На правах рукописи

Савастеев Денис Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2016

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель:

Пенкин Олег Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

Боровских Алексей Владиславович,
доктор физико-математических наук, доцент,
МГУ имени М.В. Ломоносова,
Кафедра дифференциальных уравнений, профессор.

Ситник Сергей Михайлович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Воронежский институт МВД России,
Кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО “Челябинский государственный университет”.

Защита состоится 28 февраля 2017 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/3939/Диссертация_Савастеев_Д.В..pdf.

Автореферат разослан   декабря 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета   Гликлих Юрий Евгеньевич

Актуальность темы. В последнее время всё большее внимание специалистов привлекают дифференциальные уравнения на так называемых стратифицированных множествах. Грубо говоря, стратифицированное множество – это множество, составленное из “кусков” (стратов) различной размерности. Такими множествами удобно описывать различные физические системы, которые состоят из элементов различных размерностей или с разными физическими характеристиками. Процессы, протекающие в таких системах, приводят к необходимости обобщения понятия “дифференциального уравнения” на случай стратифицированного множества.

Например, мы можем рассмотреть систему из мембран, одни участки границы которых закреплены, а другие склеены между собой некоторым образом. Формально, для изучения подобных систем строить теорию уравнений на стратифицированных множествах не требуется. Каждый элемент описывается неким дифференциальным уравнением, а их взаимодействие между собой – некими дифференциальными соотношениями (обычно называемыми условиями трансмиссии). В первых работах на эту тему (G. Lumer, S. Nicaise, J. von Belov и др.) так и делалось. Но в основном все вопросы сводились только к разрешимости соответствующих краевых задач.

Однако для получения результатов качественного характера – принципа максимума, леммы о нормальной производной, неравенства Харнака, теоремы об устранимой особенности и т.д., потребовался иной подход, первоначально применённый при изучении так называемых дифференциальных уравнений на геометрических графах (Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин и др.). Он основан на интерпретации всех дифференциальных соотношений, возникающих в системах подобного типа, в виде одного уравнения, содержащего операции дифференцирования по так называемой стратифицированной мере.

У этого подхода есть два преимущества. Во-первых, он согласуется с физической природой рассматриваемых задач. А во-вторых, он позволяет обнаружить аналогию с классическим случаем. Это обстоятельство позволило существенно продвинуться в изучении вопросов качественной теории. Однако, как правило, они получались при ограничениях на размерность стратифицированных множеств. Лишь недавно стали получаться результаты общего характера.

Данная работа посвящена развитию некоторых известных и получению новых результатов качественного характера. Основным результатом работы является теорема об устранимой особенности для гармонических функций на стратифицированных множествах. Она утверждает, что объединение стратов, размерность которых не превышает $n-2$, где n – максимальная из размерностей стратов, образуют устранимое множество. Это открывает дорогу для доказательства классической разрешимости задачи Дирихле для лапласиана на стратифицированном множестве методом Перрона-Пуанкаре. Ранее это удавалось сделать только для двумерного случая (S. Nicaise, О.М. Пенкин).

Кроме того, получено продвижение (в сравнении с имеющимися результатами) в вопросах сильного принципа максимума и леммы о нормальной производной и доказано неравенство Харнака для аналога оператора Лапласа на стратифицированном множестве.

Цель работы. Доказательство аналога теоремы об устранимой особенности для гармонической функции на стратифицированном множестве, обобщение леммы о нормальной производной и сильного принципа максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве, получение неравенства Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве.

Методика исследования. В работе использованы методы классического математического и функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными, а так же элементы математического анализа на стратифицированных множествах.

Научная новизна. Все результаты автора, приведённые в диссертации, являются новыми. В числе них отметим следующие:

1. теорема об устранимой особенности для гармонической функции на стратифицированном множестве,
2. лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве,
3. лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для параболического оператора на стратифицированном множестве,
4. неравенство Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве.

Приведённые выше результаты являются аналогами классических теорем для случая стратифицированных множеств. Они доказаны в общем виде, в такой постановке они получены впервые. Теорема об устранимой особенности рассматривается впервые. Лемма о нормальной производной, сильный принцип максимума для эллиптического и параболического операторов на стратифицированном множестве и неравенство Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве ранее были доказаны для двумерного случая. Также лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для эллиптического оператора были доказаны для многомерного случая, но с ограничением на геометрию стратифицированного множества (случай симплициального комплекса) или с ограничением на структуру оператора.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы при изучении эллиптических и параболических операторов как в классическом случае, так и на стратифицированных множествах.

Апробация. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздаль [5], воронежских зимних и весенних математических школах [6], международной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования" в г. Воронеж [7], международной конференции "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий" в г. Воронеж [8].

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1-8]. Из совместных работ [1,2,5] в диссертацию включены только результаты, лично принадлежащие автору. Работы [1-4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 20 параграфов и списка литературы из 39 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 103 страниц машинописного текста. Текст иллюстрируют 9 рисунков.

Краткое содержание работы. Перейдём к краткому описанию результатов по главам. Работа состоит из введения и четырёх глав. В первой главе даётся краткое описание основных понятий теории стратифицированных множеств и эллиптических уравнений на них. Сюда относятся: стратифицированное множество, мера на нём, касательное векторное поле, дивергенция и эллиптический оператор, определяемые по стратифицированной мере.

Под стратифицированным множеством в $\mathbb{R}^d$ будем понимать связное объединение конечного числа ограниченных плоских многообразий различной размерности – мы будем называть их стратами, которые примыкают друг к другу специальным образом:

- никакие два страта не пересекаются,
- граница каждого страта является объединением конечного числа других стратов (будем называть их гранями).

Далее, мы разбиваем Ω на два подмножества. Одно интерпретируется как внутренность и обозначается Ω_0, другое – как граница $\partial\Omega$. Разбиение это выбирается произвольно. Предполагается только, что множество Ω_0 составлено целиком из стратов, а также открыто, связно и плотно в Ω (все топологические понятия определяются в смысле топологии, индуцируемой из объемлющего пространства $\mathbb{R}^d$).

В общем случае страты могут быть произвольными гладкими многообразиями, примыкающие друг к другу специальным образом. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением плоских многообразий в качестве стратов, т.к. это заметно упрощает рассмотрения. Если страт является граничным, мы можем ослабить ограничение и считать его произвольным гладким многообразием.

Следующий важный компонент – это стратифицированная мера. Мера множества является суммой мер его k-мерных фрагментов – пересечений со стратами σ_{kj} по всем k и j

$$\mu(G) = \sum_{k,j} \mu_k(G \cap \sigma_{kj}).$$

В качестве σ-алгебры рассматривается семейство подмножеств Ω, пересечения которых с каждым стратом σ_{kj} измеримы по k-мерной мере Лебега на этом страте.

Дивергенция касательного векторного поля определяется исключительно формально с помощью равенства

$$\nabla \vec{F}(X) = \nabla_k \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}_{k+1i}(X) \cdot \nu_i.$$

Здесь $\nabla_k \vec{F}$ означает обычную k-мерную дивергенцию поля $\vec{F}_{kj}$ на страте σ_{kj}. $\vec{F}_{k+1i}(X)$ – это предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \to X$, $Y \in \sigma_{k+1,i}$. Выражение $\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}$ означает, что страт σ_{k+1i} примыкает к страту σ_{kj}, ν_i – единичный нормальный вектор в точке X по направлению $\sigma_{k+1,i}$. Таким образом, суммирование ведётся по всем примыкающим стратам на единицу большей размерности.

Подходящее для рассмотрения дивергенции множество полей обозначается $\vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$. Оно определяется как множество всех векторных полей обладающих следующими свойствами. Поле $\vec{F} \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$ должно быть непрерывным на замыкании каждого страта и гладким на относительной внутренности каждого страта.

Далее, для таких функций p и u, что поле $p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$, имеет смысл следующее выражение, являющееся естественным аналогом лапласиана

$$\Delta_p u = \nabla(p\nabla u) = \Delta_p u_{kj}(X) + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} p \frac{\partial u_{k+1i}}{\partial \nu_i}(X).$$

Мы обозначаем через $C^2_\sigma(\Omega_0)$ пространство всех таких u, что $\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$.

Мы в основном рассматриваем случай, когда $p \equiv 1$ на так называемых свободных стратах, т.е тех стратах, которые не лежат в границе других, и $p \equiv 0$ на остальных стратах. Такой случай мы называем мягким лапласианом. Рассматривается также недивергентная форма эллиптического оператора

$$Lu(X) = a^{qr}(X)D_{qr}u + b^q(X)D_i u + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} p \frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X),$$

где на коэффициенты a^{qr} и b^q накладываются стандартные требования, обеспечивающие эллиптичность оператора, а p предполагается непрерывной и положительной.

Заметим, что функция, принадлежащая пространству $C^2_\sigma(\Omega_0)$, не обязана быть непрерывной в целом на Ω_0. Она может претерпевать скачки при переходе с одного страта на другой. Поскольку для большинства вопросов условие непрерывности оказывается важным, мы в основном работаем с пространством $C^2_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$.

Во второй главе рассматриваются сильный принцип максимума и лемма о нормальной производной. Сначала доказывается аналог леммы о нормальной производной. Аналогом нормальной производной функции u в граничной точке

$X \in \sigma_{kj} \subset \partial\Omega$ мы называем следующее выражение.

$$(\nabla u)_n(X) = \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} \vec{\nabla} u_{k+1i}(X) \cdot n_i.$$

Здесь суммирование ведётся по всем стратам $\sigma_{k+1,i}$, примыкающих к σ_{kj} и лежащих в Ω_0, а не в $\partial\Omega$. Мы называем это выражение нормальной производной на том основании, что оно возникает в формуле Грина (на стратифицированном множестве) именно в том месте, где в классической формуле Грина стоит нормальная производная. Естественность такой интерпретации нормальной производной подтверждается тем, что формулировка леммы о нормальной производной для недивергентного эллиптического оператора L, упомянутого выше, вполне аналогична классической.

Лемма 2.1 *Пусть Ω – стратифицированное множество, а $\sigma_k \in \partial\Omega$ – плоский изолированный граничный страт. Пусть функция и удовлетворяет на Ω_0 неравенству $Lu \geq 0$ и достигает своего максимума в некоторой точке $X_0 \in \sigma_k$. И пусть также выполняется строгое неравенство $u(X) < u(X_0)$ для всех точек $X \in \Omega_0$. Пусть ν – одно из примыкающих направлений в точке X_0, и существует нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ в точке X_0.*

Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{X=X_0} < 0.$$

Заметим, что в формулировке присутствует условие на граничный страт, он должен быть плоским изолированным. Это условие является аналогом условия внутренней сферы в классическом случае. Изолированность граничного страта означает, что к нему не примыкают никакие другие граничные страты большей размерности.

Лемма о нормальной производной была доказана сначала в двумерном случае (А.А. Гаврилов, О.М. Пенкин). Затем результат был обобщён на стратифицированное множество, составленное из симплексов (см. [2]). Мы же даём доказательство для случая произвольных плоских стратов. Основная трудность в доказательстве этого утверждения состоит в построении подходящих барьеров (см. работы Олейник, Хопфа). В нашем случае барьер получается комбинированием двух функций со специальными свойствами.

Основываясь на лемме о нормальной производной, удаётся доказать следующий вариант сильного принципа максимума.

Теорема 2.1 *Пусть Ω – стратифицированное множество, и L – эллиптический оператор на Ω_0. Пусть $u \in C(\Omega) \cap C^2_\sigma(\Omega_0)$ удовлетворяет неравенству $Lu \geq 0$. Тогда у функции u на Ω_0 не может быть точек локального нетривиального максимума.*

Мы говорим, что точка X_0 является точкой локального нетривиального максимума функции u, если существует окрестность, в которой $u(X) \leq u(X_0)$, и ни в какой окрестности функция u не является постоянной.

Первые версии принципа максимума относились к началу 2000-х годов (А.А. Гаврилов, О.М. Пенкин). В общем случае (без ограничения размерности) принцип максимума для оператора вида

$$\nabla(p\nabla u)$$

был получен в работе [1]. Лемма о нормальной производной сделала, наконец, возможным доказательство и для недивергентных операторов.

Во второй главе дополнительно доказывается лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума для параболических уравнений. Доказательство леммы и принципа максимума использует те же техники, что и в случае эллиптических уравнений.

Как обычно, параболический оператор определяется в цилиндре $\Omega \times [0, T]$ и имеет вид

$$\mathbb{T}u = Lu - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Он рассматривается в пространстве функций, которые принадлежат $C^2_\sigma(\Omega^t_0)$ для каждого сечения Ω^t_0 и в каждой точке $X \in \Omega_0 \times (0, T]$ имеют непрерывную производную по t. Такой класс функций мы обозначим через $C^2_{\sigma,t}(\Omega_0 \times (0, T])$.

Для параболического оператора на стратифицированном множестве доказывается принцип максимума.

Теорема 2.4 *Пусть*

$$u \in C(\Omega \times [0, T]) \cap C^2_{\sigma,t}(\Omega_0 \times (0, T]).$$

И пусть для неё выполняется неравенство $\mathbb{T}u \geq 0$. Тогда функция u не может иметь внутри цилиндра и на верхней крышке локального нетривиального максимума.

В следующих двух главах речь пойдёт о специальном случае эллиптического оператора на стратифицированном множестве – мягком лапласиане Δ_p. Функция p, фигурирующая в определении Δ_p, полагается равной единице на свободных стратах и нулю на несвободных. Мы будем рассматривать стратифицированные множества, у которых все свободные страты имеют одинаковую размерность n. В этом случае, согласно нашему определению, оператор Δ_p совпадает с классическим лапласианом на стратах размерности n, на стратах размерности $n-1$ равен сумме нормальных производных по всем примыкающим стратам большей размерности, а на стратах размерности $k \le n-2$ полагается равным нулю на любой функции. Особенность мягкого лапласиана заключается в том, что он является наиболее близким аналогом классического лапласиана. Например, для решения уравнения $\Delta_p u = 0$ на Ω_0 выполняется теорема о среднем для любой сферы достаточно малого радиуса.

Непрерывное, достаточно гладкое решение уравнения $\Delta_p u = 0$ на Ω_0 будем называть гармонической функцией. Термин "достаточно гладкая" означает, что гармоническая функция должна принадлежать некоторому классу гладкости, в котором корректно определён мягкий лапласиан. Выбор подходящего класса гладкости играет важную роль в изучении гармонических функций.

Ранее в качестве такого класса мы использовали $C^2_\sigma(\Omega_0)$. Напомним, что принадлежность $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$ влечёт, помимо прочего, гладкость функции u на каждом страте. Но т.к. функция p равна нулю на стратах размерности меньше n, то функции u не обязательно быть гладкой на таких стратах. Поэтому мы вводим новое, более широкое, пространство $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ – класс функций u, для которых $p\nabla u \in \vec{C}^1_\sigma(\Omega_0)$.

Мы будем рассматривать гармонические функции на так называемых усиленно прочных стратифицированных множествах. Подобного рода условие возникало ранее и при рассмотрении других вопросов (в основном связанных с разрешимостью задачи Дирихле). Мы называем стратифицированное множество усиленно прочным, если для любого страта σ_k размерности $k \le n-2$ и любого шара B с центром на страте σ_k и достаточно малого радиуса, множество $B \cap \Omega_0 \setminus \sigma_k$ является связным.

Суть этого условия иллюстрирует следующий пример.

В условиях приведённого рисунка мягкий лапласиан совпадает с классическим в двумерных стратах, а на одномерных стратах, не входящих в границу,

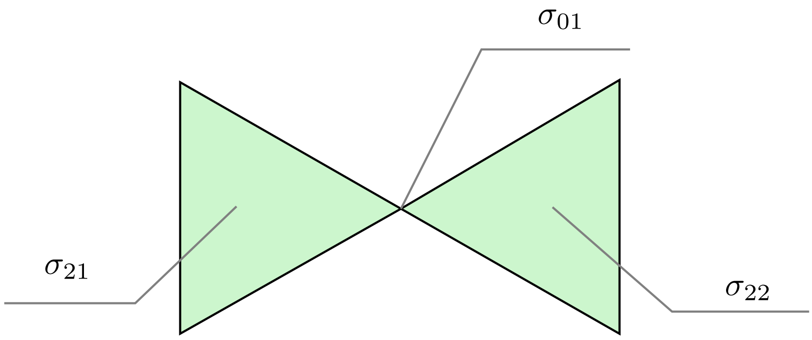

Рис. 1: Пример нарушения прочности множества

равен нормальной производной по внутреннему направлению. На нульмерных стратах, в частности в точке стыка двух треугольников, требуется только непрерывность функции.

Мы вводим условие усиленной прочности, т.к. оно существенно упрощает рассмотрение гармонических функций, а в некоторых вопросах (например, в теореме об устранимой особенности) является необходимым условием. Это связано с тем, что на стратах размерности $k \leq n-2$ в уравнении $\Delta_p u = 0$ с мягким лапласианом нет никаких дифференциальных соотношений, от решения требуется только непрерывность. Если разбить стратифицированное множество на усиленно прочные компоненты, то сужении гармонической функции на каждую компоненту будет по прежнему гармонической функцией. Поэтому мы можем рассматривать каждую усиленно прочную компоненту по отдельности.

Условие усиленной прочности имеет также физическую интерпретацию. Рассмотрим, например, систему из двух кубов, которые примыкают друг к другу по ребру. Пусть эта система находится в тепловом равновесии. Эту конструкцию из двух кубов можно рассматривать как стратифицированное множество. Функция температуры будет гармонической на каждом кубе. Очевидно, что тепловой обмен между двумя этими кубами невозможен, т.к. зона контакта между ними имеет нулевую площадь. Т.е. по сути эти два куба являются независимыми.

Третья глава посвящена неравенству Харнака для гармонической функции на стратифицированном множестве.

Теорема 3.1 (неравенство Харнака) *Пусть Ω – усиленно прочное стратифицированное множество. И пусть $H \subset \Omega_0$ – некоторый компакт. Тогда существует такая константа $C > 0$, зависящая от Ω и H, что для любой* *гармонической функции u на Ω_0 выполняется неравенство*

$$\sup_H u \leq C \inf_H u.$$

Как и в классическом случае, существенную роль в доказательстве играет теорема о среднем. Однако в случае стратифицированного множества данная теорема выполняется только для сфер достаточно малых радиусов (так называемые допустимые радиусы). Из-за этого перенос классического доказательство на случай стратифицированных множеств становится затруднительным. Поэтому наше доказательство существенно отличается от классического.

В конце главы мы переносим неравенство Харнака на более широкий класс функций. А именно, на класс непрерывных функций на Ω_0, для которых выполняется теорема о среднем для любых сфер допустимого радиуса. Заметим, что в классическом случае из теоремы о среднем следует достаточная гладкость (и, соответственно, гармоничность) функции. В случае стратифицированных множеств это не так. Как известно, гармоническая функция в области с негладкой границей может иметь особенности градиента в угловых точках. Поэтому можно привести пример функции, для которой выполняется теорема о среднем, но которая имеет особенность градиента на стратах размерности $k \leq n-2$. Такая функция не будет принадлежать пространству $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$, т.к. последнее должно гарантировать непрерывность градиента на замыкании каждого свободного страта.

Центральным результатом четвёртой главы является теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Она играет важную роль при распространении метода Перрона-Пуанкаре доказательства разрешимости задачи Дирихле на случай мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Ранее, в виду отсутствия теоремы об устранимой особенности, метод Перрона-Пуанкаре удавалось реализовать только для мягкого лапласиана на двумерном стратифицированном множестве (S. Nicaise, О.М. Пенкин).

Напомним, что классическая теорема об устранимой особенности утверждает, что если функция u гармоническая в области, кроме множества так называемой нулевой ёмкости, то её можно доопределить до гармонической функции во всей области. На стратифицированном множестве понятие ёмкости ещё не обсуждалось. Но для упомянутых выше целей (реализация метода Перрона-Пуанкаре) оказывается достаточным следующий вариант этой теоремы.

Теорема 4.1 (об устранимой особенности) *Пусть* Ω *– n-мерное усиленно прочное стратифицированное множество. Положим* Σ_{n-2} *– объединение всех стратов размерности* $k \le n-2$. *Пусть функция* $u : \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2} \to \mathbb{R}$ *ограниченная гармоническая. Тогда её можно доопределить на всё* Ω_0 *так, что она будет гармонической на всём* Ω_0.

Ранее мы писали, что пространство $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$ является слишком ограничительным – в него не входят функции, которые имеют особенности градиента на стратах размерности $k \le n-2$. При этом, с формальной точки зрения, оператор Δ_p для таких функций определён корректно, т.к. на стратах размерности $k \le n-2$ он полагается равным нулю на любой функции. Кроме того, для гармонических функций, определённых относительно $C^2_{\sigma,p}(\Omega_0)$, теорема об устранимой особенности оказывается неверна. Поэтому мы вводим новое пространство $C^{2*}_{\sigma,p}$, которое отличается от $C^2_{\sigma,p}$ тем, что допускает особенности градиента на стратах размерности $k \le n-2$. Соответственно, понятие гармонической функции, фигурирующее в теореме об устранимой особенности, рассматривается относительного нового класса $C^{2*}_{\sigma,p}$.

В классическом случае теорема об устранимой особенности доказывается в рамках теории потенциала. Для этого используется представление гармонической функции с помощью потенциала. В случае стратифицированных множеств теория потенциала ещё не развита, поэтому для доказательства теоремы используются совершенно другие методы. Согласно определению гармоничности, на стратах размерности $k \le n-2$ нет никаких дифференциальных соотношений. Предполагается только непрерывность функции. Поэтому фактически от нас требуется только продолжить функцию u по непрерывности.

Доказательство состоит из двух этапов. На первом этапе мы рассматриваем сферу допустимого радиуса $S_R(X)$ с центром в точке $X \in \sigma_k$, $k \le n-2$. Мы показываем, что среднее по любой сфере $S_R(X)$ допустимого радиуса существует и не зависит от R. На втором этапе мы показываем, что, положив функцию u в точке X равной среднему значению по некоторой сфере $S_R(X)$, мы получим непрерывную функцию на Ω_0. Здесь ключевую роль играет неравенство Харнака, доказанное в предыдущей главе.

При доказательстве теоремы об устранимой особенности важную роль играет так называемая внутренняя оценка градиента. Эта оценка представляет самостоятельный интерес и может использоваться при дальнейшем изучении гармонических функций.

Теорема 4.2 *Пусть Ω – n-мерное усиленно прочное стратифицированное множество, а Σ_{n-2} – объединение всех стратов Ω_0 размерности $k \leq n-2$. И пусть функция $u : \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2} \to \mathbb{R}$ ограниченная гармоническая. Тогда, если $X \in \Omega_0 \setminus \Sigma_{n-2}$, то выполняется оценка*

$$|\nabla u| \leq \frac{C}{\rho},$$

где

$$\rho = \mathrm{dist}(X, \Sigma_{n-2} \cup \partial\Omega).$$

Автор выражает благодарность О.М. Пенкину за постановку задачи и полезные обсуждения.

Публикации автора по теме диссертации

1. Ощепкова С.Н, Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве. Матем. заметки, 92:2 (2012), 276–290.

2. Ощепкова С.Н, Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Лемма о нормальной производной для лапласиана на полиэдральном множестве. Матем. заметки, 96:1 (2014), 116–125.

3. Савастеев Д.В. Теорема об устранимой особенности для гармонической функции на двумерном стратифицированном множестве // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки, т. 21, вып. 1, 2016, с. 108-116.

4. Савастеев Д.В. Сильный принцип максимума для параболического оператора на стратифицированном множестве // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №6(227), 2016, с. 24-32.

5. Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Об одном дифференциальном неравенстве // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 2008, С. 199-200.

6. Савастеев Д.В. Лемма о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве // Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Сборник тезисов. Воронеж, 2011, С. 296-297.

7. Савастеев Д.В. Лемма о нормальной производной для уравнения диффузии на полиэдре // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012). Материалы V Международной конференции. Воронеж, 2012, С. 247-248.

8. Савастеев Д.В. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций на стратифицированных множествах // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015). Сборник трудов VIII Международной конференции. Воронеж, 2015, С. 318-321.

Работы [1-4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.