На правах рукописи

КОРНЕВ СЕРГЕЙ ВИКТОРОВИЧ

# Исследование некоторых классов дифференциальных уравнений и включений методами нелинейного анализа

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Воронеж – 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»

**Научный консультант: Обуховский Валерий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет», кафедра высшей математики, заведующий кафедрой.

**Официальные оппоненты:**

**Красносельский Александр Маркович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" », базовая кафедра Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, заведующий кафедрой;

**Перов Анатолий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», кафедра нелинейных колебаний, профессор;

**Родина Людмила Ивановна**, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», кафедра математического анализа, заведующая кафедрой.

**Ведущая организация: ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН»**.

Защита состоится "28" марта 2017 г. в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ВГУ, математический факультет, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/3940/Диссертация_Корнев_С.В..pdf

Автореферат разослан "__" декабря 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Гликлих Ю.Е.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Тридцатые годы прошлого века считаются периодом зарождения теории дифференциальных включений, а работы французского математика А. Маршо и польского математика С. Зарембы - пионерскими. Но только в середине прошлого века теория дифференциальных включений получила мощный импульс развития. Это связано в первую очередь с тем, что дифференциальные включения являются очень удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в ряде разделов теории оптимального управления, математической экономики, математической физики и др. В силу этого, задачи о периодических колебаниях, о глобальной структуре множества периодических решений, об асимптотическом поведении решений для систем такого рода являются весьма актуальными. Периодические задачи для дифференциальных включений исследовались в работах В.И. Благодатских, Ю.Г. Борисовича, А.И. Булгакова, Е.А. Ганго, Б.Д. Гельмана, М.И. Каменского, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, А.И. Поволоцкого, Л.И. Родиной, А.А. Толстоногова, Е.Л. Тонкова, В.В. Филиппова, И.А. Финогенко, J.P. Aubin'a, A. Cellina, K. Deimling'a, L. Górniewicz'a, N.V. Loi'a, N.S. Papageorgiou, S. Plaskacz'a, P. Zecca и др.

Изучению бифуркационного феномена в нелинейных системах посвящены работы М.А. Красносельского, А.В. Арутюнова, Ю.Г. Борисовича, В.Г. Звягина, А.Ф. Измаилова, М.И. Каменского, А.М. Красносельского, В.В. Обуховского, Д.И. Рачинского, Ю.И. Сапронова, J.C. Alexander'a, S. Domachowsk'го, P.M. Fitzpatrick'a, L. Górniewicz'a, W. Kryszewsk'го, N.V. Loi'a, J. Mawhin'a, J. Pejsachowicz'a, P. Rabinovich'a, J.A. Yorke и др.

Вышеупомянутые задачи потребовали для своего изучения развития геометрических и топологических методов анализа многозначных отображений (мультиотображений). Геометрические и топологические методы анализа, применяемые к задачам о нелинейных колебаниях динамических систем, восходят к именам А. Пуанкаре, Л. Брауэра, П.С. Александрова, Г. Хопфа, Ж. Лере, Ю. Шаудера. В дальнейшем эти методы были развиты и продемонстрировали свою эффективность в трудах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, М.И. Каменского, А.М. Красносельского, В.В. Обуховского, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, Д.И. Рачинского, K. Deimling'а, A. Fonda, L. Górniewicz'а, J. Mawhin'а и др. Отметим, в частности, чрезвычайно плодотворное направление, связанное с понятием направляющей функции, основу которого заложили разработки М.А. Красносельского и А.И. Перова.

Кроме того, достаточно действенной здесь оказалась теория топологической степени мультиполей с выпуклыми значениями, разработке которой посвящены труды Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, Ю.Е. Гликлиха, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, J.-P. Aubin'а, R. Bader'а, A. Cellina, J. Dugundji, H. Frankowska, A. Granas'а, A. Lasota, Z. Opial'а и др. Однако в ряде задач теории периодических решений дифференциальных включений аппарат выпуклозначных мультиотображений не может быть непосредственно применен. Достаточно заметить, что многозначный оператор сдвига по траекториям дифференциальных включений не является выпуклозначным даже в простейших случаях.

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке новых геометрических и топологических методов анализа мультиотображений, позволяющих эффективно решать задачи о существовании периодических и ограниченных решений, а также задачи о качественном поведении решений дифференциальных уравнений и включений различных классов.

В работе развивается теория топологической степени мультиполей, соответствующих новым классам мультиотображений, которые естественным образом возникают в приложениях. Один из таких классов составляют мультиотображения, представимые в виде композиции аппроксимируемых мультиотображений и однозначных отображений. Этот класс достаточно обширен: он включает в себя как выпуклозначные полунепрерывные сверху мультиотображения, так и многозначные операторы сдвига по траекториям дифференциальных включений и дифференциальных уравнений, не обладающих свойством единственности решения. Второй рассматриваемый класс – это мультиотображения, обладающие непрерывными сечениями.

Для обоих классов строится топологическая степень совпадения, которая находит приложения в обосновании методов направляющих функций на заданном множестве и интегральных направляющих функций.

Развитые методы применяются к различным категориям задач.

Первым типом рассматриваемых задач является задача о периодических решениях систем, описываемых дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. Для эффективного решения этой задачи применяется модификация классического понятия направляющей функции – направляющая функция на заданном множестве. Существенным преимуществом по сравнению с классическим подходом является возможность "локализовать" проверку основного условия "направляемости" на области пространства, зависящей от самой направляющей функции.

Другим важным развитием метода направляющих функций, получившим отражение в работе, является метод многолистных направляющих функций. Он позволяет существенно расширить классы систем, к которым применимы геометрические методы отыскания периодических решений.

Несомненным достоинством этого метода является не только наличие преимуществ предыдущего подхода, но и возможность проверки основного условия "направляемости" на области не всего пространства, а его подпространства меньшей размерности.

При исследовании периодической задачи для дифференциальных включений, помимо метода строгой многолистной направляющей функции, вводится его более общий случай: метод обобщенной многолистной направляющей функции. Не менее эффективным оказался и метод нескольких многолистных направляющих функций. Применение комплекса этих методов позволило получить ряд существенно новых результатов о существовании периодических решений дифференциальных уравнений и включений.

В диссертации рассматривается также задача о периодических решениях систем, описываемых функционально-дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. Для ее решения был введен новый класс направляющих функций – интегральные направляющие функции.

Существенным развитием метода интегральных направляющих функций является его обобщение на включения с каузальными операторами. Отметим, что это понятие было впервые введенно Л. Тонелли и А.Н. Тихоновым и оказалось мощным инструментом для унификации задач в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений Вольтерра, функциональных уравнений нейтрального типа и др.

В классических работах по методу направляющих функций, как правило, предполагается, что эти функции являются гладкими на всем фазовом пространстве. Это условие может представиться ограничительным, например, в таких ситуациях, когда направляющие потенциалы различны в различных областях пространства. Для снятия указанного ограничения в диссертации рассматриваются негладкие направляющие потенциалы для каждого класса направляющих функций и их обобщенные градиенты.

Универсальность рассматриваемых в диссертации методов позволяет применять их и к задаче о существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений и включений, а так же функционально-дифференциальных уравнений и включений различных классов.

Третьим типом рассматриваемых задач является исследование асимптотического поведения решений дифференциальных и функционально-дифференциальных включений различных классов. Разработанные в диссертации методы позволяют получить существенно новые оценки норм траекторий соответствующих дифференциальных включений.

Завершается ряд рассматриваемых в диссертации проблем задачей о бифуркации периодических решений дифференциальных включений. Для ее решения предлагается новый подход на основе понятия многолистной направляющей функции, позволяющий значительно облегчить нахождение ключевой характеристики данной задачи – бифуркационного индекса.

Значительная часть результатов, полученных в диссертационной работе для дифференциальных включений, является новой и для теории дифференциальных уравнений.

**Цель диссертационной работы.** Разработка на основе развития теории топологической степени для новых классов мультиотображений метода направляющих функций трех новых типов: направляющих функций на заданном множестве, интегральных и многолистных направляющих функций. Получение новых приложений разработанных методов к задачам о существовании периодических и ограниченных решений, о качественном поведении решений дифференциальных уравнений и включений.

**Методы исследования.** При решении изложенных выше задач используются методы многозначного анализа, нелинейного функционального анализа, негладкого анализа, качественной теории дифференциальных уравнений и включений, а также теории бифуркаций.

**Научная новизна.** Все результаты диссертационной работы являются новыми. Наиболее значимыми являются следующие результаты:

1) построена теория топологической степени мультиполей, соответствующих новым классам мультиотображений с невыпуклыми значениями в конечномерном и нормированном пространствах;

2) развита на основе построенной топологической степени теория степени совпадения для соответствующих классов мультиотображений и линейных фредгольмовых отображений;

3) введено понятие набора направляющих функций для случая дифференциальных включений и получены достаточные условия существования их периодических решений;

4) осуществлена локализация метода направляющих функций для диффе-

ренциальных включений;

5) введен в рассмотрение класс интегральных направляющих функций для исследования существования периодических решений функционально-дифференциальных включений;

6) обобщен метод интегральных направляющих функций на случай дифференциальных включений с каузальными операторами и получены новые достаточные условия существования их периодических решений;

7) введен класс многолистных векторных направляющих функций (МВНФ) как новый инструмент исследования вынужденных колебаний в динамических системах, описываемых дифференциальными включениями;

8) получены в терминах полного набора строгих (обобщенных) МВНФ и правильной МВНФ новые достаточные условия существования периодических решений дифференциальных уравнений и включений;

9) указанные выше классы направляющих функций применены к новым задачам исследования асимптотического поведения решений дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и включений;

10) все предложенные классы направляющих функций расширены на случай негладких потенциалов;

11) существенно расширены классы динамических систем, к которым применимы разработанные в диссертации методы (в частности, на системы, описываемые дифференциальными и функционально-дифференциальными включениями, правые части которых не обладают свойством выпуклости значений и являются, например, нормальными мультиотображениями);

12) распространен метод МВНФ на задачу исследования бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений и включений.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. В диссертации разработан достаточно широкий спектр новых методов нелинейного и многозначного анализа, которые эффективно применены в исследовании периодических и ограниченных решений, асимптотического поведения решений, а также бифуркации периодических решений систем, описываемых различными классами дифференциальных уравнений и включений. Результаты диссертационной работы могут применяться в теории оптимального управления, в задачах математической экономики и физики, теории игр. Отдельные элементы диссертации включены в программу дисциплины "Математические методы в решении прикладных задач", читаемой в рамках магистерской программы "Математическое образование" в Воронежском госпедуниверситете.

**Степень достоверности и апробация результатов работы.** Результаты диссертации докладывались на международной научной конференции "Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения" (Воронеж, 2000), Воронежских зимних математических школах (Воронеж, 2002, 2004, 2008, 2015, 2016), Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2002, 2014–2016), международных школах-семинарах по геометрии и анализу (Абрау-Дюрсо, 2002, 2004), международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Воронеж, 2003), международных научных конференциях "Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики" (Тамбов, 2003, 2015), международной научной конференции "Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения" (Воронеж, 2005), международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология" (Москва, 2008), международных научных конференциях "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум"(Крым, 2009, 2014–2016), международной открытой конференции "Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях" (Воронеж, 2014), международной математической конференции "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям" (Минск, 2015), Всероссийской конференции с международным участием "Теория управления и математическое моделирование" (Ижевск, 2015), международной школе-семинаре "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" (Иркутск, 2016), Symposium on

Nonlinear Analysis (Торунь, Польша, 2007, 2015), International Symposium on Optimization and Optimal Control (приглашенный докладчик, член организационного и программного комитетов, Гаосюн, Тайвань, 2009), The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Москва, 2014), International Workshop on Nonlinear and Variational Analysis (приглашенный докладчик, Гаосюн, Тайвань, 2016) и других конференциях. Результаты обсуждались на семинарах под руководством профессора А.И. Перова (Воронеж, 2002, 2003), профессора В.В. Обуховского (Воронеж, 2000–2016), профессора М.И. Каменского (Воронеж, 2006, 2011), профессора Л.И. Родиной (Ижевск, 2015), а также во время стажировки в Национальном университете им. Сун Ят-Сена (Гаосюн, Тайвань, июль-август, 2016).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны РФФИ грант № 03-01-06293 "Молодые ученые, аспиранты и студенты" (2003); грантом для молодых участников проекта VZ–010 "Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах" Минобразования РФ и CRDF (США) (2004) и грантом на участие в работе школы "SPDE in Hydrodynamics: Recent Progress and Prospects" фонда CIME (Италия) (2005).

Предложенные понятия, утверждения, методы исследования вошли в отчеты по грантам Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 02-01-00189, 05-01-00100-а, 08-01-00192-а, 09-01-92003-ННС-а, 09-01-92429-КЭ_а, 11-01-00328-а, 12-01-00392-а, 14-01-92004 ННС_а, 14-01-00468 А, 16-01-00386 А), Министерства образования и науки РФ (проект № 3488) и Российского научного фонда (проект № 14-21-00066).

В 2014 г. за монографию "Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis" диссертант был удостоен в составе авторского коллектива премии правительства Воронежской области за достижения в области науки и образования.

**Публикации.** Основные результаты отражены в работах [1-37], в том числе в монографии [1] и статьях [2-22], опубликованных в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1], [3-8], [10], [15], [17], [19], [21-26] и [30] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация изложена на 272 страницах и состоит из введения, пяти глав, содержащих 13 параграфов, и списка цитируемой литературы, включающего 155 наименований.

## Обзор содержания диссертации

Пусть $X$ – метрическое, $Y$ – нормированное пространства. Символами $K(Y)$ $[Kv(Y)]$ обозначаются совокупности непустых компактных [соответственно, непустых компактных выпуклых] подмножеств $Y$. Пусть $I$ – замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега $\mu$.

Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется удовлетворяющим *верхним [нижним] условиям Каратеодори*, если для каждого фиксированного $x \in X$ мультиотображение $F(\cdot, x) : I \to K(Y)$ измеримо и почти для каждого фиксированного $t \in I$ мультиотображение $F(t, \cdot) : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху [соответственно, полунепрерывно снизу].

Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет *условию подлинейного роста*, если существует положительная суммируемая по Лебегу на $I$ функция $\alpha(\cdot)$ такая, что почти для всех (п.в.) $t \in I$

$$\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется *почти полунепрерывным снизу*, если существует последовательность непересекающихся компактных множеств $\{I_n\}, I_n \subseteq I$, таких, что (i) $\mu(I \setminus \bigcup\limits_n I_n) = 0$; (ii) сужение $F$ на каждое множество $J_n = I_n \times X$ является полунепрерывным снизу.

Ограниченное мультиотображение $R : I \times X \to K(Y)$ называется *нормальным*, если найдется мультиотображение $F : I \times X \to Kv(Y)$, называемое *нормальным квазисечением* мультиотображения $R$, удовлетворяющее следующим условиям: (i) мультиотображение $F$ удовлетворяет верхним условиям

Каратеодори и условию подлинейного роста; (ii) $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \emptyset$ для всех $t \in I,\ x \in X$; (iii) каждое решение $x : I \to X$ дифференциального включения $x'(t) \in F(t, x(t))$ является также решением включения $x'(t) \in R(t, x(t))$.

Всюду в дальнейшем под решением дифференциального включения понимается абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая этому включению почти в каждой точке.

Дадим обзор диссертации по главам. Нумерация приводимых ниже определений и утверждений совпадает с их нумерацией в диссертации.

Во **введении** обосновывается актуальность темы, описывается методика исследований и дается краткий обзор основных результатов.

**Первая глава** носит вспомогательный характер и посвящена изложению необходимых понятий и утверждений функционального анализа, негладкого анализа, теории многозначных отображений и теории бифуркаций.

Во **второй главе** на основе классической теории топологической степени непрерывных векторных полей в конечномерном пространстве определяется топологическая степень мультиполей, соответствующих мультиотображениям определяемого ниже класса $\mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$, где $U \subset E_n$ – открытое ограниченное множество конечномерного линейного топологического пространства $E_n$.

**Определение 2.1.10.** *Классом* $\mathcal{A}_0(X,Y)$ называется совокупность полунепрерывных сверху мультиотображений $G : X \to K(Y)$, допускающих для каждого $\varepsilon > 0$ однозначную $\varepsilon$-аппроксимацию.

В классе $\mathcal{A}_0(X,Y)$ выделяется *подкласс* $\mathcal{A}(X,Y)$, состоящий из мультиотображений, любые две аппроксимации которых могут быть соединены деформацией, протекающей в классе аппроксимаций.

**Определение 2.1.13.** *Классом* $\mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$ называется совокупность мультиотображений $F : \overline{U} \to K(E_n)$, не имеющих неподвижных точек на $\partial U$, вида $F = f \circ G$, где $G$ из класса $\mathcal{A}(\overline{U}, Y)$ и $f : Y \to E_n$ – непрерывное отображение.

С помощью метода аппроксимаций определяется топологическая степень

$\deg(\Phi, \overline{U})$ мультиполя $\Phi = i - F,\ F = (f \circ G) \in \mathcal{CA}_{\partial U}(\overline{U}, E_n)$.

Приведены примеры мультиотображений класса $\mathcal{CA}(\overline{U}, E_n)$, естественно возникающие в приложениях, и исследованы основные свойства степени.

Во **втором параграфе** вводится понятие топологической степени мультиполей, порожденных мультиотображениями класса $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, где $U \subset E$ – открытое ограниченное множество нормированного пространства $E$.

**Определение 2.2.1.** *Классом* $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, Y)$ называется совокупность мультиотображений $G : \overline{U} \to K(Y)$ таких, что для любого конечномерного подпространства $E_n \subset E$ мультиотображение $G_n = G|_{\overline{U}_n}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(\overline{U}_n, Y)$, где $\overline{U}_n = \overline{U} \cap E_n$.

**Определение 2.2.2.** *Классом* $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ называется совокупность компактных мультиотображений $F : \overline{U} \to K(E)$, не имеющих неподвижных точек на $\partial U$, вида $F = f \circ G$, где $G$ из класса $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, Y)$ и $f : Y \to E$ – непрерывное отображение.

Топологическая степень вводится с помощью метода конечномерных аппроксимаций. Обосновывается корректность введенной характеристики и описываются ее основные свойства.

Содержание **третьего параграфа** составляет определение понятия топологической степени мультиполей, соответствующих мультиотображениям класса $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, где $U \subset E$ – открытое ограниченное множество нормированного пространства $E$.

Пусть $X$ – метрическое пространство, $Y$ – банахово пространство.

**Определение 2.3.1.** Мультиотображение $G : X \to P(Y)$ принадлежит *классу* $\mathcal{S}(X, Y)$, если оно удовлетворяет условиям:

$\mathcal{S}_1$) мультиотображение $G$ обладает непрерывным сечением;

$\mathcal{S}_2$)"цилиндрическое продолжение" $G' : X \times [0,1] \to P(Y)$, заданное как $G'(x, \lambda) = G(x)$ для всех $(x, \lambda) \in X \times [0,1]$, обладает следующим свойством продолжения сечения: любое непрерывное сечение сужения $G'$ на $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$ можно продолжить до непрерывного сечения $G'$.

Классу $\mathcal{S}(X, Y)$ принадлежат полунепрерывные снизу мультиотображения с замкнутыми выпуклыми или разложимыми значениями [1].

Определяется топологическая степень $\deg(\Phi, \overline{U})$ мультиполя $\Phi = i - F$, где $F = (f \circ G)$ из класса $\mathcal{CS}_{\partial U}(\overline{U}, E)$. Доказываются корректность данного определения и описываются основные свойства степени.

В **четвертом параграфе** вводится понятие степени совпадения рассмотренных выше классов мультиотображений и линейного фредгольмова отображения.

Пусть $E_1, E_2$ – банаховы пространства, $U \subset E_1$ – открытое ограниченное множество, $l : \operatorname{dom} l \subseteq E_1 \to E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\operatorname{Im} l \subset E_2$ – замкнутое множество.

Рассматриваются линейные непрерывные операторы проектирования $p : E_1 \to E_1$ и $q : E_2 \to E_2$ такие, что $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} l,\ \operatorname{Im} l = \operatorname{Ker} q$.

Символом $l_p$ обозначается сужение оператора $l$ на $\operatorname{dom} l \cap \operatorname{Ker} p$.

Пусть оператор $k_{p,q} : E_2 \to \operatorname{dom} l \cap \operatorname{Ker} p$ задан соотношением $k_{p,q}(y) = l_p^{-1}(y - q(y)),\ \ y \in E_2$, канонический оператор проектирования $\pi : E_2 \to E_2/\operatorname{Im} l$ имеет вид $\pi(y) = y + \operatorname{Im} l$, а $\phi : \operatorname{Coker} l \to \operatorname{Ker} l$ – линейный гомеоморфизм.

Далее, пусть $G \in \widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_2)$ – $l$-компактное мультиотображение. Подкласс класса $\widetilde{\mathcal{A}}(\overline{U}, E_2)$, состоящий из мультиотображений $G$ таких, что $l(x) \notin G(x)$ для всех $x \in \partial U \cap \operatorname{dom} l$, обозначается $\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$.

**Определение 2.4.3.** *Степенью совпадения* $\deg(l, G, \overline{U})$ *пары* $(l, G)$, где $G$ из класса $\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$, назовем топологическую степень $\deg(\Phi, \overline{U})$ компактного мультиполя $\Phi = i - F$, соответствующего мультиотображению $F$ из класса $\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{A}}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_1)$, заданному как

$$F(x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ G(x), \quad x \in \overline{U}.$$

Исследуются основные свойства введенной степени совпадения и приво-

[1] Пусть $E$ – сепарабельное банахово пространство; $L^1([a,b]; E)$ обозначает банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых по Бохнеру функций $f : [a,b] \to E$. Тогда непустое множество $M \subset L^1([a,b]; E)$ называется разложимым, если для любых $f, g \in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m \subset [a,b]$ выполнено $f\kappa_m + g\kappa_{([a,b]\setminus m)} \in M$, где $\kappa_m$ – характеристическая функция множества $m$.

дятся приложения к ряду теорем о существовании точек совпадения.

**Теорема 2.4.3.** *Пусть мультиоператоры $\pi \circ G$ и $k_{p,q} \circ G$ компактны и выполнены условия: (i) $l(x) \notin \lambda G(x)$ для всех $\lambda \in (0,1)$, $x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$; (ii) $0 \notin \pi G(x)$ для всех $x \in \operatorname{Ker} l \cap \partial U$; (iii) $\deg_{\operatorname{Ker} l}(\phi\pi G|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0$, где символ $\deg_{\operatorname{Ker} l}$ обозначает топологическую степень, вычисляемую в подпространстве $\operatorname{Ker} l$, а $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$. Тогда включение $l(x) \in G(x)$ имеет решение в $U$.*

Определяется также степень совпадения для случая, когда мультиотображение $G$ из класса $\mathcal{S}_{\partial U \cap \operatorname{dom} l}(\overline{U}, E_2)$ и изучаются ее основные свойства.

**Третья, четвертая и пятая главы** посвящены разработке существенно новых подходов к исследованию динамических систем, описываемых дифференциальными и функционально-дифференциальными уравнениями и включениями, на основе трех новых классов направляющих функций: направляющих функций на заданном множестве, интегральных и многолистных направляющих функций. Указанные подходы и различные их модификации, а также полученные в предыдущей главе результаты, применяются к задачам о периодических решениях различных классов дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и включений (как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений), об асимптотическом поведении решений и о бифуркации периодических решений.

В **первом параграфе третьей главы** вводится понятие направляющей функции на заданном множестве.

Сначала рассматривается периодическая задача для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \tag{1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{2}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ по первому аргументу $T$-периодично ($T > 0$), удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Всюду в дальнейшем под решением задачи (1), (2) понимается абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая условию (2) и включению (1) почти в каждой точке.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – непустое множество, $\Gamma(G) := \{x \in C_T : x(t) \in G$ для всех $t \in [0, T]\}$. Для функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ пусть $\mathcal{V}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) > r\}$. Непрерывно дифференцируемая функция $V : G \to \mathbb{R}$ называется *невырожденным потенциалом*, если $\nabla V(x) \neq 0$ для всех $x \in G$.

**Определение 3.1.2.** Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *направляющей функцией на множестве* $G$ для включения (1), если

$$\langle \nabla V(x), y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } \ x \in G, \ y \in F(t, x). \tag{3}$$

**Теорема 3.1.1.** *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – *такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия: (i)* $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством; (ii)* $V$ *является направляющей функцией для включения (1) на* $V^{-1}(0)$*; (iii)* $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

*Тогда задача (1), (2) имеет решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$.

**Определение 3.1.3.** Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной направляющей функцией на множестве* $G$ для включения (1), если условие (3) выполнено хотя бы для одного $y \in F(t, x)$.

Обосновано существование решения задачи (1), (2) в случае, когда включение (1) имеет обобщенную направляющую функцию (теорема 3.1.2).

Далее рассматривается периодическая задача для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x(t)), \tag{4}$$

в предположении, что нормальное мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $T$-периодичности по первому аргументу.

Вводится понятие направляющей функции на заданном множестве для включения (4) и приводится достаточное условие существования периодических решений (теорема 3.1.3).

В конце параграфа вводятся понятия негладких направляющих функций для различных классов дифференциальных включений.

Локально липшицева функция $V : G \to \mathbb{R}$ называется *прямым потенциалом на $G$*, если $\langle \upsilon, \widetilde{\upsilon} \rangle > 0$ для всех $\upsilon, \widetilde{\upsilon} \in \partial V(x)$, $x \in G$, где $\partial V : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ – обобщенный градиент Кларка функции $V$.

**Определение 3.1.6.** Прямой потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется *негладкой направляющей функцией на $G$* для включения (1), если для каждых $x \in G, \upsilon \in \partial V(x)$ и $t \in [0, T]$ выполнено

$$\langle \upsilon, y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех} \;\; y \in F(t, x). \tag{5}$$

Напомним, что локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *регулярной*, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x, \nu)$, равная обобщенной производной Кларка $V^0(x, \nu)$.

**Теорема 3.1.4.** *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная функция такая, что выполняются следующие условия: (i) $\mathcal{V}_0$ является непустым, открытым и ограниченным множеством; (ii) $V$ является негладкой направляющей функцией для включения (1) на множестве $V^{-1}(0)$; (iii)* $\deg(\partial V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

*Тогда задача (1), (2) имеет решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$.*

Для дифференциального включения с ограниченной непрерывной правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений, доказывается аналог теоремы 3.1.4 (теорема 3.1.5).

**Второй параграф** посвящен исследованию с помощью метода направляющих функций асимптотического поведения решений различных классов дифференциальных включений. Для дифференциальных уравнений этот тип поведения тесно связан с существованием гетероклинических и гомоклинических решений. Идея установления того факта, что решение $x(\cdot)$ является гомоклиническим, сводится к получению оценки вида

$$\|x(t)\| \le k \cdot h(t), \quad t \in \mathbb{R},\ k > 0, \tag{6}$$

где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $\lim_{t\to\pm\infty} h(t) = 0$.

Сначала рассматривается задача о существовании решений, удовлетворяющих оценке (6), для дифференциального включения вида (1) в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Под решением включения (1) на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ понимается абсолютно непрерывная функция $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая почти в каждой точке включению (1) и начальному условию

$$x(0) = x_0. \tag{7}$$

Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – четная, непрерывно дифференцируемая функция, для которой $\inf\{g(t),\ t \in \mathbb{R}\} \ge 1$.

**Определение 3.2.2.** Регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *негладким направляющим потенциалом* для включения (1) вдоль функции $g(\cdot)$, если найдется $r_0 > 0$ такое, что условие $g(t)\|x\| \ge r_0,\ t \in \mathbb{R}$, влечет

$$\langle v, g'(t)x + g(t)y\rangle \ge 0 \text{ при } t > 0; \qquad \langle v, g'(t)x + g(t)y\rangle \le 0 \text{ при } t < 0;$$

для всех $y \in F(t,x),\ v \in \partial V(g(t)x)$.

Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является негладким направляющим потенциалом для включения (1) вдоль функции $g(\cdot)$.

**Теорема 3.2.2.** *Если для функции $V$ выполнено условие коэрцитивности $\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = -\infty$, то каждое решение задачи Коши (1), (7) удовлетворяет оценке $\|x(t)\| \le k \cdot \frac{1}{g(t)},\ t \in \mathbb{R}$, для некоторого $k > 0$.*

Использование предложенного подхода позволяет получить оценки норм траекторий и для диффернциальных включений, правые части которых не обладают свойством выпукости значений (теоремы 3.2.3 и 3.2.4).

В **первом параграфе четвертой главы** вводится понятие интегральной направляющей функции.

Для $\tau > 0$ символом $\mathcal{C}$ обозначается пространство $\mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Для функции $x(\cdot) \in \mathcal{C}([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$, $T > 0$, символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $t \in [0, T]$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Сначала рассматривается периодическая задача для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x_t) \tag{8}$$

в предположении, что $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ по первому аргументу $T$-периодично, удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию

$F_3'$) для любого ограниченного подмножества $\Omega \subset \mathcal{C}$ существует функция $\alpha_\Omega(\cdot) \in L^1_+[0, T]$ такая, что для каждого $\varphi \in \Omega$ имеем $\|F(t, \varphi)\| := \max_{y \in F(t,\varphi)} \|y\| \leq \alpha_\Omega(t)$ п.в. $t \in [0, T]$.

При этих условиях определен замкнутый мультиоператор суперпозиции $P_F : C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$, порожденный мультиотображением $F$.

Символом $C_T$ обозначается – пространство непрерывных $T$-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, а через $\|x\|_2$ – интегральная норма функции $x$: $\|x\|_2 = \left( \int\limits_0^T \|x(s)\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

**Определение 4.1.1.** Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *невырожденным потенциалом*, если найдется $K > 0$ такое, что $\nabla V(x) \neq 0$, для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq K$.

Заметим, что из определения невырожденного потенциала $V$ вытекает, что на каждом замкнутом шаре $B_{\widetilde{K}} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $\widetilde{K} \geq K$ топологическая степень $\deg(\nabla V; B_{\widetilde{K}})$ корректно определена и, более того, ее значения не зависят от радиуса $\widetilde{K}$. Это общее значение степени называется *индексом на бесконечности* $\mathrm{ind}\,(V, \infty)$ невырожденного потенциала $V$.

**Определение 4.1.2.** Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *строгой интегральной направляющей функцией* для включения (8), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds > 0 \quad \text{для всех } f \in P_F(x),$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

**Теорема 4.1.1.** *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– строгая интегральная направляющая функция включения (8), такая, что* $\mathrm{ind}\,(V, \infty) \neq 0$. *Тогда периодическая задача для включения (8) имеет решение.*

В качестве примеров рассматривается разрешимость периодической задачи для дифференциальных включений с запаздыванием, полулинейных и градиентных функционально-дифференциальных включений.

Достаточное условие существования $T$-периодических решений оказывается справедливо и при более общих условиях (теорема 4.1.5).

**Определение 4.1.3.** Невырожденный потенциал $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной интегральной направляющей функцией* для включения (8), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds \geq 0 \quad \text{хотя бы для одного } \; f \in P_F(x), \tag{9}$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Если соотношение (9) выполняется для всех $f \in P_F(x)$, то невырожденный потенциал $V$ называется *интегральной направляющей функцией.*

Развитая теория степени совпадения и метод интегральных направляющих функций позволяют изучать периодическую задачу для включения (8) в предположении, что мультиотображение $F$ имеет невыпуклые значения и почти полунепрерывно снизу (теорема 4.1.6), в случае, когда $F$ – нормальное невыпуклозначное мультиотображение (теорема 4.1.8), а также в ситуации, когда $F$ – каузальный мультиоператор (теоремы 4.1.9 и 4.1.10).

Во второй части параграфа описываемый метод распространяется на случай негладких интегральных направляющих функций.

**Определение 4.1.8.** Прямой потенциал $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *негладкой интегральной направляющей функцией* для включения (8), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s) \rangle \, ds \geq 0 \quad \text{для всех } \ f \in P_F(x),$$

для всех суммируемых сечений $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$, для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

**Теорема 4.1.12.** *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– регулярная негладкая интегральная направляющая функция для включения (8) такая, что* $\operatorname{ind}(V, \infty) \neq 0$. *Тогда периодическая задача для включения (8) имеет решение.*

Завершается параграф рассмотрением достаточных условий разрешимости периодической задачи для функционально-дифференциальных включений, правые части которых не обладают свойством выпуклости значений, но почти полунепрерывны снизу (теорема 4.1.13), в случае, когда $F$ – непрерывное ограниченное мультиотображение (теорема 4.1.14), а также в ситуации, когда $F$ – каузальный мультиоператор (теоремы 4.1.15 и 4.1.16).

**Второй параграф** посвящен исследованию с помощью метода интегральных направляющих функций асимптотического поведения решений различных классов функционально-дифференциальных включений.

Для $h > 0$ символом $\mathcal{C}$ обозначается пространство $C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [-h,0]} \|x(t)\|$. Для данной функции $\psi \in \mathcal{C}$, символом $\mathcal{D}_\psi$ обозначается множество всех непрерывных функций $x : [-h, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$ и сужение $x$ на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ является абсолютно непрерывной функцией.

Для функции $x \in \mathcal{D}_\psi$ и $t \geq 0$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Рассматривается задача Коши для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x_t) \quad \text{п.в.} \;\; t \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

$$x(t) = \psi(t) \quad t \in [-h, 0], \tag{11}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Исследуется вопрос о существовании решений задачи (10), (11), удовлетворяющих следующей оценке:

$$\|x(t)\| \leq \frac{k}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \; k > 0, \tag{12}$$

где $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\inf\{g(t), \; t \in \mathbb{R}_+\} \geq 1$.

Для каждого начального условия $\psi \in \mathcal{C}$ под решением задачи (10), (11) понимается функция $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющая (10) п.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

Приведем здесь только случай негладкого направляющего потенциала. Обозначим символом $\mathfrak{V}$ совокупность всех регулярных функций $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию коэрцитивности $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$.

**Определение 4.2.1.** Функция $V \in \mathfrak{V}$ называется *негладким интегральным направляющим потенциалом* для включения (10) вдоль функции $g$, если существует $r_V > g(0)\|\psi(0)\|$ такое, что для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющей следующим условиям: (i) существует число $\tau_1^x > 0$ такое, что $g(t)\|x(t)\| \leq r_V$ для всех $t \in [0, \tau_1^x)$; (ii) существует число $\tau_*^x > \tau_1^x$ такое, что $g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V := k(r_V)$; (iii) $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$; имеем

$$\int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \big\langle v(s), g'(s)x(s) + g(s)f(s) \big\rangle ds \geq 0$$

для всех суммируемых сечений $v(s) \in \partial V(g(s)x(s))$ и $f(s) \in F(s, x_s)$, где $\tau_\sharp^x := \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x), \; \|g(\tau)x(\tau)\| = r_V\}$.

**Теорема 4.2.1.** *Если $V \in \mathfrak{V}$ является негладким интегральным направ-*

*ляющим потенциалом для включения (10) вдоль функции $g$, то каждое решение задачи Коши (10), (11) удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|x(t)\| \leq k_V \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Введению для дифференциальных включений различных классов понятия многолистной векторной направляющей функции (МВНФ) и его обобщению на негладкие направляющие потенциалы посвящена **пятая глава**.

В **первом параграфе** рассматривается периодическая задача для дифференциального включения вида (1) в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху по совокупности переменных и $T$-периодично по первому аргументу.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть $q$ – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = i - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через $\xi$, а элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ – через $\zeta$.

Пусть $\varphi, \rho$ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Рассматривается многолистная риманова поверхность $\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}$. Пусть на $\Pi$ задана непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi, \rho)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho)}{\partial \varphi} > 0, \quad W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi, \rho) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \tag{13}$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию коэрцитивности

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} V(\zeta) = +\infty. \tag{14}$$

Для $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ и $\vartheta > \vartheta_0 = \min V(\zeta)$ выделена область

$$\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(pz) < \vartheta, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}.$$

Пусть непрерывные функции $\alpha(\cdot),\ \beta(\cdot)$ такие, что п.в. $t \in [0,T]$

$$\sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \sup_{y\in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy\rangle < \alpha(t), \tag{15}$$

$$\inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)} \inf_{y\in F(t,z)} \langle \nabla W(qz), qy\rangle > \beta(t), \tag{16}$$

$$2\pi(N-1) < \int\limits_0^T \alpha(\tau)d\tau, \quad \int\limits_0^T \beta(\tau)d\tau < 2\pi N, \quad N - \text{целое число.} \tag{17}$$

**Определение 5.1.1.** Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (13)–(17), будем называть *строгой МВНФ* для включения (1) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{y\in F(t,z)} \frac{|\langle qy, qz\rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2-\rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2); \tag{18}$$

$$\langle \nabla V(pz), py\rangle < 0, \quad y \in F(t,z), \quad V(pz) \geq \vartheta, \quad \|qz\| \leq \rho_2. \tag{19}$$

Для $\rho_0 = (\rho_1+\rho_2)/2$ пусть $G(\vartheta,\rho_0) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : V\left(pz\right) < \vartheta,\ \|qz\| < \rho_0\right\}$.

**Теорема 5.1.1.** *Пусть для включения (1) можно указать строгую МВНФ относительно области* $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$. *Тогда включение (1) имеет* $T$-*периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G(\vartheta,\rho_0)},\ t \in [0,T]$.

В качестве примера рассматривается разрешимость периодической задачи для полулинейного дифференциального включения.

Рассматриваемый метод оказывается эффективен и при более общих условиях, когда неравенство (19) предполагается выполненным в нестрогой форме и хотя бы для некоторых $y \in F(t,z)$ (теорема 5.1.2).

Далее исследуется задача о существовании периодических решений дифференциальных включений вида (1) в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ по первому аргументу $T$-периодично и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори (теорема 5.1.3).

Применение метода многолистной направляющей функции позволяет получить условие существования периодических решений и в случае дифференциальных включений с нормальной правой частью (теорема 5.1.4).

Метод многолистных направляющих функций эффективен и в случае негладких направляющих потенциалов как для дифференциальных уравнений (теоремы 5.1.5 и 5.1.7), так и для дифференциальных включений с выпуклозначной правой частью (теоремы 5.1.6, 5.1.8, 5.1.9) и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений (теорема 5.1.10).

В завершение параграфа рассматриваются методы нескольких направляющих функций: полного набора строгих МВНФ, полного и острого набора обобщенных МВНФ и правильной МВНФ как для дифференциальных уравнений, так и для дифференциальных включений различных классов, в том числе с невыпуклозначной правой частью. Кроме того, эти методы обобщаются на случай негладких направляющих потенциалов. Применение комплекса этих методов позволило получить ряд новых результатов о существовании периодических решений дифференциальных уравнений и включений (теоремы 5.1.11 – 5.1.32).

Основной целью **второго параграфа** является применение метода многолистных направляющих функций к исследованию бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений и включений.

Пусть $U$ открытое множество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $\Lambda := \{\mu \in \mathbb{R}^k \mid (0, \mu) \in U\}$.

Здесь рассматривается только случай периодической задачи для семейства дифференциальных включений следующего вида:

$$z'(t) \in F(t, z(t), \mu), \tag{20}$$

в предположении, что: $(H_1)$ мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и $T$-периодично по первому аргументу; $(H_2)$ для каждого $\mu \in \Lambda$ включение (20) имеет решение $z : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, для которого $z(0) = z(T) = 0$.

Под решением включения (20) понимается пара $(z, \mu)$, удовлетворяющая почти в каждой точке включению (20), где $z \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ – абсолютно непрерывная $T$-периодическая функция, $\mu \in \Lambda$.

На $\Pi \times \Lambda$ пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $W(\xi, \mu)$

такая, что для каждого $\mu \in \Lambda$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} > 0, \quad W(\varphi + 2\pi, \rho, \mu) = W(\varphi, \rho, \mu) + 2\pi, \ \ (\varphi, \rho) \in \Pi. \tag{21}$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2} \times \Lambda$ пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta, \mu)$, для которой $\frac{\partial V(0,\mu)}{\partial \zeta} = 0$ и выполнено условие коэрцитивности.

Для каждого $\mu \in \Lambda$ выбираются $\rho_1 := \rho_1(\mu)$, $\rho_2 := \rho_2(\mu)$ такие, что $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ и для $\vartheta_0 := \min V(\zeta, \mu)$ берется $\vartheta := \vartheta(\mu)$ такое, что $\vartheta > \vartheta_0$. Пусть $\Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(pz, \mu) < \vartheta, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}$.

Предполагается, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(t, \mu)$, $\beta(t, \mu)$ такие, что для каждого $\mu \in \Lambda$ и п.в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z,\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial (qz)}, qy \right\rangle < \alpha(t, \mu), \tag{22}$$

$$\inf_{z \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t,z,\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial (qz)}, qy \right\rangle > \beta(t, \mu), \tag{23}$$

$$2\pi(N_\mu - 1) < \int_0^T \alpha(\tau, \mu) d\tau, \ \int_0^T \beta(\tau, \mu) d\tau < 2\pi N_\mu, \text{ где } N_\mu - \text{целое число.} \tag{24}$$

**Определение 5.2.2.** Пара функций $\{V(\zeta, \mu), W(\xi, \mu)\}$, обладающих свойствами (21)–(24), называется *строгой МВНФ* относительно области $\Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$ для включения (20), если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{y \in F(t,z,\mu)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2);$$

$$\left\langle \frac{\partial V(pz, \mu)}{\partial (pz)}, py \right\rangle < 0, \quad y \in F(t, z, \mu), \ V(pz, \mu) \geq \vartheta, \ \|qz\| \leq \rho_2.$$

**Теорема 5.2.2.** *Предположим, что выполнены условия $(H_1)$ и $(H_2)$. Для включения (20) пусть указана строгая МВНФ $\{V(\zeta, \mu), W(\xi, \mu)\}$ относительно области $\Omega\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$ для каждого $\mu : |\mu - \mu_0| \geq r$. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:*

(*i*) *существуют последовательность* $\{(y_n, \mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\mu_n \to \overline{\mu}$, $|\overline{\mu} - \mu_0| = r$, $y_n \in \mathbb{R}^n$, $y_n \neq y_m$ *для* $n \neq m$, *и последовательность* $(z_n)$ *решений включения (20) при* $\mu = \mu_n$ *такие, что* $z_n(0) = z_n(T) = y_n \to 0$ *и* $z_n \to \overline{z}$, *где* $\overline{z}$ *– решение включения (20) при* $\mu = \overline{\mu}$ *такое, что* $\overline{z}(0) = \overline{z}(T) = 0$;

(*ii*) *существует связное множество* $C$ *точек* $(y, \mu)$, $y \neq 0$, *такое, что*

- $(0, \overline{\mu}) \in \overline{C}$ *при* $|\overline{\mu} - \mu_0| < r$;
- $C$ *– неограниченно и либо* $\overline{C} \cap \partial U \neq \emptyset$, *либо* $(0, \widetilde{\mu}) \in \overline{C}$ *для некоторого* $\widetilde{\mu} \in \Lambda : |\widetilde{\mu} - \mu_0| > r$;
- *каждой точке* $(y, \mu) \in \overline{C}$ *соответствует решение* $z : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *включения (20) такое, что* $z(0) = z(T) = y$. *В частности, существует последовательность* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *решений включения (20) для* $\mu = \mu_n$, $z_n(0) = z_n(T) = y_n$, *где* $\mu_n \to \overline{\mu} \in \Lambda$, $\|\overline{\mu} - \mu_0\| < r$, *сходящаяся к решению* $\overline{z}$ *включения (20) для* $\mu = \overline{\mu}$, $\overline{z}(0) = \overline{z}(T) = 0$.

Автор глубоко признателен научному консультанту профессору В.В. Обуховскому за постоянное внимание и полезные обсуждения.

**Публикации автора по теме диссертации**

**Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ**

1. Kornev S. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N.V. Loi, S. Kornev. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. – 2013. – 177 p.

2. Корнев С.В. О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3. – С. 72-83.

3. Корнев С.В. О некоторых обобщениях метода направляющей функции в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2003. – Т. 8, Вып. 3. – С. 399.

4. Корнев С.В. О негладких многолистных направляющих функциях / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1497-1502.

5. Корнев С.В. Негладкие направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 1. – С. 3-12.

6. Корнев С.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 5. – С. 23-32.

7. Kornev S. Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator differential inclusions / N.V. Loi, V. Obukhovskii, S. Kornev // Differ. Equ. Dyn. Syst. – 2012. – V. 20, № 3. – P. 285-300.

8. Корнев С.В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 700-705.

9. Корнев С.В. Метод негладкой интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 9. – С. 31-43.

10. Корнев С.В. Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений / В.Г. Звягин, С.В. Корнев // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2015. – Т. 58. – С. 59-81.

11. Корнев С.В. О некоторых обобщениях метода многолистной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений некоторых классов дифференциальных включений / С.В. Корнев // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 5. – С. 1214-1216.

12. Корнев С.В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений / С.В. Корнев // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия Математика. –

2015. – Т. 13. – С. 16-31.

13. Корнев С.В. Набор многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях некоторых классов дифференциальных включений / С.В. Корнев // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 4. – С. 835-842.

14. Корнев С.В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2016. – №1. – С. 96-104.

15. Корнев С.В. Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2016. – Т. 21, Вып. 1. – С. 55-65.

16. Корнев С.В. Метод негладких интегральных направляющих функций в задаче о существовании периодических решений включений с каузальными операторами / С.В. Корнев // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математ. моделир. и программ. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 46-59.

17. Корнев С.В. Метод многолистных направляющих функций в задаче о бифуркации решений дифференциальных уравнений / С.В. Корнев, Н.В. Лой // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2016. – Т. 21, Вып. 2. – С. 390-401.

18. Корнев С.В. Направляющие функции на заданном множестве в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2016. – № 2. – С. 107-122.

19. Корнев С.В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский, П. Дзекка // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 10. – С. 1335-1344.

20. Корнев С.В. Многолистные направляющие функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невы-

пуклой правой частью / С.В. Корнев // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 11. – С. 14-26.

21. Kornev S. On the method of generalized integral guiding functions in the periodic problem of functional differential inclusions with causal operator / V. Obukhovskii, S. Kornev, P. Zecca // Applicable Analysis. DOI:10.1080/00036811.2016.1139088

22. Kornev S. Method of multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions / S. Kornev, Y.-C. Liou // The Journal of Nonlinear Science and Applications. – 2016. – V. 9, Is. 8. – P. 5259-5270.

**Прочие публикации**

23. Корнев С.В. Об интегральных направляющих функциях для функционально-дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Топологические методы нелинейного анализа. – 2000. – С. 87-107.

24. Корнев С.В. О некоторых развитиях метода негладких многолистных направляющих функций / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Математические модели и операторные уравнения. – 2003. – Т. 2. – С. 75-90.

25. Корнев С.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Труды математического факультета. Воронежский государственный университет. – 2004. – С. 56-74.

26. Kornev S. On some developments of the method of integral guiding functions / S. Kornev, V. Obukhovskii // Functional Differential Equations. – 2005. – V. 12, № 3-4. – P. 303-310.

27. Kornev S.V. On some developments of the method of guiding functions for periodic problem / S.V. Kornev // Fifth Symposium of Nonlinear Analysis. Torun. Poland. – 2007. – P. 31-32.

28. Корнев С.В. Метод направляющих функций и некоторые его развития для случая дифференциальных включений / С.В. Корнев // Международная конференции "Дифференциальные уравнения и топология" . Москва. – 2008. – С. 145-146.

29. Kornev S. Topological approach to the study of periodic models for control systems / S. Kornev // International Symposium on Optimization and Optimal control. Kaohsiung. Taiwan. – 2009. – P. 26.

30. Kornev S. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions / S. Kornev, V. Obukhovskii, J.C. Yao // Discussiones Mathematicae: Differ. Inclusions, Control and Opt. – 2014. – V. 34, № 2. – P. 219-227.

31. Kornev S.V. The method of guiding functions in the study the asymptotic behavior of solutions of differential inclusions / S.V. Kornev // The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow. – 2014. – P. 146-147.

32. Корнев С.В. О методе интегральных направляющих функций в периодической задаче для включений с каузальными операторами / С.В. Корнев // Междунар. матем. конф. "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям". – Минск. – 2015. – С. 70-72.

33. Корнев С.В. О модификации метода направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С.В. Корнев // Материалы Международной конференции "Воронежская весенняя математическая школа. Понтрягинские чтения - XXVI". – Воронеж. – 2015. – С. 112-113.

34. Корнев С.В. О негладких интегральных направляющих функциях в исследовании асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений / С.В. Корнев // Известия ВГПУ. – 2015. – № 3 (268). – С. 182-184.

35. Корнев С.В. О методе негладких интегральных направляющих функций в периодической задаче для включений с каузальными операторами / С.В. Корнев // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". – Воронеж. – 2016. – С. 214-217.

36. Kornev S.V. On some applications of the multivalent guiding functions method / S.V. Kornev // V Международная школа-семинар "Нелинейный ана-

лиз и экстремальные задачи". – Иркутск. – 2016. – С. 28.

37. Kornev S.V. On the multivalent guiding functions method in some nonlinear problems / S.V. Kornev // International Workshop on Nonlinear Analysis and Optimization with Applications. Kaohsiung. Taiwan. – 2016. – P. 17.

Подписано в печать 21.12.2016. Формат 60×841/16. Печать трафаретная.
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 2. Уч.-изд. л. 1,86. Тираж 100 экз. Заказ 264.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет».
Отпечатано в издательско-полиграфическом центре университета.

394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86.