На правах рукописи

Киселев

Киселев Евгений Александрович

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ НЕПОЛНЫХ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2016

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Минин Леонид Аркадьевич

Официальные оппоненты: Седаев Александр Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, кафедра высшей математики, профессор.

Скопина Мария Александровна, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра высшей математики, профессор.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО "Российский государственный геолого-разведочный университет имени Серго Орджоникидзе"(г. Москва).

Защита состоится 28 февраля 2017 г. в 15:10 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте

http://www.science.vsu.ru/dissertations/3938/Диссертация_Киселев_Е.А.pdf

Автореферат разослан "___" декабря 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Гликлих Ю.Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Эффективность использования ортогональных систем функций в различных приложениях доказана множеством работ. Их несомненным преимуществом является наличие универсального метода разложения. Однако, недостатком многих активно применяемых в настоящее время ортогональных систем типа всплесков или ортогональных полиномов является их сложная структура и неясный физический механизм, который мог привести к такой функциональной зависимости. Напротив, семейства функций, возникающие при моделировании различных явлений и процессов зачастую являются именно неортогональными. Неортогональные системы функций в настоящее время являются гораздо менее изученными, по сравнению с ортогональными, поэтому разработка математического аппарата для работы с ними является актуальной задачей.

Из всего многообразия функций, в качестве объекта исследования в данной работе выбираются наиболее часто встречающиеся в различных физических приложениях целочисленные сдвиги функции Гаусса $\exp\left(-(x-k)^2/(2\sigma^2)\right), k \in \mathbb{Z}$ и функции Лоренца $\sigma^2/(\sigma^2+(x-k)^2), k \in \mathbb{Z}$, которая также носит название распределение Коши и функция Брейта-Вигнера. Сдвигам функции Гаусса посвящено достаточно много работ, в то же время система сдвигов функции Лоренца в научной литературе практически не рассматривалась. Важным является анализ свойств исследуемых систем функций в зависимости от их параметра σ с целью оптимизации алгоритмов, построенных на их основе. Значительная часть работы посвящена именно этому вопросу.

Естественным обобщением семейств сдвигов являются оконные системы $g(x-a)e^{ibx}$, где $g(x)$ называется функцией окна, а параметры a и b обычно изменяются с равномерными шагами. В данной диссертационной работе рассматриваются такого рода системы с окном в виде функции Гаусса, в физике получившие названия когерентные состояния. Некоторые их свойства оказываются не до конца изученными. Их исследование может открыть весьма полезный математический аппарат для цифровой обработки сигналов, а также для анализа квантового хаоса.

Цель работы. Изучение неортогональных семейств сдвигов, оконных систем функций и разработка новых эффективных способов разложения в ряды по этим системам.

Методика исследований. В работе используются методы теории функций, линейного функционального анализа, линейной алгебры, теории всплесков, специальных функций и вычислительной математики.

Научная новизна. Следующие результаты, полученные в работе, являются новыми.

1. Получены формулы для коэффициентов узловой функций, порожденной системой целочисленных сдвигов функции Лоренца.

2. Доказано, что узловая функция, порожденная системой целочисленных сдвигов функции Лоренца, при стремлении параметра ширины σ к бесконечности, стремится по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ к функции отсчетов $\mathrm{sinc}(\pi x)$.

3. Вычислены константы Рисса для семейства целочисленных сдвигов функции Лоренца и проведен анализ устойчивости разложения по этой системе.

4. Построены два новых параметрических семейства биортогональных систем для целочисленных сдвигов функций Гаусса и Лоренца.

5. Рассчитаны константы Рисса для полной системы когерентных состояний, заданной на прямоугольной решетке, и прореженных в кратное число раз неполных систем. Показано, что нельзя провести устойчивую ортогонализацию для полной системы, а при переходе к вдвое прореженной неполной – можно.

Практическая и теоретическая значимость заключается в том, что разработанные алгоритмы разложения могут быть использованы для более эффективной цифровой обработки некоторых типов экспериментальных сигналов. Также результаты работы могут быть востребованы в квантовой теории хаоса.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на всероссийской конференции "Телематика'2014" в г. Санкт-Петербург в 2014 г., на международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" в г. Воронеж в 2015 г., в Воронежской весенней математической школе в 2016 г., а также на семинарах Воронежского государственного университета в 2011 – 2014 гг.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1-7]. Работы [1-5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных публикаций [1], [2], [4], [5] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 68 наименований. Общий объем диссертации 101 стр.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, определены научная новизна и практическая значимость.

Первая глава является вводной. Она содержит основные обозначения, определения и результаты, используемые далее в работе.

Рассматривается пространство комплекснозначных функций $L_2(\mathbb{R})$. Скалярное произведением и норма задаются обычным образом

$$(f,g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g^*(x)\ dx, \|f\|_{L_2} = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}. \qquad (1)$$

Прямое и обратное преобразование Фурье используется в следующей форме

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ix\xi} dx, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{ix\xi} d\xi. \qquad (2)$$

При работе с неортогональными системами функций наиболее часто используются три основных подхода: ортогонализация, построение биортогональной (двойственной) системы и интерполяция. Как следует из статьи Н. К. Бари[1] устойчивые процедуры ортогонализации и построения биортогональной системы возможны для систем Рисса.

Определение 1. *Функции $\varphi_k(x)$ образуют систему Рисса с положительными константами A и B, если для любого набора коэффициентов $\{c_k\} \in l_2$ выполнена двусторонняя оценка*

$$A\|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \ \varphi_k(x) \right\|_{L_2}^2 \leq B\|c\|_{l_2}^2, \qquad (3)$$

где нормы задаются обычным образом:

$$\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad \|f\|_{L_2}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Под A и B обычно понимаются их наилучшие оценки. Тогда наибольшее значение A называют нижней константой Рисса, наименьшая величина B во втором неравенстве – верхней константой Рисса. Для ортонормированных систем функций A и B равны 1. С точки зрения методов вычислений отношение констант Рисса равно числу обусловленности матрицы Грама и поэтому рассматривается нами как один из базовых критериев для оценки устойчивости разрабатываемых алгоритмов разложения.

Объектами исследования в работе выбраны система целочисленных

[1] Бари Н. К. *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве* / Н. К. Бари // Ученые записки МГУ. – 1951. – Т. 4, № 148. – С. 69–107.

сдвигов функции Гаусса

$$\varphi_G(x-k) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}\right), \sigma > 0, k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

целочисленных сдвигов функции Лоренца

$$\varphi_L(x-k) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x-k)^2}, \sigma > 0, k \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

когерентные состояния гармонического осциллятора

$$\varphi_{km}(x) = \exp\left(-\frac{(x-\omega_1 k)^2}{2}\right) \cdot e^{i\omega_2 mx}, k, m \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

где ω_1, ω_2 – вещественные положительные параметры, а также некоторые модификации перечисленных систем.

Первые два типа функций используются в физике при моделировании спектров различного происхождения. Когерентные состояния имеют важное значение в квантовой лазерной и статистической физике.

Определение 2. *Функции $\varphi_k(x), \psi_n(x), k, n \in \mathbb{Z}$, образуют биортогональную систему, если*

$$(\varphi_k, \psi_n) = \delta_{kn}.$$

Для целочисленных сдвигов $\varphi_k(x) = \varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$, являющихся системами Рисса, известен следующий результат: если

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2}, \tag{7}$$

тогда $\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}$ вместе с набором $\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$ образуют биортогональную систему, причем функция $\psi(x)$ представляет собой линейную комбинацию $\varphi(x-k)$.

Существует альтернативный биортогональным системам метод, не требующий численного интегрирования – интерполяция. Основным инструментом интерполяции является узловая функция.

Определение 3. *Функция $\widetilde{\varphi}(x)$, являющаяся линейной комбинацией $\varphi(x-k)$,*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, \varphi(x-k), \tag{8}$$

называется узловой, если для нее выполнена система равенств

$$\widetilde{\varphi}(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Для построения узловой функции необходимо найти набор коэффициентов d_k.

Вторая глава посвящена изучению систем равномерных сдвигов, порожденных функциями Гаусса и Лоренца. Все величины, относящиеся к функции Лоренца мы будем обозначать индексом L внизу, а к функции Гаусса – индексом G. Также они будут рассматриваться как некоторые функции, зависящие от параметра σ.

В монографии В. Мазьи и Г. Шмидта[2] решена интерполяционная задача с помощью равномерных сдвигов функции Гаусса. В настоящей работе получено выражение для $d_{L,k}$.

Теорема 1. *Для коэффициентов узловой функции, построенной по системе сдвигов функции Лоренца, справедлива формула*

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(\sigma t)} dt. \tag{10}$$

Перейдем к биортогональным системам. В случае, когда $\varphi_k(x)$ представляют собой целочисленные сдвиги одной функции достаточно найти функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$(\varphi_k, \psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) \cdot \psi^*(x) dx = \delta_{k0},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

[2]Maz'ya V. *Approximate approximations* / V. Maz'ya, G. Schmidt. – AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2007. – V. 141. – 350 p.

Тогда сдвиги $\psi_m(x) = \psi(x-m)$ вместе с $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$ образуют искомую биортогональную систему. Назовем $\varphi(x)$ базовой функцией, а $\psi(x)$ – базовой дуальной функцией. Для неполных систем, каковыми являются два рассматриваемых набора сдвигов, биортогональная система определяется, вообще говоря, неоднозначно. Пусть $\mathbb{H}_\varphi$ – подпространство, образованное линейной оболочкой сдвигов $\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$. Если $\psi(x) \in \mathbb{H}_\varphi$, то обозначим ее как $\psi^{in}(x)$, если же $\psi(x) \notin \mathbb{H}_\varphi$, то будем использовать обозначение $\psi^{out}(x)$.

В упомянутой выше книге В. Мазьи и Г. Шмидта приводится формула для построения биортогональной системы в случае сдвигов функции Гаусса, являющаяся следствием соотношения (7). Аналогично для функции Лоренца нами получен следующий результат.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\widehat{\psi}_L^{in}(\xi,\sigma) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,(2\sigma\pi)e^{-\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{ch}\,(2\sigma(\xi \bmod 2\pi - \pi))}. \tag{12}$$

Функция $\psi^{in}(x)$ определяется единственным образом. Для построения $\psi^{out}(x)$ нами предлагается следующий прием. Заменим в формуле (11) целое k действительной переменной y и рассмотрим функцию

$$\lambda(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y)\cdot\psi^*(x)dx. \tag{13}$$

При этом требуется, чтобы $\lambda(k) = \delta_{k0}, k \in \mathbb{Z}$. Функцию $\lambda(y)$ можно выбирать достаточно произвольно и получать при этом различные $\psi^{out}(x)$, решая уравнение типа свертки (13). Обозначив через $\psi_{G,n}^{out}(x,\sigma)$ и $\psi_{L,n}^{out}(x,\sigma)$ базовые дуальные функции, получающиеся при выборе $\lambda(y) = \mathrm{sinc}^n(\pi y)$, придем к следующему результату.

Теорема 3. *Справедливы формулы*

$$\widehat{\psi}_{G,n}^{out}(\xi,\sigma) = \frac{1}{2\sigma\pi}\exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)\cdot B_n\left(\frac{\xi}{2\pi}+\frac{n}{2}\right), n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$\widehat{\psi}_{L,n}^{out}(\xi,\sigma) = \frac{2}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{\sigma|\xi|}\cdot B_n\left(\frac{\xi}{2\pi}+\frac{n}{2}\right), n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

где $B_n(x)$ *– базисный сплайн порядка* n.

Выбирая $\lambda(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2s^2}\right)\cdot \operatorname{sinc}(\pi y)$ в случае функции Гаусса и $\lambda(y) = \frac{s^2}{s^2+y^2}\cdot \operatorname{sinc}(\pi y)$ в случае функции Лоренца, получим другие семейства базовых дуальных функций, которые мы обозначим через $\psi^{out}_{G,s}(x,\sigma)$ и $\psi^{out}_{L,s}(x,\sigma)$ соответственно.

Теорема 4. *Пусть* $s > \sigma$. *Тогда справедливы формулы*

$$\widehat{\psi}^{out}_{G,s}(\xi,\sigma) = \frac{\exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)}{4\sigma\pi}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi+\pi)}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{s(\xi-\pi)}{\sqrt{2}}\right)\right), \tag{16}$$

$$\widehat{\psi}^{out}_{L,s}(\xi,\sigma) = \begin{cases} \frac{2e^{\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(1 - e^{-s\pi}\cdot \operatorname{ch}(s\xi)), |\xi| \le \pi; \\ \frac{2e^{\sigma|\xi|}}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{sh}(s\pi)\cdot e^{-s|\xi|}, |\xi| > \pi, \end{cases} \tag{17}$$

где $\operatorname{erf}(x)$ *– функция ошибок*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt.$$

Наличие явных формул для биортогональных систем позволяет получать более эффективные вычислительные алгоритмы. Неоднозначность выбора базовой дуальной функции следует, на наш взгляд, использовать с целью оптимизации параметров под конкретную задачу.

Во второй главе также дана теоретическая оценка устойчивости процедуры разложения по системе целочисленных сдвигов функции Лоренца с помощью констант Рисса.

Теорема 5. *Целочисленные сдвиги функции Лоренца образуют систему Рисса с константами*

$$A_L(\sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)},\ B_L(\sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2\operatorname{ch}(2\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}. \tag{18}$$

Для случая функции Гаусса аналогичный результат был получен ранее в статье М. В. Журавлева[3]. Из формул (18) в частности следует, что,

[3]Журавлев М. В. *О константах Рисса для систем целочисленных сдвигов функции Гаусса* / М. В. Журавлев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2011. – № 5(100). – вып. 22. – С. 39–46.

как и в случае функции Гаусса, отношение констант Рисса $B_L(\sigma)/A_L(\sigma)$ неограниченно возрастает с увеличением параметра σ.

Установлено также еще несколько важных фактов. Л. А. Минин, М. В. Журавлев и С. М. Ситник показали ранее [5], что отношение констант Рисса $\widetilde{B}_G(\sigma)$ и $\widetilde{A}_G(\sigma)$ системы сдвигов узловой функции, порожденной функцией Гаусса стремится в пределе при $\sigma \to +\infty$ не к бесконечности, а к 2. Мы доказали аналогичный результат для функции Лоренца.

Теорема 6. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \widetilde{A}_L(\sigma) = \frac{1}{2}, \lim_{\sigma\to+\infty} \widetilde{B}_L(\sigma) = 1.$$

Также нами доказана

Теорема 7. *Справедливо предельное соотношение:*

$$\widetilde{\varphi}_L(x,\sigma) \xrightarrow[\sigma+\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} \operatorname{sinc}(\pi x)\,.$$

Аналогичный результат для функции Гаусса доказали ранее другие авторы[5].

Третья глава посвящена анализу вычислительных особенностей процедуры разложения по системам сдвигов функций Гаусса и Лоренца, а также некоторых их модификаций. Преимущественно внимание уделяется именно функции Лоренца, поскольку случай функции Гаусса детально изучен во многих других работах.

По соотношению (10) с помощью квадратурных формул рассчитаны коэффициенты $d_{L,k}(\sigma)$. Несколько значений $d_{L,k}(\sigma)$ при различных σ приведено в таблице 1. Все значащие цифры верные (с точностью до округления).

Проведена численная проверка теоремы 7. Выполнен ряд вычислительных экспериментов с тестовыми функциями по оценке эффективности разложения в ряд с помощью узловой функции и биортогональных

[5]Schlumprecht Th. *On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian* / Th. Schlumprecht, N. Sivakumar // Journal of Approximation Theory. – 2009. – V. 151, № 1. – P. 128–153.

Таблица 1: Значения коэффициентов $d_{L,k}(\sigma)$ узловой функции, порожденной системой сдвигов функции Лоренца

Параметр σ	d_0	d_1	d_{10}
0.5	1.08	-0.200	$-8.52 \cdot 10^{-4}$
1.0	1.74	-0.783	$-9.96 \cdot 10^{-4}$
1.5	3.89	-2.49	$-7.68 \cdot 10^{-4}$
2.0	10.6	-8.06	$7.30 \cdot 10^{-3}$
2.5	32.8	-27.3	0.122
3.0	110	-96.1	1.17
5.0	$2.11 \cdot 10^4$	$-2.01 \cdot 10^4$	$1.82 \cdot 10^3$
7.0	$5.77 \cdot 10^6$	$-5.63 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^6$

систем, построенных во второй главе. Также в качестве еще одной иллюстрации эффективности предложенного во второй главе способа построения биортогональных систем в некоторых простейших случаях рассчитаны базовые дуальные функции для функций Гаусса и Лоренца разной ширины σ, но с общим центром в начале координат.

Далее в третьей главе рассмотрена система целочисленных сдвигов, порожденная сверткой функций Гаусса и Лоренца (контур Фойгта в теории атомных спектров):

$$\varphi(x-k,\sigma,s) = \frac{s}{\sigma\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-k-t)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{s^2+t^2}dt, k \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Установлено, что семейство функций (19) образует систему Рисса и проведена оценка констант Рисса. Как показывают расчеты при $\sigma = s = 0.5$ отношение констант $B/A \approx 136.4$. При увеличении σ оно стремительно возрастает: $s = 0.5, \sigma = 1$, $B/A \approx 2.2 \cdot 10^5$; $s = 0.5, \sigma = 2$, $B/A \approx 1.6 \cdot 10^{18}$. Несколько медленнее отношение констант увеличивается с ростом s: $s = 2, \sigma = 0.5$, $B/A \approx 1.7 \cdot 10^6$; $s = 5, \sigma = 0.5$, $B/A \approx 2.6 \cdot 10^{14}$. Таким образом, при больших значениях σ или s матрица Грама исследуемой системы сдвигов становится плохо обусловленной, причем более чувствительна система к изменениям именно параметра σ.

Установленный нами факт, что равномерные сдвиги контура Фойгта образуют систему Рисса, позволяет построить биортогональную систему по формуле (7). Базовая дуальная функция $\psi(x, \sigma, s)$ представляется в виде линейной комбинации сдвигов $\varphi(x-k, \sigma, s)$ с некоторыми коэффициентами $\psi_k(\sigma, s)$.

Построение узловой функции для сдвигов контура Фойгта, приводит к следующему результату.

Теорема 8. *Между коэффициентами $\psi_k(\sigma, s)$ для биортогональной системы и коэффициентами узловой функции $d_k(\sigma, s)$ для системы целочисленных сдвигов контура Фойгта (19) имеет место соотношение*

$$d_k(\sigma, s) = \psi_k(\sigma/\sqrt{2}, s/2).$$

Четвертая глава посвящена исследованию подсистем когерентных состояний (6) с точки зрения возможности их устойчивой ортогонализации или построения биортогональной системы. Основным параметром данных систем является величина $\omega_1 \cdot \omega_2$. Известно следующее утверждение, установленное А. М. Переломовым[6] и В. Баргманом[7] с соавторами: при $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$ система функций (6) переполнена и остается такой при отбрасывании любого конечного числа функций. При $\omega_1 \cdot \omega_2 > 2\pi$ система не полна. При $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ система полна и она остается полной при отбрасывании любой одной функции, но становится неполной при отбрасывании любых двух функций.

Подсистемы когерентных состояний (6), при $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$ образуют так называемые фреймы и достаточно хорошо изучены. Поэтому наше исследование посвящено случаю $\omega_1 \cdot \omega_2 \geqslant 2\pi$.

При $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ нами получены следующие формулы.

[6]Переломов А. М. *Обобщенные когерентные состояния и их применения* / А. М. Переломов. – М.: Наука, 1987. – 268 с.

[7]Bargmann V. *On the completeness of coherent states* / V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J. R. Klauder // Rep. Math. Phys.. – 1971. – № 2. – P. 221 – 228.

Теорема 9. *Пусть в формуле (6)* $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$. *Тогда для любого набора коэффициентов* c_{km} *с единичной нормой* $||c||^2_{l_2} = 1$ *справедливы соотношения*

$$\min_{x,y\in[0,1]}(F(x,y)) \leqslant \left\| \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} c_{km}\varphi_{km}(x) \right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \max_{x,y\in[0,1]}(F(x,y)), \qquad (20)$$

где

$$F(x,y) = \omega_1 \left| \sum_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2}\right) \cdot e^{i2\pi ky} \right|^2. \qquad (21)$$

На основании теоремы 9 в данной работе показано, что нижняя константа Рисса системы когерентных состояний (4) при $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ равна нулю, причем даже после отбрасывания одной любой функции. Следовательно, устойчивая процедура ортогонализация для полной системы оказывается невозможна.

Для некоторых неполных систем нами доказано следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть* $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi N, N = 1, 2, \ldots$. *Тогда семейство функций (6) является системой Рисса с константами* A *и* B, *определяемыми формулами*

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\pi}\theta_3\left(\tfrac{\pi}{2}, \exp\left(-\tfrac{\omega_1^2}{4}\right)\right) \cdot \theta_3\left(\tfrac{\pi}{2}, \exp\left(-\tfrac{\omega_2^2}{4}\right)\right), \\ B &= \sqrt{\pi}\theta_3\left(0, \exp\left(-\tfrac{\omega_1^2}{4}\right)\right) \cdot \theta_3\left(0, \exp\left(-\tfrac{\omega_2^2}{4}\right)\right), \end{aligned} \qquad (22)$$

где $\theta_3(x,q)$ *– третья тета-функция Якоби*

$$\theta_3(x,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx}, |q| < 1. \qquad (23)$$

Известно, что $\theta_3(x,q)$ на вещественной оси конечна и не обращается в нуль. Отсюда следует, что рассматриваемая подсистема когерентных состояний является системой Рисса и для нее возможна устойчивая процедура разложения и устойчивая ортогонализация, которая может быть положена в основу алгоритмов. Возможность построения хорошо локализованного ортогонального базиса является важной в квантовой теории хаоса. В таблице 2 приведены несколько значений констант Рисса в случае $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi$ при разных пропорциях между параметрами ω_1 и ω_2.

Таблица 2: Константы Рисса в случае $\omega_1\omega_2 = 4\pi, \omega_2 = l\omega_1$.

l	A	B	B/A
1	1.48	2.09	1.41
2	1.04	2.53	2.43
5	0.16	3.96	25.4
10	$4.35 \cdot 10^{-3}$	5.60	$1.29 \cdot 10^{3}$
20	$2.39 \cdot 10^{-6}$	7.93	$3.32 \cdot 10^{6}$
30	$1.14 \cdot 10^{-9}$	9.71	$8.55 \cdot 10^{9}$

В **заключении** кратко формулируются основные результаты диссертационной работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Киселев Е. А. *Вычисление констант Рисса и ортогонализация для неполных систем когерентных состояний с помощью тета-функций* / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков // Математический сборник. – 2016. – Т. 207, № 8. – С. 101–116.

2. Киселев Е. А. *О построении биортогональных систем подпространств, порожденных целочисленными сдвигами одной функции* / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, вып. 3. – С. 468–470.

3. Киселев Е. А. *Системы целочисленных сдвигов, порожденные сверткой функций Гаусса и Лоренца* / Е. А. Киселев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 4. – С. 43–50.

4. Минин Л. А. *Метод выделения спектральных компонент в сигналах путем интерполяции с помощью систем целочисленных сдвигов* / Л. А. Минин, Насер Нихад Махмуд, Е. А. Киселев, С. Д. Кургалин //

Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 4. – С. 9-12.

5. *О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов* / Е. А. Киселев [и др.] // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, вып. 2. – С. 239–250.

6. Киселев Е. А. *Построение биортогональных систем для функций Лоренца разной ширины и с общим центром* / Е. А. Киселев // Современные методы краевых задач: матер. междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения XVII". – Воронеж, 2016. – С. 141–143.

7. Киселев Е. А. *Построение функций, ортогональных некоторым семействам целочисленных сдвигов* / Е. А. Киселев // Современные методы краевых задач: матер. междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения XVII". – Воронеж, 2016. – С. 143–144.

Работы [1-5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.