На правах рукописи

Родикова Евгения Геннадьевна

Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж 2014

Работа выполнена в Брянском государственном университете имени академика И. Г. Петровского.

<table>
<tr><td>Научный руководитель:</td><td>доктор физико–математических наук,
профессор Шамоян Файзо Агитович.</td></tr>
<tr><td>Официальные оппоненты:</td><td>Широков Николай Алексеевич,
доктор физико–математических наук,
Санкт-Петербургский
государственный университет,
кафедра математического анализа,
заведующий;

Охлупина Ольга Валентиновна,
кандидат физико–математических наук,
Брянская государственная
инженерно-технологическая академия,
кафедра математики, доцент.</td></tr>
<tr><td>Ведущая организация:</td><td>Санкт-Петербургское отделение
Математического института
имени В. А. Стеклова.</td></tr>
</table>

Защита диссертации состоится «16» сентября 2014 г. в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» по адресу 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/274/disser_Rodikova_EG.pdf

Автореферат разослан «   » июня 2014 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Гликлих Ю. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из важнейших направлений исследований в современном комплексном анализе является построение факторизационных представлений весовых классов аналитических функций. Помимо того, что результаты этих исследований имеют самостоятельный интерес, они также широко применяются при решении различных задач комплексного и функционального анализа: при изучении граничных свойств классов аналитических функций, в вопросах теории интерполяции, в задачах аппроксимации, в теории операторов и т.д. Истоки теории факторизации лежат в классических работах К. Вейрштрасса, Ж. Адамара, Ф. Бореля, В.В. Голубева, посвященных факторизации целых функций, и в работах Р. Неванлинны, В.И. Смирнова о представлении функций ограниченного вида и классов Харди. Интерес к этим проблемам не иссякает и в настоящее время. В последние десятилетия были написаны несколько монографий по этой тематике: М.М. Джрбашяном (1966 г.), А.Е. Джрбашяном и Ф.А. Шамояном (1988 г.), Г. Хеденмальмом, Б. Коренблюмом и К. Жу (2000 г.), К. Сейпом (2004 г.), Ф.А. Шамояном и Е.Н. Шубабко (2009 г.). При построении факторизационных представлений существенное значение имеет характеризация корневых множеств соответствующих классов аналитических функций. По этой проблеме опубликованы многочисленные работы отечественных и зарубежных ученых: У. Хеймана, С. Линдена, М. Цудзи, Ф.А. Шамояна, Н.А. Широкова, Б.Н. Хабибуллина, Б.И. Коренблюма, К. Сейпа, Г. Хеденмальма, А. Боричева, и др. На основании вышеизложеного можно заключить, что выбранная тема диссертационного исследования весьма актуальна.

Приведём обзор некоторых результатов, тесно связанных с тематикой диссертационной работы. Для этого введём необходимые обозначения.

Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Символом Z_f будем обозначать множество всех корней ненулевой функции f, $n(t)$ — количество нулей функции f в круге $|z| < t$, $a^+ = \max(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

В 20-е годы прошлого столетия в работах одного из классиков комплексного анализа Р. Неванлинны было введено понятие характеристической функции, явившееся основопологающим для всей теории аналитических функций: Пусть $f \in H(D)$, характеристикой Р. Неванлинны называется функция

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

где $0 < r < 1$.

Классом Р. Неванлинны или классом функций ограниченного вида называется множество N функций $f \in H(D)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} T(r, f) < +\infty.$$

Р. Неванлинна построил факторизационное представление класса N:
Класс N совпадает с множеством функций $f \in H(D)$, допускающих представление вида

$$f(z) = e^{i\gamma} z^{\lambda} B(z, z_k) \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(\theta) \right\},$$

где $B(z, z_k) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$ — произведение Бляшке,$\{z_k\}$ — последовательность точек из D, удовлетворяющая условию Бляшке:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty, \tag{1}$$

ψ — вещественная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Этот результат нашел многочисленные приложения в ряде разделов комплексного, гармонического и функционального анализа.

В 1999 г. Ф. А. Шамоян ввел в рассмотрение классы

$$S^p_\alpha := \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1 - r)^\alpha T^p(r, f) dr < +\infty \right\}, \ \alpha > -1,$$

которые обобщили известный класс Неванлинны-Джрбашяна $S_\alpha = S^1_\alpha$, получил полное описание корневых множеств и построил факторизационное представление этих классов функций при всех $0 < p < +\infty$.

В 1964 г. М.М. Джрбашян поставил задачу обобщить теорию Р. Неванлинны. Им была введена новая характеристическая функция $T_\alpha(r, f)$: для любой $f \in H(D)$, $\alpha > -2$

$$T_\alpha(r, f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi \cdot \Gamma(\alpha + 1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r - t)^\alpha \ln |f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi,$$

где Γ — функция Эйлера.

В этой же работе М. Джрбашяном введен класс N_α аналитических в D функций с ограниченной α-характеристикой, охарактеризованы нулевые множества и получено параметрическое представление указанного класса функций.

На основании вышеизложенного, естественно определить класс

$$N^p_{\alpha,\gamma} := \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T^p_\alpha(r,f)dr < +\infty \right\}, \, \alpha > -1, \, \gamma > -1.$$

Естественным образом возникает необходимость характеризации корневых множеств и построения факторизационного представления класса $N^p_{\alpha,\gamma}$ при всех $0 < p < +\infty$.

В последние годы внимание ряда специалистов в области комплексного анализа приковано к проблеме описания корневых множеств весовых классов аналитических в единичном круге функций, растущих вблизи части его границы. Интерес к этой проблеме объясняется в том числе и важностью приложений этих результатов в спектральной теории линейных операторов, теории возмущений и др.

Пусть E — конечное множество точек на единичной окружности $\mathbb{T}$, $\rho(z,E) = dist(z,E)$ – расстояние от произвольной точки $z \in D$ до множества E. Введем в рассмотрение класс

$$H_\varphi(E) = \left\{ f \in H(D) : \ln|f(z)| \leq c_f \varphi\left(\frac{1}{\rho(z,E)}\right), z \in D \right\},$$

где φ - монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$.

В том случае, когда E состоит из одной точки и $\varphi(t) = t^q$, $0 < q < 1$, характеризация корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ была получена в работах М.М. Джрбашяна, Х. Шапиро и А. Шилдса. Для случая $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = \ln t$ результат окончательного характера был получен К. Сейпом. Полное описание корневых множеств и факторизационное представление класса $H_\varphi(E)$, $E = \mathbb{T}$, в случае более общих весов получено еще в 80-х гг. Ф.А. Шамояном. Отметим также работы Б.Н. Хабибуллина и его соавторов в этом направлении.

В 2009 г. для случая, когда $E \subset \mathbb{T}$ — конечное множество точек на единичной окружности, в работе А. Боричева и его соавторов было установлено следующее утверждение:

Если $f \in H_\varphi(E)$, $\varphi(t) = t^q$, $q \geq 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность нулей *функции f, то сходится ряд:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\rho(z_k,E))^{(q-1+\varepsilon)^+}(1-|z_k|)<+\infty,$$

где ε – сколь угодно малое положительное число.

В недавних работах Л. Голинского, С. Купина, С. Фаворова последний результат был обобщен в различных направлениях. Однако полного описания корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ до сих пор не было получено. Естественно возникает необходимость окончательного решения этой задачи.

В начале 40-х годов прошлого века одним из классиков комплексного анализа И. И. Приваловым был введен в рассмотрение класс $\Pi_p\,(0<p<+\infty)$ аналитических в единичном круге функций, для которых:

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+|f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta<+\infty.$$

При $1\le p<+\infty$ справедливо включение $\Pi_p\subseteq N$, и из свойств произведения Бляшке следует, что корневые множества характеризуются условием Бляшке (1). Однако при $0<p<1$ условие Бляшке уже не является необходимым, более того — нулевые множества классов $\Pi_p\,(0<p<1)$ существенно зависят от значения параметра p, как установлено в 2008 г. в работе Ф. А. Шамояна и его соавторов. Вопрос получения полного описания корневых множеств указанного класса функций до сих пор остается открытым.

Как было отмечено выше, факторизационные представления находят многочисленные приложения в решении различных проблем комплексного анализа. Одной из них является задача интерполяции. Теория интерполяции в различных классах голоморфных функций стала интенсивно развиваться после основополагающей работы Л. Карлесона о свободной интерполяции в классе ограниченных аналитических функций в круге. Термин «свободная интерполяция» впервые был введен в работе С.А. Виноградова и В.П. Хавина (1974 г.) при решении интерполяционной задачи в подклассах классов N функций ограниченного вида. Задача интерполяции в классах Р. Неванлинны и В. И. Смирнова была решена в работах А. Г. Нафталевича, А. Хартмана и его соавторов, в классах Харди и Бергмана - в работах Х. Шапиро и А. Шилдса, К. Сейпа. Отметим, что изменение класса функций, в котором решается задача интерполяции, влечет существенные изменения в методах ее решения. Ввиду прикладной значимости результатов в этой области исследований, проблема описания следов различных классов аналитических функций остается весьма актуальной.

При исследовании вопросов интерполяции часто появляется необходимость в доказательстве теорем вложения. Впервые теоремы вложения в классах Харди были установлены Л. Карлесоном. Доказательству теорем вложения в пространствах Бергмана посвящены работы отечественных математиков В. Л. Олейника и Б. С. Павлова. Появление новых классов функций влечет за собой необходимость в доказательстве для них теорем вышеуказанного типа.

Одной из классических задач в комплексном анализе является оценка скорости роста функции и коэффициентов ее разложения в ряд Тейлора. Она имеет существенные приложения в вопросах описания сопряженных пространств к пространствам аналитических функций, в теории теплицевых операторов, при описании мультипликаторов и т.д.

В середине прошлого столетия указанная задача в классе функций ограниченного вида была решена С. Н. Мергеляном. Аналог этого результата в классе Неванлинны-Джрбашяна S_α получил С. В. Шведенко в 1986 г. Точных оценок модуля и коэффициентов разложения функции из класса S_α^p, введенного Ф.А. Шамояном, до сих пор не было получено.

Цель работы.

1. Характеризация корневых множеств и построение факторизационных представлений весовых классов аналитических в круге и в полуплоскости функций.

2. Решение интерполяционной задачи, доказательство теорем вложения в весовых классах аналитических в круге функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны и описание коэффициентных мультипликаторов из классов аналитических в круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых принадлежит L^p-весовым пространствам, в классы Харди.

Методы исследования. В работе применяются общие методы комплексного и функционального анализа, а также специальные методы, основанные на факторизационных и интегральных представлениях исследуемых классов.

Научная новизна.
В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Охарактеризованы корневые множества и построено факторизационное представление весовых классов аналитических в круге функций, α

- характеристика которых принадлежит L^p - весовым пространствам.

2. Получено полное описание корневых множеств весовых классов аналитических в единичном круге функций, допускающих рост вблизи конечного множества точек на граничной окружности.

3. Получено необходимое условие на нули функций из класса И.И. Привалова $\Pi_p\,(0 < p < 1)$, близкое к достаточному.

4. Охарактеризованы корневые множества и построено факторизационное представление весовых классов аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка.

5. В явном виде получено решение интерполяционной задачи в классе аналитических в круге функций со степенным ростом характеристики Р. Неванлинны.

6. Доказаны теоремы вложения для весовых классов аналитических в единичном круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых принадлежит L^p - весовым пространствам.

7. Описаны коэффициентные мультипликаторы из весовых классов аналитических в единичном круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых принадлежит L^p - весовым пространствам, в классы Харди.

Практическая и теоретическая значимость.
Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты исследования могут быть использованы в общей теории аналитических функций, в теории операторов и функциональных пространств, а также могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей университетов.

Апробация результатов диссертации.
Основные результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 2011 г.), «Комплексный анализ и приложения» (Петрозаводск, 2012 г.), «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2013 г.), на Воронежской зимней математической школе (2013 г.), на Саратовской зимней математической школе (Саратов, 2012 г., 2014 г.), на Воронежской весенней математической школе (2014 г.), а также неоднократно на семинарах по комплексному анализу Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского.

Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержана грантом РФФИ (проект №13-01-97508).

Публикации.

Результаты исследований нашли отражение в работах: [1]–[14]. Работы [1]–[5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В совместных работах [3, 5, 8, 10, 13] научному руководителю принадлежат постановка задачи и идея доказательства.

Структура и объем диссертации.

Работа состоит из введения, двух глав, разбитых в общей сложности на 8 параграфов, и списка использованной литературы. Работа занимает 121 страницу. Библиография содержит 60 наименований.

Содержание диссертации.

Во *введении* излагается история вопроса, обосновывается актуальность темы и кратко излагается содержание работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена вопросам факторизации и характеризации корневых множеств весовых классов аналитических функций.

Для формулировки основных результатов введем дополнительные обозначения. Следуя М.М. Джрбашяну, введем бесконечное произведение $\pi_\beta(z,\alpha_k)$, $\beta > -1$, с нулями в точках последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$:

$$\pi_\beta(z,\alpha_k) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\exp(-U_\beta(z,\alpha_k)),$$

где

$$U_\beta(z,\alpha_k) = \frac{2(\beta+1)}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\beta \ln|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\alpha_k}|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}}d\theta\rho d\rho,$$

а также функцию

$$n_\alpha(r,f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)}\int_0^r (r-t)^{\alpha+1}\cdot\frac{n(t)-n(0)}{t}dt + \frac{n(0)}{\Gamma(\alpha+2)}\ln r.$$

Обозначим $B^s_{1,p}$ — класс О. Бесова на единичной окружности порядка $s > 0$.

В *первом параграфе* первой главы получено полное описание корневых множеств класса $N^p_{\alpha,\gamma}(\alpha > -1, \gamma > -1)$ при всех $0 < p < +\infty$ и построено факторизационное представление указанного класса функций.

Теорема 1.1. *Для того чтобы последовательность точек* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *единичного круга являлась корневым множеством некоторой тождественно отличной от нуля функции* $f \in N^p_{\alpha,\gamma}$ $(0 < p < +\infty)$, *необходимо* *и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_{\alpha,k}^{p}}{2^{k(\gamma+1)}} < +\infty, \tag{2}$$

где $n_{\alpha,k} = n_\alpha\left(1 - \frac{1}{2^k}, f\right)$.

Теорема 1.2. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $f \in N_{\alpha,\gamma}^{p}$;
2. $f(z)$ *может быть представлена в виде:*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1 - e^{-i\theta}z)^{\beta+1}}\right), \; z \in D,$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из* D*, удовлетворяющая условию* (2), $\pi_\beta(z, z_k)$ *- произведение М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\psi \in B_{1,p}^{s}$, $s = \beta - (\alpha + 1) - \frac{\gamma+1}{p}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $c_\lambda \in \mathbb{C}$.

Во *втором параграфе* первой главы получено полное описание корневых множеств весовых классов $H_\varphi(E)$ аналитических в единичном круге функций, допускающих рост вблизи конечного множества точек $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1}$ на его границе. Установлены следующие результаты:

Теорема 1.3. *Пусть* φ *– монотонно возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$*, такая что существует*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi.$$

Если $f \in H_\varphi(E)$ *и* $Z_f = \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$*, то для любого* $R > 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\frac{1}{R} \le \rho(z_n, E) \le 2} (1 - |z_n|^2) \le c_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int_1^R \frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right). \tag{3}$$

Обратно,

а) *если* $\alpha_\varphi \notin \mathbb{Z}_+$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из* D*, удовлетворяющая условию* (3),

б) *если* $\alpha_\varphi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из* D*, удовлетворяющая, наряду с условием* (3)*, условию*

$$\max_{0\le k\le m-1} \left| \sum_{\frac{1}{R} \le \rho(z_n, E) \le 2} \left(i\frac{e^{i\tau_k} + z_n}{e^{i\tau_k} - z_n}\right)^{-\alpha_\varphi} \right| \le M, \; M > 0,$$

причем
$$\sup_{x>1} \frac{x^{\alpha_\varphi}}{\varphi(x)} < +\infty,$$
тогда можно построить функцию $g \in H_\varphi(E)$, нули которой совпадают с точками последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

В **теореме 1.4** получено необходимое и достаточное условие на мажоранту φ, при котором корневые множества функций из класса $H_\varphi(E)$ удовлетворяют условию Бляшке.

В *третьем параграфе* первой главы исследуются нулевые множества функций из класса И. И. Привалова. В частности, доказано следующее утверждение:

Теорема 1.6. *Если f — тождественно отличная от нуля функция из класса $\Pi_p\,(0 < p < 1)$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, ...$, то*
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\frac{1}{p}} \ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \left(\frac{1}{1-|z_k|}\right) < +\infty,$$
при любом положительном $\varepsilon > 0$.

Как следует из вышеупомянутых результатов Ф. А. Шамояна и его соавторов (2008 г.), полученное условие близко к точному.

Последующие параграфы первой главы посвящены описанию корневых множеств и построению факторизационного представления аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка.

Пусть C_+ -— верхняя полуплоскость комплексной плоскости, φ — монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$, $\varphi \in C^1(0, +\infty)$. Если
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = +\infty,$$
то будем называть φ *весовой.*

Введем в рассмотрение класс $X_\varphi^\infty(C_+)$ аналитических в верхней полуплоскости функций, для которых
$$\ln|f(z)| \le A_f \varphi(B_f|z|), z \in C_+,$$
где A_f, B_f - положительные постоянные, значения которых зависят только от функции f.

В *четвертом параграфе* первой главы, в частности, установлена справедливость следующего утверждения:

Теорема 1.8. *Пусть φ — весовая функция, $\ln\varphi$ выпукла вниз. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in X_\varphi^\infty(C_+)$;

2. $\exists\, c_1 > 0 :\ \forall\, 0 < R < 1$ *справедливо*

$$\sum_{0<\rho<r_n\le R} \frac{\sin\theta_n}{r_n} < c_1 \frac{\varphi(c_2 R)}{R},$$

где константа c_1 зависит только от последовательности $\{z_n\}$.

Первый параграф второй главы диссертационной работы посвящен приложению факторизационных представлений к решению задачи свободной интерполяции в классе S_α^∞, $\alpha > 0$:

$$S_\alpha^\infty := \left\{ f \in H(D) : T(r,f) \le \frac{C_f}{(1-r)^\alpha} \right\},$$

где $C_f > 0$, $r \in [0,1)$.

Хорошо известно, если $f \in S_\alpha^\infty$, то

$$M(r,f) = \max_{|z|\le r} |f(z)| \le \exp\left\{ \frac{c_f}{(1-r)^{\alpha+1}} \right\}$$

при всех $\alpha > 0$, $c_f > 0$.

Поэтому если $f \in S_\alpha^\infty$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — последовательность точек из единичного круга, то оператор $R(f) = (f(\alpha_1), ..., f(\alpha_k), ...)$ отображает класс S_α^∞ в класс весовых последовательностей

$$l_\alpha = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \le \exp \frac{\lambda}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, \lambda > 0 \right\}.$$

Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем *интерполяционной последовательностью* в классе S_α^∞, если $R(S_\alpha^\infty) = l_\alpha$.

Обозначим $\Gamma_\delta(\theta)$ — угол Штольца с вершиной в точке $e^{i\theta}$ раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$.

В *первом параграфе* второй главы установлен следующий результат:

Теорема 2.1. *Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел из D, расположенных в конечном числе углов Штольца:*

$$\{\alpha_k\} \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s),$$

при некотором $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+1}$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - *интерполяционная последовательность в классе S_α^∞, $\alpha > 0$;*

2.
$$n(r) = \{card\,\alpha_k : |\alpha_k| < r\} \le \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

для некоторого $c > 0$;

$$|\pi'_\beta(\alpha_n, \alpha_k)| \ge \exp\frac{-M}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}},$$

для некоторого $M > 0$ и при всех $\beta > \alpha - 1$.

Пусть Ω – множество всех измеримых положительных функций на $(0,1]$, для которых существуют числа m_ω, q_ω из $(0,1]$, M_ω такие что

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega,\ r \in (0,1],\ \lambda \in [q_\omega, 1].$$

Для всех $0 < p < +\infty$ и $\omega \in \Omega$ введем в рассмотрение класс функций:

$$S^p_\omega = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p(r,f)dr < +\infty \right\}.$$

Во *втором параграфе* второй главы доказаны теоремы вложения пространств S^p_ω в весовые L^p-пространства при всех $0 < p < +\infty$.

Для формулировки результата этого параграфа введем также следующие обозначения. Пусть $l \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, положим

$$\Delta_l(\theta) = \left\{ z \in D : 1 - l < |z| < 1,\ |\arg z - \theta| \le \frac{l}{2} \right\},$$

то есть $\Delta_l(\theta)$ — прямоугольник Л. Карлесона. Справедлива

Теорема 2.2. *Пусть μ — конечная неотрицательная борелевская мера в единичном круге D, $1 \le p < +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\int\limits_D \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p d\mu(\zeta) \le C \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p(r,f)dr,\ f \in S^p_\omega,$

2. $\mu(\Delta_l(\theta)) \le C_1 \cdot \omega(l) \cdot l^{p+1}$, *при всех* $\theta \in [-\pi, \pi]$, $l \in (0,1)$.

При $0 < p < 1$ характеризация мер имеет другой вид, как доказано в **теореме 2.3**.

В *третьем параграфе* второй главы получены точные оценки максимума модуля и коэффициентов Тейлора функции из класса S^p_α. На основе этих оценок полностью описаны коэффициентные мультипликаторы из этого класса в классы Харди H^p.

Пусть X — некоторый класс аналитических в единичном круге D функций. Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем коэффициентным *мультипликатором* из класса S_α^p в класс X, если для произвольной функции $f \in S_\alpha^p$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция $\Lambda(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in X$.

Установлено следующее утверждение:

Теорема 2.6. *Пусть X совпадает с одним из следующих классов: $S_\beta^p\,(-1 < \beta < \alpha)$ или $H^p\,(0 < p \leq \infty)$. Тогда для того чтобы последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ являлась коэффициентным мультипликатором из класса S_α^p в класс X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right),\ c > 0,\ k \to +\infty.$$

Автор выражает искренную благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Родикова, Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств аналитических в верхней полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка / Е.Г. Родикова // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2011. — №4. — С. 36–44.

2. Родикова, Е.Г. О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2012. — №4. — С. 61–69.

3. Родикова, Е.Г. L^p-оценки в классах аналитических в круге функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны / Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2012. — №4. — С. 80-86.

4. Родикова, Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций [Электронный ресурс] / Е.Г. Родикова // Сибирские электронные математические известия. — 2014. — С. 52-63. — Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru

5. Rodikova, E.G. On interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic / F.A. Shamoyan, E.G. Rodikova // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Матем. и физ. — Красноярск: Изд. СФУ— 2014. — Т. 7. —Вып. 2 —С. 235–243.

6. Родикова, Е.Г. Вещественные корни для класса аналитических в правой полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка / Е.Г. Родикова // Материалы XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2011. — Вып. 12 — С. 250-252.

7. Родикова, Е.Г. О нулях аналитических классов И.И. Привалова / Е.Г. Родикова // Материалы Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» — Саратов: изд-во «Научная книга». — 2012. — С. 141-142.

8. Родикова, Е.Г. Свободная интерполяция в классах аналитических в круге функций с ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны / Е.Г. Родикова, Ф.А. Шамоян // Материалы Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» — Саратов: изд-во «Научная книга». — 2012. — С. 139-141.

9. Родикова, Е.Г. Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения» — Петрозаводск: ПетрГУ. — 2012. — С. 64-69.

10. Родикова, Е.Г. L^p-оценки в классах аналитических в круге функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны / Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» — Воронеж: ВГУ. — 2013. — С. 280-281.

11. Родикова, Е.Г. О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» — Воронеж: ВГУ. — 2013. — С. 205.

12. Родикова, Е.Г. О нулях одного весового класса аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы международной XI Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» — Казань: Казан. ун-т. — 2013. — С. 385-387.

13. Родикова, Е.Г. Условие типа Бляшке для одного класса аналити-

ческих в круге функций / Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова // Материалы 17-й международной Саратовской зимней математической школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова — Саратов: изд-во «Научная книга». — 2014. — С. 295-296.

14. Родикова, Е.Г. Факторизационное представление класса аналитических в круге функций с α - характеристикой из L^p - пространств / Е.Г. Родикова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXV» —Воронеж: изд. центр «Научная книга». — 2014. — С. 146-147.

Работы [1]–[5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Родикова Евгения Геннадьевна

Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Подписано в печать 17.06.2014 г. Формат 60x84/16
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 1 Тираж 100 экз. Заказ № 17/06.
РИО Брянского государственного университета
имени академика И.Г. Петровского,
241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 20