ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ПЕТРОСЯН ГАРИК ГАГИКОВИЧ

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Обуховский В.В.

Воронеж – 2013

Содержание

Основные обозначения

Буквами X, Y будем обозначать метрические пространства;

Пусть Y — подмножество нормированного пространства E, обозначим тогда:

$P(Y)$ — множество всех непустых подмножеств в Y;

$K(Y)$ — множество всех непустых компактных подмножеств в Y;

$Cv(Y)$ — множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств в Y;

$Kv(Y)$ — множество непустых выпуклых компактных подмножеств в Y.

Буквами A, B будем обозначать линейные операторы;

$D(A)$ — область определения оператора A;

ImA — область значения оператора A;

$KerA$ обозначим ядро оператора A;

A^{-1} обозначим оператор (однозначный или многозначный) обратный к оператору A.

Буквами F, Φ, G будем обозначать многозначные отображения;

Γ_F — график многозначного отображения.

Аббревиатуры "п.н.с." и "п.в." обозначают "полунепрервное сверху" и "почти всюду" соответственно.

Введение.

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь к концу XX века интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря интересным приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. В 70 - 80-х годах большое развитие данное направление получило в работах А.А.Килбаса, С.Г. Самко, О.И. Маричева, И. Подлюбного, K.S. Miller'a, B. Ross'a и других исследователей. В последнее десятилетие исследования в области дробного анализа характеризуются "экспоненциальным" ростом, их проводят как наши соотечественники, так и зарубежные математики (см., например, монографии [23], [25], [31], [35], [40], [44], [48], [20], [50], статьи [41], [43], [45] и др.).

Геометрические и топологические методы функционального анализа, применяемые к дифференциальным уравнениям, восходят к именам А. Пуанкаре, Л. Брауэра, П.С. Александрова, Г. Хопфа, Ж. Лере, Ю. Шаудера. В дальнейшем эти методы были развиты и продемонстрировали свою высокую эффективность в трудах М.А. Красносельского, С.Г. Крейна, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, Д.И. Рачинского, K. Deimling'a, L. Gorniewicz'a, J. Mawhin'a и других ученых (см., например, монографии [5], [6], [7]).

Начиная со второй половины XX века, эти методы распространяются на теорию дифференциальных включений. Развитие теории дифференциальных включений связано с тем, что они являются удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в различных разделах теории оптимального управления, математической физики, математической экономики и др. Различные задачи теории дифференциальных включений были изучены с помощью методов нелинейного и многозначного анализа в работах Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, М.И. Каменского, А.И. Поволоцкого, Ю.Е. Гликлиха, В.Г. Звягина, А.В. Арутюнова, В.Г. Задорожного, А.И. Булгакова, Е.С. Жуковского, Е.Л. Тонкова, А.А. Толстоногова, В.В. Филиппова, J.P. Aubin'a, A. Cellina, K. Deimling'a, L. Gorniewicz'a, W. Kryszewski, P. Nistri, N.S. Papageorgiou, P. Zecca и других (см., например, монографии [1], [2], [26],[28], [38], [42], [47], статьи [3],[9], [46] и др.).

Одним из наиболее эффективных средств изучения разрешимости и существования оптимальных решений дифференциальных уравнений и включений оказывается теория топологической степени многозначных векторных полей, разработке которой были посвящены труды Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, A. Cellina, A. Granas'a, A. Lasota и других исследователей.

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении, в ней указанные методы применяются для изучения новых классов функционально-дифференциальных включений и уравнений дробного порядка в банаховом пространстве.

Проведем обзор содержания диссертации по главам.

В **первой главе** диссертации приводятся основные сведения из функционального анализа, теории многозначных отображений, теории дробного математического анализа и приводится модифицированная модель фазового пространства $\mathcal{B}$, введенного Хейлом и Като.

Вторая глава посвящена задаче существования решения для полулинейного функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x_t), \; t \in [0, T] \qquad (2.1),$$

с нелокальным начальным условием:

$$x(\theta) + g(x)(\theta) = \vartheta(\theta), \; \theta \in [-h, 0] \qquad (2.2),$$

где $D^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$, - дробная производная Римана-Лиувилля,
$g : C([-h, T]; E) \to C([-h, 0]; E)$ и $\vartheta : [-h, 0] \to E$ - заданные функции, $x_t \in C([-h, 0]; E)$, $h > 0$, x_t определено как $x_t(\theta) = x(t + \theta), -h < \theta \leq 0$.

Предполагаются выполненными следующие условия: (A), (f_1), (f_2), (f_3), (f_4), $(g1)$, $(g2)$, $(g3)$, $(g4)$, (ϑ').

Далее дается определение интегрального решения задачи (2.1)-(2.2) (определение 2.1), и доказывается (теорема 2.1), что при выполнении условий (A), (ϑ'), (f_1)-(f_4), $(g1)$-$(g4)$, (2.3), множество решений задачи (2.1)-(2.2) является непустым и компактным подмножеством пространства $C([-h, T]; E)$.

В **третьей главе** рассматривается следующая задача. Пусть E - банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0, T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geq 1$ и функции $c : [0, T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{h \to 0+} c(t_k + h), \; c(t_k^-) = \lim_{h \to 0-} c(t_k + h),$$

для $1 \leq k \leq m$.

Для целого $N \geq 1$ и $\alpha \in (N-1, N]$, изучается следующая задача Коши:

$$^{C}D^{\alpha}y(t) \in F(t, y_t, \nabla^N y(t)) \quad \text{п.в. } t \in [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \tag{3.1}$$

$$\nabla^N y(0) = Y_0, \tag{3.2}$$

$$y(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in (-\infty, 0], \tag{3.3}$$

где $^{C}D^{\alpha}$ - дробная производная Капуто порядка α,

$$\nabla^N y(t) = (y(t), y^{'}(t), ..., y^{(N-1)}(t)),$$

и $F : [0,T] \times \mathcal{B} \times E^N \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0,T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t+\theta),\ \theta \in (-\infty, 0]$. Начальные данные $Y_0 = (\widetilde{y^0}, \widetilde{y^1}, ..., \widetilde{y^{N-1}})$ заданы в E^N и начальная функция $\varphi \in \mathcal{B}$ такова, что $\varphi(0) = \tilde{y^0}$. Предполагается, что сужение искомой функции $y : (-\infty, T] \to E$ на $[0,T]$ принадлежит пространству кусочно-дифференцируемых функций $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T]; E)$.

Предполагается, что искомая функция и ее производные удовлетворяют в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$y^{(j)}(t_k^+) = y^{(j)}(t_k) + \mathcal{I}_k^j(y^{(j)}(t_k)), \quad 0 \leq j \leq N-1,\ k = 1, ..., m, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{I}_k^j : E \to E$ - непрерывные импульсные функции, удовлетворяющие условиям $(\mathcal{I}_1)$, $(\mathcal{I}_2)$.

Обозначим $I = [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$. На мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$, накладываются условия: (F_1), (F_2), (F_3), (F_4).

Вводится пространство $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - линейное пространство функций $y : (-\infty; T] \to E$, таких, что $y_0 \in \mathcal{B}$ и $\overline{y} = y|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}^{N-1}([0,T]; E)$, с полунормой: $\|y\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = |y_0|_{\mathcal{B}} + \|\overline{y}\|_{\mathcal{PC}}$.

Затем дается определение интегрального решения задачи (3.1)-(3.4) (определение 3.1), и доказывается (теорема 3.1), что при выполнении условий $(F_1) - (F_4)$ и $(\mathcal{I}_1) - (\mathcal{I}_2)$, множество решений задачи (3.1)-(3.4) на $\mathcal{C}_E(-\infty;T)$ - непусто и компактно.

Четвертая глава состоит из двух пунктов. В **пункте 4.1** рассматривается существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)),\ t \in [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \tag{4.1.1}$$

с начальным условием:

$$y(\theta) = \vartheta(\theta),\ \theta \in (-\infty, 0], \tag{4.1.2}$$

где $D^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$, - дробная производная Римана-Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $t \geq 0$, $F : [0,T] \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями удовлетворяющее условиям аналогичным условиям (F_1), (F_2), (F_3), (F_4). Начальная функция $\vartheta \in \mathcal{B}$, считается заданной (условие (ϑ)) и искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, ..., m, \tag{4.1.3}$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ - непрерывные импульсные функции, удовлетворяющие условиям аналогичным условиям $(\mathcal{I}_1)$, $(\mathcal{I}_2)$.

Далее дается определение интегрального решения задачи (4.1.1)-(4.1.3) (определение 4.1.1), и доказывается (теорема 4.1.1), что при выполнении условий (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (ϑ), $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}2)$, и (4.1.4) множество решений задачи (4.1.1)-(4.1.3) на $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ - непусто и компактно.

В **пункте 4.2** рассматривается существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в банаховом пространстве E вида (4.1.1), но с нелокальным начальным условием:

$$y(s)+g(y)(s)=\varphi(s),\ s\in[-h,0] \tag{4.2.1}$$

где $F:[0,T]\times\mathcal{PC}([-h,0];E)\times E\multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями.

Пусть $\mathcal{C}_E[-h;T]$ - линейное пространство функций $y:[-h;T]\to E$, с нормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]}=\sup_{t\in[-h,T]}\|y(t)\|_E\,.$$

Мультиотображение F удовлетворяет условиям $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$, на импульсные функции $\mathcal{I}_k$ мы накладываем условия $(\mathcal{I}1)$, $(\mathcal{I}'2)$, а на отображение g, и функцию φ условия (φ), (g_1), (g_2).

Вводится определение интегрального решения задачи (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3) (определение 4.2.1), и доказывается (теорема 4.2.1), что при выполнении условий (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$, $(g_1)-(g_2),(\varphi)$, $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}'2)$, (4.1.4) и асимптотического условия (4.2.5), множество решений задачи (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3) на $\mathcal{C}_E[-h;T]$ - непусто и компактно.

Пятая глава состоит из трех пунктов. В **пункте 5.1** рассматривается задача управляемости для системы, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}y(t)\in Ay(t)+F(t,y_t,y(t))+Bu(t),\ t\in[0,T]\setminus\{t_1,...,t_m\}\,, \tag{5.1.1}$$

с начальным условием (4.1.2), где функция управления $u(\cdot)$ рассматривается в $L^p(I,U),\ p>1/\alpha$, где U - гильбертово пространство управлений. Оператор $B:U\to E$ предполагается ограниченным и линейным.

Вводится определение интегрального решения задачи (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3) (определение 5.1.1), и на основе него формулируется задача управляемости, которая может быть описана следующим образом. Для заданной начальной функции $\vartheta(\cdot)\in\mathcal{B}$ и заданного $x_1\in E$ мы будем рассматривать существование решения $y\in\mathcal{C}_E(-\infty,T]$ и управления $u\in L^p(I,U)$ таких, что: $y(t)=\vartheta(t),\ t\in(-\infty,0]$ и

$$y(T)=x_1. \tag{5.1.2}$$

В конце пункта доказывается (теорема 5.1.1), что при выполнении условий (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (ϑ), (W), $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}2)$, и (5.1.7), множество решений задачи (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (5.1.2) на $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ - непусто и компактно.

В **пункте 5.2**, с использованием асимптотических условий $(F'3)$ и (4.2.5), доказывается аналогичный результат для нелокальной задачи управляемости.

В последнем **пункте 5.3** дается приложение теоремы 5.1.1 к исследованию управляемости процессом дробной диффузии.

Суммируя вышеизложенное, отметим, что с помощью методов нелинейного функционального анализа получены следующие новые результаты:

1. Исследована разрешимость нелокальной задачи Коши для полулинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка в банаховом пространстве.

2. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений для нелинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной Капуто произвольного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

3. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

4. Доказаны теоремы о существовании решений и компактности множества решений нелокальной задачи Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с конечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

5. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений задачи управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

6. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений нелокальной задачи управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с конечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

7. Рассмотрено приложение полученных результатов к задаче об управляемости процессом дробной диффузии.

Материалы диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2013 г.); на Воронежских весенних математических школах (Воронеж, 2011, 2012, 2013 гг.); на международных конференциях "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения"(Тамбов, 2011, 2013 гг.); на международной молодежной научной школе "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Воронеж, 2012 г.); на международных научно-методических конференциях студентов, аспирантов и преподавателей кафедры высшей математики ВГПУ (Воронеж, 2011, 2012, 2013 гг.); на международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева: "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования."(Москва, РУДН, 2013 г.). Результаты диссертации докладывались на семинаре проф. Баскакова А.Г. (ВГУ, 2013).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантами РФФИ № 11-01-00328 и № 12-01-00392.

Результаты диссертации опубликованы в работах [10]-[19]. Из совместно опубликованной работы [13] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Работы [11], [13], [16], [19] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Автор глубоко признателен профессору В.В. Обуховскому за научное руководство и постоянное внимание.

1 Предварительные сведения

1.1 Обозначения и некоторые сведения из анализа

Пусть X - метрическое пространство с метрикой ρ_X.

Определение 1.1.1. *Множество $U \subset X$ называется относительно компактным, если любая последовательность элементов этого множества содержит сходящуюся подпоследовательность. Если пределы указанных последовательностей принадлежат U, то множество называется компактным.*

Определение 1.1.2. *Множество $A \subset X$ называется ϵ-сетью* ($\epsilon > 0$) *для множества $U \subset X$, если для любой точки $x \in U$ найдется хотя бы одна точка $a \in A$, такая, что $\rho_X(x, a) \leq \epsilon$.*

Определение 1.1.3. *Множество $U \subset X$ называется выпуклым, если оно содержит наряду с любыми двумя точками $x, y \in U$ их линейную комбинацию $\lambda x + (1 - \lambda)y$ при любом $\lambda \in (0, 1)$.*

Множество *co* U всевозможных конечных линейных (или выпуклых) комбинаций $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и каждое x_i принадлежит U, является наименьшим выпуклым множеством, содержащим U, и называется выпуклой оболочкой множества U. Множество $\overline{co}\ U = \overline{co\ U}$ называется выпуклым замыканием множества U.

Лемма Мазура (см. [2], стр. 84). *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность элементов нормированного пространства, слабо сходящаяся к x. Тогда найдется двойная последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_{ik}\}_{i=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:*

(a) $\sum_{k=i}^{\infty} \lambda_{ik} = 1$ *для всех* $i = 1, 2, ...$;

(б) *для каждого* $i = 1, 2, ...$ *найдется номер* $k_0 = k_0(i)$ *такой, что* $\lambda_{ik} = 0$ *для всех* $k \geq k_0$;

(в) *последовательность выпуклых комбинаций*

$$\{\widetilde{x}_i\}_{i=1}^{\infty}, \ \widetilde{x}_i = \sum_{k=i}^{\infty} \lambda_{ik} x_k$$

сходится к x *по норме.*

Определение 1.1.4. *Точка* $x \in X$ *называется неподвижной точкой отображения* $f : X \to X$, *если* $x = f(x)$.

Множество всех неподвижных точек отображения f обозначается $Fix\ f$.

Пусть $\mathcal{E}$ - банахово пространство.

Определение 1.1.5 (см. [4], стр. 237). *Отображение* $g : X \to \mathcal{E}$ *называется компактным, если оно каждое ограниченное подмножество* X *переводит в относительно компактное подмножество* $\mathcal{E}$.

Определение 1.1.6 (см. [4], стр. 486). *Отображение* $f : X \to \mathcal{E}$ *называется ограниченным, если для всякого ограниченного множества* $M \subset X$ *множество* $f(M)$ *ограничено в* $\mathcal{E}$.

Определение 1.1.7 (см. [4], стр. 218). *Отображение* $f : X \to \mathcal{E}$ *называется линейным, если для любых* $x,\ y \in X$ *и любых* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *выполнено:*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Лемма 1.1.1 (см. [22], Теорема 38). *Пусть* I *- компактное множество на числовой прямой* $\mathbb{R}$. *Если последовательность функций* $\{f_n\} \subset L^p(I; \mathcal{E})$ *сходится по норме пространства* $L^p(I, \mathcal{E})$ *к функции* f, *то существует последовательность* $\{f_{n_i}\}$, *которая будет сходится к* f *почти всюду на* I.

Определение 1.1.8 (см. [21], стр. 385). *Выпуклое множество K элементов вещественной линейной системы называется конусом, если это множество содержит вместе с каждым элементом x $(x \neq 0)$ все элементы вида tx при $t \geq 0$ и не содержит элемента $-x$.*

Пусть K - компакт, $C(K)$ - пространство непрерывных функций $f : K \to X$ с метрикой ρ.

Определение 1.1.9. *Семейство M функций $f \in C(K)$ называется равномерно ограниченным, если существует такая постоянная c, что $|f(x)| \leq c$ для всех $f \in M$ при любом $x \in K$.*

Определение 1.1.10. *Семейство M функций $f \in C(K)$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее от ϵ, такое, что для всех $f \in M$ соотношение $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ справедливо при $\rho(x, y) < \delta$.*

Теорема Арцела-Асколи (см. [8], стр. 236). *Для того чтобы семейство непрерывных функций $M \subset C(K)$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Нам понадобятся следующие утверждения, представляющие собой варианты лемм Гронуолла и Беллмана-Гронуолла.

Лемма 1.1.2 (см. [34]). *Пусть $u,\ w : [0, b] \to [0, +\infty)$ непрерывные функции, причем $w(\cdot)$ неубывающая, и имеются константы a и $0 < \gamma < 1$, такие, что выполнено:*

$$u(t) \leq w(t) + a \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\gamma}\, ds,$$

тогда существует константа $q = q(\gamma)$, такая, что для любого $t \in [0, b]$

выполняется:

$$u(t) \le w(t) + aq \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^\gamma}\, ds.$$

Лемма 1.1.3 (см. [49]). *Пусть $h(t)$, $q(t)$ и $y(t)$ - неотрицательные, интегрируемые на $[a,b]$ функции, удовлетворяющие неравенству:*

$$y(t) \le q(t) + \int_a^t h(s)y(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

тогда выполняется следующее неравенство:

$$y(t) \le q(t) + \int_a^t exp\left\{\int_a^t h(\theta)d\theta\right\} h(s)q(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Введем следующие обозначения:

$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$ - множество всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$.

$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}$;

$K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}$;

$Kv(\mathcal{E}) = \{Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})\}$ - множество всех непустых компактных и выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

$Cv(\mathcal{E})$ - множество всех непустых замкнутых и выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

Определение 1.1.11 (см. [1], стр. 15). *Пусть $(\mathcal{A}, \ge)$ - некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta : \mathrm{P}(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности(МНК) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполняется:*

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{co}\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *Монотонной*, если для любых $\Omega_0,\ \Omega_1 \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$.

2) *Несингулярной*, если для любого $a \in E$ и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

3) *Инвариантной относительно добавления компактного множества*, если для любого компактного множества $K \subset \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, $\beta(\{K\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ - конус в банаховом пространстве, то β называется:

4) *Алгебраически полуаддитивной*, если для любых $\Omega_0,\ \Omega_1 \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$.

5) *Правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E}),\ \beta(\Omega) = 0$.

6) *Вещественной*, если $\mathcal{A}$ - множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\ \}.$$

Отметим, что мера некомпактности Хаусдорфа удовлетворяет условию полуоднородности, т. е.:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega),$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$.

Пусть $L : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ограниченный линейный оператор, тогда χ-норма L определяется как

$$\|L\|^{(\chi)} = \chi(L(B)),$$

где $B \subset \mathcal{E}$ - единичный шар $\mathcal{E}$, нетрудно видеть, что $\|L\|^{(\chi)} \le \|L\|$.

Определение 1.1.12. *Пусть β - монотонная несингулярная мера некомпактности в E, тогда непрерывное отображение $f : M \subseteq \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным множеством, выполнено:*

$$\beta(f(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega).$$

Мы будем использовать следующую теорему о неподвижной точке типа Б. Н. Садовского.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ - ограниченная открытая окрестность нуля и $f : \overline{\mathcal{U}} \to \mathcal{E}$ — непрерывное β-уплотняющее отображение, удовлетворяющее граничному условию $x \neq \lambda f(x)$, для любого $x \in \partial\mathcal{U}, 0 < \lambda \le 1$. Тогда множество $Fixf$ непустое компактное множество.*

Определение 1.1.13 (см. [20], стр. 41). *Дробной первообразной порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:*

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds,$$

где Γ - гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 1.1.14 (см. [20], стр. 43). *Дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $D_0^\alpha g$ следующего вида:*

$$D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s)\, ds.$$

Определение 1.1.15 (см. [48], стр. 79). *Дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (N-1, N]$ от функции $g \in \mathcal{C}^N([0,T];E)$, называется функция ${}^C D_0^\alpha g$ следующего вида:*

$${}^C D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} g^{(N)}(s)\, ds.$$

Для определенных выше дробной первообразной и дробной производной имеют место следующие соотношения:

$${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha u(t) = u(t),$$

$$I_a^{\alpha C} D_a^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n.$$

1.2 Обозначения и некоторые сведения из многозначного анализа

Приведем необходимые сведения из многозначного анализа (детали могут быть найдены в [2], [38]).

Пусть $X,\ Y$ - произвольные множества.

Определение 1.2.1. *Многозначным отображением (мультиотображением) G множества X в множество Y называется соответствие, которое сопоставляет каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $G(x) \subset Y$, называемое образом x. Это соответствие записывается в виде $G : X \to P(Y)$ или $G : X \multimap Y$.*

Класс мультиотображений включает в себя и обычные однозначные отображения; для них каждый образ состоит из единственной точки. Всюду в дальнейшем многозначные отображения обозначаются прописными буквами, а однозначные - строчными.

Определение 1.2.2. *Образом множества $A \subseteq X$ при мультиотображении G называется множество $G(A) = \bigcup_{\alpha \in A} G(\alpha)$.*

Определение 1.2.3. *Множество Γ_G в декартовом произведении $X \times Y$:*

$$\Gamma_G = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y,\ y \in G(x)\},$$

называется графиком мультиотображения G.

Определение 1.2.4. *Малым прообразом множества $D \subset Y$ называется множество*

$$G_+^{-1}(D) = \{x | x \in X,\ G(x) \subset D\}.$$

Определение 1.2.5. *Полным прообразом множества $D \subset Y$ называется множество*

$$G_{-}^{-1}(D) = \left\{ x | x \in X,\ G(x) \bigcap D \neq \varnothing \right\}.$$

Пусть $X,\ Y,\ Z$ - произвольные множества, $G_0 : X \to P(Y),\ G_1 : Y \to P(Z)$ - мультиотображения.

Определение 1.2.6. *Мультиотображение $G_1 \circ G_0 : X \to P(Z)$,*

$$(G_1 \circ G_0)(x) = G_1(G_0(x)),$$

называется композицией отображений G_0 и G_1.

Пусть $X,\ Y$ - топологические пространства.

Определение 1.2.7. *Мультиотображение $G : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (п.н.с.) в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $G(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $G(U(x)) \subset V$.*

Мультиотображение G называется п.н.с., если оно п.н.с. в каждой точке $x \in X$.

Определение 1.2.8. *Мультиотображение G называется замкнутым, если график Γ_G есть замкнутое множество пространства $X \times Y$.*

Определение 1.2.9. *Мультиотображение G называется компактным, если область значений $G(X)$ относительно компактна в Y, то есть $\overline{G(X)}$ компактно в Y.*

Определение 1.2.10. *Мультиотображение G называется вполне непрерывным, если G п.н.с. и преобразует каждое ограниченное подмножество X в относительно компактное подмножество Y.*

Определение 1.2.11. *Мультиотображение G называется квазикомпактным, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.*

Лемма 1.2.1. *Если $\mathcal{G} : X \to K(E)$ - замкнутое квазикомпактное мультиотображение, то оно п.н.с.*

Определение 1.2.12. *Мультиотображение $G : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно МНК β (β - уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено:*

$$\beta(G(\Omega)) \not\geq \beta(\Omega).$$

Определение 1.2.13. *Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой мультиотображения G, если $x \in G(x)$.*

Из теории топологической степени для уплотняющих мультиотображений известны следующие теоремы.

Пусть $D \subset \mathcal{E}$ - непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{E}$, а $\mathcal{U}_D$ - непустое открытое подмножество D. Обозначим через $\overline{\mathcal{U}_D}$ и $\partial\mathcal{U}_D$ замыкание и границу $\mathcal{U}_D$ соответственно.

Теорема 1.2.1. *Пусть $\mathcal{U}_D$ - открытая окрестность точки $a \in D$ и $G : \overline{\mathcal{U}_D} \to Kv(D)$ - п.н.с. β - уплотняющее мультиотображение, удовлетворяющее граничному условию:*

$$x - a \notin \lambda(G(x) - a)$$

для всех $x \in \partial\mathcal{U}_D$ и $0 < \lambda \leq 1$. Тогда множество неподвижных точек G суть непустое компактное множество.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\mathcal{M}$ *- выпуклое замкнутое подмножество* $\mathcal{E}$ *и* $G : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ *- п.н.с.* β *- уплотняющее мультиотображение, где* β *- несингулярная мера некомпактности в* $\mathcal{E}$*. Тогда множество неподвижных точек* G *суть непустое компактное множество.*

Теорема 1.2.3. *Пусть* $G : X \to Cv(Y)$ *- замкнутое мультиотображение. Если* $A \subset X$ *- компактное множество, то его образ* $G(A)$ *замкнут в* Y.

Теорема 1.2.4. *Пусть* $G : X \to K(Y)$ *- п.н.с. мультиотображение. Если* $A \subset X$ *- компактное множество, то его образ* $G(A)$ *компактен.*

Теорема 1.2.5. *Если мультиотображения* $G_0 : X \to P(Y)$, $G_1 : Y \to P(Z)$ *п.н.с., то их композиция* $G_1 \circ G_0 : X \to P(Z)$ *п.н.с.*

Теорема 1.2.6. *Если мультиотображения* $G_0 : X \to P(Y)$, $G_1 : Y \to P(Z)$ *п.н.с., то их декартово произведение* $G_1 \times G_0 : X \to P(Y \times Z)$ *п.н.с.*

Теорема 1.2.7. *Если мультиотображения* $G_0 : X \to K(Y)$, $G_1 : Y \to K(Z)$ *п.н.с., то их декартово произведение* $G_1 \times G_0 : X \to K(Y \times Z)$ *п.н.с.*

Теорема 1.2.8. *Если мультиотображение* $G : X \to K(\mathcal{E})$ *п.н.с., то выпуклое замыкание* $\overline{co}\, G : X \to Kv(Y)$ *п.н.с.*

Определение 1.2.14. *Однозначное отображение* $g : X \to Y$ *называется сечением мультиотображения* G, *если* $g(x) \in G(x)$ *для каждого* $x \in X$.

Определение 1.2.15. *Множество* $\mathcal{A}$ *с заданным на нем бинарным отношением* $\leq$ *называется направленным, если выполнены условия:*

(1) $\alpha \leq \beta,\ \beta \leq \gamma$ *влечет* $\alpha \leq \gamma$ *для всех* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$;

(2) *$\alpha \leq \alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$;*

(3) *для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ найдется $\gamma \in \mathcal{A}$ такое, что $\alpha \leq \gamma,\ \beta \leq \gamma$.*

Определение 1.2.16. *Отображение направленного множества $\mathcal{A}$ в топологическое пространство X, то есть соответствие, по которому каждому $\alpha \in \mathcal{A}$ сопоставляется некоторое $x_\alpha \in X$, называется направленностью или обобщенной последовательностью.*

Теорема 1.2.9. *Пусть $X,\ Y$ - топологические пространства и $G : X \to P(Y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *мультиотображение G замкнуто;*

(б) *для любой пары $x \in X,\ y \in Y$ такой, что $y \notin G(x)$, существуют окрестности $U(x)$ точки x и $V(y)$ точки y такие, что $G(U(x)) \bigcap V(y) = \varnothing$;*

(в) *для любых направленностей $\{x_\alpha\} \subset X,\ \{y_\alpha\} \subset Y$ таких, что $x_\alpha \to x,\ y_\alpha \in G(x_\alpha),\ y_\alpha \to y$, выполнено $y \in G(x)$.*

Пусть E - банахово пространство и I - измеримое подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$, снабженной мерой Лебега.

Определение 1.2.17. *Мультифункция $G : I \to K(E)$ называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо для любого открытого подмножества $V \subset E$.*

Определение 1.2.18. *Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : I \to K(E)$ такая, что:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t), G(t)) = 0,$$

для п.в. $t \in I$, где $\mathcal{H}$ - хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Определение 1.2.19. *Однозначное отображение $g : I \to E$ назы-*

вается измеримым сечение мультиотображения $G : I \to K(E)$, *если отображение* g *измеримо и является сечением мультиотображения* G.

Определение 1.2.20.. *Мультифункция* $G : I \to K(E)$, *для* $p \geq 1$, *называется:*

•L^p*-интегрируемой, если она допускает* L^p *- интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция* $g \in L^p(I; E)$, *такая, что* $g(t) \in G(t)$ *для п.в.* $t \in I$;

•L^p*-интегрально ограниченной, если существует функция* $\xi \in L^p(I)$ *такая, что:*

$$\|G(t)\| := sup\left\{\|g\|_E : g \in G(t)\right\} \leq \xi(t)$$

для п.в. $t \in I$.

Множество всех L^p - интегрируемых сечений мультифункции $G : I \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}_G^p$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p - интегрально ограничена, то она L^p - интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_I G(s)ds := \left\{\int_I g(s)ds : g \in \mathcal{S}_G^p\right\},$$

для любого $t \in I$.

Определение 1.2.21. *Последовательность* $\{\xi_n\} \subset L^p([0, T]; E)$ *называется* L^p*-полукомпактной, если она* L^p *- интегрально ограничена и множество* $\{\xi_n(t)\}$ *относительно компактно в* E *для п.в.* $t \in [0, T]$.

Лемма 1.2.2. L^p*-полукомпактная последовательность функций* $\{\xi_n\}$ *слабо компактна, то есть из нее можно выделить слабо сходящуюся* *подпоследовательность.*

Этот результат является следствием следующего.

Лемма 1.2.3 (см. [30], Следствие 3.4). *Пусть A - ограниченное подмножество $L^p(I,E)$, $1 < p < \infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *A - слабо компактно;*

(б) *для каждой последовательности $\{\xi_n\} \subset A$, существует последовательность $\{g_n\} \subset co\{\xi_k | k \geq n\}$ такая, что последовательность $\{g_n(t)\}$ сходится по норме для п.в. $t \in I$;*

(в) *для каждой последовательности $\{\xi_n\} \subset A$, существует последовательность $\{g_n\} \subset co\{\xi_k | k \geq n\}$ такая, что последовательность $\{g_n(t)\}$ слабо сходится для п.в. $t \in I$.*

Лемма 1.2.4. *Пусть $G : I \to P(E)$ — L^p-интегрируемая и L^p-интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leq q(t),$$

для п.в. $t \in I$, где $q \in L^p_+(I)$. Тогда

$$\chi\Big(\int_I G(s)ds\Big) \leq \int_I q(s)ds,$$

для всех $t \in I$. В частности, если мультифункция $G : I \to K(E)$ измерима и L^p - интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем:

$$\chi\Big(\int_I G(s)ds\Big) \leq \int_I \chi(G(s))ds,$$

для всех $t \in I$.

Лемма 1.2.5. *Пусть последовательность функций* $\{\xi_n\} \subset L^p(I;E)$ *является* L^p*-интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\chi(\{\xi_n(t)\}) \leq q(t)$$

для п.в. $t \in I$, *где* $q \in L^p(I)$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует компактное множество* $K_\delta \subset E$ *и множество* $m_\delta \subset I$, *с Лебеговой мерой* $(m_\delta) < \delta$, *а также последовательность функций* $G_\delta \subset L^p(I;E)$ *со значениями в* K_δ, *такие, что для каждого* $n \geq 1$ *существует функция* $b_n \in G_\delta$, *для которой*

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2q(t) + \delta,\ t \in I \backslash m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ *может быть выбрана так, что* $b_n \equiv 0$ *на* m_δ *и эта последовательность слабо компактна.*

Определение 1.2.22. *Мультиотображение* $G : I \times \mathcal{E} \to K(E)$ *удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, если:*

(1) $G(\cdot, x) : I \to K(E)$ *- измеримо для каждого* $x \in \mathcal{E}$;

(2) $G(t, \cdot) : \mathcal{E} \to K(E)$ *- п.н.с. для п.в.* $t \in I$.

Определение 1.2.23. *Мультиотображение* $G : I \times \mathcal{E} \to K(E)$ *называется суперпозиционно селектируемым, если для любой сильно измеримой функции* $q : I \to \mathcal{E}$, *существует сильно измеримое сечение* $f : I \to E$ *мультифункции* $\Phi : I \to K(E)$,

$$\Phi(t) = G(t, q(t)).$$

Теорема 1.2.10. *Мультиотображение* $G : I \times \mathcal{E} \to K(E)$ *удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, тогда* G *- суперпозиционно селектируемо.*

Лемма 1.2.6. *Пусть* $\chi_0,\ \chi_1$ *- меры некомпактности Хаусдорфа в пространствах* $\mathcal{E},\ E$ *соответственно,* $\Delta \subseteq \mathcal{E}$ *и* $\mathcal{M}$ *- совокупность ограниченных подмножеств* Δ.

Предположим, что мультиоператор $B(x,\cdot): \Delta \times \mathcal{E} \to K(E)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) для каждого $x \in \Delta$ *мультиоператор* $B(x,\cdot): \mathcal{E} \to K(E)$ *является* k*-липшицевым относительно Хаусдорфовой метрики* $\mathcal{H}$ *в* $K(E)$*, то есть*

$$\mathcal{H}\left(B\left(x, y_0\right), B\left(x, y_1\right)\right) \leq k \left\|y_0 - y_1\right\|,$$

для любых $y_0, y_1 \in \mathcal{E}$*, где* $k \in \mathbb{R}_+$ *не зависит от* x*;*

(ii) множество $B(\Omega \times \{y\})$ *- относительно компактно в* E*, для любых* $\Omega \in \mathcal{M}$ *и* $y \in \mathcal{E}$.

Тогда мультиоператор $A : \Delta \to K(E)$ *определенный как* $A(x) = B(x,x)$ *является* (k, χ_0, χ_1)*-ограниченным в* $\mathcal{M}$*, то есть*

$$\chi_1\left(A\left(\Omega\right)\right) \leq k\chi_0(\Omega),$$

для любого $\Omega \in \mathcal{M}$.

Лемма 1.2.7 (см. [37], Лемма 1). *Пусть* X *- метрическое пространство, с метрикой* ρ_X*,* Z *- нормированное пространство и* $\Delta \subseteq X$ *- замкнутое множество. Пусть мультиоператор* $B : \Delta \times X \to K(Z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) для каждого $y \in X$*, мультиоператор* $B(\cdot, y) : \Delta \to K(Z)$ *- вполне п.н.с.*

(ii) для каждого $x \in \Delta$*, мультиоператор* $B(x,\cdot) : X \to K(Z)$ *-* k*-липшецев относительно Хаусдорфовой метрики* $\mathcal{H}$ *в* $K(Z)$*, то есть*

$$\mathcal{H}\left(B\left(x, y\right), B\left(x, y'\right)\right) \leq k\rho_X(y, y'),$$

для любых $y, y' \in X$.

Тогда мультиоператор $A : \Delta \to K(Z)$, $A(x) = B(x, x)$ *- п.н.с. и* (k, χ_0, χ_1)*-ограничен для любого* $\Omega \in \Delta$*, где* χ_0, χ_1 *- меры некомпактности Хаусдорфа в* X, Z *соответственно.*

1.3 Фазовое пространство.

Мы будем использовать слегка модифицированное понятие фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное Хейлом и Като (см. [33], [36]). Полагаем, что $\mathcal{B}$ - линейное пространство с полунормой $|\cdot|_{\mathcal{B}}$, состоящее из функций, отображающих $(-\infty; 0]$ в E и удовлетворяющих нижеследующим аксиомам.

Если функция $v : (-\infty; T] \to E$ такова, что $v|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}([0,T]; E)$ и $v_0 \in \mathcal{B}$, то

($\mathcal{B}_1$) $\quad v_t \in \mathcal{B}$ для всех $t \in [0, T]$,

($\mathcal{B}_2$) функция $t \mapsto v_t$ непрерывна на $[0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$,

($\mathcal{B}_3$) $\quad |v_t|_{\mathcal{B}} \leq K(t) sup\{\|v(s)\|_E : 0 \leq s \leq t\} + M(t)\,|v_0|_{\mathcal{B}}$, где $M, K : [0, T] \to [0, \infty)$, $K(\cdot)$ - непрерывно, $M(\cdot)$ - ограничено и эти функции не зависят от v.

Мы можем рассмотреть следующие примеры фазовых пространств удовлетворяющих всем вышеперечисленным свойствам.

Для $r > 0$ обозначим через $\mathcal{C}([-r, 0]; E)$ пространство всех кусочно-непрерывных функций $\psi : [-r, 0] \to E$ с конечным набором точек разрыва $\{t_*\}$ на интервале $[-r, 0]$, таких, что все значения $\psi(t_*^-)$ и $\psi(t_*^+)$ конечны. Рассматривая $\mathcal{C}([-r, 0]; E)$ как подпространство пространства всех измеримых функций, мы можем рассматривать его как нормированное пространство с нормой:

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}([-r,0];E)} = \int_{-r}^{0} \|\psi(\tau)\|\, d\tau.$$

Пример 1.3.1. Для некоторого $\nu > 0$, пусть $\mathcal{B} = PC_\nu$ - пространство функций $\psi : (-\infty, 0] \to E$, таких, что:

(i) $\psi|_{[-r,0]} \in \mathcal{C}([-r, 0]; E)$ для всех $r > 0$;

(ii) интеграл $\int_{-\infty}^{0} e^{\nu\theta} \|\psi(\theta)\|\, d\theta$ конечен.

Тогда мы можем положить:

$$|\psi|_{\mathcal{B}} = \int_{-\infty}^{0} e^{\nu\theta} \|\psi(\theta)\| \, d\theta.$$

Пример 1.3.2 (Пространство с "затухающей памятью"). Пусть $\mathcal{B} = PC_\rho$ - пространство функций $\psi : (-\infty, 0] \to E$, таких, что:

(a) $\psi \in \mathcal{C}([-r, 0]; E)$ для некоторого $r > 0$;

(b) ψ интегрируема по Лебегу на $(-r, 0]$ и существует положительная измеримая по Лебегу функция $\rho : (-\infty, -r) \to \mathbb{R}_+$, такая, что $\rho\psi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty, -r)$; более того, существует локально ограниченная функция $P : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\xi \leq 0, \quad \rho(\xi + \theta) \leq P(\xi)\rho(\theta)$ для п.в. $\theta \in (-\infty, -r)$. Тогда определим

$$|\psi|_{\mathcal{B}} = \int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta) \|\psi(\theta)\| \, d\theta + \int_{-r}^{0} \|\psi(\tau)\| \, d\tau.$$

Простой пример такого пространства задается функциями $\rho = e^{\mu\theta}, \ \mu \in \mathbb{R}$.

2 О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве

В этой главе мы будем рассматривать существование решения для полулинейного функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x_t),\ t \in [0, T], \tag{2.1}$$

с нелокальным начальным условием:

$$x(\theta) + g(x)(\theta) = \vartheta(\theta),\ \theta \in [-h, 0], \tag{2.2}$$

где D^{α}, $0 < \alpha < 1$, - дробная производная Римана-Лиувилля, $f : [0, T] \times E \times C([-h, 0]; E) \to E$ - нелинейное отображение, $g : C([-h, T]; E) \to C([-h, 0]; E)$ и $\vartheta : [-h, 0] \to E$ - заданные функции, $x_t \in C([-h, 0]; E)$, $h > 0$, x_t определено как $x_t(\theta) = x(t + \theta),\ -h < \theta \leq 0$.

Предполагаются выполненными следующие условия.

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, где $t \geq 0$.

(f_1) $f(\cdot, x, y)$ - измеримая функция на $[0, T]$, для всех $(x, y) \in E \times C([-h, 0]; E)$;

(f_2) $f(t, \cdot, \cdot)$ - непрерывная функция на $E \times C([-h, 0]; E)$, для п.в. $t \in [0, T]$;

(f_3) условие подлинейного роста:

$$\|f(t, x, \psi)\| \leq \eta(t)(1 + \|x\|_E + \|y\|_{\mathcal{C}}), \text{п.в. } t \in [0, T],$$

где $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ - суммируемая функция, $\mathcal{C} = C([-h,0],E)$.

(f_4) условие регулярности: существует суммируемая функция $k : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, такая что для любого непустого ограниченного множества $Q \subset E$ и для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset C([-h,0];E)$ выполненно

$$\chi(f(t,Q,\Omega)) \leq k(t)(\chi(Q) + \psi(\Omega)),$$

где $\psi(\Omega) = \sup_{t\in[-h,0]} \chi(\Omega(t))$, $\chi(\cdot)$ - мера некомпактности Хаусдорфа.

$(g1)$ $g : C([-h,T];E) \to C([-h,0];E)$ - непрерывное отображение, преобразующее ограниченное множество в ограниченное.

$(g2)$ существует суммируемая функция $l : [-h,0] \to \mathbb{R}_+$, такая, что:

$$\chi(g(D)(t)) \leq l(t)\chi(D(t)),$$

для любого $t \in [-h,0]$, и для любого ограниченного множества $D \subset C([-h,T];E)$.

$(g3)$ для любого ограниченного множества $D \subset C([-h,T];E)$, $\{g(\psi(\cdot));$ $\psi \in D\}$ - равностепенно непрерывное множество функций и семейство функций

$$\{e^{At}x,\ x \in g(D(0))\}$$

также равностепенно непрерывно.

$(g4)$

$$\underline{\lim}_{\|x\|\to\infty} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < 1.$$

(ϑ') $\vartheta \in C([-h,0];E)$ - заданная функция.

Определение 2.1. *Интегральным решением задачи* (2.1)-(2.2), *мы* *будем называть функцию* $x \in C([-h,T];E)$ *вида:*

$$x(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(x)(t), & t \in [-h,0]; \\ e^{At}(\vartheta(0) - g(x)(0)) + \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} f(s, x(s), x_s) ds, & t \in [0,T]. \end{cases}$$

В пространстве $C([-h,T];E)$ рассмотрим следующий оператор $F : C([-h,T];E) \to C([-h,T];E)$ вида:

$$F(x)(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(x)(t), & t \in [-h,0]; \\ e^{At}(\vartheta(0) - g(x)(0)) + \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} f(s, x(s), x_s)\, ds, & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что неподвижные точки этого оператора совпадают с решениями задачи (2.1)-(2.2). Рассмотрим основные свойства оператора F.

Лемма 2.1. *Оператор F преобразует каждое ограниченное множество в равностепенно непрерывное.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([-h,T];E)$ - непустое ограниченное множество. Для $t \in [-h,0]$ предложение очевидно в силу свойства $(g3)$.

Пусть $t \in [0,T]$. Представим оператор $F(x)(t)$ в виде суммы:

$$F(x)(t) = F_1(x)(t) + F_2(x)(t),$$

где

$$F_1(x)(t) = e^{At}(\vartheta(0) - g(x)(0)),$$

а

$$F_2(x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} f(s, x(s), x_s) ds.$$

Множество функций $\{F_1(x)(\cdot),\ x \in \Omega\}$ равностепенно непрерывно по свойству $(g3)$. Рассмотрим оператор $F_2(x)$. Заметим, что из условия (A) следует, что существует константа $C \geq 1$, такая что $\|e^{At}\|_{L(E)} \leq C$, для любого $t \in [0,T]$. Возьмем $t_1, t_2 \in [0,T]$, такие что $0 < t_1 < t_2 \leq T$ и $\varepsilon > 0$, причем $\varepsilon < t_1$. Тогда имеем

$$\|F_2(x)(t_2) - F_2(x)(t_1)\|_E \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big\| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_2-s)} f(s, x(s), x_s)\, ds -$$

$$- \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_1-s)} f(s, x(s), x_s)\, ds \Big\|_E \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_1-\varepsilon} [(t_2 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_2-s)} - (t_1 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_1-s)}] f(s, x(s), x_s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_2-s)} - (t_1 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_1-s)}] f(s, x(s), x_s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_2-s)} f(s, x(s), x_s)\, ds \right\|_E \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_1-\varepsilon} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] e^{A(t_1-s)} f(s, x(s), x_s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_1-\varepsilon} (t_2 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_1-\varepsilon-s)} [e^{A(t_2-t_1+\varepsilon)} - e^{A\varepsilon}] f(s, x(s), x_s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_2-s)} - (t_1 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_1-s)}] f(s, x(s), x_s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} e^{A(t_2-s)} f(s, x(s), x_s)\, ds \right\|_E \leq$$

$$\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \eta(t)(1 + \|x\| + \|x_s\|) \Big(\int_0^{t_1-\varepsilon} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}]\, ds +$$

$$+ \|e^{A(t_2-t_1+\varepsilon)} - e^{A\varepsilon}\|_{L(E)} \int_0^{t_1-\varepsilon} (t_2 - s)^{\alpha-1}\, ds +$$

$$+ \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1}\, ds + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1}\, ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\, ds \Big).$$

Из получившегося выражения, в силу малости ε, видно, что множество $F_2(\Omega)$ равностепенно непрерывно. Значит и множество $F(\Omega)$ равностепенно непрерывно. Теорема доказана.

Нам понадобятся следующие примеры мер некомпактности в пространстве $C([-h,T];E)$:

(1) модуль послойной некомпактности

$$\psi(\Omega) = \sup_{t\in[-h,T]} \chi(\Omega(t))$$

где χ - Хаусдорфова мера некомпактности в E и $\Omega(t) = \{x(t),\ x \in \Omega\}$,

(2) модуль равностепенной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in\Omega} \max_{|t_1-t_2|\le\delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|.$$

Введем в пространстве $C([-h,T];E)$ меру некомпактности ν со значениями в конусе $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\nu(\Omega) = (\psi(\Omega), mod_C(\Omega)).$$

Пусть

$$\tilde{k} = \max_{t\in[0,T]} k(t),$$

где $k(\cdot)$ - функция, заданная в условии (f_4),

$$\tilde{l} = \max_{t\in[-h,0]} l(t),$$

где $l(\cdot)$ - функция, заданная в условии $(g2)$ и $C^{(\chi)} \ge 0$ - константа, такая что выполняется: $\|e^{At}\|^{\chi} \le C^{(\chi)} \le C$.

Лемма 2.2. *Для того чтобы оператор F был уплотняющим относительно меры некомпактности ν, достаточно чтобы*

$$m := \max\left\{\tilde{l}, \left(\tilde{l} + \frac{2T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\tilde{k}\right) C^{(\chi)}\right\} < 1 \qquad (2.3).$$

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([-h,T];E)$ - непустое ограниченное множество и

$$\nu(F(\Omega)) \geq \nu(\Omega), \tag{2.4}$$

покажем, что Ω - относительно компактное множество.

Если $t \in [-h,0]$, то

$$\chi(F(\Omega)(t)) \leq \chi\left(\left\{g(x)(t),\ x \in \tilde{\Omega}\right\}\right) \leq l(t)\psi(\tilde{\Omega}) \leq \tilde{l}\psi(\tilde{\Omega}) \leq m\psi(\Omega),$$

где $\tilde{\Omega} = \Omega|_{[-h,0]}$.

Пусть теперь $t \in [0,T]$, и пусть $\Omega_t = \{x_t;\ x \in \Omega\}$. Рассмотрим многозначную функцию $s \in [0,T] \multimap G(s) \subset E$,

$$G(s) = \{(t-s)^{\alpha-1}e^{A(t-s)}f(s,x(s),x_s),\ x \in \Omega\}.$$

Она интегрально ограничена функцией:

$$s \to (t-s)^{\alpha-1}C\eta(t)(1+\|x\|+\|x_s\|),\ x_s \in \Omega_s.$$

Оценим $\chi(G(s))$:

$$\chi(G(s)) \leq (t-s)^{\alpha-1}\|e^{A(t-s)}\|^{(\chi)}\chi(\{f(s,x(s),x_s),\ x \in \Omega\}) \leq$$

$$\leq (t-s)^{\alpha-1}C^{(\chi)}\chi(\{f(s,\Omega(s),\Omega_s)\}) \leq$$

$$\leq (t-s)^{\alpha-1}C^{(\chi)}k(s)(\chi(\Omega(s))+\psi(\Omega_s)) \leq 2(t-s)^{\alpha-1}C^{(\chi)}\tilde{k}\psi(\Omega).$$

Оценим $\chi(\{F_1(x)(t),\ x \in \Omega\})$, $t \in [0,T]$.

$$\chi(\{F_1(\Omega)(t)\}) \leq \|e^{At}\|^{(\chi)}\chi(\{g(x)(0)\}) \leq C^{(\chi)}l(t)\psi(\{x(0)\}) \leq C^{(\chi)}\tilde{l}\psi(\Omega).$$

Оценим теперь $\chi(F(\Omega)(t))$:

$$\chi(F(\Omega)(t)) \leq \chi(\{F_1(\Omega)(t)\}) + \chi(\{F_2(\Omega)(t)\}) \leq$$

$$\leq C^{(\chi)}\tilde{l}\psi(\Omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\chi(\int_0^t G(s)ds) \leq$$

$$\leq C^{(\chi)}\tilde{l}\psi(\Omega) + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}C^{(\chi)}\tilde{k}\psi(\Omega)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \leq$$

$$\leq C^{(\chi)}\tilde{l}\psi(\Omega) + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}C^{(\chi)}\tilde{k}\frac{t^\alpha}{\alpha}\psi(\Omega) \leq C^{(\chi)}\tilde{l}\psi(\Omega) + \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}C^{(\chi)}\tilde{k}\psi(\Omega) \leq$$

$$\leq \left(\tilde{l} + \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\tilde{k}\right)C^{(\chi)}\psi(\Omega) \leq m\psi(\Omega).$$

Таким образом, при всех $t \in [-h, T]$ получаем:

$$\chi(F(\Omega)(t)) \leq m\psi(\Omega),$$

а следовательно,

$$\psi(F(\Omega)) \leq m\psi(\Omega). \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.4) с (2.5) получаем, что $\psi(\Omega) = 0$. Из леммы 2.1 нам известно, что:

$$mod_C(F(\Omega)) = 0,$$

значит $\nu(\Omega) = 0$, следовательно Ω - относительно компактное множество, а оператор F является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Теорема доказана.

Теорема 2.1. *При выполнении условий (A), (ϑ'), (f_1)-(f_4), ($g1$)-($g4$), а также* (2.3), *множество решений задачи* (2.1)-(2.2) *непустое и компактное подмножество пространства* $C([-h, T]; E)$.

Доказательство. Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $\Psi : [0, 1] \times C([-h, T]; E) \to C([-h, T]; E)$

$$\Psi(\lambda, x) = \lambda F(x).$$

Докажем, что множество неподвижных точек семейства Ψ:

$$Fix\ \Psi = \{x = \Psi(\lambda, x),\ \lambda \in (0,1]\},$$

априори ограничено.

Пусть $x \in Fix\ \Psi$.

Если $t \in [-h, 0]$, то

$$x(t) = \lambda(\vartheta(t) - g(x)(t)). \tag{2.6}$$

Предположим, что совокупность функций $x(t),\ t \in [-h, 0]$, удовлетворяющих (2.6) неограничена, тогда существует последовательность x_n, такая что $\|x_n\| \to \infty$ и для нее имеем:

$$\|x_n\| \leq \|\vartheta\| + \|g(x_n)\|.$$

Разделим обе части выражения на $\|x_n\|$, получим неравенство:

$$1 \leq \frac{\|\vartheta\|}{\|x_n\|} + \frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|},$$

что противоречит условию $(g4)$.

Пусть теперь $t \in [0, T]$, тогда

$$x(t) = \lambda e^{At}(\vartheta(0) - g(x)(0)) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} f(s, x(s), x_s)\, ds.$$

Если мы возмем $t = 0$, то получим $x(0) = \lambda(\vartheta(0) - g(x)(0))$.

По доказаному выше, множество $x(0)$ априори ограничено, значит по условию $(g1)$ существует константа M, такая что $\|g(x)\| \leq M$.

Тогда имеем:

$$\|x(t)\| \leq C(\|\vartheta\| + M) + \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \eta(t)(1 + \|x\| + \|x_s\|)\, ds \leq$$

$$\leq C(\|\vartheta\| + M) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(1 + \|x\| + \max_{0 \leq v \leq s} \|x_v\|)\, ds \leq$$

$$\leq C(\|\vartheta\| + M) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha (1 + \|x\|) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \max_{0 \leq v \leq s} \|x_v\|)\, ds,$$

где

$$\tilde{\eta} = \max_{0 \leq t \leq T} \eta(t).$$

Обозначим

$$u(t) = \max_{0 \leq v \leq t} \|x_v\|.$$

В силу того, что правая часть полученного неравенства представляет собой неубывающую функцию от t, а также используя оценку функции $x(t)$ при $t \in [-h, 0]$, имеем оценку:

$$u(t) \leq C(\|\vartheta\| + M) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha (1 + \|x\|) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)\, ds.$$

Обозначим $K = C(\|\vartheta\| + M) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha (1 + \|x\|)$. Воспользовавшись леммой 1.1.2, мы получим

$$u(t) \leq K \left(1 + \frac{qC\tilde{\eta}T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

Следовательно, множество всех решений задачи (2.1)-(2.2) априори ограничено, это значит, что мы можем взять шар достаточно большого радиуса R в пространстве $C([-h,T];E)$, который будет априори содержать все неподвижные точки оператора F, более того справедливо $x \neq \lambda F(x),\ \lambda \in (0,1]$ на границе шара ∂B. Утверждение теперь вытекает из теоремы 1.1.1. Теорема доказана.

3 О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве

Пусть E - банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0, T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geq 1$ и функции $c : [0, T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{\xi \to 0+} c(t_k + \xi),$$

$$c(t_k^-) = \lim_{\xi \to 0-} c(t_k + \xi),$$

для $1 \leq k \leq m$.

Для целого $N \geq 1$ и $\alpha \in (N-1, N]$, в работе изучается следующая задача Коши:

$$^C D^\alpha y(t) \in F(t, y_t, \nabla^N y(t)) \quad \text{п. в. } t \in [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \tag{3.1}$$

$$\nabla^N y(0) = Y_0, \tag{3.2}$$

$$y(\theta) = \varphi(\theta), \ \theta \in (-\infty, 0], \tag{3.3}$$

где $^C D^\alpha$ - дробная производная Капуто порядка α,

$$\nabla^N y(t) = (y(t), y^{'}(t), ..., y^{(N-1)}(t)),$$

и $F : [0, T] \times \mathcal{B} \times E^N \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний (см. п. 1.3) и $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0, T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t+\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0]$. Начальные данные $Y_0 = (\widetilde{y^0}, \widetilde{y^1}, ..., \widetilde{y^{N-1}})$ заданы в E^N и начальная функция $\varphi \in \mathcal{B}$ такова, что $\varphi(0) = \widetilde{y^0}$.

Предполагается, что сужение искомой функции $y : (-\infty, T] \to E$ на $[0, T]$ принадлежит пространству $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ функций $z : [0, T] \to E$, непрерывных вместе со своими производными $z^{'}, z^{''}, ..., z^{(N-1)}$(при $N = 1$ просто непрерывных) на $[0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z^{(j)}(t_k^-)$ и $z^{(j)}(t_k^+)$, $\quad 0 \leq j \leq N - 1, \quad 1 \leq k \leq m$, существуют и $z^{(j)}(t_k^-) = z^{(j)}(t_k)$. При $N = 1$, пространство $\mathcal{PC}^0([0, T]; E)$ будем обозначать просто $\mathcal{PC}([0, T]; E)$.

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$, снабженное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \|z\| + \|z^{'}\| + ... + \|z^{(N-1)}\|,$$

где в правой части равенства рассматриваются обычные нормы равномерной сходимости, является банаховым пространством и что классическое пространство $C^{N-1}([0, T]; E)$ является его замкнутым подпространством.

Для удобства обозначим $t_0 = 0, t_{m+1} = T$. Тогда для функции $z \in \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ обозначим $\widehat{z}_k \in C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E),\ k = 0, ..., m,$ - функции заданные вместе со своими производными соотношениями: $\widehat{z}_k^{(j)}(t) = z_k^{(j)}(t),\ t \in (t_k, t_{k+1}];\ \widehat{z}_k^{(j)}(t_k) = z_k^{(j)}(t_k^+),\ j = 0, 1, ..., N - 1$. Более того, для множества $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ обозначим $\widehat{D}_k, \quad k = 0, ..., m$, множества $\widehat{D}_k = \{\widehat{z}_k : z \in D\}$.

Лемма 3.1. *Множество $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ тогда и только тогда, когда каждое множество $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, относительно компактно в $C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E)$.*

Доказательство. Пусть множество $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$, тогда по теореме Арцела-Асколи множество D равномерно ограниченно, то есть существует константа $M > 0$, такая, что $\|z(t)\| \leq M,\ z \in D$, и равностепенно непрерывно на каждом промежутке (t_k, t_{k+1}). Следовательно каждая функция $\widehat{z}_k(t),\ z \in D$ удовлетворяет условию $\|\widehat{z}_k(t)\| \leq M$ и множества $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, равностепенно непрерывны на (t_k, t_{k+1}). Тогда, используя теорему Арцела-Асколи, мы получаем, что множества $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, относительно компактны в $C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E)$.

Обратно, пусть множества $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, относительно компактны в $C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E)$. Тогда для каждой функции $\widehat{z}_k(t),\ k = 0, ..., m$, существуют константы M_k, такие, что $\|\widehat{z}_k(t)\| \leq M_k,\ k = 0, ..., m$, и при этом каждое множество $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, равностепенно непрерывно на $(t_k, t_{k+1}),\ k = 0, ..., m$. Считая $M = \max_{0 \leq k \leq m} M_k$, и воспользовавшись теоремой Арцела-Асколи, мы получаем, что множество $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Множество* $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ *относительно компактно в* $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ *тогда и только тогда, когда* D *и множества* $D^{(j)} = \left\{z^{(j)} : z \in D\right\},\ 1 \leq j \leq N-1$, *равностепенно непрерывны на каждом промежутке* $(t_k, t_{k+1}),\ k = 0, ..., m$, *и множества* $D(t) = \left\{z(t) : z \in D\right\},\ D^{(j)}(t) = \left\{z^j(t) : z \in D\right\},\ 1 \leq j \leq N-1$, *относительно компактны в* E *для* $t \in [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$.

Доказательство. Пусть множество $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$, тогда по лемме 3.1 каждое множество $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, относительно компактно в $C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E)$. Следовательно множества $D^{(j)} = \left\{z^{(j)} : z \in D\right\},\ 1 \leq j \leq N-1$, равностепенно непрерывны на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}),\ k = 0, ..., m$, и множества $D(t) = \left\{z(t) : z \in D\right\},\ D^{(j)}(t) = \left\{z^j(t) : z \in D\right\},\ 1 \leq j \leq N-1$, относительно компактны в E для $t \in [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$.

Обратно, пусть множества $D^{(j)} = \left\{z^{(j)} : z \in D\right\},\ 1 \leq j \leq N-1$, равностепенно непрерывны на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}),\ k = 0, ..., m$, и множества $D(t) = \left\{z(t) : z \in D\right\},\ D^{(j)}(t) = \left\{z^j(t) : z \in D\right\},\ 1 \leq j \leq N-1$, относительно компактны в E для $t \in [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$. Тогда существуют константы $M_k^{(j)} > 0,\ k = 0, ..., m,\ 0 \leq j \leq N-1$, такие, что $\left\| z_k^{(j)}(t) \right\| \leq M_k^{(j)},\ t \in (t_k, t_{k+1})$. Считая $M = \max_{0 \leq k \leq m} \max_{0 \leq j \leq N-1} M_k^{(j)}$, и воспользовавшись теоремой Арцела-Асколи, мы получаем, что множества $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, относительно компактны в $C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E)$. Ссылаясь снова на лемму 3.1, мы получаем, что множество $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}$ $([0,T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T]; E)$. Лемма доказана.

Наконец, будем полагать, что искомая функция и ее производные удовлетворяют в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$y^{(j)}(t_k^+) = y^{(j)}(t_k) + \mathcal{I}_k^j(y^{(j)}(t_k)),\ 0 \leq j \leq N-1,\ k = 1, ..., m, \qquad (3.4)$$

где $\mathcal{I}_k^j : E \to E$ - непрерывные импульсные функции.

Обозначим $I = [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$. Рассмотрим мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

(F_1) Мультифункция $F(\cdot, \vartheta, y) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение для всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E^N$;

(F_2) Мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$ - п.н.с. для п. в. $t \in I$;

(F_3) Существует функция $w \in L^p([0,T]),\ p > \frac{1}{\alpha - N + 1}$, такая, что:

$$\|F(t, \vartheta, y)\| := sup\left\{\|f\|_E : f \in F(t, \vartheta, y)\right\} \leq w(t)(1 + |\vartheta|_{\mathcal{B}} + \|y\|_{E^N}),$$

для всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E^N$ и п.в. $t \in I$.

Пусть $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - линейное пространство функций $y : (-\infty; T] \to E$, таких, что $y_0 \in \mathcal{B}$ и $\overline{y} = y|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}^{N-1}([0,T]; E)$, с полунормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = |y_0|_{\mathcal{B}} + \|\overline{y}\|_{\mathcal{PC}}.$$

Для $y \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E),\ \Phi_F(t) = F(t, y_t, \nabla^N y(t)).$$

Ясно, что функции $t \in [0,T] \to y_t \in \mathcal{B}$ и $\nabla^N y : [0,T] \to E^N$ кусочно-непрерывны. Тогда (см. теорему 1.2.10) мультифункция Φ_F, является L^p - интегрируемой.

Пусть $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E(-\infty; T] \multimap L^p([0,T]; E)$ - *суперпозиционный мультиоператор,* заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(y) = \mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

Лемма 3.3. *Пусть $\{q_n\}$ - последовательность в $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$, сходящаяся к $q \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$. Предположим, что существует последовательность $\{f_n\} \subset L^p([0,T]; E)$, $\phi_n \in \mathcal{P}_F(q_n)$ слабо сходящаяся к функции f, тогда $f \in \mathcal{P}_F(q)$.*

Доказательство. Пусть E_1 - нормированное пространство, мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F_1) - (F_3)$ и $a : L^p(I, E) \to E_1$ - непрерывный линейный оператор. Докажем сначала, что композиция

$$a \circ \mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E(-\infty; T] \to Cv(E_1)$$

замкнутое мультиотображение.

Заметим, что выпуклость значений мультиотображения $a \circ \mathcal{P}_F$ следует из выпуклости значений F и линейности оператора a.

Рассмотрим последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n \in \mathcal{C}_E(-\infty;T]$; $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in E_1$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \|q_n - q\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = 0,\ z_n \in a \circ \mathcal{P}_F(q_n),\ \lim_{n\to\infty} \|z_n - z\|_{E_1} = 0.$$

Выберем последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(I,E)$, $f_n \in \mathcal{P}_F(q_n)$, $z_n = a(f_n)$. Применяя условия $(F_2),(F_3)$ и теорему 1.2.4 легко вывести из сходимости последовательности $\{q_n\}$, что последовательность $\{f_n\}$ L^p-полукомпактна и, следовательно, в силу леммы 1.2.2 она слабо компактна. Переходя к подпоследовательности, мы будем считать без ущерба для общности, что она слабо сходится к функции $f \in L^p(I,E)$.

Применяя теперь лемму Мазура, мы получаем последовательность $\left\{\widetilde{f}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\widetilde{f}_i \in L^p(I,E)$, $\widetilde{f}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ik} f_k$, сходящуюся к f по норме пространства $L^p(I,E)$. Используя лемму 1.1.1, мы снова без ущебра для общности будем предполагать, что последовательность $\left\{\widetilde{f}_i\right\}$ сходится к f почти всюду на I.

Из условия F_2 следует, что почти для каждого $t \in I$ по данному $\epsilon > 0$ найдется натуральное число $i_0 = i_0(\epsilon, t)$ такое, что

$$F(t,(q_t)_i, q_i(t)) \subset F_\epsilon(t, q_t, q(t)) \text{ для всех } i \geq i_0,$$

где F_ϵ обозначает ϵ-окрестность множества.

Но тогда и $f_i(t) \in F_\epsilon(t, q_t, q(t))$ для всех $i \geq i_0$, а следовательно, в силу выпуклости множества $F_\epsilon(t, q_t, q(t))$ и

$$\widetilde{f}_i(t) \in F_\epsilon(t, q_t, q(t)) \text{ для всех } i \geq i_0.$$

Следовательно

$$f(t) \in F(t, q_t, q(t)) \text{ п.в. } t \in I,$$

то есть $f \in \mathcal{P}_F(q)$.

С другой стороны,

$$a\left(\widetilde{f_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ik} a\left(f_k\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ik} z_k,$$

поэтому $\lim_{i\to\infty} \left\| a\left(\widetilde{f_i}\right) - z \right\|_{E_1} = 0$.

Из непрерывности оператора a следует, что $z = a(f)$, поэтому $z \in a \circ \mathcal{P}_F(q)$, тогда применяя теорему 1.2.9, получаем истинность вспомогательного утверждения для $a \circ \mathcal{P}_F$.

Из построенного доказательства видно, что мультиоператор $\mathcal{P}_F$ слабо замкнут. Лемма доказана.

Наложим на мультифункцию F следующее условие регулярности, выраженное в терминах мер некомпактности:

(F_4) Существует функция $\mu \in L^p([0,T])$ такая, что для любых ограниченных множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q_j \subset E,\ j = 0, 1, ..., N-1$, мы имеем:

$$\chi(F(t, \Omega, \prod_{j=0}^{N-1} Q_j)) \leq \mu(t)(\psi(\Omega) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(Q_j)), \text{п.в. } t \in I,$$

где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \leq 0} \chi(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta), q \in \Omega\}$.

Нетрудно видеть, что в случае, когда пространство E конечномерно, условие (F_4) вытекает из (F_3).

Если $\dim(E) = +\infty$, то частным случаем выполнения условия (F_4) является ситуация, когда мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$ - вполне полунепрерывно сверху для п.в. $t \in [0, T]$, то есть оно п.н.с. и преобразует каждое ограниченное множество в относительно компактное.

На импульсные функции $\mathcal{I}_k^j$ мы наложим следующие условия:

($\mathcal{I}_1$) функции $\mathcal{I}_k^j : E \to E$, $1 \leq k \leq m$, $0 \leq j \leq N-1$, являются вполне непрерывными.

($\mathcal{I}_2$) функции $\mathcal{I}_k^j$, $1 \leq k \leq m$, $0 \leq j \leq N-1$, являются глобально ограниченными, то есть существует такое $\mathcal{N} > 0$, что $\left\|\mathcal{I}_k^j x\right\| \leq \mathcal{N}$ для всех $x \in E$.

Определение 3.1 *Интегральным решением на* $(-\infty, T]$ *задачи* (3.1)-(3.4), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ *вида:*

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} \left(\widetilde{y^{(j)}} + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k^j(y^{(j)}(t_k))\right) + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds, & t \in [0, T], \end{cases}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$.

Для нахождения интегральных решений задачи (3.1)-(3.4), рассмотрим отображение

$$S : L^p([0, T]; E) \to C^{N-1}([0, T]; E),$$

$$S(\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds.$$

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{C}_E(-\infty, T] \multimap \mathcal{C}_E(-\infty, T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(y) = g(y) + S \circ \mathcal{P}_F(y),$$

где

$$g(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} \left(\widetilde{y^{(j)}} + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k^j(y^{(j)}(t_k))\right), & t \in [0, T]. \end{cases}$$

(Мы считаем значения мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F$ естественно продолжеными нулем на $(-\infty, 0]$).

Лемма 3.4. *Оператор g вполне непрерывен.*

Доказательство. Так как функции φ, $\widetilde{y^{(j)}}$, $0 \leq j \leq N-1$, заданны, то воспользовавшись свойствами $(\mathcal{I}_1)$, $(\mathcal{I}_2)$ получаем, что множество функций

$$\left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} \left(\widetilde{y^{(j)}} + \sum_{t_k < t} \mathcal{I}_k^j (y^{(j)}(t_k)) \right),\ y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T] \right\}$$

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено константой

$$(\|Y_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}) \sum_{l=0}^{N-1} \frac{T^l}{l!}$$

(см. доказательство теоремы 3.1). Следовательно, по теореме Арцела-Асколи оператор g вполне непрерывен. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что функция $y \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - интегральное решение задачи (3.1)-(3.4) на интервале $(-\infty; T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

С этой целью рассмотрим сужение оператора $\mathcal{G}$ на выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$, определенное как

$$\mathcal{D} = \left\{ v \in \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E),\ \nabla^N y(0) = Y_0 \right\},$$

полагая $\mathcal{G}(v) = \mathcal{G}(v[\varphi])$, где

$$v[\varphi](t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ v(t), & t \in (0, T]. \end{cases}$$

Для функции $v \in \mathcal{D}$ и $t \in [0, T]$, положим $v_t = (v[\varphi])_t$.

Для исследования свойств мультиоператора $\mathcal{G}$ изучим совокупность операторов $S^j : L^p([0,T];E) \to C([0,T];E)$, $j = 0,1,...,N-1$, полагая $S^0 = S$ и

$$S^j(\phi)(t) = \frac{d^j}{dt^j} S(\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-j-1} \phi(s) ds$$

для $1 \le j \le N-1$.

Лемма 3.5. *Операторы* S^j, $j = 0,1,...,N-1$, *обладают следующими свойствами:*

(S_1) *существуют константы* C_j, $j = 0,1,...,N-1$, *такие, что:*

$$\left\| S^j(\xi)(t) - S^j(\eta)(t) \right\|_E^p \le C_j^p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p ds, \quad \xi, \eta \in L^p([0,T]).$$

(S_2) *для каждого компактного множества* $K \subset E$ *и последовательности* $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ *такой, что* $\{\xi_n(t)\} \subset K$ *для п.в.* $t \in [0,T]$, *слабая сходимость* $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, *влечет сходимость* $S^j(\xi_n) \to S^j(\xi_0)$ *в* $C([0,T];E)$.

Доказательство. (S_1) Используя неравенство Гельдера, мы имеем:

$$\left\| S^j(\xi)(t) - S^j(\eta)(t) \right\|_E \le \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-j-1} \|\xi(s) - \eta(s)\|_E ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)} \left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-j-1)p/p-1} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p ds \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\left\| S^j(\xi)(t) - S^j(\eta)(t) \right\|_E^p \le C_j^p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p ds,$$

где

$$C_j = \left[\frac{p-1}{(\alpha-j)p-1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{T^{\alpha-j-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha-j)}.$$

Отметим, что $(\alpha - j)p - 1 > 0,\ j = 0, ..., N-1$, поскольку $p > \frac{1}{\alpha - N + 1}$.

(S_2) Заметим, что без ограничения общности можно считать $\{\xi_n(t)\} \subset E'$ для всех $t \in [0, T]$, где $E' = \overline{spK}$ - сепарабельное банахово пространство, являющееся замыканием линейной оболочки компактного множества K. Более того, ясно, что $\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\} \subset E'$ для всех $t \in [0, T]$ и $j = 0, ..., N-1$. Тогда, применяя лемму 1.2.4, мы получим:

$$\chi\left(\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}\right) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \int_0^t (t-s)^{\alpha - j - 1} \chi\left(\{\xi_n(s)\}\right) ds = 0.$$

Это означает, что последовательность $\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0, T]$.

С другой стороны, мы имеем для любых $0 \leq t' < t'' \leq T$:

$$\left\|S^j(\xi_n)(t'') - S^j(\xi_n)(t')\right\|_E =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \left\| \int_0^{t''} (t'' - s)^{\alpha - j - 1} \xi_n(s) ds - \int_0^{t'} (t' - s)^{\alpha - j - 1} \xi_n(s) ds \right\|_E \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \left\| \int_{t'}^{t''} (t'' - s)^{\alpha - j - 1} \xi_n(s) ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \left\| \int_0^{t'} \left[(t'' - s)^{\alpha - j - 1} - (t' - s)^{\alpha - j - 1}\right] \xi_n(s) ds \right\|_E.$$

Поскольку $\{\xi_n(s)\} \subset K$ для п.в. $s \in [0, T]$, правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $t'' \to t'$ равномерно относительно n. Поэтому последовательность $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела-Асколи мы получаем, что последовательность $\left\{S^j(\xi_n)\right\} \subset C([0, T]; E)$ относительно компактна.

Из свойства (S_1) вытекает, что каждое $S^j : L^p([0, T]; E) \to C([0, T]; E)$ - ограниченный линейный оператор. Тогда эти операторы непрерывны относительно топологии слабой секвенциальной сходимости, то есть слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$ влечет $S^j(\xi_n) \rightharpoonup S^j(\xi_0)$. Поскольку последовательность $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ относительно компактна, мы приходим к заключению, что $S^j(\xi_n) \to S^j(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$. Лемма доказана.

Лемма 3.6 *Пусть последовательность функций* $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1.2.5. *Тогда мы имеем:*

$$\chi\left(\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}\right) \leq 2C_j \left(\int_0^t |q(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}},\ j = 0,1,...,N-1,$$

для всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Для $\epsilon > 0$ подберем $\delta \in (0,\epsilon)$, такое, что для всех $m \subset [0,T]$, с мерой $(m) < \delta$, мы имеем:

$$\int_m |\nu(s)|^p < \epsilon.$$

Беря m_δ и b_n соответствующие $\{\xi_n\}$ из леммы 1.2.5, мы используя лемму 3.5 получаем, что последовательность $\left\{S^j(b_n)\right\},\ j = 0,...,N-1$, - относительно компактна в $C([0,T];E)$. Более того

$$\left\|S^j(\xi_n)(t) - S^j(b_n)(t)\right\|_E^p \leq C_j^p \int_0^t \|\xi_n(s) - b_n(s)\|_E^p\,ds \leq$$

$$\leq C_j^p \int_{[0,t]\setminus m_\delta} \|\xi_n(s) - b_n(s)\|_E^p\,ds + C_j^p \int_{[0,t]\cap m_\delta} \|\xi_n(s)\|_E^p\,ds \leq$$

$$\leq C_j^p \int_{[0,t]\setminus m_\delta} [2q(s) - \delta]^p\,ds + C_j^p \int_{m_\delta} |\nu(s)|^p\,ds \leq$$

$$\leq C_j^p \left(\int_0^t |2q(s) + \epsilon|^p\,ds + \epsilon\right).$$

Поэтому относительно компактное множество $S^jG_\delta(t)$ является $C_j\left(\int_0^t |2q(s)+\epsilon|^p\,ds + \epsilon\right)^{1/p}$ - сетью для множества $\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}$. Это и доказывает лемму, в силу произвольности $\epsilon > 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть $\{\xi_n\}$ - L^p-полукомпактная последовательность. Тогда $\{\xi_n\}$ слабо компактна в $L^p([0,T];E)$ и для каждого $0 \le j \le N-1$, множество $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ - относительно компактно в $C([0,T];E)$. Более того, если $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, то $S^j(\xi_n) \to S^j(\xi_0)$.*

Доказательство. Слабая компактность $\{\xi_n\}$ в $L^p([0,T];E)$ является следствием леммы 1.2.3. Поскольку $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0,T]$, то из леммы 3.6 следует, что для каждого $j = 0,...,N-1$, последовательность $\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}$ - относительно компактна в E для п.в. $t \in [0,T]$.

С другой стороны, из определения 1.2.21 следует, что существует функция $\nu \in L^p(0,T)$, такая, что:

$$\|\xi_n(t)\| \le \nu(t),$$

для всех $n = 1,2,...$ и $t \in [0,T]$.

Благодаря неравенству Гельдера, мы имеем для любых $0 \le t' < t'' \le T$:

$$\left\|S^j(\xi_n)(t'') - S^j(\xi_n)(t')\right\|_E =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\left\|\int_0^{t''}(t''-s)^{\alpha-j-1}\xi_n(s)ds - \int_0^{t'}(t'-s)^{\alpha-j-1}\xi_n(s)ds\right\|_E \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\left\|\int_{t'}^{t''}(t''-s)^{\alpha-j-1}\xi_n(s)ds\right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\left\|\int_0^{t'}\left[(t''-s)^{\alpha-j-1} - (t'-s)^{\alpha-j-1}\right]\xi_n(s)ds\right\|_E \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\left(\int_{t'}^{t''}(t''-s)^{(\alpha-j-1)p'}ds\right)^{1/p'}\left(\int_{t'}^{t''}|\nu(s)|^p\,ds\right)^{1/p} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\left(\int_0^{t'}\left[(t''-s)^{\alpha-j-1}-(t'-s)^{\alpha-j-1}\right]^{p'}ds\right)^{1/p'}\left(\int_0^{t'}|\nu(s)|^p\,ds\right)^{1/p},$$

где p' сопряжено p. Последнее неравенство влечет равностепенную непрерывность $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ в $C([0,T];E)$, и следовательно относительную компактность в $C([0,T];E)$. Окончательное заключение справедливости леммы получается так же как и в доказательстве леммы 3.5. Лемма доказана.

Лемма 3.8. *При выполнении условий* $(F_1)-(F_4)$ *и* $(\mathcal{I}_1)-(\mathcal{I}_2)$, *мультиоператор*

$$\mathcal{G}=g+S\circ\mathcal{P}_F$$

замкнутый, с компактными значениями.

Доказательство. В силу леммы 3.4 утверждение данной леммы достаточно доказать для мультиоператора $S\circ\mathcal{P}_F$. Пусть $\{v_n\}$ - последовательность в $\mathcal{D}$ такая, что $v_n\to v^*\in\mathcal{D}$. Будем считать, что $\xi_n\in\mathcal{P}_F(v_n[\varphi])$ и $z_n=S(\xi_n)\in S(\mathcal{P}_F(v_n[\varphi]))$, $z_n\to z^*$ в $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$. Докажем, что $z^*\in S(\mathcal{P}_F(v^*[\varphi]))$.

Так как

$$\{\xi_n(t)\}\subset F(t,(v_n[\varphi])_t,\nabla^N v_n(t)),\ \text{для п.в. } t\in[0,T],$$

то согласно условию (F_3), последовательность $\{\xi_n\}$ - интегрально ограничена и из (F_4) следует, что:

$$\chi\left(\{\xi_n(t)\}\right)\le\mu(t)\left(\psi(\{(v_n[\varphi])_t\})+\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\left\{v_n^{(j)}(t)\right\})\right)\text{для п.в. } t\in[0,T].$$

Для каждого $j=0,1,...,N-1$, последовательность $\left\{v_n^{(j)}\right\}$ сходится в $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$, поэтому $\chi\Big(\left\{v_n^{(j)}(t)\right\}\Big)=0$ для $t\in[0,T]$.

С другой стороны

$$\psi(\{(v_n[\varphi])_t\}) = \sup_{\theta \le 0} \chi(\{(v_n[\varphi](t+\theta))\}) \le$$
$$\le \sup_{s \in [0,T]} \chi(\{(v_n(s))\}) = 0.$$

Следовательно $\chi(\{\xi_n(t)\}) = 0$ для п.в. $t \in [0,T]$, и последовательность $\{\xi_n\}$ - L^p-полукомпактная. Из леммы 3.7 следует, что мы можем предположить, без ограничения общности, существование $\xi^* \in L^p([0,T];E)$ такого, что $\xi_n \rightharpoonup \xi^*$ и $z_n = S(\xi_n) \to S(\xi^*) = z^*$.

По лемме 3.3, мы получаем, что $\xi^* \in \mathcal{P}_F(v^*[\varphi])$ и поэтому $z^* = S(\xi^*) \in S(\mathcal{P}_F(v^*[\varphi]))$.

Нам остается показать, что для $v \in \mathcal{D}$ и $\{\xi_n\}$ выбранного в $\mathcal{P}_F(v[\varphi])$, последовательность $\{S(\xi_n)\}$ относительно компактна в $C^{N-1}([0,T];E)$. Свойства $(F_3)-(F_4)$ влекут L^p-полукомпактность $\{\xi_n\}$. По лемме 3.7, мы имеем, что последовательности $S^j(\xi_n),\ j = 0,1,...,N-1$, - относительно компактны в $C([0,T];E)$. Значит последовательности $S^j(\xi_n),\ j = 0,1,...,N-1$, - относительно компактны в $C^{N-1}([0,T];E)$. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Мультиоператор $\mathcal{G}$ - п.н.с.*

Доказательство. Используя лемму 1.2.1 и лемму 3.8, достаточно доказать, что $\mathcal{G}$ - квазикомпактное мультиотображение. Снова используя лемму 3.4, сведем проверку к мультиоператору $S \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $A \subset \mathcal{D}$ - компактное множество, докажем, что $S \circ \mathcal{P}_F(A)$ - относительно компактное подмножество $C^{N-1}([0,T];E)$. Предположим, что $\{z_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F(A)$, тогда $z_n = S(\xi_n)$, где $\xi_n \in \mathcal{P}_F(v_n[\varphi])$ для некоторой последовательности $v_n \subset A$. Согласно свойствам $(F_3),(F_4)$ последовательность $\{\xi_n\}$ L^p-полукомпактна и, следовательно, слабо компактна в $L^p([0,T];E)$.

Согласно лемме 3.7, последовательность $\{z_n\}$ относительно компактна в $C^{N-1}([0,T];E)$. Лемма доказана.

Для доказательства уплотняемости мультиоператора $\mathcal{G}$, мы воспользуемся следующими мерами некомпактности в $C^{N-1}([0,T];E)$.

Модифицированный модуль послойной некомпактности:

$$\gamma : P(C^{N-1}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$\gamma(\Omega) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(\frac{d^j}{dt^j}\Omega(t)),$$

где $\frac{d^j}{dt^j}\Omega(t) := \left\{ \frac{d^j}{dt^j} v(t); v \in \Omega \right\}$, а константа L выбрана так, что:

$$l := 4 \sum_{j=0}^{N-1} C_j \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t e^{-Lp(t-s)} \mu^p(s) ds \right)^{1/p} < 1,$$

где $\mu(\cdot)$ - функция из условия (F_4).

Модуль равностепенной непрерывности:

$$mod_C : P(C^{N-1}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{v\in\Omega} \max_{0\le j\le N-1} \max_{|t_1-t_2|<\delta} \left\| v^{(j)}(t_1) - v^{(j)}(t_2) \right\|.$$

Теперь введем векторную меру некомпактности $\nu(\Omega)$:

$$\nu : P(C^{N-1}([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+,$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, заданную как

$$\nu(\Omega) = \max_{D\in\Delta(\Omega)} (\gamma(D), mod_C(D)),$$

где $\Delta(\Omega)$ - совокупность всех счетных подмножеств Ω и максимум берется в смысле частичного порядка в $\mathbb{R}^2_+$.

Лемма 3.10. *Мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to K(\mathcal{D})$ является ν - уплотняющим.*

Доказательство. Из полной непрерывности оператора g и свойств монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности меры некомпактности ν следует, что нам достаточно проверить свойство уплотняемости лишь для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ такое, что:

$$\nu(S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)) \geq \nu(\Omega) \tag{3.5}$$

Докажем, что Ω - относительно компактно. Пусть $\nu(S \circ \mathcal{P}_F(\Omega))$ достигается на последовательности $\{z_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$, то есть:

$$\nu(S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)) = (\gamma(\{z_n\}), mod_C(\{z_n\})),$$

где $z_n = S(\xi_n), \quad \xi_n \in \mathcal{P}_F(v_n[\varphi]),\ \{v_n\} \subset \Omega.$

Из (3.5) следует, что

$$\gamma(\{z_n\}) \geq \gamma(\{v_n\}). \tag{3.6}$$

Согласно (F_4),

$$\chi(\{\xi_n(s)\}) \leq \mu(s) \left(\psi(\{(v_n[\varphi])_s\}) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(\left\{ v_n^{(j)}(s) \right\}) \right),$$

для всех $s \in [0, T]$.

Мы имеем:

$$\psi(\{(v_n[\varphi])_s\}) = \sup_{\theta \leq 0} \chi(\{v_n[\varphi](s+\theta)\}) = \sup_{y \in [0,s]} \chi(\{v_n(y)\}).$$

Тогда

$$\chi(\{\xi_n(s)\}) \leq \mu(s) e^{Ls} \left(\sup_{y \in [0,s]} e^{-Ly} \chi(\{v_n(y)\}) + e^{-Ls} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(\left\{ v_n^{(j)}(s) \right\}) \right) \leq$$

$$\leq 2e^{Ls}\mu(s)\gamma(\{v_n\}).$$

Из леммы 3.6 следует, что

$$\chi(\left\{S^j(\xi_n(t))\right\}) \leq 4C_j \left(\int_0^t e^{pLs}\mu^p(s)ds\right)^{1/p} \gamma(\{v_n\}), \tag{3.7}$$

для всех $t \in [0,T]$ и $j = 0, 1, ..., N-1$.

Заметив, что:

$$S^j(\xi_n)(t) = \frac{d^j}{dt^j}S(\xi_n)(t) = \frac{d^j}{dt^j}z_n(t) = z_n^{(j)}(t),\ t \in [0,T],$$

мы имеем, используя оценку (3.7),

$$e^{-Lt}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\left\{z_n^{(j)}(t)\right\}) \leq e^{-Lt}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}) \leq$$

$$\leq 4\sum_{j=0}^{N-1}C_j\left(\int_0^t e^{-Lp(t-s)}\mu^p(s)ds\right)^{1/p}\gamma(\{v_n\}).$$

Учитывая (3.5), мы приходим к следующей оценке:

$$\gamma(\{v_n\}) \leq \gamma(\{z_n\}) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\left\{z_n^{(j)}(t)\right\}) \leq l\gamma(\{v_n\}),$$

откуда $\gamma(\{v_n\}) = 0$, и, следовательно, $\gamma(\{z_n\}) = 0$. Далее,

$$\chi\Big(\left\{v_n^{(j)}(t)\right\}\Big) = 0,\ j = 0, 1, ..., N-1,\ t \in [0,T].$$

Снова применяя условия $(F_3), (F_4)$, мы получаем, что $\{\xi_n\}$ - L^p-полукомпактная последовательность. Используя лемму 3.7, мы получаем относительную компактность последовательности $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ для всех $j = 0, 1, ..., N-1$, в $C([0,T];E)$. Таким образом, последовательность $\{z_n\}$ - относительно компактна в $C^{N-1}([0,T];E)$, откуда $mod_C(\{z_n\}) = 0$.

Окончательно имеем $\nu(\{z_n\}) = \nu(\Omega) = (0,0)$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* $(F_1)-(F_4)$ *и* $(\mathcal{I}_1)-(\mathcal{I}_2)$, *множество решений задачи* (3.1)-(3.4) *на* $\mathcal{C}_E(-\infty;T)$ *- непусто и компактно.*

Доказательство. Обозначим $y^* \in \mathcal{D}$ функцию

$$y^*(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} \widetilde{y^{(j)}}.$$

Покажем, что множество решений $y \in \mathcal{D}$ семейства включений

$$y - y^* \in \lambda(\mathcal{G}(y) - y^*),\ 0 < \lambda \leq 1,$$

априори ограничено.

Применяя условие (F_3), мы получаем оценку для каждого $j = 0, 1, ...,$ $N-1,$:

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} y(t) - \frac{d^j}{dt^j} y^*(t) \right\|_E \leq \lambda \left\| \sum_{l=0}^{N-j-1} \frac{t^l}{l!} \left(\sum_{t_k < t} \mathcal{I}_k^l(y^{(l)}(t_k)) \right) \right\|_E +$$

$$+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha - j)} \int_0^t (t-s)^{\alpha - j - 1} \left\| \psi(s) \right\|_E ds,$$

где $\psi \in \mathcal{P}_F(y[\varphi])$.

Применяя свойства $(\mathcal{I}_2)$ и (F_3), получаем оценку

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} y(t) \right\|_E \leq (\|Y_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}) \sum_{l=0}^{N-1} \frac{T^l}{l!} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-j-1} w(s)(1 + |(y[\varphi])_s|_{\mathcal{B}} + \left\| \nabla^N y(s) \right\|_{E^N}) ds.$$

Из свойства $(\mathcal{B}_3)$ вытекает, что

$$|(y[\varphi])_s|_{\mathcal{B}} + \left\| \nabla^N y(s) \right\|_{E^N} \leq M \left| \varphi \right|_{\mathcal{B}} + (K+1) \left\| y \right\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)},$$

где $M(t) \leq M,\ K(t) \leq K,\ t \in [0,T]$.

Тогда получаем оценку

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}y(t)\right\|_E \leq \left(\|Y_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}\right)\sum_{l=0}^{N-1}\frac{T^l}{l!}+$$

$$+\frac{M\left|\varphi\right|_{\mathcal{B}}+1}{\Gamma(\alpha-j)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-j-1}w(s)ds+$$

$$+\frac{K+1}{\Gamma(\alpha-j)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-j-1}w(s)\left\|y\right\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)}ds.$$

Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}y(t)\right\|_E \leq \left(\|Y_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}\right)\sum_{l=0}^{N-1}\frac{T^l}{l!}+$$

$$+\frac{M\left|\varphi\right|_{\mathcal{B}}+1}{\Gamma(\alpha-j)}\left[\frac{1}{(\alpha-j-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-j-\frac{1}{p}}\left(\int_0^T \left|w(s)\right|^p ds\right)^{1/p}+$$

$$+\frac{K+1}{\Gamma(\alpha-j)}\left[\frac{1}{(\alpha-j-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-j-\frac{1}{p}}\left(\int_0^T \left|w(s)\right|^p\left\|y\right\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)}ds\right)^{1/p}.$$

Введем следующие обозначения:

$$C_j = \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\left[\frac{1}{(\alpha-j-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-j-\frac{1}{p}},$$

$$C = max\left\{C_j,\ j=0,1,...,N-1\right\},$$

$$q_0 = N\left(\|Y_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}\right)\sum_{l=0}^{N-1}\frac{T^l}{l!} + NC(M\left|\varphi\right|_{\mathcal{B}}+1)\left(\int_0^T \left|w(s)\right|^p ds\right)^{1/p},$$

$$h(s) = \left[NC(K+1)\right]^{1/p}w(s), \quad s\in[0,T].$$

Тогда получаем:

$$\left\|y\right\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,t];E)} \leq q_0 + \left(\int_0^t \left|h(s)\right|^p\left\|y\right\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)}ds\right)^{1/p}.$$

Пусть $u(t) = \|y\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,t];E)}$, тогда из последнего неравенства получаем следующую оценку:

$$u(t) \leq 2^p q_0^p + 2^p \int_0^t |h(s)|^p \, u(s)ds,$$

для всех $t \in [0, T]$. Теперь применяя лемму 1.1.3 к последнему неравенству получаем:

$$u(t) = \|y\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,t];E)} \leq 2^p q_0^p \left(1 + \int_0^T exp\left\{2^p \int_s^T |h(\theta)|^p \, d\theta\right\} |h(s)|^p \, ds\right),$$

для всех $t \in [0, T]$. Пусть

$$R_0 = 2q_0 \sqrt[p]{1 + \int_0^T exp\left\{2^p \int_s^T |h(\theta)|^p \, d\theta\right\} |h(s)|^p \, ds},$$

тогда мы получаем окончательную оценку:

$$\|y\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)} \leq R_0.$$

Применим теперь теорему 1.2.1, полагая $a = y^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ и

$$\overline{\mathcal{U}_{\mathcal{D}}} = \left\{v \in \mathcal{D}, \ \|v\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)} \leq R\right\},$$

где $R \geq R_0$.

Мы получаем, что множество неподвижных точек $Fix\ \mathcal{G}$ непусто и компактно. Теорема доказана.

4 О задаче Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве

4.1 Случай бесконечного запаздывания

Пусть E - сепарабельное банахово пространство. Как и в предыдущей главе, для разбиения отрезка $[0, T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geq 1$ и функции $c : [0, T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{\xi \to 0+} c(t_k + \xi),$$

$$c(t_k^-) = \lim_{\xi \to 0-} c(t_k + \xi),$$

для $1 \leq k \leq m$.

В данной главе мы будем рассматривать существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)),\ t \in [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \tag{4.1.1}$$

с начальным условием:

$$y(\theta) = \vartheta(\theta),\ \theta \in (-\infty, 0], \tag{4.1.2}$$

где $D^\alpha,\ 0 < \alpha < 1,$ - дробная производная Римана-Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $t \geq 0,\ F : [0, T] \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$

обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний (см. п. 1.3) и $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0,T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t+\theta),\ \theta \in (-\infty, 0]$. Начальная функция $\vartheta \in \mathcal{B}$.

Предполагается, что сужение искомой функции $y : (-\infty, T] \to E$ на $[0,T]$ принадлежит пространству $\mathcal{PC}([0,T];E)$ функций $z : [0,T] \to E$, непрерывных на $[0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z(t_k^-)$ и $z(t_k^+),\ 1 \le k \le m$, существуют и $z(t_k^-) = z(t_k)$.

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}([0,T];E)$, снабженное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_E\,,$$

является банаховым пространством и что классическое пространство $C([0,T];E)$ является его замкнутым подпространством.

Для удобства обозначим $t_0 = 0, t_{m+1} = T$. Тогда для $z \in \mathcal{PC}([0,T];E)$ обозначим $\widehat{z}_k \in C([t_k, t_{k+1}];E),\ k = 0, ..., m,$ - функции заданные соотношениями: $\widehat{z}_k(t) = z_k(t),\ t \in (t_k, t_{k+1}]$; $\widehat{z}_k(t_k) = z_k(t_k^+)$. Более того, для множества $D \subset \mathcal{PC}([0,T];E)$ обозначим $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m,$ множества $\widehat{D}_k = \{\widehat{z}_k : z \in D\}$.

Будем полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ...,$ t_m условиям импульсных воздействий:

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)),\ k = 1, ..., m, \tag{4.1.3}$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ - непрерывные импульсные функции.

Обозначим $I = [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$. Рассмотрим мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

$(F1)$ Мультифункция $F(\cdot, \vartheta, y) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение для всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E$;

$(F2)$ Мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot) : \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$ - п.н.с. для п.в. $t \in I$;

$(F3)$ Существует функция $w \in L^{\infty}([0,T])$ такая, что:

$\|F(t,\vartheta,y)\| := sup\{\|f\|_E : f \in F(t,\vartheta,y)\} \leq w(t)(1+|\vartheta|_{\mathcal{B}}+\|y\|_E)$, п.в. $t \in I$,

для всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E$.

Как и прежде, пусть $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ - линейное пространство функций $y : (-\infty;T] \to E$, таких, что $y_0 \in \mathcal{B}$ и $\overline{y} = y|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}([0,T];E)$, с полунормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = |y_0|_{\mathcal{B}} + \|\overline{y}\|_{\mathcal{PC}}.$$

Для $y \in \mathcal{C}_E(-\infty;T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E),\ \Phi_F(t) = F(t, y_t, y(t)).$$

Ясно, что функции $t \in [0,T] \to y_t \in \mathcal{B}$ и $y : [0,T] \to E$ кусочно-непрерывны. Тогда (см. теорему 1.2.10) мультифункция Φ_F, является L^p - интегрируемой, для любого $p \geq 1$.

Пусть $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E(-\infty;T] \multimap L^p([0,T];E)$ - суперпозиционный мультиоператор, заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(y) = \mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

Наложим на мультифункцию F следующее условие регулярности, выраженное в терминах мер некомпактности:

$(F4)$ Существует функция $\mu \in L^{\infty}([0,T])$ такая, что для любых ограниченных множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi\left(F(t,\Omega,Q)\right) \leq \mu(t)\left(\psi(\Omega) + \chi(Q)\right),\ \text{п.в. } t \in I,$$

где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \le 0} \chi(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta), q \in \Omega\}$, $\theta \in (-\infty, 0]$.

На оператор A, функцию ϑ и импульсные функции $\mathcal{I}_k$ из задачи (4.1.1)-(4.1.3) мы накладываем следующие условия:

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, где $t \ge 0$.

Заметим, что из условия (A) следует, что существует константа $J \ge 1$, такая что $\|e^{At}\|_{L(E)} \le J$, для любого $t \in [0, T]$.

(ϑ) $\vartheta \in \mathcal{B}$ - заданная функция.

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k : E \to E$, $1 \le k \le m$, являются вполне непрерывными.

$(\mathcal{I}2)$ функции $\mathcal{I}_k$, $1 \le k \le m$, являются глобально ограниченными, то есть существует такое $\mathcal{N} > 0$, что $\|\mathcal{I}_k x\| \le \mathcal{N}$ для всех $x \in E$.

Определение 4.1.1. *Интегральным решением на* $(-\infty, T]$ *задачи* (4.1.1)-(4.1.3), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ *вида:*

$$y(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k < t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right) + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds, & t \in [0, T], \end{cases}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$.

Для нахождения интегральных решений задачи (4.1.1)-(4.1.3), рассмотрим отображение

$$S_1 : L^p([0, T]; E) \to C([0, T]; E),$$

$$S_1(\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds.$$

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{C}_E(-\infty, T] \multimap \mathcal{C}_E(-\infty, T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(y) = \Lambda(y) + S_1 \circ \mathcal{P}_F(y),$$

где

$$\Lambda(y)(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right), & t \in [0, T]. \end{cases}$$

(Мы считаем значения мультиоператора $S_1 \circ \mathcal{P}_F$ естественно продолженными нулем на $(-\infty, 0]$).

Лемма 4.1.1. *Оператор Λ вполне непрерывен.*

Доказательство. Так как функция ϑ задана, то воспользовавшись свойствами (A), $(\mathcal{I}1)$, $(\mathcal{I}2)$ получаем, что множество функций

$$\left\{ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right),\ y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T] \right\}$$

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено константой

$$J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right)$$

(см. доказательство теоремы 4.1.1). Следовательно, по теореме Арцела-Асколи оператор g вполне непрерывен. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что функция $y \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - интегральное решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) на интервале $(-\infty; T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

С этой целью рассмотрим сужение оператора $\mathcal{G}$ на выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{PC}([0, T]; E)$, определенное как

$$\mathcal{D} = \left\{ v \in \mathcal{PC}([0, T]; E),\ y(0) = \vartheta(0) \right\},$$

полагая $\mathcal{G}(v) = \mathcal{G}(v[\vartheta])$, где

$$v[\vartheta](t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ v(t), & t \in (0, T]. \end{cases}$$

Для функции $v \in \mathcal{D}$ и $t \in [0, T]$, положим $v_t = (v[\vartheta])_t$.

Лемма 4.1.2. *Оператор S_1 обладает следующими свойствами:*

($\mathbb{S}_1$) *существует константа $C > 0$ такая, что:*

$$\|S_1(\xi)(t) - S_1(\eta)(t)\|_E^p \leq C^p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds, \quad \xi, \eta \in L^p([0, T]).$$

($\mathbb{S}_2$) *для каждого компактного множества $K \subset E$ и последовательности $\{\xi_n\} \subset L^p([0, T]; E)$ такой, что $\{\xi_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0, T]$, слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, влечет сходимость $S_1(\xi_n) \to S_1(\xi_0)$ в $C([0, T]; E)$.*

Доказательство. ($\mathbb{S}_1$) Используя неравенство Гельдера, мы имеем:

$$\|S_1(\xi)(t) - S_1(\eta)(t)\|_E \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} \|\xi(s) - \eta(s)\|_E \, ds \leq$$

$$\leq \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\|S_1(\xi)(t) - S_1(\eta)(t)\|_E^p \leq C^p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds,$$

где

$$C = \left[\frac{p-1}{\alpha p - 1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{J T^{\alpha - \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

($\mathbb{S}_2$) Применяя лемму 1.2.4, мы получим:

$$\chi\left(\{S_1(\xi_n)(t)\}\right) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} \chi\left(\{\xi_n(s)\}\right) ds = 0.$$

Это означает, что последовательность $\{S_1(\xi_n)(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0,T]$.

С другой стороны, если мы возьмем $t', t'' \in [0,T]$, такие, что $0 < t' < t'' \le T$ и достаточно малое число $\epsilon > 0$, то мы получим следующую оценку:

$$\|S_1(\xi_n)(t'') - S_1(\xi_n)(t')\|_E \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big\| \int_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)}\xi_n(s)ds -$$

$$- \int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}\xi_n(s)ds\Big\|_E \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t'-\epsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}]\xi_n(s)ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'-\epsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}]\xi_n(s)ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)}\xi_n(s)ds \right\|_E \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t'-\epsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}] e^{A(t'-s)}\xi_n(s)ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t'-\epsilon} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-\epsilon-s)} [e^{A(t''-t'+\epsilon)} - e^{A\epsilon}]\xi_n(s)ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'-\epsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}]\xi_n(s)ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)}\xi_n(s)ds \right\|_E \le$$

$$\le \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^{t'-\epsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}]\xi_n(s)\, ds +$$

$$+ \|e^{A(t''-t'+\epsilon)} - e^{A\epsilon}\|_{L(E)} \int_0^{t'-\epsilon} (t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\, ds +$$

$$+\int_{t'-\epsilon}^{t'}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,ds+\int_{t'-\epsilon}^{t'}(t'-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,ds+\int_{t'}^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,ds\Big).$$

Поскольку $\{\xi_n(s)\} \subset K$ для п.в. $s \in [0,T]$, правая часть последнего неравенства, в силу малости ϵ, равномерно, относительно n, стремится к 0, при $t'' \to t'$. Поэтому последовательность $\{S_1(\xi_n)\}$ равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела-Асколи, мы получаем, что последовательность $\{S_1(\xi_n)\} \subset C([0,T];E)$ относительно компактна.

Из свойства $(\mathbb{S}_1)$ вытекает, что $S_1 : L^p([0,T];E) \to C([0,T];E)$ - ограниченный линейный оператор. Тогда этот оператор непрерывен относительно топологии слабой секвенциальной сходимости, то есть слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$ влечет $S_1(\xi_n) \rightharpoonup S_1(\xi_0)$. Поскольку последовательность $\{S_1(\xi_n)\}$ относительно компактна, мы приходим к заключению, что $S_1(\xi_n) \to S_1(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$. Лемма доказана.

Лемма 4.1.3. *Пусть последовательность* $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1.2.5. *Тогда мы имеем:*

$$\chi\left(\{S_1(\xi_n)(t)\}\right) \leq 2C\left(\int_0^t |q(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

для всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Мы проведем доказательство, по аналогии с доказательством леммы 3.6. Для $\epsilon > 0$ подберем $\delta \in (0,\epsilon)$, такое, что для всех $m \subset [0,T]$, с мерой $(m) < \delta$, мы имеем:

$$\int_m |\nu(s)|^p < \epsilon.$$

Беря m_δ и b_n соответствующие $\{\xi_n\}$ из леммы 1.2.5, мы, используя лемму 4.1.2, получаем, что последовательность $\{S_1(b_n)\}$ - относительно компактна в $C([0,T];E)$. Более того

$$\|S_1(\xi_n)(t)-S_1(b_n)(t)\|_E^p \le C^p\int_0^t \|\xi_n(s)-b_n(s)\|_E^p\,ds \le$$

$$\le C^p\int_{[0,t]\setminus m_\delta}\|\xi_n(s)-b_n(s)\|_E^p\,ds + C^p\int_{[0,t]\cap m_\delta}\|\xi_n(s)\|_E^p\,ds \le$$

$$\le C^p\int_{[0,t]\setminus m_\delta}[2q(s)-\delta]^p\,ds + C^p\int_{m_\delta}|\nu(s)|^p\,ds \le$$

$$\le C^p\left(\int_0^t |2q(s)+\epsilon|^p\,ds+\epsilon\right).$$

Поэтому относительно компактное множество $S_1G_\delta(t)$ является $C\left(\int_0^t |2q(s)+\epsilon|^p\,ds+\epsilon\right)^{1/p}$ - сетью для множества $\{S_1(\xi_n)(t)\}$. Это и доказывает лемму, в силу произвольности $\epsilon>0$. Лемма доказана.

Лемма 4.1.4. *Пусть $\{\xi_n\}$ - L^p-полукомпактная последовательность в $L^p([0,T];E)$. Тогда $\{\xi_n\}$ слабо компактна в $L^p([0,T];E)$ и множество $\{S_1(\xi_n)\}$ - относительно компактно в $C([0,T];E)$. Более того, если $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, то $S_1(\xi_n)\to S_1(\xi_0)$.*

Доказательство. Слабая компактность $\{\xi_n\}$ в $L^p([0,T];E)$ является следствием результата леммы 1.2.3. Поскольку множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t\in[0,T]$, то из леммы 4.1.3 следует, что последовательность $\{S_1(\xi_n)(t)\}$ - относительно компактна в E для п.в. $t\in[0,T]$.

С другой стороны, из определения 1.2.21 следует, что существует функция $\nu\in L^p(0,T)$, такая, что:

$$\|\xi_n(t)\|\le\nu(t),$$

для всех $n=1,2,...$ и $t\in[0,T]$.

Благодаря неравенству Гельдера, если мы возьмем $t', t'' \in [0, T]$, такие, что $0 < t' < t'' \leq T$ и достаточно малое число $\epsilon > 0$, то мы получим следующую оценку:

$$\|S_1(\xi_n)(t'') - S_1(\xi_n)(t')\|_E \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big\| \int_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s)\, ds -$$

$$- \int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)} \xi_n(s)\, ds \Big\|_E \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t'-\epsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'-\epsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s)\, ds \right\|_E \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t'-\epsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}] e^{A(t'-s)} \xi_n(s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t'-\epsilon} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-\epsilon-s)} [e^{A(t''-t'+\epsilon)} - e^{A\epsilon}] \xi_n(s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'-\epsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s)\, ds \right\|_E \leq$$

$$\leq \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^{t'-\epsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}] \xi_n(s)\, ds +$$

$$+ \|e^{A(t''-t'+\epsilon)} - e^{A\epsilon}\|_{L(E)} \int_0^{t'-\epsilon} (t''-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\, ds +$$

$$+ \int_{t'-\epsilon}^{t'} (t''-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\, ds + \int_{t'-\epsilon}^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\, ds + \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\, ds \Big) \leq$$

$$\leq \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t'-\epsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}]^{p'} \, ds \right)^{1/p'} \left(\int_0^{t'-\epsilon} |\nu(s)|^p \, ds \right)^{1/p} +$$

$$+ \|e^{A(t''-t'+\epsilon)} - e^{A\epsilon}\|_{L(E)} \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t'-\epsilon} (t''-s)^{(\alpha-1)p'} \, ds \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int_0^{t'-\epsilon} |\nu(s)|^p \, ds \right)^{1/p} + \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{t'-\epsilon}^{t'} (t''-s)^{(\alpha-1)p'} \, ds \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int_{t'-\epsilon}^{t'} |\nu(s)|^p \, ds \right)^{1/p} + \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{t'-\epsilon}^{t'} (t'-s)^{(\alpha-1)p'} \, ds \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int_{t'-\epsilon}^{t'} |\nu(s)|^p \, ds \right)^{1/p} + \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{t'}^{t''} (t''-s)^{(\alpha-1)p'} \, ds \right)^{1/p'} \left(\int_{t'}^{t''} |\nu(s)|^p \, ds \right)^{1/p},$$

где p' сопряжено p. Последнее неравенство влечет равностепенную непрерывность $\{S_1(\xi_n)\}$ в $C([0,T];E)$, и, следовательно, относительную компактность в $C([0,T];E)$. Окончательное заключение справедливости леммы получается так же как и в доказательстве леммы 4.1.2. Лемма доказана.

Лемма 4.1.5. *При выполнении условий* (A), $(F1)$–$(F4)$ *и* $(\mathcal{I}1)$–$(\mathcal{I}2)$, *мультиоператор*

$$\mathcal{G} = \Lambda + S_1 \circ \mathcal{P}_F$$

замкнут и имеет компактные значения.

Доказательство. В силу леммы 4.1.1, утверждение данной леммы достаточно доказать для мультиоператора $S_1 \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\{v_n\}$ - последовательность в $\mathcal{D}$ такая, что $v_n \to v^* \in \mathcal{D}$. Будем считать, что $\xi_n \in \mathcal{P}_F(v_n[\vartheta])$ и $z_n = S_1(\xi_n) \in S_1(\mathcal{P}_F(v_n[\vartheta]))$, $z_n \to z^*$ в $\mathcal{PC}([0,T];E)$. Докажем, что $z^* \in S_1(\mathcal{P}_F(v^*[\vartheta]))$.

Так как

$$\{\xi_n(t)\} \subset F(t,(v_n[\vartheta])_t, v_n(t)), \text{ для п.в. } t \in [0,T],$$

то согласно условию $(F3)$, последовательность $\{\xi_n\}$ - интегрально ограничена и из $(F4)$ следует, что:

$$\chi\left(\{\xi_n(t)\}\right) \le \mu(t)\left(\psi(\{(v_n[\vartheta])_t\}) + \chi(\{v_n(t)\})\right), \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

Последовательность $\{v_n\}$ сходится в $\mathcal{PC}([0,T];E)$, поэтому $\chi(\{v_n(t)\}) = 0$ для $t \in [0,T]$.

С другой стороны

$$\psi(\{(v_n[\vartheta])_t\}) = \sup_{\theta \le 0} \chi(\{(v_n[\vartheta](t+\theta))\}) \le$$
$$\le \sup_{s \in [0,T]} \chi(\{(v_n(s))\}) = 0.$$

Следовательно, $\chi(\{\xi_n(t)\}) = 0$ для п.в. $t \in [0,T]$, и последовательность $\{\xi_n\}$ - L^p-полукомпактна. Из леммы 4.1.4 следует, что мы можем предположить, без ограничения общности, существование функции $\xi^* \in L^p([0,T];E)$ такого, что $\xi_n \rightharpoonup \xi^*$ и $z_n = S_1(\xi_n) \to S_1(\xi^*) = z^*$.

По лемме 3.3, мы получаем, что $\xi^* \in \mathcal{P}_F(v^*[\vartheta])$ и поэтому $z^* = S_1(\xi^*) \in S_1(\mathcal{P}_F(v^*[\vartheta]))$.

Нам остается показать, что для $v \in \mathcal{D}$ и $\{\xi_n\}$ выбранного в $\mathcal{P}_F(v[\vartheta])$, последовательность $\{S_1(\xi_n)\}$ относительно компактна в $C([0,T];E)$. Свойства $(F3)-(F4)$ влекут L^p-полукомпактность $\{\xi_n\}$. По лемме 4.1.4, мы имеем, что последовательность $S_1(\xi_n)$ - относительно компактна в $C([0,T];E)$. Значит последовательность $S_1(\xi_n)$ - относительно компактна в $C([0,T];E)$. Лемма доказана.

Лемма 4.1.6. *Мультиоператор $\mathcal{G}$ - п.н.с.*

Доказательство. Используя лемму 1.2.1 и лемму 4.1.5, достаточно доказать, что $\mathcal{G}$ - квазикомпактное мультиотображение. Снова используя лемму 4.1.1, сведем проверку к мультиоператору $S_1 \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\mathcal{Y} \subset \mathcal{D}$ - компактное множество, докажем, что $S_1 \circ \mathcal{P}_F(\mathcal{Y})$ - относительно компактное подмножество $C([0,T];E)$. Предположим, что $\{z_n\} \subset S_1 \circ \mathcal{P}_F(\mathcal{Y})$, тогда $z_n = S_1(\xi_n)$, где $\xi_n \in \mathcal{P}_F(v_n[\vartheta])$ для некоторой последовательности $v_n \subset \mathcal{Y}$. Согласно свойствам $(F3)$, $(F4)$ последовательность $\{\xi_n\}$ L^p-полукомпактна и, следовательно, слабо компактна в $L^p([0,T];E)$.

Согласно лемме 4.1.4, последовательность $\{z_n\}$ относительно компактна в $C([0,T];E)$. Лемма доказана.

Нам понадобятся следующие меры некомпактности в пространстве $\mathcal{PC}([0,T];E)$:

(1) модуль послойной некомпактности:

$$\psi : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$\psi(D) = \sup_{t \in [0,T]} \chi(D(t)),$$

где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E и $D(t) = \{y(t),\ y \in D\}$;

(2) модуль равностепенной непрерывности:

$$mod_C : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$mod_C(D) = \max_{0 \le k \le m} mod_C(\widehat{D}_k),$$

где

$$mod_C(\widehat{D}_k) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in \widehat{D}_k} \max_{|t_1 - t_2| \le \delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Теперь введем векторную меру некомпактности $\nu(\Omega)$:

$$\nu : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+,$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, заданную как

$$\nu(\Omega) = (\psi(\Omega), mod_C(\Omega)).$$

Обозначим $J^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|^{(\chi)}$.

Лемма 4.1.7. *Для того чтобы оператор $\mathcal{G}$ был уплотняющим относительно меры некомпактности ν, достаточно чтобы*

$$V := \frac{2T^{\alpha} \|\mu\|_{\infty} J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. \tag{4.1.4}$$

Доказательство. Из полной непрерывности оператора Λ и свойств монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности меры некомпактности ν следует, что нам достаточно проверить свойство уплотняемости лишь для мультиоператора $S_1 \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ - непустое ограниченное множество и

$$\nu(\mathcal{G}(\Omega)) \geq \nu(\Omega), \tag{4.1.5}$$

покажем, что Ω - относительно компактное множество.

Пусть $\Omega_t = \{y_t;\ y \in \Omega\}$. Рассмотрим многозначную функцию $s \in [0,t] \multimap G(s) \subset E$,

$$G(s) = \left\{(t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} \phi(s),\ \phi \in \mathcal{P}_F(y),\ y \in \Omega\right\}.$$

Она интегрально ограничена функцией:

$$s \to (t-s)^{\alpha-1} J w(t)(1 + C_1 + C_2),$$

где $C_1 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{y\in\Omega} |y_s|_{\mathcal{B}}\,,\ C_2 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{y\in\Omega} \|y(s)\|_E\,.$

Оценим $\chi(G(s))$:

$$\chi(G(s)) \leq (t-s)^{\alpha-1} \|e^{A(t-s)}\|^{(\chi)} \chi(\,\{\phi(s),\ \phi \in \mathcal{P}_F(y),\ y \in \Omega\}\,) \leq$$

$$\leq (t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)} \mu(s)(\chi(\Omega(s)) + \psi(\Omega_s)) \leq 2(t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega).$$

Оценим теперь $\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)),\ t \in [0,T]$:

$$\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)) = \chi(\,\{S_1 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\,) \leq \chi\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t G(s)ds\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \frac{t^\alpha}{\alpha} \psi(\Omega) \leq$$
$$\leq \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega) = V\psi(\Omega).$$

Таким образом получаем:

$$\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)) \leq V\psi(\Omega),$$

а следовательно,

$$\psi(\mathcal{G}(\Omega)) \leq V\psi(\Omega). \tag{4.1.6}$$

Сравнивая (4.1.5) с (4.1.6) получаем, что $\psi(\Omega) = 0$. Из доказательства леммы 4.1.4, следует, что множество $S_1 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$ - равностепенно непрерывно, теперь воспользовавшись леммой 4.1.1, мы имеем:

$$mod_C(\mathcal{G}(\Omega)) = 0,$$

значит $\nu(\Omega) = (0,0)$. Тогда мы заключаем, что Ω - относительно компактное множество, а оператор $\mathcal{G}$ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Лемма доказана.

Замечание 4.1.1. *Отметим следующие частные случаи выполнения условия* (4.1.4):

1)$\|\mu\|_\infty = 0$, *то есть F вполне полунепрерывно сверху по второму и третьему аргументам в совокупности;*

2)$J^{(\chi)} = 0$, *то есть полугруппа e^{At} компактна.*

Теорема 4.1.1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (ϑ), $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}2)$, *и* (4.1.4) *множество решений задачи* (4.1.1)-(4.1.3) *на* $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ - *непусто и компактно.*

Доказательство. Обозначим $y^* \in \mathcal{D}$ функцию

$$y^*(t) = e^{At}\vartheta(0).$$

Покажем, что множество решений $y \in \mathcal{D}$ семейства включений

$$y - y^* \in \lambda(\mathcal{G}(y) - y^*),\ 0 < \lambda \leq 1,$$

априори ограничено.

Применяя условие $(F3)$, мы получаем оценку:

$$\|y(t) - y^*(t)\|_E \leq \lambda \left\|e^{At}\right\|_E \left\|\sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right\|_E +$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1} \|\phi(s)\|_E \, ds,$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y[\vartheta])$.

Применяя свойства $(\mathcal{I}2)$ и $(F3)$, получаем оценку

$$\|y(t)\|_E \leq J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) +$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)(1 + |(y[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|y(s)\|_E) ds.$$

Из свойства $(\mathcal{B}_3)$ вытекает, что

$$|(y[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|y(s)\|_E \leq M\,|\vartheta|_{\mathcal{B}} + (K+1)\,\|y\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)}\,,$$

где $M(t) \leq M,\ K(t) \leq K,\ t \in [0,T]$.

Тогда получаем оценку:

$$\|y(t)\|_E \leq J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) +$$

$$+\frac{J\left(M\left|\vartheta\right|_{\mathcal{B}}+1\right)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}w(s)ds+$$
$$+\frac{J\left(K+1\right)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}w(s)\left\|y\right\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)}ds.$$

Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\left\|y(t)\right\|_E\leq J\left(\left\|\vartheta(0)\right\|_E+m\mathcal{N}\right)+$$
$$+\frac{J\left(M\left|\vartheta\right|_{\mathcal{B}}+1\right)}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{(\alpha-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\int_0^T\left|w(s)\right|^p ds\right)^{1/p}+$$
$$+\frac{J\left(K+1\right)}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{(\alpha-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\int_0^T\left|w(s)\right|^p\left\|u\right\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)}ds\right)^{1/p}.$$

Введем следующие обозначения:

$$C=\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{(\alpha-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-\frac{1}{p}},$$

$$q_0=NJ\left(\left\|\vartheta(0)\right\|_E+m\mathcal{N}\right)+NC(M\left|\vartheta\right|_{\mathcal{B}}+1)\left(\int_0^T\left|w(s)\right|^p ds\right)^{1/p},$$
$$h(s)=\left[NC(K+1)\right]^{1/p}w(s),\ s\in[0,T].$$

Тогда получаем:

$$\left\|y\right\|_{\mathcal{PC}([0,t];E)}\leq q_0+\left(\int_0^t\left|h(s)\right|^p\left\|y\right\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)}ds\right)^{1/p}.$$

Пусть $u(t)=\left\|y\right\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)}$, тогда из последнего неравенства получаем следующую оценку:

$$u(t)\leq 2^p q_0^p+2^p\int_0^t\left|h(s)\right|^p u(s)ds,$$

для всех $t\in[0,T]$. Теперь применяя лемму 1.1.3 к последнему неравенству получаем:

$$u(t)=\left\|y\right\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)}\leq 2^p q_0^p\left(1+\int_0^T exp\left\{2^p\int_s^T\left|h(\theta)\right|^p d\theta\right\}\left|h(s)\right|^p ds\right),$$

для всех $t \in [0,T]$. Пусть

$$R_0 = 2q_0 \sqrt[p]{1 + \int_0^T exp\left\{2^p \int_s^T |h(\theta)|^p \, d\theta\right\} |h(s)|^p \, ds},$$

тогда мы получаем окончательную оценку:

$$\|y\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leq R_0.$$

Применим теперь теорему 1.2.1, полагая $a = y^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ и

$$\overline{\mathcal{U}_\mathcal{D}} = \left\{v \in \mathcal{D}, \quad \|v\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leq R\right\},$$

где $R \geq R_0$.

Мы получаем, что множество неподвижных точек $Fix\ \mathcal{G}$ непусто и компактно. Теорема доказана.

4.2 Случай нелокальной задачи

В данном пункте мы будем рассматривать существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E вида (4.1.1):

$$D^{\alpha}y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)),\ t \in [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\},$$

но уже с нелокальным начальным условием:

$$y(\theta) + g(y)(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-h, 0], \tag{4.2.1}$$

где $F : [0, T] \times \mathcal{PC}([-h, 0]; E) \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{PC}([-h, 0]; E)$ обозначает пространство всех кусочно-непрерывных функций на интервале $[-h, 0]$ со значениями в E, с нормой

$$\|y\|_{\mathcal{PC}([-h,0];E)} = \int_{-h}^{0} \|y(\tau)\|_E \, d\tau,$$

и $y_t \in \mathcal{PC}([-h, 0]; E)$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0, T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t + \theta),\ \theta \in [-h, 0]$.

Будем, как и прежде, полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий (4.1.3):

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)),\ k = 1, ..., m.$$

Пусть $\mathcal{C}_E[-h; T]$ - линейное пространство функций $y : [-h; T] \to E$, непрерывных на $[-h, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $y(t_k^-)$ и $y(t_k^+),\ 1 \leq k \leq m$, существуют и $y(t_k^-) = y(t_k)$, с нормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} = \sup_{t \in [-h,T]} \|y(t)\|_E\,. \tag{4.2.2}$$

Легко видеть, что пространство $\mathcal{C}_E[-h;T]$, снабженное нормой (4.2.2) является банаховым пространством и что классическое пространство непрерывных функций $C([-h,T];E)$ является его замкнутым подпространством.

Предполагается, что отображение $g:\mathcal{C}_E[-h;T]\to C([-h,0];E)$ непрерывно и $\varphi\in C([-h,0];E)$ - заданная функция.

Для удобства обозначим $t_0=-h, t_{m+1}=T$. Тогда для $z\in\mathcal{C}_E[-h;T]$ обозначим $\widehat{z}_k\in C([t_k,t_{k+1}];E),\ k=0,...,m,$ - функции, заданные соотношениями: $\widehat{z}_k(t)=z_k(t),\ t\in(t_k,t_{k+1}]$; $\widehat{z}_k(t_k)=z_k(t_k^+)$. Более того, для множества $\Omega\subset\mathcal{C}_E[-h;T]$ обозначим $\widehat{\Omega}_k\subset C([t_k,t_{k+1}];E),\ k=0,...,m,$ множества $\widehat{\Omega}_k=\{\widehat{z}_k: z\in D\}$.

Рассмотрим мультиоператор $F: I\times\mathcal{PC}([-h,0];E)\times E\to Kv(E)$, удовлетворяющий условиям $(F1),\ (F2),\ (F4)$, и следующему условию:

$(F'3)$ Для каждого $n\in\mathbb{N}$, найдется функция $w_n\in L^\infty([0,T])$, такая, что для любой функции $y\in\mathcal{C}_E[-h;T]$, удовлетворяющей оценке $\|y\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]}\le n$, выполнено:

$$\|F(t,y_t,y(t))\|:=sup\left\{\|f\|_E: f\in F(t,y_t,y(t))\right\}\le w_n(t)\ \text{п.в.}\ t\in I.$$

Для $y\in\mathcal{C}_E[-h;T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F:[0,T]\to Kv(E),\ \Phi_F(t)=F(t,y_t,y(t)).$$

Ясно, что функция $t\in[0,T]\to y(t)\in E$ кусочно-непрерывна, а функция $t\in[0,T]\to y_t\in\mathcal{PC}([-h,0];E)$ непрерывна. Тогда (см. теорему 1.2.10) мультифункция Φ_F является L^p - интегрируемой, для любого $p\ge 1$.

Пусть $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E[-h;T] \multimap L^p([0,T];E)$ - суперпозиционный мультиоператор, заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(y) = \mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

На оператор A из задачи (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3) мы накладываем условие (A) из предыдущего пункта, а на отображение g, функцию φ и импульсные функции $\mathcal{I}_k$ следующие условия:

(φ) $\varphi \in C([-h,0];E)$ - заданная функция;

(g_1) $g : \mathcal{C}_E[-h;T] \to C([-h,0];E)$ - вполне непрерывное отображение;

(g_2) найдется такая последовательность $\{\rho_n\}$, что для любого $y \in \mathcal{C}_E[-h;T],\ \|y\| \leq n$, выполнено $\|g(y)\| \leq \rho_n$ и при этом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J\rho_n}{n} < 1;$$

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k : E \to E$, $1 \leq k \leq m$, являются вполне непрерывными;

$(\mathcal{I}'2)$ найдется такая последовательность $\{\sigma_n\}$, что для любого $x \in E$, $\|x\| \leq n$, выполнено $\|\mathcal{I}_k x\| \leq \sigma_n,\ 1 \leq k \leq m$, и при этом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = 0.$$

Определение 4.2.1. *Интегральным решением на* $[-h,T]$ *задачи* (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E[-h,T]$ *вида:*

$$y(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(y)(t), & t \in [-h,0]; \\ e^{At}(\vartheta(0) - g(y)(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))) + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} \phi(s)ds, & t \in [0,T], \end{cases}$$

где $\phi(s) \in \mathcal{P}_F(y)$.

Для нахождения интегральных решений задачи (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3) зафиксируем $p > 1/\alpha$ и рассмотрим отображение

$$S_1 : L^p([0,T];E) \to C([0,T];E)$$
$$S_1(\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds.$$

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{C}_E[-h,T] \multimap \mathcal{C}_E[-h,T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(y) = \Lambda_1(y) + S_1 \circ \mathcal{P}_F(y),$$

где

$$\Lambda_1(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(y)(t), & t \in [-h,0]; \\ e^{At}(\varphi(0) - g(y)(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

(Мы считаем значения мультиоператора $S_1 \circ \mathcal{P}_F$ естественно продолженными нулем на $[-h,0]$).

Лемма 4.2.1. *Оператор Λ_1 вполне непрерывен.*

Для доказательства достаточно воспользоваться свойствами (A), (g_1) и (g_2).

Ясно, что функция $y \in \mathcal{C}_E[-h;T]$ - интегральное решение задачи (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3) на интервале $[-h;T]$ тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

Лемма 4.2.2. *При выполнении условий (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$, $(g_1) - (g_2)$, (φ) и $(\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}'2)$, мультиоператор*

$$\mathcal{G} = \Lambda_1 + S_1 \circ \mathcal{P}_F$$

замкнут и имеет компактные значения.

Доказательство. В доказательстве леммы 4.1.5 было установлено, что мультиоператор $S_1 \circ \mathcal{P}_F$ замкнут и имеет компактные значения, тогда для доказательства нам достаточно воспользоваться леммой 4.2.1. Лемма доказана.

Лемма 4.2.3. *Мультиоператор* $\mathcal{G}$ *- п.н.с.*

Доказательство. Из доказательства леммы 4.1.6 известно, что мультиоператор $S_1 \circ \mathcal{P}_F$ - квазикомпактное мультиотображение. Используя последовательно леммы 4.2.1, 4.2.2 и 1.2.1, мы получаем, что мультиоператор $\mathcal{G}$ - п.н.с. Лемма доказана.

Для доказательства уплотняемости мультиоператора $\mathcal{G}$ будем использовать векторную меру некомпактности в пространстве $\mathcal{C}_E[-h, T]$:

$$\nu : P(\mathcal{C}_E[-h; T]) \to \mathbb{R}^2_+,$$

введеную в прдыдущем пункте.

Будем так же считать, что $J^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|^{(\chi)}$.

Лемма 4.2.4. *Для того чтобы оператор* $\mathcal{G}$ *был уплотняющим относительно меры некомпактности* ν, *достаточно чтобы выполнялось условие* (4.1.4):

$$V := \frac{2T^{\alpha} \|\mu\|_{\infty} J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1.$$

Доказательство. Пусть $\Omega \subset \mathcal{C}_E[-h; T]$ - непустое ограниченное множество и

$$\nu(\mathcal{G}(\Omega)) \geq \nu(\Omega), \tag{4.2.3}$$

покажем, что Ω - относительно компактное множество.

Если $t \in [-h, 0]$, то в силу условия (g_1)

$$\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)) = 0.$$

Пусть теперь $t \in [0,T]$ и пусть $\Omega_t = \{y_t;\ y \in \Omega\}$. Рассмотрим многозначную функцию $s \in [0,t] \multimap G(s) \subset E$,

$$G(s) = \left\{(t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)}\phi(s),\ \phi \in \mathcal{P}_F(y),\ y \in \Omega\right\}.$$

В силу ограниченности Ω, она для некоторого $n \geq 1$, интегрально ограничена функцией:

$$s \to (t-s)^{\alpha-1} J w_n(s),$$

где $w_n(\cdot)$ - функции определенные в условии $(F'3)$.

Оценим $\chi(G(s))$:

$$\chi(G(s)) \leq (t-s)^{\alpha-1}\|e^{A(t-s)}\|^{(\chi)}\chi(\,\{\phi(s),\ \phi \in \mathcal{P}_F(y),\ y \in \Omega\}\,) \leq$$

$$\leq (t-s)^{\alpha-1}J^{(\chi)}\mu(s)(\chi(\Omega(s)) + \psi(\Omega_s)) \leq 2(t-s)^{\alpha-1}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_\infty \psi(\Omega).$$

Оценим теперь $\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)),\ t \in [0,T]$:

$$\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)) = \chi(\,\{S_1 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\,) \leq \chi\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t G(s)ds\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_\infty \psi(\Omega)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_\infty \frac{t^\alpha}{\alpha}\psi(\Omega) \leq$$
$$\leq \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_\infty \psi(\Omega) = V\psi(\Omega).$$

Таким образом, при всех $t \in [-h,T]$ получаем:

$$\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)) \leq V\psi(\Omega),$$

а следовательно,

$$\psi(\mathcal{G}(\Omega)) \leq V\psi(\Omega). \tag{4.2.4}$$

Сравнивая (4.2.3) с (4.2.4) получаем, что $\psi(\Omega) = 0$. Из доказательства леммы 4.1.4, следует, что множество $S_1 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$ - равностепенно непрерывно, теперь воспользовавшись леммой 4.2.1, мы имеем:

$$mod_C(\mathcal{G}(\Omega)) = 0,$$

значит $\nu(\Omega) = (0,0)$. Тогда мы заключаем, что Ω - относительно компактное множество, а оператор $\mathcal{G}$ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Лемма доказана.

Теорема 4.2.1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$, $(g_1)-(g_2), (\varphi)$, $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}'2)$, (4.1.4) *и асимптотического условия:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|w_n\|_\infty}{n} = 0, \tag{4.2.5}$$

где $w_n(\cdot)$ *- функции определенные в условии* $(F'3)$, *множество решений задачи* (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3) *на* $\mathcal{C}_E[-h;T]$ *- непусто и компактно.*

Доказательство. Из леммы 4.2.2 и леммы 4.2.3, нам известно, что мультиоператор $\mathcal{G}$ п.н.с. и ν-уплотняющий. Для того, чтобы применить теорему 1.2.2, мы покажем, что существует $R>0$ такое, что $\mathcal{G}(B_R) \subset B_R$, где B_R - замкнутый шар радиуса R в пространстве $\mathcal{C}_E[-h;T]$. В предположении противного, найдется последовательность функций $y_n \in \mathcal{C}_E[-h;T]$, удовлетворяющая оценкам $\|y_n\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} \le n$ для всех $n \ge 1$ и такая, что для некоторой последовательности $z_n \in \mathcal{G}(y_n)$ будет выполнено $\|z_n\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} > n$. Это, в свою очередь, означает, что будет выполнена по меньшей мере одна из оценок

$$\|\tilde{z}_{n_i}\| > n_i, \tag{4.2.6}$$

для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}, i = 1, 2, ...$, или

$$\left\|\hat{z}_{n_j}\right\| > n_j, \tag{4.2.7}$$

для некоторой подпоследовательности $\{n_j\}$, $j = 1, 2, ...$, где $\tilde{z}_{n_i} = z_{n_i}|_{[-h,0]}$ и $\hat{z}_{n_j} = z_{n_j}|_{[0,T]}$.

В случае первой серии оценок мы имеем:

$$\tilde{z}_{n_i}(t) = \varphi(t) - g(y_{n_i})(t),\ t \in [-h, 0],$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{z}_{n_i}\| \leq \|\varphi\| + \|g(y_{n_i})\| \leq \|\varphi\| + \rho_{n_i},$$

где $\{\rho_n\}$ - последовательность из условия (g_2). Тогда получаем:

$$1 < \frac{\|\tilde{z}_{n_i}\|}{n_i} \leq \frac{\|\varphi\|}{n_i} + \frac{\rho_{n_i}}{n_i},$$

что противоречит условию (g_2) в силу того, что $J \geq 1$.

В случае второй серии оценок мы имеем:

$$\hat{z}_{n_j}(t) = e^{At}\Big(\varphi(0) - g(y_{n_j})(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y_{n_j}(t_k))\Big) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} \phi(s) ds,\ t \in [0, T],$$

где $\phi(s) \in \mathcal{P}_F(y_{n_j})$.

Применяя свойства $(\mathcal{I}'2)$ и $(F'3)$, получаем оценку

$$\left\|\hat{z}_{n_j}(t)\right\|_E \leq J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} + \left\|g(y_{n_j})(0)\right\|_E\right) + mJ\sigma_{n_j} +$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w_{n_j}(s) ds \leq$$

$$\leq J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} + \left\|g(y_{n_j})\right\|_{C([-h,0];E)}\right) + mJ\sigma_{n_j} +$$

$$+\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \leq$$

$$\leq J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)}+\left\|g(y_{n_j})\right\|_{C([-h,0];E)}\right)+mJ\sigma_{n_j}+\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_{\infty}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\leq$$

$$\leq J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)}+\rho_{n_j}\right)+mJ\sigma_{n_j}+\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_{\infty}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Отсюда, мы имеем:

$$1<\frac{1}{n_j}\left\|\hat{z}_{n_j}\right\|_{\mathcal{C}_E[0,T]}\leq\frac{1}{n_j}J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)}+\rho_{n_j}\right)+\frac{1}{n_j}mJ\sigma_{n_j}+$$

$$+\frac{1}{n_j}\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_{\infty}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Применяя условия (g_2), $(\mathcal{I}'2)$ и (4.2.5), мы получим противоречие. Теорема доказана.

5 О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве

5.1 Случай бесконечного запаздывания

Пусть E - сепарабельное банахово пространство. Как и в предыдущих главах, для разбиения отрезка $[0, T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geq 1$ и функции $c : [0, T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{\xi \to 0+} c(t_k + \xi),$$

$$c(t_k^-) = \lim_{\xi \to 0-} c(t_k + \xi),$$

для $1 \leq k \leq m$.

Мы будем рассматривать задачу управляемости для системы описываемой, полулинейным функционально-дифференциальным включением с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha} y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)) + Bu(t),\ t \in [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \quad (5.1.1)$$

с начальным условием (4.1.2):

$$y(\theta) = \vartheta(\theta),\ \theta \in (-\infty, 0],$$

где $D^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1,$ - дробная производная Римана-Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $t \geq 0$, $F : [0, T] \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями.

Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний и $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0, T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t+\theta),\ \theta \in (-\infty, 0]$. Начальная функция $\vartheta \in \mathcal{B}$, и функция управления $u(\cdot)$ рассматривается в $L^p(I, U),\ p > 1/\alpha$, где U - гильбертово пространство управлений. Оператор $B : U \to E$ предполагается ограниченным и линейным.

Предполагается, что сужение искомой функции $y : (-\infty, T] \to E$ на $[0, T]$ принадлежит пространству $\mathcal{PC}([0, T]; E)$ функций $z : [0, T] \to E$, непрерывных на $[0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z(t_k^-)$ и $z(t_k^+),\ 1 \leq k \leq m$, существуют и $z(t_k^-) = z(t_k)$.

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}([0, T]; E)$, снабженное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_E ,$$

является банаховым пространством и что классическое пространство $C([0, T]; E)$ является его замкнутым подпространством.

Для удобства обозначим $t_0 = 0,\ t_{m+1} = T$. Тогда для $z \in \mathcal{PC}([0, T]; E)$ обозначим $\widehat{z}_k \in C([t_k, t_{k+1}]; E),\ k = 0, ..., m$, - функции, заданные соотношениями: $\widehat{z}_k(t) = z_k(t),\ t \in (t_k, t_{k+1}]$; $\widehat{z}_k(t_k) = z_k(t_k^+)$. Более того, для множества $D \subset \mathcal{PC}([0, T]; E)$ обозначим $\widehat{D}_k,\ k = 0, ..., m$, множества $\widehat{D}_k = \{\widehat{z}_k : z \in D\}$.

Наконец, будем полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий (4.1.3):

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)),\ k = 1, ..., m,$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ - непрерывные импульсные функции.

Обозначим $I = [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$. Снова будем рассматривать мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

$(F1)$ Мультифункция $F(\cdot,\vartheta,y):[0,T]\to Kv(E)$ допускает измеримое сечение для всех $(\vartheta,y)\in\mathcal{B}\times E$;

$(F2)$ Мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot):\mathcal{B}\times E\to Kv(E)$ - п.н.с. для п.в. $t\in I$;

$(F3)$ Существует функция $w\in L^{\infty}([0,T])$ такая, что:

$$\|F(t,\vartheta,y)\|:=sup\{\|f\|_E : f\in F(t,\vartheta,y)\}\le w(t)(1+|\vartheta|_{\mathcal{B}}+\|y\|_E),\ \text{п.в.}\ t\in I,$$

для всех $(\vartheta,y)\in\mathcal{B}\times E$.

Пусть $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ - линейное пространство функций $y:(-\infty;T]\to E$, таких, что $y_0\in\mathcal{B}$ и $\overline{y}=y|_{[0,T]}\in\mathcal{PC}([0,T];E)$, с полунормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]}=|y_0|_{\mathcal{B}}+\|\overline{y}\|_{\mathcal{PC}}.$$

Для $y\in\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F:[0,T]\to Kv(E),\ \Phi_F(t)=F(t,y_t,y(t)).$$

Ясно, что функции $t\in[0,T]\to y_t\in\mathcal{B}$ и $y:[0,T]\to E$ кусочно-непрерывны. Тогда мультифункция Φ_F, является L^p - интегрируемой, для любого $p\ge 1$.

Пусть $\mathcal{P}_F:\mathcal{C}_E(-\infty;T]\multimap L^p([0,T];E)$ - суперпозиционный мультиоператор, заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(y)=\mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

Наложим на мультифункцию F условие регулярности, выраженное в терминах мер некомпактности:

$(F4)$ Существует функция $\mu \in L^{\infty}([0,T])$ такая, что для любых ограниченных множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi_E(F(t,\Omega,Q)) \leq \mu(t)(\psi(\Omega) + \chi_E(Q)), \text{ п.в. } t \in I,$$

где χ_E - мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \leq 0} \chi_E(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta),\ q \in \Omega\}$, $\theta \in (-\infty, 0]$.

На оператор A, функцию ϑ и импульсные функции $\mathcal{I}_k$ из задачи (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3) мы накладываем следующие условия:

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, где $t \geq 0$.

Как и раннъше, пусть константа $J \geq 1$, такова, что $\|e^{At}\|_{L(E)} \leq J$, для любого $t \in [0,T]$.

(ϑ) $\vartheta \in \mathcal{B}$— заданная функция.

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k : E \to E$, $1 \leq k \leq m$, являются вполне непрерывными.

$(\mathcal{I}2)$ функции $\mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq m$, являются глобально ограниченными, т. е. существует такое $\mathcal{N} > 0$, что $\|\mathcal{I}_k x\| \leq \mathcal{N}$ для всех $x \in E$.

Определение 5.1.1. *Интегральным решением на* $(-\infty, T]$ *задачи* (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ *вида*:

$$y(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k < t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right) + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds, & t \in [0,T], \end{cases}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$ *и* $u \in L^p(I,U)$.

Наша основная задача управляемости, может быть описана следующим образом.

Для заданной начальной функции $\vartheta(\cdot) \in \mathcal{B}$ и заданного $x_1 \in E$ мы будем рассматривать существование решения $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ и управления $u \in L^p(I, U)$ таких, что: $y(t) = \vartheta(t),\ t \in (-\infty, 0]$ и

$$y(T) = x_1. \tag{5.1.2}$$

Сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи управляемости, то есть будем полагать, что линейный оператор управления $W : L^p(I, U) \to E$ следующего вида:

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-s)} (T-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds,$$

имеет обратный ограниченный оператор $W^{-1} : E \to L^p(I, U)/KerW$. Заметим, что без ограничения общности, можно считать $W^{-1} : E \to L^p(I, U)$.

Действительно, пусть $Y = L^p(I, U)/KerW$. Поскольку $KerW$ замкнутое множество, то Y - банахово пространство с нормой:

$$\|[u]\|_Y = \inf_{u \in [u]} \|u\|_{L^p(I,U)} = \inf_{W\hat{u}=0} \|u + \hat{u}\|_{L^p(I,U)}, \tag{5.1.3}$$

где $[u]$ - класс эквивалентности u.

Определим оператор $\widetilde{W} : Y \to E$, такой, что:

$$\widetilde{W}[u] = Wu,\ u \in [u].$$

Тогда, оператор $\widetilde{W}$ иньективен и при этом:

$$\left\|\widetilde{W}[u]\right\|_E \leq \|W\| \, \|[u]\|_Y.$$

Пусть $V = ImW$, определим норму в V следующим образом:

$$\|v\|_V = \left\|W^{-1}v\right\|_Y. \tag{5.1.4}$$

Можно заметить, что норма определенная в (5.1.4) эквивалентна норме заданной на области определения $D(W^{-1}) = Im\widetilde{W}$. Поскольку оператор $\widetilde{W}$ ограниченный и $D(\widetilde{W}) = Y$ - замкнутое множество, то оператор W^{-1} является замкнутым. Тогда множество $ImW = V$, с нормой (5.1.4), является банаховым пространством. Более того:

$$\|Wu\|_V = \left\|W^{-1}Wu\right\|_Y = \left\|W^{-1}\widetilde{W}[u]\right\| = \|[u]\| = \inf_{u\in[u]} \|u\| \le \|u\|,$$

тогда оператор W принадлежит пространству всех ограниченных линейных операторов определенных на $L^p(I, U)$, со значениями в V.

Так как $L^p(I, U)$ рефлексивно и $KerW$ слабо замкнуто, то инфимум в (5.1.3) достигается. Следовательно, для каждого $v \in V$ можно подобрать управление $u \in L^p(I, U)$, такое, что $u = W^{-1}v$.

Будем считать, что оператор W^{-1} удовлетворяет следующему условию регулярности:

(W) Найдется функция $\gamma \in L^\infty(I, E)$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$, мы имеем:

$$\chi_U(W^{-1}(\Omega)(t)) \le \gamma(t)\chi_E(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in I,$$

где χ_U - мера некомпактности Хаусдорфа в U.

Пусть $M_1,\ M_2$ - константы, такие что:

$$\|B\| \le M_1,\ \left\|W^{-1}\right\| \le M_2.$$

Для нахождения интегральных решений задачи (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (5.1.2), рассмотрим отображение

$$S : L^p([0, T]; E) \to C([0, T]; E),$$

$$S(\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\Big[\phi(s) + BW^{-1}\Big(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) -$$
$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\Big)(s)\Big]ds.$$

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{C}_E(-\infty, T] \multimap \mathcal{C}_E(-\infty, T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(y) = \Lambda(y) + S \circ \mathcal{P}_F(y) + \Xi(y),$$

где

$$\Lambda(y)(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right), & t \in [0, T], \end{cases}$$

$$\Xi(y) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}BW^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k(y(t_k))\right)(s)ds.$$

Снова применяя свойства (A), $(\mathcal{I}1)$ и непрерывность операторов B, W^{-1}, можно установить следующую лемму.

Лемма 5.1.1. *Оператор Ξ вполне непрерывен.*

Нетрудно видеть, что функция $y \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - интегральное решение задачи (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (5.1.2) на интервале $(-\infty; T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

С этой целью рассмотрим сужение оператора $\mathcal{G}$ на выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{PC}([0, T]; E)$, определенное как

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathcal{PC}([0, T]; E),\, y(0) = \vartheta(0)\},$$

полагая $\mathcal{G}(v) = \mathcal{G}(v[\vartheta])$, где

$$v[\vartheta](t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ v(t), & t \in (0, T]. \end{cases}$$

Лемма 5.1.2. *Оператор S обладает следующими свойствами:*

$(\mathbb{S}_1')$ *существует константа C такая, что:*

$$\|S(\xi)-S(\eta)\|_{C([0,T];E)} \leq C\,\|\xi-\eta\|_{L^p}\,, \quad \xi,\eta \in L^p([0,T]).$$

$(\mathbb{S}_2')$ *для каждого компактного множества $K \subset E$ и последовательности $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ такой, что $\{\xi_n(t)\} \subset K$ для п. в. $t \in [0,T]$, слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, влечет сходимость $S(\xi_n) \to S(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$.*

Доказательство. Представим оператор S в виде

$$S(\phi) = S_1(\phi) + S_2(\phi), \tag{5.1.5}$$

где

$$S_1(\phi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds,$$

$$S_2(\phi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}BW^{-1}\Big(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) -$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\Big)(s)ds.$$

$(\mathbb{S}_1')$ Используя неравенство Гельдера, мы имеем:

$$\|S_1(\xi)(t)-S_1(\eta)(t)\|_E \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\|\xi(s)-\eta(s)\|_E\, ds \leq$$

$$\leq \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1}ds\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_0^t \|\xi(s)-\eta(s)\|_E^p\, ds\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\|S_1(\xi)-S_1(\eta)\|_{C([0,T];E)} \leq C'\,\|\xi-\eta\|_{L^p}\,,$$

где

$$C' = \left[\frac{p-1}{\alpha p-1}\right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{JT^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$\|S_2(\xi)(t)-S_2(\eta)(t)\|_E=\Big\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\times$$

$$\times BW^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\left(\eta(\tau)-\xi(\tau)\right)d\tau\Big)(s)ds\Big\|_E\le$$

$$\le\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t(t-s)^{(\alpha-1)p/p-1}ds\right]^{\frac{p-1}{p}}\times$$

$$\times\left[\int_0^t\Big\|W^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\left(\eta(\tau)-\xi(\tau)\right)d\tau\Big)(s)\Big\|_U^p ds\right]^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le C'M_1\Big\|W^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\left(\eta(\tau)-\xi(\tau)\right)d\tau\Big)\Big\|_{L^1(I,U)}\le$$

$$\le C'M_1\sqrt[p]{T}\Big\|W^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\left(\eta(\tau)-\xi(\tau)\right)d\tau\Big)\Big\|_{L^p(I,U)}\le$$

$$\le C'M_1M_2\sqrt[p]{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big\|\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\left(\eta(\tau)-\xi(\tau)\right)d\tau\Big\|_E\le$$

$$\le C'M_1M_2\sqrt[p]{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\left\|\eta(\tau)-\xi(\tau)\right\|_E d\tau\le$$

$$\le C'M_1M_2\sqrt[p]{T}\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^T(T-\tau)^{(\alpha-1)p/p-1}d\tau\right]^{\frac{p-1}{p}}\times$$

$$\times\left[\int_0^T\left\|\xi(\tau)-\eta(\tau)\right\|_E^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}}\le C'^2M_1M_2\sqrt[p]{T}\left\|\xi-\eta\right\|_{L^p}.$$

Используя полученные неравенства для операторов S_1 и S_2, мы имеем:

$$\|S(\xi)-S(\eta)\|_{C([0,T];E)}\le C\left\|\xi-\eta\right\|_{L^p},\quad \xi,\eta\in L^p([0,T]),$$

где $C=C'(1+C'M_1M_2\sqrt[p]{T})$.

$(\mathbb{S}_2')$ Представим оператор S_2 в виде:

$$S_2(\phi)=S_1\left(BW^{-1}\left(x_1-e^{AT}\vartheta(0)-\zeta S_1(\phi)\right)\right),\tag{5.1.6}$$

где $\zeta : C([0,T];E) \to E,\ \zeta y = y(T)$ - ограниченный линейный оператор. Тогда, учитывая, что операторы $W^{-1},\ B$ и S_1 являются ограниченными и линейными, можно свести проверку к оператору S_1, который по лемме 4.1.2 удовлетворяет условию $(\mathbb{S}_2')$. Лемма доказана.

Лемма 5.1.3. *При выполнении условий* $(A),\ (F1),\ (F2),\ (F3),\ (F4),$ *и* $(\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}2)$, *мультиоператор*

$$\mathcal{G} = \Lambda + S \circ \mathcal{P}_F + \Xi$$

замкнутый, с компактными значениями.

Доказательство. Из лемм 4.1.1 и 5.1.1 известно, что операторы Λ и Ξ вполне непрерывны. Тогда используя представление (5.1.6), нам достаточно воспользоваться леммой 4.1.5. Лемма доказана.

Лемма 5.1.4. *Мультиоператор* $\mathcal{G}$ *- п.н.с.*

Доказательство. Снова используя представление (5.1.6), доказательство леммы 4.1.6, леммы 4.1.1 и 5.1.1, мы получаем, что мультиоператор $\mathcal{G}$ - квазикомпактное мультиотображение. Для доказательства остается последовательно воспользоваться леммами 5.1.3 и 1.2.1. Лемма доказана.

Для установления окончательного результата данного пункта, будем использовать векторную меру некомпактности $\nu(\Omega)$:

$$\nu : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+,$$

$$\nu(\Omega) = (\psi(\Omega), mod_C(\Omega)),$$

введенную в предыдущей главе.

Пусть $J^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|^{(\chi)}$ и $M_1^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|B\|^{(\chi)}$.

Лемма 5.1.5. *Для того чтобы оператор* $\mathcal{G}$ *был уплотняющим от-*

носительно меры некомпактности ν, достаточно чтобы

$$V := \frac{2T^{\alpha}\|\mu\|_{\infty} J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{2T^{\alpha}\|\mu\|_{\infty} J^{(\chi)} M_1^{(\chi)}\|\gamma\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) < 1. \qquad (5.1.7)$$

Доказательство. Из полной непрерывности операторов Λ, Ξ и свойств монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности меры некомпактности ν следует, что нам достаточно проверить свойство уплотняемости лишь для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ - непустое ограниченное множество и

$$\nu(\mathcal{G}(\Omega)) \geq \nu(\Omega), \qquad (5.1.8)$$

покажем, что Ω - относительно компактное множество.

Используя представление (5.1.5) из доказательства леммы 5.1.2, для доказательства утверждения теоремы, будем рассматривать отдельно операторы S_1 и S_2.

Пусть $\Omega_t = \{y_t; y \in \Omega\}$. Рассмотрим оператор S_1 и многозначную функцию $s \in [0,t] \multimap G_1(s) \subset E$,

$$G_1(s) = \left\{(t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)}\phi(s) : \ \phi \in \mathcal{P}_F(y), \ y \in \Omega\right\}.$$

Она интегрально ограничена функцией:

$$s \to (t-s)^{\alpha-1} J w(s)(1 + C_1 + C_2),$$

где $C_1 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{y\in\Omega} |y_s|_{\mathcal{B}}\,,\ C_2 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{y\in\Omega} \|y(s)\|_E\,.$

Оценим $\chi_E(G_1(s))$:

$$\chi_E(G_1(s)) \leq (t-s)^{\alpha-1}\|e^{A(t-s)}\|^{(\chi)} \chi_E(\,\{\phi(s) : \ \phi \in \mathcal{P}_F(y), \ y \in \Omega\}\,) \leq$$

$$\leq (t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)} \mu(s)(\chi_E(\Omega(s)) + \psi(\Omega_s)) \leq 2(t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)}\|\mu\|_{\infty}\psi(\Omega).$$

Оценим теперь $\chi_E(S_1(\Omega)(t)),\ t\in[0,T]$:

$$\chi_E(S_1(\Omega)(t))=\chi_E(\,\{S_1\circ\mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\,)\leq\chi_E\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t G_1(s)ds\right)\leq$$

$$\leq\frac{2}{\Gamma(\alpha)}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_\infty\psi(\Omega)\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds\leq\frac{2}{\Gamma(\alpha)}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_\infty\frac{t^\alpha}{\alpha}\psi(\Omega)\leq$$

$$\leq\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_\infty\psi(\Omega).$$

Рассмотрим теперь оператор S_2 и многозначную функцию $s\in[0,t]\multimap G_2(s)\subset E$,

$$G_2(s)=\Big\{e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}BW^{-1}\Big(x_1-e^{AT}\vartheta(0)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\Big)(s):\ \phi\in\mathcal{P}_F(y),\ y\in\Omega\Big\}.$$

Она интегрально ограничена функцией

$$s\to J(t-s)^{\alpha-1}M_1M_2\Big(\left\|x_1\right\|_E+J\left\|\vartheta(0)\right\|_{\mathcal{B}}+$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-\tau)^{\alpha-1}w(\tau)(1+C_1+C_2)d\tau\Big).$$

Оценим $\chi_E(G_2(s))$:

$$\chi_E(G_2(s))\leq J^{(\chi)}M_1^{(\chi)}(t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)\times$$

$$\times\chi_E\left(\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau:\ \phi\in\mathcal{P}_F(y),\ y\in\Omega\right\}\right)\leq$$

$$\leq\left(J^{(\chi)}\right)^2M_1^{(\chi)}(t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)\frac{2T^\alpha\left\|\mu\right\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}\psi(\Omega)\leq$$

$$\leq\frac{2T^\alpha\left(J^{(\chi)}\right)^2M_1^{(\chi)}\left\|\gamma\right\|_\infty\left\|\mu\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(t-s)^{\alpha-1}\psi(\Omega).$$

Оценим $\chi_E(S_2(\Omega)(t)),\ t\in[0,T]$:

$$\chi_E(S_2(\Omega)(t))=\chi_E(\,\{S_2\circ\mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\,)\leq\chi_E\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t G_2(s)ds\right)\leq$$

$$\leq \frac{2T^{\alpha}\left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}\left\|\gamma\right\|_{\infty}\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\psi(\Omega)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \leq$$

$$\leq \frac{4T^{2\alpha}\left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}\left\|\gamma\right\|_{\infty}\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma^2(\alpha+1)}\psi(\Omega).$$

Таким образом, получаем:

$$\chi_E(\mathcal{G}(\Omega)(t)) \leq \frac{2T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{(\chi)}\left\|\mu\right\|_{\infty}\psi(\Omega)+$$

$$+\frac{4T^{2\alpha}\left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}\left\|\gamma\right\|_{\infty}\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma^2(\alpha+1)}\psi(\Omega) = V\psi(\Omega),$$

а следовательно,

$$\psi(\mathcal{G}(\Omega)) \leq V\psi(\Omega). \tag{5.1.9}$$

Сравнивая (5.1.8) с (5.1.9) получаем, что $\psi(\Omega)=0$. Из доказательства леммы 5.1.2, следует, что множество $S\circ\mathcal{P}_F(\Omega)$ - равностепенно непрерывно, теперь воспользовавшись леммой 4.1.1 и леммой 5.1.1, мы имеем:

$$mod_C(\mathcal{G}(\Omega))=0,$$

значит $\nu(\Omega)=(0,0)$. Тогда мы заключаем, что Ω - относительно компактное множество, а оператор $\mathcal{G}$ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Лемма доказана.

Теорема 5.1.1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (ϑ), (W), $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}2)$, *и* (5.1.7) *множество решений задачи* (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (5.1.2) *на* $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ *- непусто и компактно.*

Доказательство. Обозначим $y^*\in\mathcal{D}$ функцию

$$y^*(t)=e^{At}\vartheta(0).$$

Покажем, что множество решений $y\in\mathcal{D}$ семейства включений

$$y-y^*\in\lambda(\mathcal{G}(y)-y^*),\ 0<\lambda\leq 1,$$

априори ограничено.

Применяя условие $(F3)$, мы получаем оценку:

$$\|y(t)-y^*(t)\|_E \le \lambda \left\|e^{At}\right\|_E \left\|\sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right\|_E +$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1}\|\phi(s)\|_E\, ds+,$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1}\Big\|BW^{-1}\Big(x_1-e^{AT}\vartheta(0)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\Big)(s)\Big\|_E ds+$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1}\left\|BW^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)(s)\right\|_E ds,$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y[\vartheta])$.

Применяя свойство $(\mathcal{I}2)$ и неравенство Гельдера, получаем оценку:

$$\|y(t)\|_E \le J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\phi(s)\|_E\, ds+$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big\|W^{-1}\Big(x_1-e^{AT}\vartheta(0)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\Big)(s)\Big\|_U ds+$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left\|W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)(s)\right\|_U ds \le$$

$$\le J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\phi(s)\|_E\, ds+$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1}ds\right]^{\frac{p-1}{p}}\Big[\int_0^t \Big\|W^{-1}\Big(x_1-e^{AT}\vartheta(0)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\Big)(s)\Big\|_U^p ds\Big]^{\frac{1}{p}} + \frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} ds\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_0^t \left\| W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)(s)\right\|_U^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\phi(s)\|_E\, ds + \frac{JM_1C'}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\left[\left\| W^{-1}\left(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^1(I,U)}^p\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\frac{JM_1C'}{\Gamma(\alpha)}\left[\left\| W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)\right\|_{L^1(I,U)}^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\phi(s)\|_E\, ds + \frac{JM_1C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\left\| W^{-1}\left(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^p(I,U)} +$$

$$+\frac{JM_1C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left\| W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)\right\|_{L^p(I,U)} \leq$$

$$\leq J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\phi(s)\|_E\, ds + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\left(\|x_1\|_E + J\|\vartheta(0)\|_E + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}\|\phi(\tau)\|_E\, d\tau\right) +$$

$$+\frac{J^2m\mathcal{N}M_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)} \leq$$

$$\leq J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1\|_E + J\|\vartheta(0)\|_E + Jm\mathcal{N}\right) +$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\right)\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|\phi(s)\|_E\, ds,$$

где

$$C' = \left[\frac{p-1}{\alpha p - 1}\right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{JT^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Теперь, применяя свойство $(F3)$, мы имеем:

$$\|y(t)\|_E \leq \mathcal{L}_1 + \frac{J\mathcal{L}_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} w(s)(1 + |(y[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|y(s)\|_E) ds,$$

где

$$\mathcal{L}_1 = J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1\|_E + J\|\vartheta(0)\|_E + Jm\mathcal{N}\right),$$

$$\mathcal{L}_2 = \left(1 + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\right).$$

Из свойства $(\mathcal{B}_3)$ вытекает, что

$$|(y[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|y(s)\|_E \leq M|\vartheta|_{\mathcal{B}} + (K+1)\|y\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)},$$

где $M(t) \leq M, \quad K(t) \leq K, \quad t \in [0,T]$.

Тогда получаем оценку:

$$\|y(t)\|_E \leq \mathcal{L}_1 + \frac{J\mathcal{L}_2\left(M|\vartheta|_{\mathcal{B}} + 1\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} w(s) ds +$$

$$+ \frac{J\mathcal{L}_2\,(K+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} w(s)\|y\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)}\, ds.$$

Снова используя неравенство Гельдера, имеем:

$$\|y(t)\|_E \leq \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\left(M|\vartheta|_{\mathcal{B}} + 1\right) C' \left(\int_0^T |w(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \mathcal{L}_2\,(K+1)\, C' \left(\int_0^T |w(s)|^p \|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)}\, ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$q_0 = N\mathcal{L}_1 + N\mathcal{L}_2\left(M|\vartheta|_{\mathcal{B}} + 1\right) C' \left(\int_0^T |w(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$h(s) = \left[N\mathcal{L}_2 C'(K+1)\right]^{1/p} w(s), \quad s \in [0,T].$$

Тогда получаем:

$$\|y\|_{\mathcal{PC}([0,t];E)} \leq q_0 + \left(\int_0^T |h(s)|^p \, \|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)} \, ds \right)^{1/p}.$$

Пусть $z(t) = \|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)}$, тогда из последнего неравенства получаем следующую оценку:

$$z(t) \leq 2^p q_0^p + 2^p \int_0^T |h(s)|^p \, z(s) ds,$$

для всех $t \in [0,T]$. Теперь, применяя лемму 1.1.3 к последнему неравенству, получаем:

$$z(t) = \|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)} \leq 2^p q_0^p \left(1 + \int_0^T exp \left\{ 2^p \int_s^T |h(\theta)|^p \, d\theta \right\} |h(s)|^p \, ds \right),$$

для всех $t \in [0,T]$. Пусть

$$R_0 = 2q_0 \sqrt[p]{1 + \int_0^T exp \left\{ 2^p \int_s^T |h(\theta)|^p \, d\theta \right\} |h(s)|^p \, ds},$$

тогда мы получаем окончательную оценку:

$$\|y\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leq R_0.$$

Применим теперь теорему 1.2.1, полагая $a = y^*, \quad \mathcal{F} = \mathcal{G}$ и

$$\overline{\mathcal{U}_{\mathcal{D}}} = \left\{ v \in \mathcal{D}, \quad \|v\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leq R \right\},$$

где $R \geq R_0$.

Мы получаем, что множество неподвижных точек $Fix \ \mathcal{G}$ непусто и компактно. Теорема доказана.

5.2 Случай нелокальной задачи управляемости

В данном пункте мы будем рассматривать существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E вида (5.1.1):

$$D^{\alpha}y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)) + Bu(t),\ t \in [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\},$$

но уже с нелокальным начальным условием (4.2.1):

$$y(s) + g(y)(s) = \varphi(s),\ s \in [-h, 0],$$

где $F : [0,T] \times \mathcal{PC}([-h,0];E) \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь, как и в пункте 4.2, $\mathcal{PC}([-h,0];E)$ обозначает пространство всех кусочно-непрерывных функций на интервале $[-h,0],\ 0 < h < T - t_m$, со значениями в E, с нормой

$$\|y\|_{\mathcal{PC}([-h,0];E)} = \int_{-h}^{0} \|y(\tau)\|_E \, d\tau,$$

и $y_t \in \mathcal{PC}([-h,0];E)$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0,T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t+\theta),\ \theta \in [-h,0]$.

Будем, как и прежде, полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий (4.1.3):

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)),\ k = 1, ..., m.$$

По прежнему, пусть $\mathcal{C}_E[-h;T]$ - линейное пространство функций $y : [-h;T] \to E$, непрерывных на $[-h,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $y(t_k^-)$ и $y(t_k^+),\ 1 \le k \le m$, существуют и $y(t_k^-) = y(t_k)$, с нормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} = \sup_{t \in [-h,T]} \|y(t)\|_E \, .$$

Предполагается, что отображение $g : \mathcal{C}_E[-h;T] \to C([-h,0];E)$ непрерывно, $\varphi \in C([-h,0];E)$ заданная функция и функция управления $u(\cdot)$ рассматривается в $L^p(I,U), \quad p > 1/\alpha$, где U - гильбертово пространство управлений. Оператор $B : U \to E$ предполагается ограниченным и линейным.

Рассмотрим мультиоператор $F : I \times \mathcal{PC}([-h,0];E) \times E \to Kv(E)$, удовлетворяющий условиям $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$, и следующему условию:

$(F'3)$ Для каждого $n \in \mathbb{N}$, найдется функция $w_n \in L^\infty([0,T])$, такая, что для любой функции $y \in \mathcal{C}_E[-h;T]$, удовлетворяющей оценке $\|y\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} \le n$, выполнено:

$$\|F(t, y_t, y(t))\| := sup\left\{\|f\|_E : f \in F(t, y_t, y(t))\right\} \le w_n(t) \text{ п.в. } t \in I.$$

Для $y \in \mathcal{C}_E[-h;T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E), \ \Phi_F(t) = F(t, y_t, y(t)).$$

Так как функция $t \in [0,T] \to y(t) \in E$ кусочно-непрерывна, а функция $t \in [0,T] \to y_t \in \mathcal{PC}([-h,0];E)$ непрерывна, то мультифункция Φ_F является L^p - интегрируемой, для любого $p \ge 1$.

Пусть $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E[-h;T] \multimap L^p([0,T];E)$ - суперпозиционный мультиоператор, заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(y) = \mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

На оператор A из задачи (5.1.1), (4.2.1), (4.1.3) мы накладываем условие (A) из предыдущего пункта, а на отображение g, функцию φ и импульсные функции $\mathcal{I}_k$ следующие условия:

(φ) $\varphi \in C([-h,0];E)$ - заданная функция

(g_1) $g : \mathcal{C}_E[-h;T] \to C([-h,0];E)$ - вполне непрерывное отображение.

(g_2') найдется такая последовательность $\{\rho_n\}$, что для любого $y \in \mathcal{C}_E[-h;T]$, $\|y\| \leq n$, выполнено $\|g(y)\| \leq \rho_n$ и при этом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{n} = 0.$$

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k : E \to E$, $1 \leq k \leq m$, являются вполне непрерывными.

$(\mathcal{I}'2)$ найдется такая последовательность $\{\sigma_n\}$, что для любого $x \in E$, $\|x\| \leq n$, выполнено $\|\mathcal{I}_k x\| \leq \sigma_n$, $1 \leq k \leq m$, и при этом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = 0.$$

Определение 5.2.1. *Интегральным решением на* $[-h,T]$ *задачи* (5.1.1), (4.2.1), (4.1.3), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E[-h,T]$ *вида:*

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(y)(t), & t \in [-h,0]; \\ e^{At}\left(\varphi(0) - g(y)(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right) + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds, & t \in [0,T], \end{cases}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$ *и* $u \in L^p(I,U)$.

Наша основная задача управляемости, может быть сформулирована следующим образом.

Для заданной начальной функции $\varphi(\cdot) \in C([-h,0];E)$ и заданной произвольной функции $x_1(\cdot) \in C([-h,0];E)$, мы будем рассматривать существование решения $y \in \mathcal{C}_E[-h,T]$ задачи (5.1.1), (4.2.1), (4.1.3) и управления $u \in L^p(I,U)$ таких, что:

$$y(T+\theta) + g(y)(\theta) = x_1(\theta), \ \theta \in [-h,0]. \tag{5.2.1}$$

Сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи управляемости, то есть будем полагать, что линейный оператор управления $W : L^p(I,U) \to C([-h,0];E)$ следующего вида:

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-s)}(T+\theta-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds,$$

имеет обратный ограниченный оператор

$$W^{-1} : C([-h,0];E) \to L^p(I,U)/KerW,$$

который без ограничения общности, можно считать действующим в пространство $L^p(I,U)$ (см. пункт 5.1).

Будем считать, что оператор W^{-1} удовлетворяет следующему условию регулярности:

(W') Найдется функция $\gamma \in L^\infty(I,E)$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset C([-h,0];E)$, мы имеем:

$$\chi_U(W^{-1}(\Omega)(t)) \leq \gamma(t) \sup_{\theta\in[-h,0]} \chi_E(\Omega(\theta)) \quad \text{для п.в. } t \in I,$$

где χ_U - мера некомпактности Хаусдорфа в U.

Пусть M_1, M_2 - константы такие, что:

$$\|B\| \leq M_1, \ \left\|W^{-1}\right\| \leq M_2.$$

Для нахождения интегральных решений задачи (5.1.1), (4.2.1), (4.1.3), (5.2.1), рассмотрим отображение

$$S' : L^p([0,T];E) \to C([0,T];E),$$

$$S'(\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\Big[\phi(s) + BW^{-1}\Big(x_1(\theta) - g(y)(\theta) -$$

$$-e^{A(T+\theta)}(\varphi(0)-g(y)(0))-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)}(T+\theta-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\Big)(s)\Big]ds,$$

где выражение под знаком оператора W^{-1} мы рассматриваем, как функцию от аргумента $\theta,\ \theta\in[-h,0]$.

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G}:\mathcal{C}_E[-h,T]\multimap\mathcal{C}_E[-h,T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(y)=\Lambda_1(y)+S'\circ\mathcal{P}_F(y)+\Xi_1(y),$$

где

$$\Lambda_1(y)(t)=\begin{cases}\varphi(t)-g(y)(t), & t\in[-h,0];\\ e^{At}\left(\varphi(0)-g(y)(0)+\sum_{t_k<t}\mathcal{I}_k(y(t_k))\right), & t\in[0,T],\end{cases}$$

$$\Xi_1(y)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}BW^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{A(T+\theta)}\mathcal{I}_k(y(t_k))\right)(s)ds.$$

Нетрудно видеть, что функция $y\in\mathcal{C}_E[-h;T]$ - интегральное решение задачи (5.1.1), (4.2.1), (4.1.3), (5.2.1) на интервале $[-h;T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

Используя условие $(\mathcal{I}1)$, можно установить следующую лемму.

Лемма 5.2.1. *Оператор Ξ_1 является вполне непрерывным.*

Лемма 5.2.2. *Оператор S' обладает следующими свойствами:*

$(\mathbb{S}_1')$ *существует константа C такая, что:*

$$\|S'(\xi)-S'(\eta)\|_{C([0,T];E)}\le C\,\|\xi-\eta\|_{L^p},\ \xi,\eta\in L^p([0,T]).$$

$(\mathbb{S}_2')$ *для каждого компактного множества $K\subset E$ и последовательности $\{\xi_n\}\subset L^p([0,T];E)$ такой, что $\{\xi_n(t)\}\subset K$ для п. в. $t\in$*

$[0,T]$, *слабая сходимость* $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, *влечет сходимость* $S'(\xi_n) \to S'(\xi_0)$ *в* $C([0,T];E)$.

Доказательство. Представим оператор S' в виде

$$S'(\phi) = S_1(\phi) + S_2'(\phi), \tag{5.2.2}$$

где

$$S_1(\phi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \phi(s),$$

$$S_2'(\phi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} BW^{-1}(x_1(\theta) - g(y)(\theta) -$$

$$-e^{A(T+\theta)}(\varphi(0) - g(y)(0)) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \phi(\tau) d\tau)(s) ds.$$

($\mathbb{S}_1'$) Для оператора S_1 свойство $\mathbb{S}_1'$ доказано в лемме 5.1.2, докажем для оператора S_2'.

$$\|S_2'(\xi)(t) - S_2'(\eta)(t)\|_E = \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \times$$

$$\times BW^{-1} \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau \Big)(s) ds \Big\|_E \le$$

$$\le \frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \Big[\int_0^t \Big\| W^{-1} \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} \times$$

$$\times (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau \Big)(s) \Big\|_U^p ds \Big]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C' M_1 \Big\| W^{-1} \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau \Big) \Big\|_{L^1(I,U)} \le$$

$$\le C' M_1 \sqrt[p]{T} \Big\| W^{-1} \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} \times$$

$$\times (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau \Big) \Big\|_{L^p(I,U)} \le C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big\| \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau \Big\|_{C([-h,0];E)} \le$$

$$\leq C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)} (T-\tau)^{\alpha-1} \left\| \eta(\tau) - \xi(\tau) \right\|_E d\tau \leq$$

$$\leq C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^T (T-\tau)^{(\alpha-1)p/p-1} d\tau \right]^{\frac{p-1}{p}} \times$$

$$\times \Big[\int_0^T \left\| \xi(\tau) - \eta(\tau) \right\|_E^p d\tau \Big]^{\frac{1}{p}} \leq C'^2 M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \left\| \xi - \eta \right\|_{L^p}.$$

Используя полученные неравенства для операторов S_1 и S_2', мы имеем:

$$\left\| S'(\xi) - S'(\eta) \right\|_{C([0,T];E)} \leq C \left\| \xi - \eta \right\|_{L^p}, \ \xi, \eta \in L^p([0,T]),$$

где $C = C'(1 + C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T})$.

$(\mathbb{S}_2')$ Представим оператор S_2' в виде:

$$S_2'(\phi) = S_1 \Big(B W^{-1} (x_1(\theta) - g(y)(\theta) -$$

$$- e^{A(T+\theta)} \left(\varphi(0) - g(y)(0) \right) - \zeta S_1(\phi)) \Big), \tag{5.2.3}$$

где $\zeta : C([0,T];E) \to C([-h,0];E), \ \zeta y = y(T+\theta) + g(y)(\theta)$ - ограниченный линейный оператор. Тогда, учитывая, что операторы $W^{-1}, \ B$ и S_1 являются ограниченными и линейными, можно свести проверку к оператору S_1, который по лемме 4.1.2 удовлетворяет условию $(\mathbb{S}_2')$. Лемма доказана.

Лемма 5.2.3. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$, (φ), $(g_1 - (g_2'))$ *и* $(\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}'2)$, *мультиоператор*

$$\mathcal{G} = \Lambda_1 + S' \circ \mathcal{P}_F + \Xi_1$$

замкнутый, с компактными значениями.

Доказательство. Из лемм 4.2.1 и 5.2.1 известно, что операторы Λ_1 и Ξ_1 вполне непрерывны. Тогда используя представление (5.2.3), нам достаточно воспользоваться леммой 4.1.5. Лемма доказана

Лемма 5.2.4. *Мультиоператор $\mathcal{G}$ - п.н.с.*

Доказательство. Снова используя представление (5.2.3), доказательство леммы 4.1.6, леммы 4.2.1 и 5.2.1, мы получаем, что мультиоператор $\mathcal{G}$ - квазикомпактное мультиотображение. Для доказательства остается последовательно воспользоваться леммами 5.2.3 и 1.2.1. Лемма доказана.

Для доказательства уплотняемости мультиоператора $\mathcal{G}$ снова воспользуемся векторной мерой некомпактности в пространстве $\mathcal{C}_E[-h,T]$:

$$\nu : P(\mathcal{C}_E[-h;T]) \to \mathbb{R}^2_+,$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, заданной как

$$\nu(\Omega) = (\psi(\Omega), mod_C(\Omega)).$$

Пусть $J^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|^{(\chi)}$ и $M_1^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|B\|^{(\chi)}$.

Лемма 5.2.5. *Для того чтобы оператор $\mathcal{G}$ был уплотняющим относительно меры некомпактности ν, достаточно чтобы выполнялось условие* (5.1.7):

$$V := \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)} M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right) < 1.$$

Доказательство. Из полной непрерывности операторов Λ_1, Ξ_1 и свойств монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности меры некомпактности ν следует, что нам достаточно проверить свойство уплотняемости лишь для мультиоператора $S' \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\Omega \subset \mathcal{C}_E[-h,T]$ - непустое ограниченное множество и

$$\nu(\mathcal{G}(\Omega)) \geq \nu(\Omega), \tag{5.2.4}$$

покажем, что Ω - относительно компактное множество.

Если $t \in [-h, 0]$, то в силу условия (g_1) :

$$\chi(\mathcal{G}(\Omega)(t)) = 0.$$

Пусть теперь $t \in [0, T]$ и пусть $\Omega_t = \{y_t; y \in \Omega\}$. Используя представление (5.2.3) из доказательства леммы 5.2.2, для доказательства утверждения теоремы, будем рассматривать отдельно операторы S_1 и S_2'.

Для оператора S_1 в доказательстве леммы 5.1.5 мы получили следующую оценку:

$$\chi_E(S_1(\Omega)(t)) \leq \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega).$$

Рассмотрим теперь оператор S_2' и многозначную функцию $s \in [0, t] \multimap G_2(s) \subset E$,

$$G_2(s) = \Big\{ e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} B W^{-1} \Big(x_1(\theta) - g(y)(\theta) - e^{A(T+\theta)}(\varphi(0) - g(y)(0)) -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)}(T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \phi(\tau) d\tau \Big)(s) : \ \phi \in \mathcal{P}_F(y), \ y \in \Omega \Big\},$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$.

Она интегрально ограничена функцией

$$s \to J(t-s)^{\alpha-1} M_1 M_2 \Big(\|x_1\|_{C([-h,0];E)} + J \|\varphi\|_{C([-h,0];E)} +$$

$$+ (J+1) \|g(y)\|_{C([-h,0];E)} + \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} w_n(\tau) d\tau \Big).$$

Оценим $\chi_E(G_2(s))$:

$$\chi_E(G_2(s)) \leq$$

$$\leq J^{(\chi)} M_1^{(\chi)} (t-s)^{\alpha-1} \gamma(s) \chi_U \Big(\Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)} (T-\tau)^{\alpha-1} \phi(\tau) d\tau :$$

$$\phi \in \mathcal{P}_F(y), \ y \in \Omega \Big\} \Big) \leq \Big(J^{(\chi)} \Big)^2 M_1^{(\chi)} (t-s)^{\alpha-1} \gamma(s) \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty}{\alpha \Gamma(\alpha)} \psi(\Omega) \leq$$

$$\leq \frac{2T^\alpha \left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_\infty \|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(t-s)^{\alpha-1}\psi(\Omega).$$

Оценим $\chi_E(S_2'(\Omega)(t)),\ t \in [0,T]$:

$$\chi_E(S_2'(\Omega)(t)) = \chi_E(\,\{S_2 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\,) \leq \chi_E\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t G_2(s)ds\right) \leq$$

$$\leq \frac{2T^\alpha \left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_\infty \|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\psi(\Omega)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \leq$$

$$\leq \frac{4T^{2\alpha} \left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_\infty \|\mu\|_\infty}{\Gamma^2(\alpha+1)}\psi(\Omega).$$

Таким образом, получаем:

$$\chi_E(\mathcal{G}(\Omega)(t)) \leq$$

$$\leq \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^{(\chi)}\|\mu\|_\infty \psi(\Omega) + \frac{4T^{2\alpha} \left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_\infty \|\mu\|_\infty}{\Gamma^2(\alpha+1)}\psi(\Omega) = V\psi(\Omega),$$

а следовательно,

$$\psi(\mathcal{G}(\Omega)) \leq V\psi(\Omega). \qquad (5.2.5)$$

Сравнивая (5.2.4) с (5.2.5) получаем, что $\psi(\Omega) = 0$. Из доказательства леммы 5.2.2, следует, что множество $S' \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$ - равностепенно непрерывно, теперь воспользовавшись леммой 4.1.1 и леммой 5.1.1, мы имеем:

$$mod_C(\mathcal{G}(\Omega)) = 0,$$

значит $\nu(\Omega) = (0,0)$. Тогда мы заключаем, что Ω - относительно компактное множество, а оператор $\mathcal{G}$ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Лемма доказана.

Теорема 5.2.1. *При выполнении условий* $(A),\ (F1), (F2), (F'3), (F4), (\varphi),\ (g_1) - (g_2'),\ (\vartheta),\ (\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}'2)$, (5.1.7) *и асимптотического условия* (4.2.5):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|w_n\|_\infty}{n} = 0,$$

где $w_n(\cdot)$ *- функции определенные в условии* $(F'3)$, *множество решений задачи* (5.1.1), (4.2.1), (4.1.3), (5.2.1) *на* $\mathcal{C}_E[-h;T]$ *- непусто и компактно.*

Доказательство. Из леммы (5.2.4) и леммы (5.2.5), нам известно, что мультиоператор $\mathcal{G}$ п.н.с. и ν-уплотняющий. Для того, чтобы применить теорему 1.2.2, мы покажем, что существует $R > 0$ такое, что $\mathcal{G}(B_R) \subset B_R$, где B_R - замкнутый шар радиуса R в пространстве $\mathcal{C}_E[-h;T]$. В предположении противного, найдется последовательность функций $y_n \in \mathcal{C}_E[-h;T]$, удовлетворяющая оценкам $\|y_n\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} \leq n$ для всех $n \geq 1$ и такая, что для некоторой последовательности $z_n \in \mathcal{G}(y_n)$ будет выполнено $\|z_n\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} > n$. Это, в свою очередь, означает, что будет выполнена по меньшей мере одна из оценок

$$\|\tilde{z}_{n_i}\| > n_i,$$

для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}$, $i = 1, 2, ...,$ или

$$\left\|\hat{z}_{n_j}\right\| > n_j,$$

для некоторой подпоследовательности $\{n_j\}$, $j = 1, 2, ...,$ где $\tilde{z}_{n_i} = z_{n_i}|_{[-h,0]}$ и $\hat{z}_{n_j} = z_{n_j}|_{[0,T]}$.

В случае первой серии оценок мы имеем:

$$\tilde{z}_{n_i}(t) = \varphi(t) - g(y_{n_i})(t), \ t \in [-h, 0],$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{z}_{n_i}\| \leq \|\varphi\| + \|g(y_{n_i})\| \leq \|\varphi\| + \rho_{n_i},$$

где $\{\rho_n\}$ - последовательность из условия (g_2'). Тогда получаем:

$$1 < \frac{\|\tilde{z}_{n_i}\|}{n_i} \leq \frac{\|\varphi\|}{n_i} + \frac{\rho_{n_i}}{n_i},$$

что противоречит условию (g_2').

В случае второй серии оценок мы имеем:

$$\hat{z}_{n_j}(t) =$$

$$= e^{At}(\varphi(0) - g(y_{n_j})(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y_{n_j}(t_k))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} \phi(s) ds +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} BW^{-1} \Big(x_1(\theta) - g(y_{n_j})(\theta) - e^{A(T+\theta)} (\varphi(0) -$$

$$-g(y_{n_j})(0)) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} \phi(\tau) d\tau \Big)(s) ds -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} BW^{-1} \left(\sum_{k=1}^m e^{A(T+\theta)} \mathcal{I}_k(y_{n_j}(t_k)) \right)(s) ds, \ t \in [0,T],$$

где $\phi(s) \in \mathcal{P}_F(y_{n_j})$.

Применяя свойство $(F'3)$, получаем оценку

$$\left\| \hat{z}_{n_j}(t) \right\|_E \leq J \left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} + \left\| g(y_{n_j})(0) \right\|_E \right) + mJ\sigma_{n_j} +$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w_{n_j}(s) ds + \frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Big\| W^{-1} \Big(x_1(\theta) - g(y_{n_j})(\theta) -$$

$$-e^{A(T+\theta)} \left(\varphi(0) - g(y_{n_j})(0) \right) -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)} (T+\theta-\tau)^{\alpha-1} w_{n_j}(\tau) d\tau \Big)(s) \Big\|_U ds +$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\| W^{-1} \left(\sum_{k=1}^m e^{A(T+\theta)} \mathcal{I}_k \left(y_{n_j}(t_k) \right) \right)(s) \right\|_U ds \leq$$

$$\leq J \left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} + \left\| g(y_{n_j}) \right\|_{C([-h,0];E)} \right) + mJ\sigma_{n_j} +$$

$$+\frac{J \left\| w_{n_j} \right\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \times$$

$$\times\Big[\int_0^t \Big\|W^{-1}\Big(x_1(\theta)-g(y_{n_j})(\theta)-e^{A(T+\theta)}\left(\varphi(0)-g(y_{n_j})(0)\right)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)}(T+\theta-\tau)^{\alpha-1}w_{n_j}(\tau)d\tau\Big)(s)\Big\|_U^p ds\Big]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1}ds\right]^{\frac{p-1}{p}}\times$$

$$\times\left[\int_0^t \left\|W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{A(T+\theta)}\mathcal{I}_k\left(y_{n_j}(t_k)\right)\right)(s)\right\|_U^p ds\right]^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)}+\left\|g(y_{n_j})\right\|_{C([-h,0];E)}\right)+mJ\sigma_{n_j}+\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+$$

$$+\frac{JM_1C'}{\Gamma(\alpha)}\Big[\Big\|W^{-1}\Big(x_1(\theta)-g(y_{n_j})(\theta)-e^{A(T+\theta)}\left(\varphi(0)-g(y_{n_j})(0)\right)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)}(T+\theta-\tau)^{\alpha-1}w_{n_j}(\tau)d\tau\Big)\Big\|_{L^1(I,U)}^p\Big]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\frac{JM_1C'}{\Gamma(\alpha)}\left[\left\|W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{A(T+\theta)}\mathcal{I}_k\left(y_{n_j}(t_k)\right)\right)\right\|_{L^1(I,U)}^p\right]^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)}+\rho_{n_j}\right)+mJ\sigma_{n_j}+\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+$$

$$+\frac{JM_1C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\Big\|W^{-1}\Big(x_1(\theta)-g(y_{n_j})(\theta)-e^{A(T+\theta)}\left(\varphi(0)-g(y_{n_j})(0)\right)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T+\theta} e^{A(T+\theta-\tau)}(T+\theta-\tau)^{\alpha-1}w_{n_j}(\tau)d\tau\Big)\Big\|_{L^p(I,U)}+$$

$$+\frac{JM_1C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left\|W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{A(T+\theta)}\mathcal{I}_k\left(y_{n_j}(t_k)\right)\right)\right\|_{L^p(I,U)}\le$$

$$\le J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)}+\rho_{n_j}\right)+mJ\sigma_{n_j}+\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+$$

$$+\frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\|x_1\|_{C([-h,0];E)}+J\|\varphi\|_{C([-h,0];E)}+(J+1)\left\|g(y_{n_j})\right\|_{C([-h,0];E)}+$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} w_{n_j}(\tau)d\tau\Big) + \frac{J^2 m\sigma_{n_j} M_1 M_2 C' \sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)} \leq$$

$$\leq J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} + \rho_{n_j}\right) + mJ\sigma_{n_j} + \frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\left(\|x_1\|_{C([-h,0];E)} + J\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} + (J+1)\rho_{n_j} + \frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) +$$

$$+\frac{J^2 m\sigma_{n_j} M_1 M_2 C' \sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)},$$

где

$$C' = \left[\frac{p-1}{\alpha p-1}\right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{JT^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Отсюда, мы имеем:

$$1 < \frac{1}{n_j}\left\|\hat{z}_{n_j}\right\|_{\mathcal{C}_E[0,T]} \leq \frac{1}{n_j}J\left(\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} + \rho_{n_j}\right) + \frac{1}{n_j}mJ\sigma_{n_j} +$$

$$+\frac{1}{n_j}\frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{n_j}\frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\|x_1\|_{C([-h,0];E)} + J\|\varphi\|_{C([-h,0];E)} +$$

$$+(J+1)\rho_{n_j} + \frac{J\left\|w_{n_j}\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Big) + \frac{1}{n_j}\frac{J^2 m\sigma_{n_j} M_1 M_2 C' \sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Применяя условия (g_2'), $(\mathcal{I}'2)$ и (4.2.5), мы получим противоречие. Теорема доказана.

5.3 Управляемость процесса дробной диффузии

В качестве приложения мы рассмотрим задачу управляемости для процесса, описываемого диффузионным уравнением дробного порядка. Уравнения такого типа возникают в задачах электроаналитической химии, моделирования диффузии в фрактальных средах и др. (см. [48] и имеющиеся там ссылки).

Для простоты мы рассмотрим одномерную модель. Пусть $z(t,x)$ - концентрация диффундирующего вещества в момент времени $t \in [0,T]$ в точке $x \in \mathbb{R}$. Мы будем предполагать следующее:

(H_1) имеется l источников вещества, свойства которых зависят от концентрации и плотность которых характеризуется функциями $\varphi_i(x,z),\ i = 1,...,l,\ \varphi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Интенсивность источников в каждый момент времени характеризуется функциями $v_i : [0,T] \to \mathbb{R},\ i = 1,...,l$, диапазон регулирования которых определяется ограничениями типа обратной связи:

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_l(t)) \in V\left(z\left(t,\cdot\right)\right),\ t \in [0,T], \tag{5.3.1}$$

где $V : L^2(\mathbb{R}) \to Kv(\mathbb{R}^l)$ - п.н.с. мультиотображение удовлетворяющее условию глобальной ограниченности

$$\|V(z)\| \leq M, \tag{5.3.2}$$

для всех $z \in L^2(\mathbb{R})$, где $M > 0$;

(H_2) обозначая $y(t) = z(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, будем полагать также, что процесс диффузии подвержен в моменты $0 < t_1 < ... < t_m < T,\ m \geq 1$, импульсным воздействиям (4.1.3), где отображения $\mathcal{I}_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяют условиям $(\mathcal{I}_1),\ (\mathcal{I}_2)$;

(H_3) наконец, предполагая процесс управляемым, мы будем считать, что управляющие функции выбираются по правилу $u(\cdot) \in L^p(I, U),\ p > 1/\alpha$, где U - гильбертово пространство управлений. Реализация управляющих воздействий осуществляется с помощью ограниченного линейного оператора $B : U \to L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, считая для простоты коэффициент дробной диффузии $C^{(\alpha)} = 1$, мы получаем, что процесс описывается следующими соотношениями:

$$D^\alpha z(t,x) = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial^2 x} + \sum_{i=1}^{l} v_i(t)\varphi_i\left(x, z\left(t,x\right)\right) + Bu(t), \tag{5.3.3}$$

$$z(t, \pm\infty) = 0,\ t \in [0,T], \tag{5.3.4}$$

$$z(0,\cdot) = z_0 \in L^2(\mathbb{R}), \tag{5.3.5}$$

где $t \in [0,T],\ \alpha \in (0,1)$, и подчиняется также условиям импульсных воздействий (4.1.3).

Будем предполагать, что функции φ_i $(i = 1, ..., l)$ удовлетворяют следующим условиям:

$(\varphi 1)$ $\varphi_i(\cdot, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима для любого $z \in \mathbb{R}$;

$(\varphi 2)$ $|\varphi_i(x,z)| \leq \rho_i$, для любого $z \in \mathbb{R}$, где $\rho_i \in L^2_+(\mathbb{R})$;

$(\varphi 3)$ $|\varphi_i(x,z_0) - \varphi_i(x,z_1)| \leq k_i \left|z_0 - z_1\right|$, для любых $x \in \mathbb{R},\ z_0, z_1 \in \mathbb{R}$, где k_i не зависят от x.

Рассмотрим мультифункцию $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \multimap L^2(\mathbb{R})$,

$$\Phi(z', z'') = \left\{ \sum_{i=1}^{l} v_i \varphi_i(x, z''(x)) :\ v \in V(z') \right\}.$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение Φ имеет выпуклые замкнутые значения.

Зафиксируем z' и рассмотрим произвольную функцию $\sigma_0 \in \Phi(z', z_0'')$. Она имеет вид $\sigma_0(x) = \sum_{i=1}^{l} v_i \varphi_i(x, z_0''(x)),\ v \in V(z')$. Возьмем функцию $\sigma_1 \in \Phi(z', z_1'')$ вида $\sigma_1(x) = \sum_{i=1}^{l} v_i \varphi_i(x, z_1''(x)),\ v \in V(z')$. Тогда, применяя условие ($\varphi 3$), получим:

$$\|\sigma_0 - \sigma_1\|_{L^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{l} v_i^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi_i(x, z_0''(x)) - \varphi_i(x, z_1''(x))|^2 \, dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{l} v_i^2 k_i^2 \int_{\mathbb{R}} |z_0''(x) - z_1''(x)|^2 \, dx} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{l} v_i^2 k_i^2} \, \|z_0'' - z_1''\|_{L^2} \leq kM \, \|z_0'' - z_1''\|_{L^2},$$

где $k = \max_{1 \leq i \leq l} k_i$.

Отсюда вытекает, что мультиотображение $\Phi(z', z'')$ является по второму аргументу kM-липшицевым относительно метрики Хаусдорфа.

Зафиксируем теперь z''. Из полунепрерывности сверху мультиотображения V вытекает, что мультиотображение $\Phi(\cdot, z'')$ полунепрерывно сверху. Кроме того, для любого подмножества $\Delta \subset L^2(\mathbb{R})$ множество $\Phi(\Delta, z'') \subset L^2(\mathbb{R})$ является ограниченным подмножеством линейной оболочки функций $\varphi_1(\cdot, z''(\cdot)), ..., \varphi_l(\cdot, z''(\cdot))$ и поэтому относительно компактно.

Это означает (см. лемму 1.2.6 и лемму 1.2.7), что мультиотображение $F : L^2(\mathbb{R}) \to Kv(L^2(\mathbb{R})),\ F(y) = \Phi(y, y)$ полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию регулярности относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ в $L^2(\mathbb{R})$:

$$\chi(F(\Omega)) \leq kM\chi(\Omega).$$

Отметим еще, что из условий (5.3.2) и ($\varphi 2$) вытекает ограниченность мультиотображения F константой $M \sum_{i=1}^{l} \|\rho_i\|_{L^2}$.

Таким образом, мы можем свести задачу к вопросу об управляемости для дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве $E = L^2(\mathbb{R})$:

$$D^{\alpha} y(t) \in Ay(t) + F(y(t)) + Bu(t), \; t \in [0, T]. \tag{5.3.6}$$

Здесь A обозначает оператор Лапласа $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ с областью определения $D(A) = \left\{ y \in H^2(\mathbb{R}) : \; y(\pm\infty) = 0 \right\}$, где $H^2(\mathbb{R})$ - пространство функций Соболева.

Известно (см., например, [32]), что оператор A порождает на $L^2(\mathbb{R}^n)$ полугруппу диффузии вида:

$$e^{At} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\xi - r|^2}{4t^2}} f(r) dr. \tag{5.3.7}$$

Таким образом, условие разрешимости линейной задачи управляемости, соответствующей (5.3.6), может быть записано как условие обратимости линейного оператора $W : L^p(I, U) \to L^2(\mathbb{R})$,

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-s)} (T-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds,$$

для которого считаем выполненным условие (W).

Поскольку полугруппа (5.3.7) сжимающая (см. [32]), мы можем положить $J^{(\chi)} = 1$. Тогда условие уплотняемости интегрального мультиоператора (5.1.7) имеет вид:

$$\frac{2T^{\alpha} kM}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{2T^{\alpha} kM M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) < 1.$$

Таким образом, из теоремы 5.1.1 вытекает, что при вышеуказанных условиях процесс дробной диффузии управляем.

Список литературы

[1] Ахмеров Р. Р. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский.- Новосибирск: Наука, 1986.- 266 с.

[2] Борисович Ю. Г. Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Издание 2-е, испр. и доп.-М: Книжный дом «Либроком», 2011.- 224 с.

[3] Борисович Ю.Г. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Успехи мат. наук.- 1980.- Т. 35, № 1.- С. 59-126.

[4] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.-М: Наука, 1976.- 544 с.

[5] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский.- М.: Гостехиздат., 1956.- 392 с.

[6] Красносельский М.А. Векторные поля на плоскости / М.А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко.- М.: Физматгиз, 1963.- 248 с.

[7] Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко.- М.: Наука, 1975.- 322 с.

[8] Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев.- М: Наука, 1965.- 520 с.

[9] Обуховский В.В. О некоторых принципах неподвижной точки для многозначных уплотняющих операторов / В.В. Обуховский // Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та.-Воронеж.- 1971.- Вып. 4.- С. 70-79.

[10] Петросян Г.Г. О существовании решения для дифференциального уравнения с дробной производной и нелинейным граничным условием / Г.Г. Петросян // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXII". - Воронеж: Издательство ВГУ. - 2011. - С. 143.

[11] Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. - 2012. - №2, - С. 207-212.

[12] Петросян Г.Г. О задаче Коши для дифференциального включения с дробной производной и импульсными характеристиками в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. - Воронеж: издательско-полиграфический центр "Научная книга". - 2012.- С. 24-29.

[13] Петросян Г.Г. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве / В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. - 2013. - №1, - С. 192-209.

[14] Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной и импульсными характеристиками в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ. - Воронеж: Издательство ВГУ. - 2013. - С. 185-187.

[15] Петросян Г.Г. О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования. - Москва: Типография РУДН. - 2013. - С. 316-317.

[16] Петросян Г.Г. О задаче управляемости для одного класса полулинейных функционально-дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2013. - Т.18. - вып. 5. - С. 2632-2634.

[17] Петросян Г.Г. О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками / Г.Г. Петросян // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXIV". - Воронеж: Издательство ВГУ. - 2013. - С. 145-147.

[18] Петросян Г.Г. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка содержащего полунепрерывное

снизу мультиотображение / Г.Г. Петросян // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. - Воронеж: Издательство "Наука-юнипресс". - 2013. - С. 123-125.

[19] Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2013. - Т.18. - вып. 6. - С. 3129-3143.

[20] Самко С.Г. Интегралы и прозводные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.- Минск: Наука и техника, 1987.- 688 с.

[21] Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна.- М: Наука, 1972.- 544 с.

[22] Шварц Л. Анализ / Л. Шварц.- Т. 1.- М: Мир, 1972.- 826 с.

[23] Abbas S. Topics in Fractional Differential Equations / S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guerekata.- Developments in Mathematics, Springer, New York, 2012.- 396 p.

[24] Balachandran K. Controllability of Nonlinear Systems in Banach Spaces: a Survey / K. Balachandran, J. P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. 115 (1).- 2002.- P. 7-28.

[25] Baleanu D. Fractional Calculus Models and Numerical Methods / D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo.- World Scientific Publishing, New York, 2012.- 400 p.

[26] Benchohra M. Impulsive Differential Equations and Inclusions / M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas.- Contemporary Mathematics and Its Applications, 2, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.- 370 p.

[27] Benchohra M. Controllability Results for Semilinear Evolution Inclusions with Nonlocal Conditions / M. Benchohra, E. Gatsori, S. Ntouyas // Journal of Optim. Theory and Applic.: Vol. 118, № 3.- 2003.- P. 493-513.

[28] Benedetti I. Controllability for Impulsive Semilinear Functional Differential Inclusions with a Non-compact Evolution Operator / I. Benedetti, V. Obukhovskii, P. Zecca // Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization.- 2011.- P. 39-69.

[29] Cardinali T. Nonlocal Cauchy Problems and Their Controllability for Semilinear Differential Inclusions with Lower Scorza-Dragoni Nonlinearities / T. Cardinali, F. Portigiani // Czechoslovak Mathematical Journal, 61 (136).- 2011.- P. 225-245.

[30] Diestel J. Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$ / J. Diestel, W.M. Ruess, W. Schachermayer // Proc. Amer. Math. Soc. 118.- 1993.- P. 447-453.

[31] Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm.- Springer-Verlag, Berlin, 2010.- 252 p.

[32] Engel K.-J. A Short Course on Operator Semigroups / K.-J. Engel, R. Nagel.- Springer, Berlin, 2006.- 250 p.

[33] Hale J. K. Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay / J. K. Hale, J. Kato // Funkcial. Ekvac. no. 1, 21.- 1978.- P. 11-41.

[34] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations / D. Henry // Lecture Notes in Math., 840, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1981.- 348 p.

[35] Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer.- World Scientific, Singapore, 2000.- 429 p.

[36] Hino Y. Functional Differential Equations with Infiniti Delay / Y. Hino, S. Murakami, T. Naito.- Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1473, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[37] Kamenskii M. On Some Topological Methods in Theory of Neutral Type Operator Differential Inclusions with Applications to Control Systems / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, J.-C. Yao // Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. 33, 2013.- P. 193-204.

[38] Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca.- de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin - New-York, 2001.- 231 p.

[39] Ke T.D. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays / T.D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong, J.-C. Yao // Applicable Analysis, Volume 92, Number 1.- 2013.- P. 115-137.

[40] Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.- North-Holland

Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.- 540 p.

[41] Lakshmikantham V. Theory of Fractional Functional Differential Equations / V. Lakshmikantham // Nonlinear Anal. 69, no. 10.- 2008.- P. 3337-3343.

[42] Lakshmikantham V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov.- Series in Modern Applied Mathematics, 6, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989.- 273 p.

[43] Lakshmikantham V. Basic Theory of Fractional Differential Equations / V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala // Nonlinear Anal. 69, no. 8.- 2008.- P. 2677-2682.

[44] Miller K.S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K.S. Miller, B. Ross.- John Wiley, Inc., New York, 1993.- 384 p.

[45] Obukhovskii V. Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations / V. Obukhovskii, J.-C. Yao // Fixed Point Theory, 11, No.1.- 2010.- P. 85-96.

[46] Obukhovskii V. Controllability for Systems Gaverned by Semilinear Differential Inclusions in a Banach Space with a Non-compact Semigroup / V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Analysis, 70.- 2009.- P. 3424-3436.

[47] Perestyuk N.A. Differential Equations with Impulse Effects / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.A. Skripnik.- Multivalued Right-Hand Sides With Discontinuities. de Gruyter Studies in Mathematics, 40. Walter de Gruyter Co., Berlin, 2011.- 307 p.

[48] Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny.- Academic Press, San Diego, 1999.- 340 p.

[49] Qin Y. Nonlinear Parabolic-Hyperbolic Coupled Systems and Their Attractors / Y. Qin.- Operator Theory: Advances and Applications, 184. Advances in Partial Differential Equations (Basel). Birkhauser Verlag, Basel, 2008.- 480 p.

[50] Tarasov V.E. Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V.E. Tarasov.- Nonlinear Physical Science, Springer, Heidelberg; Higher Education Press, Beijing, 2010.- 504 p.