мультиполем, соответствующим мультиотображению $F : U \multimap \mathbb{R}^n$, т.е., $\Phi(z) = z - F(z)$.

Сделаем следующие предположения:

(1) $\Phi \in \widetilde{M}_n(U; \mathbb{R}^n)$ является морфизмом таким, что $0 \in \Phi(0, \lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^k \mid (0, \lambda) \in U\}$.

Определим множество нетривиальных решений включения (1.1) как

$$S := \{(z, \lambda) \in U \setminus \Lambda \times \{0\} \mid z \neq 0,\ 0 \in \Phi(z, \lambda)\}.$$

и предположим, что

(2) множество точек бифуркации

$$B(\Phi) := \{(0, \lambda) \in \Lambda \times \{0\} \mid (0, \lambda) \in \overline{S}\}$$

является компактным.

Для того, чтобы определить бифуркационный индекс Φ, понадобятся некоторые вспомогательные объекты. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $\alpha : \Lambda \to [0, \infty)$ такую, что для $(0, \lambda) \notin B(\Phi)$,

$$0 < \alpha(\lambda) < d((0, \lambda), \partial U \cup \overline{S})$$

и

$$\alpha(\lambda) = 0$$

для $(\lambda, 0) \in B(\Phi)$. Например, можно положить

$$\alpha(\lambda) = \min\left\{1, \frac{1}{2}d((0,\lambda), \partial U \cup \overline{S})\right\}.$$

Далее положим

$$X := \{(z,\lambda) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda \in \Lambda,\ \|z\| = \alpha(\lambda)\},$$

$$X^+ := \{(z,\lambda) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda \in \Lambda,\ \|z\| < \alpha(\lambda)\}.$$

Заметим, что $X^+ \cup X \subset U$ и положим $X^- := U \backslash \overline{X}^+$. Легко видеть, что $S \subset X^-$ и $B(\Phi) \subset X$.

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ является непрерывной функцией такой, что

$$f(z,\lambda) = \begin{cases} < 0 & \text{для } (z,\lambda) \in X^- \\ = 0 & \text{для } (z,\lambda) \in X \\ > 0 & \text{для } (z,\lambda) \in X^+. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь морфизм Ψ из $\widetilde{M}_n(U;\mathbb{R}^{n+1})$ такой, что $\Psi(z,\lambda) = \Phi(z,\lambda) \times \{f(z,\lambda)\}$ для всех $(z,\lambda) \in U$.

Так как в виду (2), множество особых точек морфизма Ψ компактно, то существует открытое ограниченное множество U' такое, что $\overline{U'} \subset U$ и $0 \notin \Psi(z,\lambda)$ для $(z,\lambda) \in U \setminus U'$. Поэтому $(\Psi, U') \in \widetilde{M}(m, n+1)$.

Определение 1.3.5. [127, с. 181] Бифуркационный индекс $\mathrm{Bi}\,(\Phi)$ морфизма Φ определяется как

$$\mathrm{Bi}\,(\Phi) := \deg(\Psi, U') \in \Pi_{k-1}.$$

В дополнение к сделанным выше предположениям пусть

(3) существует открытое множество $U_1 \supset U$ и морфизм $\Phi_1 \in \widetilde{M}_n(U_1;\mathbb{R}^n)$ такие, что $\Phi_1|U = \Phi$ и $0 \in \Phi_1(0,\lambda)$ для всех $(0,\lambda) \in U_1 \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Положим

$$S_1 := \{(z,\lambda) \in U_1 \,|\, z \neq 0,\ 0 \in \Phi_1(z,\lambda)\}.$$

Справедлив следующий вариант утверждения о глобальной бифуркации (см., например, [127, с. 183]).

Лемма 1.3.1. *Пусть* $K \subset U_1$ *– компактное подмножество такое, что* $B(\Phi) \subset K$ *и* $K \cap (\mathbb{R}^k \backslash \Lambda) \times \{0\} = \emptyset$ *(например,* $K = B(\Phi)$*). Если* $\mathrm{Bi}\,(\Phi) \neq 0$, *то существует непустое связное множество* $C \subset S_1 \backslash K$ *такое, что* $\overline{C} \cap K \neq \emptyset$ *и справедливо по крайней мере одно из следующих трех утверждений:*

(i) C *– неограниченно;*

(ii) $\overline{C} \cap \partial U_1 \neq \emptyset$;

(iii) *существует точка* $\lambda_* \in \mathbb{R}^k \backslash \Lambda$ *такая, что* $(0, \lambda_*) \in U_1$ *и* $(0, \lambda_*) \in \overline{C}$.

Тогда Φ_1 *имеет точки бифуркации вне* U.

В дальнейшем изложении ссылки типа [§1.3; **39**] указывают на использование пункта **39** из §1.3 главы **1. Предварительные сведения.**

Глава 2

Некоторые специальные варианты топологической степени мультиполей для многозначных отображений и разрешимость операторных включений

В теории топологической степени мультиполей важную роль играют топологические свойства значений порождающих их мультиотображений, и прежде всего – свойство выпуклости значений.

Однако во многих приложениях мультиотображений, естественно возникающих, например, в теории периодических решений дифференциальных уравнений и включений, свойство выпуклости, и даже ацикличности значений, не выполнено. Поэтому для изучения такого рода вопросов оказываются полезными те или иные варианты теории топологической степени, развиваемые для мультиполей, соответствующих мультиотображениям с невыпуклыми значениями.

В этой главе рассматриваются новые классы мультиотображений, не обладающих свойством выпуклости значений, но определяемых через мультиотображения, имеющие однозначные аппроксимации или сечения. Введенные ниже определения позволяют свести задачу к однозначному случаю и использовать хорошо изученное понятие степени для однозначных непрерывных векторных полей.

2.1 Степень в конечномерном пространстве

В качестве основного орудия при построении топологической степени для одного класса мультиотображений будем использовать классическую теорию топологической степени непрерывных отображений в конечномерном пространстве. Напомним ее основные положения (см., например, [36], [40], [41], [88]).

Пусть E_n – конечномерное линейное топологическое пространство, $U \subset E_n$ – открытое ограниченное множество. Для каждого непрерывного отображения $f : \overline{U} \to E_n$ такого, что $x \neq f(x)$ для всех $x \in \partial U$, определена топологическая степень $\deg(\varphi, \overline{U})$ соответствующего ему векторного поля $\varphi = i - f$ (т.е. $\varphi(x) = x - f(x)$). Здесь $i : \overline{U} \to E_n$ обозначает отображение вложения. Перечислим основные свойства степени.

1) Свойство нормализации. *Если $f(x) \equiv x_0$ для всех $x \in \partial U$, то*

$$\deg(\varphi, \overline{U}) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \ x_0 \in U, \\ 0, & \textit{если } \ x_0 \notin \overline{U}. \end{cases}$$

2) Гомотопическая инвариантность. *Пусть векторные поля $\varphi_0 = i - f_0$ и $\varphi_1 = i - f_1$, соответствующие непрерывным отображениям $f_0, f_1 : \overline{U} \to E_n$, гомотопны ($\varphi_0 \sim \varphi_1$), т.е. существует непрерывное отображение $h : \overline{U} \times [0,1] \to E_n$ такое, что*

(i) $x \neq h(x, \lambda)$ для любого $x \in \overline{U}$, $\lambda \in [0,1]$;

(ii) $h(\cdot, 0) = f_0, \quad h(\cdot, 1) = f_1$.

Тогда $\quad \deg(\varphi_0, \overline{U}) = \deg(\varphi_1, \overline{U})$.

3) Аддитивная зависимость от области. *Пусть* $\{U_j\}_{j\in J}$, $J = \{1, ..., m\}$, *– семейство открытых непересекающихся подмножеств* U, *отображение* $f : \overline{U} \to E_n$ *непрерывно и не имеет неподвижных точек на* $\overline{U} \setminus \bigcup\limits_{j\in J} U_j$. *Тогда топологическая степень* $\deg(\varphi, \overline{U}_j)$ *отлична от нуля и*

$$\deg(\varphi, \overline{U}) = \sum_{j\in J} \deg(\varphi, \overline{U}_j).$$

4) Принцип сужения отображения. *Пусть* E_m *– подпространство* E_n, *непрерывное отображение* $f : \overline{U} \to E_n$ *не имеет неподвижных точек на* ∂U *и* $f(\overline{U}) \subset E_m$. *Тогда*

$$\deg(\varphi, \overline{U}) = \deg_{E_m}(\varphi', \overline{U}'),$$

где $U' = U \cap E_m$, $\varphi' = \varphi|_{\overline{U}'}$, *а* $\deg_{E_m}$ *обозначает степень, вычисляемую в подпространстве* E_m.

5) Принцип неподвижной точки. *Если непрерывное отображение* $f : \overline{U} \to E_n$ *не имеет неподвижных точек на* ∂U *и* $\deg(\varphi, \overline{U}) \neq 0$, *то* f *имеет неподвижную точку* x *в* $U (x = f(x))$.

В ряде практически важных случаев степень эффективно вычисляется и ее отличие от нуля обеспечивает существование неподвижных точек.

6) Принцип "запрещенного направления". *Пусть* $f : \overline{U} \to E_n$ *– непрерывное отображение и для каждого* $x \in \partial U$:

$$\varphi(x) \notin L_x^a,$$

где $\varphi = i - f$ *и* $L_x^a = \{z \in E_n : z = \mu(x - a),\ \mu \leq 0\}$ *для некоторой точки* $a \in U$. *Тогда* $\deg(\varphi, \overline{U}) = 1$ *и, следовательно,* $\operatorname{Fix} f \neq \emptyset$.

7) Граничное условие Лере-Шаудера. *Пусть* $0 \in U, f : \overline{U} \to E_n$ *– непрерывное отображение такое, что для каждого* $x \in \partial U$:

$$f(x) \neq \gamma x \quad \textit{для всех} \ \gamma \geq 1.$$

Тогда $\deg(i - f, \overline{U}) = 1$ *и, следовательно,* $\operatorname{Fix} f \neq \emptyset$.

8) Свойство нечетного поля. *Пусть* U – *симметричная* $(-U = U)$ *окрестность нуля, непрерывное отображение* $f : \overline{U} \to E_n$ *не имеет неподвижных точек на* ∂U *и нечетно, т.е.*

$$f(-x) = -f(x) \quad \textit{для всех } x \in \partial U.$$

Тогда $\deg(\varphi, \overline{U}) \equiv 1 (\mod 2)$ *и, следовательно,* $\operatorname{Fix} f \neq \emptyset$.

Наконец, приведем одну из теорем о произведении степеней – утверждение о топологической степени прямой суммы векторных полей.

Предположим, что пространство E_n является прямой суммой подпространств E_0 и E_1. Пусть в E_0 и E_1 заданы открытые ограниченные множества U_0 и U_1.

Произведением $U = U_0 \times U_1$ множеств U_0 и U_1 является множество в E_n, которое состоит из точек вида $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in U_0, x_1 \in U_1$.

Пусть $f_0 : \overline{U}_0 \to E_0$, $f_1 : \overline{U}_1 \to E_1$ – непрерывные отображения. Обозначая $i_0 : \overline{U}_0 \to E_0$, $i_1 : \overline{U}_1 \to E_1$ отображения вложения, соответствующие отображениям f_0 и f_1 векторные поля φ_0 и φ_1 будем обозначать как

$$\varphi_0 = i_0 - f_0, \quad \varphi_1 = i_1 - f_1.$$

Прямой суммой $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$ полей φ_0 и φ_1 называют определенное на $\overline{U}$ векторное поле

$$\varphi(x) = \varphi_0(x_0) \oplus \varphi_1(x_1).$$

9) Произведение степеней. *Пусть поля* φ_0 *и* φ_1 *невырождены соответственно на* ∂U_0 *и* ∂U_1. *Тогда прямая сумма полей* φ_0 *и* φ_1 *невырождена на* ∂U *и*

$$\deg(\varphi_0 \oplus \varphi_1, \overline{U}) = \deg(\varphi_0, \overline{U}_0) \cdot \deg(\varphi_1, \overline{U}_1).$$

Перейдем теперь к описанию класса невыпуклозначных мультиотображений, для мультиполей которых определим топологическую степень. Нам понадобится ряд топологических понятий (см., например, [14]).

Всюду ниже, если это не оговорено специально, термин "пространство" означает "метрическое пространство".

Пусть X – произвольное пространство.

Определение 2.1.1. Множество $A \subset X$ называется *стягиваемым*, если существует непрерывное отображение (гомотопия) $h : A \times [0,1] \to A$ такое, что $h(x,0) = x$, $h(x,1) = x_0$ для всех $x \in A$.

Очевидно, что стягиваемыми являются выпуклые и звездообразные множества.

Определение 2.1.2. Пространство X называется *локально стягиваемым в точке* $x_0 \in X$ если всякая окрестность U точки x_0 содержит окрестность U_0, стягиваемую по U к точке.

Определение 2.1.3. Пространство X называется *локально стягиваемым*, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

Пример 2.1.1. Всякое объединение выпуклых множеств линейного топологического пространства X локально стягиваемо. В частности, всякий полиэдр локально стягиваем.

Определение 2.1.4. (см. [111]) Множество $A \subset X$ называется *R_δ–множеством*, если существует убывающая последовательность $\{A_n\}$ компактных стягиваемых множеств таких, что

$$A = \cap \{A_n : n = 1, 2, ...\}.$$

Отметим, что множества такой топологической структуры естественно возникают при изучении дифференциальных уравнений и включений.

Пример 2.1.2. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения следующего вида:

$$\begin{cases} x'(t) \in G(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

в предположении, что правая часть $G : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ включения удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста [§1.2; **26**]. Тогда множество решений $\Sigma(G, 0, x_0)$ этой задачи является R_δ-множеством в банаховом пространстве $C([0, a]; \mathbb{R}^n)$ (см., например, [119]).

Определение 2.1.5. (см., например, [9], [44]) Непустое компактное множество $A \subset X$ называется *асферичным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta : 0 < \delta < \varepsilon$ такое, что для каждого $n = 0, 1, ...$ любое непрерывное отображение $g : S^n \to W_\delta(A)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\widetilde{g} : \overline{B}^{n+1} \to W_\varepsilon(A)$.

Определение 2.1.6. Множество $A \subset X$ называется *ретрактом* пространства X, если существует такое непрерывное отображение (ретракция) $r : X \to A$, сужение которого на A является тождественным, т.е. $r(x) = x$ для всех $x \in A$.

Из теоремы Титце–Дугунджи [§1.1; **9**] вытекает, что всякое замкнутое выпуклое подмножество M метризуемого локально выпуклого пространства E является ретрактом этого пространства.

Определение 2.1.7. Множество $A \subset X$ называется *окрестностным ретрактом*, если существует ретракция $r : W(A) \to A$, где $W(A)$ – некоторая окрестность A.

Определение 2.1.8. *Вложением пространства X в пространство Y* называется такое отображение $h : X \to Y$, которое обладает свойствами:

1^0 $h(X) \subset Y$ – замкнутое множество;

2^0 $\hat{h} : X \to h(X)$ – гомеоморфизм.

Определение 2.1.9. Пространство X называется *абсолютным ретрактом*, или *AR-пространством*, если для любого метрического пространства Y и любого вложения $h : X \to Y$ множество $h(X)$ является ретрактом пространства Y. Если же множество $h(X)$ является окрестностным ретрактом, то пространство X называется *абсолютным окрестностным ретрактом,* или *ANR-пространством.*

Отметим, что класс ANR-пространств достаточно широк. В частности, всякий конечный полиэдр является ANR-пространством.

Более того, конечномерный компакт является ANR-пространством тогда и только тогда, когда он локально стягиваем (см. [14]). В частности, каждое компактное многообразие является ANR-пространством и, кроме того, если X_0, X_1 – ANR-пространства и $X_0 \cap X_1$ – ANR-пространство, то объединение $X_0 \cup X_1$ также является ANR-пространством.

Приведем теперь примеры асферичных множеств.

Пример 2.1.3. Если подмножество Z ANR-пространства Y тривиальной формы, т.е. Z стягиваемо в каждой окрестности пространства Y, то Z является асферичным в Y.

Пример 2.1.4. (см. [111]) Пусть Y – ANR-пространство. Тогда если подмножество M ANR-пространства Y является компактным, то следующие два утверждения эквивалентны:

1^0 M – R_δ-множество;

2^0 M – асферично.

Пусть X, Y – произвольные пространства, $G : X \to K(Y)$ – мультиотображение.

Определение 2.1.10. *Классом* $\mathcal{A}_0(X,Y)$ называется совокупность аппроксимируемых многозначных отображений G, т.е. пн. св. мультиотображений $G : X \to K(Y)$ [§1.2, **16**], допускающих для каждого $\varepsilon > 0$ однозначную ε-аппроксимацию $g_\varepsilon : X \to Y$ [§1.2, **23**].

Определение 2.1.11. *Классом* $\mathcal{A}(X,Y)$ называется совокупность многозначных отображений $G : X \to K(Y)$, удовлетворяющих условиям:

1^0 $G \in \mathcal{A}_0(X,Y)$,

2^0 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех δ $(0 < \delta < \delta_0)$ и любых двух δ-аппроксимаций $g_\delta, \widetilde{g}_\delta : X \to Y$ мультиотображения G найдется непрерывное отображение (деформация) $h : X \times [0,1] \to Y$ такое, что

(i) $h(x,0) = g_\delta(x), \;\; h(x,1) = \widetilde{g}_\delta(x) \quad$ для всех $\;x \in X$;

(ii) $h(x,\lambda)$ является ε-аппроксимацией мультиотображения G для каждого $\lambda \in [0,1]$.

Расссмотрим следующую совокупность мультиотображений.

Определение 2.1.12. Пн. св. мультиотображение $G : X \to K(Y)$ называется $\mathcal{J}$*-отображением*, или $G \in \mathcal{J}(X,Y)$, если для любого $x \in X$ множество $G(x)$ является асферичным.

Пример 2.1.5. Пусть Y является ANR-пространством. Тогда пн. св. многозначное отображение $G : X \to K(Y)$ является $\mathcal{J}$-отображением в каждом из следующих случаев:

для любого $x \in X$ множество $G(x)$ является

(а) выпуклым множеством;

(б) AR-пространством;

(в) стягиваемым множеством;

(г) R_δ-множеством.

В частности, всякое непрерывное однозначное отображение $g : X \to Y$ является $\mathcal{J}$-отображением.

Пример 2.1.6. Рассмотрим подробнее случай (г). Как известно, множество решений задачи Коши для дифференциального включения вида:

$$\begin{cases} x'(t) \in G(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где правая часть $G : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ включения удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста, зависит полунепрерывным сверху образом от начального значения x_0 (см., например, [119]). Тогда из примера 2.1.2 следует, что мультиотображение $\Sigma : \mathbb{R}^n \multimap C([0, a]; \mathbb{R}^n)$, сопоставляющее каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество решений задачи Коши $\Sigma(x_0)$, является $\mathcal{J}$-отображением.

Можем отметить теперь насколько широк класс $\mathcal{A}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.1. *(см. [9], [44], [100]) Пусть X – компактное ANR-пространство, Y – произвольное метрическое пространство. Тогда*

$$\mathcal{J}(X, Y) \subset \mathcal{A}(X, Y).$$

Опишем теперь класс мультиотображений, для которого определим топологическую степень в конечномерном пространстве E_n.

Пусть $U \subset E_n$ – открытое ограниченное множество, Y – произвольное метрическое пространство.

Определение 2.1.13. *Классом* $\mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$ называется совокупность мультиотображений $F : \overline{U} \to K(E_n)$ вида $F = f \circ G$, где $G \in \mathcal{A}(\overline{U}, Y)$ и $f : Y \to E_n$ – непрерывное отображение.

Композицию $f \circ G$ будем называть представлением мультиотображения F и записывать $F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$.

Подкласс $\mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$, состоящий из мультиотображений F таких, что

$$\mathrm{Fix}\, F \cap \partial U = \emptyset,$$

будем обозначать $\mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$.

Обозначая $i : \overline{U} \to E_n$ отображение вложения, соответствующее мультиотображению F мультиполе Φ будем обозначать как $\Phi = i - F$ [§1.2, **28**].

Определение 2.1.14. *Топологической степенью* $\deg(\Phi, \overline{U})$ мультиполя $\Phi = i - F$, $F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$, назовем топологическую степень $\deg(\widetilde{\varphi}, \overline{U})$ однозначного векторного поля $\widetilde{\varphi} = i - \widetilde{f}_\varepsilon$, соответствующего непрерывному отображению $\tilde{f}_\varepsilon : \overline{U} \to E_n$ вида $\widetilde{f}_\varepsilon = f \circ g_\varepsilon$, где $g_\varepsilon : \overline{U} \to Y$ – произвольная ε-аппроксимация мультиотображения G и $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Корректность данного определения будет обоснована на базе следующего утверждения.

Лемма 2.1.1. *Пусть* $H \in \mathcal{A}_0\left(\overline{U} \times [0,1], Y\right)$, $k : Y \times [0,1] \to E_n$ *– непрерывное отображение. Пусть семейство мультиотображений* $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_n)$, *определенное как*

$$k \circ H(x, \lambda) = k(H(x, \lambda), \lambda),$$

не имеет неподвижных точек на множестве $M \times [0,1]$, *где* $M \subseteq \overline{U}$ *– замкнутое множество, т.е.*

$$x \notin kH(x, \lambda) \quad \textit{для всех} \;\; (x, \lambda) \in M \times [0,1].$$

Тогда для каждой ε-аппроксимации $h_\varepsilon : \overline{U} \times [0,1] \to Y$ *мультиотображения* H, *семейство отображений* $k \circ h_\varepsilon : \overline{U} \times [0,1] \to E_n$, *заданное* *как*

$$k \circ h_\varepsilon(x, \lambda) = k(h_\varepsilon(x, \lambda), \lambda),$$

не будет иметь неподвижных точек на $M \times [0, 1]$ *при условии, что* $\varepsilon > 0$ *достаточно мало.*

Доказательство. Предположим от противного, что найдутся последовательности $\varepsilon_m \to +0, (x_m, \lambda_m) \in M \times [0, 1]$ такие, что

$$x_m = kh_{\varepsilon_m}(x_m, \lambda_m) = k(h_{\varepsilon_m}(x_m, \lambda_m), \lambda_m). \tag{2.1}$$

для некоторой последовательности $\{h_{\varepsilon_m}\}$ ε_m-аппроксимаций мультиотображения H.

Поскольку $z_m = ((x_m, \lambda_m), h_{\varepsilon_m}(x_m, \lambda_m)) \in \Gamma_{h_{\varepsilon_m}} \subset W_{\varepsilon_m}(\Gamma_H)$ [§1.2, **13, 23**], то найдется последовательность $\widetilde{z}_m \in \Gamma_H$, $\widetilde{z}_m = ((\widetilde{x}_m, \widetilde{\lambda}_m), y_m)$, $y_m \in H(\widetilde{x}_m, \widetilde{\lambda}_m)$ такая, что

$$\operatorname{dist}(z_m, \widetilde{z}_m) < \varepsilon_m. \tag{2.2}$$

Из теоремы об образе компактного множества [§1.2, **19**] и теоремы Тихонова вытекает, что график Γ_H – компактное множество, поэтому можно предположить без ущерба для общности, что $\widetilde{z}_m \to z_0 = ((x_0, \lambda_0), y_0) \in \Gamma_H$. Но тогда из (2.2) следует, что также $z_m \to z_0$ и, следовательно, $y_0 \in H(x_0, \lambda_0)$, где $(x_0, \lambda_0) \in M \times [0, 1]$.

С другой стороны, поскольку k непрерывно, из (2.1) имеем, что

$$x_m = k(h_{\varepsilon_m}(x_m, \lambda_m), \lambda_m) \to x_0 = k(y_0, \lambda_0) \in k\,(H(x_0, \lambda_0), \lambda_0)$$

в противоречие с предположением. $\square$

Прямым следствием доказанной леммы является следующее утверждение.

Лемма 2.1.2. *Пусть* $F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$. *Если* $\varepsilon > 0$ *достаточно мало, то:*

(i) для произвольной ε*-аппроксимации* $g_\varepsilon : \overline{U} \to Y$ *мультиотображения* G, *отображение* $\widetilde{f}_\varepsilon = f \circ g_\varepsilon : \overline{U} \to E_n$ *не имеет неподвижных точек на* ∂U;

(ii) если $g'_\varepsilon, g''_\varepsilon : \overline{U} \to X$ *– две произвольные* ε*-аппроксимации мультиотображения* G *и* $h : \overline{U} \times [0,1] \to Y$ *– связывающая их деформация* ($h(\cdot, 0) = g'_\varepsilon,\ h(\cdot, 1) = g''_\varepsilon$), *то отображение* $f \circ h : \overline{U} \times [0,1] \to E_n$ *не имеет неподвижных точек на* $\partial U \times [0,1]$, *т.е.*

$$x \neq fh(x, \lambda) \quad \textit{для всех}\ (x, \lambda) \in \partial U \times [0,1].$$

Из леммы 2.1.2 и свойства 2) гомотопической инвариантности топологической степени однозначных отображений следует, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $g'_\varepsilon, g''_\varepsilon$ – две произвольные ε-аппроксимации мультиотображения G, то

$$\deg(i - fg'_\varepsilon, \overline{U}) = \deg(i - fg''_\varepsilon, \overline{U}),$$

что и обосновывает корректность определения 2.1.14.

Рассмотрим теперь основные свойства введенной характеристики.

Определение 2.1.15. Мультиотображения $F_0, F_1 \in \mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$, $F_0 = (f_0 G_0), F_1 = (f_1 G_1)$ и соответствующие им мультиполя $\Phi_0 = i - F_0, \Phi_1 = i - F_1$ называются *гомотопными* ($\Phi_0 \sim \Phi_1$), если существует мультиотображение $H \in \mathcal{A}(\overline{U} \times [0,1], Y)$ и непрерывное отображение $k : Y \times [0,1] \to E_n$, удовлетворяющие условиям:

(i) $H(\cdot, 0) = G_0,\ H(\cdot, 1) = G_1$;

(ii) $k(\cdot, 0) = f_0,\ k(\cdot, 1) = f_1$;

(iii) мультиотображение $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_n)$, заданное равенством

$$k \circ H(x, \lambda) = k(H(x, \lambda), \lambda) \quad \text{для всех}\ (x, \lambda) \in \overline{U} \times [0,1],$$

не имеет неподвижных точек на $\partial U \times [0,1]$.

Мультиотображение $k \circ H$ в этом случае называется *гомотопией* в классе $\mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$, соединяющей мультиотображения F_1 и F_2 (и соответствующие им мультиполя Φ_0 и Φ_1).

Замечание 2.1.1. Если $h(\cdot, \lambda)$ является δ-аппроксимацией мультиотображения $G(\cdot, \lambda)$ при каждом $\lambda \in [0,1]$, то h является δ-аппроксимацией G на всем множестве $\overline{U} \times [0,1]$.

1^0 **Гомотопическая инвариантность.** *Если* F_0, $F_1 \in \mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$ *и соответствующие мультиполя* $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ *гомотопны, то*

$$\deg(\Phi_0, \overline{U}) = \deg(\Phi_1, \overline{U}). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $F_0 = (f_0 \circ G_0)$, $F_1 = (f_1 \circ G_1)$ и $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_n)$ – гомотопия, связывающая мультиотображения F_0 и F_1. Применяя лемму 2.1.1, получаем, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отображения

$$k \circ h_\varepsilon : \overline{U} \times [0,1] \to E_n$$

не имеют неподвижных точек на $\partial U \times [0,1]$. Следовательно, по свойству 2) гомотопической инвариантности степени для непрерывных векторных полей имеем:

$$\deg(i - f_0 g_0, \overline{U}) = \deg(i - f_1 g_1, \overline{U}),$$

где $g_0 = h_\varepsilon(\cdot, 0)$, $g_1 = h_\varepsilon(\cdot, 1)$ можно, согласно Теореме 1.2.16 (iii) ([§1.2, **23**]), без ущерба для общности считать δ-аппроксимациями мультиотображений G_0, G_1 соответственно для достаточно малого $\delta > 0$. Откуда, учитывая определение 2.1.14, и следует равенство (2.3). □

2^0 **Аддитивная зависимость от области.** *Если* $\{U_j\}_{j=1}^m$ *– семейство открытых непересекающихся подмножеств* U *и мультиотображение* $F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$ *обладает следующими свойствами:*

(i) $G_j = G|_{\overline{U}_j} \in \mathcal{A}(\overline{U}_j, Y)$ *для всех* $j = 1, ..., m$;

(ii) G *не имеет неподвижных точек на* $\overline{U} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$.

Тогда

$$\deg(i - fG, \overline{U}) = \sum_{j=1}^{m} \deg(i - fG_j, \overline{U}_j).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 2.1.1 и соответствующего свойства 3). □

Замечание 2.1.2. Очевидно, что свойство (i) выполнено, если G из класса $\mathcal{J}(\overline{U}, Y)$ и $\overline{U}, \overline{U}_j, j = 1, ..., m$ – ANR-пространства.

3^0 **Принцип сужения отображения.** *Пусть* E_m *–* m*-мерное линейное подпространство* E_n *и мультиотображение* $F = (f \circ G)$ *из класса* $\mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $f(Y) \subset E_m$;

(ii) $G_m = G|_{\overline{U}_m}$ *из класса* $\mathcal{A}(\overline{U}_m, Y)$, *где* $U_m = U \cap E_m$.

Тогда

$$\deg(i - F, \overline{U}) = \deg_{E_m}(i - fG_m, \overline{U}_m),$$

где $\deg_{E_m}$ *обозначает топологическую степень, вычисляемую в подпространстве* E_m.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало для того, чтобы

$$\deg(i - F, \overline{U}) = \deg(i - fg_\varepsilon, \overline{U}),$$

где g_ε – произвольная ε-аппроксимация G.

В силу условия (ii) найдутся достаточно малое $\delta > 0$ и δ-аппроксимация $g_\delta : \overline{U}_m \to Y$ мультиотображения G_m такие, что

1) $\deg_{E_m}(i - fg_\delta, \overline{U}_m) = \deg_{E_m}(i - fG_m, \overline{U}_m)$,

2) g_δ является сужением на $\overline{U}_m$ некоторой ε-аппроксимации $g_\varepsilon : \overline{U} \to Y$ мультиотображения G.

Тогда в силу принципа сужения отображения 4) имеем

$$\deg(i - fg_\varepsilon, \overline{U}) = \deg_{E_m}(i - fg_\delta, \overline{U}_m),$$

откуда и вытекает требуемое равенство. □

Замечание 2.1.3. Из теоремы 2.1.1 следует, что если $\overline{U}$ и $\overline{U}_m$ являются ANR-пространствами, а G из класса $\mathcal{J}(\overline{U}, Y)$, то условие (ii) выполнено.

Можем сформулировать теперь следующий общий принцип неподвижной точки.

Теорема 2.1.2. *Пусть F из класса $\mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$ и $\deg(i - F, \overline{U}) \neq 0$. Тогда $\emptyset \neq \operatorname{Fix} F \subset U$.*

Доказательство. Предположим, что мультиотображение $F = (f \circ G)$ не имеет неподвижных точек на $\overline{U}$. Тогда, применяя лемму 2.1.2, получаем, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и произвольной ε-аппроксимации $g_\varepsilon : \overline{U} \to Y$ мультиотображения G, отображение $f \circ g_\varepsilon : \overline{U} \to E_m$ также не имеет неподвижных точек и, следовательно,

$$\deg(i - fg_\varepsilon, \overline{U}) = \deg(i - F, \overline{U}) = 0,$$

в противоречие с условием теоремы. □

Данный основной принцип может быть применен для доказательства ряда теорем о неподвижной точке мультиотображений из рассматриваемого класса.

Теорема 2.1.3. *Пусть множество U выпукло, $F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$ и $F(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$. Тогда* $\operatorname{Fix} F \neq \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Fix} F \cap \partial U = \emptyset$. Пусть $x_0 \in U$ – произвольная точка. Рассмотрим отображение $k : Y \times [0,1] \to E_n$, заданное как

$$k(y, \lambda) = (1-\lambda) f(y) + \lambda x_0,$$

и семейство мультиотображений $k \circ G : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_n)$, определенное как

$$k \circ G(x, \lambda) = k(G(x), \lambda) = (1-\lambda) F(x) + \lambda x_0.$$

Нетрудно видеть, что семейство $k \circ G$ порождает гомотопию полей $i - F$ и $i - F_0$, где $F_0 = (f_0 \circ G)$, $f_0(y) \equiv x_0$. Тогда по свойству гомотопической инвариантности имеем

$$\deg(i - F, \overline{U}) = \deg(i - F_0, \overline{U}).$$

Но, согласно свойству нормализации 1), $\deg(i - F_0, \overline{U}) = 1$ и, следовательно, можно применить теорему 2.1.2. □

Сформулируем теперь аналог принципа "запрещенного направления".

Теорема 2.1.4. *Пусть $F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$ таково, что*

$$\Phi(x) \cap L_x^a = \emptyset \quad \text{для всех } x \in \partial U, \tag{2.4}$$

где $\Phi = i - F$, $L_x^a = \{z \in E_n : z = \mu(x-a),\ \mu \leq 0\}$, $a \in U$ – некоторая точка. Тогда $\deg(\Phi, \overline{U}) = 1$ и, следовательно, $\emptyset \neq \operatorname{Fix} F \subset U$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что граничное условие (2.4) можно сформулировать в эквивалентном виде как

$$F(x) \cap \{\gamma x + (1-\gamma) a : \ \gamma \geq 1\} = \emptyset \quad \text{для всех } x \in \partial U. \tag{2.5}$$

Покажем, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для каждой ε-аппроксимации $g_\varepsilon : \overline{U} \to Y$ мультиотображения G, отображение $f \circ g_\varepsilon$ удовлетворяет тому же граничному условию, т.е.

$$fg_\varepsilon(x) \neq \gamma x + (1-\gamma)a \quad \text{для всех } \ \gamma \geq 1, \ x \in \partial U.$$

Действительно, в противном случае нашлись бы последовательности $\varepsilon_m \to +0, \ g_{\varepsilon_m}(\cdot), \ \gamma_m \geq 1$ и $x_m \in \partial U$ такие, что

$$fg_{\varepsilon_m}(x_m) = \gamma_m x_m + (1-\gamma_m)a, \quad m = 1, 2, ... \tag{2.6}$$

Как и ранее, можно предположить, без ущерба для общности, что $(x_m, g_{\varepsilon_m}(x_m)) \to (x_0, y_0) \in \Gamma_G$, т.е. $y_0 \in G(x_0)$. Тогда из равенств (2.6) вытекает, что последовательность $\{\gamma_m\}$ является ограниченной и, следовательно, также можно предполагать без ущерба для общности, что $\gamma_m \to \gamma_0 \geq 1$. Переходя к пределу в равенствах (2.6), получаем

$$f(y_0) = \gamma_0 x_0 + (1-\gamma_0)a,$$

в противоречие с (2.5).

Теперь утверждение следует из принципа "запрещенного направления" 6) для однозначных полей. $\square$

Следствие 2.1.1. (граничное условие Лере-Шаудера) *Пусть* $0 \in U$ *и* $F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$ *таково, что*

$$F(x) \cap \gamma x = \emptyset \quad \textit{для всех } \ \gamma \geq 1, \ x \in \partial U.$$

Тогда $\deg(i - F, \overline{U}) = 1$ *и, следовательно,* $\emptyset \neq \operatorname{Fix} F \subset U$.

В заключение рассмотрим вариант теоремы о нечетном поле и произведении полей для данного класса мультиотображений.

Теорема 2.1.5. *Пусть U – симметричная окрестность нуля, F из класса $\mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$ и соответствующее мультиполе $\Phi = i - F$ удовлетворяет граничному условию*

$$\Phi(x) \cap \mu\Phi(-x) = \emptyset \quad \text{для всех } x \in \partial U,\ 0 \le \mu \le 1.$$

Тогда $\deg(\Phi, \overline{U}) \equiv 1 (\mod 2)$ *и, следовательно,* $\emptyset \ne \operatorname{Fix} F \subset U$.

Доказательство. Покажем вначале, что если g_ε – ε-аппроксимация G и $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то поле $\widetilde{\varphi} = i - \widetilde{f}_\varepsilon$, $\widetilde{f}_\varepsilon = f \circ g_\varepsilon$ удовлетворяет тому же граничному условию:

$$\widetilde{\varphi}(x) \ne \mu\widetilde{\varphi}(-x) \quad \text{для всех } x \in \partial U,\ 0 \le \mu \le 1.$$

Предполагая противное, получим последовательности $\varepsilon_m \to +0$, $g_{\varepsilon_m}(\cdot)$, $x_m \in \partial U$ и μ_m, $0 \le \mu_m \le 1$ такие, что

$$x_m - fg_{\varepsilon_m}(x_m) = \mu_m(-x_m - fg_{\varepsilon_m}(-x_m)) \quad m = 1, 2, ... \tag{2.7}$$

Снова полагаем, без ущерба для общности, что

$$(x_m, g_{\varepsilon_m}(x_m)) \to (x_0, y_0) \in \Gamma_G,$$

т.е. $y_0 \in G(x_0)$ и, аналогично,

$$(-x_m, g_{\varepsilon_m}(-x_m)) \to (-x_0, y_0^{'}) \in \Gamma_G,$$

т.е. $y_0^{'} \in G(-x_0)$. Также можно считать, что $\mu_m \to \mu_0$, $0 \le \mu_0 \le 1$.

Переходя к пределу в равенствах (2.7), получаем

$$x_0 - f(y_0) = \mu_0(-x_0 - f(y_0^{'})),$$

что противоречит условию теоремы, поскольку $x_0 - f(y_0) \in \Phi(x_0)$, $-x_0 - f(y_0^{'}) \in \Phi(-x_0)$.

С помощью деформации

$$\widetilde{\psi}(x,\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}[\widetilde{\varphi}(x) - \lambda\widetilde{\varphi}(-x)]$$

поле $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}(\cdot, 0)$ гомотопируется к нечетному полю

$$\widetilde{\psi}(x,1) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \varphi(-x)\right]$$

и можно применить свойство 8) нечетного поля. $\square$

Предположим снова, что пространство E_n является прямой суммой подпространств E_0 и E_1, а U_0 и U_1 – открытые ограниченные множества в E_0 и E_1 соответственно.

Пусть мультиотображения $F_0 : \overline{U}_0 \to K(E_0)$, $F_1 : \overline{U}_1 \to K(E_1)$ принадлежат классам $\mathcal{CA}(\overline{U}_0, E_0)$, $\mathcal{CA}(\overline{U}_1, E_1)$ соответственно. Обозначая $i_0 : \overline{U}_0 \to E_0$, $i_1 : \overline{U}_1 \to E_1$ отображения вложения, соответствующие мультиотображениям F_0 и F_1 мультиполя Φ_0 и Φ_1 будем обозначать как

$$\Phi_0 = i_0 - F_0, \quad \Phi_1 = i_1 - F_1.$$

Прямой суммой $\Phi = \Phi_0 \oplus \Phi_1$ мультиполей Φ_0 и Φ_1 называют определенное на $\overline{U}$ мультиполе

$$\Phi(x) = \Phi_0(x_0) \oplus \Phi_1(x_1),$$

вида $\Phi(x) = i - F(x)$, где $i = i_0 \oplus i_1, F(x) = F_0(x_0) \oplus F_1(x_1)$.

Теорема 2.1.6. *Пусть мультиполя Φ_0 и Φ_1 невырождены соответственно на ∂U_0 и ∂U_1. Тогда прямая сумма мультиполей Φ_0 и Φ_1 невырождена на ∂U и*

$$\deg(\Phi_0 \oplus \Phi_1, \overline{U}) = \deg(\Phi_0, \overline{U}_0) \cdot \deg(\Phi_1, \overline{U}_1).$$

Доказательство. Покажем, что если F_i из класса $\mathcal{CA}(\overline{U}_i, E_i)$, $i = 0, 1$, то мультиотображение $F = F_0 \oplus F_1$ принадлежит классу $\mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$.

Пусть $F_i = (f_i G_i), i = 0,1$. Тогда мультиотображение F может быть представлено в виде $F = (fG)$, где $G : \overline{U} \to K(Y_0 \times Y_1)$, $G(x_0 \times x_1) = G_0(x_0) \times G_1(x_1)$, $f : Y_0 \times Y_1 \to E_0 \times E_1$ задано как $f(y_0 \times y_1) = f_0(y_0) \oplus f_1(y_1)$. Нетрудно видеть, что если мультиотображение G_i принадлежит классу $\mathcal{A}(\overline{U}_i, Y_i), i = 0,1$, то и мультиотображение G из класса $\mathcal{A}(\overline{U}, Y_0 \times Y_1)$. Ясно, что отображение $f \circ g$, задающее степень $i - F$, может быть представлено как прямая сумма $f_0 \circ g_0 \oplus f_1 \circ g_1$. Тогда

$$\deg(\Phi, \overline{U}) = \deg(i - fg, \overline{U}) = \deg(i - f_0 g_0 \oplus f_1 g_1, \overline{U}).$$

Применяя свойство 9) непрерывных векторных полей, получаем

$$\deg(\Phi, \overline{U}) = \deg(i - f_0 g_0, \overline{U}) \cdot \deg(i - f_1 g_1, \overline{U}),$$

откуда и следует требуемое равенство. $\square$

2.2 Степень в нормированном пространстве

Распространим построенную теорию топологической степени на случай мультиполей в нормированном пространстве.

Пусть E – нормированное линейное топологическое пространство, $U \subset E$ – открытое ограниченное множество, Y – произвольное метрическое пространство.

Определение 2.2.1. *Классом* $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, Y)$ называется совокупность мультиотображений $G : \overline{U} \to K(Y)$, удовлетворяющих условию:

(i) для любого конечномерного подпространства $E_n \subset E$ мультиотображение $G_n = G|_{\overline{U}_n} \in \mathcal{A}(\overline{U}_n, Y)$, где $\overline{U}_n = \overline{U} \cap E_n$;

Определение 2.2.2. *Классом* $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E)$ называется совокупность компактных [§1.2, **19**] мультиотображений $F : \overline{U} \to K(E)$ вида $F = f \circ G$, где G из класса $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, Y)$ и $f : Y \to E$ – непрерывное отображение.

Композицию $f \circ G$ будем как и ранее называть представлением мультиотображения F и записывать $F = (f \circ G) \in \mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E)$.

Подкласс $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E)$, состоящий из мультиотображений F таких, что

$$\operatorname{Fix} F \cap \partial U = \emptyset,$$

будем обозначать $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$.

Пусть мультиотображение F из класса $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, $\Phi = i - F$ – соответствующее ему мультиполе. Тогда $\Phi(\partial U) \subset E \setminus \{0\}$ – замкнутое множество. Следовательно, $\delta = \operatorname{dist}(\Phi(\partial U), 0) > 0$. Рассмотрим множество $K = \overline{F(\overline{U})} \subset E$ и $\varepsilon > 0$ таким, что $\varepsilon < \delta/2$.

Пусть $E_n \subset E$ – конечномерное подпространство и непрерывный оператор $\pi_n : K \to E_n$ такой, что

$$\|x - \pi_n(x)\| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in K. \tag{2.8}$$

В качестве такого оператора можно взять известный проектор Шаудера (см., например, [41]).

Определим мультиотображение $F_n : \overline{U}_n \to K(E_n)$ следующим образом:

$$F_n = \pi_n f \circ G_n : \overline{U}_n \xrightarrow{G_n} Y \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\pi_n} E_n.$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение $F_n = (\pi_n f \circ G_n)$ принадлежит классу $\mathcal{CA}_{\partial U_n}(\overline{U}_n, E_n)$.

Определение 2.2.3. *Топологической степенью* $\deg(\Phi, \overline{U})$ мультиполя Φ назовем топологическую степень $\deg_{E_n}(\Phi_n, \overline{U}_n)$ мультиполя Φ_n, порожденного мультиотображением F_n, где $\deg_{E_n}$ обозначает топологическую степень, вычисляемую в подпространстве E_n.

Корректность данного определения обосновывается в следующей лемме.

Лемма 2.2.1. *Топологическая степень* $\deg(\Phi, \overline{U})$ *не зависит ни от выбора конечномерного подпространства* E_n, *ни от выбора оператора проектирования* π_n.

Доказательство. **(i)** Пусть $E_n, E_m \subset E$ – конечномерные подпространства такие, что $E_n \subset E_m$. Рассмотрим операторы π_n и π_m проектирования соответственно на подпространства E_n и E_m, удовлетворяющие условию (2.8), такие, что $\pi_n(x) = \pi_m(x),\ x \in E$.

Рассмотрим $F_n = (\pi_n f \circ G_n) \in \mathcal{CA}_{\partial U_n}(\overline{U}_n, E_n)$ и $F_m = (\pi_m f \circ G_m) \in \mathcal{CA}_{\partial U_m}(\overline{U}_m, E_m)$, где $\overline{U}_m = \overline{U} \cap E_m$. В силу принципа сужения отображения 3^0 имеем

$$\deg_{E_m}(i - \pi_m f G_m, \overline{U}_m) = \deg_{E_n}(i - \pi_n f G_n, \overline{U}_n).$$

(ii) Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < \delta/2$, а π_n и $\pi_n^{'}$ – непрерывные операторы проектирования на подпространство $E_n \subset E$, удовлетворяющие условию (2.8).

Рассмотрим деформацию $h : K \times [0,1] \to E$, определенную как

$$h(y,\lambda) = (1-\lambda)\pi_n(y) + \lambda\pi'_n(y).$$

В силу выбора ε, для $x \in \partial U,\ y \in F(\partial U)$ выполнено:

$$x \neq h(y,\lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Поэтому по свойству 1^0 гомотопической инвариантности

$$\deg_{E_n}(i - \pi_n f G_n, \overline{U}_n) = \deg_{E_n}(i - \pi_n^{'} f G_n, \overline{U}_n),$$

что и показывает корректность определения. □

Лемма 2.2.2. *Пусть H принадлежит классу $\mathcal{A}_0\left(\overline{U} \times [0,1], Y\right)$, $k : Y \times [0,1] \to E$ – непрерывное отображение. Пусть семейство мультиотображений $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$, определенное как*

$$k \circ H(x,\lambda) = k(H(x,\lambda),\lambda),$$

не имеет неподвижных точек на множестве $M \times [0,1]$, где $M \subseteq \overline{U}$ – замкнутое множество, т.е.

$$x \notin kH(x,\lambda) \quad \text{для всех } (x,\lambda) \in M \times [0,1]. \tag{2.9}$$

Выберем $\delta = \operatorname{dist}(\Phi(M \times [0,1]), 0)$, где $\Phi = i - kH$, и рассмотрим множество $K_1 = \overline{kH(M \times [0,1])} \subset E$ и $\varepsilon > 0$ таким, что $\varepsilon < \delta/2$. Тогда для непрерывного оператора проектирования $\pi_n : E \to E_n$ на конечномерное подпространство $E_n \subset E$, удовлетворяющего условию

$$\|x - \pi_n(x)\| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in K_1, \tag{2.10}$$

семейство мультиотображений $\pi_n k \circ H_n : \overline{U}_n \times [0,1] \to K(E_n)$ не будет иметь неподвижных точек на $M \times [0,1]$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что из (2.9) в силу выбора ε следует вывод о том, что семейство мультиотображений $\pi_n k \circ H_n$ не имеет неподвижных точек на $M \times [0,1]$. $\square$

Определение 2.2.4. Мультиотображения F_0, F_1 из класса $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, $F_0 = (f_0 \circ G_0)$, $F_1 = (f_1 \circ G_1)$ и соответствующие им мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ называются *гомотопными* ($\Phi_0 \sim \Phi_1$), если существует мультиотображение H из класса $\mathcal{A}_0(\overline{U} \times [0,1], Y)$ и непрерывное отображение $k : Y \times [0,1] \to E$, удовлетворяющие условиям:

(i) $H(\cdot, 0) = G_0,\ H(\cdot, 1) = G_1$;

(ii) для любого конечномерного подпространства $E_n \subset E$ мультиотображение $H_n = H|_{\overline{U}_n \times [0,1]}$ принадлежит классу $\mathcal{A}_0(\overline{U}_n \times [0,1], Y)$, где $\overline{U}_n = \overline{U} \cap E_n$;

(iii) $k(\cdot, 0) = f_0,\ k(\cdot, 1) = f_1$;

(iv) мультиотображение $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$, заданное равенством

$$k \circ H(x, \lambda) = k(H(x, \lambda), \lambda) \quad \text{для всех } (x, \lambda) \in \overline{U} \times [0,1],$$

компактно и не имеет неподвижных точек на $\partial U \times [0,1]$.

Мультиотображение $k \circ H$ в этом случае называется гомотопией в классе $\mathcal{C}\mathcal{A}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, соединяющей мультиотображения F_1 и F_2 (и соответствующие им мультиполя Φ_0 и Φ_1).

Рассмотрим теперь основные свойства введенной характеристики.

1^0) Гомотопическая инвариантность. *Пусть мультиотображения F_0 и F_1 принадлежат классу $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$. Если соответствующие им мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$ и $\Phi_1 = i - F_1$ гомотопны, то*

$$\deg(\Phi_0, \overline{U}) = \deg(\Phi_1, \overline{U}).$$

Доказательство. Пусть $F_0 = (f_0 \circ G_0)$, $F_1 = (f_1 \circ G_1)$ и $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$ – связывающая их гомотопия. Применяя лемму 2.2.2, получаем, что отображения

$$\pi_n k \circ H_n : \overline{U}_n \times [0,1] \to K(E_n)$$

не имеют неподвижных точек на $\partial U_n \times [0,1]$. Следовательно, по свойству 1^0 гомотопической инвариантности степени в конечномерном пространстве имеем:

$$\deg_{E_n}(i - \pi_n f_0 G_{0,n}, \overline{U}_n) = \deg_{E_n}(i - \pi_n f_1 G_{1,n}, \overline{U}_n).$$

Откуда, учитывая определение 2.2.3, и следует требуемое равенство. □

2^0) Аддитивная зависимость от области. *Пусть $\{U_j\}_{j=1}^m$ – семейство открытых непересекающихся подмножеств U и мультиотображение $F = (f \circ G) \in \mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E)$ обладает следующими свойствами:*

1) $G_j = G|_{\overline{U}_j} \in \widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}_j, Y)$ для всех $j = 1, ..., m$;

2) G не имеет неподвижных точек на $\overline{U} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$.

Тогда

$$\deg(i - fG, \overline{U}) = \sum_{j=1}^{m} \deg(i - fG_j, \overline{U}_j).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 2.2.2 и соответствующего свойства 2^0. □

3^0) Принцип неподвижной точки. *Пусть F принадлежит классу $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ и $\deg(i - F, \overline{U}) \neq 0$. Тогда $\emptyset \neq \mathrm{Fix}\, F \subset U$.*

Доказательство. Предположим, что мультиотображение $F = (f \circ G)$ не имеет неподвижных точек на $\overline{U}$. Тогда в силу лемму 2.2.2 мультиотображение $F_n = (\pi_n f \circ G_n) \in \mathcal{C}\mathcal{A}_{\partial U_n}(\overline{U}_n, E_n)$ также не имеет неподвижных точек на $\overline{U}$ и, следовательно,

$$\deg_{E_n}(i - F_n, \overline{U}_n) = \deg(i - F, \overline{U}) = 0,$$

в противоречие с условием. $\square$

Данный принцип может быть применен для доказательства утверждений, аналогичных теоремам 2.1.3 и 2.1.4.

Теорема 2.2.1. *Пусть множество U выпукло, $F = (f \circ G) \in \mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E)$ и $F(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$. Тогда* $\operatorname{Fix} F \neq \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Fix} F \cap \partial U = \emptyset$. Пусть $x_0 \in U$ – произвольная точка. Рассмотрим отображение $k : Y \times [0,1] \to E$, заданное как

$$k(y, \lambda) = (1 - \lambda) f(y) + \lambda x_0,$$

и семейство мультиотображений $k \circ G : \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$, определенное как

$$k \circ G(x, \lambda) = k(G(x), \lambda) = (1 - \lambda) F(x) + \lambda x_0.$$

Нетрудно видеть, что семейство $k \circ G$ порождает гомотопию полей $i - F$ и $i - F_0$, где $F_0 = (f_0 \circ G)$, $f_0(y) \equiv x_0$. Тогда по свойству 1^0) гомотопической инвариантности имеем

$$\deg(i - F, \overline{U}) = \deg(i - F_0, \overline{U}).$$

Но, согласно свойству нормализации 1), $\deg(i - F_0, \overline{U}) = 1$ и, следовательно, можно воспользоваться свойством 3^0). $\square$

Теорема 2.2.2. *Пусть $F = (f \circ G) \in \mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E)$ таково, что*

$$\Phi(x) \cap L_x^a = \emptyset \quad \text{для всех } x \in \partial U, \tag{2.11}$$

где $\Phi = i - F$, $L_x^a = \{z \in E_n : z = \mu(x - a),\ \mu \leq 0\}$, $a \in U$ – некоторая точка. Тогда $\deg(\Phi, \overline{U}) = 1$ и, следовательно, $\emptyset \neq \operatorname{Fix} F \subset U$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что граничное условие (2.11) может быть сформулировано в эквивалентном виде как

$$F(x) \cap \{\gamma x + (1-\gamma)a : \ \gamma \geq 1\} = \emptyset \quad \text{для всех} \ x \in \partial U. \tag{2.12}$$

Покажем, что мультиотображение $F_n = (\pi_n f \circ G_n) \in \mathcal{CA}(\overline{U}_n, E_n)$ удовлетворяет тому же граничному условию, т.е.

$$F_n(x) \cap \{\gamma x + (1-\gamma)a : \ \gamma \geq 1\} = \emptyset \quad \text{для всех} \ x \in \partial U_n \subset \partial U.$$

Действительно, в противном случае нашлись бы последовательности $\gamma_m \geq 1$ и $x_m \in \partial U$ такие, что

$$\pi_n f G_n(x_m) \cap \{\gamma_m x_m + (1-\gamma_m)a\} \neq \emptyset, \quad m = 1, 2, ...$$

т.е.

$$\pi_n f y_m = \gamma_m x_m + (1-\gamma_m)a, \tag{2.13}$$

где $y_m \in G_n(x_m), \ m = 1, 2, ...$

Без ущерба для общности можно предположить, что при $\varepsilon \to 0$

$$(x_m, \pi_n f y_m) \to (x_m, f y_m),$$

$$(x_m, f y_m) \to (x_0, f y_0) \in \Gamma_G,$$

т.е. $y_0 \in G(x_0)$. Тогда из равенств (2.13) вытекает ограниченность последовательности $\{\gamma_m\}$ и, следовательно, также можно предположить без ущерба для общности, что $\gamma_m \to \gamma_0 \geq 1$. Переходя к пределу в равенствах (2.13) получаем

$$f y_0 = \gamma_0 x_0 + (1-\gamma_0)a,$$

в противоречие с (2.12).

Теперь утверждение следует из теоремы 2.1.4. $\square$

Следствие 2.2.1. (граничное условие Лере-Шаудера) *Пусть* $0 \in U$ *и* $F = (f \circ G) \in \mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ *таково, что*

$$F(x) \cap \gamma x = \emptyset \quad \text{для всех } \gamma \geq 1,\ x \in \partial U.$$

Тогда $\deg(i - F, \overline{U}) = 1$ *и, следовательно,* $\emptyset \neq \operatorname{Fix} F \subset U$.

В заключение рассмотрим вариант теоремы о нечетном поле для рассматриваемого класса мультиотображений.

Теорема 2.2.3. *Пусть* U *– симметричная окрестность нуля,* F *из класса* $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ *и соответствующее мультиполе* $\Phi = i - F$ *удовлетворяет граничному условию*

$$\Phi(x) \cap \mu\Phi(-x) = \emptyset \quad \text{для всех } x \in \partial U,\ 0 \leq \mu \leq 1.$$

Тогда $\deg(\Phi, \overline{U}) \equiv 1 (\mod 2)$ *и, следовательно,* $\emptyset \neq \operatorname{Fix} F \subset U$.

Доказательство. В силу леммы 2.2.2 мультиотображение $F_n = (\pi_n f \circ G_n)$ принадлежит классу $\mathcal{C}\mathcal{A}_{\partial U_n}(\overline{U}_n, E_n)$.

Покажем, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то мультиполе $\Phi_n = i - F_n$ удовлетворяет тому же граничному условию, т.е

$$\Phi_n(x) \cap \mu\Phi_n(-x) = \emptyset \quad \text{для всех } x \in \partial U_n \subset \partial U,\ 0 \leq \mu \leq 1.$$

Действительно, в противном случае нашлись бы последовательности $x_m \in \partial U$ и $\mu_m, 0 \leq \mu_m \leq 1$ такие, что

$$x_m - \pi_n f y_m = \mu_m(-x_m - \pi_n f y_m^{'}), \tag{2.14}$$

где $y_m \in G_n(x_m), y_m^{'} \in G_n(-x_m),\ m = 1, 2, ...$

Снова полагаем, без ущерба для общности, что при $\varepsilon \to 0$

$$(x_m, \pi_n f y_m) \to (x_m, f y_m),$$

$$(x_m, fy_m) \to (x_0, fy_0) \in \Gamma_G,$$

т.е. $y_0 \in G(x_0)$ и, аналогично,

$$(-x_m, \pi_n f y_m^{'}) \to (-x_0, f y_0^{'}) \in \Gamma_G,$$

т.е. $y_0^{'} \in G(-x_0)$. Также можно считать, что $\mu_m \to \mu_0,\ 0 \le \mu_0 \le 1$.

Переходя к пределу в (2.14), получаем

$$x_0 - fy_0 = \mu_0(-x_0 - fy_0^{'}),$$

что противоречит условию теоремы, поскольку $x_0 - fy_0 \in \Phi(x_0),\ -x_0 - fy_0^{'} \in \Phi(-x_0)$.

Теперь утверждение следует из теоремы 2.1.5. $\square$

2.3 Степень мультиполей для мультиотображений типа селектируемых

Пусть X – метрическое пространство, Y – банахово пространство. Рассмотрим следующий класс мультиотображений.

Определение 2.3.1. *Мультиотображение* $G : X \to P(Y)$ *принадлежит классу* $\mathcal{S}(X, Y)$, если оно удовлетворяет условиям:

$\mathcal{S}_1$) G обладает непрерывным сечением [§1.2, **22**];

$\mathcal{S}_2$) "цилиндрическое продолжение" $G' : X \times [0,1] \to P(Y)$, определенное как $G'(x, \lambda) = G(x)$ для всех $(x, \lambda) \in X \times [0,1]$, обладает следующим свойством продолжения сечения: любое непрерывное сечение сужения G' на $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$ может быть продолжено до непрерывного сечения G'.

Мультиотображения класа $\mathcal{S}(X, Y)$ будем называть *селектируемыми.*

Замечание 2.3.1. Пусть $(Y_0, \rho_0), (Y_1, \rho_1)$ – метрические пространства. Зададим метрику ρ на $Y_0 \times Y_1$ формулой

$$\rho\left\{(y_0, y_1), (y_0', y_1')\right\} = \max\left\{\rho_0(y_0, y_0'), \rho_1(y_1, y_1')\right\}.$$

Пусть G_0 принадлежит классу $\mathcal{S}(\overline{U}, Y_0)$, а G_1 из класса $\mathcal{S}(\overline{U}, Y_1)$. Тогда мультиотображение $G = G_0 \times G_1 : \overline{U} \to P(Y_0 \times Y_1)$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\overline{U}, Y_0 \times Y_1)$.

В самом деле это вытекает из того, что отображение $g : \overline{U} \to Y_0 \times Y_1$ является непрерывным сечением мультиотображения G тогда и только тогда, когда $\pi_0 g : \overline{U} \to Y_0$ и $\pi_1 g : \overline{U} \to Y_1$, где $\pi_i : Y_0 \times Y_1 \to Y_i$, $i = 0, 1$ – канонические проекции, являются непрерывными сечениями мультиотображений G_0 и G_1 соответственно.

Приведем два примера селектируемых мультиотображений.

Пример 2.3.1. Прежде всего, из классической теоремы Майкла (см. [137]) следует, что классу $\mathcal{S}(X, Y)$ принадлежит любое пн. сн. [§1.2, **17**] мультиотображение $G : X \to Cv(Y)$.

Приведем теперь пример невыпуклозначных мультиотображений из класса $\mathcal{S}(X, Y)$.

Пример 2.3.2. Символом $D(L^1([0, d]; E))$ будем обозначать совокупность всех замкнутых разложимых подмножеств [§1.1; **11**] пространства $L^1([0, d]; E)$. Одним из примеров разложимого множества является множество всех суммируемых сечений произвольной мультифункции $\Phi : [0, d] \to P(E)$.

Следующий аналог теоремы Майкла является обобщением Брессана (A. Bressan)– Коломбо (G. Colombo) теоремы Фрышковского (A. Fryszkowski) (см. [96]).

Теорема 2.3.1. *(см. [83]) Пусть X – сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн. сн. мультиотображение*

$$G : X \to D(L^1([0, d]; E))$$

имеет непрерывное сечение.

Теперь можно предложить второй пример мультиотображения из класса $\mathcal{S}(X, Y)$.

Теорема 2.3.2. *Пусть X – сепарабельное метрическое пространство, $Y = L^1([0, d]; E)$. Тогда любое пн. сн. мультиотображение $G : X \to D(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{S}(X, Y)$.*

Доказательство. В самом деле, справедливость $(\mathcal{S}_1)$ прямо вытекает из теоремы 2.3.1. Проверим выполнение условия $(\mathcal{S}_2)$. Пусть g – непрерывное сечение мультиотображения G' на множестве $A = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$.

Для проверки $(\mathcal{S}_2)$ достаточно применить теорему 2.3.1 к пн. сн. мультиотображению $\widetilde{G} : X \times [0,1] \to D(Y)$, определенному как

$$\widetilde{G}(x,\lambda) = \begin{cases} g(x,\lambda), & \text{если } (x,\lambda) \in A, \\ G'(x,\lambda), & \text{если } (x,\lambda) \notin A. \end{cases}$$

□

Пусть теперь U – отрытое ограниченное подмножество нормированного пространства E.

Символом $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ обозначим класс компактных мультиотображений F вида $F = f \circ G$, где G из класса $\mathcal{S}(\overline{U}, Y)$ для некоторого банахова пространства Y; $f : Y \to E$ – непрерывное отображение; $x \notin F(x)$ для всех $x \in \partial U$. Как и прежде, $(f \circ G)$ будем называть представлением мультиотображения F.

Определение 2.3.2. *Топологической степенью* $\deg(\Phi, \overline{U})$ мультиполя $\Phi = i - F$, где $F = (f \circ G) \in \mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ назовем топологическую степень $\deg(\varphi, \overline{U})$ поля $\varphi = i - fg$, где $g : \overline{U} \to Y$ – произвольное непрерывное сечение мультиотображения G.

Лемма 2.3.1. *Определение 2.3.2 корректно, т.е. степень* $\deg(i - fg, \overline{U})$ *не зависит от выбора сечения* g.

Доказательство. Пусть $g_0, g_1 : \overline{U} \to Y$ – два произвольных непрерывных сечения мультиотображения G. Из $(\mathcal{S}_2)$ вытекает, что отображение $\widetilde{h} : (U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\}) \to Y$, определенное как

$$\widetilde{h}(x,i) = \begin{cases} g_0(x), & \text{если } i = 0, \\ g_1(x), & \text{если } i = 1, \end{cases}$$

может быть продолжено до непрерывного сечения $h : \overline{U} \times [0,1] \to Y$ мультиотображения $G' : \overline{U} \times [0,1] \to C(Y)$, $G'(x,\lambda) \equiv G(x)$. Тогда ясно, что отображение $fh : \overline{U}\times[0,1] \to E$ реализует гомотопию полей $i-fg_0$ и $i-fg_1$ откуда и вытекает

$$\deg(i - fg_0, \overline{U}) = \deg(i - fg_1, \overline{U}).$$

$\square$

Введенная таким образом характеристика обладает всеми основными свойствами топологической степени.

Определение 2.3.3. Мультиотображения F_0, F_1 из класса $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, $F_0 = (f_0 G_0)$, $F_1 = (f_1 G_1)$ и соответствующие им мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ называются *гомотопными* ($\Phi_0 \sim \Phi_1$), если существует мультиотображение $H : \overline{U} \times [0,1] \to P(Y)$ и непрерывное отображение $k : Y \times [0,1] \to E$, удовлетворяющие условиям:

(i) $H(\cdot, 0) = G_0,\ H(\cdot, 1) = G_1$;

(ii) $k(\cdot, 0) = f_0,\ k(\cdot, 1) = f_1$;

(iii) мультиотображение H обладает непрерывным сечением;

(iv) мультиотображение $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to P(E)$, заданное равенством

$$k \circ H(x, \lambda) = k(H(x, \lambda), \lambda) \quad \text{для всех } \ (x, \lambda) \in \overline{U} \times [0,1],$$

компактно и не имеет неподвижных точек на $\partial U \times [0,1]$.

Мультиотображение $k \circ H$ в этом случае называется *гомотопией в классе* $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, соединяющей мультиотображения F_1 и F_2 (и соответствующие им мультиполя Φ_0 и Φ_1).

($\mathbf{1^0}$) **Гомотопическая инвариантность.** *Пусть мультиотображения F_0, F_1 принадлежат классу $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, $F_0 = f_0 G_0, F_1 = f_1 G_1$. Если соответствующие им мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$ и $\Phi_1 = i - F_1$ гомотопны, то*

$$\deg(\Phi_0, \overline{U}) = \deg(\Phi_1, \overline{U}).$$

Доказательство. Пусть $h : \overline{U} \times [0,1] \to E$ – произвольное непрерывное сечение мультиотображения H.

Рассмотрим вполне непрерывное отображение $k \circ h : \overline{U} \times [0,1] \to E$, [§1.2; **29**]

$$k \circ h(x,\lambda) = k(h(x,\lambda),\lambda) \quad \text{для всех } (x,\lambda) \in \overline{U} \times [0,1].$$

Ясно, что $g_0 = h(\cdot,0)$ и $g_1 = h(\cdot,1)$ являются непрерывными сечениями G_0 и G_1 соответственно; $x \neq kh(x,\lambda)$ для всех $(x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]$, и, таким образом, отображение $k \circ h$ реализует гомотопию полей $i - f_0 g_0$ и $i - f_1 g_1$. Следовательно,

$$\deg(\Phi_0, \overline{U}) = \deg(i - f_0 g_0, \overline{U}) = \deg(i - f_1 g_1, \overline{U}) = \deg(\Phi_1, \overline{U}).$$

□

($\mathbf{2^0}$) **Принцип неподвижной точки.** *Пусть F принадлежит классу $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ и $\deg(i - F, \overline{U}) \neq 0$. Тогда $\emptyset \neq \operatorname{Fix} F \subset U$.*

Доказательство. Предположим, что мультиотображение $F = (f \circ G)$ не имеет неподвижных точек на $\overline{U}$. Тогда для произвольного непрерывного сечения $g : \overline{U} \to Y$ мультиотображения G непрерывное отображение $f \circ g$ также не имеет неподвижных точек на $\overline{U}$ и, следовательно,

$$\deg(i - fg, \overline{U}) = \deg(i - fG, \overline{U}) = 0,$$

что противоречит условию. □

Справедливость остальных свойств топологической степени мультиотображений класса $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ непосредственно вытекает из свойств степени непрерывных однозначных отображений.

2.4 Степень совпадения линейных фредгольмовых и многозначных отображений

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $l : \mathrm{dom}\, l \subseteq E_1 \to E_2$ – линейный (необязательно непрерывный) оператор.

Напомним о следующих известных фактах (см., например, [134]).

Теорема 2.4.1. *Пусть $p : E_1 \to E_1$ – линейный оператор проектирования такой, что $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, l$. Тогда:*

1) оператор $l_p : \mathrm{dom}\, l \cap \mathrm{Ker}\, p \to \mathrm{Im}\, l$, заданный как

$$l_p(x) = l(x) \quad \text{для всех } \ x \in \mathrm{dom}\, l \cap \mathrm{Ker}\, p$$

является линейным изоморфизмом;

2) оператор $k_p : \mathrm{Im}\, l \to \mathrm{dom}\, l \cap \mathrm{Ker}\, p$, заданный как

$$k_p = l_p^{-1},$$

удовлетворяет соотношению

$$k_p \circ l(x) = x - p(x) \quad \text{для всех } \ x \in \mathrm{dom}\, l.$$

Определение 2.4.1. Линейный оператор $l : \mathrm{dom}\, l \to E_2$ называется *фредгольмовым линейным оператором нулевого индекса*, если $\mathrm{Ker}\, l$ и $\mathrm{Coker}\, l = E_2/\mathrm{Im}\, l$ имеют конечную размерность и

$$\dim \mathrm{Ker}\ l = \dim \mathrm{Coker}\, l.$$

Теорема 2.4.2. *Пусть $l : \mathrm{dom}\, l \to E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\mathrm{Im}\, l \subset E_2$ – замкнутое множество. Тогда*

1) существуют линейные непрерывные операторы проектирования $p : E_1 \to E_1$, $q : E_2 \to E_2$ такие, что $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, l$ и $\mathrm{Im}\, l = \mathrm{Ker}\, q$;

2) канонический оператор проектирования $\pi : E_2 \to E_2/\mathrm{Im}\, l$, *заданный как*

$$\pi(y) = y + \mathrm{Im}\, l,$$

является непрерывным линейным оператором;

3) существует непрерывный линейный изоморфизм $\phi : \mathrm{Coker}\, l \to \mathrm{Ker}\, l$;

4) уравнение $l(x) = y,\ y \in E_2$, *является эквивалентным уравнению* $(i - p)x = (\phi \circ \pi + k_{p,q})(y)$, *где* i *– тождественный оператор в* E_1, *а оператор* $k_{p,q} : E_2 \to E_1$ *задан соотношением:*

$$k_{p,q}(y) = k_p(y - q(y)).$$

Сначала рассмотрим случай мультиотображений типа аппроксимируемых.

Пусть $U \subset E_1$ – открытое ограниченное множество.

Определение 2.4.2. Мультиотображение G из класса $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_2)$ называется *l-компактным*, если композиция

$$(\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G : \overline{U} \to K(E_1)$$

является компактным мультиотображением.

Замечание 2.4.1. Приведенное выше определение l-компактного мультиотображения не зависит от выбора линейных операторов проектирования $p : E_1 \to E_2$ и $q : E_1 \to E_2$, а также изоморфизма $\phi : \mathrm{Coker}\, l \to \mathrm{Ker}\, l$.

Рассмотрим теперь отображение $F : \overline{U} \to K(E_1)$ вида

$$F(x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G(x), \quad x \in \overline{U}. \tag{2.15}$$

Из теории совпадения отображений, развитию которой посвящены работы [13], [22], [26], [98], [99], [134],[140]-[142], [149], [150], [153] известно, что $\mathrm{Fix}\, F$ совпадает с $\mathrm{Coin}\,(l, G)$.

Лемма 2.4.1. *Отображение* F, *определенное* (2.15), *принадлежит классу* $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_1)$.

Доказательство. Вначале покажем, что мультиотображение $\widehat{G} : \overline{U} \to E_1 \times Y$, заданное как $\widehat{G}(x) = \{x\} \times G(x)$, принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_1 \times Y)$.

В силу теоремы 1.2.16 (iv) ([§1.2, **23**]) для любого конечномерного подпространства $E_n \subset E_1$ и $\overline{U}_n = \overline{U} \cap E_n$ мультиотображение $\widehat{G}_n = \widehat{G}|_{\overline{U}_n}$ принадлежит классу $\mathcal{A}_0(\overline{U}_n, E_1 \times Y)$.

Пусть теперь $g, g' : \overline{U}_n \to E_1 \times Y$ – две произвольные ε-аппроксимации мультиотображения $\widehat{G}_n$. Тогда $g(x) = (g_0(x), g_1(x)) \in E_1 \times Y$ и $g'(x) = (g_0'(x), g_1'(x)) \in E_1 \times Y$. По определению ε-аппроксимации найдется точка $x' \in U_n$ ε-близкая к x и такая, что $g(x)$ будет лежать в ε-окрестности множества $x' \times G(x')$. Но это значит, что $g_0(x)$ ε-близко к x', и, следовательно, деформация $h(x, \lambda) = ((1-\lambda)g_0(x) + \lambda x, g_1(x))$ проходит в классе ε-аппроксимаций мультиотображения $\widehat{G}$. Она приводит к аппроксимации вида $x \times g_1(x)$, где g_1 – ε-аппроксимация мультиотображения G. Аналогично g' гомотопируем с помощью деформации h' в классе ε-аппроксимаций к $x \times g_1'(x)$. Теперь соединяем g_1 и g_1' гомотопией $\kappa : \overline{U}_n \times [0,1] \to Y$, состоящей из δ-аппроксимаций. Это можно сделать, так как мультиотображение G принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, Y)$. Теперь аппроксимации g и g' могут быть соединены композицией деформаций

$$g \underset{h}{\sim} i \times g_1 \underset{\widetilde{\kappa}}{\sim} i \times g_1' \underset{h'}{\sim} g',$$

где $\widetilde{\kappa}(x, \mu) = \{x\} \times \kappa(x, \mu)$. Таким образом, мультиотображение $\widehat{G}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_1 \times Y)$.

Тогда мультиотображение F может быть записано в виде представления $(f \circ \widehat{G})$, где $f : E_1 \times Y \to E_1$ задано как

$$f(x, y) = p(x) + (\phi\pi + k_{p,q})(y).$$

$\square$

Пусть G из класса $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_2)$ – l-компактное мультиотображение. Подкласс $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_2)$, состоящий из мультиотображений G таких, что

$$l(x) \notin G(x) \quad \text{для всех } \; x \in \partial U \cap \operatorname{dom} l,$$

будем обозначать $\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$.

Определение 2.4.3. *Степенью совпадения* $\deg(l, G, \overline{U})$ *пары* (l, G), где $G \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$, назовем топологическую степень $\deg(\Phi, \overline{U})$ компактного мультиполя $\Phi = i - F$ соответствующего мультиотображению $F : \overline{U} \to K(E_1)$, заданному (2.15).

Нетрудно видеть, что в определении 2.4.3 мультиотображение F принадлежит классу $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_1)$ и, следовательно, степень совпадения обладает всеми основными свойствами топологической степени.

1^0) Гомотопическая инвариантность. *Пусть мультиотображения* G_0, G_1 *из класса* $\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$ *являются* l*-компактными. Если* H *из класса* $\mathcal{A}_0(\overline{U} \times [0,1], E_2)$, *заданное как* $H(x, \lambda) = \lambda G_1(x) + (1 - \lambda) G_0(x)$, *такое, что* $l(x) \notin H(x, \lambda)$ *для всех* $(x, \lambda) \in (\partial U \cap \operatorname{dom} l) \times [0,1]$, *то*

$$\deg(l, G_0, \overline{U}) = \deg(l, G_1, \overline{U}).$$

Доказательство. Предположим, что

$$\deg(l, G_0, \overline{U}) \neq \deg(l, G_1, \overline{U}).$$

Тогда по определению 2.4.3

$$\deg(i - F_0, \overline{U}) \neq \deg(i - F_1, \overline{U}),$$

где $F_0(x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G_0(x),\ F_1(x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G_1(x),\ x \in \overline{U}$. В силу свойства 1^0) степени в нормированном пространстве найдется последовательность $(x_m, \lambda_m) \in \partial U \times [0,1]$ такая, что

$$x_m \in \lambda_m F_1(x_m) + (1-\lambda_m) F_0(x_m).$$

Без ущерба для общности, будем считать, что $(x_m, \lambda_m) \to (x_0, \lambda_0) \in \partial U \times [0,1]$. Тогда имеем

$$x_0 \in p(x_0) + \lambda_0(\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G_1(x_0) + (1-\lambda_0)(\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G_0(x_0),$$

т.е.

$$x_0 = p(x_0) + \lambda_0(\phi \circ \pi + k_{p,q})(y_1) + (1-\lambda_0)(\phi \circ \pi + k_{p,q})(y_0),$$

где $y_1 \in G_1(x_0),\ \ y_0 \in G_0(x_0)$. Учитывая свойства операторов ϕ, π и $k_{p,q}$ получаем

$$x_0 = p(x_0) + (\phi \circ \pi + k_{p,q})(\lambda_0 y_1 + (1-\lambda_0) y_0).$$

Последнее равенство, очевидно, равносильно следующему:

$$l(x_0) \in H(x_0, \lambda_0), \quad (x_0, \lambda_0) \in (\partial U \cap \operatorname{dom} l) \times [0,1],$$

в противоречие с условием. □

$\mathbf{2^0}$) Аддитивная зависимость от области. *Пусть $\{U_j\}_{j=1}^m$ является семейством открытых непересекающихся подмножеств U и l-компактное мультиотображение G из класса $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_2)$ обладает следующими свойствами:*

1) $G_j = G|_{\overline{U}_j}$ из класса $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}_j, E_2)$ для всех $j = 1, ..., m$;

2) G не имеет точек совпадения на $\overline{U} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^m U_j$, т.е.

$$l(x) \notin G(x) \quad \text{для всех } x \in \overline{U} \setminus \bigcup_{j=1}^m U_j.$$

Тогда

$$\deg(l, G, \overline{U}) = \sum_{j=1}^m \deg(l, G_j, \overline{U}_j).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из п. 4) теоремы 2.4.2 и соответствующего свойства 2^0) степени в нормированном пространстве. $\square$

3^0) Принцип точки совпадения. *Пусть G из класса $\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$ является l-компактным мультиотображением и* $\deg(l, G, \overline{U}) \neq 0$. *Тогда найдется точка $x \in U$, такая, что*

$$l(x) \in G(x).$$

Доказательство. Действительно, в противном случае имели бы для всех $x_m \in U$ следующее:

$$l(x_m) \notin G(x_m),$$

или

$$x_m \notin F(x_m).$$

Тогда в силу свойства 3^0) степени в нормированном пространстве справедливо следующее равенство:

$$\deg(i - F, \overline{U}) = 0,$$

в противоречие с условием. $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2.4.3. *Пусть мультиоператоры $\pi \circ G$ и $k_{p,q} \circ G$ компактны и выполнены условия:*

(i) $l(x) \notin \lambda G(x)$ *для всех* $\lambda \in (0,1)$, $x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$*;*

(ii) $0 \notin \pi G(x)$ *для всех* $x \in \operatorname{Ker} l \cap \partial U$*;*

(iii) $\deg_{\operatorname{Ker} l}(\phi \pi G|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0$, *где символ* $\deg_{\operatorname{Ker} l}$ *обозначает топологическую степень, вычисляемую в пространстве* $\operatorname{Ker} l$, *а* $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$.

Тогда включение $l(x) \in G(x)$ имеет решение в U.

Доказательство. Рассмотрим деформацию $H : \overline{U} \times [0,1] \to E_1$, заданную как

$$H(x,\lambda) = p(x) + (\phi \circ \pi + \lambda k_{p,q}) \circ G(x), \quad (x,\lambda) \in \overline{U} \times [0,1].$$

Для $\lambda \in (0,1]$ и $x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$ из условия (i) вытекает, что

$$x \notin H(x,\lambda).$$

Действительно, в предположении противного, пусть для некоторого $x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$ имеем $x \in H(x,\lambda)$, т.е.

$$x = p(x) + \phi\pi(y) + \lambda k_{p,q}(y). \tag{2.16}$$

Тогда

$$l(x) = lp(x) + l\phi\pi(y) + \lambda l k_{p,q}(y) = \lambda(i - \pi)(y). \tag{2.17}$$

С другой стороны из (2.16) следует, что

$$p(x) = p(x) + p\phi\pi(y) + \lambda p k_{p,q}(y).$$

Откуда $p\phi\pi(y) = 0$. Так как $p\phi\pi(y) = \phi\pi(y)$, то $\phi\pi(y) = 0$. Следовательно, $\pi(y) = 0$. Тогда из (2.17) получаем, что

$$l(x) = \lambda y \in \lambda G(x), \quad x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U,$$

в противоречие с условием (i).

Нетрудно видеть также, что в силу условия (ii) для всех $x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$

$$x \notin H(x,0).$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\deg(l, G, \overline{U}) = \deg(i - p - \phi\pi G, \overline{U}),$$

где в правой части равенства – топологическая степнь мультиотображения в конечномерном пространстве. В силу принципа сужения мультиотображения тогда имеем

$$\deg(i - p - \phi\pi G, \overline{U}) = \deg_{\operatorname{Ker} l}(-\phi\pi G|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}).$$

Теперь утверждение следует из условия (iii) и принципа неподвижной точки степени совпадения. $\square$

Рассмотрим теперь случай мультиотображений типа селектируемых.

Как и прежде, $U \subset E_1$ – открытое ограниченное множество.

Определение 2.4.4. Мультиотображение G из класса $\mathcal{S}(\overline{U}, E_2)$ называется *l-компактным*, если композиция

$$(\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G : \overline{U} \to K(E_1)$$

является компактным мультиотображением.

Замечание 2.4.2. Приведенное выше определение l-компактного мультиотображения не зависит от выбора линейных операторов проектирования $p : E_1 \to E_2$ и $q : E_1 \to E_2$, а также изоморфизма $\phi : \operatorname{Coker} l \to \operatorname{Ker} l$.

Пусть G из класса $\mathcal{S}(\overline{U}, E_2)$ является l-компактным мультиотображением. Рассмотрим отображение $F : \overline{U} \to K(E_1)$ вида

$$F(x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G(x), \quad x \in \overline{U}. \tag{2.18}$$

Лемма 2.4.2. *Отображение F, определенное* (2.18), *принадлежит классу* $\mathcal{CS}(\overline{U}, E_1)$.

Доказательство. Ясно, что мультиотображение $\widehat{G} : \overline{U} \to E_1 \times Y$, заданное как $\widehat{G}(x) = \{x\} \times G(x)$, принадлежит классу $\mathcal{S}(\overline{U}, E_1 \times Y)$ (см. замечание 2.3.1). Тогда мультиотображение F может быть записано в виде представления $(f \circ G)$, где $f : E_1 \times Y \to E_1$ задано как

$$f(x, y) = p(x) + (\phi\pi + k_{p,q})(y).$$

$\square$

Подкласс $\mathcal{S}(\overline{U}, E_2)$, состоящий из мультиотображений G таких, что

$$l(x) \notin G(x) \quad \text{для всех } \ x \in \partial U \cap \operatorname{dom} l,$$

будем обозначать $\mathcal{S}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$.

Определение 2.4.5. *Степенью совпадения* $\deg(l, G, \overline{U})$ *пары* (l, G), где $G \in \mathcal{S}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$, назовем топологическую степень $\deg(\Phi, \overline{U})$ компактного мультиполя $\Phi = i - F$ соответствующего мультиотображению $F : \overline{U} \to K(E_1)$, заданному (2.18).

Нетрудно видеть, что в определении 2.4.5 мультиотображение F принадлежит классу $\mathcal{CS}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_1)$ и, следовательно, степень совпадения обладает всеми основными свойствами топологической степени.

Справедлив следующий аналог теоремы 2.4.3.

Теорема 2.4.4. *Пусть мультиоператоры* $\pi \circ G$ *и* $k_{p,q} \circ G$ *компактны и выполнены условия:*

(i) $l(x) \notin \lambda G(x)$ *для всех* $\lambda \in (0, 1)$, $x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$*;*

(ii) $0 \notin \pi G(x)$ *для всех* $x \in \operatorname{Ker} l \cap \partial U$*;*

(iii) $\deg_{\operatorname{Ker} l}(\phi\pi G|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0.$

Тогда включение $l(x) \in G(x)$ *имеет решение в* U.

Глава 3

Метод направляющих функций на заданном множестве

3.1 Периодическая задача

3.1.1 Направляющая функция для случая выпуклой правой части

Будем рассматривать сначала периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \tag{3.1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.2}$$

предполагая, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодично ($T > 0$) по первому аргументу:

$$F(t, x) = F(t + T, x) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение F заданным на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$).

Замечание 3.1.1. (см. [12]). При сделанных предположениях определен мультиоператор суперпозиции $P_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$, сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F(t,x(t))$. Известно, что этот мультиоператор замкнут.

Всюду в дальнейшем под решением задачи (3.1), (3.2) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (3.1) и условию периодичности (3.2).

Для изучения задачи (3.1), (3.2) будем использовать топологическую степень совпадения пары отображений (см. п. 2.4).

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – непустое множество. Обозначим символом C_T – пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$ и пусть L^1_T – пространство суммируемых T-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|f\|_{L^1_T} = \int_0^T \|f(s)\|ds$.

Обозначим теперь

$$\Gamma(G) := \{x \in C_T : x(t) \in G \quad \text{для всех } \ t \in [0,T]\}.$$

Для функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}$ и для любого $r \in \mathbb{R}$ пусть

$$V^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \in M\}, \quad \mathcal{V}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) > r\}.$$

Для $M \subset \mathbb{R}^n$ символом χ_M обозначается характеристическая функция множества M и $M_\delta = \bigcup_{x\in M} B^n(x,\delta)$, где $B^n(x,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ – открытый шар с центром в точке x и радиуса $\delta > 0$.

Развивая понятия, введенные в [40, 133, 135], дадим следующие определения.

Определение 3.1.1. Непрерывно дифференцируемая функция $V : G \to \mathbb{R}$ называется *невырожденным потенциалом*, если

$$\nabla V(x) \neq 0 \quad \text{для всех } \ x \in G.$$

Определение 3.1.2. Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *направляющей функцией на множестве* G для включения (3.1), если выполнено условие

$$\langle \nabla V(x), y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } \; x \in G, \; y \in F(t,x). \tag{3.3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является направляющей функцией для включения (3.1) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда задача (3.1), (3.2) имеет T*-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$.

Доказательство. **(j)** Покажем сначала, что утверждение теоремы справедливо, когда условие (ii) предполагается выполненным на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Для невырожденного потенциала V определим отображение $Y_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Y_V(x) = \begin{cases} \nabla V(x), & \text{если } \; \|\nabla V(x)\| \leq 1, \\ \frac{\nabla V(x)}{\|\nabla V(x)\|}, & \text{если } \; \|\nabla V(x)\| > 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что отображение Y непрерывно.

Зададим мультиотображение $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$H(t,x,\lambda) = (1-\lambda)Y_V(x) + \lambda F(t, x(t)).$$

Рассмотрим периодическую задачу

$$x'(t) \in H(t, x, \lambda), \quad \lambda \in [0, 1), \tag{3.4}$$

$$x(0) = x(T). \tag{3.5}$$

Пусть $\lambda \in [0, 1)$ и x – некоторое решение (3.4), (3.5) такое, что $x \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$. Покажем, что $x \in \Gamma(\mathcal{V}_0)$, т.е., что $V(x(t)) > 0$, для всех $t \in [0, T]$. Предположим, что при некотором $\tau \in [0, T]$ имеем $V(x(\tau)) = 0$. Это означает, что $x(\tau) \in V^{-1}(0)$ и в силу условия (ii) $\nabla V(x(\tau)) \neq 0$. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\nabla V(x(t)) \neq 0 \quad \text{для всех} \;\; t \in [\tau - \delta, \tau + \delta] \cap [0, T].$$

Предположим без ограничения общности, что $\tau - \delta \in (0, T)$ и что $V(x(t)) \in [0, \varepsilon]$ для всех $t \in [\tau - \delta, \tau]$. Тогда имеем:

$$0 \geq V(x(\tau)) - V(x(\tau - \delta)) = \int_{\tau-\delta}^{\tau} \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle dt =$$

$$= \int_{\tau-\delta}^{\tau} \left[(1 - \lambda) \langle \nabla V(x(t)), Y_V(x(t)) \rangle + \lambda (\nabla V(x(t)), f(t)) \right] dt > 0$$

для каждого сечения $f(t) \in F(t, x(t))$. Получили противоречие. Таким образом, или задача (3.1), (3.2) имеет решение на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$ и в этом случае теорема доказана, или для любого $\lambda \in [0, 1]$ задача (3.4), (3.5) не имеет решения на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$.

Тогда определим оператор

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x - \text{абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$lx = x'$$

и при каждом $\lambda \in [0, 1]$ мультиоператор суперпозиции $\mathcal{G}(\cdot, \lambda) = P_H(\cdot, \lambda) : C_T \to P(L^1_T)$. Нетрудно проверить, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\mathcal{G}(\cdot, \lambda)$ – семейство замкнутых l-компактных мультиоператоров.

Запишем (3.4) в абстрактном виде как

$$lx \in \mathcal{G}(x, \lambda),$$

или

$$lx = (1 - \lambda)Y_V(x) + \lambda f$$

при каждом $f \in P_F$. По свойству гомотопической инвариантности топологической степени совпадения

$$\deg(l, H(\cdot, 1), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)) = \deg(l, H(\cdot, 0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)).$$

Из условий (i), (iii) и леммы VI.1 из [134] следует, что

$$|\deg(l, H(\cdot, 0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0))| = |\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}}_0)| \neq 0.$$

Тогда из свойства существования точки совпадения заключаем, что

$$l(x) \in \mathcal{G}(x, \lambda) \quad \text{для} \ \ x \in \Gamma(\mathcal{V}_0).$$

(jj) Пусть теперь условие (ii) имеет место на множестве $V^{-1}(0)$.

Так как $V^{-1}(0)$ – компактное множество и $\nabla V(x) \neq 0$ для всех $x \in V^{-1}(0)$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $\nabla V(x) \neq 0$ для всех $x \in V^{-1}(0)_\delta$. Подберем функцию $\nu \in C^1(\mathbb{R}^n, [0,1])$ так, чтобы $\nu = 1$ на $V^{-1}(0)_{\delta/2}$ и $\nu = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus V^{-1}(0)_\delta$.

Так как мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, то (см., например, [90]) для каждого $\varepsilon_m > 0$ существует мультиотображение $F_{\varepsilon_m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ такое, что:

(а) мультиотображение F_{ε_m} по первому аргументу T-периодично;

(б) $F_{\varepsilon_m}(t, z) \subset F(t, z)$ п.в. $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(в) существует замкнутое подмножество J_{ε_m} промежутка $J = [0, T]$ такое, что $\mu(J \setminus J_{\varepsilon_m}) \leq \varepsilon_m$ (где μ – мера Лебега) и мультиотображение $F_{\varepsilon_m}|_{J_{\varepsilon_m} \times \mathbb{R}^n}$ пн. св.;

(г) если $u, w : J \to \mathbb{R}^n$ измеримы и $w(t) \in F(t, u(t))$ п.в. $t \in J$, то $w(t) \in F_{\varepsilon_m}(t, u(t))$ п.в. $t \in J$.

Образуем множество $\theta_m = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} J_{\varepsilon_i}$ такое, что $\mu(\theta_m) < \frac{1}{m}$, $\theta_{m+1} \subset \theta_m$ для каждого $m \in N$ и $\mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} \theta_m) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} \chi_{\theta_m}(t) = 0$ для всех $t \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \theta_m$ и множество $[0, T] \setminus \theta_m$ является компактным.

Построим для каждого $m \in N$ и $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ мультиотображение

$$F_m(t, x) = F(t, x) + \nu(x) \left(\alpha(t)(1 + \|x\|)\chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m} \right) Y_V(x),$$

где функция $\alpha(\cdot)$ та же, что и в условии подлинейного роста. Нетрудно видеть, что мультиотображения F_m также удовлетворяют верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Покажем теперь, что для каждого дифференциального включения

$$x'(t) \in F_m(t, x(t)) \tag{3.6}$$

условие (ii) выполнено на множестве $V^{-1}([0, \varepsilon])$.

Действительно, для каждых $(t, x) \in \theta_m \times \left(V^{-1}(0)_{\delta/2} \cap \overline{\mathcal{V}}_0\right)$ и $y_m \in F_m(t, x)$ имеем:

$$\langle \nabla V(x), y_m \rangle = \langle \nabla V(x), y \rangle + \left(\alpha(t)(1 + \|x\|)\chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m} \right) \|\nabla V(x)\| \geq 0,$$

так как $\nu = 1$ на $V^{-1}(0)_{\delta/2}$; здесь $y \in F(t, x)$.

Пусть теперь $t \in [0, T] \setminus \theta_m$. Тогда для каждых $x \in V^{-1}(0)$ и $y_m \in F_m(t, x)$ получаем

$$\langle \nabla V(x), y_m \rangle = \langle \nabla V(x), y \rangle + \nu(x) \left(\alpha(t)(1 + \|x\|)\chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m} \right) \|\nabla V(x)\| > 0,$$

где $y \in F(t, x)$. Так как мультиотображение

$$(t, x) \multimap \{\langle \nabla V(x), y_m \rangle : \ y_m \in F_m(t, x)\}$$

является пн. св. на компактном множестве $([0, T] \setminus \theta_m) \times \overline{V^{-1}(0)_\delta}$, то найдется $\varepsilon_n > 0$ такое, что

$$\langle \nabla V(x), y_m \rangle \geq 0$$

для каждых $t \in [0,T] \setminus \theta_m$, $x \in V^{-1}[0,\varepsilon_n] \subset V^{-1}(0)_{\delta/2}$ и $y_m \in F_m(t,x)$. Таким образом для $\varepsilon = \min(\varepsilon_n, \delta/2)$ условие (ii) будет выполнено на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$ и по доказанному каждое из дифференциальных включений (3.6) будет иметь T-периодическое решение $x_m^*(\cdot)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем искомое решение $x^*(\cdot)$ включения (3.1) как предельную точку последовательности $x_m^*(\cdot)$ решений включения (3.6). $\square$

Некоторое усиление условия (3.3) также позволяет обосновать принцип существования T-периодического решения.

Определение 3.1.3. Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной направляющей функцией на множестве* G для включения (3.1), если для всех $x \in G$ выполнено условие

$$\langle \nabla V(x), y \rangle \geq 0 \quad \text{хотя бы для некоторого} \;\; y \in F(t,x). \tag{3.7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1.2. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является обобщенной направляющей функцией для включения (3.1) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда задача (3.1), (3.2) имеет T*-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$.

Доказательство. Определим мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$B(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma(x) \nabla V(x), y \rangle \geq 0 \},$$

где $\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ x \notin V^{-1}(0), \\ 1, & \text{если } \ x \in V^{-1}(0). \end{cases}$

Нетрудно видеть, что B является замкнутым мультиотображением.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$x'(t) \in F_B(t, x(t)) = F(t, x(t)) \cap B(x(t)). \tag{3.8}$$

Отметим, что правая часть включения (3.8) удовлетворяет верхним условиям Каратеодори.

Для включения (3.8) соотношение (3.7) будет справедливо уже для всех $y \in F_B(t, x)$ и решения включения (3.8) будут являться решениями исходного включения (3.1).

Следовательно, функция V будет являться направляющей функцией для включения (3.8) на множестве $V^{-1}(0)$ в смысле определения 3.1.2. Тогда по теореме 3.1.1 включение (3.8) имеет T-периодическое решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$. $\square$

3.1.2 Направляющая функция для случая нормальной правой части

Будем рассматривать теперь периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x(t)), \tag{3.9}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.10}$$

в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным ([§1.2; **31**]) и удовлетворяет условию T-периодичности по первому аргументу.

Определение 3.1.4. Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *направляющей функцией на множестве* G для включения (3.9), если выполнено условие

$$\langle \nabla V(x), y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } \ x \in G, \ y \in R(t, x). \tag{3.11}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1.3. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является направляющей функцией для включения (3.9) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$*.*

Тогда задача (3.9), (3.10) имеет T*-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$*.*

Доказательство. Пусть мультиотображение F является нормальным квазисечением мультиотображения R, т.е.:

(j) мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(jj) $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \emptyset$ для всех $t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n$;

(jjj) каждое решение $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \tag{3.12}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.13}$$

является решением исходной задачи (3.12), (3.13).

В силу (jjj) достаточно показать, что задача (3.12), (3.13) имеет решение.

Заметим, что в общем случае функция V не является направляющей функцией для включения (3.12).

Определим мультиотображение $\widetilde{F} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\widetilde{F}(t,x) = \begin{cases} F(t,x), & x \notin V^{-1}(0); \\ F(t,x) \cap C(x), & x \in V^{-1}(0), \end{cases}$$

где мультиотображение $C : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ задано как

$$C(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla V(x), y \rangle \geq 0\}.$$

Легко видеть, что C является замкнутым мультиотображением. Тогда мультиотображение $\widetilde{F}(t,x) = F(t,x) \cap C(x)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и имеет выпуклые компактные значения.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$x'(t) \in \widetilde{F}(t, x(t)). \tag{3.14}$$

Осталось показать теперь, что функция V является направляющей функцией для включения (3.14). Действительно, для произвольных $t \in [0,T]$,

$x \in V^{-1}(0)$ возьмем $y \in F(t,x) \cap R(t,x)$. Тогда имеем

$$\langle \nabla V(x), y \rangle \geq 0.$$

Поэтому $y \in \widetilde{F}(t,x)$. Следовательно, функция V является направляющей функцией для включения (3.14) в смысле определения 3.1.2. Из теоремы 3.1.1 тогда следует, что включение (3.14) имеет T-периодическое решение, которое является решением задачи (3.12), (3.13) и, следовательно, решением исходной задачи (3.9), (3.10). $\square$

3.1.3 Негладкая направляющая функция для случая выпуклой правой части

Развивая понятия, введенные в [79] и [135], дадим следующие определения.

Определение 3.1.5. Локально липшицева функция $V : G \to \mathbb{R}$ называется *прямым потенциалом на* G, если

$$\langle v, \widetilde{v} \rangle > 0 \quad \text{для всех} \;\; v, \widetilde{v} \in \partial V(x), \;\; x \in G,$$

где ∂V обозначает обобщенный градиент Кларка [§1.2; **35**].

Определение 3.1.6. Прямой потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *негладкой направляющей функцией на* G для включения (3.1), если для каждых $x \in G$, $v \in \partial V(x)$ и $t \in [0, T]$ выполнено

$$\langle v, y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех} \;\; y \in F(t, x). \tag{3.15}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1.4. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– регулярная функция* [§1.2; **36**] *такая, что выполняются следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является негладкой направляющей функцией для включения (3.1) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\partial V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда включение (3.1) имеет T*-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$.

Замечание 3.1.2. (см. [23]). Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция V четна, или $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = \pm\infty$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.1.1. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– регулярная функция,* $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *– абсолютно непрерывная функция. Тогда функция* $V(x(t))$ *также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее равенство:*

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int_a^t V^0(x(s), x'(s))ds, \quad t \in [a,b],$$

где V^0 *обозначает обобщенную производную Кларка [§1.2;* **34***].*

Доказательство. Рассмотрим ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ – область значений $x([a,b])$ функции $x(\cdot)$. Оно может быть покрыто конечным числом открытых множеств, на каждом из которых функция V является липшицевой. Обозначим через $L > 0$ наибольшую из констант Липщица функции V на этих множествах. Пусть $\xi > 0$ - лебегово число указанного покрытия, т.е. любой открытый шар с центром в одной из точек множества $x([a,b])$ радиуса ξ содержится в одном из данных открытых множеств. Зафиксируем теперь $\varepsilon, 0 < \varepsilon \le \xi$. Получаем тогда, что

$$\|V(x'') - V(x')\| \le L\|x'' - x'\|$$

для любых $x', x'' \in x([a,b]),\ \|x'' - x'\| \le \varepsilon$.

Функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ является абсолютно непрерывной на $[a,b]$, т.е. для данного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} \|x(t_k'') - x(t_k')\| < \varepsilon,$$

как только

$$\sum_{k=1}^{n} \|t_k'' - t_k'\| < \delta,$$

где $a \le t_1' < t_1'' \le t_2' < t_2'' \le ... \le t_k' < t_k'' \le t \le t_n' < t_n'' \le b,\ n \in N$.

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\sum_{k=1}^{n} \|V(x(t_k'')) - V(x(t_k'))\| \le L \sum_{k=1}^{n} \|x(t_k'') - x(t_k')\| < L\varepsilon,$$

откуда и следует абсолютная непрерывность функции $V(x(t))$.

Используя теперь интегральное представление абсолютно непрерывной функции $V(x(t))$ и регулярность функции V, получаем

$$V(x(t))-V(x(a))=\int_a^t V'(x(s),x'(s))ds=\int_a^t V^0(x(s),x'(s))ds.$$

$\square$

Доказательство теоремы 3.1.4. **(j)** Покажем сначала, что утверждение теоремы справедливо, когда условие (ii) предполагается выполненными на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$.

Для $k\in N$ положим

$$M^k=\sup\left\{\ \|\partial V(x)\|:x\in\overline{B}^n(k)\right\},$$

где $\|\partial V(x)\|=\sup\left\{\ \|v\|\,,\ v\in\partial V(x)\right\}$, а $\overline{B}^n(k)$ обозначает замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиуса k. Определим отображение $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:$

$$\eta(x)=1+(\|x\|-k)\,M^{k+2}+(k+1-\|x\|)\,M^{k+1},\quad k\le\|x\|\le k+1.$$

Нетрудно видеть, что отображение η непрерывно и удовлетворяет условию

$$\eta(x)\ge\max\left\{1,\|\partial V(x)\|\right\}\quad \text{для всех}\ \ x\in\mathbb{R}^n.$$

Мультиотображение $Y:\mathbb{R}^n\to Kv(\mathbb{R}^n):$

$$Y(x)=\frac{\partial V(x)}{\eta(x)}$$

пн. св. и удовлетворяют условию $\|Y(x)\|\le 1$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$.

Зададим гомотопию $H:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times[0,1]\to Kv(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$H(t,x,\lambda)=(1-\lambda)Y(x)+\lambda F(t,x(t)).\tag{3.16}$$

Рассмотрим периодическую задачу

$$x'(t)\in H(t,x,\lambda),\quad \lambda\in[0,1),\tag{3.17}$$

$$x(0) = x(T). \tag{3.18}$$

Пусть $\lambda \in [0,1)$ и x – некоторое решение (3.17), (3.18) такое, что $x \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$. Покажем, что $x \in \Gamma(\mathcal{V}_0)$, т.е., что $V(x(t)) > 0$, для всех $t \in [0,T]$. Предположим, что при некотором $\tau \in [0,T]$ имеем $V(x(\tau)) = 0$. Это означает, что $x(\tau) \in V^{-1}(0)$ и в силу условия (ii) $0 \notin \partial V(x(\tau))$. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$0 \notin \partial V(x(t)) \quad \text{для всех } \ t \in [\tau - \delta, \tau + \delta] \cap [0,T].$$

Предположим без ограничения общности, что $\tau - \delta \in (0,T)$ и что $V(x(t)) \in [0,\varepsilon]$ для всех $t \in [\tau - \delta, \tau]$. Тогда, применяя лемму 3.1.1, имеем:

$$0 \geq V(x(\tau)) - V(x(\tau-\delta)) = \int_{\tau-\delta}^{\tau} V^0(x(t), x'(t))dt \geq$$

$$\geq \int_{\tau-\delta}^{\tau} \langle \upsilon(t), x'(t)\rangle dt = \int_{\tau-\delta}^{\tau} \left[\frac{(1-\lambda)}{\eta(x(t))}\langle \upsilon(t), \widetilde{\upsilon}(t)\rangle + \lambda\langle \upsilon(t), f(t)\rangle\right] dt > 0$$

для каждых $\upsilon(t), \widetilde{\upsilon}(t) \in \partial V(x(t))$ и $f(t) \in F(t, x(t))$. Получили противоречие. Таким образом, или задача (3.1), (3.2) имеет решение на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$ и в этом случае теорема доказана, или для любого $\lambda \in [0,1]$ задача (3.17), (3.18) не имеет решения на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$.

Тогда определим оператор

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x - \text{абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$lx = x'$$

и при каждом $\lambda \in [0,1]$ мультиоператор суперпозиции $G(\cdot, \lambda) = P_H(\cdot, \lambda) : C_T \to P(L^1_T)$. Нетрудно проверить, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $G(\cdot, \lambda)$ – семейство l-компактных мультиоператоров.

Запишем (3.17) в абстрактном виде как

$$lx \in G(x, \lambda), \tag{3.19}$$

или

$$lx = (1-\lambda)\frac{\upsilon}{\eta(x)} + \lambda f$$

при каждом $\upsilon \in \partial V(x), f \in P_F$. По свойству гомотопической инвариантности топологической степени совпадения

$$\deg(l, H(\cdot,1), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)) = \deg(l, H(\cdot,0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)).$$

Из условий (i) и (iii) следует, что

$$|\deg(l, H(\cdot,0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0))| = |\deg(\partial V, \overline{\mathcal{V}}_0)| \neq 0.$$

Тогда из свойства существования точки совпадения заключаем, что

$$l(x) \in G(x,\lambda) \quad \text{для} \;\; x \in \Gamma(\mathcal{V}_0).$$

(jj) Пусть теперь условие (ii) имеет место на множестве $V^{-1}(0)$.

Так как $V^{-1}(0)$ – компактное множество и $0 \notin \partial V(x)$ для всех $x \in V^{-1}(0)$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $0 \notin \partial V(x)$ для всех $x \in V^{-1}(0)_\delta$. Подберем функцию $\nu \in C^1(\mathbb{R}^n, [0,1])$ так, чтобы $\nu = 1$ на $V^{-1}(0)_{\delta/2}$ и $\nu = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus V^{-1}(0)_\delta$.

Образуем множество $\theta_m = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} J_{\varepsilon_i}$ такое, что $\mu(\theta_m) < \frac{1}{m}$, $\theta_{m+1} \subset \theta_m$ для каждого $m \in N$ и $\mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} \theta_m) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} \chi_{\theta_m}(t) = 0$ для всех $t \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \theta_m$ и множество $[0,T] \setminus \theta_m$ является компактным.

Построим для каждого $m \in N$ и $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ мультиотображение

$$F_m(t,x) = F(t,x) + \nu(x)\left(\frac{\eta(x)}{\langle \upsilon, \widetilde{\upsilon}\rangle}\alpha(t)(1+\|x\|)\|\partial V(x)\|\chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m}\right)Y(x),$$

где $\upsilon, \widetilde{\upsilon} \in \partial V(x)$ и функция $\alpha(\cdot)$ та же, что и в условии (F_3). Нетрудно видеть, что мультиотображения F_m также удовлетворяют верхним условиям Каратеодори.

Покажем теперь, что для каждого дифференциального включения

$$x'(t) \in F_m(t, x(t)) \tag{3.20}$$

условие (ii) выполнено на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$.

Действительно, для каждых $(t,x) \in \theta_m \times \left(V^{-1}(0)_{\delta/2} \cap \overline{\mathcal{V}}_0\right)$, $\upsilon, \widetilde{\upsilon} \in \partial V(x)$ и $y_m \in F_m(t,x)$ имеем:

$$\langle \upsilon, y_m \rangle =$$
$$= \langle \upsilon, y \rangle + \frac{1}{\eta(x)} \left(\frac{\eta(x)}{\langle \upsilon, \widetilde{\upsilon} \rangle} \alpha(t)(1+\|x\|)\|\partial V(x)\| \chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m} \right) \langle \upsilon, \widetilde{\upsilon} \rangle > 0,$$

так как $\nu = 1$ на $V^{-1}(0)_{\delta/2}$.

Пусть теперь $t \in [0,T] \setminus \theta_m$. Тогда для каждых $x \in V^{-1}(0)$, $\upsilon, \widetilde{\upsilon} \in \partial V(x)$ и $y_m \in F_m(t,x)$ получаем

$$\langle \upsilon, y_m \rangle =$$
$$= \langle \upsilon, y \rangle + \frac{\nu(x)}{\eta(x)} \left(\frac{\eta(x)}{\langle \upsilon, \widetilde{\upsilon} \rangle} \alpha(t)(1+\|x\|)\|\partial V(x)\| \chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m} \right) \langle \upsilon, \widetilde{\upsilon} \rangle > 0.$$

Так как мультиотображение

$$(t,x) \multimap \{\langle \upsilon, y_m \rangle : \upsilon \in \partial V(x),\ y_m \in F_m(t,x)\}$$

является пн. св. на компактном множестве $([0,T] \setminus \theta_m) \times \overline{\mathcal{V}_0}$, то найдется $\varepsilon_n > 0$ такое, что

$$\langle \upsilon, y_m \rangle \geq 0$$

для каждых $t \in [0,T] \setminus \theta_m, x \in V^{-1}[0,\varepsilon_n]$, $\upsilon \in \partial V(x)$ и $y_m \in F_m(t,x)$. Таким образом для $\varepsilon = \min(\varepsilon_n, \delta/2)$ условие (ii) будет выполнено на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$ и по доказанному каждое из дифференциальных включений (3.20) будет иметь T-периодическое решение $x_m^*(\cdot)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем искомое решение $x^*(\cdot)$ включения (3.1) как предельную точку последовательности $x_m^*(\cdot)$ решений включения (3.20). $\square$

3.1.4 Негладкая направляющая функция для случая невыпуклой непрерывной правой части

Рассмотрим в заключение периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x(t)), \tag{3.21}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.22}$$

предполагая, что ограниченное мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным и удовлетворяет условию T-периодичности по первому аргументу.

Замечание 3.1.3. В силу [§1.2; **32**] для каждого конуса $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ ограниченное непрерывное мультиотображение $R : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ допускает ограниченное $\mathcal{K}$-непрерывное сечение $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.1.2. *(см. [80, 100]). Пусть $R : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ – ограниченное непрерывное мультиотображение, а $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – его ограниченное $\mathcal{K}$-непрерывное сечение. Пусть мультиотображение $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ задано следующим образом*

$$F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}\, f(B((t, x), \delta)),$$

где $B((t, x), \delta) = \{(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \mid |s - t| < \delta,\ \|y - x\| < \delta\}$. Тогда

(j) F является ограниченным пн. св. мультиотображением с выпуклыми компактными значениями;

(jj) множество решений задачи

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{3.23}$$

$$x(0) = x(T) \tag{3.24}$$

совпадает с множеством решений задачи

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \tag{3.25}$$

$$x(0) = x(T). \tag{3.26}$$

Определение 3.1.7. Прямой потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *негладкой направляющей функцией на* G для включения (3.21), если для каждых $x \in G,\ \upsilon \in \partial V(x),\ y \in R(t,x)$ и $t \in [0,T]$ выполнено

$$\langle \upsilon, y \rangle \geq 0. \tag{3.27}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1.5. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– регулярная функция такая, что выполняются следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является негладкой направляющей функцией для включения (3.21) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\partial V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда задача (3.21), (3.22) имеет T*-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$.

Доказательство. Возьмем произвольные $t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Так как мультиотображение R непрерывно, то найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $(s,y) \in B((t,x),\delta)$ будет следовать $R(s,y) \subset R(t,x) + B^n(\varepsilon)$.

Тогда имеем

$$F(t,x) \subset \overline{co}\, f(B((t,x),\delta)) \subset \overline{co}\, R(t,x) + B^n(\varepsilon)$$

и в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем

$$F(t,x) \subset \overline{co}\, R(t,x).$$

Из условия теоремы следует, что для каждого $x \in V^{-1}(0)$

$$\langle \upsilon, y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon \in \partial V(x), \ y \in R(t, x).$$

Тогда, очевидно, получаем для каждого $x \in V^{-1}(0)$

$$\langle \upsilon, \overline{y} \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon \in \partial V(x), \ \overline{y} \in F(t, x).$$

Таким образом, функция V является негладкой направляющей функцией для включения (3.25). Из теоремы 3.1.4 тогда вытекает, что задача (3.25), (3.26) имеет T-периодическое решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$. Следовательно, ввиду (jj) леммы 3.1.2, имеет T-периодическое решение и задача (3.21), (3.22). $\square$

3.2 Асимптотическое поведение решений

3.2.1 Случай выпуклой правой части

В настоящем параграфе для исследования асимптотического поведения решений дифференциальных включений предлагается использовать направляющую функцию. Для дифференциальных уравнений этот тип поведения тесно связан с существованием гетероклинических и гомоклинических решений (см., например, [74]-[76]). Идея установления того факта, что решение $x(\cdot)$ является гомоклиническим, сводится к получению оценки вида (см., например, [86])

$$\|x(t)\| \leq k \cdot h(t), \quad t \in \mathbb{R},\ k > 0, \tag{3.28}$$

где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция такая, что

$$\lim_{t \to \pm\infty} h(t) = 0.$$

Будем рассматривать задачу о существовании решений, удовлетворяющих приведенной выше оценке (3.28), для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \tag{3.29}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяет указанным ниже условиям:

F_{1_∞}) для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ мультифункция $F(\cdot, x) : \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ измерима;

F_{2_∞}) почти для каждого $t \in \mathbb{R}$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;

F_{3_∞}) существует положительная суммируемая на каждом компактном интервале функция $\alpha(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, такая, что

$$\|F(t, x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in \mathbb{R}$.

Под решением включения (3.29) на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (3.29) и начальному условию

$$x(0) = x_0. \tag{3.30}$$

Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - четная, непрерывно дифференцируемая функция, для которой

$$\inf\{g(t),\ t \in \mathbb{R}\} \geq 1.$$

Определение 3.2.1. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *направляющим потенциалом* для включения (3.29) вдоль функции g, если существует $r_0 > 0$ такое, что условие $g(t)\|x\| \geq r_0,\ t \in \mathbb{R}$ влечет

$$\langle \nabla V(x), g'(t)x + g(t)y \rangle \geq 0 \quad \text{если} \;\; t > 0; \tag{3.31}$$

$$\langle \nabla V(x), g'(t)x + g(t)y \rangle \leq 0 \quad \text{если} \;\; t < 0; \tag{3.32}$$

для всех $y \in F(t, x)$.

Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *обобщенным направляющим потенциалом* для включения (3.29) вдоль функции g, если оценки (3.31), (3.32) выполняются хотя бы для некоторых $y \in F(t, x)$.

Замечание 3.2.1. Без ограничения общности будем предполагать, что

$$r_0 > g(0)\|x_0\|.$$

Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является обобщенным направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции g.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.1. *Если выполнено условие коэрцитивности*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = -\infty, \tag{3.33}$$

то найдется по крайней мере одно решение задачи Коши (3.29), (3.30), *удовлетворяющее оценке*

$$\|x(t)\| \le k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.34}$$

для некоторого $k > 0$.

Замечание 3.2.2. Заметим, что для данной функции V, для каждого $r_0 > 0$ найдется $k > r_0$ такое, что если

$$V_0 := \inf\{V(x),\ \|x\| \le r_0\}, \tag{3.35}$$

то

$$V(x) < V_0,\ \|x\| \ge k. \tag{3.36}$$

Доказательство теоремы 3.2.1. **(i)** Вначале рассмотрим случай, когда V является направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции g.

Рассмотрим сначала случай $t \ge 0$. Разобьем интервал $[0, +\infty)$ на компактные промежутки $[0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_n, t_{n+1}], ...(n \in N)$. Рассмотрим промежуток $[0, t_1]$. Тогда мультиотображение $F : [0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 3.2.17 (см. [12]) и множество всех решений задачи (3.29), (3.30) на промежутке $[0, t_1]$ непусто и в силу леммы Гронуолла [§1.1; **10**] ограничено. Возьмем произвольное решение $x(\cdot)$ задачи (3.29), (3.30) на промежутке $[0, t_1]$. Взяв в качестве начальной точки $x(t_1)$, найдем решение включения (3.29) на промежутке $[t_1, t_2]$ и так далее. В итоге получим, что все решения задачи (3.29), (3.30) продолжимы на промежуток $[0, \infty)$ и их множество непусто.

Пусть $x(\cdot)$ – некоторое решение задачи (3.29), (3.30) на промежутке $[0, +\infty)$.

В силу непрерывности функции $t \to g(t)\|x(t)\|$ учитывая замечание 3.2.1, можно указать наибольшее $\tau_1 > 0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq r_0 < k, \quad t \in [0, \tau_1). \tag{3.37}$$

Если $\tau_1 = +\infty$, то

$$\|x(t)\| < k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in [0, +\infty) \tag{3.38}$$

и утверждение доказано.

Если $\tau_1 < +\infty$, то оценка (3.37) справедлива только на конечном промежутке.

Покажем, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq k, \quad t \in [0, +\infty). \tag{3.39}$$

В предположении противного найдется $\tau_2 > \tau_1$ такое, что

$$g(\tau_2)\|x(\tau_2)\| > k. \tag{3.40}$$

Из (3.37) и (3.40) следует существование $\tau_1 < \tau_* < \tau_2$, при котором

$$g(\tau_*)\|x(\tau_*)\| = k. \tag{3.41}$$

Пусть

$$\tau_1' := \sup\{\tau \in [\tau_1, \tau_*),\ g(\tau)\|x(\tau)\| = r_0\},$$

следовательно,

$$g(\tau_1')\|x(\tau_1')\| = r_0$$

и

$$g(t)\|x(t)\| \geq r_0 \quad \text{для всех} \quad t \in [\tau_1', \tau_*]. \tag{3.42}$$

В силу (3.35), получаем следующую оценку

$$V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geq V_0. \tag{3.43}$$

Так как функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции $g(\cdot)$, то, учитывая оценку (3.42), получим

$$V(g(\tau_*)x(\tau_*)) - V(g(\tau_1')x(\tau_1')) = \int_{\tau_1'}^{\tau_*} \langle \nabla V(x(t)), g'(t)x(t) + g(t)x'(t) \rangle \, dt \geq 0.$$

Отсюда и из соотношений (3.36), (3.41) и (3.43) получаем

$$V_0 > V(g(\tau_*)x(\tau_*)) \geq V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geq V_0.$$

Это противоречие и доказывает справедливость оценки (3.39).

Таким образом, получили, что каждое решение задачи (3.29), (3.30) при $t \geq 0$ удовлетворяет соотношению

$$\|x(t)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(t)}.$$

Пусть теперь $t < 0$. Обозначим $\tau = -t$ и определим $\widetilde{x}(\tau) = x(-\tau) = x(t)$, $\widetilde{F}(\tau, x) = -F(-\tau, x) = -F(t, x)$, $\beta(\tau) = \alpha(-t)$. Ясно, что мультиотображение $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям, аналогичным указанным выше.

Рассмотрим теперь задачу о существовании решений, удовлетворяющих приведенной выше оценке (3.39) для дифференциального включения следующего вида:

$$\widetilde{x'}(\tau) \in \widetilde{F}(\tau, \widetilde{x}(\tau)). \tag{3.44}$$

Ясно, что любое решение включения (3.44) на $[0, +\infty)$ определяет решение включения (3.29) на $(-\infty, 0]$. Функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является направляющим потенциалом для включения (3.44) вдоль функции g. Действительно, для всех $\widetilde{y} \in \widetilde{F}(\tau, x)$, $g(\tau)\|x\| = g(t)\|x\| \geq r_0$ в силу определения 3.2.1

и четности функции $g(\cdot)$ имеем

$$\langle \nabla V(x), g'(\tau)x + g(\tau)\widetilde{y}\rangle = \langle \nabla V(x), -g'(-\tau)x + g(-\tau)\widetilde{y}\rangle =$$

$$= -\langle \nabla V(x), g'(-\tau)x + g(-\tau)y\rangle = -\langle \nabla V(x), g'(t)x + g(t)y\rangle \geq 0,$$

где $y = -\widetilde{y} \in F(-\tau, x) = F(t, x)$.

Таким образом, все рассуждения пункта (i) справедливы для включения (3.44) и получаем решения включения (3.44), удовлетворяющие оценке

$$\|\widetilde{x}(\tau)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(\tau)}, \quad \tau > 0.$$

а, следовательно, для решений включения (3.29) имеем аналогичную оценку для $t = -\tau < 0$.

Таким образом, каждое решение задачи (3.29), (3.30) определено на всей числовой прямой и удовлетворяет оценке (3.34).

(ii) Рассмотрим теперь случай, когда V является обобщенным направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции g.

Ограничимся рассмотрением только случая, когда $t > 0$. Случай, когда $t < 0$ рассматривается аналогично.

Определим мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ следующим образом

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma(x)\nabla V(x), g'(t)x + g(t)y\rangle \geq 0\},$$

где $\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ g(t)\|x\| \leq r_0, \\ 1, & \text{если } \ g(t)\|x\| > r_0. \end{cases}$

Нетрудно видеть, что B является замкнутым мультиотображением.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение следующего вида

$$x'(t) \in F_B(t, x(t)) = F(t, x(t)) \cap B(x(t)). \tag{3.45}$$

Как нетрудно видеть, правая часть дифференциального включения (3.45) удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста ([§1.2; **26**]).

Отметим, что для дифференциального включения (3.45) оценка (3.31) будет выполняться уже для всех $y \in F_B(t,x)$ и каждое решение дифференциального включения (3.45) является решением дифференциального включения (3.29).

Следовательно, функция V является направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции g. Тогда, ввиду шага (i), каждое решение задачи Коши (3.45), (3.30) удовлетворяет оценке (3.34). Поэтому найдется по крайней мере одно решение задачи Коши (3.29), (3.30), удовлетворяющее оценке (3.34). □

Распространим теперь предложенный подход на негладкий случай. Для исследования поставленной задачи будем использовать следующую модификацию понятия направляющего потенциала.

Определение 3.2.2. Регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *негладким направляющим потенциалом* для включения (3.29) вдоль функции $g(\cdot)$, если найдется такое $r_0 > 0$, что условие $g(t)\|x\| \geq r_0,\ t \in \mathbb{R}$ влечет

$$\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \rangle \geq 0, \quad \text{если } t > 0;$$

$$\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \rangle \leq 0, \quad \text{если } t < 0;$$

для всех $y \in F(t,x),\ \upsilon \in \partial V(g(t)x)$.

Замечание 3.2.3. Без ограничения общности будем считать

$$r_0 > g(0)\|x_0\|.$$

Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является негладким направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции $g(\cdot)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.2. *Если выполнено условие коэрцитивности (3.33), то каждое решение задачи Коши (3.29), (3.30) удовлетворяет оценке*

$$\|x(t)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.46}$$

для некоторого $k > 0$.

Замечание 3.2.4. Коэффициент k может быть задан следующим образом. Положим

$$V_0 := \inf\{V(x),\ \|x\| \leq r_0\}. \tag{3.47}$$

В силу условия коэрцитивности (3.33) найдется $k > r_0$ такое, что

$$V(x) < V_0,\ \|x\| \geq k. \tag{3.48}$$

Доказательство. **(i)** Рассмотрим сначала случай $t \geq 0$. Разобьем интервал $[0, +\infty)$ на компактные промежутки $[0, t_1], [t_1, t_2],\ ..., [t_n, t_{n+1}],\ ...(n \in N)$. В силу теоремы 3.2.6 и леммы 3.2.7 (см. [12]) множество всех решений задачи (3.29), (3.30) на промежутке $[0, t_1]$ непусто и ограничено. Возьмем произвольное решение $x(\cdot)$ задачи (3.29), (3.30) на промежутке $[0, t_1]$. Взяв в качестве начальной точки $x(t_1)$, найдем решение включения (3.29) на промежутке $[t_1, t_2]$ и так далее. В итоге получим, что все решения задачи (3.29), (3.30) продолжимы на промежуток $[0, \infty)$ и их множество непусто.

Пусть $x(\cdot)$ - некоторое решение задачи (3.29), (3.30) на промежутке $[0, +\infty)$.

В силу непрерывности функции $t \to g(t)\|x(t)\|$, учитывая замечание 3.2.3, можем указать наибольшее $\tau_1 > 0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq r_0 < k,\ t \in [0, \tau_1). \tag{3.49}$$

Если $\tau_1 = +\infty$, то

$$\|x(t)\| < k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in [0, +\infty) \tag{3.50}$$

и утверждение доказано.

Если $\tau_1 < +\infty$, то оценка (3.49) справедлива только на конечном промежутке.

Покажем, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq k,\ t \in [0, +\infty). \tag{3.51}$$

В предположении противного найдется $\tau_2 > \tau_1$ такое, что

$$g(\tau_2)\|x(\tau_2)\| > k. \tag{3.52}$$

Из (3.49) и (3.52) следует существование $\tau_1 < \tau_* < \tau_2$, при котором

$$g(\tau_*)\|x(\tau_*)\| = k. \tag{3.53}$$

Пусть

$$\tau_1' := \sup\{\tau \in [\tau_1, \tau_*),\ g(\tau)\|x(\tau)\| = r_0\},$$

следовательно,

$$g(\tau_1')\|x(\tau_1')\| = r_0$$

и

$$g(t)\|x(t)\| \geq r_0 \quad \text{для всех} \quad t \in [\tau_1', \tau_*]. \tag{3.54}$$

В силу (3.47), получаем следующую оценку

$$V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geq V_0. \tag{3.55}$$

Так как регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является негладким направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции $g(\cdot)$, то, учитывая оценку (3.54) и применяя лемму 3.1.1, получим

$$V(g(\tau_*)x(\tau_*)) - V(g(\tau_1')x(\tau_1')) = \int_{\tau_1'}^{\tau_*} V^0(g(t)x(t), g'(t)x(t) + g(t)x'(t))dt \geq$$

$$\geq \int_{\tau_1'}^{\tau_*} \langle v(t), g'(t)x(t) + g(t)x'(t)\rangle \, dt \geq 0,$$

где $\upsilon(\cdot)$ является произвольным суммируемым сечением мультифункции $t \multimap \partial V(g(t)x(t))$ на отрезке $[\tau_1', \tau_*]$.

Отсюда и из соотношений (3.48), (3.53) и (3.55) имеем

$$V_0 > V(g(\tau_*)x(\tau_*)) \geq V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geq V_0.$$

Это противоречие и доказывает справедливость оценки (3.51).

Таким образом, получили, что каждое решение задачи (3.29), (3.30) при $t \geq 0$ удовлетворяет соотношению

$$\|x(t)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(t)}.$$

(ii) Пусть теперь $t < 0$. Обозначим $\tau = -t$ и определим $\widetilde{x}(\tau) = x(-\tau) = x(t)$, $\widetilde{F}(\tau, x) = -F(-\tau, x) = -F(t, x)$, $\beta(\tau) = \alpha(-t)$. Ясно, что мультиотображение $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяет условиям, аналогичным указанным выше.

Будем рассматривать теперь задачу о существовании решений, удовлетворяющих приведенной выше оценке (3.51), для дифференциального включения следующего вида:

$$\widetilde{x}'(\tau) \in \widetilde{F}(\tau, \widetilde{x}(\tau)). \tag{3.56}$$

Ясно, что любое решение включения (3.56) на $[0, +\infty)$ определяет решение включения (3.29) на $(-\infty, 0]$. Функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является негладким направляющим потенциалом для включения (3.56). Действительно, для всех $\widetilde{y} \in \widetilde{F}(\tau, x)$, $\upsilon \in \partial V(g(\tau)x)$, $g(\tau)\|x\| = g(t)\|x\| \geq r_0$ в силу определения 3.2.2 и четности функции $g(\cdot)$, имеем

$$\langle \upsilon, g'(\tau)x + g(\tau)\widetilde{y} \rangle = \langle \upsilon, -g'(-\tau)x + g(-\tau)\widetilde{y} \rangle =$$

$$= -\langle \upsilon, g'(-\tau)x + g(-\tau)y \rangle = -\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \rangle \geq 0,$$

где $y = -\widetilde{y} \in F(-\tau, x) = F(t, x)$.

Таким образом, все рассуждения пункта (i) справедливы для включения (3.56) и получаем решения включения (3.56), удовлетворяющие оценке

$$\|\widetilde{x}(\tau)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(\tau)}, \quad \tau > 0,$$

а, следовательно, для решений включения (3.29) имеем аналогичную оценку для $t = -\tau < 0$.

Таким образом, каждое решение задачи (3.29), (3.30) определено на всей числовой прямой и удовлетворяет оценке (3.46). □

Пример 3.2.1. Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет следующий вид:

$$V(x) = -\frac{\|x\|^2}{2} + \widetilde{V}(x),$$

где $\widetilde{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная функция такая, что V удовлетворяет условию коэрцитивности (3.33). Ясно, что V является регулярной функцией и

$$\partial V(x) = -x + \partial\widetilde{V}(x)$$

(см. [31], Следствие 3 из теоремы 2.3.3).

Возьмем теперь функцию $g(t) = 1 + t^2$ и пусть для некоторого $r_0 > 0$ при $g(t)\|x\| \geq r_0$ для всех $y \in F(t,x)$ и $\tilde{v} \in \partial\widetilde{V}(g(t)x)$ выполнены условия:

(i) при $t > 0$:

H1) $\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \langle \tilde{v}, y \rangle$.

H2) $\langle \tilde{v}, y \rangle \leq \langle \tilde{v}, x \rangle$;

(ii) при $t < 0$ пусть выполнено условие $(H2)$ и условие

H1') $\langle x, y \rangle \geq \|x\|^2 \geq \frac{1}{1+t^2} \langle \tilde{v}, y \rangle$.

Покажем, что при выполнении вышеуказанных условий функция V является негладким направляющим потенциалом для включения (3.29) вдоль функции $g(\cdot)$.

Отметим, что каждое $\upsilon \in \partial V(g(t)x)$ имеет вид

$$\upsilon = -(1+t^2)x + \tilde{\upsilon},$$

где $\tilde{\upsilon} \in \partial \widetilde{V}(g(t)x)$.

Тогда для любых $g(t)\|x\| \geq r_0, y \in F(t,x)$ и $\upsilon \in \partial V(g(t)x)$ получаем:

$$\Phi(x,y,\upsilon) := \langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \rangle = \left\langle -(1+t^2)x + \tilde{\upsilon}, 2tx + (1+t^2)y \right\rangle =$$

$$= 2t \langle \tilde{\upsilon}, x \rangle + (1+t^2) \langle \tilde{\upsilon}, y \rangle - 2t(1+t^2)\|x\|^2 - (1+t^2)^2 \langle x, y \rangle .$$

Если теперь $t > 0$, то, согласно $(H1), (H2)$, получаем;

$$\Phi(x,y,\upsilon) \geq (1+t)^2 \langle \tilde{\upsilon}, y \rangle - (1+t^2)(1+t)^2 \|x\|^2 \geq$$

$$\geq (1+t)^2 \left[\langle \tilde{\upsilon}, y \rangle - \langle \tilde{\upsilon}, y \rangle \right] = 0$$

и, следовательно, первое условие определения 3.2.2 выполнено.

Если же $t < 0$, то используя $(H1'), (H2)$, имеем:

$$\Phi(x,y,\upsilon) \leq (1+t)^2 \langle \tilde{\upsilon}, y \rangle - (1+t^2) \left[2t\|x\|^2 + (1+t^2) \langle x, y \rangle \right] \leq$$

$$\leq (1+t)^2 \langle \tilde{\upsilon}, y \rangle - (1+t)^2 (1+t^2) \|x\|^2 \leq 0$$

и, таким образом, второе условие определения 3.2.2 также выполнено.

Следовательно, каждое решение задачи (3.29), (3.30) удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leq \frac{k}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $k > 0$.

3.2.2 Случай невыпуклой почти полунепрерывной снизу правой части

Будем рассматривать задачу о существовании решений, удовлетворяющих приведенной выше оценке (3.28), для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x(t)), \tag{3.57}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3.58}$$

в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям почти полунепрывности снизу и подлинейного роста.

Замечание 3.2.5. При выполнении условий (F_{1_∞}) и (F_{2_∞}) определен на каждом компактном интервале $I \in \mathbb{R}$ мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F \,:\, C(I; \mathbb{R}^n) \multimap P(L^1(I; \mathbb{R}^n)),$$

сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $t \multimap F(t, x(t))$. Известно (см., например, [119]), что этот мультиоператор пн. сн. и имеет замкнутые разложимые значения (см. [§1.1; **11**]). Следовательно, согласно [§1.2; **22**]), мультиоператор $\mathcal{P}_F$ имеет непрерывное сечение.

Определение 3.2.3. Регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *негладким направляющим потенциалом* для включения (3.57) вдоль функции $g(\cdot)$, если найдется такое $r_0 > 0$, что условие $g(t)\|x\| \geq r_0,\ t \in \mathbb{R}$, влечет

$$\langle v, g'(t)x + g(t)y\rangle \geq 0, \quad \text{если } t > 0;$$

$$\langle v, g'(t)x + g(t)y\rangle \leq 0, \quad \text{если } t < 0;$$

для всех $y \in F(t, x),\ v \in \partial V(g(t)x)$.

Замечание 3.2.6. Без ограничения общности будем считать

$$r_0 > g(0)\|x_0\|.$$

Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является негладким направляющим потенциалом для включения (3.57) вдоль функции $g(\cdot)$.

Теорема 3.2.3. *Если выполнено условие коэрцитивности (3.33), то каждое решение задачи Коши (3.57), (3.58) удовлетворяет оценке*

$$\|x(t)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.59}$$

для некоторого $k > 0$.

Замечание 3.2.7. Коэффициент k может быть задан следующим образом. Положим

$$V_0 := \inf\{V(x),\ \|x\| \leq r_0\}. \tag{3.60}$$

В силу условия (3.33) найдется $k > r_0$ такое, что

$$V(x) < V_0,\ \|x\| \geq k. \tag{3.61}$$

Доказательство. **(i)** Рассмотрим сначала случай $t \geq 0$. Разобьем интервал $[0, +\infty)$ на компактные промежутки $[0, t_1], [t_1, t_2],\ ..., [t_n, t_{n+1}],\ ...(n \in N)$. Рассмотрим промежуток $[0, t_1]$. Тогда мультиотображение $F : [0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 3.2.17 (см. [12]) и множество всех решений задачи (3.57), (3.58) на промежутке $[0, t_1]$ непусто и в силу леммы Гронуолла ограничено. Возьмем произвольное решение $x(\cdot)$ задачи (3.57), (3.58) на промежутке $[0, t_1]$. Взяв в качестве начальной точки $x(t_1)$, найдем решение включения (3.57) на промежутке $[t_1, t_2]$ и так далее. В итоге получим, что все решения задачи (3.57), (3.58) продолжимы на промежуток $[0, \infty)$ и их множество непусто.

Пусть $x(\cdot)$ - некоторое решение задачи (3.57), (3.58) на промежутке $[0,+\infty)$.

В силу непрерывности функции $t \to g(t)\|x(t)\|$, учитывая замечание 3.2.6, можно указать наибольшее $\tau_1 > 0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq r_0 < k,\ t \in [0,\tau_1). \tag{3.62}$$

Если $\tau_1 = +\infty$, то

$$\|x(t)\| < k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in [0,+\infty) \tag{3.63}$$

и утверждение доказано.

Если $\tau_1 < +\infty$, то оценка (3.62) справедлива только на конечном промежутке.

Покажем, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq k,\ t \in [0,+\infty). \tag{3.64}$$

В предположении противного найдется $\tau_2 > \tau_1$ такое, что

$$g(\tau_2)\|x(\tau_2)\| > k. \tag{3.65}$$

Из (3.62) и (3.65) следует существование $\tau_1 < \tau_* < \tau_2$, при котором

$$g(\tau_*)\|x(\tau_*)\| = k. \tag{3.66}$$

Пусть

$$\tau_1' := \sup\{\tau \in [\tau_1,\tau_*),\ g(\tau)\|x(\tau)\| = r_0\},$$

следовательно,

$$g(\tau_1')\|x(\tau_1')\| = r_0$$

и

$$g(t)\|x(t)\| \geq r_0 \quad \text{для} \quad t \in [\tau_1',\tau_*]. \tag{3.67}$$

В силу (3.60), получаем следующую оценку

$$V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geq V_0. \tag{3.68}$$

Так как регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является негладким направляющим потенциалом для включения (3.57) вдоль функции $g(\cdot)$, то, учитывая оценку (3.67) и применяя лемму 3.1.1, получим

$$V(g(\tau_*)x(\tau_*)) - V(g(\tau_1')x(\tau_1')) = \int_{\tau_1'}^{\tau_*} V^0(g(t)x(t), g'(t)x(t) + g(t)x'(t))dt \geq$$

$$\geq \int_{\tau_1'}^{\tau_*} \langle v(t), g'(t)x(t) + g(t)x'(t) \rangle \, dt \geq 0,$$

где $v(\cdot)$ является произвольным суммируемым сечением мультифункции $t \multimap \partial V(g(t)x(t))$ на отрезке $[\tau_1', \tau_*]$.

Отсюда и из соотношений (3.61), (3.66) и (3.68) имеем

$$V_0 > V(g(\tau_*)x(\tau_*)) \geq V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geq V_0.$$

Это противоречие и доказывает справедливость оценки (3.64).

Таким образом, получили, что каждое решение задачи (3.57), (3.58) при $t \geq 0$ удовлетворяет соотношению

$$\|x(t)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(t)}.$$

(ii) Пусть теперь $t < 0$. Обозначим $\tau = -t$ и определим $\widetilde{x}(\tau) = x(-\tau) = x(t)$, $\widetilde{F}(\tau, x) = -F(-\tau, x) = -F(t, x)$, $\beta(\tau) = \alpha(-t)$. Ясно, что мультиотображение $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям, аналогичным указанным выше.

Будем рассматривать теперь задачу о существовании решений, удовлетворяющих приведенной выше оценке (3.64), для дифференциального включения следующего вида:

$$\widetilde{x}'(\tau) \in \widetilde{F}(\tau, \widetilde{x}(\tau)). \qquad (3.69)$$

Ясно, что любое решение включения (3.69) на $[0, +\infty)$ определяет решение включения (3.57) на $(-\infty, 0]$. Функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является негладким направляющим потенциалом для включения (3.69). Действительно, для всех $\widetilde{y} \in \widetilde{F}(\tau, x)$, $\upsilon \in \partial V(g(\tau)x)$, $g(\tau)\|x\| = g(t)\|x\| \geq r_0$ в силу определения 3.2.3 и четности функции $g(\cdot)$, имеем

$$\langle \upsilon, g'(\tau)x + g(\tau)\widetilde{y} \rangle = \langle \upsilon, -g'(-\tau)x + g(-\tau)\widetilde{y} \rangle =$$

$$= - \langle \upsilon, g'(-\tau)x + g(-\tau)y \rangle = - \langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \rangle \geq 0,$$

где $y = -\widetilde{y} \in F(-\tau, x) = F(t, x)$.

Таким образом, все рассуждения пункта (i) справедливы для включения (3.69) и получаем решения включения (3.69), удовлетворяющие оценке

$$\|\widetilde{x}(\tau)\| \leq k \cdot \frac{1}{g(\tau)}, \quad \tau > 0,$$

а, следовательно, для решений включения (3.57) имеем аналогичную оценку для $t = -\tau < 0$.

Таким образом, каждое решение задачи (3.57), (3.58) определено на всей числовой прямой и удовлетворяет оценке (3.59). $\square$

3.2.3 Случай нормальной правой части

В заключении рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{3.70}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.71}$$

в предположении, что $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным мультиотображением, удовлетворяющим условию подлинейного роста.

Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является направляющим потенциалом для включения (3.70) вдоль функции g.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.4. *Если выполнено условие коэрцитивности* (3.33)*, то найдется по крайней мере одно решение задачи Коши* (3.70), (3.71)*, удовлетворяющее оценке (3.34).*

Доказательство. Пусть F является нормальным квазисечением мультиотображения R.

В силу пункта (iii) определения нормального мультиотображения [§1.2; **28**] достаточно доказать существование по крайней мере одного решения задачи Коши

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{3.72}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.73}$$

удовлетворяющего оценке (3.34).

Действительно, для всех $t \in \mathbb{R}$, $g(t)\|x\| \geq r_0$, существует $y \in F(t, x) \cap R(t, x)$ такое, что

$$\langle \nabla V(x), g'(t)x + g(t)y \rangle \geq 0 \quad \text{если} \;\; t > 0;$$

$$\langle \nabla V(x), g'(t)x + g(t)y \rangle \leq 0 \quad \text{если} \;\; t < 0.$$

Поэтому V является обобщенной направляющей функцией для включения (3.72) вдоль функции g. Тогда утверждение следует из теоремы 3.2.1. $\square$

Ввиду [§1.2; **31**] справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.2.1. *Пусть правая часть дифференциального включения (3.70) является мультиотображением* $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющим условиям Каратеодори. Если* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является направляющим потенциалом для включения* (3.70) *вдоль функции* g, *то найдется по крайней мере одно решение соответствующей задачи Коши, удовлетворяющее оценке (3.34).*

Глава 4

Метод интегральных направляющих функций

4.1 Периодическая задача

4.1.1 Интегральная направляющая функция для случая выпуклой правой части

Для $\tau > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $\mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Для функции $x(\cdot) \in \mathcal{C}([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$, $T > 0$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Сначала будем рассматривать периодическую задачу для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x_t) \quad \text{п.в.} \;\; t \in [0, T], \tag{4.1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.2}$$

предполагая, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет указанным ниже условиям:

$F_t)$ мультифункция F по первому аргументу T-периодична:

$$F(t, \varphi) = F(t + T, \varphi) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C};$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение F заданным на $[0,T]\times\mathcal{C}$);

F_1) для каждого $\varphi\in\mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot,\varphi):[0,T]\to Kv(\mathbb{R}^n)$ допускает измеримое сечение [§1.2; **25**];

F_2) почти для каждого $t\in[0,T]$ мультиотображение
$F(t,\cdot):\mathcal{C}\to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху [§1.2; **16**];

F_3) для любого ограниченного подмножества $\Omega\subset\mathcal{C}$ существует функция $\alpha_\Omega(\cdot)\in L^1_+[0,T]$ такая, что для каждого $\varphi\in\Omega$

$$\|F(t,\varphi)\|:=\max_{y\in F(t,\varphi)}\|y\|\le\alpha_\Omega(t)$$

п.в. $t\in[0,T]$.

Замечание 4.1.1. Для выполнения условия (F_1) достаточно, чтобы для каждого $\varphi\in\mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot,\varphi)$ была измерима [§1.2; **24**].

Замечание 4.1.2. При выполнении условий (F_1) – (F_3) определен мультиоператор суперпозиции $P_F\ :\ C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)\multimap L^1([0,T];\mathbb{R}^n)$, сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F(t,x_t)$. Известно, что этот мультиоператор замкнут [§1.2; **18, 27**].

Для изучении задачи (4.1), (4.2) будем использовать теорию топологической степени совпадения пары отображений, изложенную в п. 2.4.

Обозначим C_T — пространство непрерывных T-периодических функций $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве L^2, $\|x\|_2=\left(\int\limits_0^T\|x(s)\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$.

Развивая понятия, введенные в [40, 95], дадим следующие определения.

Определение 4.1.1. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *невырожденным потенциалом*, если найдется $K > 0$ такое, что

$$\nabla V(x) \neq 0,$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq K$.

Замечание 4.1.3. Заметим, что из определения невырожденного потенциала V вытекает, что на каждом замкнутом шаре $B_{\widetilde{K}} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $\widetilde{K} \geq K$ топологическая степень градиента $\deg(\nabla V; B_{\widetilde{K}})$ корректно определена и, более того, ее значения не зависят от радиуса $\widetilde{K}$. Это общее значение степени называется индексом на бесконечности $\mathrm{ind}\,(V, \infty)$ невырожденного потенциала V.

Определение 4.1.2. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *строгой интегральной направляющей функцией* задачи (4.1), (4.2), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds > 0$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$, где $f(s) \in F(s, x_s)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1.1. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – строгая интегральная направляющая функция задачи (4.1), (4.2) такая, что*

$$\mathrm{ind}\,(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.1), (4.2) имеет решение.

Замечание 4.1.4. (см. [40]). Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция V четна, или $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = \pm\infty$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.4.3. Рассмотрим следующие операторы:

$$l \,:\, \operatorname{dom} l := \{x \in C_T \,:\, x \text{ — абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$l(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции $G = P_F \,:\, C_T \multimap P(L^1_T)$.

Легко видеть, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\operatorname{Ker} l = \mathbb{R}^n$. Проекция $\pi \,:\, L^1_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задана формулой $\pi f = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\,ds$. Нетрудно проверить, что мультиоператоры $\pi \circ G$ и $k_{p,q} \circ G$ выпуклозначны и компактны.

Отметим, что для $\lambda \in (0,1)$ решение $x \in \operatorname{dom} l$ включения $l(x) \in \lambda G(x)$ удовлетворяет задаче

$$x'(t) \in \lambda F(t, x_t) \quad \text{п.в. } \ t \in [0,T],$$

$$x(0) = x(T).$$

Это означает, что $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0,T]$, $f \in P_F(x)$.

Тогда

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s)\rangle\, ds = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), x'(s)\rangle\, ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^T V'(x(s))\, ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

откуда следует, что

$$\|x\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия (F_3) вытекает, что $\|x'\|_2 < M'$, где $M' > 0$. Но тогда найдется и $M > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda G(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из определения строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds > 0$$

для любого измеримого сечения $f(s) \in F(s, u)$. Но

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds = \langle \nabla V(u), \int_0^T f(s) \, ds \rangle = T \langle \nabla V(u), \pi f \rangle > 0,$$

и, таким образом,

$$\langle \nabla V(u), y \rangle > 0$$

для любого $y \in \pi G(u)$.

Это значит, что $0 \notin \pi G(u)$ для $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ и

$$\deg(\pi G\big|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) = \deg(\nabla V, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$. Таким образом, все условия теоремы 2.4.3 выполнены, и задача (4.1), (4.2) имеет решение. $\square$

Пример 4.1.1. *Дифференциальные включения с запаздыванием.*

Рассмотрим периодическую задачу для дифференциального включения с запаздыванием

$$x'(t) \in F(t, x(t - \tau)) \quad \text{п.в. } \ t \in [0, T] \tag{4.3}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.4}$$

где мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ по первому аргументу T-периодично, мультифункция $F(\cdot, x) : \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ обладает измеримым сечением для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, а мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху п.в. $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.1.2. *Пусть найдутся* $\overline{N} > 0$ *и* $C > 0$ *такие, что*

$$\langle x, y \rangle \geq C$$

для всех x, $\|x\| \geq \overline{N}$ *и* $y \in F(t,x)$. *Если мультиотображение* F *ограничено:*

$$\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leq M$$

и $C - \tau M^2 > 0$, *то задача (4.3), (4.4) имеет решение.*

Доказательство. Покажем, что $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ является строгой интегральной направляющей функцией для задачи (4.3), (4.4). Действительно, для достаточно большого $N > 0$ условия $\|x'(t)\| \leq M$ п.в. $t \in [0,T]$ и $\|x\|_2 \geq N$ будут влечь $\|x(t)\| \geq \overline{N}$ при всех $t \in [0,T]$ для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot) \in C_T$. Но тогда для такой функции $x(\cdot)$ имеем для произвольного суммируемого сечения $f(t) \in F(t, x(t-\tau))$:

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds = \int_0^T \langle x(s), f(s) \rangle \, ds =$$

$$= \int_0^T \langle x(s-\tau), f(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle x(s) - x(s-\tau), f(s) \rangle \, ds =$$

$$= \int_0^T \langle x(s-\tau), f(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle \int_{s-\tau}^s x'(s) \, ds, f(s) \rangle \, ds \geq$$

$$\geq CT - \tau M^2 T = (C - \tau M^2) T > 0.$$

□

Пример 4.1.2. *Полулинейные функционально-дифференциальные включения.*

Рассмотрим следующую периодическую задачу

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t, x_t) \tag{4.5}$$

$$x(0) = x(T). \tag{4.6}$$

Здесь мультиотображение $F : \mathbb{R} \times C \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям (F_t), (F_1)–(F_3), а $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор.

Теорема 4.1.3. *Пусть квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ удовлетворяет для некоторого $\varepsilon > 0$ условию*

$$\langle Ax, x\rangle \geq \varepsilon \|x\|^2$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Если

$$\overline{\lim_{\|x\|_2 \to +\infty}} \frac{\|P_F(x)\|_2}{\|x\|_2} < \varepsilon,$$

для всех абсолютно непрерывных $x \in C_T$, где P_F – оператор суперпозиции, порожденный F, а

$$\|P_F(x)\|_2 = \sup_{f \in P_F(x)} \|f\|_2,$$

то задача (4.5), (4.6) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ является строгой интегральной направляющей функцией задачи (4.5), (4.6). Действительно, для произвольного $f \in P_F(x)$ имеем

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), Ax(s) + f(s)\rangle \, ds =$$

$$\int_0^T \langle Ax(s), x(s)\rangle \, ds + \int_0^T \langle x(s), f(s)\rangle \, ds \geq$$

$$\geq \varepsilon \|x\|_2^2 - \|x\|_2 \|P_F(x)\|_2 > 0$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$. □

Пример 4.1.3. *Градиентные функционально-дифференциальные включения.*

Рассмотрим периодическую задачу вида

$$x'(t) \in \nabla G(x(t)) + F(t, x_t) \tag{4.7}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.8}$$

где мультиотображение F удовлетворяет условиям (F_t), (F_1)–(F_3), а ∇G – градиент непрерывно дифференцируемой функции $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Теорема 4.1.4. Пусть выполнены условия:

1) найдутся константы $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и $\beta \geq 1$ такие, что

$$\|\nabla G(x)\| \geq \varepsilon \|x\|^{\beta} - K$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

2) $\overline{\lim\limits_{\|x\|_2 \to +\infty}} \dfrac{\|P_F(x)\|_2}{\|x\|_2^{\beta}} < \varepsilon T^{(1-\beta)/2}$ для всех абсолютно непрерывных $x \in C_T$;

3) градиент ∇G имеет ненулевой топологический индекс:

$$\deg(\nabla G, \partial B_N) \neq 0$$

для достаточно больших $N > 0$.

Тогда задача (4.7), (4.8) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что G является строгой интегральной направляющей функцией для задачи (4.7), (4.8). Отметим, что вложение $L^{2\beta} \subset L^2$ дает для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot) \in C_T$ оценку

$$\|\nabla G(x(\cdot))\|_2 \geq \varepsilon \|x\|_{2\beta}^{\beta} - K\sqrt{T} \geq \varepsilon T^{(1-\beta)/2} \|x\|_2^{\beta} - K\sqrt{T}.$$

Но тогда для любого $f \in P_F(x)$ имеем

$$\int_0^T \langle \nabla G(x(s)), \nabla G(x(s)) + f(s) \rangle \, ds \geq$$

$$\geq \|\nabla G(x(\cdot))\|_2 \left(\|\nabla G(x(\cdot))\|_2 - \|f\|_2 \right) \geq$$

$$\geq \|\nabla G(x(\cdot))\|_2 \left(\|\nabla G(x(\cdot))\|_2 - \|P_F(x)\|_2 \right) \geq$$

$$\geq \|\nabla G(x(\cdot))\|_2 \left(\varepsilon T^{(1-\beta)/2} - \frac{K\sqrt{T}}{\|x\|_2^{\beta}} - \frac{\|P_F(x)\|_2}{\|x\|_2^{\beta}} \right) \|x\|_2^{\beta} > 0$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$. □

Определение 4.1.3. Невырожденный потенциал $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной интегральной направляющей функцией* для включения (4.1), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds \geq 0 \quad \text{хотя бы для одного} \;\; f \in P_F(x), \tag{4.9}$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

В случае, если соотношение (4.9) выполняется для всех $f \in P_F(x)$, то невырожденный потенциал V называется *интегральной направляющей функцией.*

Замечание 4.1.5. Отметим, что в отличие от определения 4.1.2, здесь условие (4.9) является более общим, что, очевидно, позволяет применять метод обобщенной интегральной направляющей функции к значительно более широкому классу динамических систем.

Теорема 4.1.5. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – обобщенная интегральная направляющая функция задачи (4.1), (4.2) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.1), (4.2) имеет решение.

Доказательство. Определим мультиотображение $B : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \to P(L^1([0, T]; \mathbb{R}^n))$ следующим образом:

$$B(x) =$$

$$= \left\{ \varphi : \; |\varphi(t)| \leq \alpha(t)(1 + \|x_t\|) \text{ и } \gamma(x) \int_0^T \big\langle \nabla V\big(x(s)\big), \varphi(s) \big\rangle \, ds \geq 0 \right\},$$

п.в. $t \in [0, T]$, $\alpha(\cdot)$ – функция из условия подлинейного роста, а

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \; x \in \|x\|_2 \leq N, \\ 1, & \text{если } \; x \in \|x\|_2 > N. \end{cases}$$

Легко видеть, что B является замкнутым мультиотображением [§1.2; **18**].

Определим мультиотображение $P_F^B : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T]; \mathbb{R}^n))$ как

$$P_F^B(x) = P_F(x) \cap B(x).$$

Очевидно, что мультиотображение P_F^B как пересечение замкнутых мультиотображений замкнуто и соотношение (4.9) будет выполняться уже для всех $f \in P_F^B(x)$.

Для невырожденного потенциала V определим отображение $Y_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Y_V(x) = \begin{cases} \nabla V(x), & \text{если } \|\nabla V(x)\| \leq 1, \\ \frac{\nabla V(x)}{\|\nabla V(x)\|}, & \text{если } \|\nabla V(x)\| > 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение Y непрерывно.

Пусть для некоторого $\varepsilon_m > 0$ мультиотображение $G_m : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T]; \mathbb{R}^n))$ задано как

$$G_m(x) = P_F^B(x) + \varepsilon_m Y_V(x).$$

Мультиотображение G_m замкнуто и для каждого $\varepsilon_m > 0$ соотношение (4.9) будет выполняться уже не только для всех $g \in G_m(x)$, но и в строгой форме. Тогда, повторяя рассуждения, агналогичные доказательству теоремы 4.1.1 и используя теорему 2.4.3, устанавливаем разрешимость для каждого $\varepsilon_m > 0$ следующего операторного включения

$$lx \in G_m x,$$

где $l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x$ – абсолютно непрерывна$\} \subset C_T \to L_T^1$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Откуда и вытекает существование решения задачи (4.1), (4.2). $\square$

Следствие 4.1.1. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – *интегральная направляющая функция задачи (4.1), (4.2) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.1), (4.2) имеет решение.

4.1.2 Интегральная направляющая функция для случая невыпуклой почти полунепрерывной снизу правой части

Будем рассматривать теперь периодическую задачу для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x_t) \quad \text{п.в. } t \in [0, T], \tag{4.10}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.11}$$

предполагая, что мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям T-периодичности по первому аргументу и подлинейного роста (F_3) и является почти полунепрерывным снизу [§1.2; **30**].

Замечание 4.1.6. (см. [12]). При выполнении условий (F_L) и (F_3) определен мультиоператор суперпозиции

$$P_F : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \multimap P(L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)),$$

сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F(t, x_t)$. Известно, что этот мультиоператор пн. сн. [§1.2; **17**] и меет замкнутые разложимые значения [§1.1; **11**].

Замечание 4.1.7. В силу теоремы 2.3.1 и замечания 4.1.6 мультиоператор суперпозиции P_F принадлежит классу

$$\mathcal{S}(C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n), L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1.6. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – строгая интегральная направляющая функция задачи (4.10), (4.11) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.10), (4.11) имеет решение.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.4.4. Рассмотрим следующие операторы:

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x \text{ – абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$l(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции $G = P_F : C_T \multimap P(L^1_T)$. Нетрудно проверить, что мультиоператоры $\pi \circ G$ и $k_{p,q} \circ G$ компактны.

Отметим, что для $\lambda \in (0, 1)$ решение $x \in \operatorname{dom}\, l$ включения $l(x) \in \lambda G(x)$ удовлетворяет задаче (4.10), (4.11).

Это означает, что $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0, T]$, $f \in P_F(x)$.

Тогда

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s)\rangle\, ds = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), x'(s)\rangle\, ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^T V'(x(s))\, ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

откуда следует, что

$$\|x\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия (F_3) вытекает, что $\|x'\|_2 < M'$, где $M' > 0$. Но тогда найдется и $M > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda G(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из определения строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds > 0$$

для любого измеримого сечения $f(s) \in F(s, u)$. Но

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds = \langle \nabla V(u), \int_0^T f(s) \, ds \rangle = T \langle \nabla V(u), \pi f \rangle > 0,$$

и, таким образом,

$$\langle \nabla V(u), y \rangle > 0$$

для любого $y \in \pi G(u)$.

Это значит, что $0 \notin \pi G(u)$ для $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ и

$$\deg(\pi G\big|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) = \deg(\nabla V, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$. Таким образом, все условия теоремы 2.4.4 выполнены, и задача (4.10), (4.11) имеет решение. $\square$

При некоторых более общих условиях, чем (4.9), также возможно обосновать принцип сущестования периодического решения.

Теорема 4.1.7. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – интегральная направляющая функция задачи (4.10), (4.11) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.10), (4.11) имеет решение.

Доказательство. Определим, как и в случае выпуклозначной правой части, для невырожденного потенциала V отображение $Y_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Y_V(x) = \begin{cases} \nabla V(x), & \text{если } \|\nabla V(x)\| \leq 1, \\ \frac{\nabla V(x)}{\|\nabla V(x)\|}, & \text{если } \|\nabla V(x)\| > 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение Y непрерывно.

Пусть для некоторого $\varepsilon_m > 0$ мультиотображение $G : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \to P(L^1([0, T]; \mathbb{R}^n))$ задано как

$$G(x) = P_F(x) + \varepsilon_m Y_V(x).$$

Из свойств мультиотображений [§1.2; **20**] вытекает, что $G(x)$ является пн. сн. мультиотображением, имеющим, очевидно, замкнутые разложимые значения.

Нетрудно проверить, что для каждого $\varepsilon_m > 0$ соотношение (4.9) будет выполняться уже в строгой форме. Тогда, повторяя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4.1.6 и используя теорему 2.4.4, устанавливаем разрешимость для каждого $\varepsilon_m > 0$ следующего опрераторного включения

$$lx \in Gx,$$

где $l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x$ – абсолютно непрерывна$\} \subset C_T \to L^1_T$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Откуда, и вытекает, существование решения задачи (4.10), (4.11). $\square$

4.1.3 Интегральная направляющая функция для случая нормальной правой части

Будем рассматривать теперь периодическую задачу для функционально-дифференциального включения (4.10), (4.11) в предположении, что $R : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным мультиотображением [§1.2; **31**] и удовлетворяет условию T-периодичности по первому аргументу.

Определение 4.1.4. Невырожденный потенциал $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *интегральной направляющей функцией* для включения (4.10), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds \geq 0 \quad \text{для всех} \;\; f \in P_R(x), \tag{4.12}$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|R(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Теорема 4.1.8. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – интегральная направляющая функция задачи (4.10), (4.11) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.10), (4.11) имеет решение.

Доказательство. Предположим, что мультиотображение F является квазисечением мультиотображения R в следующем смысле:

(j) мультиотображение $F : [0, T] \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(jj) $P_F(\varphi) \cap P_R(\varphi) \neq \emptyset$ для всех $\varphi \in \mathcal{C}$;

(jjj) каждое решение $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$x'(t) \in F(t, x_t), \tag{4.13}$$

$$z(0) = z(T), \tag{4.14}$$

является решением исходной задачи (4.10), (4.11).

В силу (jjj) достаточно показать, что задача (4.13), (4.14) имеет решение.

Из условия (jj) следует, что $P_F(\varphi) \cap P_R(\varphi) \neq \emptyset$ для всех $\varphi \in \mathcal{C}$.

Нетрудно проверить, что функция V является обобщенной интегральной направляющей функцией для включения (4.13) в смысле определения 4.1.3. Из теоремы 4.1.5 тогда следует, что задача (4.13), (4.14) имеет T-периодическое решение. Следовательно, имеет решение и исходная задача (4.10), (4.11). $\square$

Следствие 4.1.2. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– строгая интегральная направляющая функция задачи (4.10), (4.11) такая, что* $\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0$. *Тогда задача (4.10), (4.11) имеет решение.*

4.1.4 Интегральная направляющая функция для случая каузальной правой части

Случай выпуклозначного каузального мультиоператора

Обозначим L^1_T пространство суммируемых T-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. В этом разделе предполагаем, что T-периодический каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : C_T \to Cv(L^1_T)$ имеет выпуклые значения и удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{Q}1$) для любого ограниченного линейного оператора $A : L^1_T \to E$, где E – банахово пространство, композиция $A \circ \mathcal{Q} : C_T \to Cv(E)$ – замкнутый мультиоператор;

($\mathcal{Q}2$) существует неотрицательная T-периодическая суммируемая функция $\alpha(t)$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}(x)(t)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x(t)\|) \text{ п.в. } t \in \mathbb{R},$$

для каждой функции $x \in C_T$.

Для обеспечения условия ($\mathcal{Q}1$) в примерах 1 и 2 [§1.2; **33**] достаточно предполагать, что помимо вышеуказанных условий периодичности, мультиотображение F удовлетворяет условиям ($F1$) – ($F3$) (см. [12], теорема 1.5.30), а для выполнения условия ($\mathcal{Q}2$) можем предположить в примере 1 выполненным условие подлинейного роста, а в примере 2 следующее условие глобальной интегральной ограниченности

$$\|F(t, c)\| \leq \gamma(t) \text{ п.в. } t \in [0, T],$$

для некоторой неотрицательной суммируемой функции $\gamma(t)$.

Периодическая задача формулируется следующим образом:

Для данного T-периодического каузального мультиоператора $\mathcal{Q}$ найти решение следующего операторного включения:

$$x' \in \mathcal{Q}(x), \tag{4.15}$$

где $x \in C_T$ - абсолютно непрерывная функция.

Для изучения периодической задачи (4.15) будем использовать теорию степени совпадения для линейного фредгольмова оператора и многозначного отображения, развитую в п. 2.4.

Определение 4.1.5. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *строгой интегральной направляющей функцией* для включения (4.15), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s)\rangle \, ds > 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{Q}(x), \tag{4.16}$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Теорема 4.1.9. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - строгая интегральная направляющая функция задачи (4.15) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.15) имеет решение.

Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция V четна или удовлетворяет условию коэрцитивности: $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = \pm\infty$.

Доказательство. Сведем задачу к теореме 2.4.3, обосновав разрешимость следующего операторного включения

$$lx \in \mathcal{Q}(x), \tag{4.17}$$

где $l\,:\mathrm{dom}\,l := \{x \in C_T\,:\,x$ абсолютно непрерывна$\} \subset C_T \to L^1_T$ - линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда $\mathrm{Ker}\,l = \mathbb{R}^n$, проекция $\pi\,:\,L^1_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задана формулой $\pi f = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\,ds$ и мультиоператоры $\pi \circ \mathcal{Q}$ и $k_{p,q} \circ \mathcal{Q}$ выпуклозначны и компактны на ограниченных подмножествах.

Пусть для некоторого $\lambda \in (0,1]$ функция $x \in \mathrm{dom}\,l$ является решением включения

$$l(x) \in \lambda\mathcal{Q}(x).$$

Это означает, что $x(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0,T]$, для некоторого $f \in \mathcal{Q}(x)$.

Тогда

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s)\rangle\,ds = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), x'(s)\rangle\,ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^T V'(x(s))\,ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

откуда

$$\|x\|_2 < N.$$

Из условия $(\mathcal{Q}2)$ вытекает, что $\|x'\|_2 < M'$, где $M' > 0$. Но тогда найдется и такое $M > 0$, что

$$\|x\|_C < M.$$

Возьмем в качестве U шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda\mathcal{Q}(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Возьмем произвольное $u \in \partial U \cap Ker\,l$. Получаем $\|u\| \geq NT^{-1/2}$ и, рассматривая u как постоянную функцию, из определения строгой интегральной направляющей функции получаем

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds > 0$$

для любого $f \in \mathcal{Q}(u)$.

Но тогда

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds = \langle \nabla V(u), \int_0^T f(s) \, ds \rangle = T \langle \nabla V(u), \pi f \rangle > 0,$$

и, следовательно,

$$\langle \nabla V(u), y \rangle > 0$$

для любого $y \in \pi \mathcal{Q}(u)$.

Это означает, что $0 \notin \pi \mathcal{Q}(u)$ и, более того, мультиполе $\pi \mathcal{Q}(u)$ и поле $\nabla V(u)$ не допускают противоположных направлений для $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$. Это означает, что эти поля гомотопны, что и влечет равенство соответствующих топологических степеней:

$$\deg(\pi \mathcal{Q}\big|_{\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}}, \overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}) = \deg(\nabla V, \overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l} = \overline{U} \cap \mathrm{Ker}\ l$. Таким образом, все условия теоремы 2.4.3 выполнены, и задача (4.17), а, следовательно, и задача (4.15) имеют решение. $\square$

Случай полунепрерывного снизу каузального мультиоператора

Теперь рассмотрим периодическую задачу для класса включений с невыпуклозначными полунепрерывными снизу каузальными мультиоператорами. Именно, будем предполагать, что T-периодический каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : C_T \to P(L^1_T)$ удовлетворяет условию

$(\mathcal{Q}_L)$ $\mathcal{Q}$ пн. сн. и имеет замкнутые разложимые значения

и условию $(\mathcal{Q}2)$.

В качестве примера каузального мультиоператора, удовлетворяющего условиям $(\mathcal{Q}_L)$ и $(\mathcal{Q}2)$ можно рассмотреть суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F$, порожденный T-периодическим по первому аргументу мультиотображением $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющим условию почти пн. сн. (F_L) и условию подлинейного роста.

Теорема 4.1.10. *Пусть $\mathcal{Q} : C_T \to P(L^1_T)$ - T-периодический каузальный мультиоператор, удовлетворяющий условиям $(\mathcal{Q}_L)$ и $(\mathcal{Q}2)$ и $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - строгая интегральная направляющая функция для соответствующей задачи* (4.15) *такая, что*

$$\mathrm{ind}\,(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.15) имеет решение.

Доказательство. Применяя теорему 2.4.4, найдем непрерывное сечение $q : C_T \to L^1_T$ мультиоператора $\mathcal{Q}$. Для отображения q имеем соотношение

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), q(x)(s) \rangle \, ds > 0$$

для каждой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Теперь, применяя "однозначную" версию теоремы 2.4.4 (т.е. заменяя мультиотображение $\mathcal{G}$ непрерывным отображением g) и применяя аналогичные рассуждения, получим решение x следующего уравнения

$$l(x) = q(x),$$

которое является решением задачи (4.15). $\square$

4.1.5 Негладкая интегральная направляющая функция для случая выпуклой правой части

Обобщим полученные ранее результаты на случай негладких интегральных направляющих функций.

Будем рассматривать сначала периодическую задачу (4.1), (4.2) для функционально-дифференциального включения, предполагая, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодично по первому аргументу.

Напомним, что при выполнении указанных выше условий определен мультиоператор суперпозиции

$$P_F : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1([0, T]; \mathbb{R}^n),$$

сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F(t, x_t)$ (см. замечание 4.1.2).

Определение 4.1.6. Локально липшицеву функцию $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ назовем *строгой негладкой интегральной направляющей функцией* задачи (4.1), (4.2), если найдется $N > 0$ такое, что для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ с $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$ выполняется следующее условие

$$\int_0^T \langle v(s), f(s) \rangle \, ds > 0$$

для каждого суммируемого сечения $v(s) \in \partial V(x(s))$ и $f(s) \in F(s, x_s)$ [§1.2; **25, 26**].

По аналогии с гладким случаем, если функция V является невырожденным потенциалом, то топологическая степень многозначного векторного поля ∂V корректно определена и, более того, ее значения не зависят от радиуса шара $B_{K'}$ с центром в нуле и радиуса $K' \geq K$ (см., например, [12, 100, 119])). Это общее значение степени также называют индексом на бесконечности $\operatorname{ind}(V, \infty)$ негладкого невырожденного потенциала V.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1.11. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– регулярная* [§1.2; **36**] *строгая негладкая интегральная направляющая функция задачи (4.1), (4.2) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.1), (4.2) имеет решение.

Замечание 4.1.8. (см. [23]). Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция V четна, или $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = \pm\infty$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.4.3. Рассмотрим следующие операторы:

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x \text{ – абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$l(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции $G = P_F : C_T \multimap P(L^1_T)$. Легко видеть, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\operatorname{Ker} l = \mathbb{R}^n$. Канонический оператор проектирования $\pi : L^1_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задан в виде

$$\pi f = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Нетрудно проверить, что мультиоператоры $\pi \circ G$ и $k_{p,q} \circ G$ компактны.

Отметим, что для $\lambda \in (0, 1)$ решение $x \in \operatorname{dom} l$ включения $l(x) \in \lambda G(x)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} x'(t) \in \lambda F(t, x_t), \\ x(0) = x(T). \end{cases}$$

Это означает, что $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0, T]$, $f \in P_F(x)$.

Тогда, применяя лемму 3.1.1 и определение обобщенного градиента, получаем

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s) \rangle ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^T \langle \upsilon(s), x'(s) \rangle ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^T V^0(x(s), x'(s)) ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

для каждого суммируемого сечения $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$. Откуда следует, что

$$\|x\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия (F_3) вытекает, что $\|x'\|_2 < M'$, где $M' > 0$. Но тогда найдется и $M > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ с центром в нуле и радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda G(x)$$

для всех $x \in \partial U$, $\lambda \in (0, 1)$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из определения строгой негладкой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s) \rangle ds > 0$$

для каждого измеримого сечения $\upsilon(s) \in \partial V(u)$ и $f(s) \in F(s, u)$. Но, полагая $\upsilon(s) \equiv \upsilon$, получаем

$$\int_0^T \langle \upsilon, f(s) \rangle ds = \langle \upsilon, \int_0^T f(s) ds \rangle = T \langle \upsilon, \pi f \rangle > 0,$$

для всех $\upsilon \in \partial V(u)$ и, следовательно,

$$\langle \upsilon, y \rangle > 0$$

для всех $\upsilon \in \partial V(u)$, $y \in \pi G(u)$.

Это означает, что мультиполя $\partial V(u)$ и $\pi G(u)$ гомотопны на $\partial U \cap \operatorname{Ker} l$, и, следовательно,

$$\deg_{\operatorname{Ker} l}(\pi G\big|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) = \deg(\partial V, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$. Таким образом, все условия теоремы 2.4.3 выполнены, и задача (4.1), (4.2) имеет решение в $\overline{U}$. □

Некоторые более общие условия направляемости также позволяют получить принцип существования периодического решения. Приведем следующее определение.

Определение 4.1.7. Локально липшицева функция $V(x)$ называется прямым потенциалом, если найдется $K > 0$ такое, что

$$\langle \upsilon, \tilde{\upsilon} \rangle > 0$$

для всех $\upsilon, \tilde{\upsilon} \in \partial V(x),\ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq K$.

Если функция $V(x)$ является прямым потенциалом, то с помощью топологической степени многозначных отображений (см., например, [12, 100]) для нее естественным образом определяется топологический индекс на бесконечности $\operatorname{ind}(V, \infty)$.

Определение 4.1.8. Прямой потенциал $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *негладкой интегральной направляющей функцией* для включения (4.1), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s) \rangle \, ds \geq 0 \quad \text{для всех} \;\; f \in P_F(x), \tag{4.18}$$

для всех суммируемых сечений $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$, для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Теорема 4.1.12. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная негладкая интегральная направляющая функция задачи (4.1), (4.2) такая, что*

$$\mathrm{ind}\,(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.1), (4.2) имеет решение.

Доказательство. Для $k \in N$ положим

$$M^k = \sup \left\{ \|\partial V(x)\| : x \in \overline{B}^n(k) \right\},$$

где $\overline{B}^n(k)$ обозначает замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиуса k. Следуя [79], определим отображение $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\eta(x) = 1 + (\|x\| - k)\, M^{k+2} + (k + 1 - \|x\|)\, M^{k+1}, \quad k \leq \|x\| \leq k + 1.$$

Нетрудно видеть, что отображение η непрерывно и удовлетворяет условию

$$\eta(x) \geq \max\{1, \|\partial V(x)\|\} \quad \text{для всех } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Мультиотображение $Y : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$:

$$Y(x) = \frac{\partial V(x)}{\eta(x)}$$

пн. св. и удовлетворяют условию $\|Y(x)\| \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим вспомогательную периодическую задачу для функционально-дифференциального включения следующего вида

$$x'(t) \in F_Y(t, x_t) = F(t, x_t) + \varepsilon_m Y(x), \tag{4.19}$$

$$x(0) = x(T). \tag{4.20}$$

Нетрудно видеть, что правая часть включения (4.19) имеет выпуклые компактные значения, удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста. Следовательно, определен мультиоператор суперпозиции $P_{F_Y}\ :\ C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)\to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$, сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F_Y(t,x_t)$.

Для дальнейших рассуждений воспользуемся теоремой 2.4.3 и рассмотрим операторы:

$$l:\ l(x)=x',\quad G_m=P_{F_Y}$$

и

$$\pi:\ \pi g=\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)\,ds.$$

Нетрудно проверить, что мультиоператоры $\pi\circ G_m$ и $k_{p,q}\circ G_m$ компактны.

Отметим, что для $\lambda\in(0,1)$ функция $x\in\operatorname{dom} l$ является решением включения $l(x)\in\lambda G_m(x)$.

Это означает, что $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $x'(t)=\lambda g(t)=\lambda\left(f(t)+\varepsilon_m\frac{\upsilon(t)}{\eta(x(t))}\right)$ п.в. $t\in[0,T]$, где $f\in P_F(x),\ \upsilon\in\partial V(x)$. Предположим, что $\|x\|_2\geq N$.

Тогда, с одной стороны, учитывая (4.18), имеем

$$\int_0^T\langle\upsilon(s),\lambda g(s)\rangle\,ds=\int_0^T\left\langle\upsilon(s),\lambda\left(f(s)+\varepsilon_m\frac{\upsilon(s)}{\eta(x(s))}\right)\right\rangle ds=$$

$$=\lambda\int_0^T\langle\upsilon(s),f(s)\rangle\,ds+\lambda\varepsilon_m\int_0^T\frac{\langle\upsilon(s),\widetilde{\upsilon}(s)\rangle}{\eta(x(s))}\,ds>0$$

для всех $\upsilon(s),\widetilde{\upsilon}(s)\in\partial V(x(s))$.

С другой стороны, применяя лемму 3.1.1, получаем

$$\int_0^T\langle\upsilon(s),\lambda g(s)\rangle\,ds=\int_0^T\langle\upsilon(s),\lambda(f(s)+\upsilon(s))\rangle\,ds=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^T\langle\upsilon(s),x'(s)\rangle\,ds\leq\frac{1}{\lambda}\int_0^T V^0(x(s),x'(s))\,ds=$$

$$=\frac{1}{\lambda}(V(x(T))-V(x(0)))=0,$$

для каждого $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$.

Получаем противоречие. Следовательно,

$$\|x\|_2 < N.$$

Заметим, что из условия (F_3) вытекает, что $\|x'\|_2 < M'$, где $M' > 0$. Но тогда найдется и $M > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda G_m(x)$$

для всех $x \in \partial U,\ \lambda \in (0,1)$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из соотношения (4.18) получаем, что

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), \lambda g(s)\rangle\, ds = \lambda \int_0^T \langle \upsilon(s), f(s)\rangle\, ds + \lambda\varepsilon_m \int_0^T \frac{\langle \upsilon(s), \widetilde{\upsilon}(s)\rangle}{\eta(x(s))}\, ds > 0$$

для всех $\upsilon(s), \widetilde{\upsilon}(s) \in \partial V(x(s))$.

Положим теперь $\upsilon(s) \equiv \upsilon$. Тогда

$$\int_0^T \langle \upsilon, \lambda g(s)\rangle\, ds = \lambda\langle \upsilon, \int_0^T g(s)\, ds\rangle = T\langle \upsilon, \pi g\rangle > 0$$

и, таким образом,

$$\langle \upsilon, y\rangle > 0$$

для всех $\upsilon \in \partial V(u),\ y \in \pi G_m(u)$.

Это значит, что $0 \notin \pi G_m(u)$ для $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ и

$$\deg_{\operatorname{Ker} l}(\pi G_m, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) = \deg_{\operatorname{Ker} l}(\partial V, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0.$$

Таким образом, все условия теоремы 2.4.3 выполнены, и для каждого $\varepsilon_m > 0$ задача (4.19), (4.20) имеет решение, а, значит, имеет решение и задача (4.1), (4.2). $\square$

4.1.6 Негладкая интегральная направляющая функция для случая невыпуклой почти полунепрерывной снизу правой части

Рассмотрим периодическую задачу (4.10), (4.11) для функционально-дифференциального включения в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям почти пн. сн., подлинейного роста и T-периодично по первому аргументу.

Напомним, что при выполнении этих условий определен мультиоператор суперпозиции

$$P_R : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \multimap P(L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)),$$

сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $R(t, x_t)$ (см. замечание 4.1.6).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1.13. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная строгая негладкая интегральная направляющая функция задачи (4.10), (4.11) такая, что для некоторого $K > 0$ и для всех $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| \geq K$ выполняется соотношение*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.10), (4.11) имеет решение.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.4.4. Рассмотрим следующие операторы:

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x \text{ – абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$l(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции $G = P_R : C_T \multimap P(L^1_T)$. Легко видеть, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\operatorname{Ker} l = \mathbb{R}^n$.

Канонический оператор проектирования $\pi : L^1_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задан в виде

$$\pi f = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds.$$

Нетрудно проверить, что мультиоператоры $\pi \circ G$ и $k_{p,q} \circ G$ компактны.

Отметим, что для $\lambda \in (0,1)$ решение $x \in \operatorname{dom} l$ включения $l(x) \in \lambda G(x)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} x'(t) \in \lambda R(t, x_t) \ \text{ п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = x(T). \end{cases}$$

Это означает, что $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0,T]$, $f \in P_R(x)$.

Тогда, применяя лемму 3.1.1 и определение обобщенного градиента, получаем

$$\int_0^T \langle v(s), f(s)\rangle ds = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \langle v(s), x'(s)\rangle ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^T V^0(x(s), x'(s))ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

для каждого суммируемого сечения $v(s) \in \partial V(x(s))$. Откуда следует, что

$$\|x\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия подлинейного роста (F_3) вытекает, что $\|x'\|_2 < M'$, где $M' > 0$. Но тогда найдется и $M > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ с центром в нуле и радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda G(x)$$

для всех $x \in \partial U,\ \lambda \in (0,1)$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из определения строгой негладкой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s)\rangle ds > 0$$

для каждого измеримого сечения $\upsilon(s) \in \partial V(u)$ и $f(s) \in R(s,u)$. Но, полагая $\upsilon(s) \equiv \upsilon$, получаем

$$\int_0^T \langle \upsilon, f(s)\rangle ds = \langle \upsilon, \int_0^T f(s)ds\rangle = T\langle \upsilon, \pi f\rangle > 0,$$

для всех $\upsilon \in \partial V(u)$ и, следовательно,

$$\langle \upsilon, y\rangle > 0$$

для всех $\upsilon \in \partial V(u)$, $y \in \pi G(u)$.

Это означает, что мультиполя $\partial V(u)$ и $\pi G(u)$ гомотопны на $\partial U \cap \operatorname{Ker} l$, и, следовательно,

$$\deg_{\operatorname{Ker} l}(\pi G\big|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) = \deg(\partial V, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$. Таким образом, все условия теоремы 2.4.4 выполнены, и задача (4.10), (4.11) имеет решение в $\overline{U}$. $\square$

4.1.7 Негладкая интегральная направляющая функция для случая невыпуклой непрерывной правой части

Рассмотрим периодическую задачу (4.10), (4.11) для функционально-дифференциального включения, правая часть которого является непрерывным ограниченным мультиотображением с компактными значениями, удовлетворяющим условию T-периодичности по первому аргументу.

Замечание 4.1.9. В силу [§1.2; **32**] для каждого конуса $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ ограниченное непрерывное мультиотображение $R : [0,T] \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ допускает ограниченное $\mathcal{K}$-непрерывное сечение $f : [0,T] \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1.14. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная негладкая интегральная направляющая функция задачи (4.10), (4.11) такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.10), (4.11) имеет решение.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся леммой 3.1.2. Возьмем произвольные $t \in [0,T]$, $x \in \mathcal{C}$ и $\varepsilon > 0$. Так как мультиотображение R непрерывно, то найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $(s,y) \in B((t,x),\delta)$ будет следовать $R(s,y) \subset R(t,x) + B^n(\varepsilon)$.

Тогда имеем

$$F(t,x) \subset \overline{co}\, f(B((t,x),\delta)) \subset \overline{co}\, R(t,x) + B^n(\varepsilon)$$

и в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем

$$F(t,x) \subset \overline{co}\, R(t,x).$$

Из условия теоремы следует, что соотношение (4.18) выполнено для всех $f \in P_R(x)$, где $P_R(x)$ – мультиоператор суперпозиции, соответствующий мультиотображению $R(t, x_t)$. Тогда, очевидно, это соотношение будет справедливо и для всех $\overline{f} \in P_F(x)$, где $P_F(x)$ – мультиоператор суперпозиции, соответствующий мультиотображению $F(t, x_t)$.

Таким образом, функция $V(x)$ является негладкой интегральной направляющей функцией и для включения

$$x'(t) \in F(t, x_t).$$

Из теоремы 4.1.12 тогда вытекает, что периодическая задача для этого включения имеет решение. Следовательно, ввиду (jj) леммы 3.1.2, имеет решение и задача (4.10), (4.11). $\square$

4.1.8 Негладкая интегральная направляющая функция для случая каузальной правой части

Определение 4.1.9. Локально липшицеву функцию $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ назовем *строгой негладкой интегральной направляющей функцией* для включения (4.15), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s) \rangle \, ds > 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{Q}(x), \tag{4.21}$$

для всех суммируемых сечений $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$ и для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Теорема 4.1.15. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная строгая негладкая интегральная направляющая функция для включения (4.15) с T-периодическим каузальным оператором $\mathcal{Q}$, удовлетворяющим условиям* $(\mathcal{Q}1)$ – $(\mathcal{Q}2)$, *такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.15) имеет решение.

Доказательство. Рассмотрим линейный фредгольмов оператор $lx = x'$ и выпуклозначные компактные на ограниченных подмножествах мультиоператоры $\pi\mathcal{Q}$ и $k_{p,q}\mathcal{Q}$.

Для $\lambda \in (0, 1]$ рассмотрим решение $x \in \operatorname{dom} l$ включения $l(x) \in \lambda\mathcal{Q}(x)$. Тогда $x(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0, T]$, где $f \in \mathcal{Q}(x)$. Предположим, что $\|x\|_2 \geq N$.

Тогда, с одной стороны, учитывая (4.21), имеем

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), \lambda f(s) \rangle \, ds > 0$$

для всех суммируемых сечений $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$.

С другой стороны, применяя лемму 3.1.1, получаем

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), \lambda f(s)\rangle\, ds = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \langle \upsilon(s), x'(s)\rangle\, ds \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda}\int_0^T V^0(x(s), x'(s))\, ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

для каждого суммируемого сечения $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$.

Получаем противоречие. Следовательно,

$$\|x\|_2 < N.$$

Заметим, как и раньше, что найдется $M > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda\mathcal{Q}(x)$$

для всех $x \in \partial U,\ \lambda \in (0, 1]$.

Возьмем теперь произвольное $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$. Поскольку $\|u\| \ge NT^{-1/2}$, из соотношения (4.21) получаем, что

$$\int_0^T \langle \upsilon, f(s)\rangle\, ds > 0$$

для каждого $\upsilon \in \partial V(u)$ и $f \in \mathcal{Q}(u)$. Но тогда

$$\int_0^T \langle \upsilon, f(s)\rangle\, ds = \langle \upsilon, \int_0^T f(s)\, ds\rangle = T\langle \upsilon, \pi f\rangle > 0,$$

и, следовательно,

$$\langle \upsilon, y\rangle > 0$$

для каждого $\upsilon \in \partial V(u)$, $y \in \pi\mathcal{Q}(u)$.

Это значит, что $0 \notin \pi\mathcal{Q}(u)$ и мультиполя $\partial V(u)$ и $\pi\mathcal{Q}(u)$ не допускают противоположных направлений для $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ и, следовательно, они гомотопны. Тогда

$$\deg(\pi \mathcal{Q}\big|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) = \deg(\partial V, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$. Таким образом, все условия теоремы 2.4.3 выполнены, и включение (4.15) имеет решение. $\square$

Применяя аналогичную схему и теорему 2.4.4, нетрудно доказать следующий результат для пн. сн. каузального оператора.

Теорема 4.1.16. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная строгая негладкая интегральная направляющая функция для включения (4.15) с T-периодическим каузальным оператором $\mathcal{Q}$, удовлетворяющим условиям $(\mathcal{Q}_L)$ - $(\mathcal{Q}2)$, такая, что*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (4.15) имеет решение.

4.2 Асимптотическое поведение решений

Для $h > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-h,0];\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[-h,0]} \|x(t)\|$. Для данной функции $\psi \in \mathcal{C}$, символом $\mathcal{D}_\psi$ обозначается множество всех непрерывных функций $x : [-h,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h,0]$ и сужение x на $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ является абсолютно непрерывной функцией.

Для функции $x \in \mathcal{D}_\psi$ и $t \geq 0$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$.

Будем рассматривать задачу Коши для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t,x_t) \quad \text{п.в.} \;\; t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.22}$$

$$x(t) = \psi(t) \quad t \in [-h,0], \tag{4.23}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет указанным ниже условиям:

$F_{1_\infty})$ для каждого $\varphi \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot,\varphi) : \mathbb{R}_+ \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение;

$F_{2_\infty})$ почти для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ мультиотображение $F(t,\cdot) : \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;

$F_{3_\infty})$ существует положительная суммируемая на каждом компактном интервале функция $\alpha(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ такая, что для каждого $\varphi \in \mathcal{C}$

$$\|F(t,\varphi)\| := \max_{y\in F(t,\varphi)} \|y\| \leq \alpha(t)(1+\|\varphi\|)$$

п.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

Исследуется вопрос о существовании решения задачи (4.22), (4.23), удовлетворяющего следующей оценке:

$$\|x(t)\| \leq \frac{k}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ k > 0, \tag{4.24}$$

где $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Замечание 4.2.1. (см. [12]). Для выполнения условия (F_{1_∞}) достаточно, чтобы для каждого $\varphi \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot, \varphi)$ была измерима.

Замечание 4.2.2. (см. [12]). При выполнении условий (F_{1_∞}) – (F_{3_∞}) для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$ мультифункция $t \multimap F(t, x_t),\ t \in R_+$, допускает локально суммируемое сечение.

Для каждого начального условия $\psi \in \mathcal{C}$ под решением задачи (4.22), (4.23) понимается функция $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющая (4.22) п.в. $t \in R_+$.

Обозначим символом $\mathfrak{V}$ совокупность всех регулярных функций $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию коэрцитивности

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty.$$

Пусть $V \in \mathfrak{V}$. Заметим, что для каждого $r > 0$ найдется $k(r) > r$ такое, что если

$$\alpha_r := \inf\{V(x),\ \|x\| \leq r\}, \tag{4.25}$$

то

$$V(x) < \alpha_r,\ \|x\| \geq k(r). \tag{4.26}$$

Пусть теперь $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\inf\{g(t),\ t \in \mathbb{R}\} \geq 1.$$

Определение 4.2.1. Функция $V \in \mathfrak{V}$ называется *негладким интегральным направляющим потенциалом* для включения (4.22) вдоль функции g,

если существует
$$r_V > g(0)\|\psi(0)\| \tag{4.27}$$
такое, что для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющей условиям

(i) существует число $\tau_1^x > 0$ такое, что
$$g(t)\|x(t)\| \le r_V \quad \text{для всех } t \in [0, \tau_1^x);$$

(ii) существует число $\tau_*^x > \tau_1^x$ такое, что
$$g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V := k(r_V);$$

(iii) $\|x'(t)\| \le \|F(t, x_t)\|$ для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$;

имеем
$$\int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \big\langle v(s), g'(s)x(s) + g(s)f(s)\big\rangle ds \ge 0 \tag{4.28}$$
для всех суммируемых сечений $v(s) \in \partial V(g(s)x(s))$ и $f(s) \in F(s, x_s)$, где
$$\tau_\sharp^x := \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x),\ \|g(\tau)x(\tau)\| = r_V\}.$$

Справедливо следующе утверждение.

Теорема 4.2.1. *Если $V \in \mathfrak{V}$ является негладким интегральным направляющим потенциалом для включения (4.22) вдоль функции g, то каждое решение задачи Коши (4.22), (4.23) удовлетворяет следующей оценке:*
$$\|x(t)\| \le k_V \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.29}$$

Доказательство. Из условий (F_{1_∞})–(F_{3_∞}) и основных свойств дифференциальных включений (см., например, [12], [73], [100], [118], [120]) следует, что все решения задачи (4.22), (4.23) продолжимы на $\mathbb{R}_+$ и множество таких решений непусто.

Пусть $x(\cdot)$ – произвольное решение задачи (4.22), (4.23), определенное на $\mathbb{R}_+$.

Из (4.27) следует, что найдется $\tau_1^x > 0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq r_V < k_V,\ t \in [0, \tau_1^x). \tag{4.30}$$

Если $\tau_1^x = +\infty$, то

$$\|x(t)\| < k_V \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.31}$$

и утверждение доказано.

Если $t_1 < +\infty$, то оценка (4.30) справедлива только на конечном промежутке. Покажем, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq k_V,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.32}$$

В предположении противного найдется $\tau_2^x > \tau_1^x$ такое, что

$$g(\tau_2^x)\|x(\tau_2^x)\| > k_V. \tag{4.33}$$

Из (4.30) и (4.33) следует существование $\tau_1^x < \tau_*^x < \tau_2^x$, при котором

$$g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V. \tag{4.34}$$

Пусть

$$\tau_\sharp^x = \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x),\ g(\tau)\|x(\tau)\| = r_V\},$$

следовательно,

$$g(\tau_\sharp^x)\|x(\tau_\sharp^x)\| = r_V.$$

Отсюда, в силу (4.26), получаем следующую оценку

$$V(g(\tau_\sharp^x)x(\tau_\sharp^x)) \geq \alpha_{r_V}. \tag{4.35}$$

Из определения 4.2.1 и леммы 3.1.1 имеем

$$V(g(\tau_*^x)x(\tau_*^x)) - V(g(\tau_\sharp^x)x(\tau_\sharp^x)) =$$

$$= \int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} V^0(g(s)x(s), g'(s)x(s) + g(s)x'(s))ds \geq$$

$$\geq \int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \big\langle v(s), g'(s)x(s) + g(s)x'(s)\big\rangle ds \geq 0, \quad v(s) \in \partial V(g(s)x(s)).$$

Откуда и из соотношений (4.26), (4.34) и (4.35) имеем

$$\alpha_{r_V} > V(g(\tau_*^x)x(\tau_*^x)) \geq V(g(\tau_\sharp^x)x(\tau_\sharp^x)) \geq \alpha_{r_V}.$$

Полученное противоречие и доказывает справедливость оценки (4.32). $\square$

Следствие 4.2.1. *Если* $V \in \mathfrak{V}$ *является интегральным направляющим потенциалом для включения (4.22) вдоль функции* g, *то каждое решение задачи Коши (4.22), (4.23) удовлетворяет оценке (4.29).*

Глава 5

Метод многолистных векторных направляющих функций

5.1 Периодическая задача

5.1.1 Многолистная направляющая функция для случая выпуклой правой части

Будем рассматривать сначала периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \tag{5.1}$$

$$z(0) = z(T), \tag{5.2}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ пн. св. по совокупности переменных, удовлетворяет условию подлинейного роста и T-периодично ($T > 0$) по первому аргументу:

$$F(t, z) = F(t + T, z) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^n$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение F заданным на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$).

Всюду в дальнейшем под решением задачи (5.1), (5.2) понимается абсолютно непрерывная функция $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая почти в каждой точке включению (5.1) и условию периодичности (5.2).

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = I - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ, элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ – через ζ. Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \left\{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\right\}.$$

Пусть на Π задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi, \rho)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho)}{\partial \varphi} > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi, \tag{5.3}$$

$$W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi, \rho) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \tag{5.4}$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию коэрцитивности

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} V(\zeta) = +\infty. \tag{5.5}$$

Для $0 \le \rho_1 < \rho_2$ и $\vartheta > \vartheta_0 = \min V(\zeta)$ выделим область

$$\Omega\left(\vartheta, \rho_1, \rho_2\right) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : V(pz) < \vartheta, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\right\}.$$

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ такие, что п.в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t, z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle < \alpha(t), \tag{5.6}$$

$$\inf_{z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t, z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle > \beta(t), \tag{5.7}$$

причем

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha(\tau) d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta(\tau) d\tau < 2\pi N, \tag{5.8}$$

где N – целое число.

Дадим следующее определение.

Определение 5.1.1. Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.3)–(5.8), будем называть *строгой многолистной векторной направляющей функцией (МВНФ)* для включения (5.1) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{y\in F(t,z)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|}<\frac{\rho_2-\rho_1}{2T},\quad z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2);\tag{5.9}$$

$$\langle\nabla V(pz),py\rangle<0\quad \text{для всех } y\in F(t,z),\ V(pz)\geq\vartheta,\ \|qz\|\leq\rho_2.\tag{5.10}$$

Для $\rho_0=(\rho_1+\rho_2)/2$ положим

$$G(\vartheta,\rho_0)=\left\{z\in\mathbb{R}^n : V\left(pz\right)<\vartheta,\ \|qz\|<\rho_0\right\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.1. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать строгую МВНФ относительно области* $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$. *Тогда задача* (5.1), (5.2) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G(\vartheta,\rho_0)},\quad t\in[0,T]$.

Доказательство. Построим для мультиотображения F на компактном множестве $[0,T]\times\overline{G(\vartheta,\rho_2)}$ последовательность ε_m-аппроксимаций f_{ε_m}, т.е. отображений $f_{\varepsilon_m}:[0,T]\times\overline{G(\vartheta,\rho_2)}\to\mathbb{R}^n$, график каждого из которых содержится в ε_m-окрестности графика мультиотображения F и область значений отображения f_{ε_m} удовлетворяет соотношению

$$f_{\varepsilon_m}([0,T]\times\overline{G(\vartheta,\rho_2)})\subset\operatorname{co}F([0,T]\times\overline{G(\vartheta,\rho_2)}).\tag{5.11}$$

[§1.2; **23**]. Кроме того, из конструкции ε_m-аппроксимаций (см. [12]) нетрудно видеть, что без ущерба для общности можно считать f_{ε_m} по первому аргументу T-периодичными.

Отметим, что для каждого ε_m выполнено

$$f_{\varepsilon_m}(t,z) \in \mathrm{U}_{\varepsilon_m}\left(F(B_{\varepsilon_m}(t,z))\right)$$

для всех $(t,z) \in [0,T] \times \overline{G(\vartheta,\rho_2)}$, где $\mathrm{U}_{\varepsilon_m}$ обозначает ε_m-окрестность множества в $\mathbb{R}^n$, а B_{ε_m} обозначает ε_m-окрестность точки (t,z). Отсюда вытекает, что поскольку неравенства, задающие соотношения (5.6)–(5.10) являются строгими, то для достаточно малых ε_m отображения f_{ε_m} также удовлетворяют соотношениям (5.6)–(5.10).

Из результатов [151] вытекает, что каждое дифференциальное уравнение

$$z'(t) = f_{\varepsilon_m}(t,z(t))$$

обладает T-периодическим решением $z_m(\cdot)$ таким, что

$$z_m(t) \in G(\vartheta,\rho_0), \quad t \in [0,T].$$

Из соотношений (5.11) следует, что функции $z_m(\cdot)$ равностепенно непрерывны [§1.1; **7**] и, таким образом, можно считать без ущерба для общности, что последовательность функций $z_m(\cdot)$ сходится к функции $z(\cdot)$ такой, что

$$z(t) \in \overline{G(\vartheta,\rho_0)}, \quad t \in [0,T],$$

и которая является T-периодическим решением включения (5.1). $\square$

Пример 5.1.1. Рассмотрим периодическую задачу для полулинейного дифференциального включения следующего вида:

$$z'(t) \in Az(t) + G(t,z(t)) \quad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{5.12}$$

предполагая, что $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, а мультиотображение $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ по первому аргументу T-периодично, пн. св. по совокупности переменных и удовлетворяет условию подлинейного роста.

Пусть выполнены условия:

1) $\mathbb{R}^2$ – двумерное собственное подпространство матрицы оператора A, отвечающее паре мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\, i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$; остальные собственные значения λ_j лежат слева от мнимой оси:

$$Re\ \lambda_j < 0, \quad j = 3, ..., n;$$

2) $\mathbb{R}^{n-2}$– дополнительное к $\mathbb{R}^2$ инвариантное для матрицы A подпространство;

3) период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ собственных колебаний системы $z' = Az$ связан с периодом T мультиотображения G соотношением

$$T = nT_0, \quad n \in N;$$

4) мультиотображение G имеет вид $G(t,z) = G_0(t,z) \times G_1(t,z) \subset \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$.

Обозначим через $\{x, y\}$ координаты вектора $\xi \in \mathbb{R}^2$ в некотором базисе $\{e_1, e_2\}$. Тогда каждый вектор $z \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде

$$z = \zeta + \xi = \zeta + xe_1 + ye_2$$

и $Az = A(\zeta + xe_1 + ye_2) = A_0\zeta + \omega_0(-ye_1 + xe_2)$, где A_0– сужение A на $\mathbb{R}^{n-2}$. Поэтому включение (5.12) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} \in A_0\zeta + G_0(t, \zeta, x, y), \\ \frac{dx}{dt} \in -\omega_0 y + X(t, \zeta, x, y), \\ \frac{dy}{dt} \in \omega_0 x + Y(t, \zeta, x, y). \end{cases} \tag{5.13}$$

Пусть $\varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Положим

$$V(\zeta) = \langle \zeta, D\zeta \rangle, \quad W(\varphi, \rho) = \varphi,$$

где $D = 2\int\limits_0^\infty \exp(A_0^T\tau)\exp(A_0\tau)d\tau$.

Нетрудно показать, что пара $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$ является строгой МВНФ для системы (5.13) относительно некоторой области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. Тогда в силу теоремы 5.1.1 система (5.13) имеет T-периодическое решение

$$\{\zeta(t), x(t), y(t)\} \in \overline{G(\vartheta, \rho_2)}, \quad t \in [0, T].$$

Существование T-периодического решения включения (5.1) может быть обосновано и при некоторых более общих, чем (5.10), условиях.

Определение 5.1.2. Непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta)$ называется *невырожденным потенциалом*, если выполнено соотношение

$$\nabla V(\zeta) \neq 0 \quad \text{для всех } \ \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\zeta) \geq \vartheta.$$

Если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом, то с помощью топологической степени отображений (см., например, [40, 41]) для нее естественным образом определяется топологический индекс на бесконечности $\operatorname{ind}(V, \infty)$.

Определение 5.1.3. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (5.3)–(5.8), назовем *обобщенной МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом и, кроме условия (5.9), выполнено следующее условие:

$$\langle \nabla V(pz), py \rangle \leq 0 \quad \text{хотя бы для одного } \ y \in F(t, z), \tag{5.14}$$

где $V(pz) \geq \vartheta,\ \|qz\| \leq \rho_2$.

Если соотношение (5.14) выполняется для всех $y \in F(t, z)$, то пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ назовем просто *МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$ без упоминания слова "обобщенная".

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.2. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать обобщенную МВНФ относительно области* $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда задача* (5.1), (5.2) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$.

Доказательство. Определим мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$B(z) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma(z) \nabla V(pz), py \rangle \le 0\},$$

где $\gamma(z) = \begin{cases} 0, & V(pz) \le \vartheta_1, \\ 1, & V(pz) > \vartheta_1, \end{cases} \quad \vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta.$

Нетрудно видеть, что B является замкнутым мультиотображением.

Для невырожденного потенциала $V(\zeta)$ определим непрерывное отображение $Y_V : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$ следующим образом:

$$Y_V(pz) = \begin{cases} -\nabla V(pz), & \|\nabla V(pz)\| \le 1, \\ -\frac{\nabla V(pz)}{\|\nabla V(pz)\|}, & \|\nabla V(pz)\| > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательные дифференциальные включения

$$z'(t) \in F_B(t, z(t)) = F(t, z(t)) \cap B(z(t)), \tag{5.15}$$

$$z'(t) \in F_B(t, z(t)) + \varepsilon_m Y_V(pz(t)) \tag{5.16}$$

для некоторой последовательности положительных ε_m.

Отметим, что правые части включений (5.15) и (5.16) также являются пн. св.

Для включения (5.15) соотношение (5.14) будет справедливо уже для всех $y \in F_B(t, z)$, а для включения (5.16) оно будет выполняться в строгой форме. Следовательно, пара функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ является строгой МВНФ для включения (5.16) при каждом $\varepsilon_m > 0$. Тогда по теореме 5.1.1 каждое включение (5.16) имеет T-периодическое решение $z_m(\cdot)$ такое, что

$z_m(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0,T]$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ включения (5.1) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. □

Следствие 5.1.1. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать МВНФ относительно области* $\Omega\left(\vartheta, \rho_1, \rho_2\right)$. *Тогда задача* (5.1), (5.2) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\left(\vartheta, \rho_0\right)}$, $t \in [0,T]$.

Рассмотрим теперь периодическую задачу (5.1), (5.2) в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодично по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для п.в. $t \in [0,T]$

$$\sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \sup_{y\in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle \le \alpha(t) - \varepsilon, \tag{5.17}$$

$$\inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \inf_{y\in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle \ge \beta(t) + \varepsilon, \tag{5.18}$$

причем

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \le \int_0^T \alpha(\tau)d\tau, \quad \int_0^T \beta(\tau)d\tau \le 2\pi N - \varepsilon, \tag{5.19}$$

где N – целое число.

Дадим следующее определение.

Определение 5.1.4. Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.3)–(5.5), (5.17)–(5.19), будем называть *обобщенной МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\left(\vartheta, \rho_1, \rho_2\right)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены условия:

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{y\in F(t,z)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} \le \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T} - \varepsilon, \quad z \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2); \tag{5.20}$$

$$\langle \nabla V(pz), py\rangle \le 0 \quad \text{хотя бы для одного} \quad y \in F(t,z), \tag{5.21}$$

где $V(pz) \ge \vartheta,\ \|qz\| \le \rho_2$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.3. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать обобщенную МВНФ относительно области* $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда задача* (5.1), (5.2) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$.

Доказательство. **(i)** Рассмотрим сначала случай, когда для включения (5.1) определена МВНФ. Так как правая часть F дифференциального включения (5.1) удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, то (см., например, [90]) для каждого $\varepsilon_m > 0$ существует мультиотображение $F_{\varepsilon_m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ такое, что:

(а) F_{ε_m} по первому аргументу T-периодично;

(б) $F_{\varepsilon_m}(t,z) \subset F(t,z)$ п.в. $(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(в) существует замкнутое подмножество J_{ε_m} промежутка $J = [0,T]$ такое, что $\mu(J \setminus J_{\varepsilon_m}) \le \varepsilon_m$ (где μ – мера Лебега) и $F_{\varepsilon_m}|_{J_{\varepsilon_m} \times \mathbb{R}^n}$ пн. св.;

(г) если u, w измеримы и $w(t) \in F(t, u(t))$ п.в. $t \in J$, то $w(t) \in F_{\varepsilon_m}(t, u(t))$ п.в. $t \in J$.

Пусть $P_m : [0,T] \multimap J_{\varepsilon_m}$ – метрическая проекция и

$$\widetilde{F}_{\varepsilon_m}(t,z) = \overline{\mathrm{co}}\, F_{\varepsilon_m}(P_m(t), z) \quad \text{п.в.} \quad (t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Так как метрическая проекция пн. св., то мультиотображение $\widetilde{F}_{\varepsilon_m}$ также пн. св. (см., например, [119]).

Нетрудно видеть, что для дифференциальных включений

$$z'(t) \in \widetilde{F}_{\varepsilon_m}(t, z(t)), \quad m = 1, 2, ...$$

выполнены соотношения (5.17)–(5.21) и, следовательно, по теореме 5.1.2 с учетом следствия 5.1.1 каждое из них имеет T-периодическое решение $\tilde{z}_m(\cdot)$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ как предельную точку последовательности $\tilde{z}_m(\cdot)$.

(ii) Пусть теперь для включения (5.1) определена обобщенная МВНФ. Определим мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$B(z) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma(z) \nabla V(pz), py \rangle \leq 0 \right\},$$

где $\gamma(z) = \begin{cases} 0, & V(pz) \leq \vartheta_1, \\ 1, & V(pz) > \vartheta_1, \end{cases} \quad \vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta.$

Нетрудно видеть, что B является замкнутым мультиотображением.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$z'(t) \in F_B(t, z(t)) = F(t, z(t)) \cap B(z(t)).$$

Для этого включения соотношение (5.21) будет справедливо уже для всех $y \in F_B(t, z)$. Следовательно, пара функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ является для него МВНФ. Ввиду пункта (i) вспомогательное дифференциальное включение, а, следовательно, и включение (5.1), имеют T-периодическое решение $z(\cdot)$ такое, что $z(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)},\ t \in [0, T]$. $\square$

5.1.2 Многолистная направляющая функция для случая нормальной правой части

Будем рассматривать теперь периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$z'(t) \in R(t, z(t)), \tag{5.22}$$

$$z(0) = z(T), \tag{5.23}$$

в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным и удовлетворяет условию T-периодичности $(T > 0)$ по первому аргументу.

Определение 5.1.5. Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (5.3)–(5.5), (5.17)–(5.19), будем называть *МВНФ* для включения (5.22) относительно области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом и, кроме условия, аналогичного (5.20), выполнено следующее условие:

$$\langle \nabla V(pz), py \rangle \leq 0 \quad \text{для всех} \quad y \in R(t, z), \quad V(pz) \geq \vartheta, \quad \|qz\| \leq \rho_2. \tag{5.24}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1.4. *Пусть для включения* (5.22) *можно указать МВНФ относительно области* $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда задача* (5.22), (5.23) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, \;\; t \in [0, T]$.

Доказательство. Предположим, что мультиотображение F является квазисечением мультиотображения R, т.е.:

(j) мультиотображение $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(jj) $F(t, z) \cap R(t, z) \neq \emptyset$ для всех $t \in [0, T], \; z \in \mathbb{R}^n$;

(jjj) каждое решение $z : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \tag{5.25}$$

$$z(0) = z(T), \tag{5.26}$$

является решением исходной задачи (5.22), (5.23).

В силу (jjj) достаточно показать, что задача (5.25), (5.26) имеет решение.

Заметим, что в общем случае пара функций $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$ не является МВНФ для включения (5.25).

Пусть $\varepsilon > 0$ то же, что и в определении МВНФ. Мультиотображение $C : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ задано как

$$C(z) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \langle \gamma(z) \nabla V(pz), py \rangle \leq 0, \\ \frac{|\langle qy, \eta(z) qz \rangle|}{\|qz\|} \leq \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T} - \varepsilon, \\ \frac{2\pi}{T}(N-1) + \varepsilon \leq \langle \eta(z) \nabla W(qz), qy \rangle \leq \frac{2\pi}{T} N - \varepsilon, \\ N - \text{целое}; \end{array} \right\},$$

где

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0, \ V(pz) \leq \vartheta_1, \|qz\| \leq \rho_2, \\ 1, \ V(pz) > \vartheta_1, \|qz\| \leq \rho_2, \end{cases} \qquad \eta(z) = \begin{cases} 1, \ V(pz) \leq \vartheta_1, \|qz\| \leq \rho_2, \\ 0, \ V(pz) > \vartheta_1, \|qz\| \leq \rho_2, \end{cases}$$

$\vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta$. Легко видеть, что C является замкнутым мультиотображением. Тогда мультиотображение $F_C(t,z) = F(t,z) \cap C(z)$ имеет выпуклые компактные значения и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$z'(t) \in F_C(t, z(t)). \tag{5.27}$$

Нетрудно проверить, что пара функций $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$ является МВНФ для включения (5.27). Из теоремы 5.1.3 тогда следует, что включение (5.27) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение, которое является решением задачи (5.25), (5.26) и, следовательно, решением исходной задачи (5.22), (5.23). $\square$

5.1.3 Негладкая многолистная направляющая функция для случая дифференциальных уравнений

Далее в качестве основного аппарата исследования периодических решений будет использоваться развитие на "негладкий" случай метода многолистных векторных направляющих функций.

Сначала будем рассматривать периодическую задачу для дифференциального уравнения следующего вида:

$$z'(t) = f(t, z(t)), \tag{5.28}$$

$$z(0) = z(T), \tag{5.29}$$

предполагая, что функция $f(t, z)$ непрерывна по совокупности переменных, непрерывно дифференцируема по второму аргументу и T-периодична по первому аргументу ($T > 0$).

Пусть на Π задана скалярная локально липшицева функция $W(\varphi, \rho)$, удовлетворяющая условию (5.4), для которой

$$W_1^0(\varphi_0, \rho; \psi) > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi,\ \psi \in (-\infty, +\infty), \tag{5.30}$$

где $W_1^0(\varphi_0, \rho; \psi)$ – обобщенная частная производная Кларка функции $W(\varphi, \rho)$ в точке φ_0 по направлению ψ [§1.2; **34**].

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть задана скалярная локально липшицева функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию (5.5).

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\cdot)$ и $\beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\cdot)$ такие, что

$$\sup_{z \in \Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \langle w, qf(t, z)\rangle < \alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t) \quad \text{для всех } w \in \partial W(qz), \tag{5.31}$$

$$\inf_{z \in \Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \langle w, qf(t, z)\rangle > \beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t) \quad \text{для всех } w \in \partial W(qz), \tag{5.32}$$

причем

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau < 2\pi N, \tag{5.33}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.6. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.5), (5.30)–(5.33), назовем *строгой негладкой многолистной векторной направляющей функцией (МВНФ)* для уравнения (5.28) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{|\langle qf(t,z), qz\rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2-\rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2); \tag{5.34}$$

$$\langle \upsilon, pf(t,z)\rangle < 0 \tag{5.35}$$

для всех $t \in [0,T],\ \upsilon \in \partial V(pz),\ \ V(pz) \geq \vartheta,\ \|qz\| \leq \rho_2.$

Пример 5.1.2. На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть заданы скалярные непрерывно дифференцируемые ограниченные снизу функции $V_1(\zeta), V_2(\zeta), ...,$ $V_k(\zeta),\quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2},\ k \geq 1$, хотя бы одна из которых удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} V_{i_0}(\zeta) = +\infty \quad (1 \leq i_0 \leq k).$$

Для $\rho_2 > \rho_1 \geq 0$ и $\vartheta > \vartheta_0 = \max\limits_{1\leq i\leq k} \inf V_i(\zeta)$ выделим область

$$\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : V_i(pz) < \vartheta,\ i = 1,...,k,\ \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\right\}.$$

Положим

$$V(\zeta) = \max_{1\leq i\leq k} V_i(\zeta).$$

Пусть множества $\Sigma_i = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla V_i(pz) \neq 0,\ i = 1,...,k\}$ образуют покрытие [§1.2; **21**] множества

$$\Sigma\left(\vartheta,\rho_2\right) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : V(pz) \geq \vartheta, \|qz\| \leq \rho_2\right\}.$$

Пусть на Π задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi,\rho)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi,\rho)}{\partial\varphi} > 0, \quad (\varphi,\rho)\in\Pi,$$

$$W(\varphi+2\pi,\rho) = W(\varphi,\rho)+2\pi, \quad (\varphi,\rho)\in\Pi.$$

Положим

$$\alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t) = \sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \langle\nabla W(qz), qf(t,z)\rangle,$$

$$\beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t) = \inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \langle\nabla W(qz), qf(t,z)\rangle,$$

причем

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau < 2\pi N,$$

где N – целое число.

Пусть пара функций $\{V_i(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, $i=1,...,k$, является строгой МВНФ для уравнения (5.28) в следующем смысле (ср. [53]):

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{|\langle qf(t,z), qz\rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2-\rho_1}{2T}, \quad z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2);$$

$$\langle\nabla V_i(pz), pf(t,z)\rangle < 0, \quad z\in\Sigma_i,\ i=1,...,k.$$

Нетрудно убедиться, что пара $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ является строгой негладкой МВНФ в смысле определения 5.1.6 для уравнения (5.28) относительно *всей* области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$.

Применение идей работы [53] и теории топологической степени многозначных отображений позволяет обосновать следующий принцип существования периодических решений.

Теорема 5.1.5. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать строгую негладкую МВНФ относительно области* $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$. *Тогда уравнение* (5.28) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что*

$$z_*(t)\in G\left(\vartheta,\rho_0\right), \quad t\in[0,T].$$

Доказательство. Вначале покажем, что непрерывный оператор сдвига U_T по траекториям уравнения (5.28) определен на множестве $\overline{G\,(\vartheta,\rho_0)}$ и невырожден на границе $\partial G\,(\vartheta,\rho_0)$. Для этого необходимо установить, что все решения уравнения (5.28) с начальным условием $z_0 \in \overline{G\,(\vartheta,\rho_0)}$ продолжимы на промежуток $[0,T]$ и обладают свойством T-невозвращаемости на $\partial G\,(\vartheta,\rho_0)$.

Пусть $G_\zeta(\vartheta) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\zeta) < \vartheta\right\}$ и $G_\xi(\rho_2) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \|\xi\| < \rho_2\right\}$.

Рассмотрим компоненту $\zeta(t)$. Если $\zeta(0)$ – внутренняя точка области $G_\zeta(\vartheta)$, то можно указать число $\varepsilon_1 > 0$, при котором

$$\zeta(t) \in G_\zeta(\vartheta), \quad t \in (0,\varepsilon_1). \tag{5.36}$$

Пусть теперь $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$ и, следовательно, $V(\zeta(0)) = \vartheta$. Так как $\|\xi(0)\| \le \rho_0 < \rho_2$, то из (5.35) вытекает оценка

$$\langle \upsilon, pf(0,\zeta(0),\xi(0))\rangle < 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon \in \partial V(\zeta(0)).$$

Но для каждого $\nu \in \mathbb{R}^{n-2}$ выполняется (см., например, [31])

$$V^0(\zeta;\nu) = \max\left\{\langle \upsilon,\nu\rangle : \quad \upsilon \in \partial V(\zeta)\right\}.$$

Отсюда и из определения обобщенной производной Кларка следует, что при малых $t > 0$ верны соотношения $V(\zeta(t)) < \vartheta$. Поэтому при некотором $\varepsilon_1 > 0$ справедливо включение (5.36).

Для компоненты $\xi(t)$, очевидно, при некотором $\varepsilon_2 > 0$ выполняется

$$\xi(t) \in G_\xi(\rho_2), \quad t \in (0,\varepsilon_2). \tag{5.37}$$

В силу (5.36) и (5.37) $z(t) \in G(\vartheta,\rho_2)$, $0 < t < \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Поэтому определено положительное число

$$t_* = \sup\left\{t > 0 : \quad z(t) \in G(\vartheta,\rho_2)\right\}.$$

Используя соотношение (5.34), нетрудно показать, что $t_* > T$. Поэтому всякая траектория $z(\cdot)$ уравнения (5.28), начинающаяся на $\partial G\left(\vartheta, \rho_0\right)$, при $t \in (0, T]$ удовлетворяет включению $z(t) \in G(\vartheta, \rho_2)$.

Покажем теперь, что эти траектории обладают свойством T-невозвращаемости.

Так как $G(\vartheta, \rho_0) = G_\zeta(\vartheta) \times G_\xi(\rho_0)$, то

$$\partial G\left(\vartheta, \rho_0\right) = \partial G_\zeta(\vartheta) \times \overline{G_\xi(\rho_0)} \cup \overline{G_\zeta(\vartheta)} \times \partial G_\xi(\rho_0).$$

Предположим вначале, что $z(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta) \times \overline{G_\xi(\rho_0)}$, тогда $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$. Но в силу (5.36) $\zeta(t) \in G_\zeta(\vartheta), \;\; t \in (0, T]$. Поэтому $\zeta(t) \neq \zeta(0), \;\; t \in (0, T]$, или, что тоже самое,

$$pz(t) \neq pz(0), \quad t \in (0, T]. \tag{5.38}$$

Пусть теперь $z(0) \in \overline{G_\zeta(\vartheta)} \times \partial G_\xi(\rho_0)$ и, следовательно,

$$\rho(0) = \rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2. \tag{5.39}$$

Так как $z(t) \in G(\vartheta, \rho_2)$ при $t \in (0, T]$, то из (5.34) вытекает оценка

$$\max_{[0, t_*]} |\rho'(t)| < (\rho_2 - \rho_1)/2T.$$

Поэтому

$$\rho(t) > \rho(0) - (\rho_2 - \rho_1)t/2T, \quad t \in (0, T],$$

и, в силу (5.39),

$$\rho(t) > \rho_1, \quad t \in (0, T].$$

Из этой оценки и соотношения (5.38) вытекает включение

$$z(t) \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2), \quad t \in (0, T].$$

Воспользовавшись теперь оценками (5.33), можно показать, что $\xi(T) \neq \xi(0)$. Поэтому, учитывая (5.38), соотношение

$$z(T) \neq z(0)$$

верно для любой траектории $z(\cdot)$, начальное значение которой удовлетворяет включению $z(0) \in \partial G(\vartheta, \rho_0)$.

Далее, используя (5.35), устанавливается, что

$$\deg(I - U_T, \overline{G(\vartheta, \rho_0)}) = \deg(\partial V(pz) + qz, \overline{G(\vartheta, \rho_0)}),$$

где в правой части равенства – топологическая степень мультиотображения.

Отсюда, применяя теорему о произведении степеней, свойство нормализации топологической степени и учитывая условие (5.5), получаем

$$\deg(I - U_T, \overline{G(\vartheta, \rho_0)}) \neq 0.$$

В силу принципа ненулевой степени поле $z - U_T z$ имеет в области $G(\vartheta, \rho_0)$ хотя бы одну особую точку z_0 и, следовательно, решение $z(t, z_0)$ уравнения (5.28) T-периодично. Нетрудно видеть, что траектория этого решения не пересекает границу области $G(\vartheta, \rho_0)$ и поэтому

$$z(t, z_0) \in G(\vartheta, \rho_0), \quad t \in [0, T]\,.$$

$\square$

Замечание 5.1.1. Следуя методу М.А. Красносельского сглаживания правой части (см. [40]), можно показать, что теорема 5.1.5 справедлива и для уравнения (5.28) с непрерывной по совокупности переменных правой частью $f(t, z)$.

Определение 5.1.7. Локально липшицева функция $V(\zeta)$ называется *прямым потенциалом*, если выполнено соотношение

$$\langle \upsilon, \tilde{\upsilon} \rangle > 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon, \tilde{\upsilon} \in \partial V(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\zeta) \geq \vartheta.$$

Если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом, то с помощью топологической степени многозначных отображений для нее естественным образом определяется топологический индекс на бесконечности $\operatorname{ind}(V, \infty)$.

Определение 5.1.8. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.5), (5.30)–(5.33), назовем *негладкой МВНФ* для уравнения (5.28) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом и, кроме условия (5.34), выполнено следующее условие:

$$\langle \upsilon, pf(t,z)\rangle \leq 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon \in \partial V(pz),\ \ V(pz)\geq \vartheta,\ \|qz\|\leq \rho_2. \qquad (5.40)$$

5.1.4 Негладкая многолистная направляющая функция для случая выпуклой правой части

Вернемся к рассмотрению периодической задачи (5.1), (5.2) для дифференциального включения, првая часть которого пн. св. по совокупности переменных, удовлетворяет условию подлинейного роста и T-периодична по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что п.в. $t\in[0,T]$

$$\sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)}\ \sup_{y\in F(t,z)}\langle w,qy\rangle<\alpha(t) \quad \text{для всех } \ w\in\partial W(qz), \qquad (5.41)$$

$$\inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)}\ \inf_{y\in F(t,z)}\langle w,qy\rangle>\beta(t) \quad \text{для всех } \ w\in\partial W(qz), \qquad (5.42)$$

причем

$$2\pi(N-1)<\int\limits_0^T\alpha(\tau)d\tau, \quad \int\limits_0^T\beta(\tau)d\tau<2\pi N, \qquad (5.43)$$

где N – целое число.

Определение 5.1.9. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.5), (5.30), (5.41)–(5.43), назовем *строгой негладкой МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\ \sup_{y\in F(t,z)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|}<\frac{\rho_2-\rho_1}{2T}, \quad z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2); \qquad (5.44)$$

$$\langle \upsilon, py\rangle < 0 \quad \text{для всех} \ \ \upsilon \in \partial V(pz),\ y \in F(t,z), \tag{5.45}$$

где $V(pz) \geq \vartheta,\ \|qz\| \leq \rho_2$.

Применение схемы доказательства теоремы 5.1.1 позволяет обосновать справедливость следующего утверждения непосредственно на базе теоремы 5.1.5 и замечания 5.1.1.

Теорема 5.1.6. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать строгую негладкую МВНФ относительно области* $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда включение* (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(\vartheta, \rho_0)}, \quad t \in [0,T]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.7. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать негладкую МВНФ относительно области* $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда уравнение* (5.28) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что*

$$z_*(t) \in G\,(\vartheta, \rho_0)\,, \ \ t \in [0,T].$$

Доказательство. Для $k \in N$ положим

$$M_k = \sup\left\{\ \|\partial V(\zeta)\| : \zeta \in B^{n-2}(k)\right\},$$

где $\|\partial V(\zeta)\| = \sup\left\{\ \|\upsilon\|\,,\ \upsilon \in \partial V(\zeta)\right\}$, а $B^{n-2}(k)$ обозначает замкнутый шар в $\mathbb{R}^{n-2}$ с центром в нуле и радиуса k. Определим отображение η : $\mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}$:

$$\eta(\zeta) = 1 + (\|\zeta\| - k)\, M_{k+2}\, (k + 1 - \|\zeta\|)\, M_{k+1}, \quad k \leq \|\zeta\| \leq k+1.$$

Нетрудно видеть, что отображение $\eta(\zeta)$ непрерывно и удовлетворяет условию

$$\eta(\zeta) \geq \max\left\{1, \|\partial V(\zeta)\|\right\} \quad \text{для всех} \ \ \zeta \in \mathbb{R}^{n-2}.$$

Мультиотображение $Y : \mathbb{R}^{n-2} \to Kv(\mathbb{R}^{n-2})$:

$$Y(\zeta) = -\frac{\partial V(\zeta)}{\eta(\zeta)}$$

пн. св. и удовлетворяет условию $\|Y(\zeta)\|^{+} \leq 1$ для всех $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$. Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$z'(t) \in F_Y(t, z(t)) = f(t, z(t)) + \varepsilon_m Y(pz(t)). \tag{5.46}$$

Отметим, что правая часть включения (5.46) пн. св. по совокупности переменных и удовлетворяет соотношению (5.45). Следовательно, пара функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ является строгой негладкой МВНФ для включения (5.46) при достаточно малых $\varepsilon_m > 0$. Тогда по теореме 5.1.6 каждое включение (5.46) имеет T-периодическое решение $z_m(\cdot)$ такое, что $z_m(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)},\ t \in [0, T]$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ уравнения (5.28) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. □

Определение 5.1.10. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.5), (5.30), (5.41)–(5.43), назовем *негладкой МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом и, кроме условия (5.44), выполнено следующее условие:

$$\langle \upsilon, py \rangle \leq 0 \quad \text{для всех} \ \ \upsilon \in \partial V(pz), \ \ \text{для всех} \ \ y \in F(t, z), \tag{5.47}$$

где $V(pz) \geq \vartheta,\ \|qz\| \leq \rho_2$.

Теорема 5.1.8. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать негладкую МВНФ относительно области* $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда включение* (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(\vartheta, \rho_0)},\ \ t \in [0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$z'(t) \in F(t, z(t)) + \varepsilon_m Y(pz(t)) \tag{5.48}$$

для некоторой последовательности положительных ε_m.

Отметим, что правая часть включения (5.48) пн. св. по совокупности переменных.

Для включения (5.48) соотношение (5.47) будет выполняться в строгой форме. Следовательно, пара функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ является строгой негладкой МВНФ для включения (5.48) при каждом $\varepsilon_m > 0$. Тогда по теореме 5.1.6 каждое включение (5.48) имеет T-периодическое решение $z_m(\cdot)$ такое, что $z_m(t) \in \overline{G(\vartheta,\rho_0)},\ \ t \in [0,T]$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ включения (5.1) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. □

Вернемся теперь к рассмотрению периодической задачи (5.1), (5.2) для дифференциального включения, правая часть которого удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодична по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и п.в. $t \in [0,T]$

$$\sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)}\ \sup_{y\in F(t,z)} \langle w, qy\rangle \le \alpha(t) - \varepsilon \quad \text{для всех}\ \ w \in \partial W(qz), \tag{5.49}$$

$$\inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)}\ \inf_{y\in F(t,z)} \langle w, qy\rangle \ge \beta(t) + \varepsilon \quad \text{для всех}\ \ w \in \partial W(qz), \tag{5.50}$$

причем

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \le \int\limits_0^T \alpha(\tau)d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta(\tau)d\tau \le 2\pi N - \varepsilon, \tag{5.51}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.11. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.5), (5.30), (5.49)–(5.51), назовем *негладкой МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{y\in F(t,z)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|}\le\frac{\rho_2-\rho_1}{2T}-\varepsilon,\quad z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2); \tag{5.52}$$

$$\langle \upsilon,py\rangle\le 0\quad\text{для всех}\ \ \upsilon\in\partial V(pz),\ y\in F(t,z), \tag{5.53}$$

где $V(pz)\ge\vartheta,\ \|qz\|\le\rho_2$.

Применение схемы доказательства теоремы 5.1.3 позволяет обосновать справедливость следующего утверждения непосредственно на базе теоремы 5.1.8.

Теорема 5.1.9. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать негладкую МВНФ относительно области* $\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$. *Тогда включение* (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G(\vartheta,\rho_0)}$, $t\in[0,T]$.

5.1.5 Негладкая многолистная направляющая функция для случая непрерывной правой части

Рассмотрим периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$z'(t)\in R(t,z(t)), \tag{5.54}$$

$$z(0)=z(T), \tag{5.55}$$

предполагая, что ограниченное мультиотображение $R:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to K(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным и удовлетворяет условию T-периодичности ($T>0$) по первому аргументу.

Пусть на Π задана скалярная локально липшицева функция $W(\varphi,\rho)$, удовлетворяющая соотношениям (5.4) и (5.30).

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть задана скалярная локально липшицева функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию (5.5).

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для п.в. $t \in [0,T]$

$$\sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \sup_{y\in R(t,z)} \langle w, qy\rangle \le \alpha(t) - \varepsilon \quad \text{для всех } \ w \in \partial W(qz), \tag{5.56}$$

$$\inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \inf_{y\in R(t,z)} \langle w, qy\rangle \ge \beta(t) + \varepsilon \quad \text{для всех } \ w \in \partial W(qz), \tag{5.57}$$

причем

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \le \int\limits_0^T \alpha(\tau)d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta(\tau)d\tau \le 2\pi N - \varepsilon, \tag{5.58}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.12. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.5), (5.30), (5.56)–(5.58), назовем *негладкой МВНФ* для включения (5.54) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены условия:

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{y\in R(t,z)} \frac{|\langle qy, qz\rangle|}{\|qz\|} \le \frac{\rho_2-\rho_1}{2T} - \varepsilon, \quad z \in \Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2); \tag{5.59}$$

$$\langle \upsilon, py\rangle \le 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon \in \partial V(pz),\ y \in R(t,z), \tag{5.60}$$

где $V(pz) \ge \vartheta,\ \|qz\| \le \rho_2$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.10. *Пусть для включения* (5.54) *можно указать негладкую МВНФ относительно области* $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$. *Тогда задача* (5.54), (5.55) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\left(\vartheta,\rho_0\right)}$, $t \in [0,T]$.

Доказательство. Возьмем произвольные $t \in [0,T],\ z \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Так как мультиотображение R непрерывно, то найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $(s,y) \in B((t,z),\delta)$ будет следовать $R(s,y) \subset R(t,z) + B^n(\varepsilon)$.

Тогда имеем

$$F(t,z) \subset \overline{co}\, f(B((t,z),\delta)) \subset \overline{co}\, R(t,z) + B^n(\varepsilon),$$

где мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет вид, аналогичный представленному в лемме 3.1.2. В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем

$$F(t,z) \subset \overline{co}\, R(t,z).$$

Из условия теоремы следует, что соотношения (5.56)–(5.60) выполнены для всех $y \in R(t,z)$,

Тогда, очевидно, эти соотношения будут справедливы и для всех $\overline{y} \in F(t,z)$.

Таким образом, пара $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ является негладкой МВНФ для включения

$$z'(t) \in F(t, z(t)).$$

Из теоремы 5.1.8 тогда вытекает, что это включение имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G\,(\vartheta,\rho_0)},\ t \in [0,T]$. Следовательно, ввиду (jj) леммы 3.1.2, имеет по крайней мере одно решение и задача (5.54), (5.55). □

Следствие 5.1.2. *Пусть для включения* (5.54) *можно указать МВНФ относительно области* $\Omega\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$. *Тогда задача* (5.54), (5.55) *имеет по крайней мере одно решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(\vartheta,\rho_0)},\ \ t \in [0,T]$.

5.1.6 Набор многолистных направляющих функций для случая дифференциальных уравнений

Далее определяются полный набор строгих МВНФ, полный и острый набор МВНФ, правильная МВНФ для дифференциальных уравнений и переносятся указанные методы на случай дифференциальных включений, правая часть которых удовлетворяет условиям типа Каратеодори.

Сначала рассматривается периодическая задача (5.28), (5.29) для дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}^n$ в предположении, что функция $f(t,z)$ непрерывна по совокупности переменных, непрерывно дифференцируема по второму аргументу и T-периодична по первому аргументу $(T > 0)$.

Пусть на подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ заданы скалярные непрерывно дифференцируемые функции

$$V_1(\zeta), V_2(\zeta), ..., V_k(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2},\ k \geq 1. \tag{5.61}$$

Для заданного $r_0 > 0$ положим

$$m_i = \min_{\|\zeta\| \leq r_0} V_i(\zeta), \quad M_i = \max_{\|\zeta\| \leq r_0} V_i(\zeta), \quad i = 1, ..., k,$$

и

$$M^* = \sum_{i=1}^{k} (|m_i| + |M_i|).$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что для функций (5.61) выполнено условие

$$\nabla V_i(\zeta) \neq 0 \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : \|\zeta\| \geq r_0, \quad i = 1, ..., k.$$

Пусть функции (5.61) удовлетворяют условию

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} [|V_1(\zeta)| + |V_2(\zeta)| + ... + |V_k(\zeta)|] = \infty, \quad k \geq 1. \tag{5.62}$$

В силу условия (5.62) можно найти такое r^*, что

$$|V_1(\zeta)| + |V_2(\zeta)| + ... + |V_k(\zeta)| > M^*, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : \|\zeta\| \geq r^*,\ k \geq 1. \tag{5.63}$$

Для $\rho_2 > \rho_1 \geq 0$ выделим в $\mathbb{R}^n$ область

$$\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| < r^*, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}\,.$$

Положим

$$\alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t) = \sup_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)} \langle \nabla W(qz), qf(t,z)\rangle, \tag{5.64}$$

$$\beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t) = \inf_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)} \langle \nabla W(qz), qf(t,z)\rangle, \tag{5.65}$$

причем

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau, \int\limits_0^T \beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau < 2\pi N, \tag{5.66}$$

где N – целое число.

Введем понятие полного набора строгих МВНФ.

Определение 5.1.13. Функции $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (5.3), (5.4), (5.62), (5.64)–(5.66) образуют *полный набор строгих МВНФ* для уравнения (5.28) относительно области $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{|\langle qf(t,z),qz\rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2-\rho_1}{2T}, \quad z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2); \tag{5.67}$$

$$\langle \nabla V_i(pz), pf(t,z)\rangle < 0, \quad \|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2,\ i=1,...,k. \tag{5.68}$$

Для $\rho_0 = \left(\rho_1+\rho_2\right)/2$ пусть

$$G(r^*,\rho_0) = \left\{z\in\mathbb{R}^n : \|pz\| < r^*,\ \|qz\| < \rho_0\right\}.$$

Теорема 5.1.11. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать полный набор* $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *строгих МВНФ относительно области* $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}\left(V_1,\infty\right)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}\left(V_1,\infty\right) \neq 0.$$

Тогда уравнение (5.28) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in G\left(r^*,\rho_0\right),\ t\in[0,T]$.

Замечание 5.1.2. Отметим, что из условий (5.68) вытекает гомотопность векторных полей $\nabla V_i(pz)$, $i = 1, ..., k$, и $-pf(0, z)$, $z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| \geq r_0$, $\|qz\| \leq \rho_2$. Поэтому все поля $\nabla V_i(\zeta)$, $i = 1, ..., k$, гомотопны друг другу и имеют одинаковую топологическую степень. Следовательно,

$$\operatorname{ind}(V_i, \infty) \neq 0, \quad i = 1, ..., k.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ через Q_i и Q_i^*, $i = 1, ..., k$, обозначим множества точек $z : \|pz\| \geq r_0$, для которых выполнены соответственно неравенства

$$V_i(pz) \leq m_i, \quad V_i(pz) \geq M_i, \quad i = 1, ..., k.$$

Сформулируем утверждения, результаты которых будут использованы при доказательстве теоремы 5.1.11.

Лемма 5.1.1. *Все точки множества* $\{z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| = r^*\}$ *являются точками невозвращаемости траекторий уравнения* (5.28).

Доказательство. Допустим, что $\|pz\| = r^*$. Из (5.63) вытекает, что найдется такое $i = i(pz)$, что $z \in Q_i \cup Q_i^*$. Тогда, следуя [40] (лемма 6.7), приходим к выводу, что z – точка невозвращаемости траекторий уравнения (5.28). □

Пусть $G_\zeta(r^*) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : \|\zeta\| < r^*\right\}$ и $G_\xi(\rho_0) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \|\xi\| < \rho_0\right\}$.

Лемма 5.1.2. *(см. [53]). Для всякой траектории* $z(\cdot)$ *уравнения* (5.28) *с начальным условием* $z(0) \in \overline{G_\zeta(r^*)} \times \partial G_\xi(\rho_0)$ *справедливо соотношение*

$$qz(T) \neq qz(0).$$

Следуя [53] и используя теорию топологической степени однозначных отображений, приведем схему доказательства теоремы 5.1.11.

Доказательство теоремы 5.1.11. **(i)** Предположим вначале, что решения уравнения (5.28) продолжимы на $[0, T]$. В силу условий, наложенных на функцию $f(t, z)$, задача Коши для уравнения (5.28) однозначно разрешима при любом начальном условии $z_0 \in \mathbb{R}^n$. Обозначим решение, для которого $z(0) = z_0$, через $z(t, z_0)$. При сделанных предположениях непрерывный оператор сдвига $U_T z_0 = z(T; z_0)$ определен на множестве $\overline{G(r^*, \rho_0)}$ и в силу лемм 5.1.1 и 5.1.2 невырожден на $\partial G(r^*, \rho_0)$. Следовательно, определена топологическая степень $\deg(I - U_T, \overline{G(r^*, \rho_0)})$. Как известно (см., например, [40]), доказательство существования T-периодических решений уравнения (5.28) в этом случае сводится к доказательству соотношения

$$\deg(I - U_T, \overline{G(r^*, \rho_0)}) \neq 0.$$

Аналогично [53], устанавливается, что указанная топологическая степень удовлетворяет условию

$$\deg(I - U_T, \overline{G(r^*, \rho_0)}) = \deg(\nabla V_i(pz) + qz, \overline{G(r^*, \rho_0)}), \quad i = 1, ..., k. \quad (5.69)$$

Каждое поле $\nabla V_i(pz) + qz$, $z \in G(r^*, \rho_0)$, $i = 1, ..., k$, является прямой суммой векторных полей $\nabla V_i(\zeta) \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\zeta \in G_\zeta(r^*)$, $i = 1, ..., k$, и $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\quad \xi \in G_\xi(\rho_0)$. Поэтому в силу свойства о произведении степеней имеем

$$\deg(\nabla V_i(pz) + qz, \overline{G(r^*, \rho_0)}) = \deg(\nabla V_i(\zeta), \overline{G_\zeta(r^*)}) \cdot \deg(\xi, \overline{G_\xi(\rho_0)}),$$

где $i = 1, ..., k$. Так как точка $\xi = 0$ лежит в области $G_\xi(\rho_0)$, то по свойству нормализации топологической степени

$$\deg(\xi, G_\xi(\rho_0)) = 1.$$

Учитывая замечание 5.1.2, получим

$$\deg(\nabla V_i(pz) + qz, \overline{G(r^*, \rho_0)}) \neq 0$$

и в силу (5.69)

$$\deg(I - U_T, \overline{G(r^*, \rho_0)}) \neq 0.$$

В силу принципа ненулевой степени, поле $z - U_T z$ имеет в области $G(r^*, \rho_0)$ хотя бы одну особую точку z_0. Решение $z(t, z_0)$ уравнения (5.28) T-периодично. Нетрудно видеть, что траектория этого решения не пересекает границу области $G(r^*, \rho_0)$ и поэтому

$$z(t, z_0) \in G(r^*, \rho_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Общий случай, когда некоторым начальным условиям могут соответствовать решения, "уходящие в бесконечность" за малые промежутки времени, т.е. решения, которые нельзя продолжить на промежуток $[0, T]$, может быть рассмотрен по схеме М.А. Красносельского (см., например, [40]).

Отметим априорную оценку для T-периодических решений $z(\cdot)$ уравнения (5.28), удовлетворяющего условиям (5.67), (5.68). Ясно, что такие периодические решения по p-проекции удовлетворяют неравенству

$$\|pz(t)\| < r^*,\ t \in [0, T]\,, \tag{5.70}$$

так как в противном случае нашлась бы точка z, принадлежащая одному из множеств $Q_i \cup Q_i^*,\ i = 1, ..., k$, которая не была бы точкой невозвращаемости траекторий.

Покажем, что $\|qz(t)\| < \rho_2,\ t \in [0, T]$, если $\|qz(0)\| \le \rho_0$. Так как $\rho_0 < \rho_2$, то

$$\|qz(t)\| < \rho_2, \quad t \in [0, \varepsilon)\,.$$

Поэтому определено положительное число

$$t_* = \sup\{t > 0 : \|qz(t)\| < \rho_2\}\,.$$

Покажем, что $t_* > T$.

Поскольку $\|qz(t_*)\| = \rho_2$ и $\|qz(0)\| = \rho_0$, то

$$\|qz(t_*)\| - \|qz(0)\| \geq \rho_2 - \rho_0 = (\rho_2 - \rho_1)/2.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\rho(t_*) = \rho(0) \geq (\rho_2 - \rho_1)/2.$$

Поэтому

$$\max_{t\in[0,t_*]} |\rho'(t)| \geq (\rho_2 - \rho_1)/2t_*. \tag{5.71}$$

С другой стороны, так как $\rho'(t) = \frac{\langle qf(t,\zeta(t),\xi(t)),\xi(t)\rangle}{\|\xi(t)\|}$ и $z(t) \in G(r^*, \rho_2)$ при $t \in (0, t_*)$, то из (5.67) вытекает оценка

$$\max_{t\in[0,t_*]} |\rho'(t)| < (\rho_2 - \rho_1)/2T. \tag{5.72}$$

Сравнивая (5.71) и (5.72), убеждаемся, что $t_* > T$. Поэтому

$$\|qz(t)\| < \rho_2, \quad t \in [0, T]. \tag{5.73}$$

Наличие априорных оценок (5.70) и (5.73) указывает путь доказательства теоремы в общем случае. Нужно построить вспомогательное дифференциальное уравнение

$$z'(t) = f^*(t, z(t)), \tag{5.74}$$

правая часть которого удовлетворяет трем требованиям:

1^0 $f^*(t, z) = f(t, z), \quad z \in \overline{\Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)}$.

2^0 $f^*(t, z)$ удовлетворяет условиям (5.68).

3^0 Все решения уравнения (5.74) продолжимы на $[0, T]$.

Тогда уравнение (5.74), по уже доказанному, имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z(\cdot)$. Для этого решения справедливы оценки (5.70) и (5.73), и поэтому оно является одновременно решением уравнения (5.28). $\square$

Определение 5.1.14. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (5.3), (5.4), (5.62), (5.64)–(5.66), образуют *полный и острый набор МВНФ* для уравнения (5.28) относительно области $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$, если, кроме условия (5.67), выполнено условие:

$$\langle \nabla V_i(pz), pf(t,z)\rangle \leq 0, \quad \|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2,\ i = 1, ..., k, \tag{5.75}$$

и для каждого фиксированного $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2},\ \|\zeta\| \geq r_0$ множество

$$K(\zeta) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^{n-2} : \eta = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \nabla V_i(\zeta),\ \gamma_1, ..., \gamma_k \geq 0 \right\}$$

является конусом [§1.1; **5**].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.12. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ *МВНФ относительно области* $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}\,(V_1, \infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\mathrm{ind}\,(V_1, \infty) \neq 0.$$

Тогда уравнение (5.28) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in G\left(r^*, \rho_0\right),\ t \in [0, T]$.

Для ее доказательства понадобится следующее утверждение (см., например, [123]).

Лемма 5.1.3. *Пусть набор функций* $V_1(\zeta), V_2(\zeta), ..., V_k(\zeta), \zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $k \geq 1$ *является острым. Тогда существует локально липшицева функция* $g : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$ *такая, что*

$$\langle \nabla V_i(\zeta), g(\zeta)\rangle < 0, \quad i = 1, ..., k;\ \|\zeta\| \geq r_0. \tag{5.76}$$

Доказательство теоремы 5.1.12. В силу леммы 5.1.3 существует функция $g : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$, удовлетворяющая условию (5.76). Рассмотрим семейство вспомогательных дифференциальных уравнений

$$z'(t) = f(t, z(t)) + \varepsilon g(pz(t)), \quad \varepsilon > 0. \tag{5.77}$$

Нетрудно видеть, что полный и острый набор $\{V_1(\zeta), .., V_k(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$ МВНФ для уравнения (5.28) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$ будет являться для уравнения (5.77) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ полным набором строгих МВНФ относительно той же области. Тогда в силу теоремы 5.1.11 уравнение (5.77) для каждого достаточно малого $\varepsilon = \varepsilon_m,\ m \geq 1$ имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_m(\cdot)$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ уравнения (5.28) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. □

Пусть $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$ – строгая МВНФ для уравнения (5.28), т.е.

$$\langle \nabla V(pz), pf(t, z) \rangle < 0, \quad \|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2.$$

Следуя [40], покажем, что по функции $V(\zeta)$ может быть построена вторая функция $\widetilde{V}(\zeta)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} \left\{ |V(\zeta)| + |\widetilde{V}(\zeta)| \right\} = \infty, \tag{5.78}$$

если угол между $\nabla V(\zeta)$ и $-pf(t, z)$ не только острый, но и ограничен сверху некоторым числом, меньшим $\pi/2$.

Определение 5.1.15. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (5.3), (5.4), (5.64)–(5.66), назовем *правильной МВНФ* для уравнения (5.28) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$, если, кроме условия (5.67), выполнено условие:

$$\langle \nabla V(pz), pf(t, z) \rangle \leq \delta_0 \,\|\nabla V(pz)\|\, \|pf(t, z)\|\,, \tag{5.79}$$

где $\delta_0 < 0,\ 0 \leq t \leq T, \|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2$, и если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\zeta)$, что

$$\|\nabla V(\zeta)\| \geq \|\nabla V_1(\zeta)\|, \quad \|\zeta\| \geq r_0, \tag{5.80}$$

и

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} |V_1(\zeta)| = \infty. \tag{5.81}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.13. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать правильную МВНФ* $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V,\infty) \neq 0.$$

Тогда уравнение (5.28) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in G\left(r^*, \rho_0\right),\ t \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть функция $V_1(\zeta)$ удовлетворяет условиям (5.80), (5.81). Положим $\widetilde{V}(\zeta) = V(\zeta) + \frac{\delta_0}{2} V_1(\zeta)$. Нетрудно проверить, что $\widetilde{V}(\zeta)$ является строгой МВНФ для уравнения (5.28).

Из (5.81) вытекает, что выполнено условие (5.78). Таким образом, набор $\left\{V(\zeta), \widetilde{V}(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\right\}$ является полным набором строгих МВНФ для уравнения (5.28) относительно области $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$. Следовательно, согласно теореме 5.1.11 уравнение (5.28) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что

$$z_*(t) \in G\left(r^*, \rho_0\right),\ t \in [0,T].$$

□

Замечание 5.1.3. Следуя методу М.А. Красносельского сглаживания правой части, можно показать, что теоремы 5.1.11–5.1.13 справедливы и для уравнения (5.28) с непрерывной по совокупности переменных правой частью $f(t, z)$.

5.1.7 Набор многолистных направляющих функций для случая выпуклой правой части

Вернемся к рассмотрению периодической задачи (5.1), (5.2) для дифференциального включения, правая часть которого является пн. св. по совокупности переменных мультиотображением с выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющим условиям подлинейного роста и T-периодичности по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что п.в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle < \alpha(t), \tag{5.82}$$

$$\inf_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy \rangle > \beta(t), \tag{5.83}$$

причем

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha(\tau) d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta(\tau) d\tau < 2\pi N, \tag{5.84}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.16. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (5.3), (5.4), (5.62), (5.82)–(5.84), образуют *полный набор строгих МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{y \in F(t,z)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2); \tag{5.85}$$

$$\langle \nabla V_i(pz), py \rangle < 0 \quad \text{для всех } \ y \in F(t, z), \tag{5.86}$$

где $i = 1, ..., k;\ \|pz\| \geq r_0, \|qz\| \leq \rho_2$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.14. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *строгих МВНФ относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$ *. Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V_1,\infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V_1,\infty)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\,(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 5.1.11 и замечания 5.1.3 (см. схему доказательства теоремы 5.1.1). □

Определение 5.1.17. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (5.3), (5.4), (5.62), (5.82)–(5.84), образуют *полный и острый набор обобщенных МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$, если, кроме условия (5.85), выполнено следующее условие:

$$\langle\nabla V_i(pz),py\rangle\leq 0 \quad \text{хотя бы для одного} \;\; y\in F(t,z), \tag{5.87}$$

где $\|pz\|\geq r_0,\ \|qz\|\leq\rho_2,\ i=1,...,k,$ и для каждого фиксированного $\zeta\in\mathbb{R}^{n-2},\ \|\zeta\|\geq r_0$ множество

$$K(\zeta)=\left\{\eta\in\mathbb{R}^{n-2}:\eta=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\nabla V_i(\zeta),\ \gamma_1,...,\gamma_k\geq 0\right\}$$

является конусом.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.15. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *обобщенных МВНФ относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$ *. Пусть топологический индекс на бесконечности*

$\operatorname{ind}(V_1,\infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V_1,\infty)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\,(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные дифференциальные включения

$$z'(t)\in F_B(t,z(t))=F(t,z(t))\cap B(z(t)), \tag{5.88}$$

где $B(z)=\left\{y\in\mathbb{R}^n:\langle\gamma(z)\nabla V_i(pz),py\rangle\leq 0\right\},\ \ i=1,...,k;$
$\gamma(z)=\begin{cases}0, & \text{если }\ \|pz\|\leq r_1,\\ 1, & \text{если }\ \|pz\|>r_1, \quad 0<r_1<r_0\end{cases}$
и

$$z'(t)\in F_B(t,z(t))+\varepsilon_m g(pz(t)), \tag{5.89}$$

где $g(\zeta)$ – функция из леммы 5.1.3.

Отметим, что правые части включений (5.88) и (5.89) также являются пн. св. мультиотображениями.

Для включения (5.88) соотношение (5.87) будет справедливо уже для всех $y\in F_B(t,z)$, а для включения (5.89) оно будет выполняться в строгой форме. Рассмотрим

$$\langle\nabla V_i(pz),py+\varepsilon_m g(pz)\rangle=\langle\nabla V_i(pz),py\rangle+\varepsilon_m\langle\nabla V_i(pz),g(pz)\rangle<0$$

для всех $y\in F_B(t,z),\ \|pz\|\geq r_0,\ \|qz\|\leq\rho_2,\ i=1,...,k$. Следовательно, набор функций $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ является полным набором строгих МВНФ для включения (5.89) относительно области $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$ при каждом $\varepsilon_m>0$. Тогда по теореме 5.1.14 каждое включение (5.89) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_m(\cdot)$ такое, что $z_m(t)\in\overline{G(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ включения (5.1) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. $\square$

Следствие 5.1.3. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ *МВНФ относительно области* $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$ *. Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}\,(V_1, \infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}\,(V_1, \infty) \neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*, \rho_0)},\ t \in [0, T]$.

Определение 5.1.18. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (5.3), (5.4), (5.82)–(5.84), будем называть *правильной обобщенной МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$, если, кроме условия (5.85), выполнено условие

$$\langle \nabla V(pz), py \rangle \leq \delta_0\, \|\nabla V(pz)\|\, \|py\| \quad \text{хотя бы для одного} \ \ y \in F(t, z), \tag{5.90}$$

где $\|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2,\ \delta_0 < 0$, и если существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (5.80), (5.81).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.16. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать правильную обобщенную МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ *относительно области* $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$ *. Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}\,(V, \infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}\,(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*, \rho_0)},\ t \in [0, T]$.

Доказательство. Определим мультиотображение $B : R^n \multimap R^n$ следующим образом:

$$B(z) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma(z) \nabla V(pz), py \rangle \leq 0\},$$

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|pz\| \leq r_1, \\ 1, & \text{если } \|pz\| > r_1, \quad 0 < r_1 < r_0 \end{cases}$$

Для включения (5.88) соотношение (5.90) будет справедливо уже для всех $y \in F_B(t,z)$. Построим функцию $\widetilde{V}(\zeta) = V(\zeta) + \frac{\delta_0}{2} V_1(\zeta)$. При этом пара функций $\left\{\widetilde{V}(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\right\}$ будет являться строгой МВНФ для включения (5.88). Из (5.81) вытекает, что выполнено условие (5.78). Тогда по теореме 5.1.14 включение (5.88) и, следовательно, включение (5.1) имеют T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G\left(r^*, \rho_0\right)}, \quad t \in [0,T]$. $\square$

Следствие 5.1.4. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать правильную МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V,\infty) \neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\left(r^*, \rho_0\right)},\ t \in [0,T]$.

Рассмотрим теперь периодическую задачу (5.1), (5.2) в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодично по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для п.в. $t \in [0,T]$ выполнены условия (5.17)–(5.19).

Определение 5.1.19. Функции $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (5.3), (5.4), (5.62), (5.17)–(5.19), образуют *полный и острый набор обобщенных МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$, если для некоторого $\varepsilon>0$ выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\ \sup_{y\in F(t,z)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|}\le\frac{\rho_2-\rho_1}{2T}-\varepsilon,\quad z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2); \tag{5.91}$$

$$\langle\nabla V_i(pz),py\rangle\le 0\quad \text{хотя бы для одного}\ \ y\in F(t,z), \tag{5.92}$$

где $\|pz\|\ge r_0,\ \|qz\|\le\rho_2,\ i=1,...,k;$ и для каждого фиксированного $\zeta\in\mathbb{R}^{n-2},\ \|\zeta\|\ge r_0$ множество

$$K(\zeta)=\left\{\eta\in\mathbb{R}^{n-2}:\eta=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\nabla V_i(\zeta),\ \gamma_1,...,\gamma_k\ge 0\right\}$$

является конусом.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.17. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *обобщенных МВНФ относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V_1,\infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V_1,\infty)\ne 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\,(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 5.1.3 (см. схему доказательства теоремы 5.1.3). □

Следствие 5.1.5. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *МВНФ относительно области*

$\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$ *. Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V_1,\infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V_1,\infty)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\,(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

Определение 5.1.20. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.3), (5.4), (5.17)–(5.19), будем называть *правильной обобщенной МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$, если, кроме условия (5.91), выполнено условие

$$\langle\nabla V(pz),py\rangle\leq\delta_0\,\|\nabla V(pz)\|\,\|py\|\quad\text{хотя бы для одного}\ \ y\in F(t,z),\tag{5.93}$$

где $\|pz\|\geq r_0,\ \|qz\|\leq\rho_2,\ \delta_0<0$, и если существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (5.80), (5.81).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.18. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать правильную обобщенную МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V,\infty)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\,(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 5.1.4 (см. схему доказательства теоремы 5.1.3). □

Следствие 5.1.6. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать правильную МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$. *Пусть* *топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V,\infty)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

5.1.8 Набор многолистных направляющих функций для случая нормальной правой части

Рассмотрим периодическую задачу (5.22), (5.23) для дифференциального включения, правая часть которого является нормальным мультиотображением, удовлетворяющим условию T-периодичности по первому аргументу.

Под решением задачи (5.22), (5.23) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (5.22) и условию периодичности (5.23).

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon>0$ и для п.в. $t\in[0,T]$

$$\sup_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)}\ \sup_{y\in R(t,z)}\langle\nabla W(qz),qy\rangle\leq\alpha(t)-\varepsilon, \tag{5.94}$$

$$\inf_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)}\ \inf_{y\in R(t,z)}\langle\nabla W(qz),qy\rangle\geq\beta(t)+\varepsilon, \tag{5.95}$$

причем

$$2\pi(N-1)+\varepsilon\leq\int\limits_0^T\alpha(\tau)d\tau,\quad \int\limits_0^T\beta(\tau)d\tau\leq 2\pi N-\varepsilon, \tag{5.96}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.21. Функции $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (5.3), (5.4), (5.62), (5.94)–(5.96), образуют *полный и острый набор МВНФ* для включения (5.22) относительно области $\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{y\in R(t,z)} \frac{|\langle qy, qz\rangle|}{\|qz\|} \le \frac{\rho_2-\rho_1}{2T} - \varepsilon, \quad z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2); \tag{5.97}$$

$$\langle \nabla V_i(pz), py\rangle \le 0 \quad \text{для всех } \ y \in R(t,z), \tag{5.98}$$

где $\|pz\| \ge r_0$, $\|qz\| \le \rho_2$, $i = 1, ..., k$; и для каждого фиксированного $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\| \ge r_0$ множество

$$K(\zeta) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^{n-2} : \eta = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \nabla V_i(\zeta),\ \gamma_1, ..., \gamma_k \ge 0 \right\}$$

является конусом.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.19. *Пусть для включения (5.22) можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *МВНФ относительно области* $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}\,(V_1,\infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\mathrm{ind}\,(V_1,\infty) \ne 0.$$

Тогда включение (5.22) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G\left(r^*, \rho_0\right)},\ t \in [0,T]$.

Доказательство. Предположим, что мультиотображение F является квазисечением мультиотображения R, т.е.:

(j) мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(jj) $F(t,z) \cap R(t,z) \ne \emptyset$ для всех $t \in [0,T],\ z \in \mathbb{R}^n$;

(jjj) каждое решение $z : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \tag{5.99}$$

$$z(0) = z(T), \tag{5.100}$$

является решением исходной задачи (5.22), (5.23).

В силу (jjj) достаточно показать, что задача (5.99), (5.100) имеет решение.

Заметим, что в общем случае набор $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ не является полным и острым набором МВНФ для включения (5.99).

Пусть $\varepsilon > 0$ то же, что и в определении полного и острого набора МВНФ. Мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ задано как

$$B(z) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \langle \gamma(z) \nabla V_i(pz), py \rangle \leq 0,\ i = 1, ..., k, \\ \frac{|\langle qy, \eta(z) qz \rangle|}{\|qz\|} \leq \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T} - \varepsilon, \\ \frac{2\pi}{T}(N-1) + \varepsilon \leq \langle \eta(z) \nabla W(qz), qy \rangle \leq \frac{2\pi}{T} N - \varepsilon; \end{array} \right\},$$

где N – целое,

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|pz\| \leq r_0, \|qz\| \leq \rho_2, \\ 1, & \text{если } \|pz\| > r_0, \|qz\| \leq \rho_2; \end{cases}$$

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|pz\| < r^*, \|qz\| \leq \rho_2, \\ 0, & \text{если } \|pz\| \geq r^*, \|qz\| \leq \rho_2. \end{cases}$$

Легко видеть, что B является замкнутым мультиотображением. Тогда мультиотображение $F_B(t, z) = F(t, z) \cap B(z)$ имеет выпуклые компактные значения и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$z'(t) \in F_B(t, z(t)). \tag{5.101}$$

Нетрудно видеть, что набор $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$ является полным и острым набором МВНФ для включения (5.101). Тогда по следствию 5.1.5 включение (5.101) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*, \rho_0)},\ t \in [0, T]$, которое является решением задачи (5.99), (5.100) и, следовательно, решением исходной задачи (5.22), (5.23). $\square$

Определение 5.1.22. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.3), (5.4), (5.94)–(5.96), будем называть *правильной МВНФ* для включения (5.22) относительно области $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$, если, кроме условия (5.97), выполнено условие

$$\langle \nabla V(pz), py\rangle \leq \delta_0 \left\|\nabla V(pz)\right\| \left\|py\right\| \quad \text{для всех } \ y\in R(t,z), \tag{5.102}$$

где $\|pz\|\geq r_0,\ \|qz\|\leq \rho_2,\ \delta_0<0$, и если существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (5.80), (5.81).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.20. *Пусть для включения (5.22) можно указать правильную МВНФ* $\{V(\zeta),W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V,\infty)\neq 0.$$

Тогда включение (5.22) имеет по крайней мере одно T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\left(r^*,\rho_0\right)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть снова мультиотображение F является квазисечением мультиотображения R. В силу (jjj) достаточно показать, что задача (5.99), (5.100) имеет решение.

Пусть $\varepsilon>0$ то же, что и в определении правильной МВНФ. Мультиотображение $C:\mathbb{R}^n\to P(\mathbb{R}^n)$ задано как

$$C(z)=\left\{ y\in\mathbb{R}^n:\ \begin{array}{c} \langle \gamma(z)\nabla V(pz),py\rangle\leq\delta_0\left\|\nabla V(pz)\right\|\left\|py\right\|, \\ \frac{|\langle qy,\eta(z)qz\rangle|}{\|qz\|}\leq\frac{\rho_2-\rho_1}{2T}-\varepsilon, \\ \frac{2\pi}{T}(N-1)+\varepsilon\leq\langle\eta(z)\nabla W(qz),qy\rangle\leq\frac{2\pi}{T}N-\varepsilon; \end{array}\right\},$$

где N – целое,

$$\gamma(z)=\begin{cases} 0, & \text{если } \|pz\|\leq r_0,\|qz\|\leq\rho_2, \\ 1, & \text{если } \|pz\|>r_0,\|qz\|\leq\rho_2; \end{cases}$$

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|pz\| < r^*, \|qz\| \leq \rho_2, \\ 0, & \text{если } \|pz\| \geq r^*, \|qz\| \leq \rho_2. \end{cases}$$

Легко видеть, что C является замкнутым мультиотображением. Тогда мультиотображение $F_C(t,z) = F(t,z) \cap C(z)$ имеет выпуклые компактные значения и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$z'(t) \in F_C(t, z(t)). \tag{5.103}$$

Нетрудно видеть, что пара функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ будет являться правильной МВНФ для включения (5.103). Тогда по следствию 5.1.6 включение (5.103) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*,\rho_0)}$, $t \in [0,T]$, которое является решением задачи (5.99), (5.100) и, следовательно, решением исходной задачи (5.22), (5.23). □

5.1.9 Набор многолистных направляющих функций для случая непрерывной правой части

Рассмотрим периодическую задачу (5.54), (5.55) для дифференциального включения, правая часть которого является ограниченным непрерывным мультиотображением, удовлетворяющим условию T-периодичности по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для п.в. $t \in [0,T]$ выполнены соотношения, аналогичные (5.94)–(5.96).

Определение 5.1.23. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (5.3), (5.4), (5.62), (5.94)–(5.96), образуют *полный и острый на-*

бор МВНФ для включения (5.54) относительно области $\Omega\left(r^{*},\rho_1,\rho_2\right)$, если для некоторого $\varepsilon>0$ выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{y\in R(t,z)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|}\le\frac{\rho_2-\rho_1}{2T}-\varepsilon,\quad z\in\Omega(r^{*},\rho_1,\rho_2);\tag{5.104}$$

$$\langle\nabla V_i(pz),py\rangle\le 0\quad\text{для всех}\ \ y\in R(t,z),\tag{5.105}$$

где $\|pz\|\ge r_0$, $\|qz\|\le\rho_2$, $i=1,...,k$; и для каждого фиксированного $\zeta\in\mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\|\ge r_0$ множество

$$K(\zeta)=\left\{\eta\in\mathbb{R}^{n-2}:\eta=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\nabla V_i(\zeta),\ \gamma_1,...,\gamma_k\ge 0\right\}$$

является конусом.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.21. *Пусть для включения (5.54) можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *МВНФ относительно области* $\Omega\left(r^{*},\rho_1,\rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}\left(V_1,\infty\right)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}\left(V_1,\infty\right)\neq 0.$$

Тогда включение (5.54) имеет по крайней мере одно T*-периодическое решение* $z_{*}(\cdot)$ *такое, что* $z_{*}(t)\in\overline{G\left(r^{*},\rho_0\right)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 5.1.3 (см. схему доказательства теоремы 5.1.10). □

Определение 5.1.24. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.3), (5.4), (5.94)–(5.96) будем называть *правильной МВНФ* для включения (5.54) относительно области $\Omega\left(r^{*},\rho_1,\rho_2\right)$, если, кроме условия (5.104), выполнено условие

$$\langle\nabla V(pz),py\rangle\le\delta_0\,\|\nabla V(pz)\|\,\|py\|\quad\text{для всех}\ \ y\in R(t,z),\tag{5.106}$$

где $\|pz\| \geq r_0$, $\|qz\| \leq \rho_2$, $\delta_0 < 0$, и если существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (5.80), (5.81).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.22. *Пусть для включения (5.54) можно указать правильную МВНФ* $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V, \infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда включение (5.54) имеет по крайней мере одно T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 5.1.4 (см. схему доказательства теоремы 5.1.10). □

5.1.10 Набор негладких многолистных направляющих функций для случая дифференциальных уравнений

Далее в качестве основного аппарата исследования периодических решений будет использоваться развитие на "негладкий" случай метода многолистных векторных направляющих функций.

Сначала будем рассматривать периодическую задачу (5.28), (5.29) для дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}^n$, предполагая, что функция $f(t, z)$ непрерывна по совокупности переменных, непрерывно дифференцируема по второму аргументу и T-периодична по первому аргументу $(T > 0)$.

Пусть на Π задана скалярная локально липшицева функция $W(\varphi, \rho)$, удовлетворяющая условиям (5.4) и (5.30).

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть заданы скалярные локально липшицевы функции

$$V_1(\zeta), V_2(\zeta), ..., V_k(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2},\ k \geq 1, \tag{5.107}$$

удовлетворяющие условию (5.62).

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\cdot)$ и $\beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\cdot)$ такие, что

$$\sup_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)} \langle w, qf(t,z)\rangle < \alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t) \quad \text{для всех } \ w \in \partial W(qz), \tag{5.108}$$

$$\inf_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)} \langle w, qf(t,z)\rangle > \beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t) \quad \text{для всех } \ w \in \partial W(qz), \tag{5.109}$$

причем

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau < 2\pi N, \tag{5.110}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.25. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (5.4), (5.30), (5.62), (5.108)–(5.110) образуют *полный набор строгих негладких МВНФ* для уравнения (5.28), если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{|\langle qf(t,z), qz\rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2-\rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2); \tag{5.111}$$

$$\langle v, pf(t,z)\rangle < 0 \quad \text{для всех } \ v \in \partial V_i(pz), \tag{5.112}$$

где $i = 1, ..., k,\ \|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2.$

Справедлив следующий аналог теоремы 5.1.11.

Теорема 5.1.23. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать полный набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ *строгих негладких МВНФ. Пусть топологический индекс на бесконечности* ind (V_1, ∞) *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\text{ind}\,(V_1, \infty) \neq 0.$$

Тогда уравнение (5.28) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in G(r^*, \rho_0)$, $t \in [0, T]$.*

Замечание 5.1.4. Из условий (5.112) вытекает гомотопность векторных полей $\partial V_i(pz)$, $i = 1, ..., k$, и $-pf(0, z)$, $z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| \geq r_0$, $\|qz\| \leq \rho_2$. Поэтому все поля $\partial V_i(\zeta)$, $i = 1, ..., k$, гомотопны друг другу и имеют одинаковую топологическую степень. Следовательно,

$$\mathrm{ind}\,(V_i, \infty) \neq 0, \quad i = 1, ..., k.$$

Определение 5.1.26. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (5.4), (5.30), (5.62), (5.108)–(5.110), образуют *полный и острый набор негладких МВНФ* для уравнения (5.28), если функции $V_i(\zeta)$, $i = 1, ..., k$, являются прямыми потенциалами и, кроме условия (5.111), выполнено следующее условие:

$$\langle \upsilon, pf(t, z) \rangle \leq 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon \in \partial V_i(pz), \tag{5.113}$$

где $i = 1, ..., k$, $\|pz\| \geq r_0$, $\|qz\| \leq \rho_2$, и для каждого фиксированного $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\| \geq r_0$ множество

$$K(\zeta) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^{n-2} : \eta = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \upsilon,\ \upsilon \in \partial V_i(\zeta),\ i = 1, ..., k,\ \gamma_1, ..., \gamma_k \geq 0 \right\}$$

является конусом.

Из теремы 5.1.23 вытекает следующий аналог теоремы 5.1.12.

Теорема 5.1.24. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать полный и острый набор $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ негладких МВНФ. Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}\,(V_1, \infty)$ *функции $V_1(\zeta)$ отличен от нуля:*

$$\mathrm{ind}\,(V_1, \infty) \neq 0.$$

Тогда уравнение (5.28) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in G(r^*, \rho_0)$, $t \in [0, T]$.*

Определение 5.1.27. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.30), (5.108)–(5.110), назовем *правильной негладкой МВНФ* для уравнения (5.28), если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом и, кроме условия (5.111), выполнено условие:

$$\langle \upsilon, pf(t,z)\rangle \le \delta_0 \|\partial V(pz)\| \ \|pf(t,z)\| \ \text{ для всех } \ \upsilon \in \partial V(pz), \qquad (5.114)$$

где $\delta_0 < 0,\ 0 \le t \le T, \|pz\| \ge r_0,\ \|qz\| \le \rho_2$, и если существует локально липшицева функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям

$$\|\partial V(\zeta)\| \ge \|\partial V_1(\zeta)\|, \quad \|\zeta\| \ge r_0, \qquad (5.115)$$

и

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} |V_1(\zeta)| = \infty. \qquad (5.116)$$

Из теремы 5.1.23 вытекает следующий аналог теоремы 5.1.13.

Теорема 5.1.25. *Пусть для уравнения* (5.28) *можно указать правильную негладкую МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V,\infty) \ne 0.$$

Тогда уравнение (5.28) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in G(r^*,\rho_0)$, $t \in [0,T]$.

Замечание 5.1.5. Следуя методу М.А. Красносельского сглаживания правой части, можно показать, что теоремы 5.1.23–5.1.25 справедливы и для уравнения (5.28) с непрерывной по совокупности переменных правой частью $f(t,z)$.

5.1.11 Набор негладких многолистных направляющих функций для случая выпуклой правой части

Вернемся к рассмотрению периодической задачи (5.1), (5.2) для дифференциального включения, правая часть которого является пн. св. по совокупности переменных мультиотображением, удовлетворяющим условиям подлинейного роста и T-периодичности по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha^*(\cdot)$ и $\beta^*(\cdot)$ такие, что п.в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z)} \langle w, qy \rangle < \alpha^*(t) \text{ для всех } w \in \partial W(qz), \tag{5.117}$$

$$\inf_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t,z)} \langle w, qy \rangle > \beta^*(t) \text{ для всех } w \in \partial W(qz), \tag{5.118}$$

причем

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha^*(\tau) d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta^*(\tau) d\tau < 2\pi N, \tag{5.119}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.28. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (5.4), (5.30), (5.62), (5.117)–(5.119), образуют *полный набор строгих негладких МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{y \in F(t,z)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2); \tag{5.120}$$

$$\langle \upsilon, py \rangle < 0 \quad \text{для всех } \ y \in F(t,z),\ \upsilon \in \partial V_i(pz), \tag{5.121}$$

где $i = 1, ..., k,\ \|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2$.

Теорема 5.1.26. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ *строгих негладких МВНФ относительно* *области* $\Omega\left(r^{*},\rho_{1},\rho_{2}\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}\left(V_{1},\infty\right)$ *функции* $V_{1}(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}\left(V_{1},\infty\right)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_{*}(\cdot)$ *такое, что* $z_{*}(t)\in G\left(r^{*},\rho_{0}\right),\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 5.1.23 и замечания 5.1.5 (см. схему доказательства теоремы 5.1.1). □

Определение 5.1.29. Функции $\{V_{1}(\zeta),...,V_{k}(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (5.4), (5.30), (5.62), (5.117)–(5.119), образуют *полный и острый набор негладких МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\left(r^{*},\rho_{1},\rho_{2}\right)$, если функции $V_{i}(\zeta),\ i=1,...,k$, являются прямыми потенциалами, и кроме условия (5.120), выполнено следующее условие:

$$\langle\upsilon,py\rangle\leq 0\quad\text{для всех }\ y\in F(t,z),\ \upsilon\in\partial V_{i}(pz),\tag{5.122}$$

где $i=1,...,k,\ \ \|pz\|\geq r_{0},\ \ \|qz\|\leq\rho_{2}$, и для каждого фиксированного $\zeta\in\mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\|\geq r_{0}$ множество

$$K(\zeta)=\left\{\eta\in\mathbb{R}^{n-2}:\eta=\sum_{i=}^{k}\gamma_{i}\upsilon,\ \upsilon\in\partial V_{i}(\zeta),\ i=1,...,k,\ \gamma_{1},...,\gamma_{k}\geq 0\right\}$$

является конусом.

Теорема 5.1.27. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_{1}(\zeta),...,V_{k}(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *негладких МВНФ относительно области* $\Omega\left(r^{*},\rho_{1},\rho_{2}\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}\left(V_{1},\infty\right)$ *функции* $V_{1}(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}\left(V_{1},\infty\right)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_{*}(\cdot)$ *такое, что* $z_{*}(t)\in G\left(r^{*},\rho_{0}\right),\ t\in[0,T]$.

Доказательство. В силу леммы 5.1.3 существует функция $g : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$, удовлетворяющая условию (5.76). Для включения

$$z'(t) \in F(t, z(t)) + \varepsilon_m g(pz(t)), \tag{5.123}$$

соотношение (5.122) будет выполняться в строгой форме. Рассмотрим

$$\langle \upsilon, py + \varepsilon_m g(pz) \rangle = \langle \upsilon, py \rangle + \varepsilon_m \langle \upsilon, g(pz) \rangle < 0,$$

для всех $\upsilon \in \partial V_i(pz),\ y \in F(t, z),\ i = 1, ..., k,\ \|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2$. Следовательно, набор функций $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ является полным набором строгих негладких МВНФ для включения (5.123) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$ при каждом $\varepsilon_m > 0$. Тогда по теореме 5.1.26 каждое включение (5.123) имеет T-периодическое решение $z_m(\cdot)$ такое, что $z_m(t) \in \overline{G(r^*, \rho_0)},\ t \in [0, T]$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ включения (5.1) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. □

Определение 5.1.30. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.30), (5.117)–(5.119), назовем *правильной негладкой МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является прямым потенциалом и, кроме условия (5.120), выполнено условие:

$$\langle \upsilon, py \rangle \leq \delta_0 \, \|\partial V(pz)\| \ \|py\| \quad \text{для всех } \ y \in F(t, z),\ \upsilon \in \partial V(pz)$$

где $\|pz\| \geq r_0,\ \|qz\| \leq \rho_2,\ \delta_0 < 0$, и если существует локально липшицева функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (5.115) и (5.116).

Теорема 5.1.28. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать правильную негладкую МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ *относительно области* $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V, \infty)$ *функции* $V(\zeta)$

отличен от нуля:

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G(r^*, \rho_0)},\ t \in [0, T]$.

Доказательство. Построим функцию $\widetilde{V}(\zeta) = V(\zeta) + \frac{\delta_0}{2} V_1(\zeta)$. При этом пара функций $\left\{\widetilde{V}(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\right\}$ будет являться строгой негладкой МВНФ для включения (5.1). Из (5.81) вытекает, что выполнено условие (5.78). Тогда по теореме 5.1.26 включение (5.1) имеет T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G(r^*, \rho_0)}, \quad t \in [0, T]$. □

Рассмотрим теперь периодическую задачу (5.1), (5.2) в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодично по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для п.в. $t \in [0, T]$ выполнены условия

$$\sup_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z)} \langle w, qy \rangle \leq \alpha^*(t) - \varepsilon \text{ для всех } w \in \partial W(qz), \tag{5.124}$$

$$\inf_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t,z)} \langle w, qy \rangle \geq \beta^*(t) + \varepsilon \text{ для всех } w \in \partial W(qz), \tag{5.125}$$

причем

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \leq \int\limits_0^T \alpha^*(\tau) d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta^*(\tau) d\tau \leq 2\pi N - \varepsilon, \tag{5.126}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.31. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (5.4), (5.30), (5.62), (5.124)–(5.126), образуют *полный и острый набор негладких МВНФ* для включения (5.1) относительно области

$\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$, если для некоторого $\varepsilon>0$ выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{y\in F(t,z)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|}\le\frac{\rho_2-\rho_1}{2T}-\varepsilon,\quad z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2);\tag{5.127}$$

$$\langle\upsilon,py\rangle\le 0\quad\text{для всех }\ y\in F(t,z),\ \upsilon\in\partial V_i(pz),\tag{5.128}$$

где $\|pz\|\ge r_0$, $\|qz\|\le\rho_2$, $i=1,...,k$, и для каждого фиксированного $\zeta\in\mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\|\ge r_0$ множество

$$K(\zeta)=\left\{\eta\in\mathbb{R}^{n-2}:\eta=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\upsilon,\ \upsilon\in\partial V_i(\zeta),\ i=1,...,k;\ \gamma_1,...,\gamma_k\ge 0\right\}$$

является конусом.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.29. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta),...,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *негладких МВНФ относительно области* $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}\left(V_1,\infty\right)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}\left(V_1,\infty\right)\ne 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\left(r^*,\rho_0\right)}$, $t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 5.1.27 (см. схему доказательства теоремы 5.1.3). □

Определение 5.1.32. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.30), (5.124)–(5.126), будем называть *правильной негладкой МВНФ* для включения (5.1) относительно области $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$, если, кроме условия (5.127), выполнено условие

$$\langle\upsilon,py\rangle\le\delta_0\left\|\partial V(pz)\right\|\left\|py\right\|\quad\text{для всех }\ y\in F(t,z),\ \upsilon\in\partial V(pz),\tag{5.129}$$

где $\|pz\|\ge r_0$, $\|qz\|\le\rho_2$, $\delta_0<0$, и если существует локально липшицева функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (5.115), (5.116).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.30. *Пусть для включения* (5.1) *можно указать правильную негладкую МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V,\infty)\neq 0.$$

Тогда включение (5.1) *имеет* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in\overline{G\,(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 5.1.28 (см. схему доказательства теоремы 5.1.3). □

5.1.12 Набор негладких многолистных направляющих функций для случая непрерывной правой части

Рассмотрим периодическую задачу (5.54), (5.55) для дифференциального включения, правая часть которого является ограниченным непрерывным мультиотображением, удовлетворяющим условию T-периодичности по первому аргументу.

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon>0$ и для п.в. $t\in[0,T]$ выполнены условия

$$\sup_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)}\ \sup_{y\in R(t,z)}\langle w,qy\rangle\leq\alpha^*(t)-\varepsilon \text{ для всех } w\in\partial W(qz),\tag{5.130}$$

$$\inf_{z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)}\ \inf_{y\in R(t,z)}\langle w,qy\rangle\geq\beta^*(t)+\varepsilon \text{ для всех } w\in\partial W(qz),\tag{5.131}$$

причем

$$2\pi(N-1)+\varepsilon\leq\int\limits_0^T\alpha^*(\tau)d\tau,\quad \int\limits_0^T\beta^*(\tau)d\tau\leq 2\pi N-\varepsilon,\tag{5.132}$$

где N – целое число.

Определение 5.1.33. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (5.4), (5.30), (5.62), (5.130)–(5.132), образуют *полный и острый набор негладких МВНФ* для включения (5.54) относительно области $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{y\in R(t,z)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|} \le \frac{\rho_2-\rho_1}{2T}-\varepsilon, \quad z\in\Omega(r^*,\rho_1,\rho_2); \tag{5.133}$$

$$\langle \upsilon, py\rangle \le 0 \quad \text{для всех } \ y\in R(t,z),\ \upsilon\in\partial V_i(pz), \tag{5.134}$$

где $\|pz\| \ge r_0$, $\|qz\| \le \rho_2$, $i = 1, ..., k$, и для каждого фиксированного $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\| \ge r_0$ множество

$$K(\zeta) = \left\{\eta\in\mathbb{R}^{n-2} : \eta = \sum_{i=1}^{k}\gamma_i\upsilon,\ \upsilon\in\partial V_i(\zeta),\, i=1,...,k;\, \gamma_1,...,\gamma_k \ge 0\right\}$$

является конусом.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.31. *Пусть для включения (5.54) можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *негладких МВНФ относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V_1,\infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V_1,\infty) \ne 0.$$

Тогда включение (5.54) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t)\in\overline{G\,(r^*,\rho_0)},\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 5.1.27 (см. схему доказательства теоремы 5.1.10). □

Определение 5.1.34. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (5.4), (5.30), (5.130)–(5.132), будем называть *правильной негладкой*

МВНФ для включения (5.54) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$, если, кроме условия (5.133), выполнено условие

$$\langle \upsilon, py\rangle \le \delta_0 \left\|\partial V(pz)\right\| \left\|py\right\| \quad \text{для всех } \; y \in R(t,z),\; \upsilon \in \partial V(pz), \tag{5.135}$$

где $\|pz\| \ge r_0,\; \|qz\| \le \rho_2,\; \delta_0 < 0$, и если существует локально липшицева функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (5.115), (5.116).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1.32. *Пусть для включения (5.54) можно указать правильную негладкую МВНФ* $\{V(\zeta),\, W(\varphi, \rho)\}$ *относительно* $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V, \infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля:*

$$\operatorname{ind}(V, \infty) \ne 0.$$

Тогда включение (5.54) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*, \rho_0)},\; t \in [0, T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 5.1.28 (см. схему доказательства теоремы 5.1.10). $\square$

5.2 Бифуркации периодических решений

5.2.1 Случай дифференциальных уравнений

Пусть $U \subset X$ – открытое ограниченное множество метрического пространства X, $F\colon \overline{U} \to K(X)$ – компактное CJ-мультиотображение такое, что $x \notin F(x)$ для всех $x \in \partial U$. Тогда определена топологическая степень $\deg(i - F, \overline{U})$ многозначного векторного поля, порожденного мультиотображением F. Эта топологическая характеристика обладает всеми основными свойствами классической топологической стпепени (см. п. 2.1).

Рассмотрим следующее включение:

$$x \in F(x, \mu), \tag{5.136}$$

где $F\colon X \times \mathbb{R} \to K(X)$ является CJ-мультиотображением, а $\mu \in \mathbb{R}$ – параметром.

Пусть справедливы следующие предположения:

$(F1)$ мультиотображение F является вполне пн. св. и $0 \in F(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$;

$(F2)$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого μ, $0 < |\mu| < \varepsilon_0$ найдется $\delta_\mu > 0$ такое, что $x \notin F(x, \mu)$ для всех $x \in B_X(0, \delta_\mu) \setminus \{0\}$, где $B_X(0, \delta_\mu)$ обозначает замкнутый шар в X радиуса δ_μ с центром в нуле;

$(F3)$ бифуркационный индекс в точке $(0, 0)$, определяемый равенством

$$Bi(F; (0,0)) = \lim_{\mu \to 0^+} \deg(i - F, B_X(0, \delta_\mu)) - \lim_{\mu \to 0^-} \deg(i - F, B_X(0, \delta_\mu)),$$

отличен от нуля.

Символом $\mathfrak{S}$ обозначим множество всех нетривиальных решений включения (5.136), т.е.

$$\mathfrak{S} = \{(x, \mu) \in X \times \mathbb{R} \colon x \neq 0 \text{ и } x \in F(x, \mu)\}.$$

Справедливо следующее утверждение (см. [127]).

Лемма 5.2.1. *Пусть выполнены условия* $(F1) - (F3)$. *Тогда существует связное множество* $\mathcal{R} \subset \mathfrak{S}$ *такое, что* $(0, 0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *является неограниченным, либо* $\overline{\mathcal{R}} \ni (0, \mu_*)$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$x'(t) = f(t, x(t), \mu) \tag{5.137}$$

в предположении, что

$(f1)$ непрерывное отображение $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ является T-периодическим по первому аргументу ($T > 0$);

$(f2)$ существует $c > 0$ и положительная функция $h \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ такие, что $h(0) = 0$ и

$$|f(t, x, \mu)| \leq c\, h(|\mu|)\, |x|$$

для всех $(t, x, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$;

$(f3)$ для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ уравнение (5.137) имеет решение $x \colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ такое, что $x(0) = x(T) = 0$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = i - q$, где i – тождественный оператор. Ниже элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ обозначаются через ξ. Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

Дифференциальное уравнение (5.137) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu), \\ \frac{d\varphi}{dt} = h(t, \xi, \varphi, \rho, \mu), \\ \frac{d\rho}{dt} = w(t, \xi, \varphi, \rho, \mu), \end{cases} \tag{5.138}$$

где непрерывные функции g, h, w являются T-периодичными по первому аргументу.

Для $(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ символом Σ_z обозначим множество решений следующей задачи:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu), \\ x(0) = z. \end{cases}$$

Известно, что Σ_z является R_δ-множеством в пространстве $C([0,T]; \mathbb{R}^n)$ (см. определение 2.1.4). Пусть мультиотображение $\Sigma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to C([0,T]; \mathbb{R}^n)$ задано как

$$\Sigma(z, \mu) = \Sigma_{(z,\mu)}.$$

Тогда Σ является J-мультиотображением (см., например, [100, 119]).

Определим мультиоператор $U_T\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to K(\mathbb{R}^n)$ сдвига по траекториям уравнения (5.137) следующим образом

$$U_T(z, \mu) = \big\{ x(T)\colon x \in \Sigma(z, \mu) \big\}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (5.137) эквивалентно включению

$$z \in U_T(z, \mu). \tag{5.139}$$

Из условий $(f1)-(f2)$ следует, что U_T является CJ-мультиоператором (см., например, [100, 119]). Кроме того, $0 \in U_T(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$. Символом $\mathcal{S}$ обозначим множество всех нетривиальных решений включения (5.139), т.е.

$$\mathcal{S} = \{ (z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon z \neq 0 \text{ и } z \in U_T(z, \mu) \}.$$

Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi, \rho) \colon \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}.$$

На Π для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ пусть $W \colon \Pi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задает скалярную непрерывно дифференцируемую функцию $W(\cdot, \cdot, \mu)$, для которой

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} W(\varphi, \rho, \mu) > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi, \tag{5.140}$$

$$W(\varphi + 2\pi, \rho, \mu) = W(\varphi, \rho, \mu) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \tag{5.141}$$

Из (5.141) легко следует, что

$$\nabla W(\varphi + 2\pi, \rho, \mu) = \nabla W(\varphi, \rho, \mu),$$

где $\nabla W(\varphi, \rho, \mu) = \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{\partial W}{\partial \rho}\right)$.

Для $r_* > 0$ определим область $G(r_*) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|pz\| < r_*,\ \|qz\| < r_*\}$.

Определение 5.2.1. Пара функций $\{V(\xi, \mu), W(\varphi, \rho, \mu)\}$, обладающих свойствами (5.140)–(5.141), называется *локальной многолистной направляющей функцией* задачи (5.139) относительно $(0, 0)$, если для всех $\mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\frac{\partial V(0,\mu)}{\partial \xi} = 0$, и если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $\mu \colon 0 < |\mu| \le \varepsilon_0$ найдется $r_\mu > 0$ такое, что:

$(a1)$ для $0 < \|pz\| < r_\mu$ и $\|qz\| < r_\mu$:

$$\left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle < 0;$$

$(a2)$ для $0 < \|qz\| < r_\mu$:

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} h(t, 0, \varphi, \rho, \mu) + \frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \rho} w(t, 0, \varphi, \rho, \mu) < 0;$$

$(a3)$ функции $\alpha(t, \mu)$ и $\beta(t, \mu)$, определяемые равенствами

$$\alpha(t, \mu) = \sup_{z \in G(r_\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial qz}, qf(t, z, \mu) \right\rangle,$$

$$\beta(t, \mu) = \inf_{z \in G(r_\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial qz}, qf(t, z, \mu) \right\rangle,$$

являются непрерывными;

$(a4)$ существует такое целое число N_μ, что

$$2\pi(N_\mu - 1) < \int_0^T \alpha(s,\mu)ds,\ \int_0^T \beta(s,\mu)ds < 2\pi N_\mu.$$

Из приведенного определения следует, что для каждого μ: $0 < |\mu| \leq \varepsilon_0$ корректно определена топологическая степень $\deg\big(\frac{\partial V(\cdot,\mu)}{\partial\xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0,r_\mu)\big)$ (см., например, [40]). Обозначим

$$\operatorname{ind} V = \lim_{\mu\to 0^+} \deg\left(\frac{\partial V(\cdot,\mu)}{\partial\xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0,r_\mu)\right) - \lim_{\mu\to 0^-} \deg\left(\frac{\partial V(\cdot,\mu)}{\partial\xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0,r_\mu)\right).$$

Теорема 5.2.1. *Пусть выполнены условия* $(f1)-(f3)$. *Предположим, что для уравнения (5.137) можно указать локальную многолистную направляющую функцию относительно* $(0,0)$ *такую, что* $\operatorname{ind} V \neq 0$. *Тогда существует связное множество* $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ *такое, что:*

- (i) *каждой точке* $(z,\mu) \in \overline{\mathcal{C}}$ *соответствует решение* $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *уравнения* (5.137), *для которого* $x(0) = x(T) = z$;
- (ii) $(0,0) \in \overline{\mathcal{C}}$ *и либо* $\mathcal{C}$ *неограничено, либо* $\overline{\mathcal{C}} \ni (0,\mu_*)$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

В частности, существует последовательность $\{x_n\}$ *решений уравнения* (5.137), $\{z_n\} \subset \mathcal{S}$, $x_n(0) = x_n(T) = z_n$, *такая, что* $\{x_n\}$ *неограничена или* $\{x_n\}$ *сходится к решению* x_* *уравнения* (5.137), *для которого* $x_*(0) = x_*(T) = 0$.

Доказательство. Очевидно, мультиоператор сдвига U_T удовлетворяет условию $(F1)$ леммы 5.2.1. Покажем, что он удовлетворяет и условию $(F2)$. Для этой цели покажем, что включение (5.139) имеет для каждого μ, $0 < |\mu| \leq \varepsilon_0$ только тривиальные решения на шаре $B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)$, где

$$\delta_\mu = \frac{1}{2e^{cTh(|\mu|)}} r_\mu.$$

Предположим противное, что существует нетривиальное решение $z \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_\mu)$. Тогда существует функция x такая, что

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu) \ \text{ для } \ t \in [0, T], \\ x(0) = x(T) = z. \end{cases}$$

Из равенства

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), \mu) ds$$

следует, что

$$|x(t)| \le |z| + \int_0^t |f(s, x(s), \mu)| ds \le |z| + \int_0^t c\, h(|\mu|)\, |x(s)| ds.$$

Применяя лемму Гроноулла, получаем

$$|x(t)| \le |z| e^{cTh(|\mu|)} \le \frac{1}{2} r_\mu < r_\mu.$$

Если найдется $\Omega \subset (0, T)$ такое, что

$$\xi(t) = px(t) = 0 \quad \text{для} \quad t \in \Omega$$

и

$$\xi(t) \neq 0 \ \text{ для } \ t \in (0, T) \setminus \Omega,$$

то из условия $(a1)$ определения 5.2.1 следует соотношение

$$\left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle < 0$$

для всех $t \in (0, T) \setminus \Omega$. Следовательно,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle dt < 0.$$

С другой стороны,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, \frac{d\xi}{dt} \right\rangle dt =$$

$$= V(\xi(T), \mu) - V(\xi(0), \mu) = 0.$$

Получили противоречие.

Если $\xi(t) = 0$ для всех $t \in (0,T)$, например, $x(t) = qx(t) \in \mathbb{R}^2$ для всех $t \in (0,T)$, то, из того, что $x \neq 0$ следует, что найдется $\Omega \subset (0,T)$ такое, что $x(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,T] \setminus \Omega$ и $x(t) = 0$ для $t \in \Omega$. Поэтому

$$\frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\varphi} h(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) + \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\rho} w(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) < 0$$

для $t \in [0,T] \setminus \Omega$.

Следовательно,

$$\int_0^T \Bigg(\frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\varphi} h(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) + \\ + \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\rho} w(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) \Bigg)\, dt < 0.$$

С другой стороны,

$$\int_0^T \Bigg(\frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\varphi} h(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) + \\ + \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\rho} w(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) \Bigg)\, dt = \\ = W(\varphi(T),\rho(T),\mu) - W(\varphi(0),\rho(0),\mu) = 0.$$

Получили противоречие. Таким образом, условие $(F2)$ также выполняется.

Итак, топологическая степень $\deg\big(i - U_T(\cdot,\mu), B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)\big)$ существует. Для ее вычисления выберем $\widetilde{r}_\mu > 0$ такое, что

$$G(\widetilde{r}_\mu) \subset B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu).$$

Так как включение (5.139) имеет только тривиальные решения на шаре $B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)$, то

$$\deg\big(i - U_T(\cdot,\mu), B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)\big) = \deg\big(i - U_T(\cdot,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)\big).$$

Рассмотрим мультиотображение

$$\Phi(t,z,\mu) = z - pU_t(z,\mu) - qU_T(z,\mu),\ t \in (0,T],\ z \in G(\widetilde{r}_\mu).$$

Так как $p\Phi(t,z,\mu) = p(z - U_t(z,\mu))$, $q\Phi(t,z,\mu) = q(z - U_T(z,\mu))$ и нет нетривиальных решений на $G(\widetilde{r}_\mu)$, то имеем

$$0 \notin p\Phi(t,z,\mu), \quad t \in (0,T],\ z \in \partial G(\widetilde{r}_\mu);$$

$$0 \notin q\Phi(t,z,\mu), \quad t \in (0,T],\ z \in \partial G(\widetilde{r}_\mu).$$

Поэтому

$$0 \notin \Phi(t,z,\mu), \quad t \in (0,T],\ z \in \partial G(\widetilde{r}_\mu).$$

Если $U_t(z,\mu)$ – траектория, выпущенная из точки z, то

$$\frac{d}{dt}U_t(z,\mu) = f(t, U_t(z,\mu)),$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}pU_t(z,\mu) = pf(t, U_t(z,\mu)).$$

Полагая здесь $t = 0$, получим

$$\lim_{t\to+0} \frac{pU_t(z,\mu) - pz}{t} = pf(0,z,\mu).$$

Откуда следует, что поля $-pf(0,z,\mu)$ и $p(z - U_\varepsilon(z,\mu))$ при малых $\varepsilon > 0$ направлены непротивоположно.

В силу $(a1)$

$$\langle \nabla V(pz,\mu), -pf(0,z,\mu)\rangle > 0, \quad z \in \partial G(\widetilde{r}_\mu),$$

где $\nabla V(pz,\mu) = \frac{\partial V(pz,\mu)}{\partial pz}$.

Так как

$$0 \notin q(z - U_T(z,\mu)), \quad t \in (0,T],\ z \in \partial G(\widetilde{r}_\mu),$$

то поля

$$-pf(0,z,\mu) + q(z - U_T(z,\mu)),$$

$$\nabla V(pz,\mu) + q(z - U_T(z,\mu)),$$

а также поля

$$-pf(0,z,\mu) + q(z - U_T(z,\mu)),$$

$$p(z - U_\varepsilon(z,\mu)) + q(z - U_T(z,\mu)) = \Phi(\varepsilon, z, \mu)$$

непротивоположно направлены при $z \in \partial G(\widetilde{r}_\mu)$.

Поэтому

$$\deg(\nabla V(pz,\mu) + q(z - U_T(z,\mu)), G(\widetilde{r}_\mu)) =$$

$$= \deg(-pf(0,z,\mu) + q(z - U_T(z,\mu)), G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\Phi(\varepsilon,z,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)).$$

Откуда

$$\deg(i - U_T(\cdot,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz,\mu) + q(z - U_T(z,\mu)), G(\widetilde{r}_\mu)). \quad (5.142)$$

Из условия (5.140) вытекает, что уравнение

$$W(\varphi,\rho,\mu) = w$$

однозначно разрешимо относительно φ.

Определим функцию $\Psi(\lambda,z,\mu) : [0,1] \times G(\widetilde{r}_\mu) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ равенствами

$$\varphi(\Psi(\lambda,z,\mu)) = \theta((1-\lambda)\rho(qU_T(z,\mu)),\, W(\varphi(qU_T(z,\mu)), \rho(qU_T(z,\mu)),\mu)),$$

$$\rho(\Psi(\lambda,z,\mu)) = (1-\lambda)\rho(qU_T(z,\mu)).$$

Полагая $\varphi = \varphi(qU_T(z,\mu))$, $\rho = \rho(qU_T(z,\mu))$ в тождестве $\theta(\rho, W(\varphi,\rho,\mu)) \equiv \varphi$, получим

$$\theta(\rho(qU_T(z,\mu)),\, W(\varphi(qU_T(z,\mu)), \rho(qU_T(z,\mu)),\mu)) = \varphi(qU_T(z,\mu))$$

или

$$\theta(\Psi(0,z,\mu)) = \varphi(qU_T(z,\mu)).$$

Отсюда и из соотношений $\rho(\Psi(0,z,\mu)) = \rho(qU_T(z,\mu))$, $\rho(\Psi(1,z,\mu)) \equiv 0$ следуют равенства

$$\Psi(0,z,\mu) = qU_T(z,\mu), \quad \Psi(1,z,\mu) \equiv 0.$$

Таким образом, кривая $\Gamma_{z,\mu}(\lambda) = \Psi(\lambda, z, \mu)$, где $0 \le \lambda \le 1$ а z, μ фиксированы, соединяет точки $\xi_0 = qU_T(z, \mu)$ и $\xi_1 = 0$. Далее, так как $W(\theta(\rho, w), \rho, \mu) = w$, то

$$W(\varphi(\Psi(\lambda, z, \mu)), \rho(\Psi(\lambda, z, \mu)), \mu) = W(\varphi(qU_T(z, \mu)), \rho(qU_T(z, \mu)), \mu),$$

т.е. функция $W(\varphi, \rho, \mu)$ имеет постоянное значение на $\Gamma_{z,\mu}(\lambda)$.

Положим

$$\Phi_1(\lambda, z, \mu) = \nabla V(pz, \mu) + qz - \Psi(\lambda, z, \mu), \quad \lambda \in [0, 1], \ z \in G(\widetilde{r}_\mu).$$

Непрерывная деформация $\Phi_1(\lambda, z, \mu)$ соединяет поля

$$\nabla V(pz, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)) \quad \text{и} \quad \nabla V(pz, \mu) + qz.$$

Покажем, что она невырождена на $\partial G(\widetilde{r}_\mu)$ и, более того,

$$0 \notin q\Phi_1(\lambda, z, \mu), \quad \lambda \in [0, 1], \ z \in \partial G(\widetilde{r}_\mu). \tag{5.143}$$

Предположим противное: найдутся $\lambda_* \in [0, 1]$, $z_* \in \partial G(\widetilde{r}_\mu)$ такие, что

$$0 \in q\Phi_1(\lambda_*, z_*, \mu), \quad 0 \in qz_* - q\Psi(\lambda_*, z_*, \mu).$$

Тогда

$$\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)) = \varphi(qz_*) + 2\pi k, \quad \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)) = \rho(qz_*).$$

Из условия (5.141) вытекает равенство

$$W(\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \mu) = W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) + 2\pi k.$$

Но

$$W(\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \mu) = W(\varphi(qU_T z_*), \rho(qU_T z_*), \mu)$$

и, следовательно,

$$W(\varphi(qU_T(z_*, \mu)), \rho(qU_T(z_*, \mu)), \mu) - W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) = 2\pi k. \tag{5.144}$$

Положим $\omega_*(t,\mu) = W(\varphi(qU_t(z_*,\mu)), \rho(qU_t(z_*,\mu)), \mu)$. Так как $z_* \in G(\widetilde{r}_\mu)$, то

$$U_t(z_*,\mu) \in G(r_\mu), \quad t \in (0,T].$$

Поэтому верны оценки

$$2\pi(N_\mu - 1) < \omega_*(T,\mu) - \omega_*(0,\mu) < 2\pi N_\mu.$$

Подставляя сюда равенства

$$\omega_*(0,\mu) = W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu),$$

$$\omega_*(T,\mu) = W(\varphi(qU_T(z_*,\mu)), \rho(qU_T(z_*,\mu)), \mu),$$

получим

$$2\pi(N_\mu - 1) < W(\varphi(qU_T(z_*,\mu)), \rho(qU_T(z_*,\mu)), \mu) - W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu),$$

$$W(\varphi(qU_T(z_*,\mu)), \rho(qU_T(z_*,\mu)), \mu) - W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) < 2\pi N_\mu,$$

что противоречит оценкам (5.144). Из соотношения (5.143) и

$$p\Phi_1(\lambda, z, \mu) = \nabla V(pz,\mu) \neq 0, \quad z \in G(\widetilde{r}_\mu),$$

следует, что $\Phi_1(\lambda, z, \mu)$ невырождена. Поэтому

$$\deg(\nabla V(pz,\mu) + q(z - U_T(z,\mu)), G(\widetilde{r}_\mu)) =$$

$$= \deg(\nabla V(pz,\mu) + qz, G(\widetilde{r}_\mu))$$

и в силу (5.142)

$$\deg(i - U_T(\cdot,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz,\mu) + qz, G(\widetilde{r}_\mu)).$$

Отсюда, применяя теорему о произведении степеней и свойство нормализации топологической степени, получаем

$$\deg(\nabla V(pz,\mu) + qz, G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)) \cdot \deg(qz, G(\widetilde{r}_\mu)) =$$

$$= \deg(\nabla V(pz,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)).$$

Таким образом, получаем

$$\deg(i - U_T(\cdot,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz,\mu), G(\widetilde{r}_\mu)) =$$

$$= \deg(\nabla V(pz,\mu), B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0, r_\mu)).$$

Теперь утверждение следует из леммы 5.2.1 и того факта, что ind $V \neq 0$. □

5.2.2 Случай дифференциальных включений

Рассматривается периодическая задача для семейства дифференциальных включений следующего вида:

$$z'(t) \in F(t, z(t), \mu), \tag{5.145}$$

$$z(0) = z(T), \tag{5.146}$$

в предположении, что

(H_1) $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \to Kv(\mathbb{R}^n)$ является T-периодическим мультиотображением ($T > 0$), удовлетворяющим верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста, где Λ – открытое подмножество $\mathbb{R}^k$;

(H_2) для каждого $\mu \in \Lambda$ задача (5.145), (5.146) имеет решение $z : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ такое, что $z(0) = z(T) = 0$.

Под решением задачи (5.145), (5.146) понимается пара (z,μ), удовлетворяющая (5.145) п.в. на $[0,T]$, где $z \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ является T-периодической абсолютно непрерывной функцией, $\mu \in \Lambda$. Из (H_2) следует, что $(0,\mu)$ является решением задачи (5.145), (5.146) для каждого $\mu \in \Lambda$. Эти решения называются тривиальными. Обозначим символом S множество всех нетривиальных решений задачи (5.145), (5.146).

Пусть $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$. Символом q обозначим оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = i - q$, где i – тождественный оператор. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ, элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ – через ζ. Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}.$$

Пусть на $\Pi \times \Lambda$ задана скалярная непрерывно дифференцируемая по первому аргументу и непрерывная по второму аргументу функция $W(\xi, \mu)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi,\ \mu \in \Lambda; \tag{5.147}$$

$$W(\varphi + 2\pi, \rho, \mu) = W(\varphi, \rho, \mu) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi,\ \mu \in \Lambda. \tag{5.148}$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2} \times \Lambda$ пусть задана скалярная непрерывно дифференцируемая по первому аргументу и непрерывная по второму аргументу функция $V(\zeta, \mu)$ такая, что $\frac{\partial V(0,\mu)}{\partial \zeta} = 0$ и выполнено условие коэрцитивности

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} V(\zeta, \mu) = +\infty. \tag{5.149}$$

Для каждого $\mu \in \Lambda$ выберем $\rho_1 := \rho_1(\mu)$, $\rho_2 := \rho_2(\mu)$ такие, что $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ и для $\vartheta_0 := \min V(\zeta, \mu)$, положим $\vartheta := \vartheta(\mu)$ такое, что $\vartheta > \vartheta_0$. Определим область

$$\Omega_\mu (\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(pz, \mu) < \vartheta, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}.$$

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(t, \mu)$, $\beta(t, \mu)$ такие, что для каждого $\mu \in \Lambda$ и п.в $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z,\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial qz}, qy \right\rangle < \alpha(t, \mu), \tag{5.150}$$

$$\inf_{z\in\Omega_\mu(\vartheta,\rho_1,\rho_2)}\ \inf_{y\in F(t,z,\mu)}\left\langle\frac{\partial W(qz,\mu)}{\partial qz},qy\right\rangle>\beta(t,\mu),\tag{5.151}$$

причем

$$2\pi(N_\mu-1)<\int\limits_0^T\alpha(\tau,\mu)d\tau,\quad\int\limits_0^T\beta(\tau,\mu)d\tau<2\pi N_\mu,\tag{5.152}$$

где N_μ целое число.

Дадим следующее определение.

Определение 5.2.2. Пару функций $\{V(\zeta,\mu),W(\xi,\mu)\}$, обладающих свойствами (5.147)–(5.152), будем называть *строгой многолистной векторной направляющей функцией (МВНФ)* для включения (5.145) относительно области $\Omega_\mu(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$ если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\ \sup_{y\in F(t,z,\mu)}\frac{|\langle qy,qz\rangle|}{\|qz\|}<\frac{\rho_2-\rho_1}{2T},\quad z\in\Omega_\mu(\vartheta,\rho_1,\rho_2);\tag{5.153}$$

$$\left\langle\frac{\partial V(pz,\mu)}{\partial pz},py\right\rangle<0,\qquad y\in F(t,z,\mu),\ V(pz,\mu)\geq\vartheta,\ \|qz\|\leq\rho_2.\tag{5.154}$$

Для всех $\mu\in\Lambda$ и $\rho_0(\mu)=\rho_0=(\rho_1+\rho_2)/2$ положим

$$G_\mu(\vartheta,\rho_0)=\{z\in\mathbb{R}^n: V(pz,\mu)<\vartheta,\ \|qz\|<\rho_0\},$$

$$\partial G_\mu(\vartheta,\rho_0)=\partial G_\zeta(\vartheta)\times\overline{G_\xi(\rho_0)}\cup\overline{G_\zeta(\vartheta)}\times\partial G_\xi(\rho_0).$$

Определим отображение $\nabla V:\mathbb{R}^{n-2}\times\Lambda\to\mathbb{R}^{n-2}$ как

$$\nabla V(\zeta,\mu)=\frac{\partial V(\zeta,\mu)}{\partial\zeta}.$$

Пусть для фиксированных $r>\eta>0$, $\mu_0\in\Lambda$ выполнено следующее условие

$$\nabla V(pz,\mu)\neq 0\tag{5.155}$$

для всех $z\in\overline{G_\mu(\vartheta,\rho_0)}$ и $\mu:\ r-\eta\leq|\mu-\mu_0|\leq r+\eta$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2.2. *Предположим, что выполнены условия* (H_1) *и* (H_2). *Для включения (5.145) пусть указана строгая МВНФ* $\{V(\zeta,\mu), W(\xi,\mu)\}$ *относительно области* $\Omega\mu\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$ *для каждого* $\mu: \, |\mu-\mu_0| \geq r$.

Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:

(i) *существует последовательность точек* $\{(y_n,\mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\mu_n \to \overline{\mu}$, $|\overline{\mu}-\mu_0| = r$, $y_n \in \mathbb{R}^n$, $y_n \neq y_m$ *для* $n \neq m$, *и последовательность* (z_n) *решений задачи (5.145), (5.146) для* $\mu = \mu_n$ *такие, что* $z_n(0) = z_n(T) = y_n \to 0$ *и* $z_n \to \overline{z}$, *где* $\overline{z}$ *является решением задачи (5.145), (5.146) для* $\mu = \overline{\mu}$ *таким, что* $\overline{z}(0) = \overline{z}(T) = 0$;

(ii) *существует связное множество* C *точек* (y,μ), *где* $y \neq 0$ *такое, что*

- $(0,\overline{\mu}) \in \overline{C}$, *где* $|\overline{\mu}-\mu_0| < r$,
- C *является неограниченным и либо* $\overline{C} \cap \partial U \neq \emptyset$, *либо* $(0,\widetilde{\mu}) \in \overline{C}$ *для некоторого* $\widetilde{\mu} \in \Lambda: |\widetilde{\mu}-\mu_0| > r$,
- *каждой точке* $(y,\mu) \in \overline{C}$ *соответствует решение* $z: [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *включения (5.145) такое, что* $z(0) = z(T) = y$. *В частности, существует последовательность* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *решений включения (5.145) для* $\mu = \mu_n$, $z_n(0) = z_n(T) = y_n$, *где* $\mu_n \to \overline{\mu} \in \Lambda$, $\|\overline{\mu}-\mu_0\| < r$, *сходящаяся к решению* $\overline{z}$ *включения (5.145) для* $\mu = \overline{\mu}$, $\overline{z}(0) = \overline{z}(T) = 0$.

Доказательство. **Шаг 1.** Прежде всего покажем, что траектории $z(t)$, начинающиеся на $\partial G_\mu(\vartheta,\rho_0)$, удовлетворяют для $t \in (0,T]$ следующей оценке

$$z(t) \in G_\mu(\vartheta,\rho_2). \tag{5.156}$$

Рассмотрим компоненту $\zeta(t)$ решения $z(t)$. Если $\zeta(0)$ является внутренней точкой $G_\zeta(\vartheta)$, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\zeta(t) \in G_\zeta(\vartheta), \quad t \in (0, \varepsilon_1). \tag{5.157}$$

Пусть теперь $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$, т.е., $V(\zeta(0)) = \vartheta$. Так как $\|\xi(0)\| \le \rho_0 < \rho_2$, то из (5.154) тогда следует, что

$$\langle \nabla V(\zeta(0), \mu), py \rangle < 0 \quad \text{для всех } \ y \in F(0, \zeta(0), \xi(0), \mu).$$

Тогда для достаточно малых $t > 0$ имеем $V(\zeta(t), \mu) < \vartheta$. Поэтому для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ оценка (5.157) истинна.

Для компоненты $\xi(t)$, очевидно, при некотором $\varepsilon_2 > 0$ выполняется

$$\xi(t) \in G_\xi(\rho_2), \quad t \in (0, \varepsilon_2). \tag{5.158}$$

В силу (5.157) и (5.158) $z(t) \in G_\mu(\vartheta, \rho_2),\ 0 < t < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Поэтому определено положительное число

$$t_* = \sup\left\{t > 0 : \quad z(t) \in G_\mu(\vartheta, \rho_2)\right\}.$$

Заметим, что включение (5.156) эквивалентно оценке $t_* > T$.

Так как $z(t_*) \in \partial G_\mu(\vartheta, \rho_2)$, то либо $V(\zeta(t_*), \mu) = \vartheta$, либо $\|\xi(t_*)\| = \rho_2$. Из (5.154) следует, что $V(\zeta(t_*), \mu) < \vartheta$. Поэтому $\|\xi(t_*)\| = \rho_2$ и из $\|\xi(0)\| \le \rho_0$ следует, что

$$\|\xi(t_*)\| - \|\xi(0)\| \ge \rho_2 - \rho_0 = (\rho_2 - \rho_1)/2.$$

Пусть $\varphi(t)$, $\rho(t)$ – полярные координаты $\xi(t)$. Тогда

$$\rho(t_*) - \rho(0) \ge (\rho_2 - \rho_1)/2.$$

Поэтому

$$\max_{t \in [0, t_*]} \|\rho'(t)\| \ge (\rho_2 - \rho_1)/2t_*. \tag{5.159}$$

С другой стороны, так как

$$\|\rho'(t)\| = \frac{\langle qy, \xi(t) \rangle}{\|\xi(t)\|}, \quad y \in F(t, \zeta(t), \xi(t), \mu),$$

и $z(t) \in G_\mu(\vartheta, \rho_2)$ для $t \in (0, t_*)$, из (5.153) вытекает оценка

$$\max_{t \in [0, t_*]} \|\rho'(t)\| < (\rho_2 - \rho_1)/2T. \tag{5.160}$$

Сравнивая (5.159) и (5.160), получаем, что $t_* > T$. Поэтому всякая траектория $z(\cdot)$, начинающаяся на $\partial G_\mu(\vartheta, \rho_0)$, при $t \in (0, T]$ удовлетворяет оценке $z(t) \in G_\mu(\vartheta, \rho_2)$.

Шаг 2. Пусть $z(0) \in \overline{G_\zeta(\vartheta)} \times \partial G_\xi(\rho_0)$ и

$$\rho(0) = \rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2.$$

Так как $z(t) \in G_\mu(\vartheta, \rho_2)$ при $t \in (0, T]$, справедлива следующая оценка

$$\max_{[0, t_*]} |\rho'(t)| < (\rho_2 - \rho_1)/2T.$$

Поэтому

$$\rho(t) > \rho(0) - (\rho_2 - \rho_1)t/2T, \quad t \in (0, T]$$

и

$$\rho(t) > \rho_1, \quad t \in (0, T].$$

Тогда

$$z(t) \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2), \quad t \in (0, T].$$

Пусть $\omega(t, \mu) = W(\xi(t), \mu)$. Оператор $\nabla W : \mathbb{R}^2 \times \Lambda \to \mathbb{R}^2$ определим как

$$\nabla W(\xi, \mu) = \frac{\partial W(\xi, \mu)}{\partial \xi}.$$

Тогда для каждого $\mu \in \Lambda$

$$\omega'(t, \mu) = \langle \nabla W(\xi(t), \mu), qy \rangle,$$

где $y \in F(t, z, \mu)$ и

$$\beta(t, \mu) < \omega'(t, \mu) < \alpha(t, \mu).$$

Используя теперь интегральное представление функции $\omega(t,\mu)$, получаем

$$\int_0^T \beta(\tau,\mu)d\tau < \omega(T,\mu) - \omega(0,\mu) < \int_0^T \alpha(\tau,\mu)d\tau. \qquad (5.161)$$

Из (5.152) тогда следует, что

$$2\pi(N_\mu - 1) < \omega(T,\mu) - \omega(0,\mu) < 2\pi N_\mu.$$

Таким образом, $\xi(T) \neq \xi(0)$ для $\mu:\ r+\varepsilon/2 \le |\mu-\mu_0| < r+\varepsilon$, $1/2<\lambda<1$ и $z_0 \in \partial G_\mu(\vartheta,\rho_0)$.

Шаг 3. Определим оператор $f_V : \mathbb{R}^{n-2}\times\Lambda \to \mathbb{R}^{n-2}$ как

$$f_V(\zeta,\mu) = \begin{cases} \nabla V(\zeta,\mu), & \text{если } \ \|\nabla V(\zeta,\mu)\| \le 1, \\ \frac{\nabla V(\zeta,\mu)}{\|\nabla V(\zeta,\mu)\|}, & \text{если } \ \|\nabla V(\zeta,\mu)\| > 1 \end{cases}$$

и оператор $P : [0,T]\times\mathbb{R}^{n-2}\times\Lambda \to \mathbb{R}^{n-2}$ по следующей формуле

$$P(t,\zeta_0,\mu) = \zeta(t) - \zeta_0,$$

где $\zeta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n-2}$ – единственное решение задачи $\zeta'(t) = f_V(\zeta,\mu)$, $\zeta(0) = \zeta_0$. Ясно, что определенное таким образом непрерывное отображение f_V является ограниченным и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу.

Пусть мультиоператор $\Phi : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\Lambda \multimap \mathbb{R}^n$ определен как

$$\Phi(t,z,\mu) =$$

$$= \{z(t) - z_0 \mid z'(s) \in F(s,z(s),\mu) \text{ п.в. } s\in[0,T], z(0)=z_0, pz(0)=\zeta_0\}.$$

Предположим, что существует $\varepsilon\ :\ 0<\varepsilon\le\eta/2$ такое, что для всех $\mu : r+\varepsilon/2 \le |\mu-\mu_0| < r+\varepsilon$ и $z_0 \in \overline{G_\mu(\vartheta,\rho_0)}$

$$0 \notin \Phi(T,z_0,\mu). \qquad (5.162)$$

Если (5.162) не выполняется, то найдутся последовательности $\mu_n \to \overline{\mu} \in \Lambda$ и $y_n \to 0$ в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\mu_n \neq \mu_m, y_n \neq y_m$ для $n \neq m$, $|\overline{\mu} - \mu_0| = r$ и

$$0 \in \Phi(T, y_n, \mu_n).$$

Следовательно, существует последовательность решений $z_n : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ задачи (5.145), (5.146) для $\mu = \mu_n$ такая, что $z_n(0) = z_n(T) = z_n$. Заметим, что из леммы Гронуолла вытекает, что $z_n \to \overline{z}$ в $C([0,T];\mathbb{R}^n)$. Тогда $\overline{z}$ является решением задачи (5.145), (5.146) для $\mu = \overline{\mu}$ таким, что $\overline{z}(0) = \overline{z}(T) = 0$.

Шаг 4. Для каждого $\mu \in \Lambda : r + \varepsilon/2 \leq |\mu - \mu_0| < r + \varepsilon$; $z_0 \in \partial G_\zeta(\vartheta) \times \overline{G_\xi(\rho_0)}$ и $t \in [0,T]$, покажем, что

$$0 \neq P(t, \zeta_0, \mu).$$

Действительно, возьмем решение $\zeta(t)$ задачи $\zeta'(t) = f_V(\zeta(t), \mu)$, $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$. Тогда

$$V(\zeta(t), \mu) - V(\zeta(0), \mu) = \int_0^t \langle \nabla V(\zeta(s), \mu), \zeta'(s) \rangle ds =$$

$$= \int_0^t \langle \nabla V(\zeta(s), \mu), f_V(\zeta(s), \mu) \rangle ds > 0.$$

Таким образом $\zeta(t) \neq \zeta(0) = \zeta_0$ и

$$0 \neq P(t, \zeta_0, \mu).$$

Шаг 5. Для $t \in [0,T]$ рассмотрим отображение $h_t : \mathbb{R}^{n-2} \times \Lambda \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n-2}$, заданное как

$$h_t(\zeta_0, \mu, \lambda) = (1 - \lambda)\nabla V(\zeta_0, \mu) + \lambda P(t, \zeta_0, \mu).$$

Покажем, что существует $\tau \in [0,T]$ такое, что для $\mu \in \Lambda : r + \varepsilon/2 \leq |\mu - \mu_0| < r + \varepsilon$; $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$ и $\lambda \in [0,1]$,

$$0 \neq h_\tau(\zeta_0, \mu, \lambda).$$

Действительно, из непрерывности f_V, V и (5.155) следует, что существует $\tau > 0$ такое, что для $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$, $\zeta_0' \in \mathbb{R}^{n-2}$ таких, что $|V(\zeta_0, \mu) - V(\zeta_0', \mu)| \leq \tau$, имеем

$$\langle \nabla V(\zeta_0, \mu), f_V(\zeta_0', \mu) \rangle > 0.$$

Предположим теперь, что для $\mu \in \Lambda : r + \varepsilon/2 \leq |\mu - \mu_0| < r + \varepsilon$; $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$ и $\lambda \in [0, 1]$

$$h_\tau(\zeta_0, \mu, \lambda) = 0.$$

Тогда из (5.155) и шага 4 для каждого $\lambda \in (0, 1)$ получаем

$$\zeta(\tau) - \zeta_0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \nabla V(\zeta_0, \mu),$$

где $\zeta' = f_V(\zeta, \mu)$ на $[0, T]$ и $\zeta(0) = \zeta_0$. Так как $|f_V| \leq 1$, то, очевидно, что для $\theta \in [0, \tau]$ имеем $|V(\zeta(\theta), \mu) - V(\zeta_0, \mu)| \leq \tau$. Тогда

$$0 > \langle \zeta(\tau) - \zeta_0, \nabla V(\zeta_0, \mu) \rangle = \int_0^\tau \langle f_V(\zeta(\theta), \mu), \nabla V(\zeta_0, \mu) \rangle d\theta > 0,$$

и получаем противоречие.

Шаг 6. Пусть теперь

$$k(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2 - 2\lambda, & \text{если } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

и

$$t(\lambda) = \begin{cases} 2(T - \tau)\lambda + \tau, & \text{если } \lambda \in [0, \frac{1}{2}), \\ T, & \text{если } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим мультиоператор $\Psi' : \mathbb{R}^n \times \Lambda \times [0, 1] \multimap \mathbb{R}^n$, заданный как

$$\Psi'(z_0, \mu, \lambda) =$$

$$= \{ z(t(\lambda)) - z_0 \mid z'(\theta) \in k(\lambda) f_V(pz(\theta), \mu) + (1 - k(\lambda)) F(\theta, z(\theta), \mu) \},$$

где $z(0) = z_0$, $pz(0) = \zeta_0$. Ясно, что

$$\Psi'(z_0, \mu, \lambda) = \begin{cases} h_\tau(\zeta_0, \mu, 1) = P(\tau, \zeta_0, \mu), & \text{если } \lambda = 0, \\ \Phi(T, z_0, \mu) := \Phi_T, & \text{если } \lambda = 1. \end{cases}$$

В силу условия (5.162) и шага 5, если $\mu : r + \varepsilon/2 \leq |\mu - \mu_0| < r + \varepsilon$ и $z_0 \in \overline{G_\mu(\vartheta, \rho_0)}$, то

$$0 \notin \Psi'(z_0, \mu, \lambda), \quad \lambda = 0, 1.$$

Покажем теперь, что для $z_0 \in \partial G_\mu(\vartheta, \rho_0)$

$$0 \notin \Psi'(z_0, \mu, \lambda) \quad \text{для всех } \lambda \in (0, 1),$$

т.е., каждое $\psi' \in \Psi'(z_0, \mu, \lambda)$ отлично от нуля.

Из определения мультиоператора Ψ' следует, что

$$\psi' = z(t(\lambda)) - z_0,$$

где функция $z : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $z(0) = z_0$, $pz(0) = \zeta_0$ и

$$z'(\theta) \in k(\lambda) f_V(pz(\theta), \mu) + (1 - k(\lambda)) F(\theta, z(\theta), \mu),$$

т.е., $z'(\theta) = k(\lambda) f_V(pz(\theta), \mu) + (1 - k(\lambda)) y(\theta)$, где $y(\theta) \in F(\theta, z(\theta), \mu)$.

Тогда для $0 < \lambda \leq 1/2$ по шагу 4 имеем

$$\psi' = P(t(\lambda), \zeta_0, \mu) \neq 0.$$

Если $1/2 < \lambda < 1$, то

$$V(p(\psi' + z_0), \mu) - V(pz_0, \mu) \geq k(\lambda) \int_0^T \langle \nabla V(pz(\theta), \mu), f_V(pz(\theta), \mu) \rangle d\theta > 0$$

для $z_0 \in \partial G_\zeta(\vartheta) \times \overline{G_\xi(\rho_0)}$. Следовательно, $p\psi' \neq 0$.

Покажем теперь, что для $z_0 \in \overline{G_\zeta(\vartheta)} \times \partial G_\xi(\rho_0)$ и $\mu : r + \varepsilon/2 \leq |\mu - \mu_0| < r + \varepsilon$, $1/2 < \lambda < 1$

$$q\psi' \neq 0.$$

Имеем

$$\omega(T, \mu) - \omega(0, \mu) = \int_0^T \omega'(\tau, \mu) d\tau = \int_0^T \langle \nabla W(\xi(\tau), \mu), q\widetilde{y} \rangle d\tau =$$

$$= (1 - k(\lambda)) \int_0^T \langle \nabla W(\xi(\tau), \mu), qy \rangle d\tau,$$

где $\widetilde{y} \in k(\lambda)f_V(pz(\tau),\mu) + (1-k(\lambda))F(\tau,z(\tau),\mu))$, $y \in F(\tau,z(\tau),\mu)$.

Тогда в силу (5.161) имеем

$$(1-k(\lambda))2\pi(N_\mu - 1) < \omega(T,\mu) - \omega(0,\mu) < (1-k(\lambda))2\pi N_\mu.$$

Откуда следует, что $\xi(T) \neq \xi(0)$, т.е., $q\psi' \neq 0$ для $\mu:\ r+\varepsilon/2 \leq |\mu-\mu_0| < r+\varepsilon$, $1/2 < \lambda < 1$ и $z_0 \in \overline{G_\zeta(\vartheta)} \times \partial G_\xi(\rho_0)$.

Шаг 7. Наконец, определим мультиоператор $\Psi : \mathbb{R}^n \times \Lambda \times [0,1] \multimap \mathbb{R}^n$ как

$$\Psi(z_0,\mu,\lambda) = \begin{cases} h_\tau(pz_0,\mu,2\lambda), & \text{если } \lambda \in [0,1/2], \\ \Psi'(z_0,\mu,2\lambda-1), & \text{если } \lambda \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Из (5.155), (5.162) и шагов 5 и 6 для $\mu:\ r+\varepsilon/2 \leq |\mu-\mu_0| < r+\varepsilon$ и $z_0 \in \overline{G_\mu(\vartheta,\rho_0)}$ получаем

$$0 \notin \Psi(z_0,\mu,\lambda), \quad \lambda = 0,1.$$

Для $\mu:\ r+\varepsilon/2 \leq |\mu-\mu_0| < r+\varepsilon$ и $z_0 \in \partial G_\mu(\vartheta,\rho_0)$ имеем также

$$0 \notin \Psi(z_0,\mu,\lambda), \quad \lambda \in [0,1].$$

Тогда

$$\mathrm{Bi}\,(\Phi_T) = \mathrm{Bi}\,(\nabla V) \neq 0.$$

Теперь утверждение следует из леммы 1.3.1. □

Публикации автора по теме диссертации

Монография

1. Kornev S. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N.V. Loi, S. Kornev. – Berlin, Heidenberg: Springer-Verlag. – 2013. – 177 p.

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

2. Корнев С.В. О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3. – С. 72-83.

3. Корнев С.В. О некоторых обобщениях метода направляющей функции в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2003. – Т. 8, Вып. 3. – С. 399.

4. Корнев С.В. О негладких многолистных направляющих функциях / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1497-1502.

5. Корнев С.В. Негладкие направляющие функции в задачах о вынуж-

денных колебаниях / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 1. – С. 3-12.

6. Корнев С.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 5. – С. 23-32.

7. Kornev S. Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator differential inclusions / N.V. Loi, V. Obukhovskii, S. Kornev // Differ. Equ. Dyn. Syst. – 2012. – V. 20, № 3. – P. 285-300.

8. Корнев С.В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 700-705.

9. Корнев С.В. Метод негладкой интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 9. – С. 31-43.

10. Корнев С.В. Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений / В.Г. Звягин, С.В. Корнев // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2015. – Т. 58. – С. 59-81.

11. Корнев С.В. О некоторых обобщениях метода многолистной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений некоторых классов дифференциальных включений / С.В. Корнев // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 5. – С. 1214-1216.

12. Корнев С.В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений / С.В. Корнев // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия Матема-

тика. – 2015. – Т. 13. – С. 16-31.

13. Корнев С.В. Набор многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях некоторых классов дифференциальных включений / С.В. Корнев // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 4. – С. 835-842.

14. Корнев С.В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2016. – №1. – С. 96-104.

15. Корнев С.В. Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2016. – Т. 21, Вып. 1. – С. 55-65.

16. Корнев С.В. Метод негладких интегральных направляющих функций в задаче о существовании периодических решений включений с каузальными операторами / С.В. Корнев // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математ. моделир. и программ. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 46-59.

17. Корнев С.В. Метод многолистных направляющих функций в задаче о бифуркации решений дифференциальных уравнений / С.В. Корнев, Н.В. Лой // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2016. – Т. 21, Вып. 2. – С. 390-401.

18. Корнев С.В. Направляющие функции на заданном множестве в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2016. – № 2. – С. 107-122.

19. Корнев С.В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский, П. Дзекка

// Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 10. – С. 1335-1344.

20. Корнев С.В. Многолистные направляющие функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 11. – С. 14-26.

21. Kornev S. On the method of generalized integral guiding functions in the periodic problem of functional differential inclusions with causal operator / V. Obukhovskii, S. Kornev, P. Zecca // Applicable Analysis. DOI:10.1080/00036811.2016.1139088

22. Kornev S. Method of multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions / S. Kornev, Y.-C. Liou // The Journal of Nonlinear Science and Applications. – 2016. – V. 9, Is. 8. – P. 5259-5270.

Прочие публикации

23. Корнев С.В. Об интегральных направляющих функциях для функционально-дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Топологические методы нелинейного анализа. – 2000. – С. 87-107.

24. Корнев С.В. О некоторых развитиях метода негладких многолистных направляющих функций / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Математические модели и операторные уравнения. – 2003. – Т. 2. – С. 75-90.

25. Корнев С.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Труды математического факультета. Воронежский государственный университет. – 2004. – С. 56-74.

26. Kornev S. On some developments of the method of integral guiding functions / S. Kornev, V. Obukhovskii // Functional Differential Equations. – 2005. – V. 12, № 3-4. – P. 303-310.

27. Kornev S.V. On some developments of the method of guiding functions for periodic problem / S.V. Kornev // Fifth Symposium of Nonlinear Analysis. Torun. Poland. – 2007. – P. 31-32.

28. Корнев С.В. Метод направляющих функций и некоторые его развития для случая дифференциальных включений / С.В. Корнев // Международная конференции "Дифференциальные уравнения и топология". Москва. – 2008. – С. 145-146.

29. Kornev S. Topological approach to the study of periodic models for control systems / S. Kornev // International Symposium on Optimization and Optimal control. Kaohsiung. Taiwan. – 2009. – P. 26.

30. Kornev S. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions / S. Kornev, V. Obukhovskii, J.C. Yao // Discussiones Mathematicae: Differ. Inclusions, Control and Opt. – 2014. – V. 34, № 2. – P. 219-227.

31. Kornev S.V. The method of guiding functions in the study the asymptotic behavior of solutions of differential inclusions / S.V. Kornev // The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow. – 2014. – P. 146-147.

32. Корнев С.В. О модификации метода направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Материалы Международной конференции "Воронежская весенняя математическая школа. Понтрягинские чтения - XXVI". – Воронеж. – 2015. – С. 112-113.

33. Корнев С.В. О негладких интегральных направляющих функциях в исследовании асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений / С.В. Корнев // Известия ВГПУ. – 2015. – № 3 (268). – С. 182-184.

34. Корнев С.В. О методе негладких интегральных направляющих функ-

ций в периодической задаче для включений с каузальными операторами / С.В. Корнев // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". – Воронеж. – 2016. – С. 214-217.

35. Kornev S.V. On some applications of the multivalent guiding functions method / S.V. Kornev // The 5th International conference "Nonlinear Analysis and Extremal Problems". – Irkutsk. – 2016. – P. 28.

36. Kornev S.V. On the multivalent guiding functions method in some nonlinear problems / S.V. Kornev // International Workshop on Nonlinear Analysis and Optimization with Applications. Kaohsiung. Taiwan. – 2016. – P. 17.

Литература

[1] Александров П.С. Введение в теорию размерности / П.С. Александров, Б.А. Пасынков. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

[2] Бадер Р. Об одном классе многозначных отображений / Р. Бадер, Б.Д. Гельман, В.В. Обуховский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. – 2003. – Т. 2. – С. 35-38.

[3] Благодатских В.И. Теория дифференциальных включений. Часть I / В.И. Благодатских. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 115 с.

[4] Благодатских В.И. Дифференциальные включения и оптимальное управление / В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппов // Тр. МИАН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 194-252.

[5] Бобылев Н.А. Геометрические методы в вариационных задачах / Н.А. Бобылев, С.В. Емельянов, С.К. Коровин. – М.: Магистр, 1998. – 658 с.

[6] Борисович Ю.Г. О вращении многозначных векторных полей / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, Э. Мухамадиев, В.В. Обуховский // ДАН СССР. – 1969. – Т. 187, № 5. – С. 971-973.

[7] Борисович Ю.Г. О вращении многозначных векторных полей / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, Э. Мухамадиев, В.В. Обуховский // Тр. семинара по функц. анализу Воронежск. ун-та. – 1969. – Вып. 12. – С. 69-84.

[8] Борисович Ю.Г. Топологические характеристики и исследование разрешимости нелинейных проблем / Ю. Г. Борисович // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 2. – С. 3-23.

[9] Борисович Ю.Г. О числе Лефшеца для одного класса многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Ю.Е. Гликлих // 7-я Летняя математическая школа, Киев, 11–30 июня 1969 г.: тез. докл. – Киев, 1970. – С. 283-295.

[10] Борисович Ю.Г. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // УМН. – 1980. – Т. 35, № 1. – С. 59-126.

[11] Борисович Ю.Г. Многозначные отображения. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. – 1982. – Т. 19. – С. 127-230.

[12] Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Либроком, 2011. – 226 с.

[13] Борисович Ю.Г. Нелинейные фредгольмовые отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // УМН. – 1977. – Т. 32, № 4. – С. 3-54.

[14] Борсук К. Теория ретрактов / К. Борсук. – М.: Мир, 1971. – 292 с.

[15] Булгаков А.И. Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений / А.И. Булгаков // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 10. – С. 63-86.

[16] Булгаков А.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 6. – С. 3-32.

[17] Бурлаков Е.О. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтера с локально сжимающими операторами / Е.О. Бурлаков, Е.С. Жуковский // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 8. – С. 16-29.

[18] Ганго Е.А. Периодические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью / Е.А. Ганго, Поволоцкий А.И. // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. – 1970. – Т. 464. – С. 235-242.

[19] Гельман Б.Д. Многозначные интегральные операторы и ω-периодические решения / Б.Д. Гельман // Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1971. – Вып. 4. – С. 35-44.

[20] Демьянов В.Ф. Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

[21] Дзекка П. Об ориентированном индексе совпадений для нелинейных фредгольмовых включений / П. Дзекка, В.Г. Звягин, В.В. Обуховский // ДАН. – 2006. – Т. 406, № 4. – С. 1-4.

[22] Дмитриенко В.Т. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В.Т. Дмитриенко, В.Г. Звягин // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31, № 5. – С. 801-812.

[23] Емельянов С.В. Гомотопии экстремальных задач / С.В. Емельянов, С.К. Коровин, Н.А. Бобылев, А.В. Булатов. – М.: Наука, 2001. – 350 с.

[24] Жуковский Е.С. Корректность уравнений с обобщенно вольтерровыми отображениями метрических пространств / Е.С. Жуковский, Т.В. Жуковская, М.Ж. Алвеш // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2010. – Т. 15, Вып. 6. – С. 1669-1672.

[25] Звягин В.Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений фредгольмовых отображений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями / В.Г. Звягин. – Мат. сборник. – 1991. – Т. 182, № 12. – С. 1740-1768.

[26] Звягин В.Г. Ориентированная степень фредгольмовых отображений. Метод конечномерной редукции / В.Г. Звягин, Н.М. Ратинер // Совр. мат-ка. Фунд. направления. – 2012. – Т. 44. – С. 3-171.

[27] Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1977. – 479 с.

[28] Каменский М.И. Об операторе сдвига по траекториям полулинейных управляемых систем / М.И. Каменский, В.В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 5. – С. 755-762.

[29] Каменский М.И. О бифуркации периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием / М.И. Каменский, Ю.В. Лысакова, П. Нистри // Автомат. и телемех. – 2008. – № 12. – С. 41-46.

[30] Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович Л.В., Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

[31] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. – М.: Наука, 1988. – 280 с.

[32] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 542 с.

[33] Красносельский А.М. Вынужденные периодические колебания в сложных нелинейных системах / А. М. Красносельский // Автомат. и телемех. – 1983. – № 10. – P. 76-82.

[34] Красносельский А.М. О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации / А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский // Функц. анализ и его прил. – 2005. – Т. 39, № 3. – С. 37-53.

[35] Красносельский А.М. Вырожденный случай бифуркации Андронова-Хопфа на бесконечности / А.М. Красносельский // Автомат. и телемех. – 2010. – № 11. – С. 55-68.

[36] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

[37] Красносельский М.А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский, А.И. Перов // ДАН СССР. – 1958. – Т. 123, № 2. – С. 235-238.

[38] Красносельский М.А. Векторные поля на плоскости / М.А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко. – М.: Физматгиз, 1963. – 245 с.

[39] Красносельский М.А. О некоторых признаках существования периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных урав-

нений / М.А. Красносельский, А.И. Перов // Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям. – Киев, 1963. – Т. 2. – С. 202-211.

[40] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

[41] Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

[42] Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

[43] Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис // УМН. – 1949. – Т. 4, Вып. 5. – С. 99-141.

[44] Мышкис А.Д. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории / А.Д. Мышкис // Матем. сб. – 1954. – Т. 34, № 3. – С. 525-540.

[45] Обуховский В.В. О некоторых принципах неподвижной точки для многозначных уплотняющих операторов / В.В. Обуховский // Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1971. – Вып. 4. – С. 70-79.

[46] Обуховский В.В. Периодические решения управляемых систем / В.В. Обуховский // Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1972. – Вып. 7. – С. 68-76.

[47] Обуховский В.В. К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с многозначной правой частью / В.В. Обуховский // Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1973. – Вып. 10. – С. 74-82.

[48] Панасенко Е.А. Пространство $clcv(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа-Бебутова и дифференциальные включения / Е.А. Панасенко, Л.И. Родина, Е.Л. Тонков // Тр. ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – Р. 162-177.

[49] Перов А.И. О теоремах единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений / А.И. Перов // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120, № 4. – С. 704-707.

[50] Перов А.И. Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук / А.И. Перов. – Воронеж, 1959. – 129 с.

[51] Перов А.И. Метод направляющих функций / А.И. Перов, В.К. Евченко. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – 182 с.

[52] Потапов А.С. Замечание о вращении многозначных векторных полей / А.С. Потапов // Сб. работ аспирантов Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1974. – Вып. 2. – С. 41-44.

[53] Рачинский Д.И. Вынужденные колебания в системах управления в условиях, близких к резонансу / Д.И. Рачинский // Автомат. и телемех. – 1995. – № 11. – С. 87-98.

[54] Тихонов А.Н. О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики / А.Н. Тихонов // Бюл. МГУ. Секция А. Сер. матем. и мех. – 1938. – Т. 1, Вып. 8. – С. 1-25.

[55] Толстоногов А.А. О решениях дифференциального включения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве

/ А.А. Толстоногов, И.А. Финогенко // Матем. сб. – 1984. – Т. 125, № 2. – С. 199-230.

[56] Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.

[57] Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – Изд. 3-е. М.: Физматлит, 2002. – 488 с.

[58] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

[59] Филиппов В.В. Что лучше в теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Лерэ-Шаудера или сдвиг вдоль траекторий / В.В. Филиппов // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 8. – С. 1049-1061.

[60] Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[61] Финогенко И.А. О решениях некоторых функционально-дифференциальных включений в банаховом пространстве / И.А. Финогенко // Диффер. уравн. – 1982. – Т. 18, № 11. – С. 2001-2002.

[62] Финогенко И.А. О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью / И.А. Финогенко // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 88-102.

[63] Финогенко И.А. О дифференциальных включениях с позиционными разрывными и импульсными управлениями / И. А. Финогенко, Д. В. Пономарев // Тр. ИММ УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 284-299.

[64] Финогенко И.А. Предельные дифференциальные включения и метод функций Ляпунова / И.А. Финогенко // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. – 2015. – Т. 13. – С. 84-99.

[65] Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[66] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

[67] Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р.Темам. – М.: Мир, 1979. – 399 с.

[68] Шварц Л. Анализ / Л. Шварц. – М.: Мир, 1972. – 824 с.

[69] Alexander J.C. Global bifurcation for solutions of equations involving several parameter multivalued condensing mappings / J.C. Alexander and P.M. Fitzpatrick // in: E. Fadell, G. Fournier (Eds.). Fixed Point Theory (Sherbrooke, Que.). – 1980 (Lect. Notes Math. – 1981. – V. 886. – P. 1-19).

[70] Arutyunov A.V. Bifurcation Theorems via Second-Order Optimality Conditions / A.V. Arutyunov, A.F. Izmailov // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 262. – P. 564-576.

[71] Appell J. Multi-valued superpositions / J. Appell, E. De Pascale, H.T. Nguyen, and P.P. Zabreiko // Dissertationes Math. – 1995. – CCCXLV. – P. 1-97.

[72] Aubin J.-P. Set-Valued Analysis / J.-P. Aubin and H. Frankowska. – Boston-Basel-Berlin: Birkhauser-Verlag, 1990. – 461 p.

[73] Aubin J.-P. Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 342 p.

[74] Avramescu C. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions / C. Avramescu // Electronic journal of qualitive theory of differential equations. – 2003. – № 13. – P. 1-9.

[75] Avramescu C. Existence problems for homoclinic solutions / C. Avramescu // Abstract and Applied Analysis. – 2002. – V. 7, № 1. – P. 1-29.

[76] Avramescu C. Evanescent solutions of linear ordinary differential equations / C. Avramescu // Electronic journal of qualitive theory of differential equations. – 2002. – № 9. – P. 1-12.

[77] Bader R. On the extension of approximations for set-valued maps and the repulsive fixed points / R. Bader, G. Gabor, W. Kryszewski // Bollettino U.M.I. – 1996. – V. 10-B. – P. 399-416.

[78] Bader R. On the semilinear multi-valued flow under constraints and the periodic problem / R. Bader // In: Differential Inclusios and Optimal Control (J. Andres, L. Gornierwicz and P. Nistri, eds.). Lecture Notes in Nonlinear Anal. – 1998. – V. 2. – P. 51-55.

[79] De Blasi F.S. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions / F.S. De Blasi, L. Górniewicz, G. Pianigiani // Nonlinear Anal. – 1999. – V. 37. – P. 217-245.

[80] Bressan A. Directionally continuous selections and differential inclusions / A. Bressan // Funkcial. Ekvac. – 1988. – V. 31. – P. 459-470.

[81] Bressan A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions. A unified approach in: H. Sussmann (Ed.) / A. Bressan // Controlability and optimal control. New York: Dekker. – 1989. – P. 21-31.

[82] Bressan A. On the qualitative theory of lower semicontinuous differential inclusions / A. Bressan // J. Differ. Equat. – 1989. – V. 77. – P. 379Ц391.

[83] Bressan A. Extensions and selections of maps with decomposable values // A. Bressan, G. Colombo // Studia Math. – 1988. – V. 90. – P. 69-86.

[84] Castaing C. Convex Analysis and Measurable Multifunctions / C. Castaing, M. Valadier. – Berlin, Heidenberg, New York: Springer Verlag, 1977. – 286 p.

[85] Cellina A. A new approach to the definition of topological degree for multi-valued mappings / A. Cellina, A. Lasota // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. – 1970. – V. 47, № 6. – P. 434-440.

[86] Corduneanu C. Problems globaux dans la theorie des eqautions integrales de Volterra / C. Corduneanu // Ann. Math. Pura e Appl. – 1965. – V. 4, № 67. – P. 349-363.

[87] Corduneanu C. Functional Equations with Causal Operators / C. Corduneanu. – London: Taylor and Francis, 2002. – 184 p.

[88] Cronin J. Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis / J.Cronin. – Providence: Amer. Math. Soc., 1964. – 198 p.

[89] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis / K. Deimling. – New York: Springer-Verlag, 1985. – 450 p.

[90] Deimling K. Multivalued Differential Equations / K. Deimling. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 260 p.

[91] Domachowski S. A global bifurcation theorem for convex-valued differential inclusions / S. Domachowski, J. Gulgowski // Z. Anal. Anwendungen. – 2004. – V. 23, № 2. – P. 275-292.

[92] Drici Z. Differential equations with causal operators in a Banach space / Z. Drici, F.A. McRae, Devi J. Vasundhara // J. Nonlinear Anal. – 2005. – V. 62, № 2. – P. 301-313.

[93] Drici Z. Monotone iterative technique for periodic boundary value problems with causal operators / Z. Drici, F.A. McRae, Devi J. Vasundhara // Nonlinear Anal. – 2006. – V. 64, № 6. – P. 1271-1277.

[94] Filippakis M. Nonsmooth generalized guiding functions for periodic differential inclusions / M. Filippakis, L. Gasin'ski and N.S. Papageorgiou // Nonlin. Differ. Equat. and Appl. – 2006. – V. 13. – P. 43-66.

[95] Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations / A. Fonda // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – V. 99, № 1. – P. 79-85.

[96] Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps / A. Fryszkowski // Studia Math. – 1983. – V. 76. – P. 163-174.

[97] Fryszkowski A. Fixed Point Theory for Decomposable Sets / A. Fryszkowski. – Dordrecht: Kluwer AP, 2004. – 209 p.

[98] Gaines R. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations / R. Gaines, J.L. Mawhin. – Berlin and New York: Springer-Verlag, 1977. – 268 p.

[99] Gaines R.E. Ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions / R.E. Gaines, J.L. Mawhin // J. Differential Equations. – 1977. – V. 26. – P. 200-222.

[100] Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Górniewicz. – Berlin: Springer, 2006. – 556 p.

[101] Górniewicz L. Periodic solutions of differential inclusions in $\mathbb{R}^n$ / L. Górniewicz, S. Plaskacz // Bollettino. U.M.I. – 1993. – V. 7-A. – P. 409-420.

[102] Górniewicz L. On the homotopy method in the fixed point index theory of multi-valued mappings of compact absolute neighborhood retracts / L. Górniewicz, A. Granas, W. Kryszewski // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – V. 161, № 2. – P. 457-473.

[103] Górniewicz L. Bifurcation invariants for acyclic mappings / L. Górniewicz and W. Kryszewski // Reports on Mathematical Physics. – 1992. – V. 31, № 2. – P. 217-239.

[104] Górniewicz L. Topological degree theory for acyclic mappings related to the bifurcation problem / L. Górniewicz, W. Kryszewski // Bollettino U.M.I. – 1992. – V. 7-B, № 3. – P. 579-595.

[105] Granas A. Sur la notion du degre topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach / A. Granas // Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. – 1959. – V. 7, № 4. – P. 191-194.

[106] Granas A. Theorem on antipodes and theorems on fixed points for a certain class of multi-valued mappings in Banach spaces / A. Granas // Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. – 1959. – V. 7, № 5. – P. 271-275.

[107] Granas A. Fixed Point Theory / A. Granas, J. Dugundji. – New York: Springer-Verlag, 2003. – 690 p.

[108] Henry C. Differential equations with discontinuous right-hand side for planning procedures / C. Henry // J. Econ. Theory. – 1972. – V. 4. – P. 545-551.

[109] Henry C. An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side / C. Henry // J. Math. Anal. Appl. – 1973. – V. 42. – P. 179-186.

[110] Hino Y. Functional Differential Equations with Infinite Delay / Y. Hino, S. Murakami, T. Naito. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1991. – 318 p.

[111] Hyman D.M. On decreasing sequences of compact absolute retracts / D.M. Hyman // Fund. Math. – 1969. – V. 64. – P. 91-97.

[112] Hu S.T. Homotopy Theory / S.T. Hu. – New York: Academic Press, 1959. – 347 p.

[113] Hu S. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory / S. Hu, N.S. Papageorgiou. – Dordrecht: Springer, 1997. – 968 p.

[114] Jankowski T. Boundary value problems with causal operators / T. Jankowski // Nonlinear Anal. – 2008. – V. 68, № 12. – P. 3625-3632.

[115] Kamenskii M.I. On periodic solutions of differential inclusions with unbounded operators in Banach Spaces / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii // Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. – 1991. – V. 21. – P. 173-191.

[116] Kamenskii M.I. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii // Nonlinear Anal. – 1993. – V. 20, № 2. – P. 781-792.

[117] Kamenskii M.I. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation / M.I. Kamenskii, P. Nisri, V.V. Obukhovskii, P. Zecca // J. Optim. Theory Appl. – 1994. – V. 82, № 3. – P. 503-517.

[118] Kamenskii M. On the translation multioperator along the solutions of semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca // Canadian Appl. Math. Quart. – 1998. – V. 6, № 2. – P. 139-155.

[119] Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001. – 242 p.

[120] Kikuchi N. On control problems for functional-differential equations / N. Kikuchi // Funkcial. Ekvac. – 1971. – V. 14. – P. 1-23.

[121] Kisielewicz M. Differential Inclusions and Optimal Control / M. Kisielewicz. – Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw Kluwer, 1991. – 240 p.

[122] Kolmanovskii V.B. Introduction to the theory and Applications of Functional Differential Equations / V.B. Kolmanovskii, A.D. Myshkis. – Dordrecht: Kluver, 1999. – 648 p.

[123] Krasnosel'skii A.M. Generalized guiding functions in a problem on high frequency forced oscillations / A.M. Krasnosel'skii, M.A. Krasnosel'skii, J. Mawhin, A. Pokrovskii // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. – 1994. – V. 22, № 11. – P. 1357-1371.

[124] Krasnosel'skii A.M. On a bifurcation governed by hysteresis nonlinearity / A.M. Krasnosel'skii, D.I. Rachinskii // Nonlin. Differ. Equat. and Appl. – 2002. – V. 9. – P. 93-115.

[125] Krasnosel'skii A. Index at infinity and bifurcations of twice degenerate vector fields / A. Krasnosel'skii // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 2010. – V. 35, № 1. – P. 99-126.

[126] Krasnosel'skii A.M. Differential inequalities in problems of forced nonlinear oscillations / A.M. Krasnosel'skii, M.A. Krasnosel'skii, J. Mawhin // Nonlinear Anal.: TMA. – 1995. – V. 25, № 9-10. – P. 1029-1036.

[127] Kryszewski W. Homotopy Properties of Set-Valued Mappings / W. Kryszewski. – Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997. – 243 p.

[128] Lasota A. Fixed-points theorem in the theory for multivaluaed mappings and optimal control problems / A. Lasota, Z. Opial // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1968. – V. 16. – P. 645-649.

[129] Lasota A. An approximation theorem for multi-valued mappings / A. Lasota, Z. Opial // Podst. Sterow. – 1971. – V. 1. – P. 71-75.

[130] Leray J. Topologie et equations fonctionnelles / J. Leray et J. Schauder // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1934. – V. 51, № 3. – P. 45-78.

[131] Loi N.V. On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces / N.V. Loi, V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Anal. – 2013. – V. 76. – P. 80-92.

[132] Lupulescu V. Causal functional differential equations in Banach spaces / V. Lupulescu // Nonlinear Anal. – 2008. – V. 69, № 12. – P. 4787-4795.

[133] Mawhin J. Periodic solutions of nonlinear functional differential equations / J. Mawhin // J. Differential Equations. – 1971. – V. 10. – P. 240-261.

[134] Mawhin J.L. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems / J.L. Mawhin // CBMS Regional Conf. Ser. in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. – 1979. – № 40. – 122 p.

[135] Mawhin J. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations / J. Mawhin, James R. Jr. Ward // Discrete and continuous dynamical systems. – 2002. – V. 8, № 1. – P. 39-54.

[136] Mawhin J. Periodic or bounded solutions of Caratheodory systems of ordinary differential equations / J. Mawhin, H.B. Thompson // J. Dyn. Diff. Eq. – 2003. – V. 15, № 2-3. – P. 327-334.

[137] Michael E. Continuous selections / E. Michael // The Ann. Math. – 1956. – V. 63, № 2. – P. 361-382.

[138] Nistri P. On the solvability of systems of inclusions involving noncompact operators / P. Nisri, V.V. Obukhovskii, P. Zecca // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 342, № 2. – P. 543-563.

[139] Obukhovskii V. On some properties of dissipative functional differential inclusions in a Banach space / V. Obukhovskii, P. Zecca // Topological Meth. Nonlin. Anal. – 2000. – V. 15, № 2. – P. 369-384.

[140] Obukhovskii V. On coincidence index for multivalued perturbations of nonlinear Fredholm maps and some applications / V. Obukhovskii, P. Zecca, V. Zvyagin // Abstr. Appl. Anal. – 2002. – V. 7, № 6. – 295-322.

[141] Obukhovskii V. An oriented coincidence index for nonlinear Fredholm inclusions with nonconvex-valued perturbations / V. Obukhovskii, P. Zecca, V. Zvyagin // Abstr. Appl. Anal. – 2006. – Art. ID. 51794. – P. 1-21.

[142] Obukhovskii V. On some generalizations of the Landesman-Lazer theorem / V. Obukhovskii, P. Zecca and V. Zvyagin // Fixed Point Theory. – 2007. – V. 8, № 1. – 69-85.

[143] Obukhovskii V. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces / V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Anal. – 2011. – V. 74, № 8. – P. 2765-2777.

[144] Obukhovskii V. A bifurcation of solutions of nonlinear Fredholm inclusions involving CJ-multimaps with applications to feedback control systems / V. Obukhovskii, N.V. Loi & J.-C. Yao // Set-Valued Var. Anal. – 2013. – V. 21. – P. 247-269.

[145] Obukhovskii V. Existence and global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities / V. Obukhovskii, Z. Liu and N.V. Loi // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2013. – V. 23, № 7. – 1350125 (10 pages)

[146] Obukhovskii V. On an A-bifurcation theorem with application to a parametrized integro-differential system / V. Obukhovskii, N.V. Loi & Z. Liu // Fixed Point Theory. – 2015. – V. 16. P. 127-142.

[147] Obukhovskii V. A multiparameter global bifurcation theorem with application to a feedback control system / V. Obukhovskii, N.V. Loi and J.-C. Yao // Fixed Point Theory – 2015. – V. 16. – P. 353-370.

[148] Papageorgiou N.S. Boundary value problems and periodic solutions for semilinear evolution inclusions / N.S. Papageorgiou // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1994. – V. 35. – P. 325-336.

[149] Pruszko T. A coincidence degree for L-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields / T. Pruszko // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math. – 1979. – V. 27, № 11-12. – P. 895-902.

[150] Pruszko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems / T. Pruszko // Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl. – 1981. – V. 5, № 9. – P. 959-970.

[151] Rachinskii D.I. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems / D.I. Rachinskii // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. – 1996. – V. 26, № 3. – P. 631-639.

[152] Smirnov G.V. Introduction to the theory of differential inclusions / G.V. Smirnov // Graduate Studies in Math 41. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. – 2002. – 226 p.

[153] Tarafdar E. On the existence of solutions of the equation $\mathcal{L}x \in Nx$ and a coincidence degree theory / E. Tarafdar, S.K. Teo // J. Austral. Math. Soc. – 1979. – A. 28, № 2. – P. 139-173.

[154] Tolstonogov A. Differential Inclusions in a Banach Space / A. Tolstonogov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 302 p.

[155] Tonelli L. Sulle equazioni funzionali di Volterra / L. Tonelli // Bull. Calcutta Math. Soc. – 1930. – V. 20. – P. 31-48.