На правах рукописи

Рощупкин Сергей Александрович

СИНГУЛЯРНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2014

Работа выполнена в

Елецком государственном университете им. И.А. Бунина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Ляхов Лев Николаевич**.

Официальные оппоненты:

Алхутов Юрий Александрович, доктор физико-математических наук, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, кафедра математического анализа, профессор.

Ситник Сергей Михайлович, кандидат физико-математических наук, Воронежский институт МВД России, кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация:

Югорский государственный университет.

Защита состоится 16 сентября 2014 г. в 16.30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/275/disser_Roschupkin_SA.pdf

Автореферат разослан «   » июня 2014.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор физико-математических наук, профессор

Гликлих Ю.Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Псевдодифференциальные операторы или сингулярные интегродифференциальные операторы, впервые появились в работах С.Г. Михлина, А.Р. Кальдерона, А. Зигмунда, Р. Сили и др., как синтез сингулярных интегральных и дифференциальных операторов (сокращенно — СИД операторы). Распространение эллиптической теории на эти операторы и их применение для изучения индекса принадлежит А.С. Дынину (1961 г.). М.С. Агранович (1965 г.) исследовал эллиптические СИД операторы на многообразиях, использовал технику СИД операторов для вычислении индекса эллиптических граничных задач. По видимому, А.С. Дынину принадлежит идея создания алгебры СИД операторов. Дж. Кон и Л. Ниренберг в работе «Алгебра псевдодифференциальных операторов» (1965 г.) подошли к этим операторам с единой точки зрения, используя только технику преобразования Фурье. Именно эта работа и дала современное название теории СИД операторов, построенных на основе интегралов Фурье. Дальнейшее развитие теории псевдодифференциальных операторов (п.д.о.) осуществлено многими математиками, в первую очередь Л. Хермандером. Отметим также работы советских математиков В.В. Грушина, Ю.В. Егорова, М.И. Вишика, Л.Р. Волевича, В.П. Маслова, Б.П. Панеях, Г.И. Эскина, М.А. Шубина и многих других. Интерес к теории п.д.операторов связан с тем, что в ее рамках решение линейного дифференциального уравнения сводится к проблеме деления образа Фурье распределения на полином, что является задачей классического операционного исчисления, поэтому решение практически всех задач линейных дифференциальных уравнений оказываются в рамках применения интегралов Фурье. Но для исследования задач дифференциальных уравнений, содержащих элементы сферической симметрии, преобразование Фурье ограничено тем, что не может учесть эту симметрию. Такую роль могло бы выполнить преобразование, полученное из преобразования Фурье сферическим преобразованием координат. Этим преобразованием является частный случай преобразования Ганкеля, ядром которого является j-функция Бесселя $j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t) = C(\nu)\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$, отвечающая целому-полуцелому порядку $\nu > -1/2$. Преобразование, основанное на j-функциях Бесселя любого (т.е. не обязательно целого-полуцелого) порядка $\nu > -1/2$, введено в 1951 г. Б.М. Левитаном, который назвал его «преобразованием Фурье-Ганкеля». Первое применение этого преобразования к исследованию сингулярных дифференциальных уравнений осуществлено Я.И. Житомирским (1955), который ввел преобразование Фурье-Бесселя, ядро которого состояло из произведений j-функций Бесселя одного порядка. И.А. Киприянов (1967) применил смешанное преобразование Фурье-Бесселя для описания весовых функциональных классов Соболева и для доказательств соответствующих теорем вложения.

В 70-х годах по инициативе И.А. Киприянова сделана попытка создания теории сингулярных п.д.операторов (с.п.д.о.) на базе смешанного преобразования Фурье-Бесселя. Как оказалось такие операторы не обладают в полной мере свойствами обычных п.д.операторов. В частности не удалось построить алгебру по модулю операторов истинного порядка $-\infty$. Причина заключалась в том, что п.д.операторы, построены по классической схеме на базе смешанного преобразования Фурье-Бесселя не содержат дифференциальные операторы нечетного порядка (например первую производную). И.А. Киприянов и В.В. Катрахов в этой связи предприняли модернизацию преобразования Фурье-Бесселя, включив в ядро преобразования нечетную j-функцию Бесселя (равную производной от четной j-функции Бесселя). Такой подход позволил воспользоваться теорией операторов преобразования, сведя проблему построения алгебры с.п.д.операторов к существующей алгебре классических п.д.операторов. Как выяснилось, методика операторов преобразования хорошо срабатывала только для одномерных с.п.д.операторов. Поэтому, существенно сужалась область применения новой теории к исследованию сингулярных дифференциальных уравнений. В 2012 г. В.В. Катрахов и Л.Н. Ляхов построили алгебру многомерных сингулярных п.д.операторов по классической схеме Кона-Ниренберга. Эта работа открыла путь для исследования сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя, их степени и первую производную от степеней операторов Бесселя (∂_B-операторы Бесселя).

Применение теории п.д.о. для изучения эллиптических граничных задач для вырождающихся и сингулярных дифференциальных операторов, удовлетворяющих условию Я.Б. Лопатинского, было проведено в ряде работ, среди которых отметим работы воронежских математиков В.П. Глушко, И.А. Киприянова, Л.А. Иванова, В.В. Катрахова, М.И. Ключанцева, Л.Н. Ляхова и др. Постановка граничных задач для рассмотренных ими уравнений восходит к известной работе М.В. Келдыша и играет важную роль в задачах с осевой симметрией механики сплошной среды, в теории малых изгибаний поверхностей вращения, газовой динамики и т.д. Естественный интерес представляет применение многомерных псевдодифференциальных операторов Киприянова-Катрахова для построения современной эллиптической теории для рассматриваемых сингулярных и вырождающихся уравнений. Поэтому исследуемая тема, несомненно, актуальна.

Цель работы. Целью работы является:

1. Изучение классов основных функций и введения пространств функций и распределений наиболее приспособленных для работы с многомерным интегральным преобразованием Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова ($\mathcal{F}_B$-преобразования).

2. Представления действия линейного сингулярного дифференциального оператора с ∂_B-оператором Бесселя и сопряженного ему в весовом скалярном произведении функций в образах прямого и обратного $\mathcal{F}_B$-преобразований.

3. Ввести класс функций типа весового функционального пространства Соболева-Киприянова $H^s_\gamma(\mathbb{R}^+_N)$ на основе частных ∂_B-производных и с помощью $\mathcal{F}_B$-преобразования. Доказательство теоремы об эквивалентности норм при целых s.

4. Ввести класс многомерных сингулярных псевдодифференциальных (с.п.д.) операторов Киприянова-Катрахова с однородными символами $a(x;\xi)$, определенными в $\mathbb{R}_N \times \{\mathbb{R}_N \backslash \{\xi{=}0\}\}$, которые представляют собой гладкие, быстро убывающие функции при $|x| \to \infty$ при фиксированных ξ, $|\xi| = 1$ и обладающими непрерывными первыми производными по $\xi (\neq 0)$ при фиксированном x.

5. Изучение B-эллиптического $\mathcal{F}_B$-с.п.д.оператора с символом из Ξ^m_q и возможности существования априорной оценки решения B-эллиптического $\mathcal{F}_B$-с.п.д. уравнения в $\mathbb{R}_N$ и построение квазирегуляризатора этого оператора.

Научная новизна. Следующие результаты работы являются новыми:

1. Введено пространство основных функций S^+ представляющее собой подпространство пространства основных функций Шварца, наделенное топологией, порождаемой системой норм

$$|\langle\varphi\rangle|_k = \max\left(\sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}} \left|x^\alpha\, D^\beta_{B_\gamma}\,\varphi(x)\right|,\ \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}} \left|\, D^\beta_{B_\gamma}\,(x^\alpha\varphi(x))\right|\right),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, при этом выполнено условие одинаковой четности: $\alpha_i+\beta_i{=}2\ell_i$, $\ell_i = 0, 1, 2, \ldots,\quad i = 1, \ldots, n$, $n \leqslant N$. Доказано, что S^+ инвариантно относительно $\mathcal{F}_B$-преобразования. На основе S^+ вводятся пространства функций, исчезающих на сингулярных гиперплоскостях оператора Бесселя (типа пространства Лизоркина) и подклассы функций из S^+, представленных в виде сумм четных и первых производных от четных функций по переменным $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \leqslant N$.

2. Введены функциональные классы Соболева-Киприянова построенные на основе D_B-дифференцирования, и на основе $\mathcal{F}_B$-преобразования Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова. Доказана эквивалентность норм в этих пространствах, если показатель гладкости функций s — целое число.

3. Рассмотрен класс символов Ξ_q^m, построенный по аналогии с символами М.С. Аграновича. Для $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ при $q > \frac{N+|\gamma|}{2} + 1$ доказаны основные теоремы теории многомерных (смешанного типа) сингулярных псевдодифференциальных операторов Киприянова-Катрахова ($\mathcal{F}_B$-с.п.д.операторов): теорема о норме, теорема о сопряженном операторе, теорема о произведении $\mathcal{F}_B$-с.п.д.о. в шкале весовых пространств Соболева-Киприянова H_γ^s.

4. Получены априорные оценки B-эллиптических $\mathcal{F}_B$-с.п.д. уравнений. Построены квазирегуляризаторы (левый, правый) B-эллиптических $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов в евклидовом пространстве и полупространстве.

Методы исследования. В работе используются методы теории функций, функционального анализа, а также методы, развитые в работах научной школы И.А. Киприянова при исследовании весовых функциональных пространств и сингулярных дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и дает конструкции квазирегуляризатора B-эллиптического $\mathcal{F}_B$-с.п.д.оператора. Доказаны априорные оценки решений $\mathcal{F}_B$-с.п.д.уравнений из соответствующих функциональных классов. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении задач математической физики с центральной и осевыми симметриями, в задачах теории функций и функционального анализа.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались в Воронежской зимней математической школе в 2014 г., в школе молодых ученых Липецкой области «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания» в 2012 — 2013 гг., на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» в г. Белгород в 2013 г., на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» Республика Башкортостан, г. Стерлитамак в 2013 г., на Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики и анализа» в г. Новосибирск в 2012 г., на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздале в 2012 г. и 2014 г.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [1] — [11]. В совместно опубликованных работах [1] — [5] Л.Н. Ляхову принадлежит постановка задач. Доказательства всех результатов получены лично автором.

Работы [1], [2] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, включающего 46 наименования. Общий объем диссертации 102 стр.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** обосновывается актуальность темы, приводится методика исследования и дан краткий обзор содержания диссертации по главам.

Нумерация приводимых ниже определений и утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

В первой главе содержатся 3 пункта.

В первом пункте первой главы дается определение многомерного смешанного интегрального преобразования Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова.

Вводятся евклидовы пространства точек $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N = R_n \times \mathbb{R}_{N-n}$, $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, а $x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_{N-n}$ или в его части $\mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$, определенную неравенствами $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. При этом числа n и N предполагаются фиксированными $1 \leqslant n \leqslant N$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. Каждому индексу γ_i ставим в соответствие оператор Бесселя $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i > 0$.

Многомерный смешанный обобщенный сдвиг T_x^y, $x = (x', y')$, $y = (y', y'') \in \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$ определяется в виде суперпозиции одномерных обобщенных и обычных сдвигов. По определению полагаем

$$T_x^y : f(x) \to T_x^y f(x) = \left(\prod_{i=1}^n T_{x_i}\right) f(x', x''-y'') = C(\gamma) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f(x' \overset{\beta}{\to} y', \, x''-y'') \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \beta_i \, d\beta_1 \ldots d\beta_n, \quad x' \overset{\beta'}{\to} y' = \left(x_1 \overset{\beta_1}{\to} y_1, \ldots, x_n \overset{\beta_n}{\to} y_n\right),$$

$$x_i \overset{\beta_i}{\to} y_i = \sqrt{x_i^2 - 2x_i y_i \cos\beta_i + y_i^2}\,, \; C(\gamma) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}.$$

Пусть α' и α'' — целочисленные мультииндексы размерности n и $N-n$ соответственно. Через $D_B^\alpha = \partial_{B_{x'}}^{\alpha'} \partial_{x''}^{\alpha''} = \partial_{B_{\gamma_1}}^{\alpha_1} \ldots \partial_{B_{\gamma_n}}^{\alpha_n} \partial_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$ обозначим сингулярный дифференциальный оператор порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$, составляющие которого определены следующим образом: $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$,

$$\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i} = \begin{cases} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i = 2k, \quad\quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \partial_{x_i} B_{\gamma_i}^{(\alpha_i - 1)/2}, & \alpha_i = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

где B_{γ_i} — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя.

Одномерные F_B-преобразования Киприянова-Катрахова строятся на основе ядра $j_\nu(t\tau)-i\,\frac{t\tau}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t\tau),\quad \nu\;>\;-\frac{1}{2}$, где $j_\nu(t)$, так называемая, j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν равенством $j_\nu(t)=\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\,J_\nu(t)$.

Введем обозначение

$$\Lambda^{\pm}_{\gamma}(x',\xi')=\prod_{j=1}^{n}\left[j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j)\mp i\,\frac{x_j\xi_j}{\gamma+1}\,j_{\frac{\gamma_j+1}{2}}(x_j\xi_j)\right],\quad \gamma_j>0.$$

Определение 1.1.1 *Смешанным прямым и обратным преобразованиями Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова* ($\mathcal{F}_B$-преобразованиями) функции u назовем соответственно выражения

$$\mathcal{F}_B[u](\xi)=\widehat{u}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Lambda^{+}_{\gamma}(x',\xi')\,e^{-i(x'',\xi'')}\,u(x)\,(x')^{\gamma}\,dx\,,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[u](x)=C(\gamma)\mathcal{F}_{\mathcal{B}}[u](-x)=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Lambda^{-}_{\gamma}(x',\xi')\,e^{i(x'',\,\xi'')}u(\xi)\;(\xi')^{\gamma}\,d\xi\,,$$

$$C(\gamma)=\frac{(2\pi)^{1-n}}{2^{2(\nu+1)}\;\Gamma^2(\nu+1)}.$$

Как обычно, интегралы в этих выражениях понимаются в смысле главных значений. Интересно отметить, что поскольку функция $j_\nu(t)$ — четная при любом ν, то функция $\frac{t}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t)$ — нечетная и, следовательно, как и ядро классического преобразования Фурье, ядро $\mathcal{F}_B$-преобразования состоит из четного и нечетного слагаемых. Несмотря на аналогию с классическим преобразованием Фурье, $\mathcal{F}_B$-преобразование дифференциальных операций приспособлено только для четных функций. При этом для любой быстро убывающей, бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x',x'')$, четной по каждой координате вектора x' и для любого целочисленного мультииндекса $\alpha=(\alpha',\alpha'')=(\alpha_1,\,\ldots\,,\alpha_N)$, справедливы формулы

$$\mathcal{F}_B\left[\partial^{\alpha'}_{B_{x'}}\,\partial^{\alpha''}_{x''}\varphi\right](\xi)=(i\xi)^{\alpha}\;\mathcal{F}_B[\varphi](\xi),\tag{1.1.14}$$

$$D^{\alpha'}_{B_{\xi'}}\,\partial^{\alpha''}_{\xi''}\mathcal{F}_B\left[\varphi\right](\xi)=\mathcal{F}_B[(ix)^{\alpha}\varphi](\xi)\,.\tag{1.1.15}$$

Через $S(\mathbb{R}_N)$ будем обозначать пространство Шварца основных функций, а через $S_{ev}(\mathbb{R}_N)$ его подпространство состоящее из функций, четных по каждой из переменных $x'=(x_1,\,\ldots\,,x_n)$. Далее под $(x')^{\gamma}$ понимается функция

$(x')^\gamma = \prod\limits_{j=1}^{n}(x_j^2)^{\gamma/2}$ — четная по каждому из своих аргументов $x_1, \dots, x_n$. Множество функций для которых конечна норма $\|f\|_{L_2^\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_N} |f(x)|^2\,(x')^\gamma\,dx\right)^{1/2}$ будем обозначать $L_2^\gamma(\mathbb{R}_N)$ или $L_{2,\,ev}^\gamma(\mathbb{R}_N)$, если функции f предполагаются четными по каждой координате n-мерного вектора x'. Рассмотренные выше $\mathcal{F}_B$-преобразования являются взаимно обратными в $S(\mathbb{R}_N)$ (Катрахов, Ляхов) и в $L_2(\mathbb{R}_N)$ (Ляхов, Райхельгауз).

Пространство основных функций, рассмотренных в работе обозначается S_{ev}^+ представляющее собой подпространство пространства основных функций S_{ev}, наделенное топологией, порождаемой системой норм

$$|\langle\varphi\rangle|_k = \max\left(\sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}}\left|x^\alpha\,D_{B_\gamma}^\beta\,\varphi(x)\right|\,,\ \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant k,\\ x\in\mathbb{R}_N}}\left|\,D_{B_\gamma}^\beta\,(x^\alpha\varphi(x))\right|\right), \qquad (1.2.4)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ при этом выполнено условие *одинаковой четности*:

$$\alpha_i + \beta_i = 2\ell_i, \quad \ell_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leqslant N\,. \qquad (1.2.5)$$

Теорема 1.2.1 *При выполнении условия (1.2.5) $\mathcal{F}_B$-преобразование осуществляет непрерывный (в обе стороны) изоморфизм пространства S_{ev}^+, т.е. для любого неотрицательного целого числа k*

$$|\langle\mathcal{F}_B[\,\varphi]\,\rangle|_k \leqslant |\langle\varphi\rangle|_{k_1}.$$

Рассмотрим классы функций

$$\mathbf{\Psi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+) = \{\psi:\ \psi\in S_{ev}^+(\mathbb{R}_N^+),\ \partial^\beta\psi(0) = 0,\ \forall\,\beta\in Z^+\}\,.$$

$$\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+) = \{\varphi:\ \varphi = \mathcal{F}_B[\psi]\,,\ \psi\in\mathbf{\Psi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+)\}\,,$$

Теорема 1.2.2 *Класс $\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(x)\in S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$, которые ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам:*

$$\varphi(x)\in S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)\,,\quad \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} x^m\varphi(x)\,(x')^\gamma\,dx'dx''=0, \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+), \qquad (1.2.6)$$

Для четного преобразования Фурье-Бесселя функции $\varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma$ ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам, четным *по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_n$.

$$\varphi(x)\in S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (x')^{2m}\varphi(x)\, x^\gamma\, dx=0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(\mathbb{R}_N^+), \tag{1.2.7}$$

В **третьем пункте первой главы** рассматривается линейный сингулярный дифференциальный оператор с ∂_B-оператором Бесселя

$$L(x;D_B) = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x)\, D_B^\alpha, \tag{1.3.1}$$

где $D_B^\alpha = \partial_{B_{x'}}^{\alpha'}\,\partial_{x''}^{\alpha''} = \partial_{B_{\gamma_1}}^{\alpha_1}\,\ldots\,\partial_{B_{\gamma_n}}^{\alpha_n}\,\partial_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}\,\ldots\,\partial_{x_N}^{\alpha_N}$ — сингулярный дифференциальный оператор порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$, составляющие которого $\partial_{B_{\gamma_i}}$ определены в (1.1.5).

Теорема 1.3.1 *Пусть функция* $\varphi \in S_{ev}^+(\mathbb{R}_n)$. *Действие сингулярного дифференциального оператора* $L(x,D_B)\varphi(x)$ *в образах* $\mathcal{F}_B$*-преобразования имеет вид*

$$L(x,D_B)\varphi(x) = \mathcal{F}_B[\,a(x,i\xi)\widehat{\varphi}\,](x), \tag{1.3.2}$$

где $a(x,i\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\;(i\xi)^\alpha$.

Функцию $a(x,\xi)$ будем называть *символом* сингулярного дифференциального оператора $L(x,D_B)$ в образах $\mathcal{F}_B$-преобразования.

Скалярное произведение функций задается весовой линейной формой

$$(u\;v)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N} u(x)\;\overline{v(x)}\;(x')^\gamma\, dx.$$

Оператор $L^*(x;D_B)$, сопряженный оператору $L(x;D_B)$ имеет вид

$$L^*(x;D_B) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|}(\partial_{B_\gamma}^{\alpha'})^*_{x'}\partial_{x''}^{\alpha''}\left(\overline{a_\alpha(x)}\,\cdot\,\right)\,,$$

где $\quad (\partial_{B_\gamma}^{\alpha'})^*_{x'} = \prod\limits_{i=1}^n (\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^*_{x_i}, \quad (\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i})^*_{x_i} = \begin{cases} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i = 2k,\\ -B_{\gamma_i}^{(\alpha_i)/2} x_i^{-\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k+1,\end{cases}$

$i{=}1,\ldots,n, \quad k{=}0,1,2,\;\ldots\;.$

В образах $\mathcal{F}_B$-преобразования этот оператор записывается в виде
$L^*(x;D_B) = \mathcal{F}_B^{-1}\,\mathcal{F}_B[a^*(x,-i\xi)\,u(x)]$

Во второй главе мы рассматриваем с.п.д.операторы Киприянова-Катрахова ($\mathcal{F}_B$-с.п.д.операторы).

Функциональные классы Соболева-Киприянова вводятся в **первом пункте второй главы** на основе скалярного произведения

$$(u,v)_\gamma = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\Omega_s} D_B^\alpha u(x)\ D_B^\alpha v(x)\ x^\gamma\ dx\,, \tag{2.1.4}$$

которое порождает норму в пространстве $H_\gamma^m(\Omega_s)$:

$$|||u|||_{H_\gamma^m(\Omega_s)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\Omega_s} |D_B^\alpha u(x)|^2\ (x')^\gamma\ dx \right)^{1/2}. \tag{2.1.3}$$

Лемма 2.1.1 *Пространство $H_\gamma^m(\Omega_s)$, со скалярным произведением (2.1.4) является гильбертовым относительно нормы (2.1.3).*

Введем также норму

$$\|f\|_{H_\gamma^s}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}_N} (1+|\xi|^2)^s\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, (\xi')^\gamma\, d\xi. \tag{2.1.5}$$

Теорема 2.1.1 *Пространство $H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)$ можно определить либо с помощью соотношения (2.1.2), либо посредством равенства*

$$H_\gamma^m(\mathbb{R}_N) = \Big\{ u\ :\ u \in S'_{ev}\,,\ \ (1+|\xi|^2)^{m/2}\ \ \widehat{u} \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_N) \Big\}\,,$$

при этом норма (2.1.5) эквивалентна норме (2.1.3), т.е.

$$C_1\|u\|_{H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)} \leqslant |||u|||_{H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)} \leqslant C_2\|u\|_{H_\gamma^m(\mathbb{R}_N)}.$$

В **пункте 2.2** мы вводим *класс символов* Ξ_q^m, состоящий из функций $a(x;\xi)$, бесконечно дифференцируемых по x, определенных при всех x и $\xi,\ \xi \neq 0$, удовлетворяющих оценке $|a(x;\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2}$ равномерно по x и следующим условиям:

для любого фиксированного x функция $a(x;\xi)$ по ξ принадлежит пространству $H_\gamma^q(S_1(N))$, где $S_1(N)$ — единичная сфера $|\xi| = 1,\ q > \frac{N+|\gamma|}{2} + 1$, при этом

$$\max_{x\in\mathbb{R}_N} \|a(x;\cdot)\|_{H_\gamma^q(S_1(N))} < \infty;$$

на сфере $S_1(N)$ функция $a(x;\xi)$ имеет предел $a(\xi)$, когда $x \to \infty$, такой, что функция

$$a_*(x;\xi) = a(x;\xi) - a_\infty(\xi) \tag{2.2.1}$$

и ее производная по ξ, как функции x принадлежит пространству $S_{ev}^+(\mathbb{R}_N)$ равномерно по ξ.

Кроме того, выполняется условие "одинаковой четности" по каждой паре переменных $(x_i,\xi_i),\ i = 1,\dots,n$: функция $a(x;\xi)$

или (i) четная и тогда $\partial_{x_i}^k a(x;\xi)\big|_{x_i=0} = 0,\ k \geqslant 1;$
или (ii) нечетная и тогда $\partial_{x_i}^k a(x,\xi)\big|_{x_i=0} = 0,\ k \geqslant 0.$

Теорема 2.2.1 *При $s > \frac{n+|\gamma|}{2} + k$, где k — целое положительное число, пространство H_γ^s непрерывно вложено в пространство C_B^k функций непрерывных вместе с D_B^α-производными порядка $|\alpha| < k$.*

Определение 2.2.1 *Сингулярным псевдодифференциальным оператором Киприянова-Катрахова (далее, наряду с этим названием, используем сокращение — $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор) $A = a(x; D_B)$ с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$ назовем оператор, действующий на функции класса $S_{ev}^+(\mathbb{R}_N)$ по формуле*

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \Lambda_\gamma^+(x,\xi)\ a(x;\xi)u(x)(x')^\gamma dx, \tag{2.2.2}$$

где под $(x')^\gamma$ понимается функция $(x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^n (x_i^2)^{\gamma/2}$ — четная по каждому из своих аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

В равной степени полезным является $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор заданный в виде

$$\mathcal{A}u(x) = \mathcal{F}_B^{-1}\ [a(x;\xi)\ \mathcal{F}_B[u](\xi)]\,(x). \tag{2.2.3}$$

Далее для класса символов $a(x;\xi)$ и класса отвечающих этим символам операторов A или $\mathcal{A}$ будем использовать одно и тоже обозначение — Ξ_q^m.

В **третьем пункте гл.II** мы доказываем теоремы о порядке $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов в шкале пространств H_γ^s. Приведем следующие результаты

Теорема 2.3.1 *Пусть $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$, тогда отвечающий этому символу по формуле (2.2.2) или (2.2.3) сингулярный псевдодифференциальный оператор A или $\mathcal{A}$ имеет порядок, равный m.*

Теорема 2.3.2 *Пусть $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$, и A и $\mathcal{A}$ отвечающие этому символу по формуле (2.2.2) и (2.2.3) соответственно $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторы. Тогда оператор $A - \mathcal{A}$ имеет порядок $m-1$ в шкале H_γ^s.*

Лемма 2.3.2 *Пусть $A \in \Xi_q^m$. Для любой функции $u \in H_\gamma^s$ имеет место неравенство*

$$|(Au,u)_\gamma| = |(u,\mathcal{A}u)_\gamma| \leqslant const \cdot \|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}. \tag{2.3.3}$$

с константой, независящей от функции u.

В **пункте 2.4** мы рассматриваем произведения и коммутаторы с.п.д. операторов Киприянова-Катрахова.

Теорема 2.4.1 *Пусть $a_1(x;\xi) \in \Xi_q^{m_1}$, $a_2(x;\xi) \in \Xi_q^{m_2}$ и A_1 и A_2 — соответствующие этим символам $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова. Тогда оператор $A_1A_2 - A_1 \circ A_2$ имеет порядок m_1+m_2-1 в шкале пространств $H_\gamma^s(\mathbb{R}_N^+)$.*

Следствие 2.4.1 *Пусть* $a_1(x;\xi) \in \Xi_q^{m_1}$, $a_2(x;\xi) \in \Xi_q^{m_2}$ *и* A_1 *и* A_2 *— соответствующие этим символам* $\mathcal{F}_B$*-с.п.д. операторы Киприянова-Катрахова. Тогда их коммутатор* $[A_1 A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$ *имеет порядок* $m_1 + m_2 - 1$ *в шкале пространств* H_γ^s.

Следствие 2.4.2 *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ *и* $\varphi(x)$ *— бесконечно дифференцируемая функция, четная по каждой координате вектора* x'. *Тогда оператор* $\varphi A - A\varphi$ *имеет порядок, равный* $m-1$ *в* H_γ^s.

Следствие 2.4.3 *Пусть* $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$, $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *— бесконечно дифференцируемые функции, четные по* x', *с не пересекающимися носителями. Тогда оператор* $\varphi A \psi$ *имеет порядок, равный* $m-1$ *в* H_γ^s.

Следствие 2.4.4 *Пусть* $A \in \Xi_q^m$. *Его коммутатор с оператором* $(1-\Delta_B)^{k/2}$ *имеет порядок* $m+k-1$.

В третьей главе мы строим квазирегуляризаторы B-эллиптических $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов.

В пункте 3.1 мы рассматриваем конструкцию квазирегуляризаторов для $\mathcal{F}_B$-с.п.д. операторов, которая дается в следующей теореме.

Теорема 3.1.1 $\mathcal{F}_B$*-с.п.д. оператор* R *с символом*

$$r(x;\xi) = |\xi|^m (1 + |\xi|^m)^{-1} a^{-1}(x;\xi) \tag{3.1.1}$$

является (левым и правым) квазирегуляризатором для B*-эллиптического в* $\mathbb{R}_N$ $\mathcal{F}_B$*-с.п.д. оператора* A *с символом* $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$.

Теорема 3.2.1 *Пусть* $A \in \Xi_q^m$ *и пусть на единичной сфере* $S_1 = \{\xi : |\xi| = 1\}$ *символ* $Re\ a(x;\xi)$ *ограничен с низу некоторой константой* c. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует константа* $c' = c'(\varepsilon)$ *такая, что для всех функций* $u \in S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$

$$Re(Au,u)_\gamma + c'\|u\|^2_{\frac{m-1}{2},\gamma} \geqslant (c-\varepsilon)\|u\|_{\frac{m}{2},\gamma}\,. \tag{3.2.1}$$

Теорема 3.3.1 *Пусть* $A \in \Xi_q^m$. *Предположим, что* $|a(x^0;\xi^0)| = c_0 \neq 0$. *Тогда для любой окрестности* Ω *точки* x^0 *и для любых вещественных чисел* $s, l < m$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется бесконечно дифференцируемая функция* $u_\varepsilon(x)$ *вида*

$$u_\varepsilon(x) = \mathbf{j}_\gamma(x', \lambda\xi'^0)\, e^{i\langle x'', \lambda\xi''^0\rangle}\, \varphi(x), \quad \xi^0 = (\xi'^0, \xi''^0),\ |\xi^0| = 1, \tag{3.3.10}$$

где $\lambda = \lambda_\varepsilon$ *— достаточно большое положительное число, а* φ *четная по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_n$, $n \leqslant N$, *функция с носителем, содержащимся в* Ω, *такая, что для нее выполнены неравенства*

$$\|u_\varepsilon\|_{H_\gamma^{s-m+l}} \leqslant \varepsilon\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s}, \tag{3.3.11}$$

$$\left| \|Au_\varepsilon\|_{H_\gamma^{s-m}} - C_0\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s} \right| \leqslant \varepsilon \, \overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s}\,, \tag{3.3.12}$$

в которых

$$\overline{\|u_\varepsilon\|}_{H_\gamma^s} = \max\left(\sqrt{\int (1+|\xi|^2)^s \left(T_{\xi'}^{\lambda\xi'^0} \, |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \right) (\xi')^\gamma \, d\xi} \;\;, \;\; \|u_\varepsilon\|_{H_\gamma^s} \right).$$

Теорема 3.4.1 *Пусть $A \in \Xi_q^m$. Предположим, что*

$$\max_{x,\xi \in \Sigma_n^+} |a(x,\xi)| = K \tag{3.4.1}$$

$K < \infty$. Тогда имеет место равенство

$$K = \inf_T \|A + T\|_{s,\gamma}, \tag{3.4.2}$$

где справа $\|\cdot\|_{s,\gamma}$ — норма операторов в шкале H_γ^s и нижняя грань берется по всем операторам порядка $m-1$.

Теорема 3.4.2 *Пусть $A \in \Xi_q^m$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

I. Символ оператора A тождественно равен нулю.

II. $A = 0$.

III. Для некоторого $l < m$ оператор A имеет порядок l.

Теорема 3.5.1 *Пусть A — $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор в $\mathbb{R}_N$ с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$. Для того, чтобы оператор A был B-эллиптическим в $\mathbb{R}_N$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ выполнялось неравенство*

$$\|u\|_{s,\gamma} \leqslant c(\|Au\|_{s-m,\gamma} + \|u\|_{s-1,\gamma}) \tag{3.5.1}$$

с константой c, не зависящей от функции u.

Теорема 3.5.2 *Следующие утверждения эквивалентны*

1. A — $\mathcal{F}_B$-с.п.д.о. B-эллиптического типа с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$.

2. Существует квазирегуляризатор оператора A.

3. Для функции $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{s,\gamma} \leqslant c(\|Au\|_{s-m,\gamma} + \|u\|_{s-1,\gamma}).$$

Теорема 3.5.3 *Пусть A — B-эллиптический $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$. Тогда, если $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}_N)$ является решением уравнения $Au = f$, где $f \in H_\gamma^{S-m+\alpha}(\mathbb{R}_N)$, то $u \in H_\gamma^{s+\alpha}(\mathbb{R}_N)$.*

Публикации автора по теме диссертации

1. Roschupkin S.A. A Priori Estimates for Solutions of Singular B-Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel ∂_B-Operators / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин // Jornal of Mathematical Sciences. Volume 196, Number 4 January 28, 2014. — С. 563 — 571.

2. Рощупкин С.А. Полное преобразование Фурье-Бесселя некоторых основных функциональных классов / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин // Научные ведомости Белгородского государственного университета, № 11 (154) 2013, выпуск 31. Математика Физика. — С. 85 — 92.

3. Рощупкин С.А. Об априорной оценке решений сингулярных B-эллиптических псевдодифференциальных уравнений с ∂_B оператором Бесселя / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин // Проблемы математического анализа. Т.74. — 2013. — С. 109 — 116.

4. Рощупкин С.А. Априорная оценка решений одного класса B-эллиптических уравнений / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. — Тезисы докладов. — Суздаль: Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. — 2012. — С. 109 — 110.

5. Рощупкин С.А. Сингулярные псевдодифференциальные операторы Фурье-Бесселя в весовых классах Соболева-Киприянова в H_γ^s / Л.Н. Ляхов , С.А. Рощупкин // Обратные и некорректные задачи математической физики и анализа: Тез. докл. научн. конф., Новосибирск, 5 — 12 августа 2012 г. Новосибирск. — 2012. — С. 391.

6. Рощупкин С.А. Представление сингулярных линейных D_B-операторов в образах полного преобразования Фурье-Бесселя / С.А. Рощупкин // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания: материалы восьмой школы молодых ученых Липецкой области. — Липецк: ЛГПУ. — 2012. — С. 127 — 139.

7. Рощупкин С.А. Об одном неравенстве для свертки, порожденной смешанным обобщенным сдвигом функций вида $|1+|x|^2|^k$ / С.А. Рощупкин // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавание. Школа

молодых ученых Липецкой области. — Липецк: ЛГПУ. Выпуск 1(4). — 2013. — С. 18 — 22.

8. Рощупкин С.А. Классы основных функций для полного преобразования Фурье-Бесселя / С.А. Рощупкин // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 26 — 31 мая 2013 г.). — Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". — 2013. — С. 162 — 163.

9. Рощупкин С.А. О сингулярных $\mathcal{F}_B$-псевдодифференциальных операторах в полупространстве/ С.А. Рощупкин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: сб. материалов Международной научной конференции (Республика Башкортостан, Стерлитамак, 26 — 30 июня 2013 г.). — Стерлитамак: УФА РИЦ БашГУ. — 2013. Т.1. — С. 86 — 90.

10. Рощупкин С.А. О многомерных псевдодифференциальных операторах Киприянова-Катрахова / С.А. Рощупкин // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ 2014". Воронеж, 26 — 31 января 2014 г. Научная книга, 2014. — С. 266 — 272.

11. Рощупкин С.А. О весовых классах Соболева-Киприянова H^m_γ, построенных на основе сингулярного D_B-оператора Бесселя / С.А. Рощупкин // Вестник ПММ Воронежского государственного университета. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014. — С. 168 — 176.

Работы [1], [2] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Подписано в печать 18.06.14. Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 0,93.
Тираж 100 экз. Заказ 23.   .

Отпечатано с готового оригинал-макета
в МУП «Типография» г. Ельца
399770, Елец, Липецкая область, ул. Свердлова, 11.