

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донской государственный аграрный университет»

На правах рукописи

ПАПЧЕНКО НАТАЛЬЯ ГЕННАДИЕВНА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХМЕРНЫХ
БУРНЫХ ВОДНЫХ ПОТОКОВ**

Специальность: 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
д-р техн. наук, В.Н. Коханенко

п. Персиановский – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Критический анализ состояния изучаемого вопроса.....	9
1.1 Объект исследования. Основные параметры двухмерного в плане открытого водного потока.....	9
1.2 Математические модели движения водного потока, вычислительный эксперимент и место исследований.....	11
1.3 Методы решения граничных задач двухмерных потенциальных потоков.....	12
1.4 Дополнительные ограничения на поток.....	14
Выводы по первой главе.....	16
2. Уравнения двухмерного водного потока	17
2.1 Уравнения потенциального двухмерного в плане бурного потока в физической плоскости течения потока	17
2.2 Соотношения между параметрами потока из метода характеристик.....	18
2.3 Система уравнений движения двухмерных в плане потенциальных потоков в физической плоскости	19
2.4 Вывод системы уравнений потенциального потока в плоскости годографа скорости.....	19
2.5 Формальное совпадение уравнений движения двухмерных в плане открытых водных потоков и уравнений движения идеального газа.....	23
2.6 Новые аналитические решения уравнения движения стационарных, потенциальных потоков	29
Выводы по второй главе.....	30
3 Моделирование задач по течению двухмерных в плане потенциальных бурных потоков.....	31
3.1 Решение ряда известных задач по гидравлике плановых бурных потоков.....	31
3.1.1 Задача определения параметров потока радиально растекающегося источника.....	31
3.1.2 Задача определения параметров бурного потока при обтекании выпуклого угла.....	36
3.1.3 Общий алгоритм решения практических задач гидравлики двухмерных в плане водных потоков с использованием плоскости годографа скорости	41
3.2 Постановка и решение задачи о свободном растекании бурного двух-	

мерного в плане открытого стационарного водного потока.....	41
3.2.1 Выявление основных свойств потока.....	41
3.2.2 Постановка граничной задачи в физической плоскости.....	43
3.2.3 Постановка граничной задачи растекания потока в плоскости годографа скорости.....	45
3.2.4 Определение вида крайней линии тока и эквипотенциали в за- даче свободного растекания бурного двухмерного потенциального в среднем потока за безнапорными трубами с использованием плоско- сти годографа скорости.....	46
3.2.5 Решение задачи свободного растекания бурного потока в слу- чае $1 < F < 4$	50
3.2.6 Решение задач в плоскости годографа скорости.....	51
3.2.7 Решение задачи определения координат потока.....	62
3.3 Обобщенный численный метод решения задачи свободного растека- ния бурного потока за безнапорными прямоугольными трубами на при- мере модели потока без учета сил сопротивления.....	69
Выводы по третьей главе.....	76
4. Алгоритмы и программы для сравнения экспериментальных параметров по- тока с модельными.....	77
4.1 Определение параметров потока в заданных точках на оси симмет- рии.....	77
4.2 Определение координат и параметров потока на перпендикулярах к оси симметрии потока вдоль крайней линии тока.....	77
4.3 Определение координат пересечения произвольной эквипотенциали и произвольной линии тока и параметров в этой токе.....	78
4.4 Разработка программ и результаты счета на ПК.....	79
4.5.1 Описание программ.....	79
4.5.2 Ввод исходных данных и определение постоянных.....	79
4.5.3 Построение крайней линии тока.....	82
4.5.4 Построение произвольной линии тока и определение парамет- ров в любой точке потока.....	85
4.5.5 Адекватность получаемых геометрических параметров реаль- ному процессу.....	95
Выводы по четвертой главе.....	101
5. Комплекс программ для выявления основных свойств свободного растека- ния потока.....	103
5.1 Геометрия крайней линии тока и распределение глубин и скоростей вдоль крайней линии тока при разных числах Фруда.....	103
5.2 Распределение глубин и скоростей вдоль оси симметрии потока при разных числах Фруда.....	110
5.3 Геометрия и распределение глубин и скоростей вдоль крайней линии	

тока при одинаковых числах Фруда.....	115
5.4 Распределение глубин и скоростей вдоль оси симметрии потока при одинаковых числах Фруда.....	122
5.5 Распределение относительных глубин по живому сечению потока (вдоль эквипотенциалей) в зависимости от чисел Фруда.....	127
Выводы по пятой главе.....	131
Основные выводы и результаты работы.....	132
Приложение 1. Геометрия растекания бурного планового потока за прямоугольными трубами.....	133
Приложение 2. Экранные формы фрагментов программ	134
Приложение 3. Акты внедрения.....	137
Список литературы.....	141

ВВЕДЕНИЕ

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ

Моделирование различных процессов в природе и технике приобрело в настоящее время актуальный характер, особенно в гидротехнике. Так из-за неточного или нерационального моделирования и расчетов на основе модельных параметров, используемых для строительства гидротехнического сооружения (ГТС), уменьшается эксплуатационная надежность сооружения в целом, происходят обрушения крепления водопропускных сооружений под автомобильными дорогами, малыми мостами под железными дорогами, из-за неправильного проектирования водосбросов происходят в России экологические катастрофы. Давно возникла необходимость повысить качество расчета всего комплекса параметров водного потока, протекающего через сооружение, и учитывать особенности той или иной практической гидравлической задачи. Существующие методы моделирования параметров водного потока нуждаются в серьезной коррекции для применения их в проектировании ГТС. Среди множества задач по гидравлике плановых потоков наиболее трудными являются задачи с заранее неизвестными границами потока при его растекании в широкое отводящее русло за безнапорными водопропускными трубами [1,2]. На выходе потока из трубы наилучшую адекватность по параметрам потока дают упрощенные аналитические методы на основе модели потенциального течения потока, далее силы сопротивления потоку увеличиваются и необходимо совершить переход к численным методам. Однако крепление сооружения выполняется именно в области выхода потока из водопропускной трубы, где можно ограничиться аналитическим решением. Если сразу же решать граничную задачу численными методами, то в силу особенностей задачи (разрыва параметров в выходной кромки трубы) адекватность решения задачи понижается. Следовательно, в первую очередь необходимо использовать аналитические методы, как базу для дальнейшего использования численных методов. Поэтому математическая модель потока имеет весьма важное не только теоретическое значение, но и практическую значимость.

В настоящей работе автором рассмотрены особенности моделирования бурных, двухмерных в плане, открытых, стационарных водных потоков и найдены решения граничных задач для данных потоков, которые можно разделить на несколько групп: аналитические методы в физической области течения потока; методы, основанные на методе характеристик; численные методы; аналитико-численные методы; аналитические методы с использованием промежуточной плоскости годографа скорости; эмпирические методы, которые определяют отдельные параметры потока обработкой накопленных экспериментальных данных методами регрессионного анализа.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Разработать новые математические методы моделирования потенциального течения двухмерных плановых бурных свободно растекающихся потоков и алгоритмы проверки адекватности математической модели по определению параметров двухмерных плановых бурных свободно растекающихся потоков с использованием аналитических и

численных методов, а также выявить характер изменения модельных параметров потока в зависимости от входных параметров для расчета и доказательства более высокой степени адекватности модельного потока реальному и возможности выбора в следствии этого более надежного крепления сооружений.

ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЦЕЛИ РЕШАЛИСЬ СЛЕДУЮЩИЕ ЗАДАЧИ:

- выбор наиболее перспективной модели системы описывающей движение двумерных в плане водных потоков на основе анализа работ известных авторов;
- поиск новых аналитических решений этой системы, позволяющих решить граничную задачу свободного растекания двумерного бурного водного потока при его растекании в широкое гладкое отводящее русло за безнапорными прямоугольными водопропускными трубами;
- постановка и решение граничной задачи свободного растекания бурного стационарного потока в плоскости годографа скорости и в физической плоскости;
- переход в физическую плоскость для определения всего комплекса параметров потока аналитическими и численными методами;
- разработка алгоритмов и пакетов программ для расчета всего спектра параметров бурного потока за безнапорными и полунпорными прямоугольными трубами при его свободном растекании в широкое отводящее русло для дорожных водоотводов и малых мостов;
- доказательство повышения адекватности полученной модели по сравнению с реальным растеканием потока и с ранее известными моделями и методами. И как следствие улучшение надежности ГТС при его проектировании и строительстве;
- формулирование выводов и предложений по практическому использованию результатов работы.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для решения поставленных задач в работе использованы аналитические и численные методы, методы математического моделирования, современные вычислительные технологии, выполнена проверка адекватности полученной модели экспериментальным данным.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ

- разработаны новые математические методы моделирования двумерных плановых потоков;
- определен спектр ранее не известных аналитических решений системы двумерных плановых потоков в плоскости годографа скорости;
- найдены решения граничной задачи свободно растекающегося бурного стационарного потока как в плоскости годографа скорости, так и в физической плоскости течения потока аналитическими и численными методами;
- повышена адекватность модели по сравнению с ранее известными методами;
- сформулирована общая технология решения граничных задач на примере свободно растекающегося бурного стационарного потока в плоскости годографа скорости и физической плоскости растекания потока;

– разработаны алгоритмы и компьютерные программы для вычисления всего спектра параметров бурного потока, необходимых для проектирования ГТС.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ РАБОТЫ

Полученные результаты работы могут быть использованы для дальнейших теоретических исследований свободно растекающегося бурного стационарного водного потока, а также проектными организациями для расчетов крепления водопропускных сооружений как в дорожном строительстве, так в мелиорации и в водном хозяйстве. Результаты исследований используются в ООО "ИКЦ "Безопасность ГТС"" (Акт о внедрении результатов работы), в учебном процессе по курсу "Гидравлика открытых потоков" (Справка о внедрении в учебный процесс).

СООТВЕТСТВИЕ ДИССЕРТАЦИИ ПАСПОРТУ НАУЧНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Содержание работы соответствует паспорту специальности 05.13.18 - "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" (физико-математические науки), а именно область исследования соответствует п.1 "Разработка новых методов моделирования объектов и явлений"; п.2 "Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей"; п.5 "Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента"; п.7 "Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели".

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ:

1. Преимущества разработанных новых математических методов моделирования решения ряда практических задач по гидравлике плановых потоков с использованием промежуточной плоскости годографа скорости.
2. Аналитические и численные методы расчета параметров свободно растекающегося потока за водопропускными трубами прямоугольного сечения.
3. Алгоритмы и программы для определения характеристик (скоростей, глубин, формы крайней линии тока и произвольной линии тока, формы свободной поверхности потока) свободно растекающегося потока за водопропускными прямоугольными безнапорными трубами и малыми мостами.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Основные положения работы докладывались и получили положительную оценку на: Международной научно-практической конференции "Роль мелиорации, лесного и водного хозяйства в развитии аграрного сектора", г. Новочеркасск, октябрь 2012 г.; Международной научно-практической конференции "Инновационные пути развития АПК: проблемы и перспективы" ДонГАУ, п. Персиановский, февраль 2013 г.

ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты, полученные при выполнении исследований, вывод основной системы двухмерных плановых потоков в плоскости годографа скорости и в физической плоскости, правильность постановки и решения граничных задач подтверждаются проверкой адекватности модели по параметрам потока и натурными исследованиями, а также сопоставлением с результатами исследований других авторов.

ПУБЛИКАЦИИ. Основные материалы исследований опубликованы в 11 печатных работах, в том числе 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ,

1 монография и 5 научных работ в других изданиях, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

ЛИЧНЫЙ ВКЛАД АВТОРА. Автор определил новые решения системы уравнений движения двумерных бурных плановых стационарных потоков. Поставил и решил граничную задачу в плоскости годографа скорости и в плоскости течения потока; дополнил и модернизировал существующие и разработал новые алгоритмы и программы для расчета параметров потока, привел их к методам проверки адекватности. Разработал общую технологию решения плановых задач по течению потенциальных потоков в общем виде.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ. Работа состоит из введения, пяти глав, общих выводов, приложений и списка литературы. Общий объем диссертации включает 146 страниц, 46 рисунков, 2 таблицы, 36 фрагментов программ, список литературы, включающий 80 источников и 3 приложения.

1 КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ИЗУЧАЕМОГО ВОПРОСА

1.1 ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДВУХМЕРНОГО В ПЛАНЕ ОТКРЫТОГО ВОДНОГО ПОТОКА

Объектом исследований в настоящей работе является двухмерный в плане стационарный открытый водный поток.

Теория двухмерных плановых течений открытых потоков полагает следующие допущения [3,4,5]:

1. Вертикальные (или нормальные к выбранной координатной плоскости) составляющие местных осредненных скоростей и ускорений малы.
2. Векторы скоростей жидких частиц, расположенных на одной вертикали, лежат в одной плоскости.
3. Распределение скоростей на любой вертикали практически равномерное.

Хотя в практике ГТС движение открытого потока имеет пространственный характер, существует достаточно широкий класс потоков, параметры которых отвечают отмеченным допущениям двухмерности. Такие потоки называются двухмерными плановыми потому, что для их описания достаточно двух независимых геометрических координат.

Практика лабораторных исследований и натуральных наблюдений, а также теоретические соображения позволяют считать, что двухмерным плановым приближенно является всякий поток в открытом русле, у которого ширина по верху хотя бы в несколько раз больше глубины, рельеф дна является достаточно плавным и искривление струй в плане не слишком велико [6]. Указанным условиям могут удовлетворять как спокойные (докритические) потоки, характеризующиеся местными значениями параметра кинетичности (числа Фруда) меньшими единицы, так и бурные (сверхкритические).

Двухмерные бурные потоки, встречающиеся в гидротехнических сооружениях, во многих случаях удовлетворяют условиям двухмерности, сформулированным выше. Благодаря значительной кинетичности бурного потока всякое изменение его скоростей под влиянием внешних воздействий происходит достаточно плавно.

Требование малости вертикальной (или нормальной к выбранной координатной плоскости) составляющей скорости накладывает ограничение и на рельеф дна водотока. Чтобы это требование было удовлетворено, рельеф дна должен быть плавным и не слишком сильно отличается от некоторой плоскости (горизонтальной или наклонной), которую обычно можно принять за координатную.

Уравнения двухмерного стационарного потока имеет вид [3]:

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial x} (z_0 + h) - T_x \\ u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial y} (z_0 + h) - T_y \end{cases}, \quad (1.1)$$

где T_x, T_y – компоненты сил сопротивления, отнесенных к единицы массы жидкости; u_x, u_y – компоненты местного осредненного вектора скорости жидкой частицы потока; h – местная глубина потока; $Oxyz$ – прямоугольная система координат в физической области течения потока; g – ускорение свободного падения; z_0 – функция рельефа дна.

Система (1.1) дополняется уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial x} (hu_x) + \frac{\partial}{\partial y} (hu_y) = 0. \quad (1.2)$$

В системе уравнений (1.1), (1.2) составляющие сил сопротивления T_x, T_y могут быть определены через компоненты скорости u_x, u_y и глубину h . Поэтому если рельеф дна известен, т.е. вид функции $z_0 = z_0(x, y)$ задан, то система уравнений (1.1), (1.2) в частных производных содержит три неизвестные функции $u_x(x, y), u_y(x, y), h(x, y)$ и следовательно является замкнутой.

Система уравнений (1.1), строго говоря, применима только локально, т. е. для произвольной точки внутри потока. Однако, принимая во внимание второе и третье из основных допущений, можно под величинами u_x и u_y понимать составляющие средней на вертикали скорости и, следовательно, рассматривать систему (1.1) как уравнения двумерного планового потока. Такой подход позволяет отвлечься от граничных условий на дне водотока и поставить задачу о нахождении решений системы (1.1) как плоскую задачу при граничных условиях, заданных лишь на контуре плана течений.

Изложенный вывод уравнений движения основывается, как видно, на допущении о малости продольного и поперечного уклонов дна:

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z_0}{\partial y} \ll 1.$$

Это делает их неприменимыми к потокам в руслах с большими продольными или поперечными уклонами дна.

Инженерные задачи, приводящие к необходимости нахождения $u_x(x, y), u_y(x, y), h(x, y)$ функций, весьма разнообразны и могут быть разделены на два вида:

- прямые задачи, в которых известен рельеф дна и русла, необходимо определить параметры u_x, u_y и h ;

- обратные задачи, в которых рельеф дна неизвестен и параметры потока находятся из дополнительного условия (условие постоянства или заданного изменения удельного расхода, постоянство скорости или глубины в пределах водовода, минимума волнообразования).

В настоящей работе рассматриваются прямые задачи. Упрощения, принимаемые в дальнейшем: силами сопротивления пренебрегаем, движение считаем потенциальным, а дно потока – горизонтальным [3, 4, 5]. Несмотря на значительную степень идеализации, этот случай имеет важное практическое значение, как показывается в настоящей работе и доказываемым имеющимся опытом исследований в работах [7-18].

Задачи решаются численными методами и численно-аналитическими, к которым можно отнести метод характеристик (для бурных потоков).

Метод характеристик основывается на использовании свойств характеристик в физической плоскости и в плоскости годографа скорости. Однако на взгляд автора эти методы движения потенциального течения потока не являются обязательными и весьма громоздки, затрудняющие анализ полученных результатов.

Переход в плоскость годографа скорости существенно упрощает решение практических задач и позволяет его получить в явном аналитическом виде.

1.2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОГО ПОТОКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И МЕСТО ИССЛЕДОВАНИЙ

В настоящей работе первостепенной является задача по моделированию процессов происходящих в водном потоке при протекании его через элементы ГТС. Схема составных элементов системы математического моделирования объекта имеет следующий вид (рисунок 1.1) [19]:

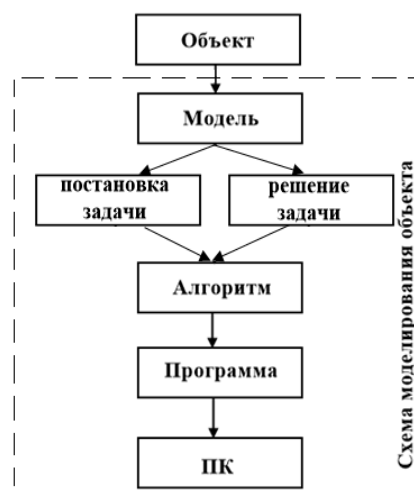


Рисунок 1.1 – Схема составных элементов моделирования объекта

Значение моделирования огромно, особенно если натурный эксперимент опасен, дорогой или просто невозможен [20]. Его результаты позволяют ученым открывать новые явления. Это в полной мере относится к моделированию течения водных потоков. В настоящей работе изучаются потоки близкие к модели плановых двумерных потоков.

Предмет исследований в работе – водные потоки, на которые налагаются следующие ограничения: силы внутреннего трения малы по сравнению с силами внешнего сопротивления; потоки стационарные; потоки двумерные в плане; потоки бурные; потоки потенциальные; дно русла горизонтально.

1.3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДВУХМЕРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

В работах [3,21] показан метод характеристик применительно к задачам практической гидравлики. Этим методом были решены задачи: обтекание потоком плоской стенки с изломом [22,23], радиальное растекание потока из точечного источника [23], задача о свободном растекании бурного потока в широкое отводящее русло [24]. Однако хотя последняя задача и доведена до инженерных использований, адекватность метода весьма низкая, что приводит к понижению надежности водопропускных сооружений вследствие недостаточной точности определения параметров водного потока протекающего через сооружение.

Обычно скорости и глубины потока в зоне растекания потока рекомендуется определять в справочной литературе [25,26] по универсальному графику И.А. Шеренкова [27] (рисунок 1.2).

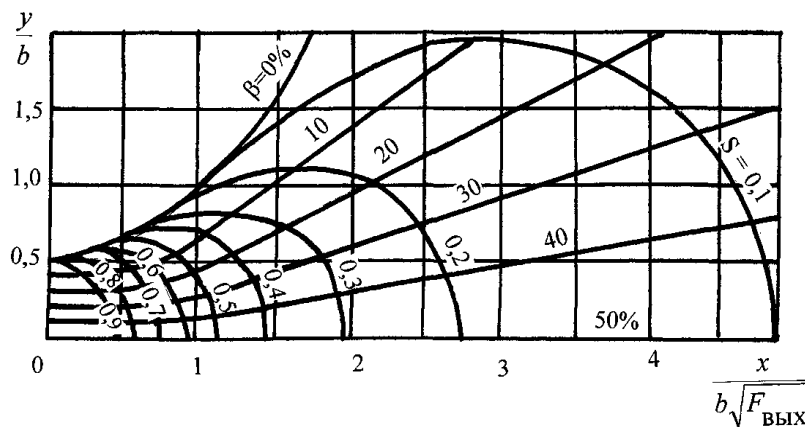


Рисунок 1.2 – Универсальный график И.А. Шеренкова

Задача определения глубин и скоростей потока, также как и задача определения геометрии растекания потока, необходима для выбора соответствующего крепления сооружения, в том числе и для установки гасителей энергии бурного потока с целью уменьшения кинетической энергии бурного потока и для защиты неукрепленного участка отводящего русла от недопустимого размыва [28,29].

Расстояние l от выходного сечения до сечения полного растекания потока можно также определить из графика И.А. Шеренкова, а можно определить по эмпирической зависимости Г.А. Лилицкого [30,31]:

$$l = (0,15Fr_b + 0,27) \cdot (B - b), \quad (1.3)$$

где Fr_b – критерий Фруда; B – ширина спланированного отводящего русла; b – ширина потока на выходе из трубы.

Для установки гасителей кинетической энергии движущегося водного потока необходимо также знать геометрические и гидравлические параметры на участке свободного растекания.

Схема свободного растекания потока наиболее характерна для малых дорожных водопропускных сооружений.

В настоящей работе ограничимся исследованиями свободного растекания потока, существование которого характеризуется условиями, приводимыми в справочной литературе по гидравлике [25].

Как отмечено ранее, гидравлические характеристики потока на участке растекания для малых дорожных сооружений определяются по графику И.А. Шеренкова. Для любой величины $S = \text{const}$ (линия равной глубины) глубина потока в точке определяется по формуле:

$$h = S \cdot h_{\text{ВЫХ}}. \quad (1.4)$$

Скорости потока в этих точках и значения критерия Фруда определяются по формулам:

$$V = \sqrt{[Fr_{\text{ВЫХ}} + 2(1 - S)]gh_{\text{ВЫХ}}}; \quad (1.5)$$

$$Fr = \frac{Fr_{\text{ВЫХ}} + 2(1 - S)}{S}, \quad (1.6)$$

где $Fr_{\text{ВЫХ}} = \frac{V_{\text{ВЫХ}}^2}{gh_{\text{ВЫХ}}}$.

Расстояние до сечения полного растекания потока согласно [29,32,33] можно определить также по методике Г.А. Лилицкого, основанной на подборе уравнения, исходя из переработки экспериментального материала посредством регрессионного анализа:

$$l_p = b \left[\sqrt{0,0002\theta^3 (Fr_{\text{ВЫХ}} - 1)^2 + 1} + 0,04\theta^2 \right], \quad (1.7)$$

где $\theta = \frac{B}{b}$.

Открытый поток, вытекающий из водопропускной трубы в нижний бьеф ГТС, часто имеет скорости, которые существенно превышают предельно допускаемые, размывающие скорости для грунтов, составляющих отводящее русло [29]. Многочисленные натурные обследования [25] позволяют сделать вывод о том, что главной причиной аварийного состояния большинства водопропускных сооружений являются опасные местные размывы отводящего русла в нижнем бьефе сооружений.

Некоторые задачи по течению плановых потоков решаются аналитически [34,35]: радиальное растекание потока из точечного источника; обтекание потоком плоской стенки с изломом.

Метод характеристик предполагает многократное возвращение из физической плоскости в плоскость годографа скорости и наоборот, используя основные свойства характеристик. И уже в самом методе заложены накапливающиеся погрешности расчета параметров потока. В последнее время появились работы [16,36] с использованием плоскости годографа скорости $(\tau; \theta)$ в которой система двухмерных в плане уравнений движения потока является линейной относительно производных функций, т.е. существенно упрощается. Это значительно облегчает постановку и решение граничных задач. Задачу в целом можно решить сначала в плоскости годографа скорости (по методу Чаплыгина С.И.) [37], а далее переходом в плоскость течения потока определить параметры потока его течения.

Автор показала, что имея набор аналитических решений системы в плоскости годографа скорости, довольно просто решаются задачи 1 и 2. Однако задача свободно растекающегося бурного потока решается уже много лет. И ее постановка и результаты решения все время от работы [38,39] к работе [24] уточняются. Впервые идею об использовании плоскости годографа скорости для водного потока использовал В.Н. Коханенко в 1992 году [16], далее – А.И. Есин в 2003 году [27]. Поставленную задачу решала Н.В. Косиченко [40,41]. В экспериментальное изучение бурных потоков за водопропускными трубами и накопление ценных опытных данных значительный вклад внесли О.Л. Кольченко, Н.И. Ткаченко [42,43]. Однако, в силу сложности задачи с заранее неизвестными границами и по мере накопления опыта, решение задачи уточнялось. Автор, анализируя эти работы, выявила, что:

- задача была поставлена не совсем корректно;
- для ее корректности необходим поиск новых решений системы в плоскости годографа скорости.

Поэтому, одобряя метод в целом, автор довела и постановку задачи и ее решение до вида не имеющего недостатков и повысила адекватность модели. Этому уточнению и развитию метода посвящена настоящая диссертация. Исходя из этого сформулирована цель и задачи исследований во введении.

1.4 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОТОК

Рассмотрим уравнения движения двухмерных в плане потоков без учета сил сопротивления, считая движение потенциальным, а дно русла горизонтальным. Это значительная степень идеализации процесса, но и она имеет важное принципиальное теоретическое и практическое значение [3]. В этом случае расчетные соотношения (формулы, уравнения, процедуры) получаются наиболее простыми и удобными для анализа и использования. Далее, последующий учет сил сопротивления, приводит к усложнениям, но имеющееся аналитическое решение задачи позволяет решить задачу уже и с усложнениями.

Практическое значение потенциального течения в горизонтальном русле также существенно. В ряде случаев роль сил сопротивления относительно невелика. Это имеет

место при протекании бурного потока через сужения и расширения или изгибы русла, так как в этом случае основное формирующее влияние на поток оказывает инерционность его частиц. В случае коротких участков русла влиянием сил сопротивления можно пренебречь. Во многих практических задачах не требуется высокой точности получаемых результатов и вполне достаточно получить ориентировочные значения параметров потока с точностью, не превышающей 10%, а иногда 20%.

Аналитические методы решения гидравлических задач предполагают упрощенные методы реального процесса. К примеру, дно отводящего русла неразмываемое, горизонтальное, поток стационарный, потенциальный. В этом случае исходные уравнения, описывающие процесс растекания потока, упрощаются и позволяют выбором специальной плоскости переменных параметров (плоскость годографа скорости) получить аналитические зависимости для определения параметров потока [44]. В ряде случаев при расчёте параметров потока могут использоваться численные методы расчёта на основе стандартных пакетов “Mathcad”, “Mathematica”, а также ранее разработанные численные методы Шеренкова И.А., Мелещенко Н.Т., Нумерова С.Н., Емцева Б.Т. [7,45]. Полученные решения позволяют выявить свойства потока, которые могут использоваться, как и сами аналитические зависимости, для учёта ранее неучтённых упрощений при использовании численных методов. При этом применяются законы определяющие сопротивление потоку сведением неравномерного потока к равномерному и в среднем к одномерному потоку, для которых применимы понятия гидравлический радиус живого сечения потока и т.д. Незнание законов сопротивления потоку для неравномерного потока или особенностей их использования (к примеру, в задаче свободного растекания бурного потока) наряду с неоднозначностью выбора шага дискретности расчёта по сетке $(\Delta X_k, \Delta Y_j)$ приводят к неоднозначности и неустойчивости алгоритма поиска параметров потока. Возникает противоречие: при уменьшении шагов $(\Delta X_k, \Delta Y_j)$ ошибки вычислений уменьшают точность расчёта параметров потока. В случае же увеличения $(\Delta X_k, \Delta Y_j)$ увеличивается погрешность замены равномерного потока неравномерным и необходимо корректировать сами законы сопротивления потоку. Поэтому для задачи со свободными границами потока лучше сначала найти упрощённое аналитическое решение задачи, а уже потом подбирать или корректировать сами законы сопротивления потоку используя уже полученное аналитическое упрощённое решение задачи в качестве базы привязки для уточнения алгоритма в целом при использовании численных методов. Учёт сил сопротивления таким образом в задаче свободного растекания потока в широкое отводящее русло за безнапорными водопропускными трубами показывает достаточную для практики ГТС (в пределах нескольких процентов) адекватность потока по всему комплексу параметров потока до расширения потока $\beta = 5 \div 7$ [44], т.е. для выбора крепления водопропускного сооружения. Результаты метода расчёта параметров потока опубликованы в работах [44,45,46]. Конечно, в некоторых задачах гидравлики плановых потоков (твёрдые стенки русла) нет необходимости получать предварительно

упрощённое решение задачи, но в некоторых нестандартных задачах (со свободными границами потока) на наш взгляд это выполнить целесообразно.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

В результате анализа существующих методов расчета параметров двумерного в плане бурного открытого свободно растекающегося потока подтверждена актуальность исследований, обоснована цель и сформулированы задачи исследований.

Уравнения движения жидкости и в частности водных потоков классифицируются по многим признакам и имеют различную сложность. Общими являются уравнения трехмерных течений жидкости. Наиболее простыми являются уравнения одномерной гидравлики. Между ними находятся плоские течения и двумерные в плане. Двухмерные в плане – это, вообще говоря, пространственные потоки, но с ограничениями (в направлении перпендикулярном к плану не учитываются скорости и ускорения).

В задачах расчёта параметров потока плановой гидравлики необходимо сочетание и совместное использование аналитических и численных методов, т.е. применение численно-аналитических методов, которые позволяют решить не только частные, но и более общие задачи такие как свободное растекание или несвободное растекание бурного потока. Сказанное даёт основание считать ошибочное мнение о том, что изучение потенциального движение открытых потоков представляет лишь академический интерес и не имеет практического значения.

2 УРАВНЕНИЯ ДВУХМЕРНОГО ВОДНОГО ПОТОКА

2.1 УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВУХМЕРНОГО В ПЛАНЕ БУРНОГО ПОТОКА В ФИЗИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПОТОКА

При $z_0 = \text{const}$, $T_x = T_y = 0$ система уравнений (1.10) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Уравнение неразрывности потока преобразуем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}(hV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hV_y) = 0 \quad \text{или} \quad h \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_y \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Заменяем $\frac{\partial h}{\partial x}$ и $\frac{\partial h}{\partial y}$ в (2.2), с помощью уравнений (2.1) и получим:

$$gh \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) - V_x \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) - V_y \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Считая движение безвихревым (потенциальным), из условия

$$\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (2.4)$$

А это значит, что существует потенциальная функция $\varphi = \varphi(x, y)$, такая что

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Введём обозначение $c = \sqrt{gh}$ и, исключая V_x, V_y в (2.3) после преобразований, получим уравнение для потенциальной функции:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left[c^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left[c^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.6)$$

Это известное уравнение приводит Б.Т. Емцев [3] и оно не отличается по внешнему виду от аналогичного уравнения для потенциала скорости плоского безвихревого потока газа. Данное уравнение приводят многие исследователи по гидравлике плановых потоков: Л.И. Высоцкий, Г.И. Сухомел, А.В. Гарзанов, С.А. Христианович, П.А. Журавлев и другие [47-52].

Для потенциального потока справедлив интеграл Бернулли:

$$h + \frac{V^2}{2g} = H_0 = \text{const} \quad (2.7)$$

для всех точек плана течения потока, где $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ – квадрат модуля вектора скорости на данной вертикали плана течения. Из уравнения неразрывности (2.2) следует наличие функции тока $\psi(x, y)$ такой, что:

$$hV_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad hV_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Для функции тока справедливо уравнение аналогичное уравнению (2.7):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{1}{c^2 h^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left[1 - \frac{1}{c^2 h^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2}{c^2 h^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Уравнения (2.6) и (2.8) служат основой для разработки метода (характеристики) расчета параметров потока.

2.2 СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ПОТОКА ИЗ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК

Приведем основные свойства характеристик и известные зависимости для использования в дальнейшем. Через каждую точку потока проходит две характеристики (1-го и 2-го семейств) которые образуют угол « α » с линией тока проходящей через данную точку:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{F}},$$

где $F = \frac{u^2}{gh}$. Вдоль характеристики справедливо уравнение:

$$\theta = \pm(\sqrt{3} \arctg \sqrt{\frac{F-1}{3}} - \arctg \sqrt{F-1}) + C',$$

где θ – угол характеризующий направление вектора скорости жидкой частицы потока.

Метод характеристик хорошо развит в газовой динамике и заимствован к течению бурных двухмерных в плане водных потоков несжимаемой жидкости [37]. Не приводя всех свойств характеристик, заметим, что в [3] сформулированы типовые расчётные задачи, решаемые с помощью характеристик. Это четыре задачи: задача Коши, задача Гурса, задача типа III, задача типа IV [3]. Согласно [3], если ограничиться рассмотрением такой области течения, в пределах которой не возникает сильных разрывов, т.е. прямых или косых гидравлических прыжков, то практически любая задача по расчёту

двухмерного потенциального бурного потока с плоским дном может быть решена, если известна методика решения 4-х простейших типовых задач указанных выше.

Однако метод в целом аналитико-численно графический, к сожалению, в некоторых задачах даёт погрешность не позволяющую получить желаемую для практики адекватность потока. Поэтому в настоящей работе осуществлён поиск форм уравнений движения потока, которые допускают их аналитическое решение.

2.3 СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХМЕРНЫХ В ПЛАНЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ В ФИЗИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

В качестве исходной системы воспользуемся системой плановых уравнений потока воды в случае плоского горизонтального дна без учета сил сопротивления потоку [16]:

$$\begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial(V_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y h)}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Для потенциального потока условие отсутствия вихря записывается в виде:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

Преобразуя систему (2.9) с учетом (2.10) получим известное уравнение Бернулли, которое для плановых потоков принимает следующий вид:

$$\frac{v^2}{2g} + h = H_0, \quad (2.11)$$

где $V^2 = V_x^2 + V_y^2$; $H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0$ – постоянная для всего потока; V_0, h_0 – параметры потока в некоторой характерной его точке; g – ускорение силы тяжести; $F = \frac{v^2}{gh} > 1$ – для бурных потоков; $F < 1$ – для спокойных потоков.

Для плановых стационарных потенциальных водных потоков с плоским горизонтальным дном справедлив интеграл Бернулли (2.11). Так как в данном случае безвихревого движения потока уравнения движения жидкости совпадают по внешнему виду с идеальной, то из общих теорем динамики жидких потоков следует теорема [17].

2.4 ВЫВОД СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКА В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Анализируя уравнение неразрывности потока [3]:

$$\frac{\partial(V_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y h)}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

в совокупности с условием отсутствия вихря (2.10), можно сделать вывод о существовании потенциальной функции φ и функции тока ψ , таких, что выполняется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{h}{h_0} V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{h}{h_0} V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.13)$$

где φ , ψ – потенциальная функция и функция тока.

Объединим эту систему с уравнением Д. Бернулли (2.11) и получим следующую систему для исследования плановых стационарных потенциальных потоков воды в виде:

$$\begin{cases} V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ \frac{h}{h_0} V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{h}{h_0} V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ \frac{V^2}{2g} + h = H_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Уравнения справедливы как для бурных потоков при $F > 1$, так и для спокойных при $F < 1$, где $F = \frac{V^2}{gh}$ – параметр кинетичности потока или число Фруда – это безразмерный параметр, характеризующий отношение сил инерции к силам тяжести. Для удобства преобразований введем обозначения: $V_x = u$ и $V_y = v$.

Тогда $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $\frac{h}{h_0} \cdot u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $\frac{h}{h_0} \cdot v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$;

$$V^2 = u^2 + v^2; \quad \frac{V^2}{2g} + h = H_0. \quad (2.15)$$

Далее поступим как в работе [24]. Составим выражение для дифференциала потенциальной функции:

$$d\varphi = u dx + v dy \quad (2.16)$$

Аналогично составим выражение для дифференциала функции тока:

$$\frac{h_0}{h} d\psi = -v dx + u dy \quad (2.17)$$

Умножая далее обе части уравнения (2.17) на мнимую единицу и складывая его с уравнением (2.16), получаем следующее уравнение:

$$d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi = (u - iv)d(x + iy), \quad (2.18)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Из уравнения (2.18) следует дифференциальная комплексная связь между планом потока и плоскостью годографа скорости в виде обобщающей связи между сопряженной скоростью и производной от комплексного потенциала по координате

$$dz = (d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi) \frac{1}{V} e^{i\theta}, \quad (2.19)$$

где $z = x + iy$; θ – угол, характеризующий направление вектора скорости к оси Ox ; V – модуль вектора скорости жидкости частицы.

Совершим переход в плоскость годографа скорости, т.е. в плоскость (V, θ) , аналогично методу, изложенному в [53]. Для полноты изложения содержания материала диссертации приведем подробно вывод этого метода перехода, хотя это уже известный материал в работе [53].

В равенстве (2.19) полагаем переменные x, y , а, следовательно, и функции φ и ψ за функции новых переменных V и θ . В таком случае равенство (2.18) трансформируется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial V} dV + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial V} dV + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + i \frac{h_0}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial V} dV + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \right) \right] \frac{1}{V} e^{i\theta} = \\ &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial V} + i \frac{h_0}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) e^{i\theta} dV + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i \frac{h_0}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) e^{i\theta} d\theta \end{aligned} \quad (2.20)$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при дифференциалах независимых переменных, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial V} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial V} + i \frac{h_0}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) e^{i\theta}, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i \frac{h_0}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) e^{i\theta}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Входящее сюда отношение $\frac{h_0}{h}$, согласно одному из равенств системы (2.15), а именно интегралу Бернулли, является функцией скорости V

$$\frac{V^2}{2g} + h = \frac{V_0^2}{2g} + h_0$$

Определим отношение $\frac{h_0}{h}$:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{V^2}{2g} + 1 - \frac{V_0^2}{2gh}. \quad (2.22)$$

Чтобы исключить из системы (2.21) независимую переменную z , продифференцируем первое уравнение системы по θ , второе по V и результаты вычтем друг из друга. Тогда в силу соотношения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial V} = \frac{\partial^2 z}{\partial V \partial \theta}. \quad (2.23)$$

которое справедливо для непрерывных функций, следует равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial V} + i \frac{h_0}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta \partial V} \right) e^{i\theta} + \frac{1}{V} i e^{i\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial V} - \frac{h_0}{h} \frac{1}{V} e^{i\theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial V} + i \frac{h_0}{h} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial V} \right) e^{i\theta} - \\ & - \frac{1}{V^2} e^{i\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i e^{i\theta} \frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{h_0}{h} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

После преобразований полученного уравнения получим систему уравнений в частных производных:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{h_0}{h} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad \frac{1}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{h_0}{h} \frac{\partial \psi}{\partial V}. \quad (2.24)$$

Определим производную $\frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{h_0}{h} \right)$. Из равенства (2.22) следует, что

$$\frac{h_0}{h} = \frac{2gh_0}{2gH_0 - V^2} \quad (2.25)$$

Производная $\frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{h_0}{h} \right)$ в таком случае определяется выражением:

$$\frac{d}{dV} \left[\frac{2gh_0}{(2gH_0 - V^2)V} \right] = \frac{-2gh_0(2gH_0 - 3V^2)}{V^2(2gH_0 - V^2)^2} \quad (2.26)$$

Так как $V = \lambda \sqrt{2gH_0}$, то, переходя в равенстве (2.22) к скоростному коэффициенту λ , получим

$$\frac{d}{dV} \left[\frac{2gh_0}{(2gH_0 - V^2)V} \right] = \frac{d}{dV} \left[\frac{-2gh_0(2gH_0 - 3\lambda^2 \cdot 2gH_0)}{(2gH_0 - 2gH_0\lambda^2)\lambda^2 2gH_0} \right] \quad (2.27)$$

Далее преобразуем систему (2.24), совершая переход к параметру $\tau = \lambda^2$, где $\lambda = \frac{V}{\sqrt{2gH_0}}$ - скоростной коэффициент, получим, как в работе [16], следующую систему уравнений математической физики в плоскости годографа скорости [54,55]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{h_0}{2H_0} \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2.28)$$

при этом для спокойных потоков справедливо неравенство: $0 \leq \tau < \frac{1}{3}$;
для бурных: $\frac{1}{3} < \tau \leq 1$.

Дифференцируя первое уравнение системы (2.28) по переменной θ , а второе – по переменной τ и приравнявая частные производные, получим следующее уравнение математической физики:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} + \frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.29)$$

Итак, дополнительное условие потенциальности потока позволяет для плановых потоков перейти от существенно нелинейной системы уравнений в частных производных (2.1) к линейной системе относительно частных производных в плоскости годографа скорости (2.28). Это упрощение системы уравнений позволяет в дальнейших исследованиях получить целые группы аналитических решений системы (2.28) и использовать их при решении различных прикладных задач по течению плановых, стационарных, потенциальных, бурных или спокойных потоков воды.

2.5 ФОРМАЛЬНОЕ СОВПАДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХМЕРНЫХ В ПЛАНЕ ОТКРЫТЫХ ВОДНЫХ ПОТОКОВ И УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В настоящее время в связи с развитием возможностей вычислительной техники и появлением мощных математических пакетов программ появилась возможность быстрого построения и апробирования различной сложности математических моделей по течению водных потоков. При этом наибольший интерес представляют собой наиболее простые модели, дающие, однако удовлетворительные по степени адекватности результаты для практики. Известно, что построение математической модели какого-либо физического процесса начинается с выбора системы уравнений, описывающей сам процесс. Часто математически формально система уравнений исследуемого процесса по внешнему виду сводится к уже известной системе, решение краевых задач, на базе которой также известно и его можно заимствовать для решения новой исследуемой задачи.

Выполним является приведение известных уравнений движения идеального газа и уравнений движения, двухмерных в плане открытых водных потоков, при определенных ограничениях на поток к сопоставимому виду и демонстрации их совпадения. Рассмотрим вначале уравнения движения двухмерных в плане открытых водных потоков. Для этого воспользуемся в качестве исходной системы известной системой двухмерных в плане уравнений движения открытого водного потока в случае горизонтального плоского отводящего русла, в которой не учитываются силы трения потоку [3]:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0, \end{cases} \quad (2.30)$$

где u, v - осредненные по глубине потока проекции местной скорости; h - местная глубина потока; Oxy – плоская прямоугольная декартова система координат (в плоскости течения потока); Ox – продольная ось симметрии потока; Oy – дополняет ось Ox до правой системы координат; g - ускорение силы тяжести.

Система уравнений в частных производных (2.30) является, в соответствии с общепринятой классификацией в математической литературе [56-59], существенно нелинейной системой, и поиск ее регулярных решений представляет определенные трудности. Поэтому для ее упрощения примем дополнительные условия, а именно потенциальность потока, т.е. существование функции $\varphi = \varphi(x, y)$ такой, что выполнялись бы равенства:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v. \quad (2.31)$$

Линия $\varphi = \varphi(x, y) = const$ называется эквипотенциальной. Тогда с учетом условий (2.31) система уравнений (2.30) трансформируется к виду:

$$\begin{cases} \frac{V^2}{2g} + h = H = const \\ \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

где $V^2 = u^2 + v^2$; а постоянная «H» определяется, если известны модуль вектора скорости – V_0 и глубина потока – h_0 в некоторой характерной его точке по формуле:

$H = H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0$. Первое уравнение системы (2.32) представляет собой интеграл Бернулли для двумерных в плане водных потоков. Второе уравнение системы (2.32) является уравнением неразрывности потока и определяет существование функции тока

$\psi = \psi(x, y)$, такой, что выполняются равенства:

$$\frac{h}{h_0}u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{h}{h_0}v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.33)$$

Линия

$$\psi(x, y) = C \quad (2.34)$$

называется линией тока, которая обладает свойством непроницаемости потока вдоль нее. Из условия (2.34) следует:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\frac{h}{h_0}v dx + \frac{h}{h_0}u dy = \frac{h}{h_0}(-v dx + u dy) = 0, \text{ т.е.}$$

$$v dx = u dy, \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}. \quad (2.35)$$

Условие (2.35) показывает, что касательная к линии тока совпадает с направлением вектора скорости жидкой частицы в рассматриваемой точке потока (рисунок 2.1).

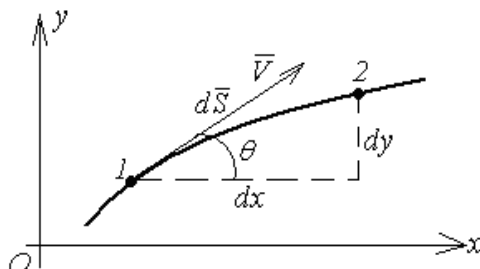


Рисунок 2.1 – Схема к пояснению понятия линии тока.

При совпадении направления векторов $d\vec{S}$ и \vec{V} выполняется условие:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}, \quad (2.36)$$

из которого следует условие (2.35). Линии тока перпендикулярны эквипотенциалам в физической плоскости. Это следует из условия:

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} \right) = -\frac{uhv}{h_0} + \frac{vhu}{h_0} = 0.$$

Итак, систему уравнений (2.31), (2.32), (2.33) будем считать базовой для двумерных в плане открытых водных потоков. Перепишем ее еще раз для лучшего восприятия по тексту работы:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; & v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ h = H_0 - \frac{V^2}{2g}; & H_0 = h_0 + \frac{V_0^2}{2g} \\ \frac{h}{h_0} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; & \frac{h}{h_0} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.37)$$

Введем понятие квадрата скоростного коэффициента $\tau = \frac{V^2}{2gH_0} = \lambda^2$ и преобразуем систему (2.37) к виду:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; & v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ h = H_0(1 - \tau); \\ \frac{h}{h_0}u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; & \frac{h}{h_0}v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.38)$$

Преобразуем далее систему (2.38), переходя в плоскость годографа скорости, т.е. к переменным (τ, θ) [36]. В результате получим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{h_0}{2H_0} \cdot \frac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 2 \frac{h_0}{H_0} \cdot \frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \end{cases} \quad (2.39)$$

После преобразования, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 2 \cdot \frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \end{cases} \quad (2.40)$$

Системе (2.40) эквивалентно уравнение в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} + \frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.41)$$

Для спокойных потоков

$$0 \leq \tau < \frac{1}{3}; \quad (2.42)$$

для бурных потоков

$$\frac{1}{3} < \tau \leq 1. \quad (2.43)$$

Уравнения (2.40), (2.41) решают вопрос о течении жидкости, если известна область переменных (τ, θ) , соответствующая этому течению, если даны значения " ψ " на граничных линиях тока; если везде, внутри области, функция " ψ " вместе со своими первыми производными конечна, однозначна и непрерывна, а количество " τ " не превышает $\frac{1}{3}$ и обращается в нуль лишь в некоторых точках контура для спокойных потоков и превышает $\frac{1}{3}$ и обращается в единицу лишь в некоторых точках контура для бур-

ных потоков. Для спокойных потоков уравнение (2.41) относится к эллиптическому типу. Оно переписывается в раскрытом виде:

$$\tau \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1-3\tau}{4\tau(1-\tau)} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.44)$$

Из сравнения уравнения (2.44) с уравнением общего вида

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \theta} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad [68] \text{ видно, что } A = \tau, B = 0, C = \frac{1-3\tau}{4\tau(1-\tau)}$$

$$\text{и } \Delta = B^2 - AC = \frac{-\tau(1-3\tau)}{4\tau(1-\tau)} = \frac{3\tau-1}{4(1-\tau)} < 0, \text{ при } 0 \leq \tau < \frac{1}{3}$$

и уравнение (2.44) относится к эллиптическому типу, при $\frac{1}{3} < \tau \leq 1$ уравнение относится к гиперболическому типу.

Далее рассмотрим идеальный газ. Потенциальное движение газа согласно [37] требует для адиабатного процесса выполнение равенства:

$$p = k\rho^\gamma, \text{ т.е. } p = p(\rho), \quad (2.45)$$

где p – давление газа; k – коэффициент пропорциональности; γ – показатель адиабаты; ρ – плотность газа.

А.С. Чаплыгин рассматривал движение газа с сохранением тепла частицами газа ввиду малой теплопроводности и малой лучеиспускательной способности газа. Для потенциала скоростей имеем функцию $\varphi = \varphi(x, y)$:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.46)$$

Уравнение неразрывности записывается в виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (2.47)$$

Закон Бернулли с использованием уравнения (2.45) приводит к соотношению:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{V^2}{2\alpha} \right)^\beta, \quad (2.48)$$

где $V^2 = u^2 + v^2$, $\alpha = \frac{k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{\gamma-1}$, $\beta = \frac{1}{\gamma-1}$, $\rho_0 = const$. При этом ρ_0 плотность газа в точке с $V = 0$. Полагая $\tau = \frac{V^2}{2\alpha}$ [37] из (2.48) получим:

$$\rho = \rho_0(1-\tau)^\beta. \quad (2.49)$$

В литературе [29] эта же формула приводится в виде $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$. Из уравнения (2.47) следует существование функции ψ , определяемой равенствами:

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\rho_0} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\rho}{\rho_0} g = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.50)$$

Далее, переходя в плоскость годографа вектора скорости, получим уравнения С.А. Чаплыгина для идеального газа [37] в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.52)$$

С.А. Чаплыгин в своих исследованиях рассматривал случай $0 \leq \tau < \frac{1}{2\beta+1}$ дозвукового течения совершенного газа и разработал методы решения ряда практических задач по течению идеального газа при его дозвуковых режимах.

Как видно из сравнения уравнений (2.40), (2.41) и (2.51), (2.52) они совпадают при $\beta = 1$ [60]. Следовательно, в плоскости годографа скорости вектора скорости при одних и тех же граничных условиях решения соответствующих задач для газа при $\beta = 1$ и двухмерного в плане спокойного потока будут совпадать. Этот факт дает широкие перспективы для теории и практического развития аналитических решений граничных задач по течению двухмерных в плане открытых водных потоков. Он позволит заимствовать хорошо разработанные методы моделирования в газовой динамике для решения сопоставимых задач по течению двухмерных в плане открытых водных потоков.

2.6 НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Преобразовав уравнение (2.29), получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) - \frac{3\tau-1}{4\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.53)$$

Определим решение (2.53) в виде:

$$\psi = \psi_1(\tau) \sin \theta \quad (2.54)$$

Из уравнения (3.53) разделением переменных следует обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $\psi_1 = \psi_1(\tau)$

$$\frac{d^2 \psi_1}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau(1-\tau)} \frac{d\psi_1}{d\tau} + \frac{3\tau-1}{4\tau^2(1-\tau)} \psi_1 = 0 \quad (2.55)$$

Для бурного потока $\frac{1}{3} < \tau \leq 1$ коэффициенты $a_1(\tau) = \frac{1}{\tau(1-\tau)}$, $a_2 = \frac{3\tau-1}{4\tau^2(1-\tau)}$ будут неотрицательными. Воспользуемся методом отличным от метода сведения уравнения (2.55) к гипергеометрическому. Для решения уравнения (2.55), согласно методу в справочнике по математике [61], воспользуемся подстановкой:

$$\psi_2 = \bar{\psi} e^{\int \varphi(\tau) d\tau} \quad (2.56)$$

В результате получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\tau^2} + [a_1(\tau) + 2\varphi(\tau)] \frac{d\bar{\psi}}{d\tau} + \\ + [a_2(\tau) + a_1(\tau) \cdot \varphi(\tau) + \varphi'(\tau) + \varphi^2(\tau)] \cdot \bar{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Полагая

$$\varphi(\tau) = -\frac{1}{2} a_1(\tau) = -\frac{1}{2\tau(1-\tau)},$$

упростим уравнение (2.57) к виду:

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{d\tau^2} = \frac{3}{4(1-\tau)^2} \bar{\psi} \quad (2.58)$$

Обозначим далее $z = 1 - \tau$, в результате уравнение (2.58) перепишем в виде:

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} = \frac{3}{4} z^{-2} \bar{\psi} \quad (2.59)$$

Это уравнение совпадает со стандартным в справочнике по математике [61] и его решение имеет вид:

$$\bar{\psi} = \begin{cases} C_1 z^{\frac{1}{2}+S} + C_2 z^{\frac{1}{2}-S} & \text{при } 4C + 1 > 0 \\ C_1 \sqrt{z} + C_2 \sqrt{z} \ln z & \text{при } 4C + 1 = 0, \text{ где } S = \sqrt{\frac{4C+1}{4}}; \\ C_1 \sqrt{z} \cos(S \ln z) + C_2 \sqrt{z} \sin(S \ln z), & \text{при } 4C + 1 < 0. \end{cases}$$

Для уравнения (2.59): $C = \frac{3}{4}$ и $4C+1 = 4 \cdot \frac{3}{4} + 1 = 4 > 0$.

Следовательно,

$$\bar{\psi} = C_1 (1-\tau)^{3/2} + C_2 (1-\tau)^{-1/2}. \quad (2.60)$$

Или возвращаясь к функции ψ_1 получим:

$$\psi^1 = C^1 \frac{(1-\tau)^2}{\tau^{1/2}} + \frac{C^2}{\tau^{1/2}}. \quad (2.61)$$

Общее решение уравнения (2.53) при этом будет иметь следующий вид:

$$\psi = \sin \theta \cdot \left[C_1 \frac{(1-\tau)^2}{\tau^{1/2}} + \frac{C_2}{\tau^{1/2}} \right]. \quad (2.62)$$

Решением уравнения (2.53) найдено автором в виде [62,63]:

$$\psi = C \frac{(1-\tau)^2}{\tau^{1/2}} \sin(\theta - \theta_{\max}),$$

которое позволит далее корректно поставить граничную задачу свободно растекающегося потока в плоскости годографа скорости. В общем виде решение уравнения (2.53) будет решение в виде ряда:

$$\psi = \sum_{k=1}^N A_k \psi_k(\tau) \sin k\theta, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Во второй главе было выявлено, что из системы уравнений движения идеального газа по методу Чаплыгина при $\beta=1$ следует по внешнему виду система уравнений двухмерных плановых потенциальных потоков. Следовательно, и методы их решений могут совпадать, поэтому далее уравнение математической физики (2.29) будем пытаться решать методами, приводящими к гиперболическому уравнению, т.е. указывать направление поиска аналитических решений.

Таким образом, можно добавить следующее: действительно приведением основного уравнения математической физики для потенциальных двухмерных в плане потоков к гиперболическому виду можно получить аналитических решений. Кроме того можно получить и решения стандартными методами. Эти решения можно использовать для постановки и решения различных прикладных задач плановой гидравлики, что будет и рассмотрено далее в третьей главе.

3 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕЧЕНИЮ ДВУХМЕРНЫХ В ПЛАНЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ БУРНЫХ ПОТОКОВ

3.1 РЕШЕНИЕ РЯДА ИЗВЕСТНЫХ ЗАДАЧ ПО ГИДРАВЛИКЕ ПЛАНОВЫХ БУРНЫХ ПОТОКОВ

Решение ряда известных задач по гидравлике плановых бурных потоков будет произведено для проверки и обоснования метода с использованием промежуточной плоскости годографа скорости.

3.1.1 ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА РАДИАЛЬНО РАСТЕКАЮЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

Задача о радиальном растекании планового потока ввиду упрощений решается аналитически непосредственно в физической плоскости течения потока [3]. Однако более сложные задачи по плановому растеканию потоков невозможно решить аналитическими методами на базе уравнений движения в плане течения потока. Поэтому предлагается метод решения плановых задач с использованием промежуточной плоскости годографа скорости с последующим переходом в физическую плоскость течения потока.

Задача о радиальном растекании планового потока имеет широкое практическое применение в гидравлике открытых потоков [3]. Приведем вначале решение данной задачи в физической плоскости течения потока.

Пусть двумерный открытый поток движется так, что его линиями тока являются прямые лучи, выходящие из начала координат [3] (рисунок 3.1).

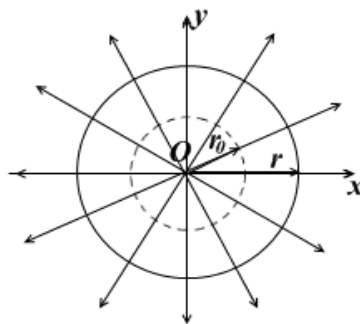


Рисунок 3.1 – Вид радиального растекания бурного потока в плане.

При этом на радиусе r_0 заданы параметры потока $h = h_0$, $V = V_0$, где h – местная глубина потока, V – модуль скорости. Для бурных потоков дополнительно выполняется условие:

$$F_0 = \frac{V_0^2}{gh_0} > 1. \quad (3.1)$$

Необходимо определить параметры потока на произвольном радиусе $r > r_0$, т.е.

$$h = h(r), \quad V = V(r). \quad (3.2)$$

Для решения задачи воспользуемся уравнениями движения потока в полярной системе координат и уравнением неразрывности:

$$\begin{cases} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -g \frac{\partial}{\partial r}(z_0 + h) - T_r; \\ V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} = -g \frac{\partial}{\partial \theta}(z_0 + h) - T_\theta; \\ \frac{\partial}{\partial r}(rV_r h) + \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta h) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Пренебрегая силами трения и учитывая, что $V_\theta = 0$ система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -g \frac{\partial}{\partial r}(z_0 + h); \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(z_0 + h) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial r}(rV_r h) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Обозначив $V_r = V$ и рассматривая случай плоского горизонтального дна $z_0 = 0$, из (4.4) получаем:

$$\begin{cases} h + \frac{V^2}{2g} = H_0 = const; \\ rVh = \frac{Q}{2\pi} = const; \end{cases} \quad (3.5)$$

где H_0 определяется по параметрам h_0 , V_0 из первого уравнения системы:

$$\begin{cases} h_0 + \frac{V_0^2}{2g} = H_0; \\ r_0 V_0 h_0 = \frac{Q}{2\pi}. \end{cases} \quad (3.6)$$

А из второго уравнения системы (3.6) можно определить расход Q по параметрам r_0 , V_0 , h_0 . Введя скоростной коэффициент $\lambda = \frac{V}{\sqrt{2gH_0}}$ из системы (3.5) получим согласно [3]:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\lambda(1-\lambda^2)}{\lambda_0(1-\lambda_0^2)} \quad \text{или} \quad \frac{r_0}{r} = \frac{\tau^{1/2}(1-\lambda^2)}{\tau_0^{1/2}(1-\lambda_0^2)}, \quad (3.7)$$

где τ – квадрат скоростного коэффициента, $\tau = \lambda^2$, $\tau = \frac{V^2}{2gH_0}$, $\tau_0 = \frac{V_0^2}{2gH_0}$. Далее решим уравнение (3.7) относительно τ и получим:

$$\begin{aligned}\lambda(r) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{(1-\lambda_0^2)\lambda_0 r_0 3\sqrt{3}}{2r} \right) \right); \\ \tau(r) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{(1-\tau_0)\tau_0^{1/2} r_0 3\sqrt{3}}{2r} \right) \right).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Определив $\tau(r)$, определяются и параметры $h(r)$, $V(r)$:

$$h(r) = H_0 [1 - \tau(r)]; \quad V(r) = \tau^{1/2} \sqrt{2gH_0}. \quad (3.9)$$

Анализируя систему (3.8)–(3.9), можно сделать вывод, что с увеличением τ увеличивается и $r(\tau)$, а $h(\tau)$ уменьшается до нуля при $\tau = 1$, $V(\tau)$ возрастает до $V_{\max} = \sqrt{2gH_0}$, $\tau_0 \leq \tau \leq 1$.

Решим поставленную задачу с использованием плоскости годографа скорости. Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции тока в плоскости годографа скорости [36]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} + \frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.10)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных (3.10) имеет целый спектр решений [54]. Учитывая физику растекания потока, для решения задачи в работе воспользуемся следующим решением для линии тока:

$$\psi = \frac{C_2 H_0}{2h_0} [\ln \tau - \tau] + C_1 \theta, \quad (3.11)$$

а выражение для потенциальной функции определим из базовой системы уравнений для плановых потоков в плоскости годографа скорости (2.28) и выражение для потенциальной функции будет иметь вид:

$$\varphi = -\frac{C_1 h_0}{2H_0} \left[-\frac{2}{1-\tau} + \ln \frac{\tau}{1-\tau} \right] + C_2 \theta, \quad (3.12)$$

где C_1 , C_2 – константы.

Так как при радиальном растекании линии тока прямые лучи $C_2 = 0$, то из уравнений (3.11)–(3.12) следует:

$$\begin{aligned}\psi &= C_1\theta; \\ \varphi &= -\frac{C_1h_0}{2H_0}\left[-\frac{2}{1-\tau} + \ln\frac{\tau}{1-\tau}\right].\end{aligned}\quad (3.13)$$

Для перехода в физическую плоскость растекания потока воспользуемся формулой связи физической плоскости и плоскости годографа скорости [36,44]:

$$d(x+iy) = \frac{1}{V} e^{i\theta} \left(d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi \right). \quad (3.14)$$

Вдоль линии тока, полагая в (3.14) $\psi = const$, $d\psi = 0$, получим:

$$\begin{cases} dx = \frac{\cos\theta d\varphi}{\tau^{1/2} \sqrt{2gH_0}}; \\ dy = \frac{\sin\theta d\varphi}{\tau^{1/2} \sqrt{2gH_0}}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Для эквипотенциалей с учетом $d\varphi = 0$, следует:

$$\begin{cases} dx = -\frac{h_0}{H_0} \frac{\sin\theta d\psi}{\tau^{1/2} (1-\tau) \sqrt{2gH_0}}; \\ dy = \frac{h_0}{H_0} \frac{\cos\theta d\psi}{\tau^{1/2} (1-\tau) \sqrt{2gH_0}}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Из системы (3.13) непосредственным дифференцированием следует:

$$\begin{aligned}d\psi &= C_1 d\theta; \\ d\varphi &= -\frac{C_1h_0}{2H_0} \left[\frac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2} \right] d\tau.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Подставляя выражение для $d\varphi$ в систему (3.15), а выражение для $d\psi$ в систему (3.16), получим:

$$\begin{cases} dx = -\frac{C_1h_0}{2H_0} \cdot \frac{(1-3\tau)\cos\theta d\tau}{\tau^{3/2}(1-\tau)^2 \sqrt{2gH_0}}; \\ dy = -\frac{C_1h_0}{H_0} \cdot \frac{(1-3\tau)\sin\theta d\tau}{\tau^{3/2}(1-\tau)^2 \sqrt{2gH_0}}. \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} dx = -\frac{C_1 h_0}{H_0} \cdot \frac{\sin \theta d\theta}{\tau^{1/2}(1-\tau)\sqrt{2gH_0}}; \\ dy = \frac{C_1 h_0}{H_0} \cdot \frac{\cos \theta d\theta}{\tau^{1/2}(1-\tau)\sqrt{2gH_0}}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Проинтегрировав систему (3.18) и упростив, получим выражения для линии тока:

$$\begin{cases} x = \frac{C_1 h_0 \cos \theta}{H_0 \sqrt{2gH_0}} \cdot \frac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)}; \\ y = \frac{C_1 h_0 \sin \theta}{H_0 \sqrt{2gH_0}} \cdot \frac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Возводя обе части каждого уравнения системы (3.20) в квадрат и складывая почленно, получим:

$$x^2 + y^2 = C_1^2 \frac{h_0^2}{H_0^2} \cdot \frac{1}{\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{1}{2gH_0}. \quad (3.21)$$

Учитывая, что на радиусе r_0 , $\tau = \tau_0$ из выражения (3.21) следует:

$$r_0^2 = C_1^2 \frac{h_0^2}{H_0^2} \cdot \frac{1}{\tau_0(1-\tau_0)^2} \cdot \frac{1}{2gH_0}. \quad (3.22)$$

Из уравнения (3.22) выразим постоянную C_1^2 :

$$C_1^2 = \frac{r_0^2 H_0^2 \tau_0 (1-\tau_0)^2 2gH_0}{h_0^2}. \quad (3.23)$$

Выразим из уравнения (3.21) закон распределения глубин и скоростей вдоль линии тока [44]:

$$r^2 = \frac{r_0^2 \tau_0 (1-\tau_0)^2}{\tau(1-\tau)^2} \quad \text{или} \quad \frac{r_0}{r} = \frac{\tau^{1/2}(1-\tau)}{\tau_0^{1/2}(1-\tau_0)}. \quad (3.24)$$

Для проверки формулы (3.24) аналогично интегрируем систему (3.19) и получаем:

$$\begin{cases} x = C_1 \frac{h_0}{H_0} \frac{\cos \theta}{\sqrt{2gH_0}} \frac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)}; \\ y = C_1 \frac{h_0}{H_0} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2gH_0}} \frac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Возводя в квадрат и складывая почленно оба уравнения системы (3.25), получим уравнение для эквипотенциалей, которое совпадает с уравнением (3.21):

$$x^2 + y^2 = C_1^2 \frac{h_0^2}{H_0^2} \frac{1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{1}{2gH_0}. \quad (3.26)$$

Полагая $\tau = const$, получим, что эквипотенциали представляют собой концентрические окружности при любом фиксированном τ . Из уравнения (3.24) следует, что при $\tau \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$, т.е. с увеличением радиуса растекания потока, его глубина стремится к нулю, а скорость к максимальной (3.9). И очевидно, что полученный закон распределения скоростей и глубин вдоль радиуса растекания потока (3.24) совпадает в случае бурного потока с результатом в [3].

Производная $r'_\tau = \frac{3\tau - 1}{2\tau^{1/2}(1-\tau)^2} > 0$ при $\tau > 1/3$, т.е. радиус увеличивается монотонно с увеличением τ от τ_0 до 1, монотонно уменьшается h , монотонно увеличивается скорость и наоборот, с увеличением радиуса $\tau \rightarrow 1$.

Таким образом, можно сформулировать общий метод (технология) решения ряда задач по плановому течению бурного потока жидкости: 1) используя физику растекания потока необходимо выбрать конструкцию решения базовой системы в плоскости годографа скорости; 2) имея уравнение связи между физической плоскостью и плоскостью годографа скорости (3.14) и решение (3.13), составляем систему дифференциальных уравнений для линий тока $\psi = const$ и эквипотенциалей $\varphi = const$, связывающую координаты x, y и параметры τ, θ , а затем интегрируя их, получаем уравнения для линий тока и эквипотенциалей в физической плоскости течения потока. Можно также определить параметры потока в любой точке области течения потока, т.е. V, h, θ .

3.1.2 ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ БУРНОГО ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ВЫПУКЛОГО УГЛА

Целью данного параграфа является сравнение полученных результатов с результатами аналитического метода интегрирования уравнений движения потока непосредственно в физической плоскости течения потока в задаче обтекания бурным потоком выпуклого угла [3] (рисунок 3.2).

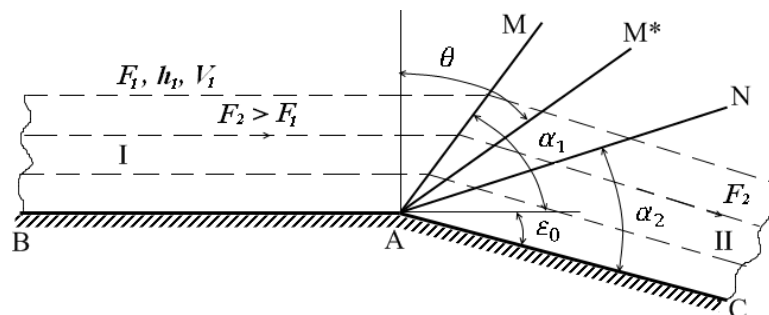


Рисунок 3.2 – Схема растекания потока. M^* - произвольная характеристика первого семейства в центрированной волне.

Пусть бурный равномерный поток движется вдоль прямой стенки BA , которая в точке A терпит излом и поворачивается на конечный угол ε_0 . Поток, огибая угловую точку A , далее движется вдоль стенки AC , которую также возьмем прямой. Достоверным условием для потока за угловой точкой A считаем, что стенка AC должна быть линией тока и поток вдоль AC также является равномерным. Следовательно, согласно информации в [3] два равномерных потока разделены простой волной. Кинетичность потоков I и II обозначим посредством F_1, F_2 . Ограничимся случаем $F_2 > F_1$, то есть кинетичность потока увеличивается вниз по течению потока. Границами потоков будут прямые AM и AN , которые являются характеристиками первого семейства с волновыми углами:

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{F_1}}; \alpha_2 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{F_2}}. \quad (3.27)$$

Два равномерных потока I, II соединены центрированной волной, в которой все характеристики, выходящие из точки A прямые линии, вдоль которых параметры потока постоянны. Вдоль характеристики второго семейства пересекающей характеристики выходящие из точки A будет выполнено условие [3,64]:

$$\varepsilon - \left(\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F-1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}} \right) = -2\eta \quad (3.28)$$

или в виде предложенном В.Н. Коханенко [64]:

$$\varepsilon - \left(\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3\tau-1}{3(1-\tau)}} + \arcsin \sqrt{\frac{1-\tau}{2\tau}} \right) = -2\eta, \quad (3.29)$$

где $\tau = \frac{F}{F+2}$; $\tau = \frac{V^2}{2gH_1}$ – квадрат скоростного коэффициента потока, ε – угол, характеризующий направление вектора скорости частицы потока.

Постоянная H_1 определяется по параметрам I потока

$$V = V_1, h = h_1, \varepsilon_1 = 0. \quad (3.30)$$

Если в потоке I $\varepsilon = 0, F = F_1$, то

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F_1-1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F_1}} \right]. \quad (3.31)$$

Так как угол ε в задаче изменяется от нуля до $\varepsilon = -\varepsilon_0$, то есть остается отрицательным везде, тогда уравнение (3.28) с учетом (3.31) перепишем в виде:

$$\varepsilon^* = \left[\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F-1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}} \right] - \left[\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F_1-1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F_1}} \right], \quad (3.32)$$

где $\varepsilon^* = |\varepsilon|$.

Максимальный угол поворота стенки при безотрывном обтекании стенки с изломом при заданной кинетичности F_1 первого потока определится из условия $F_2 = \infty$, $h_2 = 0$:

$$\varepsilon_{\max}^* = \sqrt{3} \frac{\pi}{2} - \left[\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F_1 - 1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F_1}} \right]. \quad (3.33)$$

Предельный угол поворота бурного потока можно определить из (3.33), если положить поток I критическим, то есть $F_1 = 1$. В таком случае:

$$\varepsilon_{\max}^* = (\sqrt{3} - 1) \frac{\pi}{2} \approx 65,88^\circ. \quad (3.34)$$

Эти выводы согласуются с результатами, изложенными в [3]. Из (3.34) также следует, что для безотрывного обтекания потоком плоской стенки с изломом (выпуклого угла) должно выполняться условие:

$$\varepsilon_0 = f(F_2) - f(F_1), \quad (3.35)$$

где $f(F) = \sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F-1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}}$.

Зная, что в центрированной волне параметры потока связаны условием (3.28) с использованием (3.31) можно при заданном $F \in [F_1; F_2]$ определить соответствующий угол ε вдоль характеристики первого семейства, то есть на произвольной прямой AM^* . Угол же θ , если отсчитывать как показано на рисунке 3.2 для характеристики первого семейства, определяется по формуле:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \varepsilon^*. \quad (3.36)$$

Определив F , θ , можно определить и параметры потока вдоль прямой $\theta = \text{const}$:

$$\tau = \frac{F}{F+2}, \quad h = H_1(1-\tau), \quad V = \tau^{1/2} \sqrt{2gH_1}, \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}}, \quad (3.37)$$

где h_1 , V_1 – параметры первого равномерного потока, $H_1 = \frac{V_1^2}{2g} + h_1$.

Итак, параметры потока в центрированной волне полностью определены. Для построения линии тока в центрированной волне выявим вначале основные свойства потока в этой области его течения. Согласно [3] система уравнений движения планового потока совместно с уравнением неразрывности имеет вид:

$$\begin{cases} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -g \sin \mu \cos \theta - g \cos \mu \frac{\partial(z_0 + h)}{\partial r} - T_r; \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -g \sin \mu \sin \theta - g \cos \mu \frac{\partial(z_0 + h)}{\partial \theta} - T_\theta; \\ \frac{\partial}{\partial r}(ru_r h) + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta h) = 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

где u_r, u_θ – радиальная и трансверсальная проекции вектора скорости; r, θ – полярные координаты положения жидкой частицы потока; z_0 – отметка дна русла; μ – продольный уклон русла; g – ускорение силы тяжести.

Полагаем в задаче: $T_r = T_\theta = 0$; $z_0 = const$; $\mu = 0$ и условия: $\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$; $\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0$; $\frac{\partial h}{\partial r} = 0$ – следующие из свойств простых центрированных волн [3]. В этом случае система (3.38) упрощается к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = u_\theta; \\ u_\theta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = -g \frac{\partial h}{\partial \theta}; \\ u_r h + u_\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} + h \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Третье уравнение системы (3.39) выражает в полярных координатах условие безвихревого движения потока $\Omega = 0$, при этом справедлив интеграл Бернулли в виде:

$$H_1 = \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2g} + h. \quad (3.40)$$

Со второго и третьего уравнений системы (3.39) как отмечено в [3], что:

$$u_\theta = \sqrt{gh}. \quad (3.41)$$

Уравнение линии тока в полярных координатах имеет вид [64]:

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{rd\theta}{u_\theta}. \quad (3.42)$$

Переходя к параметру τ , получим формулы:

$$h = H_1(1 - \tau); \quad u_\theta = \sqrt{gH_1(1 - \tau)}; \quad u_r = \sqrt{gH_1(3\tau - 1)}; \quad V = \tau^{1/2} \sqrt{2gH_1}. \quad (3.43)$$

Перепишем уравнение (3.42) в виде:

$$\frac{dr}{r} = \frac{u_r d\theta}{u_\theta} = \sqrt{\frac{3\tau-1}{1-\tau}} d\theta. \quad (3.44)$$

Из уравнения (3.29) определим выражение $\sqrt{\frac{3\tau-1}{1-\tau}}$:

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon^* - \alpha + 2\eta}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\tau-1}{1-\tau}}. \quad (3.45)$$

Определим дифференциал угла θ из (3.36):

$$d\theta = d\varepsilon^* - d\alpha. \quad (3.46)$$

Тогда уравнение линии тока (3.44) преобразуется к виду:

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon^* - \alpha + 2\eta}{\sqrt{3}} d\theta \quad (3.47)$$

или в виде:

$$\frac{dr}{r} = 3 \operatorname{tg} \gamma d\gamma, \quad (3.48)$$

где $\gamma = \frac{\varepsilon^* - \alpha + 2\eta}{\sqrt{3}}$, $d\gamma = \frac{d\varepsilon^* - d\alpha}{\sqrt{3}}$. Интегрируя уравнение (3.48) получим:

$$\ln \frac{r}{r_0} = \ln \left| \frac{\cos^3 \gamma_0}{\cos^3 \gamma} \right|. \quad (3.49)$$

Преобразовав уравнение (3.49), получим:

$$r = r_0 \frac{\cos^3 \gamma_0}{\cos^3 \gamma}. \quad (3.50)$$

При этом, если начальную точку траектории выбираем на луче AM , то $\gamma_0 = -\alpha_1 + 2\eta$, на луче $AN - \gamma = \varepsilon_0 - \alpha_2 + 2\eta$. Из уравнения (3.50) следует, что линии тока в центрированной волне являются подобными кривыми, расстояния между которыми при $F_2 > F_1 > 1$ увеличиваются вниз по течению потока. Таким образом, задача, поставленная в работе, решена методом с использованием плоскости годографа скорости. Однако полученные в работе результаты полностью совпадают с результатами решения этой же задачи в работе [3] чисто аналитическими методами в физической плоскости течения потока.

3.1.3 ОБЩИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГИДРАВЛИКИ ДВУХМЕРНЫХ В ПЛАНЕ ВОДНЫХ ПОТОКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Решение задачи в плоскости годографа скорости с последующим переходом в физической плоскости осуществляется следующим образом:

1. Подбираются приемлемые решения системы дифференциальных уравнений в плоскости годографа скорости для функции тока, исходя из физики процесса:

$$\psi = \sum_{k=1}^N A_k \psi_k(\tau, \theta).$$

2. Определяется решение для потенциальной функции из системы (2.28).
3. Для задач с твердыми боковыми стенками определяются постоянные A_k из граничных условий.
4. Для задач с одной степенью свободы используется принцип оптимальности в природе и далее, исходя из этого принципа и граничных условий, определяются постоянные A_k .
5. Для определения параметров потока в точке пересечения заданной линии тока и заданной эквипотенциали решается система:

$$\begin{cases} \psi = \sum_{k=1}^N A_k \psi_k(\tau, \theta) = C_1; \\ \varphi = \sum_{k=1}^N B_k \varphi_k(\tau, \theta) = C_2; \end{cases} \quad (3.51)$$

где C_1 – задается удельным расходом потока отнесенным заданной линией тока; C_2 – определяется назначением параметра τ в характерных точках (к примеру на оси симметрии потока).

6. Из системы (3.51) определяются параметры τ , θ и далее

$$h = H_0(1 - \tau); \quad V = \tau^{1/2} \sqrt{2gH_0}. \quad (3.52)$$

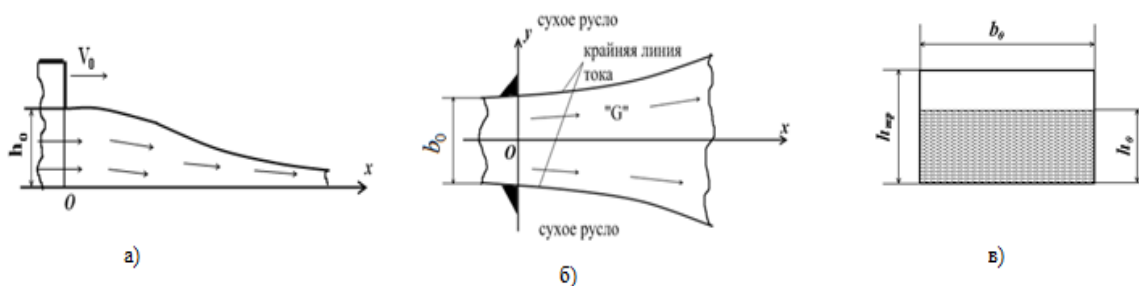
7. Координаты точки пересечения заданной линии тока и заданной эквипотенциали определяются из дифференциальной связи между планом течения потока и плоскостью годографа скорости:

$$d(x + iy) = \frac{1}{V} e^{i\theta} \left(d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi \right). \quad (3.53)$$

3.2 ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОМ РАСТЕКании БУРНОГО ДВУХМЕРНОГО В ПЛАНЕ ОТКРЫТОГО СТАЦИОНАРНОГО ВОДНОГО ПОТОКА

3.2.1 ВЫЯВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ПОТОКА

Схема растекания потока приведена на рисунке 3.3.



V_0 – модуль скорости частиц потока на его выходе из трубы, h_0 – глубина потока на его выходе из трубы, b – ширина трубы, h_{mp} – высота трубы.

а) вертикальный разрез по оси симметрии потока; б) план растекания потока; в) поперечное сечение потока и трубы.

Рисунок 3.3 – Схема растекания потока

Описание схемы. Поток, вытекая из прямоугольной трубы, при заданных значениях h_0 , b , V_0 в безнапорном режиме имеет практически равномерную эпюру распределения скоростей на вертикали на выходе из трубы растекается до бесконечности в широкое гладкое русло. При этом крайние линии тока определяют поток от сухого русла. Задача заключается в том, чтобы определить параметры потока в области “G” и форму (уравнения) крайних линий тока. К параметрам потока относятся: h – местная глубина потока, V – модуль вектора скорости, θ – угол между направлением вектора скорости и осью Ox симметрии потока, b – ширина трубы, глубина потока на его выходе из трубы $h_0 < h_{mp}$ величина скорости потока на его выходе из трубы $V = V_0$, угол направления вектора скорости на его выходе из трубы $\theta = 0$, поток бурный $F_0 = \frac{V_0^2}{gh_0} > 1$.

Полагаем поток потенциальным, бурным, следовательно, не учитываем как силы внутреннего, так и силы внешнего сопротивления потоку. Выявим основные свойства бурного потока. Для выявления основных свойств потока полагаем его одномерным. При этом справедливы следующие уравнения:

$$\frac{V^2}{2g} + h = \frac{V_0^2}{2g} + h_0 = H_0 \quad \text{– уравнение Бернулли,} \quad (3.54)$$

$$Q = Vhb' = V_0h_0b, \quad (3.55)$$

где b' – ширина живого сечения потока; V – средняя скорость в живом сечении потока; h – средняя глубина потока в живом сечении.

Выводя параметр кинетичности потока $\tau = \frac{V^2}{2gH_0}$, преобразуем уравнение (3.54) к виду:

$$\tau H_0 + h = H_0, \quad h = H_0(1 - \tau).$$

Тогда уравнение неразрывности (3.55) преобразуется к виду:

$$b' \tau^{1/2} \sqrt{2gH_0} H_0 (1-\tau) = Q. \quad (3.56)$$

Из (3.56) следует:

$$b' = \frac{Q}{\tau^{1/2} \sqrt{2gH_0} H_0 (1-\tau)}. \quad (3.57)$$

Покажем, что функция $f(\tau) = \frac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)}$ монотонно возрастающая в пределах бурного потока $\frac{1}{3} < \tau_0 \leq \tau \leq 1$ при возрастании τ . Покажем, что

$$f'_\tau = \frac{-\frac{1}{2}\tau^{-1/2} + \frac{3}{2}\tau^{1/2}}{\tau(1-\tau)^2} = \frac{3\tau-1}{2\tau^{1/2}(1-\tau)^2} > 0, \quad \text{при } \tau > \frac{1}{3}.$$

А так как по свойству бурного потока (при входе в расширение бурный поток расширяется), то он будет расширяться вниз по течению потока. Т.е. функция $f(\tau)$ – монотонно возрастающая. При этом b' монотонно увеличивается; $h = H_0(1-\tau)$ – монотонно убывает до 0 [65]; $V = \tau^{1/2} \sqrt{2gH_0}$ – монотонно возрастает $V \rightarrow V_{\max} = \sqrt{2gH_0}$.

Докажем, что угол θ вдоль крайней линии тока монотонно возрастает и стремится к θ_{\max} . Из диаграммы характеристик видно, что максимальный угол θ_{\max} отсекает характеристики выходящие из точки $\tau_0, \theta=0$. Уравнение характеристики в координатах τ, θ следующее [27,66]:

$$\theta_{\max} = C_1 + (\sqrt{3}-1) \frac{\pi}{2}, \quad (4.62)$$

где $C_1 = \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0-1}{1-\tau_0}} - \sqrt{3} \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0-1}{3(1-\tau_0)}}$, $\tau_0 = \frac{V_0^2}{2gH_0}$.

Так как b' – монотонно увеличивается, то угол θ вдоль линии тока $\theta=f(\tau, \tau_0)$ – монотонно возрастающая функция при возрастании τ от τ_0 до $\tau=1$. Следовательно, крайняя линия тока на бесконечности, т.е. при $\tau \rightarrow 1$, стремится к точке $\tau=1, \theta=\theta_{\max}$. Так как волновой угол $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}} \rightarrow 0$ при $F \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 1$ или $F = \frac{2\tau}{1-\tau}, \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{1-\tau}{2\tau}} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 1$, следовательно, линия тока сливается с эквипотенциалью [3]. Волновой угол – это угол между характеристикой и линией тока.

3.2.2 ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ В ФИЗИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Поток в области «G» (рисунок 3.3) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} H_0 = \frac{V^2}{2g} + h = \frac{V_0^2}{2g} + h_0 - \text{уравнение Бернулли;} \\ \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} = 0 - \text{уравнение неразрывности потока;} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = \Omega = 0 - \text{условие потенциальности движения потока.} \end{cases} \quad (3.59)$$

Постоянная H_0 зависит от параметров потока на выходе из трубы, т.е. от V_0 , h_0 – скорость и глубина потока на выходе из трубы.

Граничные условия для задачи следующие:

- на выходе потока из трубы: $x=0$, $h=h_0$, $V=V_0$, $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$, $\theta=0$;
- вдоль оси симметрии: $\theta=0$;
- на бесконечности: $x \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, $V \rightarrow V_{\max} = \sqrt{2gH_0}$;
- вдоль крайней линии тока: $y = f(x)$, $y'_x = tg\theta$;
- на бесконечности вдоль крайней линии тока: $\theta \rightarrow \theta_{\max}$, $h \rightarrow 0$, $V \rightarrow V_{\max}$.

Верхняя крайняя линия тока отсекает от оси Ox 50% расхода Q , т.е. $Q/2$ или для удельного расхода $-\frac{V_0 b}{2}$. В области течения потока «G» необходимо определить следующие параметры: проекции вектора скорости u_x , u_y ; местную глубину h ; неизвестную границу области растекания потока $y=f(x)$ учитывая, что модуль скорости $V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, $\theta = \arctg \frac{u_x}{u_y}$.

Для решения поставленной задачи граничных условий недостаточно. Заранее неизвестна крайняя линия тока, так как естественного условия на ограничение каких-либо параметров вдоль крайней линии тока недостаточно существуют, либо они находятся в противоречии с необходимой адекватностью модели в целом недостаточной для практики строительства ГТС в дорожных и мелиоративных водопропусках. Область потока является сплошной, и крайняя линия тока отделяет его от сухого русла. Имеется одна степень свободы. Поэтому решить аналитически задачу непосредственно в физической плоскости течения потока не представляется возможным. Так как система (3.59) является существенно нелинейной относительно параметров потока. Таким образом, решим сначала поставленную задачу в плоскости годографа скорости, как делал С.А. Чаплыгин для идеального газа [37], а затем, используя формулу перехода (3.53), перейдем из плоскости годографа скорости в физическую плоскость.

3.2.3 ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ РАСТЕКАНИЯ ПОТОКА В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Решить задачу в плоскости годографа скорости – это значит определить вид функции $\psi = \psi(\tau, \theta)$, удовлетворяющую уравнению второго порядка в частных производных (3.10) и удовлетворяющую граничным и дополнительным условиям, а так же всем свойствам на поток.

Для потока в целом можно использовать следующую систему уравнений (2.28) математической физики в плоскости годографа скорости. Систему (2.28) можно заменить дифференциальным уравнением (2.29) второго порядка относительно функции тока в плоскости годографа скорости. Это дифференциальное уравнение в частных производных (2.29) имеет целый спектр решений (пункт 2.6). Из спектра решений уравнений (2.29) выберем такое решение, которое удовлетворяло следующим условиям: угол $\theta = 0$ при $\tau = \tau_0$; угол $\theta = \theta_{max}$ при $\tau = 1$; условие монотонности, возрастание угла $\theta = \theta(\tau)$ при $\tau_0 \leq \tau \leq 1$. Возьмем решение в виде:

$$\psi = C \frac{(1-\tau)^2}{\tau^{1/2}} \sin(\theta - \theta_{max}) + \sum_{k=1}^N \psi_k(\tau) \sin k\theta. \quad (3.60)$$

Для крайней линии тока имеем:

$$\frac{V_0 b}{2} = C \frac{(1-\tau)^2}{\tau^{1/2}} \sin(\theta - \theta_{max}) + \sum_{k=1}^N \psi_k(\tau) \sin k\theta. \quad (3.61)$$

Этим трем условиям удовлетворяет из решения (3.60), (3.61) только при $k = 1$, что было доказано компьютерным путем. То есть

$$\psi = C \frac{(1-\tau)^2}{\tau^{1/2}} \sin(\theta - \theta_{max}) + A_1 \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} + A_2 \tau^{1/2} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \sin \theta$$

$$\text{и} \quad \frac{V_0 b}{2} = C \frac{(1-\tau)^2}{\tau^{1/2}} \sin(\theta - \theta_{max}) + A_1 \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} + A_2 \tau^{1/2} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \sin \theta, \quad (3.62)$$

где A_1 и A_2 – некоторые константы.

Анализируя уравнение крайней линии тока в виде (3.62) можно убедиться, что с увеличением " τ " от τ_0 до τ_k и θ от нуля до θ_k (где τ_k , θ_k – параметры потока в точке K (рисунок 3.4) роль первого слагаемого уменьшается во много раз по сравнению с вторым и третьим слагаемым и оно практически совпадает с уравнением вида

$$\frac{V_0 b}{2} = A_1 \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} + A_2 \tau^{1/2} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \sin \theta. \quad (3.63)$$

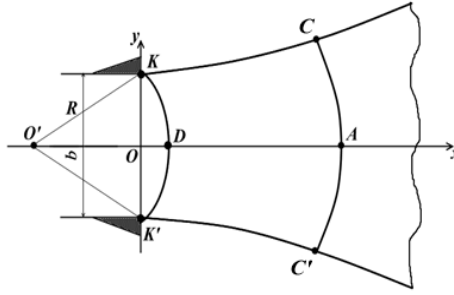


Рисунок 3.4 – План течения бурного потока.

Зная уравнения для линии тока и крайней линии тока можно из системы (2.28) определить функцию тока.

3.2.4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА КРАЙНЕЙ ЛИНИИ ТОКА И ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ В ЗАДАЧЕ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ДВУХМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ ПОТОКА ЗА БЕЗНАПОРНЫМИ ТРУБАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Для функции тока выберем выражение (3.62), пренебрегая первым слагаемым. Уравнение для крайней линии тока имеет вид (3.63). Из выражения (3.63) определим $\sin \theta$:

$$\sin \theta = \frac{V_0 b}{2A_1 \tau^{-1/2} + A_2 \tau^{1/2} (2 - \tau)}. \quad (3.64)$$

Члены вида $\sin k\theta$, где $k > 1$ не вошли в выражение (3.63), так как в этом случае условие монотонности по параметрам потока не выполняется. Дополним условие (3.63) ограничением при $\tau = 1$, $\theta = \theta_{\max}$. В результате получим:

$$A_1 + \frac{A_2}{2} = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}}. \quad (3.65)$$

Условия (3.64), (3.65) достаточны, чтобы решить задачу линейного программирования, т.е. определить A_1 , A_2 , которые доставляют максимум углу θ при любых возможных τ ($\tau_0 \leq \tau \leq 1$). Функцию $\theta = \theta(A_1, A_2)$ часто называют целевой функцией [67], где A_1 , A_2 – оптимизирующие факторы процесса растекания потока. Задача состоит в том, чтобы найти значения оптимизирующих факторов A_1 , A_2 , соответствующие экстремуму функции θ из (3.64) при ограничении (3.65) и зная, что $\theta_k \leq \theta_{\max} < 90^\circ$, где θ_k – условный угол поворота крайней линии тока на выходе потока из трубы, если полагать $C=0$. Таким образом, необходимо найти значения оптимизирующих факторов, соответствующие экстремуму функции при соблюдении ограничений [67].

Задача (3.63) линейная, в которой требуется найти максимум угла θ при ограничении (3.65). Для этого из ограничения (4.72) выразим коэффициент A_2 :

$$A_2 = \frac{V_0 b}{\sin \theta_{\max}} - 2A_1 \quad (3.66)$$

и подставим в выражение (3.63):

$$\frac{V_0 b}{2} = A_1 \sin \theta + \left(\frac{V_0 b}{\sin \theta_{\max}} - 2A_1 \right) \tau^{1/2} \left(1 - \frac{\tau}{2} \right) \sin \theta. \quad (3.67)$$

Определим пределы изменения коэффициента A_l при условии, что $A_l \geq 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{при } A_2 = 0, \quad A_1^* &= \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}}; \\ \text{при } A_1 = 0, \quad A_2^* &= \frac{V_0 b}{\sin \theta_{\max}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Следовательно, $A_l \in [A_l^*; A_2^*]$. Так как A_l входит линейно в формулу (3.67), то максимум функции $\theta = \theta(A_l, \tau, \tau_0)$ может удовлетворять только при $A_l = A_l^*$ или $A_l = A_2^*$. При $A_l = A_l^*$, из (3.63) следует:

$$\frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}} \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = \frac{V_0 b}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = \sin \theta_{\max} \quad (3.69)$$

При $A_l = A_2^*$, получим:

$$2\tau^{1/2} \left(1 - \frac{\tau}{2} \right) \sin \theta = \sin \theta_{\max}. \quad (3.70)$$

Очевидно, что выражения

$$\sin \theta = \tau^{1/2} \sin \theta_{\max} \quad (3.71)$$

и

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta_{\max}}{\tau^{1/2} (2 - \tau)} \quad (3.72)$$

доставляют максимум для функции $\theta = \theta(\tau)$. При этом монотонность $\theta = \theta(\tau)$ выполняется на всем интервале $\tau \in \left(\frac{1}{3}; 1 \right]$ (3.71). Монотонность $\theta = \theta(\tau)$ выполняется только в интервале $\tau \in \left[\frac{2}{3}; 1 \right]$, так как $F = \frac{2\tau}{1 - \tau}$ при $F \geq 4$.

Определим далее какая из функций (3.71), (3.72) имеет большее значение угла θ в зависимости от τ . Очевидно, что $\frac{1}{\tau^{1/2} (2 - \tau)} > \tau^{1/2}$ при условии $\frac{2}{3} < \tau \leq 1$. А так же этот факт виден из графиков этих функций (рисунок 3.5)

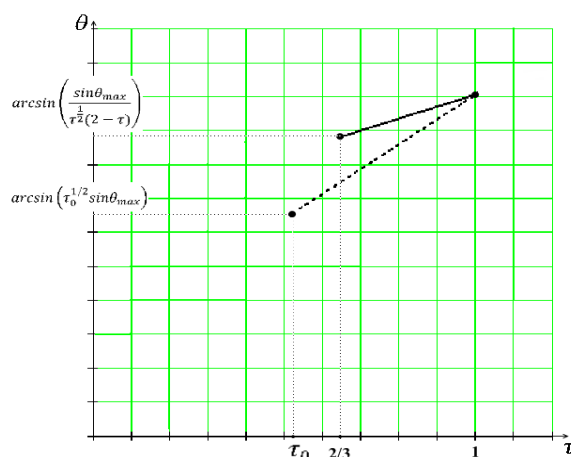


Рисунок 3.5

Выводы:

- Задача определения крайней линии тока при свободном растекании бурного потока с неизвестными границами сводится к решению задачи линейного программирования;
 - В результате решения задачи автор определила два оптимальных вида решения:
1. При $\frac{1}{3} < \tau < \frac{2}{3}$, $1 < F < 4$:

$$\psi = A \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}}, \quad (3.73)$$

где $A = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}}$.

2. При $\frac{2}{3} \leq \tau$, $F > 4$:

$$\psi = A \sin \theta \tau^{1/2} (1 - \tau), \quad (3.74)$$

где $A = \frac{V_0 b}{\sin \theta_{\max}}$.

- Решение задачи в плоскости годографа скорости является основой для решения задачи в целом. Далее пользуясь дифференциальной связью с физической плоскостью (3.53), интегрированием переходим в плоскость Oxy и определяем весь спектр параметров необходимых для проектировщикам ГТС [25].
- Как показано в работах [24,36] адекватность модели определения параметров в окрестности выхода потока из трубы в районе крепления сооружения значительно выше ранее известных моделей [3, 4, 21], что приводит к повышению надежности водопропускных ГТС, потоки вдоль которых близки к плановым и силы сопротивления потоку в окрестности выхода потока из трубы малы [3, 68].

Очевидно, что условие θ_{\max} вдоль крайней линии тока будет совпадать с углом, полученным из принципа \min потенциальной энергии потока вдоль живого сечения.

Для потенциальной функции справедливо решение [69]:

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, \theta) &= \frac{h_0}{H_0} \frac{A_1 \cos \theta}{\tau^{1/2} (1-\tau)}, \quad 1 < F < 4; \\ \varphi(\tau, \theta) &= \frac{h_0}{H_0} \frac{A_2 \cos \theta \tau^{1/2} (3\tau - 2)}{2(1-\tau)}, \quad F \geq 4.\end{aligned}\quad (3.75)$$

Рассмотрим первый вариант решения. Из первого уравнения (3.75) следует уравнение эквипотенциали проходящей через точку D и точку K (рисунок 3.6)

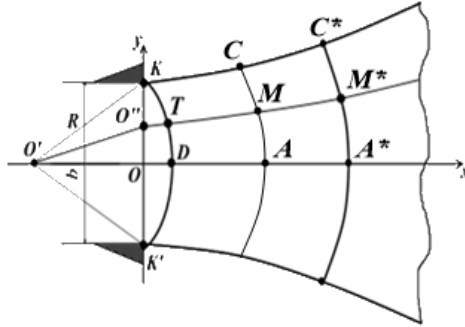


Рисунок 3.6 – План растекания потока в физической плоскости

$$\frac{\cos \theta_k}{\tau_k^{1/2} (1-\tau_k)} = \frac{1}{\tau_D^{1/2} (1-\tau_D)}.\quad (3.76)$$

Пусть в точке K после входа потока в расширение поток поворачивается на угол θ_k при этом глубина потока опускается от h_0 до h_k , скорость увеличивается от V_0 до V_k .

Выделим элементарную струйку шириной b_1 .

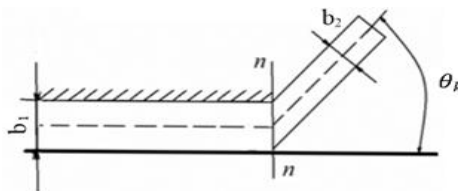


Рисунок 3.7

Запишем уравнение расхода для выделенной струйки до выхода потока в расширение:

$$V_0 h_0 b_1 = V_k h_k b_2\quad (3.77)$$

Учитывая, что $b_1 = \frac{b_2}{\cos \theta_k}$ (рисунок 3.7), уравнение (3.77) преобразуется к виду:

$$\cos \theta_k V_0 h_0 = V_k h_k\quad (3.78)$$

Из (3.78) следует, что

$$\cos \theta_k = \frac{V_k h_k}{V_o h_o} \quad (3.79)$$

Так как при входе в расширение энергия не теряется, гидравлический напор H_o не изменяется, то

$$\begin{aligned} V_k &= \tau_k^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_o}; & h_k &= H_o(1 - \tau_k) \\ V_o &= \tau_o^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_o}; & h_o &= H_o(1 - \tau_o) \end{aligned} \quad (3.80)$$

С учетом (3.80) равенство (3.79) преобразуем к виду:

$$\frac{\cos \theta_k}{\tau_k^{\frac{1}{2}}(1-\tau_k)} = \frac{1}{\tau_o^{\frac{1}{2}}(1-\tau_o)} \quad (3.81)$$

Сравнивая равенства (3.76) и (3.81) приходим к выводу, что

$$\tau_D = \tau_o. \quad (3.82)$$

Уравнение (3.81) доказывает, что функция тока $\psi = \frac{A_1 \sin \theta}{\tau^{1/2}}$ – действительно функция тока, удовлетворяющая базовой системе уравнений (2.28).

Так как вдоль крайней линии тока

$$\frac{V_o b}{2} = \frac{A_1 \sin \theta}{\tau^{1/2}}, \quad (3.83)$$

то при $\tau = 1$; $\theta = \theta_{max}$

$$\frac{V_o b}{2} = A_1 \sin \theta_{max} \Rightarrow A_1 = \frac{V_o b}{2 \sin \theta_{max}}, \quad (3.84)$$

где A_1 – постоянная для всего потока.

Следовательно, вдоль крайней линии тока выполняется равенство:

$$\frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = \sin \theta_{max} \quad (3.85)$$

Для второго варианта (3.75) постоянная равна:

$$A_2 = \frac{V_o b}{\sin \theta_{max}} \quad (3.86)$$

3.2.5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА В СЛУЧАЕ $1 < F < 4$

Точки A^* , M^* , C^* на рисунке 4.6 нанесены условно, так как они лежат в бесконечности. Область течения потока в плоскости годографа скорости (рисунок 3.8) ограничена двумя эквипотенциалами:

– нулевой *DTK*: $A^*M^*C^*$ при $\tau = 1$

и двумя линиями тока:

– DAA^* – линия тока нулевого расхода ($\theta \equiv 0$)

– KCC^* – крайняя линия тока, отсекающая от оси симметрии потока удельный расход $\frac{Q}{h_{02}}$, где Q – полный расход потока через водопропускную трубу.

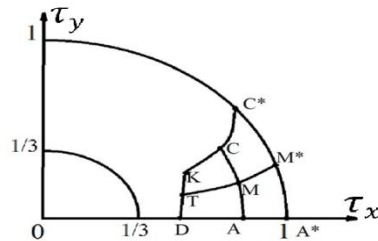


Рисунок 3.8 – План течения потока в плоскости годографа скорости

Для наглядности и сопоставления областей растекания потока приведем на рисунок 3.9 область растекания потока в физической плоскости.

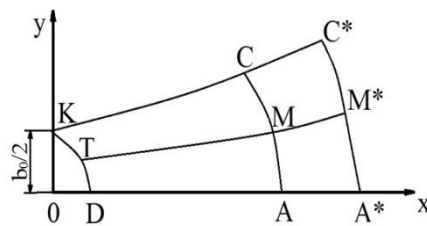


Рисунок 3.9 – План растекания потока в физической плоскости.

3.2.6 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Определение параметров потока в области выходной кромки трубы до нулевой эквипотенциали

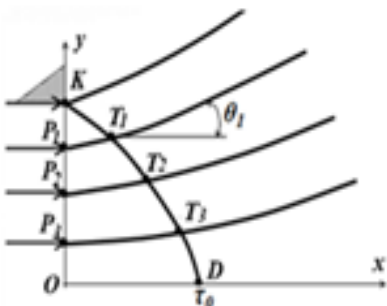


Рисунок 3.10

Рассмотрим рисунок 3.10.

Разделим отрезок OK на n частей. Через каждую точку будет проходить расход $\frac{Q \cdot i}{2n}$. При $n = 3$ нулевую эквипотенциаль разделим на $n+1=4$ отрезков. Через отрезок OP_3

проходит расход $\frac{Q \cdot 1}{2(3+1)}$; через $OP_2 - \frac{Q \cdot 2}{2(3+1)}$

– $\frac{Q \cdot 3}{2(3+1)}$; через $OK - \frac{Q \cdot 4}{2(3+1)} = \frac{Q}{2}$. Координаты x_i, y_i

точек с заданным расходом на эквипотенциали KD определены в разделе 3.2.9 по формуле (3.160).

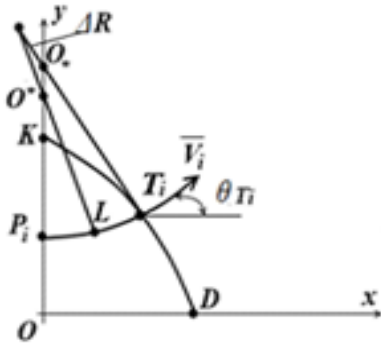


Рисунок 3.11

Задача № 1. Известны координаты точки P_1 ($x_0 = 0; y_0 = \frac{b}{2} \cdot \frac{3}{4}$) и известны координаты точки $T_1(x_1; y_1)$, если $\theta_0=0, \theta_1$. Необходимо двумя дугами окружности сделать сопряжение точек P_i и T_i . Проводим перпендикуляр к вектору скорости \bar{V}_i . Определяем точку пересечения линии T_iO_* с осью Oy и определяем величину радиусов $R_2=T_iO_*$, $R_1=O^*P_i$. Если $R_1=R_2$, то задача выполнена. Если $R_1>R_2$, то процесс проводим так, чтобы

$$|R_1 - R_2| \rightarrow \min. \quad (3.87)$$

Увеличиваем R_2 с шагом ΔR (рисунок 3.11) при этом R_1 уменьшится. Проверяем сопряжение в точке L и условие (3.87). Если $R_2>R_1$, то увеличиваем R_1 с шагом ΔR и проверяем сопряжение в точке L и условие (3.87). Аналитически можно определить координаты точки L и радиусы R_1, R_2 .

Задача № 2. Определение параметров потока в точке сопряжения L .

Зная уравнение дуг окружностей, можно определить длину дуги P_iL и LT_i методом линейной интерполяции, т.е. пользуясь пропорцией:

$$\frac{\bar{P}_iL}{\bar{P}_iL + LT_i} = \frac{V_L - V_0}{V_T - V_0}. \quad (3.88)$$

Из уравнения (3.88) определяется скорость V_L в точке L и далее из интеграла Бернулли – глубина h_L :

$$h_L + \frac{V_L^2}{2g} = H_0. \quad (3.89)$$

Угол θ_L определяется аналитически. Зная координаты и параметры в точках P_i, L, T_i , можно определить координаты и параметры любой точки линии P_iT_i .

Задача №3. Определение параметров потока в произвольной точке

Произвольная линия тока может быть задана коэффициентом расхода K_T , определяющим долю удельного расхода от $\frac{Q}{2}$ между заданной линией тока и линией тока нулевого расхода (рисунок 3.6) [70]:

$$\psi_M = K_T \frac{V_0 b}{2} = A_1 \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{max}} \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} \quad (3.90)$$

или
$$\frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = K_T \sin \theta_{max}. \quad (3.91)$$

Произвольная эквипотенциаль задается параметром τ_A на оси симметрии потока или h_A или V_A из равенств:

$$h_A = H_o(1 - \tau_A); \quad V_A = \tau_A^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_o} \quad (3.92)$$

Эквипотенциаль, проходящая через точки A и M , имеет вид:

$$\frac{\cos \theta_M}{\tau_M^{\frac{1}{2}}(1-\tau_M)} = \frac{1}{\tau_A^{\frac{1}{2}}(1-\tau_A)} \quad (3.93)$$

Параметры τ_M , θ_M в точке M пересечения произвольной эквипотенциали и произвольной линии тока определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sin \theta_M}{\tau_M^{\frac{1}{2}}} = K_T \sin \theta_{max} ; \\ \frac{\cos \theta_M}{\tau_M^{\frac{1}{2}}(1-\tau_M)} = \frac{1}{\tau_A^{\frac{1}{2}}(1-\tau_A)}. \end{cases} \quad (3.94)$$

Найдем решение системы (3.94) в явном виде, для этого из второго уравнения системы выразим $\cos \theta_M$:

$$\cos \theta_M = \frac{\tau_M^{\frac{1}{2}}(1-\tau_M)}{\tau_A^{\frac{1}{2}}(1-\tau_A)}. \quad (3.95)$$

Из первого уравнения системы выразим $\sin \theta_M$:

$$\sin \theta_M = K_T \tau_M^{\frac{1}{2}} \sin \theta_{max} \quad (3.96)$$

Выводя обе части уравнений (3.95) и (3.96), складывая их и пользуясь при этом основным тригонометрическим уравнением, получим уравнение относительно одной неизвестной τ_M :

$$\frac{\tau_M(1-\tau_M)^2}{\tau_A(1-\tau_A)^2} + \tau_M K_T^2 \sin^2 \theta_{max} = 1 \quad (3.97)$$

Приведем уравнение (3.97) к виду:

$$\tau_M(1 - \tau_M)^2 + M_1 \tau_M - M_2 = 0, \quad (3.98)$$

где $M_1 = \tau_A(1 - \tau_A)^2 K_T^2 \sin^2 \theta_{max}$; $M_2 = \tau_A(1 - \tau_A)^2$.

Согласно теории в [24] сделаем замену в (3.98): $\tau_M = \zeta + \frac{2}{3}$.

После замены уравнение (3.98) преобразуется к виду:

$$\zeta^2 + (M_1 - \frac{1}{3}) \zeta + \frac{2}{27} + \frac{2}{3} M_1 - M_2 = 0. \quad (3.99)$$

Приведенный дискриминант кубического уравнения равен [24]:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{g}{2}\right)^2, \quad (3.100)$$

$$\text{где } p = M_1 - \frac{1}{3}; \quad g = \frac{2}{27} + \frac{2}{3}M_1 - M_2 \quad (3.101)$$

Подставляя выражения (3.101) в (3.100), получим:

$$Q = \frac{M_1^3}{27} + \frac{2M_1^2}{27} + \frac{M_1}{27} + \frac{M_2^2}{4} - \frac{2M_1M_2}{3} - \frac{2M_2}{27}.$$

Можно показать, что выражение $M_2 = \tau_A(1 - \tau_A)^2$ имеет максимум при $\tau_A = \frac{1}{3}$, соответственно $0 < M_2 = \tau_A(1 - \tau_A)^2 < \frac{4}{27}$, отсюда $0 < M_1 = \tau_A(1 - \tau_A)^2 K_T^2 \sin^2 \theta_{max} < M_2 < 4/27$. Определим знак дискриминанта Q , преобразуя его к форме:

$$Q = \frac{M_1 - M_2}{27} + \frac{M_2(27M_2 - 4)}{4 \cdot 27} + \frac{M_1(M_1^2 - 16M_2 + 2(M_1 - M_2))}{27} < 0.$$

Так как $Q < 0$, то уравнение (3.99) имеет три различных корня, определенных по формулам:

$$\zeta_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right);$$

$$\zeta_{2,3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right); \quad (3.102)$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{2\sqrt{-\frac{p}{3}}},$$

так как

$$-1 < \cos\alpha < 1, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{3}. \quad (3.103)$$

С учетом (3.103) и величины $-\frac{1}{3} < p < 0$ получаются следующие оценки для корней уравнения (3.99)

$$\frac{1}{3} < \zeta_{M_1} < \frac{2}{3}; \quad -\frac{1}{3} < \zeta_{M_2} < \frac{1}{3}; \quad -\frac{2}{3} < \zeta_{M_3} < \frac{1}{3}; \quad (3.104)$$

Соответственно, для корней уравнения (3.98) имеют место оценки:

$$1 < \tau_{M_1} < \frac{4}{3}; \quad \frac{1}{3} < \tau_{M_2} < 1; \quad 0 < \tau_{M_3} < \frac{1}{3}.$$

Таким образом, значение корня τ_M , являющимся решением уравнения (3.98) и удовлетворяющее заданию свободного растекания бурного потока, является решение:

$$\tau_{M2} = \frac{2}{3} - 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right) \text{ или } \tau_M = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{1-3M_1} \cos\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{27M_2 - 1 - 9M_1}{\sqrt{(1-3M_1)^3}}\right\},$$

где коэффициенты M_1, M_2 определяются по формулам (3.98) и зависят только от τ_A, τ_0, K_T . Угол θ_M определяется из первого уравнения системы (3.98).

$$\theta_M = \arcsin(\tau_M^{1/2} K_T \sin \theta_{max}) \quad (3.105)$$

Таким образом, в плоскости годографа скорости определяются параметры в точке пересечения произвольной эквипотенциали с произвольной линией тока.

Заметим, что при $K_T = 0$ определяются параметры на оси симметрии потока. Просто задается значение τ_A и пользуются формулами: $h_A = H_0(1 - \tau_A)$, $V_A = \tau_A^{1/2} \sqrt{2gH_0}$; $\theta_A = 0$. Определив параметры в точке M τ_M, θ_M , определяются глубины и скорости в этой точке: $h_M = H_0(1 - \tau_M)$; $V_M = \tau_M^{1/2} \sqrt{2gH_0}$. При $K_T = 1$ определяются параметры на крайней линии тока.

Задача № 4. Определение параметров потока в точке D (рисунок 3.9) и в точке K .

Для точки D параметры потока равны: $\tau_D = \tau_0, h = h_0, V = V_0, \theta_D = 0$. Для определения параметров потока в точке K справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \sin \theta_k = \tau_k^{1/2} \sin \theta_{max} \\ \frac{\cos \theta_k}{\tau_k^{1/2}(1-\tau_k)} = \frac{1}{\tau_0^{1/2}(1-\tau_0)} \end{cases} \quad (3.106)$$

Найдем решение системы в явном виде. Со второго уравнения системы выразим $\cos \theta_k$:

$$\cos \theta_k = \frac{\tau_k^{1/2}(1-\tau_k)}{\tau_0^{1/2}(1-\tau_0)}. \quad (3.107)$$

Возведем в квадрат обе части первого уравнения системы (3.106) и уравнения (3.107), сложив эти уравнения и, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, получим уравнение относительно одной неизвестной τ_k :

$$\frac{\tau_k(1-\tau_k)^2}{\tau_0(1-\tau_0)^2} + \tau_k \sin^2 \theta_{max} = 1 \quad (3.108)$$

Решается аналогично уравнению (3.97).

Таким образом, значение корня τ_k , являющимся решением уравнения (3.108) и удовлетворяющее заданию свободного растекания бурного потока, является решение:

$$\tau_{k2} = \frac{2}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right)$$

или

$$\tau_k = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{1 - 3M_1} \cos \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{\frac{27M_2 - 1 - 9M_1}{2}}{\sqrt{(1 - 3M_1)^3}} \right\}, \quad (3.109)$$

где $M_1 = \tau_0(1 - \tau_0)^2 \sin^2 \theta_{\max}$; $M_2 = \tau_0(1 - \tau_0)^2$.

Задача № 5. Определение θ_{\max}^T – максимального угла на бесконечности для линии тока, проходящей через точку T .

Пусть линия тока TMM^* (рисунок 3.9) отсекает от удельного расхода $Q/2h_0$ удельный расход – $Q_T = K_T \frac{Q}{2h_0}$. Тогда уравнение этой линии тока будет иметь вид:

$$\psi = K_T \frac{V_0 b_0}{2} = A \frac{\sin \theta_T}{\tau_T^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.110)$$

где $A = \frac{V_0 b_0}{2 \sin \theta_{\max}}$; $Q_T = 0,5 Q K_T$ – удельный расход, отсекаемый рассматриваемой линией тока от оси Ox . Вводя в рассмотрение угол θ_{\max}^T , т.е. при $\tau = 1$ из (3.110) получим:

$$K_T = \frac{\sin \theta_{\max}^T}{\sin \theta_{\max}}. \quad (3.111)$$

Таким образом, линия тока задается коэффициентом расхода K_T , а угол на бесконечности расширения этой линии тока определяется по формуле:

$$\sin \theta_{\max}^T = K_T \sin \theta_{\max} \quad (3.112)$$

и следовательно, $\theta_{\max}^T = \arcsin(K_T \sin \theta_{\max})$.

Задача № 6. Определение параметров потока в точке T начальной эквипотенциали.

Для этого решается система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sin \theta_T}{\tau_T^{1/2}} = \sin \theta_{\max}^T; \\ \frac{\cos \theta_T}{\tau_T^{1/2}(1 - \tau_T)} = \frac{1}{\tau_0^{1/2}(1 - \tau_0)}. \end{cases} \quad (3.113)$$

Задание № 7. По известному параметру τ в произвольной точке можно определить глубину и скорость потока в этой точке по формулам:

$$h = H_0(1 - \tau); \quad V = \tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0} \quad (3.114)$$

Дополнительно к основным задачам, решаемым в плоскости годографа скорости, сформулируем еще две задачи.

Задача № 8. Определение радиуса начальной эквипотенциали – R (рисунок 3.6).

Теорема. Если нулевая эквипотенциаль проходит через точку D с параметрами τ_0 , $\theta = 0$, то эта эквипотенциаль имеет форму дуги окружности с центром на оси симметрии потока и радиусом R , определяемым по формуле:

$$R = \frac{b}{2\sin\theta_k}, \quad (3.115)$$

где b – ширина водопропускной трубы. Если докажем, что расход потока через эквипотенциаль DTK равен $\frac{Q}{2}$, где $Q = V_0 h_0 b$, то теорема доказана.

Составим выражение для расхода потока по дуге KD в виде:

$$Q_{KD} = \int_0^{Q_K} V(\theta)h(\theta)R d\theta, \quad (3.116)$$

где θ – текущий угол наклона вектора скорости к оси Ox вдоль точек дуги нулевой эквипотенциали. Из соотношения, справедливого вдоль нулевой эквипотенциали

$$\frac{\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)} = \frac{1}{\tau_0^{1/2}(1-\tau_0)}$$

определим

$$\cos\theta = \frac{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}{\tau_0^{1/2}(1-\tau_0)} \quad (3.117)$$

Из соотношений (3.114) определим

$$V(\theta)h(\theta) = H_0\sqrt{2gH_0}(1-\tau)\tau^{\frac{1}{2}} \quad (3.118)$$

Подставив (3.118) в (3.117) получим:

$$Q_{KD} = RH_0\sqrt{2gH_0}\tau_0^{1/2}(1-\tau_0) \int_0^{Q_K} \cos\theta d\theta \quad (3.119)$$

Интегрируя в (3.119) окончательно получим тождество:

$$\frac{V_0 h_0 b}{2} = RH_0\sqrt{2gH_0}\tau_0^{1/2}(1-\tau_0)\sin\theta_k \quad (3.120)$$

Так как $h_0 = H_0(1-\tau_0)$, $V_0 = \tau_0^{1/2}\sqrt{2gH_0}$, $\frac{b}{2} = R\sin\theta_k$, то

$$R = \frac{b}{2\sin\theta_k}$$

Следовательно, утверждение, что форма начальной эквипотенциали – дуга окружности справедливо. Так решаются типовые задачи определения параметров свободно растекающегося потока в плоскости годографа скорости при $\tau_0 < \frac{2}{3}$. Если $\tau_0 > \frac{2}{3}$, то

решение с $A_1 \neq 0$; $A_2 = 0$ неприменимо, потому, что функция $\theta = \arcsin \left[\frac{V_0 b}{2 \frac{V_0 b}{\sin\theta_{max}} \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)} \right]$

не является монотонной на интервале $\tau \in (\tau_0; 1)$, функция же $\theta = \arcsin \left[\frac{V_0 b}{\frac{2 V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}} \frac{1}{\tau^2}} \right]$ – монотонная.

Докажем, что функция $\theta = \arcsin \left\{ \frac{\sin \theta_{\max}}{2 \tau^2 (1-\tau)} \right\}$ не является монотонной на интервале $\tau \in (\tau_0; 1]$. Определим производную $f'_\tau = \frac{1}{2 \tau^2} - \frac{3}{4} \tau^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4 \tau^2} (2 - 3\tau)$. Решим уравнение

$$\frac{1}{2 \tau^2} - \frac{3}{4} \tau^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Получим $2 - 3\tau = 0$; $\tau = \frac{2}{3}$. Т.е., если $\tau < \frac{2}{3}$, то $f(\tau)$ – возрастает; если $\tau \geq \frac{2}{3}$, то $f(\tau)$ – убывает. Итак, если $\tau \geq \frac{2}{3}$, то возможны решения $A_1=0$; $A_2 \neq 0$ – I вариант; и $A_1 \neq 0$; $A_2=0$ – II вариант.

Для определения параметров по второй ветви в точке K (сразу же за водопрпускной трубой) необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} A_2 \tau_K^{1/2} \left(1 - \frac{\tau_K}{2} \right) \sin \theta_K = \frac{V_0 b}{2}; \\ A_2 \frac{h_0}{H_0} \frac{\tau_K^{1/2} (3\tau_K - 2)}{2(1-\tau_K)} = A_2 \frac{h_0}{H_0} \frac{\tau_0^{1/2} (3\tau_0 - 2)}{2(1-\tau_0)}. \end{cases} \quad (3.121)$$

Введём θ_{\max} – максимальный угол отклонения вектора скорости вдоль крайней линии тока на бесконечности при $\tau \rightarrow 1$. Для определения параметров потока τ_K, θ_K в точке K систему (3.121) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \tau_K^{1/2} (2 - \tau_K) \sin \theta_K = \sin \theta_{\max}; \\ \frac{\tau_K^{1/2} (3\tau_K - 2)}{2(1-\tau_K)} = \frac{\tau_0^{1/2} (3\tau_0 - 2)}{2(1-\tau_0)}. \end{cases} \quad (3.122)$$

где τ_0 – значение параметра τ на выходе из трубы и в точке D [36]:

$$\theta_{\max} = C_1 + (\sqrt{3} - 1) \frac{\pi}{2}; \quad C_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} - \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{3(1 - \tau_0)}}.$$

Система (3.122) исключением угла θ_K с помощью основного тригонометрического тождества приводится к решению алгебраического уравнения пятой степени:

$$(3\tau_K - 2)^2 \left(\tau_K - \frac{\sin^2 \theta_{\max}}{(2 - \tau_K)^2} \right) = \frac{\tau_0(3\tau_0 - 2)}{(1 - \tau_0)^2} (1 - \tau_K)^2. \quad (3.123)$$

Приведем уравнение (3.123) к стандартному виду, обычно встречающемуся в математической литературе [24]:

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0. \quad (3.124)$$

При этом для удобства введём обозначения: $x = \tau_K$; $A = \frac{\tau_0(3\tau_0 - 2)}{(1 - \tau_0)^2} \geq 0$, так как $\tau_0 \geq \frac{2}{3}$.

Выполним переход от уравнения (3.123) к уравнению (3.124) последовательно.

$$(3x - 2)^2 \left[x(2 - x)^2 - \sin^2 \theta_{\max} \right] = A(1 - x)^2 (2 - x)^2. \quad (3.125)$$

Раскроем скобки в уравнении (3.124). В результате получим:

$$9x^5 - (48 + A)x^4 + 2(44 + 3A)x^3 - (13 + 64 + 9\sin^2 \theta_{\max})x^2 + 4(4 + 3\sin^2 \theta_{\max} + 3A)x - 4(\sin^2 \theta_{\max} + A) = 0. \quad (3.126)$$

Уравнение (3.126) есть алгебраическое уравнение пятой степени с действительными коэффициентами, и которые имеют пять перемен знака. Это уравнение согласно общей теории в [24] по правилу Декарта имеет пять положительных корней, либо меньше пяти на чётное число. Однако, используя условие

$$\frac{2}{3} \leq x = \tau_K < 1, \quad (3.127)$$

сделаем замену переменной

$$x = \frac{2}{3} + \delta. \quad (3.128)$$

Из (3.127) и (3.128) следует:

$$0 \leq \delta < \frac{1}{3}. \quad (3.129)$$

Используя условие (3.129), можно приближенно определить корень уравнения (3.126) более простым методом. Для упрощения уравнения (3.126) воспользуемся формулами бинома Ньютона: $(a + b)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} b^j$; $j = 0, 1, 2, \dots, n$;

где $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Тогда справедливы формулы:

$$\begin{cases} (2/3 + \delta)^5 = (2/3)^5 + 5(2/3)^4 \delta + 10(2/3)^3 \delta^2 + 10(2/3)^2 \delta^3 + O(\delta^4); \\ (2/3 + \delta)^4 = (2/3)^4 + 4(2/3)^3 \delta + 6(2/3)^2 \delta^2 + 4(2/3) \delta^3 + O(\delta^4); \\ (2/3 + \delta)^3 = (2/3)^3 + 3(2/3)^2 \delta + 3(2/3) \delta^2 + \delta^3. \end{cases} \quad (3.130)$$

В (3.130) пренебрегаем слагаемыми порядка « δ^4 ». При этом $\delta^4 < \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$. Используя формулы (3.130), уравнение (3.126) преобразуем к кубическому относительно « δ »:

$$\begin{aligned} & 9 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^4 \delta + 10\left(\frac{2}{3}\right)^3 \delta^2 + 10\left(\frac{2}{3}\right)^2 \delta^3 \right] - (48 + A) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 \delta + 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 \delta^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) \delta^3 \right] + \\ & + 2(44 + 3A) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \delta + 3\left(\frac{2}{3}\right) \delta^2 + \delta^3 \right] - (13 + 64 + 9 \sin^2 \theta_{\max}) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) \delta + \delta^2 \right] + \\ & + 4(4 + 3 \sin^2 \theta_{\max} + 3A) \left[\left(\frac{2}{3}\right) + \delta \right] - 4(\sin^2 \theta_{\max} + A) = 0. \end{aligned} \quad (3.131)$$

После упрощений в (3.131) получим следующее кубическое уравнение относительно δ :

$$\frac{10}{3} \delta^3 - \left(\frac{11}{3} A + 9 \sin^2 \theta_{\max} - \frac{32}{3} \right) \delta^2 + \frac{40}{27} A \delta - \frac{16}{81} A = 0. \quad (3.132)$$

Уравнение (3.132) решается по известным формулам из [24]. Аналогично можно заменить уравнение пятой степени уравнением четвертой степени, решение которого описано в [24].

Для второй ветви при $\tau_0 \geq \frac{2}{3}$ необходимо использовать решение задачи в виде:

$$\psi = A_2 \sin \theta \tau^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right), \quad \varphi = -A_2 \frac{h_0 \cos \theta \tau^{\frac{1}{2}} (2-3\tau)}{2(1-\tau)} \quad (3.133)$$

Как видно из решения задачи даже при $k=1$ решение может удовлетворять монотонности при $\tau \geq \frac{2}{3}$ или параметре кинетичности $F \geq 4$ (довольно высокая степень кинетичности). Поиск участков монотонности в решениях более сложной конструкции с $k \neq 1$ не позволил выделить участки монотонности для угла θ . Следовательно, в качестве решения задачи необходимо остановиться на двух основных вариантах (3.73, 3.75) при $\tau_0 < \frac{2}{3}$ и (3.130) $\tau_0 \geq \frac{2}{3}$. Далее в краткой форме [44] приведем основные формулы для

определения параметров потока в случае решения (3.133). Как и в предыдущем варианте определим значение постоянной A_2 для задачи свободного растекания потока.

Вдоль крайней линии тока должно выполняться равенство:

$$\psi = \frac{V_0 b}{2} A_2 \sin \theta \tau^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{A_2}{2} \sin \theta_{max} \quad (3.134)$$

Следовательно,

$$A_2 = \frac{V_0 b}{\sin \theta_{max}} \quad (3.135)$$

Вдоль крайней линии тока выполняется условие: связи между параметрами τ, θ :

$$\sin \theta \tau^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\sin \theta_{max}}{2} \quad (3.136)$$

Уравнение эквипотенциали, проходящей через точку A с параметром τ_A на оси симметрии потока будет иметь вид:

$$\cos \theta \frac{\tau^{\frac{1}{2}}(3\tau-2)}{1-\tau} = \frac{\tau_A^{1/2}(3\tau_A-2)}{1-\tau_A} \quad (3.137)$$

Параметры потока в точке K определяются решением системы тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \tau_k^{1/2}(2-\tau_k)\sin\theta_k = \sin\theta_{max} \\ \frac{\tau_k^{1/2}(3\tau_k-2)}{1-\tau_k}\cos\theta_k = \frac{\tau_0^{1/2}(3\tau_0-2)}{1-\tau_0} \end{cases} \quad (3.138)$$

При этом значение параметра является корнем уравнения пятой степени:

$$(3\tau_k - 2)^2 \left(\tau_k - \frac{\sin^2 \theta_{max}}{(2-\tau_k)^2} \right) = \frac{\tau_0(3\tau_0-2)}{(1-\tau_0)^2} (1-\tau_k)^2 \quad (3.139)$$

Можно показать, что уравнение (3.139) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию: $\tau_0 < \tau_k < 1$. Острый угол θ_k определяется выражением:

$$\theta_k = \arcsin \frac{\sin \theta_{max}}{\tau_k^{1/2}(2-\tau_k)} \quad (3.140)$$

Радиус R определяется по формуле:

$$R = \frac{b}{2\sin \theta_k} \quad (3.141)$$

Для определения параметров потока в произвольной точке C крайней линии тока пользуемся системой (рисунок 3.6):

$$\begin{cases} \tau_c^{1/2}(2 - \tau_c)\sin\theta_c = \sin\theta_{max} \\ \frac{\tau_c^{1/2}(3\tau_c-2)\cos\theta_c}{1-\tau_c} = \frac{\tau_A^{1/2}(3\tau_A-2)}{1-\tau_A} \end{cases} \quad (3.142)$$

По известному параметру τ в произвольной точке определяются глубины и скорости в этой точке:

$$h = H_0(1 - \tau); \quad V = \tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{2gH_0} \quad (3.143)$$

Параметры потока в точке T на нулевой эквипотенциали определяются следующим образом – задается коэффициент расхода

$$K_T = \frac{\sin\theta_{max}^T}{\sin\theta_{max}}, \quad (3.144)$$

– определяется угол

$$\theta_{max}^T = \arcsin(K_T \sin\theta_{max}). \quad (3.145)$$

Далее решается система уравнений:

$$\begin{cases} \tau_T^{1/2}(2 - \tau_T)\sin\theta_T = \sin\theta_{max} \\ \frac{\tau_T^{1/2}(3\tau_T-2)\cos\theta_T}{1-\tau_T} = \frac{\tau_0^{1/2}(3\tau_0-2)}{1-\tau_0} \end{cases} \quad (3.146)$$

Корень системы выбирается из условия: $\tau_0 < \tau_T < \tau_k$.

Параметры потока в точке M пересечения произвольной линии тока и произвольной эквипотенциали определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \tau_M^{1/2}(2 - \tau_M)\sin\theta_M = K_T \sin\theta_{max} \\ \frac{\tau_M^{1/2}(3\tau_M-2)\cos\theta_M}{1-\tau_M} = \frac{\tau_A^{1/2}(3\tau_A-2)}{(1-\tau_A)} \end{cases} \quad (3.147)$$

3.2.7 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ПОТОКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛУБИН И СКОРОСТЕЙ ПОТОКА ВДОЛЬ ЕГО ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ СИММЕТРИИ (рисунок 3.6)

Покажем решение задачи на примере решения системы (2.28) в виде:

$$\psi = \frac{A}{\tau^{\frac{1}{2}}}\sin\theta; \quad \varphi = A\frac{h_0}{H_0}\frac{\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}; \quad \frac{1}{3} < \tau_0 < \frac{2}{3} \quad (3.148)$$

Воспользуемся уравнением связи между планом течения потока и плоскостью годографа скорости (3.53). Полагая вдоль линии ток и $d\psi \equiv 0$, и учитывая, что на оси

симметрии потока $\theta \equiv 0$ с учетом (3.148) из (3.53) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающие $dx, d\tau$:

$$dx = \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \frac{(3\tau-1)}{\tau^2(1-\tau)^2} d\tau \quad (3.149)$$

Интегрируя уравнение (3.149) с учетом условия $x = x_D; \tau = \tau_0$ получим следующую зависимость:

$$x = x_D + \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1+\tau}{\tau(1-\tau)} - \ln \frac{1-\tau}{\tau} - \frac{1+\tau_0}{\tau_0(1+\tau_0)} + \ln \frac{1-\tau_0}{\tau_0} \right] \quad (3.150)$$

Можно убедиться, что функция $x = x_\tau$ в уравнении (3.150) – монотонно возрастающая при увеличении τ от τ_0 до 1. Зная параметр τ можно определить скорости и глубины по формулам:

$$h = H_0(1 - \tau); \quad V = \tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{2gH_0}$$

$$x_D = \frac{b_0(1-\cos\theta_k)}{2\sin\theta_k} = \frac{b_0}{2}tg\frac{\theta_k}{2} \quad (3.151)$$

Зная закон распределения глубин и скоростей вдоль оси симметрии потока, можно решать следующие задачи.

Задача №1.

Задана глубина h_A в точке A на оси симметрии потока, необходимо определить абсциссу x_A - расстояние от кромки трубы до точки A . Для решения задачи необходимо из уравнения $h_A = H_0(1 - \tau_A)$ определить параметр τ_A и подставить его в правую часть уравнения (3.150).

Задача №2.

Зная расстояние x_A необходимо определить параметры V_A и h_A в точке A . Для этого необходимо решить уравнение:

$$x_A = x_0 + \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1+\tau_A}{\tau_A(1-\tau_A)} - \ln \frac{1-\tau_A}{\tau_A} - \frac{1+\tau_0}{\tau_0(1+\tau_0)} + \ln \frac{1-\tau_0}{\tau_0} \right]. \quad (3.152)$$

Относительно τ_A и далее определить

$$V_A = \tau_A^{\frac{1}{2}}\sqrt{2gH_0}; \quad h_A = H_0(1 - \tau_A)$$

Как показывает счет на ПК уравнение (3.152) имеет корень в интервале $\tau_0 < \tau_A < 1$. Решение задачи №2 необходимо как для определения параметров потока вдоль оси симметрии, так и для оценки адекватности модели по параметрам потока в окрестности выхода потока из трубы (для выбора крепления отводящего русла).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА ВДОЛЬ КРАЙНЕЙ ЛИНИИ ТОКА

Для определения координат крайней линии тока воспользуемся уравнением связи между физической плоскостью течения потока и плоскостью годографа скорости (3.53). Для функции тока и потенциальной функции из уравнения (3.53) с учетом (3.148) получим следующую систему дифференциальных уравнений, справедливую вдоль крайней линии тока:

$$\begin{cases} dx = -\frac{A \cos \theta h_0}{H_0 \tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \frac{\cos \theta}{\tau^{\frac{1}{2}}} d\tau + \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\sin \theta}{\tau^{\frac{3}{2}}} d\theta \right] \\ dy = -\frac{A \sin \theta h_0}{H_0 \tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \frac{\cos \theta}{\tau^{\frac{1}{2}}} d\tau + \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\sin \theta}{\tau^{\frac{3}{2}}} d\theta \right] \end{cases} \quad (3.153)$$

Вдоль крайней линии тока справедлива зависимость

$$\frac{\sin \theta}{\tau^{\frac{1}{2}}} = \sin \theta_{max} \quad (3.154)$$

Из основного тригонометрического тождества и (3.154) определим выражение для $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \tau \sin^2 \theta_{max}} \quad (3.155)$$

Так как вдоль крайней линии тока $d\psi = 0$, то из первого уравнения системы (3.154) получим связь между параметрами

$$\cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta \frac{d\tau}{\tau} \quad (3.156)$$

С учетом зависимости (3.154) уравнение (3.156) преобразуем к виду:

$$\cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{d\tau}{\tau} \sin \theta_{max} \quad (3.157)$$

Далее с учетом (3.154), (3.155), (3.156) систему (3.153) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} dx = \frac{Ah_0}{2H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{3\tau-1}{\tau^2(1-\tau)^2} - \frac{2\sin^2 \theta_{max}}{(1-\tau)^2} \right] d\tau \\ dy = \frac{Ah_0}{H_0 \sqrt{2gH_0}} d \left[\frac{\cos \theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)} \right] \end{cases} \quad (3.158)$$

Интегрируя систему (3.158), получим параметрические уравнения крайней линии тока в виде:

$$\begin{cases} x = \frac{Ah_0}{2H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1+\tau}{\tau(1-\tau)} - \frac{2\sin^2 \theta_{max}}{1-\tau} - \ln \frac{1-\tau}{\tau} - \frac{1+\tau_k}{\tau_k(1-\tau_k)} + \ln \frac{1-\tau_k}{\tau_k} + \frac{2\sin^2 \theta_{max}}{1-\tau_k} \right] \\ y = \frac{b_0}{2} + \frac{Ah_0 \sin \theta_{max}}{H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{\cos \theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)} - \frac{\cos \theta_k}{\tau_k^{\frac{1}{2}}(1-\tau_k)} \right] \end{cases} \quad (3.159)$$

Таким образом, для произвольной точки C крайней линии тока при известных параметрах τ_c, θ_c определяются координаты точки $C (x_c; y_c)$. С помощью системы уравнений (3.159) можно решать следующие задачи.

Задача № 1. (1 способ).

При $K_T = 1$ (3.142). Задаваясь параметром τ_A в точке A на оси симметрии потока можно определить параметры τ_c, θ_c и далее координаты x_c, y_c . Меняя параметр τ_A получим совокупность точек крайней линии тока.

Задача № 2. (2 способ).

Полагая в первом уравнении системы (3.159) $x = x_c$ можно из уравнения: $x_c = f(\tau_c)$ определить параметр τ_c , далее θ_c (к примеру из формулы (3.155) или (3.146)).

Подставим τ_c во второе уравнение системы (3.159), определим y_c и сравним его значения с экспериментальным y_c^3 .

Задача №3.

Фиксируя $y = y_c$ можно со второго уравнения системы (3.159) определить параметр τ_c и далее определить x_c из первого уравнения системы (3.159). Таким образом, задаваясь расширением потока $\beta_c = \frac{V_c}{b}$ можно оценить рассогласование в расстоянии для выбранного сечения потока.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ В ТОЧКАХ ПОТОКА НА НУЛЕВОЙ ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ (точки Т)

Координаты точки Т определяются из геометрии нулевой эквипотенциали

$$\begin{cases} x_T = R \sin \theta_T - R \cos \theta_k \\ y_T = R \sin \theta_T \end{cases} \quad (3.160)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ В ТОЧКЕ М ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНИИ ТОКА И ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ

Крайняя линия тока отсекает от оси симметрии потока $0x$ - 50% общего расхода воды через водопропускную трубу, т.е. $0,5Q$. Линия тока, проходящая через точку T , отсекает от оси симметрии поток расходом: $Q_T = 0,5QK_T$, при этом $K_T = \frac{\sin \theta_\infty^T}{\sin \theta_\infty}$.

Таким образом, если задан коэффициент расхода $0 < K_T < 1$, то однозначно фиксируется линия тока. Далее определяется угол θ_∞^T : $\theta_\infty^T = \arcsin(K_T \sin \theta_\infty)$.

Параметры τ_T, θ_T в точке Т определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sin \theta_T}{\tau_T^{\frac{1}{2}}} = \sin \theta_\infty^T; \\ \frac{1}{\tau_0^{\frac{1}{2}}(1-\tau_0)} = \frac{\cos \theta_T}{\tau_T^{\frac{1}{2}}(1-\tau_T)}. \end{cases}$$

При этом определяем решения системы, пользуясь условием: $\tau_0 < \tau_T < \tau_K$. Так как точка M находится на пересечении выделенных: линии тока, проходящей через точку T и эквипотенциали, проходящей через точку A , то согласно теории [24] ее координаты удовлетворяют следующей системе тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\cos \theta_M}{\tau_M^{1/2}(1-\tau_M)} = \frac{1}{\tau_A^{1/2}(1-\tau_A)}, \\ \frac{\sin \theta_M}{\tau_M^{1/2}} = \sin \theta_\infty^T, \end{cases},$$

где $\sin \theta_\infty^T = \frac{\sin \theta_T}{\tau_T^{1/2}}$

По известным τ_M, θ_M и x_T, y_T и определим координаты точки M из следующей системы дифференциальных уравнений для линии тока:

$$\begin{cases} dx = \frac{A \cos \theta}{\tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0}} \left[-\frac{h_0}{H_0} \frac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2} \frac{\cos \theta}{\tau^{\frac{1}{2}}} d\tau - \frac{h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\sin \theta}{\tau^{\frac{3}{2}}} d\theta \right] \\ dy = \frac{\sin \theta}{\tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0}} d\varphi \end{cases} \quad (3.161)$$

Из второго уравнения системы (3.161) непосредственным интегрированием находим:

$$y_M = y_T + \frac{A \sin \theta_\infty^T}{\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{\cos \theta_M}{\tau_M^{\frac{1}{2}}(1-\tau_M)} - \frac{\cos \theta_T}{\tau_T^{\frac{1}{2}}(1-\tau_T)} \right] = y_T + \frac{A \sin \theta_\infty^T}{\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1}{\tau_A^{\frac{1}{2}}(1-\tau_A)} - \frac{1}{\tau_0^{\frac{1}{2}}(1-\tau_0)} \right] \quad (3.162)$$

При интегрировании учитывалось уравнение вдоль произвольной линии тока

$$\frac{\sin \theta}{\tau^{\frac{3}{2}}} = \sin \theta_\infty^T \quad (3.163)$$

Используя далее уравнение (3.164) и преобразуя первое уравнение системы (3.161) к виду

$$dx = \frac{A}{\sqrt{2gH_0}} \frac{h_0}{H_0} \left[\frac{(3\tau-1)(1-K\tau)}{\tau^2(1-\tau)^2} - \frac{Kd\tau}{(1-\tau)\tau} \right], \quad K = \sin^2 \theta_\infty^T \quad (3.164)$$

и интегрируя далее уравнение (3.164) определим абсциссу точки M по формуле:

$$x_M = x_T + \frac{A}{\sqrt{2gH_0}} \cdot \frac{h_0}{2H_0} \left\{ I_1 - KI_2 - KI_3 \right\} \Big|_{\tau_T}^{\tau_M},$$

при этом $I_1 = \int \frac{(3\tau-1)d\tau}{\tau^2(1-\tau)^2} = \frac{1+\tau}{\tau(1-\tau)} + \ln \frac{\tau}{1-\tau}; \quad I_2 = \int \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \cdot d\tau = \frac{2}{1-\tau} + \ln \frac{1-\tau}{\tau};$

$$I_3 = \ln \frac{\tau}{1-\tau} = \int \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)}.$$

Таким образом, получен алгоритм для определения всего спектра параметров без учета сил сопротивления потоку. В качестве примера согласно теории с использованием ЭВМ были построены линии тока и эквипотенциали, построенные по экспериментальным данным (рисунок 3.12). Были также посчитаны координаты точек пересечения линий тока и эквипотенциалей и параметры потока в этих точках.

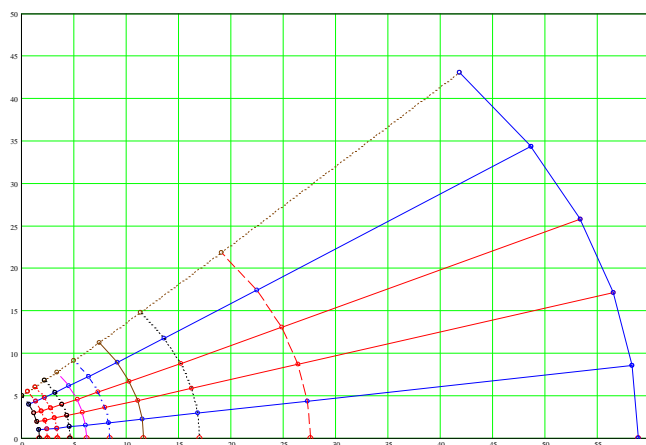


Рисунок 3.12 – Линии тока и эквипотенциали, построенные по исходным данным в опыте № 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНИИ ТОКА И ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\tau_0 \geq \frac{2}{3}$

Воспользовавшись уравнением связи между планом течения потока и плоскостью годографа скорости (3.53) получим аналогично предыдущему следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx = \frac{A_2 h_0 \cos \theta}{2H_0 \tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{(3\tau-1)(2-\tau) \cos \theta}{2\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^2} d\tau - \frac{(3\tau-2)\tau^{\frac{1}{2}} \sin \theta d\theta}{1-\tau} \right] \\ dy = \frac{A_2 h_0 \sin \theta}{2H_0 \tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{(3\tau-1)(2-\tau) \sin \theta}{2\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^2} d\tau - \frac{(3\tau-2)\tau^{\frac{1}{2}} \sin \theta}{1-\tau} d\theta \right] \end{cases} \quad (3.165)$$

Вдоль крайней линии тока выполняется зависимость

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_{max}}{\tau(2-\tau)^2}} \quad (3.166)$$

Так как вдоль крайней линии тока $d\psi = 0$, то из уравнения $\tau^{\frac{1}{2}}(2-\tau)\sin\theta = \sin\theta_{max}$ следует дифференциальная связь между параметрами потока:

$$\cos\theta = \frac{(3\tau-2)\sin\theta d\tau}{2\tau(2-\tau)} \quad (3.167)$$

С учетом (3.165), (3.166), (3.53) систему уравнений можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} dx = \frac{A_2 h_0}{2H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{(3\tau-1)(2-\tau)}{2\tau(1-\tau)^2} - \frac{(4-3\tau)\sin^2\theta_{max}}{(1-\tau)^2(2-\tau)^3} \right] d\tau; \\ dy = \frac{A_2 h_0 \sin\theta_{max}}{2H_0 \sqrt{2gH_0} \sqrt{\tau - \frac{\sin^2\theta_{max}}{(2-\tau)^2}}} \left[\frac{3\tau-1}{2\tau(1-\tau)^2} d\tau - \frac{(4-3\tau)\sin^2\theta_{max}}{(1-\tau)^2(2-\tau)^4} \right] d\tau. \end{cases} \quad (3.168)$$

Интегрируя уравнения системы (3.168), получим параметрические уравнения крайней линии тока в виде:

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_2 h_0}{2\sqrt{2gH_0}^3} \left[\frac{2(\tau-\tau_k)}{(1-\tau)(\tau-\tau_k)} + \ln \frac{\tau_k(1-\tau_k)}{\tau^2(1-\tau)} + \frac{\sin^2\theta_{max}}{(1-\tau)(2-\tau)^2} \right] \Big|_{\tau_A}^{\tau}; \\ y &= \frac{b_0}{2} + \frac{A_2 h_0 \sin\theta_{max}}{2\sqrt{2gH_0}^3} \int_{\tau_k}^{\tau} \left[\frac{3\tau-1}{2\tau(1-\tau)^2} - \frac{(4-3\tau)\sin^2\theta_{max}}{(1-\tau)^2(2-\tau)^4} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \frac{\sin^2\theta_{max}}{(2-\tau)^3}}}. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Из уравнения связи (3.53) можно найти выражение для dx на оси симметрии потока:

$$dx = \frac{A_2 h_0 (3\tau-1)(2-\tau) d\tau}{4H_0 \sqrt{2gH_0} \tau(1-\tau)^2} \quad (3.170)$$

Интегрируя уравнение (3.170) находим

$$x = x_D + \frac{A_2 h_0}{2\sqrt{2gH_0}^3} \left[\frac{2(\tau-\tau_A)}{(1-\tau)(1-\tau_A)} + \ln \frac{\tau_A^2(1-\tau_A)}{\tau^2(1-\tau)} \right] \quad (3.171)$$

Интегрируя систему (3.165) для точки M пересечения произвольной линии тока с произвольной эквипотенциалью получим:

$$y_M = y_T + \frac{A_2 h_0 K_T \sin\theta_{max}^T}{2\sqrt{2gH_0}^3} \int_{\tau_T}^{\tau_M} \left[\frac{3\tau-1}{2\tau(1-\tau)^2} - \frac{(4-3\tau)K_T^2 \sin^2\theta_{max}}{(1-\tau)^2(2-\tau)^4} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \frac{K_T^2 \sin^2\theta_{max}}{(2-\tau)^2}}} \quad (3.172)$$

Первое уравнение системы (3.168) преобразуется к виду:

$$dx = \frac{A_2 h_0}{2H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{(3\tau-1)(2-\tau)}{2\tau(1-\tau)^2} - \frac{(4-3\tau)K_T^2 \sin^2\theta_{max}}{(1-\tau)^2(2-\tau)^3} \right] d\tau \quad (3.173)$$

Интегрируя (3.173), получим:

$$x_M = \frac{A_2 h_0}{2\sqrt{2gH_0}^3} \left[\frac{2(\tau_M - \tau_T)}{(1-\tau_M)(1-\tau_T)} + \ln \frac{\tau_T^2(1-\tau_T)}{\tau_M^2(1-\tau_M)} + \frac{K_T^2 \sin^2 \theta_{max}}{(1-\tau)(2-\tau)} \right]_{\tau_T}^{\tau_M} \quad (3.174)$$

Таким образом, зная исходные данные для расчета V_0 , h_0 , b , K_T можно определить любые параметры в области его растекания: геометрическую форму произвольной линии тока; геометрическую форму произвольной эквипотенциали; форму свободной поверхности потока; параметры потока в произвольной его точке. Результаты, полученные из решений задачи без учета сил сопротивления потоку, позволяют убедиться в высокой степени адекватности модели в окрестности выхода потока из трубы. Степень адекватности модели и границы ее использования будут оговорены в пятой главе.

3.3 ОБОБЩЕННЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА ЗА БЕЗНАПОРНЫМИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ТРУБАМИ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ПОТОКА БЕЗ УЧЕТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Настоящий параграф является первым этапом в решении задачи с учетом сил сопротивления потоку обобщенным численно-аналитическим методом, что является перспективой данной работы. Целью данного параграфа является создание общей схемы решения задачи, вывод основных уравнений в дифференциальном и интегральном видах, дискретных алгоритмических форм для конечно-разностных уравнений, а также систем алгебраических уравнений следующих из этих форм. В работе показана общая схема решения задачи, то есть метод определения параметров потока в узлах выделенных автором точечных шаблонов.

Решение задачи растекания бурного потока с учетом сил сопротивления потоку весьма актуально, так как для строительства водопропускных сооружений, в которых текут бурные двухмерные в плане водные потоки, необходимо знать параметры потока [3]. В настоящей работе решена задача определения растекания потенциального потока и результатами ее решения можно пользоваться в окрестности выхода потока из трубы примерно до расширения потока $\beta=5$. В работах [26,71-73] была попытка решить эту задачу сразу же для нестационарного течения потока, однако результаты ее решения не нашли широкого применения и не указаны алгоритмы и программы в известной справочной литературе [25,74]. Кроме того эта задача с неизвестными заранее границами имеет особенности: на выходе потока из трубы: глубина в трубе равна величине h_0 , а естественное условие отделения сухого русла от потока предполагает $h=0$, то есть в одной и той же точке проектируемой на дно русла $h=0$ и $h \neq 0$ – налицо противоречие.

Рассмотрим новый подход к решению в первую очередь стационарной задачи с учетом особенностей физики процесса. В работе [4] показано, что глубина вдоль крайней линии тока монотонно уменьшается вниз по течению потока. Как показывают эксперименты [75], растекание бурного потока в горизонтальном отводящем русле без бо-

кового крепления за безнапорными сооружениями происходит в виде так называемого «лепестка растекания» [76] (рисунок 4.13).

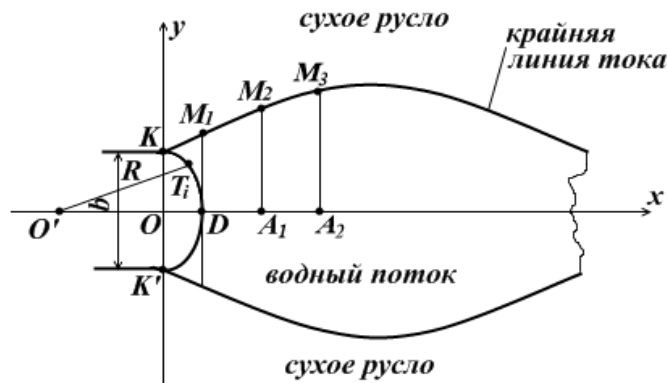


Рисунок 3.13 – Общая схема растекания потока.

Как доказано в работе [77], в непосредственной области выхода потока из трубы с высокой степенью адекватности параметры потока рассчитываются в точках на нулевой эквипотенциали KDK' , на вертикальном отрезке DM_1 и в точках на оси симметрии потока (точки A_i). Примем условие, что $DA_1 = \Delta x_1$ сравнительно мало, а соотношение шагов $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ обеспечивает устойчивость и однозначность решения задачи.

Выделим из потока область течения $M_1DA_1M_2$ (рисунок 3.14) и разобьем ее на прямоугольные и один треугольный участок и обозначим точки контуров посредством букв и цифр.

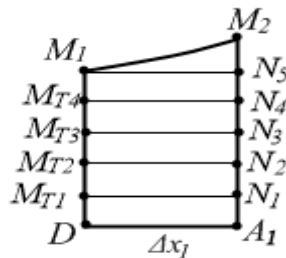


Рисунок 3.14 – Схема разбиения полосы $DM_1M_2A_1$ на простые элементы.

При этом ширина прямоугольников остается постоянной, а шаги Δy_i разные. Далее для обобщения введем четырехточечный шаблон в плоскости течения потока (рисунок 3.15).

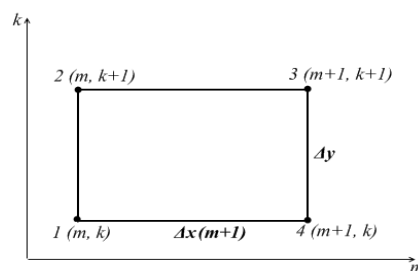


Рисунок 3.15 – Четырехточечный шаблон для стационарного течения потока.

Для определения параметров потока вдоль правой стороны на рисунке 3.15, идя снизу вверх, необходимо определить параметры в точке $(m+1; k+1)$, если известны шаги Δx , Δy и параметры потока V , h , θ в остальных трех точках. Воспользуемся системой интегральных уравнений для двухмерного в плане потока [75]:

$$\oint_{\Gamma} (\bar{\Pi} dy - \bar{\Phi} dx) = - \int_S \bar{\psi} dx dy, \quad (3.175)$$

где Γ – произвольная замкнутая кривая в плоскости Oxy ; S – фигура в плоскости Oxy , ограниченная кривой Γ ; $\bar{\Pi}$, $\bar{\Phi}$, $\bar{\psi}$ – векторы, согласно [75] следующие:

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} Vh \cos \theta \\ V^2 h \cos^2 \theta + \frac{gh^2}{2} \\ V^2 h \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} Vh \sin \theta \\ V^2 h \sin \theta \cos \theta \\ V^2 h \sin^2 \theta + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \frac{\partial Z_d}{\partial x} + \frac{1}{2} \lambda V^2 \cos \theta \\ gh \frac{\partial Z_d}{\partial y} + \frac{1}{2} \lambda V^2 \sin \theta \end{bmatrix},$$

где V – модуль местной скорости жидкой частицы потока; h – глубина потока; θ – угол, характеризующий направление вектора скорости; $\lambda = 0,0303(K_s/h)^{1/3}$ – коэффициент гидравлического трения [8]; K_s – средняя высота выступов шероховатости дна нижнего бьефа [25]; g – ускорение силы тяжести; Z_d – отметка поверхности дна нижнего бьефа.

Полагая $\bar{\psi} = 0$ и пользуясь формулой Грина [56], из (3.175) следует дивергентная форма дифференциального уравнения движения потока:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + \bar{\psi} = 0,$$

совпадающая с известным в справочной литературе уравнением [25]. Пользуясь методом трапеций и полагая в настоящей работе $\bar{\psi} = 0$, из (3.175) получим в дискретной форме уравнение для определения параметров потока в точке $(m+1; k+1)$ для случая горизонтального дна, без учета сил сопротивления потоку [75]:

$$\bar{\Pi}(m+1, k+1) + C \bar{\Phi}(m+1, k+1) = \bar{R}(m+1, k+1), \quad (3.176)$$

где $C = \frac{\Delta x}{\Delta y}$,

$$\bar{R}(m+1, k+1) = \bar{\Pi}(m, k) + \bar{\Pi}(m, k+1) - \bar{\Pi}(m+1, k) + C [\bar{\Phi}(m, k) + \bar{\Phi}(m+1, k) - \bar{\Phi}(m, k+1)].$$

Из (3.176) для контура (рисунок 3.16) следует алгоритмическая форма в дискретном виде:

$$\bar{\Pi}(3) + C \bar{\Phi}(3) = \bar{\Pi}(1) + \bar{\Pi}(2) - \bar{\Pi}(4) + C [\bar{\Phi}(1) + \bar{\Phi}(4) - \bar{\Phi}(2)]. \quad (3.177)$$

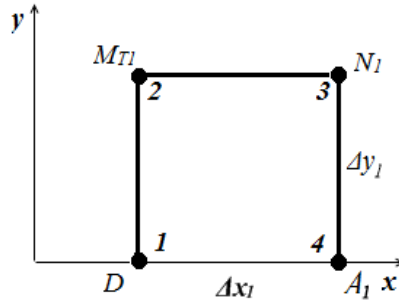


Рисунок 3.16 – Элементарный нижний контур вдоль полосы $DM_1M_2A_1$.

Обозначив правую часть уравнения (3.177) через $\bar{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ с учетом выражения для $\bar{\Pi}$ и $\bar{\Phi}$ получим систему трех уравнений относительно параметров в точке 3:

$$\begin{cases} Vh \cos \theta + CVh \sin \theta = r_1, \\ V^2 h \cos^2 \theta + \frac{gh^2}{2} + CV^2 h \sin \theta \cos \theta = r_2, \\ V^2 h \sin \theta \cos \theta + C \left(V^2 h \sin^2 \theta + \frac{gh^2}{2} \right) = r_3. \end{cases} \quad (3.178)$$

Из системы (3.178) следует кубическое уравнение для определения глубины потока в точке 3:

$$h^3 - \frac{2(r_2 + Cr_3)}{g(1+C^2)} h + \frac{2r_1^2}{g(1+C^2)} = 0. \quad (3.179)$$

Это уравнение имеет три действительных корня. Выбрав корень, удовлетворяющий условию $0 < h < h_0$, возьмем его в качестве решения системы. Заметим, что уравнение

(3.179) при $q > 0$, $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$ имеет решение согласно [78] в виде:

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\sqrt{-p/3} \cos \frac{\alpha}{3}, \\ h_{2,3} &= -2\sqrt{-p/3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned} \quad \cos \alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

где $p = -\frac{2(r_2 + Cr_3)}{g(1+C^2)}$, $q = \frac{2r_1^2}{g(1+C^2)}$.

Из второго и третьего уравнений системы (3.178) следует выражение для угла θ в точке 3:

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{r_3 - \frac{1}{2} C g h^2}{r_2 - \frac{1}{2} g h^2}. \quad (3.180)$$

Выражение для величины скорости следует из первого уравнения системы (3.178):

$$V = \frac{r_1}{h(\cos \theta + C \sin \theta)}. \quad (3.181)$$

Проходя по контурам первой полосы потока снизу вверх можем определить параметры в точке N_5 (см. рисунок 3.14). Таким образом, далее необходимо определить параметры на линии тока в точке M_2 . Возьмем криволинейный треугольник и заменим его на обычный прямоугольный треугольник (рисунок 3.17).

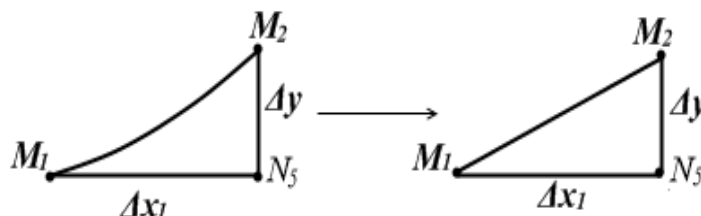


Рисунок 3.17 – Трехточечный шаблон.

Воспользовавшись приближенной формулой, определим шаг Δy :

$$\Delta y = \operatorname{tg} \theta_{M_1} \cdot \Delta x_1. \quad (3.182)$$

Далее воспользуемся известной системой дифференциальных уравнений для плановых потоков [36]:

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \\ u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial(u_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y h)}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.183)$$

Заменяя $u_x = V \cos \theta$, $u_y = V \sin \theta$ и вводя вектор параметров $\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} V \\ h \\ \theta \end{pmatrix}$, преобразуем это

уравнение к матричному виду:

$$A_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = 0, \quad (3.184)$$

$$\text{где } A_1 = \begin{pmatrix} V \cos^2 \theta & g & -V^2 \sin \theta \cos \theta \\ V \sin \theta \cos \theta & 0 & V^2 \cos^2 \theta \\ h \cos \theta & V \cos \theta & -hV \sin \theta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} V \sin \theta \cos \theta & 0 & -V^2 \sin^2 \theta \\ V \sin^2 \theta & g & V^2 \cos \theta \sin \theta \\ h \sin \theta & V \sin \theta & hV \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Переходя в уравнении (3.184) к конечным разностям, выразим вектор $\bar{\varphi}$ в точке M_2 :

$$(A_2^{-1} \cdot A_1)_{(M_2)} \frac{\bar{\varphi}(N_5) - \bar{\varphi}(M_1)}{\Delta x_1} + \frac{\bar{\varphi}(M_2) - \bar{\varphi}(N_5)}{\Delta y} = 0. \quad (3.185)$$

Отсюда

$$\bar{\varphi}(M_2) = \bar{\varphi}(N_5) - \frac{\Delta y}{\Delta x_1} (A_2^{-1} \cdot A_1)_{(M_2)} (\bar{\varphi}(N_5) - \bar{\varphi}(M_1)). \quad (3.186)$$

Обратную матрицу A_2^{-1} по формулам [56] можно привести к виду:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta}{V \sin \theta (\cos \theta + \sin^2 \theta)} & -\frac{V \sin^2 \theta}{(\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} & \frac{g \sin \theta}{(\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} \\ 0 & \frac{h}{gh - V^2 \sin^2 \theta} & -\frac{V \sin \theta}{gh - V^2 \sin^2 \theta} \\ -\frac{1}{V^2 (\cos \theta + \sin^2 \theta)} & -\frac{\sin \theta}{(\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} & \frac{g}{V (\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} \end{pmatrix}.$$

А произведение матриц $A_2^{-1} \cdot A_1$ имеет вид:

$$A_2^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} \frac{ctg \theta}{\cos \theta + \sin^2 \theta} & \frac{g^2 h ctg \theta}{V (\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} & \frac{-hgV}{(\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} \\ 0 & \frac{-V^2 \sin \theta \cos \theta}{gh - V^2 \sin^2 \theta} & \frac{hV^2 \cos^2 \theta}{gh - V^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{V (\cos \theta + \sin^2 \theta)} & \frac{-g^2 h + gV^2 \sin^2 \theta + gV^2 \cos \theta}{V^2 (\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} & \frac{gh \sin \theta (\cos \theta - 1) - V^2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta + \sin^2 \theta)}{(\cos \theta + \sin^2 \theta)(gh - V^2 \sin^2 \theta)} \end{pmatrix}.$$

Обозначив $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = C$, $A_2^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, распишем скалярно векторы

$\bar{\varphi}(M_2)$, $\bar{\varphi}(N_5)$, $\bar{\varphi}(M_1)$:

$$\bar{\varphi}(M_2) = \begin{pmatrix} V \\ h \\ \theta \end{pmatrix}, \bar{\varphi}(N_5) = \begin{pmatrix} V_{N_5} \\ h_{N_5} \\ \theta_{N_5} \end{pmatrix}, \bar{\varphi}(M_1) = \begin{pmatrix} V_{M_1} \\ h_{M_1} \\ \theta_{M_1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi}(N_5) - \bar{\varphi}(M_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

и в общем виде перепишем уравнение (3.186) скалярно в виде трех уравнений:

$$\begin{cases} V = V_{N_5} - C[a_{11}a_1 + a_{12}b_1 + a_{13}c_1], \\ h = h_{N_5} - C[a_{21}a_1 + a_{22}b_1 + a_{23}c_1], \\ \theta = \theta_{N_5} - C[a_{31}a_1 + a_{32}b_1 + a_{33}c_1], \end{cases} \quad (3.187)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(V, h, \theta)$, i, j – принимают значения от 1 до 3.

Перепишем систему (3.187) в более удобном виде, распространенном в справочной математической литературе [56]:

$$\begin{cases} V = g_1(V, h, \theta), \\ h = g_2(V, h, \theta), \\ \theta = g_3(V, h, \theta). \end{cases} \quad (3.188)$$

Воспользовавшись методом простых итераций [56], организуем алгоритм нахождения параметров потока V, h, θ в точке M_2 в виде:

$$\begin{cases} V^{n+1} = g_1(V^n, h^n, \theta^n), \\ h^{n+1} = g_2(V^{n+1}, h^n, \theta^n), \\ \theta^{n+1} = g_3(V^{n+1}, h^{n+1}, \theta^n), \end{cases} \quad (3.189)$$

где n – номер итерации.

Так как шаги по Δx и Δy достаточно малы, то в качестве начального приближения можно выбрать следующие значения нескольких параметров:

$$h^0 = \frac{h_{M_1} + h_{N_5}}{2}, \quad \theta^0 = \frac{\theta_{M_1} + \theta_{N_5}}{2}, \quad V^0 = \sqrt{2g(H_1 - h^0)}, \quad (3.190)$$

где $H_1 = \frac{V_{M_1}^2}{2g} + h_{M_1}$.

Таким образом, параметры потока вдоль первой выделенной полосы потока определяются полностью. Далее переходим ко второй полосе, причем для точки A_2 параметры определяем из аналитического метода [39], как и для первой полосы (рисунок 3.13 и 3.14). Заметим, что дополнительные граничные условия вдоль крайней линии тока не понадобились, так как автор считал параметры потока вдоль оси симметрии потока известными, а распределение глубин и скоростей вдоль оси симметрии потока однозначно

связано с формой и параметрами вдоль крайней линии тока в силу использования аналитического метода.

Выводы по параграфу:

1. Метод работает и его результатами можно пользоваться до расширения потока $\beta = 5$,
2. Схема расчета параметров потока может использоваться далее с учетом сил сопротивления потоку с определенной модификацией, позволяющей уйти от допущения известности параметров вдоль оси симметрии потока.

ВЫВОДЫ ПО ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ

1. Упрощения на поток (стационарный, потенциальный) позволяют с использованием плоскости годографа скорости получить удобные для расчета и анализа формулы определения всего спектра параметров потока за трубой прямоугольного поперечного сечения.
2. Выявлено, что при практическом использовании результатов модели в ряду для функции тока и потенциальной функции достаточно взять с $k=1$. В этом случае решение задачи со свободными границами сводится к задаче линейного программирования. При этом получены решения: для $\tau_0 < \frac{2}{3}$ и $\tau_0 \geq \frac{2}{3}$, которые сравнивались с результатами экспериментов и показали более высокую степень адекватности, чем в известных методах других авторов в окрестности выхода потока из трубы.
3. Значение угла растекания потока на выходе из трубы θ_k , вычисленное для второй ветви решения, больше значения угла растекания для первой ветви, следовательно, исходя из принципа оптимальности, второе решение описывает процесс более точно.
4. Приближенные решения для второй ветви могут быть определены с точностью, удовлетворительной для практики с помощью вышеописанных уравнений как третьей, так и четвертой степени.
5. Решение задачи по определению параметров потока на выходе из трубы по второй ветви для приближенного уравнения третьей степени более простое, а решение задачи для уравнения четвертой степени – более точное.
6. Результаты расчета могут быть использованы для модели с учетом сил сопротивления потоку, а также и при других более сложных формах поперечного сечения водопроводной трубы.

4 АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ ДЛЯ СРАВНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА С МОДЕЛЬНЫМИ

4.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА В ЗАДАННЫХ ТОЧКАХ НА ОСИ СИММЕТРИИ

В экспериментах заданы координаты $x_{iэ}$ на оси симметрии потока и параметры: $h_{iэ}$ – глубина потока, $V_{iэ}$ – модуль скорости. Воспользуемся формулой (для упрощения вариант I):

$$x = x_D + \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1+\tau}{\tau(1-\tau)} - \ln \frac{1-\tau}{\tau} - \frac{1+\tau_0}{\tau_0(1-\tau_0)} + \ln \frac{1-\tau_0}{\tau_0} \right]. \quad (4.1)$$

В уравнении (4.1) полагаем $x = x_{iэ}$ и решаем его относительно параметра $\tau_{iм}$ (модельное):

$$x_{iэ} = x_D + \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1+\tau_{iм}}{\tau_{iм}(1-\tau_{iм})} - \ln \frac{1-\tau_{iм}}{\tau_{iм}} - \frac{1+\tau_0}{\tau_0(1-\tau_0)} + \ln \frac{1-\tau_0}{\tau_0} \right]. \quad (4.2)$$

Величины x_D, A, h_0, H_0, τ_0 – рассчитываем по формулам (3.151) в диссертации, $g=9,81м/с^2$ – ускорение силы тяжести. Далее определяем модельную скорость и глубину потока по формулам:

$$\begin{aligned} V_{iм} &= \tau_{iм}^{1/2} \sqrt{2gH_0}; \\ h_{iм} &= H_0(1-\tau_{iм}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

и проводим сравнение с экспериментальными данными

$$\begin{aligned} \delta_v &= \frac{|V_{iм} - V_{iэ}|}{V_{iэ}} \cdot 100\%; \\ \delta_h &= \frac{|h_{iм} - h_{iэ}|}{h_{iэ}} \cdot 100\%. \end{aligned}$$

4.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ И ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА НА ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ К ОСИ СИММЕТРИИ ПОТОКА ВДОЛЬ КРАЙНЕЙ ЛИНИИ ТОКА

Пользуемся формулами раздела 3.2.9 диссертации справедливыми вдоль верхней крайней линии тока:

$$x = x_D + \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{1+\tau}{\tau(1-\tau)} - \frac{2\sin^2\theta_{\max}}{1-\tau} - \ln \frac{1-\tau}{\tau} - \frac{1+\tau_K}{\tau_K(1-\tau_K)} + \frac{2\sin^2\theta_{\max}}{1-\tau_K} + \ln \frac{1-\tau_K}{\tau_K} \right];$$

$$y = \frac{b_0}{2} + \frac{Ah_0 \sin\theta_{\max}}{H_0\sqrt{2gH_0}} \left[\frac{\cos\theta}{\tau^{1/2}(1-\tau)} - \frac{\cos\theta_K}{\tau_K^{1/2}(1-\tau_K)} \right]. \quad (4.4)$$

В системе (4.4) известны – b_0, A, h_0, H_0, g . $\theta_{\max}, \theta_K, \tau_K$ определяются по формулам (3.122, 3.139, 3.140). Полагая в первом уравнении системы (4.4) $x = x_{i\vartheta}$, определяем τ_{iM} в этой точке. Далее определяем модельную скорость и глубину потока (4.3). Заменяя $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$, а $\sin^2\theta = \tau_{iM} \sin^2\theta_{\max}$ со второго уравнения системы (4.4) определим y_{iM} . Проводим сравнение по формулам

$$\delta_V = \frac{|V_{iM} - V_{i\vartheta}|}{V_{i\vartheta}} \cdot 100\%; \quad \delta_h = \frac{|h_{iM} - h_{i\vartheta}|}{h_{i\vartheta}} \cdot 100\%; \quad \delta_y = \frac{|y_{iM} - y_{i\vartheta}|}{y_{i\vartheta}} \cdot 100\%.$$

4.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ И ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНИИ ТОКА И ПАРАМЕТРОВ В ЭТОЙ ТОЧКЕ

Воспользуемся системой

$$\begin{cases} \frac{\sin\theta}{\tau^{1/2}} = K_T \sin\theta_{\max}; \\ \frac{\cos\theta}{\tau^{1/2}(1-\tau)} = \frac{1}{\tau_A^{1/2}(1-\tau_A)}; \end{cases} \quad (4.5)$$

где K_T – коэффициент расхода, τ_A – значение параметра τ в точке A на оси симметрии потока.

Далее решается система (4.5) и определяются параметры θ, τ . Зная параметры потока в точке по формулам (3.161) для $x = x(\tau, \theta)$, $y = y(\tau, \theta)$ определяем координаты точки пересечения произвольной линии тока и эквипотенциали. Оценивается рассогласование:

$$\delta_V = \frac{|V_{iM} - V_{i\vartheta}|}{V_{i\vartheta}} \cdot 100\%; \quad \delta_h = \frac{|h_{iM} - h_{i\vartheta}|}{h_{i\vartheta}} \cdot 100\%.$$

и проверяется выполнения интеграла Бернулли:

$$\delta_H = \frac{|H_{\vartheta} - H_0|}{H_{\vartheta}} \cdot 100\%, \quad \text{где } H_{\vartheta} = h_{\vartheta} + \frac{V_{\vartheta}^2}{2g}, \quad H_0 = h_m + \frac{VM_{\vartheta}^2}{2g}.$$

4.5 РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ И РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА НА ПК

4.5.1 ОПИСАНИЕ ПРОГРАММ

На основании теории в главе 3 был разработан алгоритм, который успешно реализован на базе математического пакета MathCad 13. Данный алгоритм позволяет производить расчет не только крайней, но и произвольной линии тока, а также произвольной эквипотенциали. Разработана программа, которая позволяет определить в точках пересечения линий тока и эквипотенциалей помимо координат точек также скорости потока в этих точках, значения глубин, а также параметры τ и θ . В силу того, что количество линий тока и эквипотенциалей выбирается пользователем программы, последняя позволяет найти определенные выше параметры в любой точке внутренней области потока.

На базе алгоритма для расчета крайней линии тока написана программа, позволяющая сравнить экспериментальные данные не только с теоретической кривой, построенной по описанной выше теории, но и с теоретическими кривыми, построенными по теории И.А. Шеренкова и теории Г.А. Лилицкого. Данная программа рассчитывает точечные и интегральные характеристики свободного растекания планового потока [79].

4.5.2 ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ

Для построения любой математической модели вводятся следующие исходные данные:

b – ширина прямоугольной трубы, $[b] = [\text{см}]$;

h – высота трубы, $[h] = [\text{см}]$;

Q – расход потока, $[Q] = [\text{см}^3/\text{с}]$;

h_0 – глубина потока на его выходе из трубы, $[h_0] = [\text{см}]$;

g – ускорение силы тяжести, $[g] = [\text{см}/\text{с}^2]$.

Для сравнения адекватности модели дополнительно вводятся:

β – относительное расширение русла в эксперименте;

x_3 – абсциссы контролируемых точек вдоль крайней линии тока в эксперименте;

y_3 – ордината контролируемых точек вдоль крайней линии тока в эксперименте.

После ввода всех исходных данных необходимо определить все постоянные величины, которые не меняются в течение проводимого опыта. Для наглядности математической программы все исходные данные вводятся на оранжевом фоне монитора. Математические модели, по которым выполняется расчет, выводятся на белом фоне, а получаемые результаты выводятся на желтом фоне. Расчет постоянных величин выполняется в следующей последовательности:

1. Определяется скорость потока на выходе из трубы

$$V_0 = \frac{Q}{h_0 b}. \quad (4.6)$$

2. Определяется критерий Фруда на выходе из трубы

$$Fr_0 = \frac{V_0^2}{gh_0}. \quad (4.7)$$

3. Определяется постоянная в интеграле Бернулли

$$H_0 = h_0 + \frac{V_0^2}{2g}. \quad (4.8)$$

4. Вычисляется квадрат скоростного коэффициента на выходе из трубы

$$\tau_0 = \frac{V_0^2}{2gH_0}. \quad (4.9)$$

5. Находится постоянная

$$C_1 = \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} - \sqrt{3} \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{3(1 - \tau_0)}}. \quad (4.10)$$

6. Определяется угол растекания θ на бесконечности при отсутствии сил трения (θ_{\max})

$$\theta = C_1 + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (4.11)$$

7. Находится постоянная A из условия отсекания крайней линией тока и осью симметрии 50 % всего расхода потока

$$A = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta}. \quad (4.12)$$

8. Определяется квадрат скоростного коэффициента в точке К, лежащей на начальной эквипотенциали. Для этого решается уравнение относительно τ_K :

$$\frac{\tau_K (1 - \tau_K)^2}{\tau_0 (1 - \tau_0)^2} + \tau_K \sin^2 \theta = 1. \quad (4.13)$$

9. Определяется угол наклона вектора скорости потока с положительным направлением оси Ox в точке К:

$$\theta_K = \arcsin(\sqrt{\tau_K} \cdot \sin \theta). \quad (4.14)$$

На этом определение постоянных величин для заданных исходных данных заканчивается. Программа для конкретных исходных данных при обработке экспериментальных исследований приведена в фрагмент программы 4.1. На данной программе показано, как вводятся исходные данные и рассчитываются постоянные величины.

Фрагмент программы 4.1. – Ввод исходных данных и определение постоянных

Исходные данные:

$$\beta := 10$$

$$Q := 12.2 \cdot 10^3$$

$$h := 16$$

$$h_0 := 6.76$$

$$b := 16$$

$$g := 981$$

$$x_э := (0 \ 4 \ 24 \ 44 \ 64 \ 69)$$

$$y_э := (8 \ 12 \ 39 \ 65 \ 87 \ 90)$$

Величина скорости потока на его выходе из трубы – V_0 :

$$V_0 := \frac{Q}{h_0 b}$$

$$V_0 = 112.796$$

$$B := \beta \cdot b$$

$$B = 160$$

Fr - критерий Фруда

$$Fr := \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_0}$$

$$Fr = 1.919$$

H_0 - постоянная в интеграле Бернулли

$$H_0 := h_0 + \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g}$$

$$H_0 = 13.245$$

τ_0 - квадрат скоростного коэффициента

$$\tau_0 := \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g \cdot H_0}$$

$$\tau_0 = 0.49$$

$$C_1 := \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0 - 1}{1 - \tau_0}}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad C_1 = -0.111$$

θ - угол растекания потока на бесконечности при отсутствии сил трения потоку (θ_{\max})

$$\theta := C_1 + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \theta = 1.03868591$$

A - постоянная, определяемая из условия отсекаания крайней линией тока и осью симметрии 50% всего расхода потока

$$A := \frac{V_0 \cdot b}{2 \cdot \sin(\theta)} \quad A = 1.047 \times 10^3$$

τ_k - параметр потока в точке К

$$\left[\frac{\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^2} + \tau_k \cdot \sin^2(\theta) \right] = 1 \quad \text{— уравнение, которому удовлетворяет } \tau_k$$

$$\tau_k := \operatorname{root}\left[\frac{\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^2} + \tau_k \cdot \sin^2(\theta) - 1, \tau_k, \tau_0, 1 \right] \quad \tau_k = 0.70748693$$

θ_k - параметр потока в точке К

$$\theta_k := \operatorname{asin}\left(\tau_k^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta)\right) \quad \theta_k = 0.811$$

4.5.3 ПОСТРОЕНИЕ КРАЙНЕЙ ЛИНИИ ТОКА

Для построения теоретической крайней линии тока (рисунок 4.1) необходимо решить систему из двух уравнений (3.159):

$$\begin{cases} x = -\frac{Ah_0}{2\sqrt{2gH_0^3}} \left[\frac{1+\tau}{\tau(1-\tau)} - \ln \frac{\tau_K(1-\tau)}{\tau(1-\tau_K)} - \frac{1+\tau_K}{\tau_K(1-\tau_K)} + \frac{2\sin^2 \theta_{\max}(\tau_K - \tau)}{(1-\tau_K)(1-\tau)} \right]; \\ y = \frac{b}{2} + \frac{Ah_0 \sin \theta_{\max}}{H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{\cos \theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)} - \frac{\cos \theta_K}{\tau_K^{\frac{1}{2}}(1-\tau_K)} \right]. \end{cases} \quad (4.15)$$

Для этого, задаваясь значениями x , из первого уравнения системы (4.15) определяем значение τ . Далее значение τ подставляется во второе уравнение системы и определяется значение y . Так как значения x в исходных данных кратны четырем, то задаемся значениями x от нуля до 80 с шагом, равным четырем. В данном случае мы сможем проверить отклонение теоретических значений y от экспериментальных. Программа вычислений имеет следующий вид (фрагмент программы 4.2).

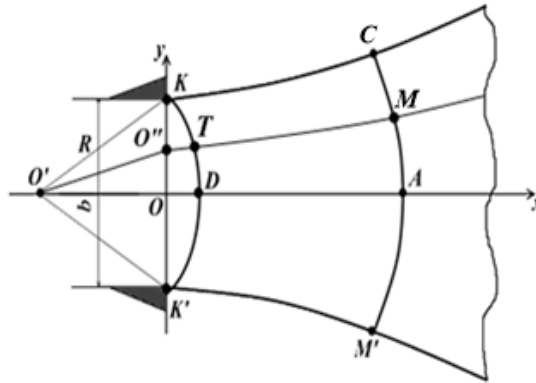


Рисунок 4.1 – Расчетная схема

Фрагмент программы 4.2 – Задание функции $\tau(x)$

$x := 0,4..80$

x - задает значение от 0 до 80 с шагом 4

$$\tau(x) := \text{root} \left[x - \frac{A \cdot h_0}{2 \cdot H_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}} \cdot \left[\frac{1 + \tau}{\tau \cdot (1 - \tau)} - \frac{2 \cdot \sin(\theta)^2}{1 - \tau} - \ln \left(\frac{1 - \tau}{\tau} \right) - \frac{1 + \tau k}{\tau k \cdot (1 - \tau k)} + \ln \left(\frac{1 - \tau k}{\tau k} \right) + \frac{2 \cdot \sin(\theta)^2}{1 - \tau k} \right], \tau, \tau_0, 0.9999999999999999 \right]$$

$\tau(x)$ – выводит вычислительные значения корней, соответствующих значениям $x=(0,4..80)$

Далее выполняется проверка того, насколько точно нашли корни, подставив полученные значения $\tau(x)$ в исходное уравнение (фрагмент программы 4.3).

Фрагмент программы 4.3 – Вычисление координат крайней линии тока

	x =	τ(x) =
$\tau\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_0\right] = 0.70749$	0	0.707490053353
	4	0.854199827475
	8	0.906528643467
	12	0.932268140906
	16	0.947273304169
	20	0.957004530539
	24	0.963785664062
	28	0.968762333157
	32	0.972563534662
	36	0.975555973816
	40	0.977971480725
	44	0.979959543976
	48	0.981623642882
	52	
	56	
	60	
	64	
	68	
	72	
	76	
	80	
	84	

$\tau\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_1\right] = 0.8542$		
$\tau\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_2\right] = 0.964$		
$\tau\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_3\right] = 0.98$		
$\tau\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_4\right] = 0.986$		

$$y(x) := \frac{b}{2} + \frac{A \cdot h_0 \cdot \sin(\theta)}{H_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}} \cdot \left[\frac{\sqrt{1 - \tau(x) \cdot \sin(\theta)^2}}{\sqrt{\tau(x) \cdot (1 - \tau(x))}} - \frac{\cos(\theta k)}{\sqrt{\tau k \cdot (1 - \tau k)}} \right] \quad \text{- уравнение крайней линии тока}$$

$y(x) =$		
8	$y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_0\right] = 8$	$y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_4\right] = 108.062$
12.821	$y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_1\right] = 12.821$	$y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_5\right] = 116.341$
18.353		
24.234	$y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_2\right] = 42.849$	
30.319	$y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_3\right] = 75.149$	
36.538		
42.849		
49.224		
55.652		
62.119		
68.621		
75.149		
81.699		

$$y_T := \left[y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_0\right] \quad y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_1\right] \quad y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_2\right] \quad y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_3\right] \quad y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_4\right] \quad y\left[\left(x_{\text{э}}^T\right)_5\right] \right]$$

$x_{\text{э}} = (0 \quad 4 \quad 24 \quad 44 \quad 64 \quad 69)$
$y_{\text{э}} = (8 \quad 12 \quad 39 \quad 65 \quad 87 \quad 90)$
$y_T = (8 \quad 12.821 \quad 42.849 \quad 75.149 \quad 108.062 \quad 116.341)$

Далее приведем расчет погрешности расхождения теоретических и экспериментальных данных (фрагмент программы 4.4).

Фрагмент программы 4.4

$$\delta y(n) := \left| \frac{(y_{\text{э}}^T)_n - (y_{\text{т}}^T)_n}{(y_{\text{э}}^T)_n} \right| \cdot 100$$

$$\delta y := \begin{pmatrix} \delta y(0) \\ \delta y(1) \\ \delta y(2) \\ \delta y(3) \\ \delta y(4) \\ \delta y(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.03 \times 10^{-4} \\ 6.844 \\ 9.868 \\ 15.614 \\ 24.209 \\ 29.268 \end{pmatrix}$$

Сведем теоретические и экспериментальные значения в таблицу 4.1.

Таблица 4.1

$x_{\text{э}}$	0	4	24	44
$y_{\text{э}}$	8	12	39	65
$y_{\text{т}}$	8	12.821	42.849	75.149
$\Delta y, \%$	6.03×10^{-4}	6.844	9.868	15.614

В данном разделе не ставилась цель проверки адекватности теоретических и экспериментальных исследований, но те теоретические данные, которые попали в результаты исследований, показали, что погрешность результатов не превышает 20 % от экспериментальных исследований [80].

Таким образом, представленная модель, по которой можно рассчитывать геометрию крайней линии тока, показала свою работоспособность.

4.5.4 ПОСТРОЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНИИ ТОКА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ ПОТОКА

Чтобы построить произвольную линию тока, вначале необходимо построить начальную эквипотенциаль и определить все интересующие нас параметры.

ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ

Для построения начальной эквипотенциали необходимо по исходным данным определить угол θ_K , значение x_D , определить ее радиус R и провести дугу окружности между точками К и D радиусом R (рисунок 4.2).

Угол θ_K определяется из выражения (4.14) в разделе 4.5.2 (фрагмент программы 4.1). Далее определяется абсцисса x_D из формулы:

$$x_D = \frac{b(1 - \cos\theta_K)}{2\sin\theta_K}. \quad (4.16)$$

Радиус начальной эквипотенциали определяется из выражения:

$$R = \frac{b}{2\sin\theta_K} \quad (4.17)$$

и строится начальная эквипотенциаль.

Для фиксации нескольких точек на начальной эквипотенциали задаем параметром i , где i будет определять количество участков, на которое будет разделена вертикаль от 0 до точки К. При этом вводим параметр расхода K_T , который изменяется от нуля до единицы. Параметр расхода определяет, какая часть расхода протекает через дугу, ограниченную точкой D и выбранной точкой T:

$$K_T = \frac{Q_T}{0,5Q}. \quad (4.18)$$

Если выберем $i = 5$, то будем иметь шесть линий тока, между которыми протекает десятая часть расхода. Построение начальной эквипотенциали покажем на примере (фрагмент программы 4.5).

Фрагмент программы 4.5 – Построение начальной эквипотенциали

Определим коэффициент расхода $0 < K_T(i) < 1$

$i := 0, 0.5 .. 5$

$K_T(i) := i \cdot 0.2$

$i =$
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

$QT(i)$ - Расход потока, отсекаемого от оси симметрии линией тока

$$QT(i) := 0.5 \cdot Q \cdot KT(i)$$

$KT(i) =$	$QT(i) =$
0	0
0.1	610
0.2	$1.22 \cdot 10^3$
0.3	$1.83 \cdot 10^3$
0.4	$2.44 \cdot 10^3$
0.5	$3.05 \cdot 10^3$
0.6	$3.66 \cdot 10^3$
0.7	$4.27 \cdot 10^3$
0.8	$4.88 \cdot 10^3$
0.9	$5.49 \cdot 10^3$
1	$6.1 \cdot 10^3$

Обозначим $\theta_{Tбес}(i)$ величину $(\theta_T)^\infty$

$$\theta_{Tбес}(i) := \text{asin}(KT(i) \cdot \sin(\theta))$$

$\theta_{Tбес}(i) =$
0
0.086
0.173
0.261
0.352
0.445
0.543
0.648
0.761
0.888
1.039

Определим абсциссу точки D:

$$x_D := \frac{b \cdot (1 - \cos(\theta_k))}{2 \cdot \sin(\theta_k)}$$

$$x_D = 3.433$$

Продолжение фрагмента программы 4.5

ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ

По найденному $\theta_{T\text{бес}}(i)$ определим параметры в точке T, которая лежит на начальной эквипотенциали: $\tau_T(i)$ и $\theta_T(i)$

$$\tau_T(i) := \text{root} \left[\frac{\tau_T \cdot (1 - \tau_T)^2}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^2} + \left(\sin(\theta_{T\text{бес}}(i))^2 \cdot \tau_T \right) - 1, \tau_T, \tau_0, \tau_k \right]$$

$$\theta_T(i) := \text{asin} \left(\tau_T(i)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta_{T\text{бес}}(i)) \right)$$

 $\tau_T(i) =$

0.48961
0.49154
0.49735
0.50702
0.52057
0.53811
0.55987
0.58634
0.61837
0.65761
0.70749

 $\theta_T(i) =$

0
0.06045
0.12185
0.18514
0.25134
0.32158
0.39724
0.48014
0.57295
0.68017
0.81078

R - радиус начальной эквипотенциали

$$R := \frac{b}{2 \cdot \sin(\theta_k)}$$

$$R = 11.037$$

Определим координаты точек пересечения начальной эквипотенциали и линий тока:

$y_T(i), x_T(i)$

$$y_T(i) := R \cdot \sin(\theta_T(i))$$

$$x_T(i) := R \cdot \cos(\theta_T(i)) - R \cdot \cos(\theta_k)$$

 $y_T(i) =$

0
0.667
1.342
2.032
2.745
3.488
4.27
5.098
5.983
6.942
8

 $x_T(i) =$

3.433
3.413
3.351
3.245
3.087
2.868
2.574
2.185
1.671
0.977
0

Заметим, что выделенные линии тока пройдут через точки с вертикальной координатой $px(i)$ и горизонтальной координатой, равной 0. Обозначим ее через $p=0$. Отразим на одном графике крайнюю линию тока, начальную эквипотенциаль и точки $px(i)$ (рисунок 4.2).

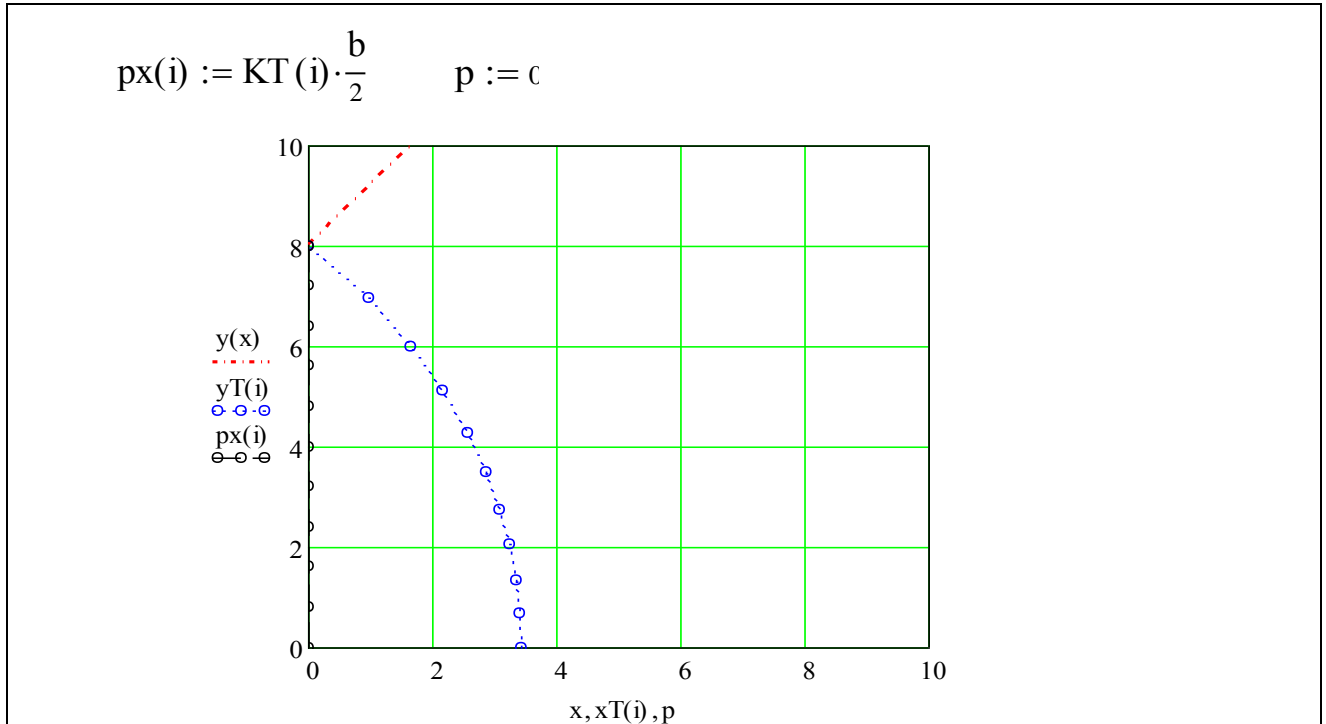


Рисунок 4.2 – Начальная эквипотенциаль

Для построения произвольных линий тока необходимо уметь строить точки на оси симметрии потока. Поэтому рассмотрим вначале построение данных точек.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕК НА ОСИ СИММЕТРИИ ПОТОКА

Для построения точек на оси симметрии потока введем параметр j , который будет определять количество участков, на которое будет разделена горизонталь, т.е. однозначно фиксировать количество эквипотенциалей. В итоге таким образом мы можем построить сколь угодно много точек, изменяя лишь шаг в параметрах i и j , тем самым заполнить всю внутреннюю область между осью симметрии потока и его крайней линией тока.

Задавая глубину $h_A(j)$, мы фиксируем произвольную эквипотенциаль, проходящую через точку А. По значениям глубин $h_A(j)$ определим значения квадрата скоростного коэффициента $\tau_A(j)$ и скорости потока в точке А $V_A(j)$. Таких точек А будет ровно столько, сколько значений принимает параметр j . Глубины будем задавать согласно выражения

$$h_A(j) = \delta(j) \cdot h_0, \quad (4.19)$$

где $\delta(j) = 1 - j \cdot 0,1$.

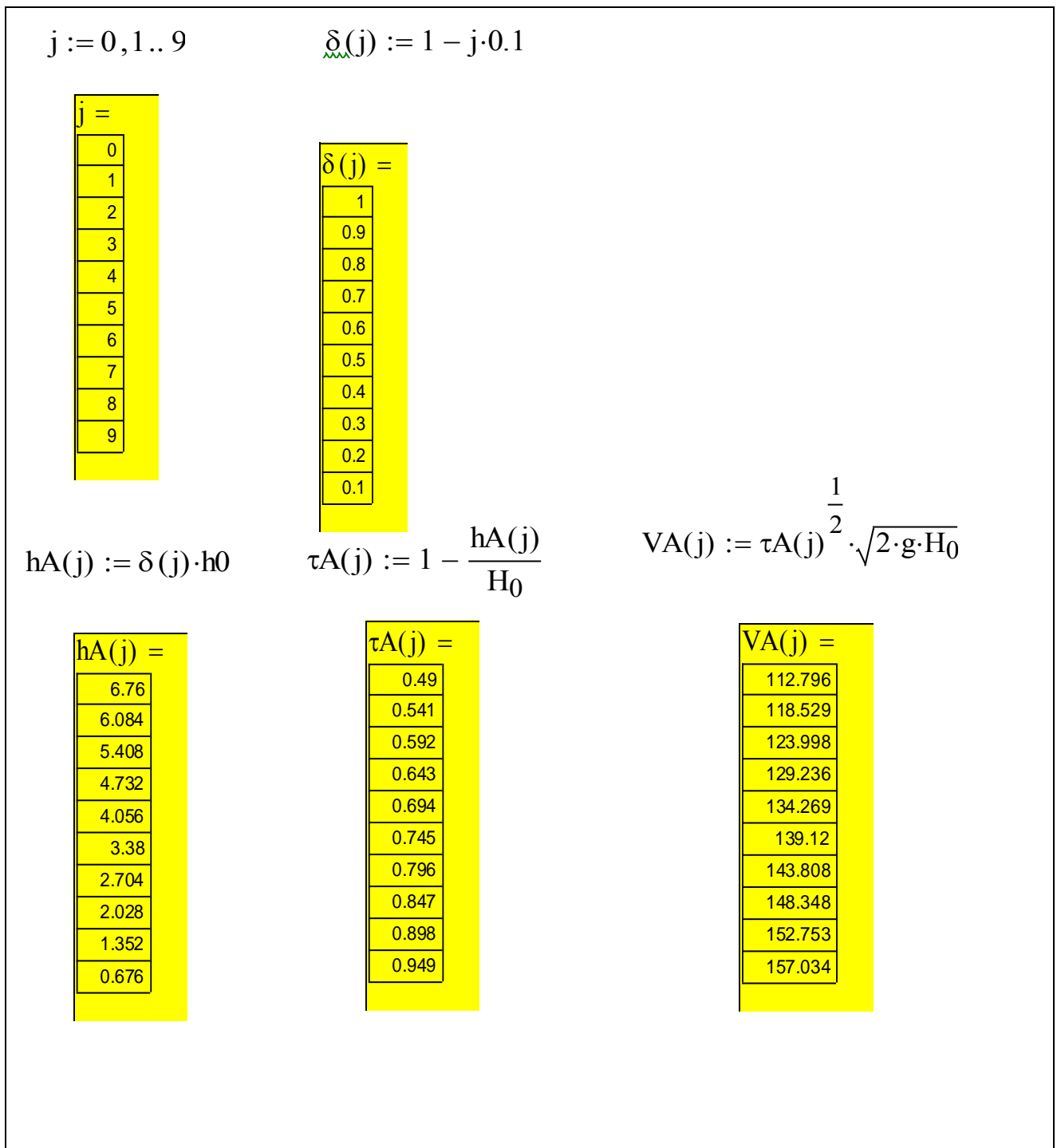
Координаты точек на оси симметрии потока можно определять по формуле:

$$x_A(j) = x_D + \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left\{ \frac{1+\tau_A(j)}{\tau_A(j) \cdot [1-\tau_A(j)]} - \ln \frac{1-\tau_A(j)}{\tau_A(j)} - \frac{1+\tau_0}{\tau_0(1-\tau_0)} + \ln \frac{1-\tau_0}{\tau_0} \right\} \quad (4.20)$$

Рассмотрим построение произвольных точек на оси симметрии потока в расчете (фрагмент программы 4.6) и на графике (рисунок 4.3).

Отметим, что построение начальной эквипотенциали и точек на оси симметрии потока – частные случаи более общих построений, которые будут представлены ниже. Однако их построение дает возможность проконтролировать правильность более общих процедур построения точек пересечения произвольных линий тока и эквипотенциалей.

Фрагмент программы 4.6 – Построение точек на оси симметрии потока



Продолжение фрагмента программы 4.6

$$y_A := 0$$

$$x_A(j) := x_D + \frac{A \cdot h_0}{2 \cdot H_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}} \cdot \left[\frac{1 + \tau_A(j)}{\tau_A(j) \cdot (1 - \tau_A(j))} - \ln \left(\frac{1 - \tau_A(j)}{\tau_A(j)} \right) - \frac{1 + \tau_0}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)} + \ln \left(\frac{1 - \tau_0}{\tau_0} \right) \right]$$

$$x_A(j) =$$

3.433
4.174
5.157
6.453
8.192
10.614
14.199
20.066
31.551
65.171

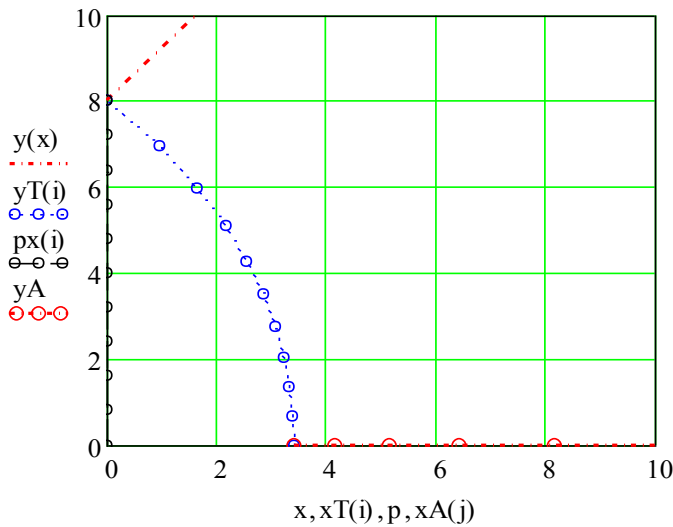


Рисунок 4.3 – Точки, построенные на оси симметрии потока

Далее выполним расчет координат и основных параметров точек M , являющихся точками пересечений произвольных линий тока и произвольных эквипотенциалей.

Для этого определим вначале квадрат скоростного коэффициента τ_M , который находится в пределах $\tau_0 < \tau_M(i, j) < 1$, по которому определим значения параметра $\theta_M(i, j)$ и значения скорости $V_M(i, j)$ по следующим выражениям:

$$\frac{\tau_M(1 - \tau_M)}{\tau_A(j) \cdot [1 - \tau_A(j)]^2} + \tau_M \cdot \sin^2 \theta_T^\infty(i) = 1; \quad (4.21)$$

$$\theta_M(i, j) = \arcsin\left\{[\tau_M(i, j)]^{1/2} \cdot \sin\theta_T^\infty(i)\right\}; \quad (4.22)$$

$$V_M(i, j) = [\tau_M(i, j)]^{1/2} \cdot \sqrt{2gH_0}. \quad (4.23)$$

После этого определяем абсциссы и ординаты искоемых точек. Ординаты определяем из следующего выражения:

$$y_M(i, j) = y_T(i) + \frac{Ah_0 \sin\theta_T^\infty(i)}{H_0 \sqrt{2gH_0}} \cdot \left[\frac{\cos\theta_M(i, j)}{[\tau_M(i, j)]^{1/2} [1 - \tau_M(i, j)]} - \frac{\cos\theta_T(i, j)}{[\tau_T(i)]^{1/2} [1 - \tau_T(i)]} \right]. \quad (4.24)$$

Абсциссы могут быть найдены из модели согласно формуле:

$$x_M(i, j) = x_T(i) + \frac{Ah_0}{2H \sqrt{2gH_0}} \cdot [I_1(i, j) - K(i) \cdot I_2(i, j) - K(i) \cdot I_3(i, j)], \quad (4.25)$$

где

$$I_1(i, j) = \frac{1 + \tau_M(i, j)}{\tau_M(i, j) \cdot [1 - \tau_M(i, j)]} + \ln \frac{\tau_M(i, j)}{1 - \tau_M(i, j)} - \ln \frac{\tau_T(i)}{1 - \tau_T(i)} - \frac{1 + \tau_T(i)}{\tau_T(i) \cdot [1 - \tau_T(i)]}; \quad (4.26)$$

$$I_2(i, j) = \frac{2}{1 - \tau_M(i, j)} + \ln \frac{1 - \tau_M(i, j)}{\tau_M(i, j)} - \frac{2}{1 - \tau_T(i)} - \ln \frac{1 - \tau_T(i)}{\tau_T(i)}; \quad (4.27)$$

$$I_3(i, j) = \ln \frac{\tau_M(i, j)}{1 - \tau_M(i, j)} - \ln \frac{\tau_T(i)}{1 - \tau_T(i)}; \quad (4.28)$$

$$K(i) = \sin^2 \theta_T^\infty(i). \quad (4.29)$$

После выполненных расчетов можем определить глубины из выражения:

$$h_M(i, j) = H_0 [1 - \tau_M(i, j)]. \quad (4.30)$$

В итоге можно вычислить любые интересующие проектировщиков параметры. Рассмотрим программы расчета параметров произвольных точек потока. Для этого выполним расчет координат и основных параметров точек М, являющихся точками пересечений произвольных линий тока и произвольных эквиптоенциалей (фрагмент программы 4.7).

Фрагмент программы 4.7 – Построение произвольных точек

Определим вначале квадрат скоростного коэффициента $\tau_0 < \tau_M(i,j) < 1$, по которому определим значения параметра $\theta_M(i,j)$ и значения скорости $V_M(i,j)$

$$\tau_M(i,j) := \text{root} \left[\frac{(\tau_M) \cdot (1 - \tau_M)^2}{\tau_A(j) \cdot (1 - \tau_A(j))^2} - 1 + \tau_M \cdot \sin(\theta_{T\text{бес}}(i))^2, \tau_M, \tau_0, 0.9999999 \right]$$

$$\theta_M(i,j) := \text{asin} \left(\tau_M(i,j)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta_{T\text{бес}}(i)) \right)$$

$$V_M(i,j) := \tau_M(i,j)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}$$

$\tau_M(i,j) =$	$\theta_M(i,j) =$	$V_M(i,j) =$
0.4896	0	112.796
0.4915	0.060453395865389	113.019
0.4973	0.121845961895007	113.684
0.507	0.185136289388363	114.784
0.5206	0.251337304074962	116.308
0.5381	0.321582100186618	118.251
0.5599	0.397241461934265	120.619
0.5863	0.480135686402361	123.437
0.6184	0.572949505001597	126.764
0.6576	0.680173158719709	130.723
0.7075	0.810783795281171	135.59
0.5406	0	118.529
0.5422	0.063499003247025	118.705
0.5471	0.127824526823312	119.233
0.5552	0.193839166556185	120.113
0.5667	0.262487666508219	121.351

Далее определим вертикальные и горизонтальные координаты искомых точек $y_M(i,j)$ и $x_M(i,j)$

$$y_M(i,j) := y_T(i) + \frac{A \cdot h_0 \cdot \sin(\theta_{T\text{бес}}(i))}{H_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}} \cdot \left[\frac{\cos(\theta_M(i,j))}{\tau_M(i,j)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \tau_M(i,j))} - \frac{\cos(\theta_T(i))}{\tau_T(i)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \tau_T(i))} \right]$$

Для нахождения $x_M(i,j)$ вначале определим некоторые слагаемые и множители, входящие в выражение для $x_M(i,j)$

$$I1(i,j) := \left[\frac{1 + \tau_M(i,j)}{\tau_M(i,j) \cdot (1 - \tau_M(i,j))} + \ln \left(\frac{\tau_M(i,j)}{1 - \tau_M(i,j)} \right) \right] - \ln \left(\frac{\tau_T(i)}{1 - \tau_T(i)} \right) - \frac{1 + \tau_T(i)}{\tau_T(i) \cdot (1 - \tau_T(i))}$$

$$I2(i,j) := \frac{2}{1 - \tau_M(i,j)} + \ln \left(\frac{1 - \tau_M(i,j)}{\tau_M(i,j)} \right) - \frac{2}{1 - \tau_T(i)} - \ln \left(\frac{1 - \tau_T(i)}{\tau_T(i)} \right)$$

$$I3(i,j) := \ln \left(\frac{\tau_M(i,j)}{1 - \tau_M(i,j)} \right) - \ln \left(\frac{\tau_T(i)}{1 - \tau_T(i)} \right)$$

$$K(i) := \sin(\theta_{T\text{бес}}(i))^2$$

$$x_M(i,j) := x_T(i) + \frac{A}{\sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}} \cdot \frac{h_0}{2 \cdot H_0} \cdot (I1(i,j) - K(i) \cdot I2(i,j) - K(i) \cdot I3(i,j))$$

Также определим значения глубин в полученных точках $h_M(i,j)$

$$h_M(i,j) := H_0 \cdot (1 - \tau_M(i,j))$$

$x_M(i,j) =$	$y_M(i,j) =$	$\tau_M(i,j) =$	$\theta_M(i,j) =$	$V_M(i,j) =$	$h_M(i,j) =$
3.4333	0	0.4896	0	112.7959	6.76
3.4131	0.6668	0.4915	0.0605	113.0188	6.7343
3.3515	1.3415	0.4973	0.1218	113.6843	6.6574
3.2447	2.0317	0.507	0.1851	114.7839	6.5294
3.0865	2.7449	0.5206	0.2513	116.308	6.3499
2.8675	3.4885	0.5381	0.3216	118.2511	6.1176
2.5739	4.27	0.5599	0.3972	120.6188	5.8293
2.1854	5.098	0.5863	0.4801	123.4366	5.4788
1.6707	5.9834	0.6184	0.5729	126.7635	5.0546
0.9772	6.9415	0.6576	0.6802	130.7232	4.5349
$2.746 \cdot 10^{-15}$	8	0.7075	0.8108	135.5905	3.8742
4.1745	0	0.5406	0	118.5294	6.084
4.1516	0.7127	0.5422	0.0635	118.7052	6.0627
		0.5471	0.1278	119.2327	5.9988

Проверку того, что построение начальной эквипотенциали и точек на оси симметрии потока есть частные случаи более общих построений точек, можно провести, сравнив результаты, полученные ранее (рисунок 4.3), с результатами, приведенными на рисунке 4.4.

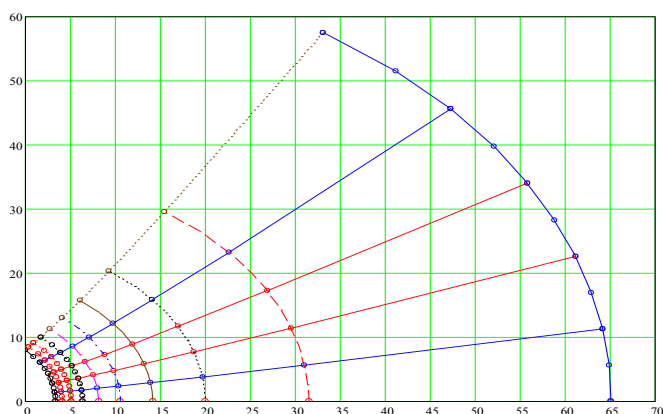


Рисунок 4.4 – Линии тока и эквипотенциали, построенные по исходным данным

В итоге получаем все интересующие проектировщиков параметры, которые представлены в виде графиков. По полученным данным, которые в виде частичной распечатки приведены выше, построены графики, показанные на рисунке 5.5. Построенные графики подтверждают работоспособность полученных математических моделей и разработанных математических программ.

ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Известно, что полученные математические модели можно проверить, сравнивая результаты аналитических расчетов с экспериментальными данными. Проверку расчетов будем сопровождать приведением алгоритмов и компьютерных программ, составленных автором с использованием мощного пакета математического моделирования Mathcad. Чтобы показать работоспособность математических моделей и разработанных программ, анализ адекватности будем выполнять, сравнивая результаты первого опыта с результатами расчета (с демонстрацией программ). По остальным опытам приведем только результаты расчета. Проверку адекватности математических моделей реальному процессу начнем, сравнивая получаемую крайнюю линию тока с экспериментальными данными, полученными в первом опыте при определении координат крайней линии тока при свободном растекании бурного стационарного двухмерного в плане открытого водного потока за прямоугольными трубами без учета сил сопротивления.

4.5.5 АДЕКВАТНОСТЬ ПОЛУЧАЕМЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕАЛЬНОМУ ПРОЦЕССУ

Опыт № 1. Исходные данные: $h=16$ см; $b=16$ см; $Q=12,2 \cdot 10^3$ см³/с; $h_0=6,76$ см. В результате проведения экспериментальных исследований были получены следующие результаты, приведенные в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Параметры крайней линии тока

x_3	0	4	24	44	64	69
y_3	8	12	39	65	87	90

Последовательность вычисления на компьютере следующая:

1. Начинаем с ввода исходных данных (фрагмент программы 4.8)

Исходные данные модели:

h - местная в плане глубина потока, [h]=[см]

b - ширина прямоугольной трубы, [b]=[см]

Q - расход потока, [Q]=[см³/сек]

h0 - глубина потока на его выходе из трубы, [h0]=[см]

g - ускорение силы тяжести, [g]=[см/сек²]

b - относительное расширение русла

хэ - продольная координата контура растекания, [хэ]=[см]

уэ - поперечная координата контура растекания, [уэ]=[см]

(индекс "э" указывает на то, что величина взята из эксперимента)

Фрагмент программы 4.8 – Ввод исходных данных в опыте № 1

```

Q := 12.2*103    b := 16    h := 16    h0 := 6.76    g := 981    β := 10

хэ := ( 0  4  24  44  64  69 )

уэ := ( 8  12  39  65  87  90 )

```

2. По исходным данным определяем скорость и число Фруда на выходе из трубы (фрагмент программы 4.9).

Фрагмент программы 4.9 – Вычисление скорости и числа Фруда в опыте № 1

```

V0 - величина скорости потока на его выходе из трубы

V0 := Q / (h0 * b)    V0 = 112.796

Fr - критерий Фруда

Fr := (V0)2 / (g * h0)    Fr = 1.919

```

3. Далее определяем параметры, необходимые для расчета координат крайней линии тока (фрагмент программы 4.10).

Фрагмент программы 4.10 – Вычисление параметров крайней линии тока в опыте № 1

H_0 - постоянная в интеграле Бернулли

$$H_0 := h_0 + \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g} \quad H_0 = 13.245$$

τ_0 - квадрат скоростного коэффициента

$$\tau_0 := \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g \cdot H_0} \quad \tau_0 = 0.49$$

$$C_1 := \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad C_1 = -0.111$$

θ - угол растекания потока на бесконечности при отсутствии сил трения потоку (θ_{\max})

$$\theta := C_1 + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \theta = 1.03868591$$

A - постоянная, определяемая из условия отсекания крайней линией тока и осью симметрии 50% всего расхода потока

$$A := \frac{V_0 \cdot b}{2 \cdot \sin(\theta)} \quad A = 1.047 \times 10^3$$

τ_k - параметр потока в точке K

$$\tau_k := \operatorname{root} \left[\left[\frac{\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^2} + \tau_k \cdot \sin(\theta)^2 - 1 \right], \tau_k, \tau_0, 1 \right] \quad \tau_k = 0.70748693$$

$$\left[\frac{\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^2} + \tau_k \cdot \sin(\theta)^2 \right] = 1 \quad \text{уравнение, которому удовлетворяет } \tau_k$$

θ_k - параметр потока в точке K

$$\theta_k := \operatorname{asin} \left(\tau_k^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta) \right) \quad \theta_k = 0.811$$

4. Задаваясь значениями x от 0 до 80 с шагом 4 см, получаем значения $\tau(x)$ (фрагмент программы 4.11).

Фрагмент программы 4.11 – Задание значений x и $\tau(x)$ в опыте № 1

x - задает значение от 0 до 80 с шагом 4

$x := 0, 4.. 80$

$$\tau(x) := \text{root} \left[x - \frac{A \cdot h_0}{2 \cdot H_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}} \cdot \left[\frac{1 + \tau}{\tau \cdot (1 - \tau)} - \frac{2 \cdot \sin(\theta)^2}{1 - \tau} - \ln \left(\frac{1 - \tau}{\tau} \right) - \frac{1 + \tau k}{\tau k \cdot (1 - \tau k)} + \ln \left(\frac{1 - \tau k}{\tau k} \right) + \frac{2 \cdot \sin(\theta)^2}{1 - \tau k} \right], \tau, \tau_0, 0.999999999999999 \right]$$

$\tau(x)$ - выводит вычисленные значения корней, соответствующих значениям

$x = (0, 4..80)$

$$\tau \left[\begin{matrix} (x \text{ T}) \\ 0 \end{matrix} \right] = 0.70749$$

$$\tau \left[\begin{matrix} (x \text{ T}) \\ 1 \end{matrix} \right] = 0.8542$$

$$\tau \left[\begin{matrix} (x \text{ T}) \\ 2 \end{matrix} \right] = 0.964$$

$$\tau \left[\begin{matrix} (x \text{ T}) \\ 3 \end{matrix} \right] = 0.98$$

$$\tau \left[\begin{matrix} (x \text{ T}) \\ 4 \end{matrix} \right] = 0.986$$

$\tau(x) =$
0.7075
0.8542
0.9065
0.9323
0.9473
0.957
0.9638
0.9688
0.9726
0.9756
0.978
0.98
0.9816
0.983

По заданным значениям x и полученным значениям $\tau(x)$ вычисляем значения y . Далее выбираем те значения y , которые соответствуют экспериментальным значениям x , и сводим в таблицу (фрагмент программы 4.12).

Фрагмент программы 4.12 – Вычисление значений $y(x)$ в опыте № 1

$$y(x) := \frac{b}{2} + \frac{A \cdot h_0 \cdot \sin(\theta)}{H_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}} \cdot \left[\frac{\sqrt{1 - \tau(x) \cdot \sin^2(\theta)}}{\sqrt{\tau(x) \cdot (1 - \tau(x))}} - \frac{\cos(\theta k)}{\sqrt{\tau k \cdot (1 - \tau k)}} \right]$$

x =	y(x) =
0	8
4	12.821
8	18.353
12	24.234
16	30.319
20	36.538
24	42.849
28	49.224
32	55.652
36	62.119
40	68.621
44	75.149
48	81.699
52	88.268
56	94.852
60	101.45
64	108.062
68	116.341

$y \left[\left(x_{\text{Э}}^T \right)_0 \right] = 8$
 $y \left[\left(x_{\text{Э}}^T \right)_1 \right] = 12.821$
 $y \left[\left(x_{\text{Э}}^T \right)_2 \right] = 42.849$
 $y \left[\left(x_{\text{Э}}^T \right)_3 \right] = 75.149$
 $y \left[\left(x_{\text{Э}}^T \right)_4 \right] = 108.062$
 $y \left[\left(x_{\text{Э}}^T \right)_5 \right] = 116.341$

Для сравнения приводим теоретические и экспериментальные значения y при экспериментальных значениях x (фрагмент программы 4.13).

Фрагмент программы 4.13 – Теоретические и экспериментальные значения $y(x)$ в опыте № 1

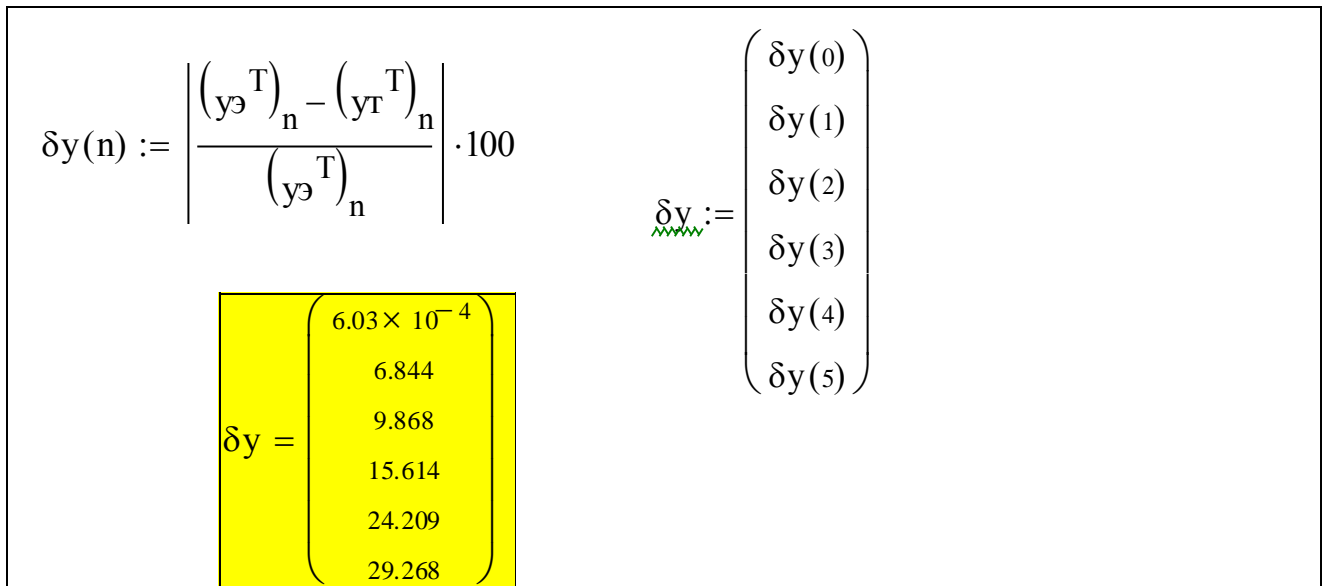
$x_{\text{Э}} = (0 \ 4 \ 24 \ 44 \ 64 \ 69)$

$y_{\text{Э}} = (8 \ 12 \ 39 \ 65 \ 87 \ 90)$

$y_{\text{T}} = (8 \ 12.821 \ 42.849 \ 75.149 \ 108.062 \ 116.341)$

5. Далее определяем проценты расхождения теоретических и экспериментальных значений (фрагмент программы 4.14).

Фрагмент программы 4.14 – Расхождение теоретических и экспериментальных значений в опыте № 1



Из результатов сравнения относительного рассогласования ординат крайней линии тока в теории и эксперименте видно, что при $\beta = \frac{y_3}{b/2} = \frac{65}{8} \approx 8,1$ погрешность не превышает 15,6 %. Далее приводим распечатку графиков координат крайней линии тока (экспериментальной и теоретической) на рисунке 4.5 с указанием линий относительного расширения потока $\beta = 5$ и $\beta = 8$. На этом же рисунке, который выдает пакет программ в автоматическом режиме, приведены точечные характеристики крайних линий тока и интегральные характеристики (угол растекания потока β и расстояние до створа полного растекания потока L_p) [79].

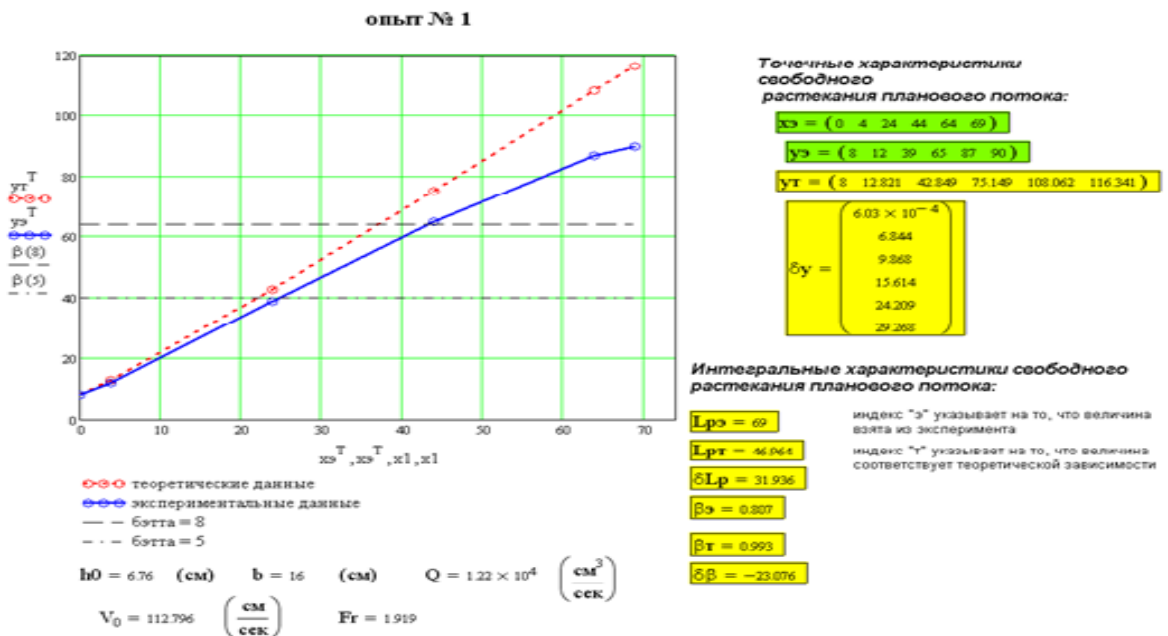


Рисунок 4.5 – Графики координат крайней линии тока и характеристики свободного растекания планового потока в опыте № 1

На рисунке 4.6 приведены графики сравнения четырех крайних линий тока: теоретической; экспериментальной; по методу И.А. Шеренкова; по методу Г.А. Лилицкого.

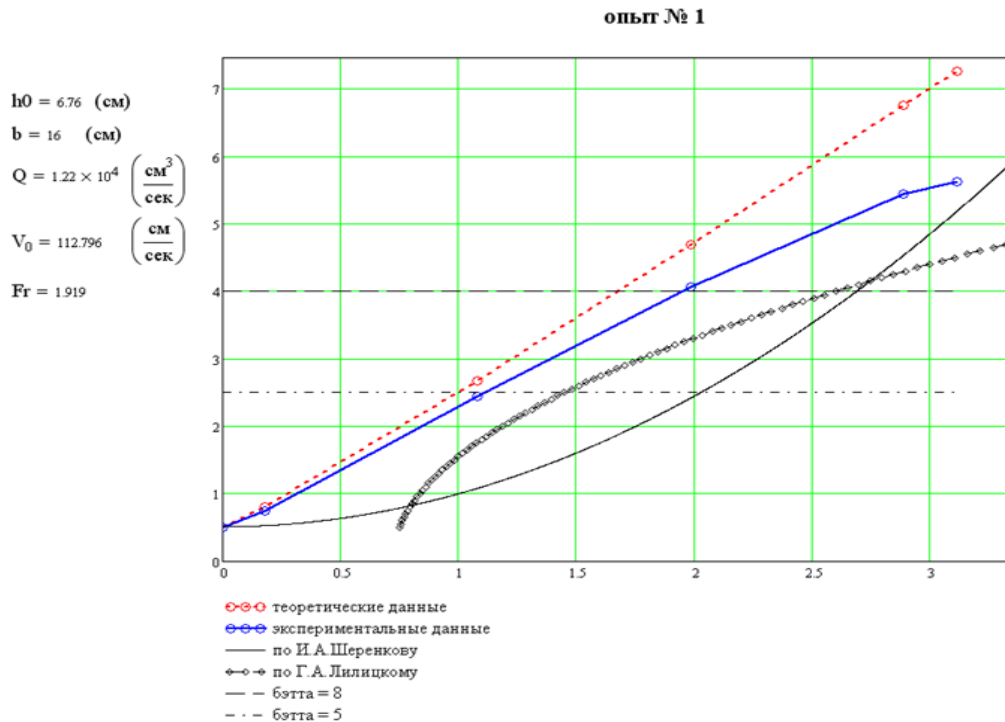


Рисунок 4.6 – Графики сравнения экспериментальной линии тока с полученными по методам автора, И.А. Шеренкова и Г.А. Лилицкого в опыте № 1

ВЫВОДЫ ПО ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ

В настоящей главе подробно описаны алгоритмы и программы для получения информации в любой точке потока. Эта информация может быть использована проектировщиками гидротехнических и дорожных водопропускных сооружений. Программы работают и дают однозначный устойчивый результат. Это комплексные программы, которые дают информацию о всех параметрах потока:

- геометрии области растекания потока;
- глубинах и скоростях потока в точках пересечения произвольной линии тока с произвольной эквипотенциалью.

Из распечаток сравнения геометрии крайних экспериментальных и модельных линий тока видно, что:

- модельные линии тока наиболее точно приближены к экспериментальным по сравнению с линиями тока, определенными по методу И.А. Шеренкова и Г.А. Лилицкого, т.е. просматривается несомненное улучшение адекватности модели;

- рассогласование по координатам точек между моделью и экспериментом в пределах расширений потока, ограниченных значениями $\beta = 5 \div 7$, находится в пределах 14-25%. При $\beta = 5$ отмеченные рассогласования не превосходят 10 %.

Сравнение результатов проводится при $\beta = 5 \div 7$, так как в типовых проектах дорожных водоотводов ширина крепления отводящего русла выбирается обычно из условия $\beta = \frac{B}{b} = 3 \div 5$.

Заметим, что модельные кривые крайних линий тока проходят несколько выше экспериментальных в отличие от кривых по методам И.А. Шеренкова и Г.А. Лилицкого, что обеспечивает определенный запас надежности в выборе крепления отводящего русла водопропускных сооружений. Наряду с этим следует вывод о необходимости учета сил сопротивления потоку для дальнейшего улучшения показателей адекватности модели реальному процессу.

5 КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ ПОТОКА

5.1 ГЕОМЕТРИЯ КРАЙНЕЙ ЛИНИИ ТОКА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИН И СКОРОСТЕЙ ВДОЛЬ КРАЙНЕЙ ЛИНИИ ТОКА ПРИ РАЗНЫХ ЧИСЛАХ ФРУДА

Для исследования геометрии, а также распределения глубин и скоростей вдоль крайней линии тока были рассмотрены пять вариантов следующих исходных данных.

Ширина трубы принималась разной: $b = 8; 12; 16; 20; 24$ см. Глубины на выходе из трубы взяты разные и составили: $h_0 = 10; 14; 18; 22; 26$ см. Числа Фруда взяты разные и составили: $Fr = 8; 10; 15; 20; 25$.

Разные числа Фруда $Fr = 8; 10; 15; 20; 25$ вводятся в программу при расчете скоростей (фрагмент программы 5.1).

Фрагмент программы 5.1 – Расчёт скоростей

$$V_0 := \begin{bmatrix} \text{root} \left[8 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_0}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[10 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_1}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[15 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_2}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[20 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_3}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[25 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_4}}, V_0, 0, 1000000 \right] \end{bmatrix}$$

$V_0 =$

280.143
370.594
514.655
656.993
798.53

V_0 - величина скорости потока
на его выходе из трубы

Для контроля вводимых значений критерия Фруда сделаем дополнительный вывод на экран этих значений (фрагмент программы 5.2).

Фрагмент программы 5.2 – Вывод значений критерия Фруда

$$Fr(n) := \frac{(V_{0_n})^2}{g \cdot h_{0_n}}$$

$Fr(n) =$

8
10
15
20
25

Fr - критерий Фруда

Рассчитываем постоянные величины для пяти вариантов (фрагмент программы 5.3).

Фрагмент программы 5.3 – Расчёт постоянных величин

$$H_0(n) := h_{0n} + \frac{(V_{0n})^2}{2 \cdot g}$$

$H_0(n) =$
50
84
153
242
351

H_0 - постоянная в интеграле Бернулли

$$\tau_0(n) := \frac{(V_{0n})^2}{2 \cdot g \cdot H_0(n)}$$

$\tau_0(n) =$
0.8
0.833
0.882
0.909
0.926

τ_0 - квадрат скоростного коэффициента

$$C1(n) := \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0(n) - 1}{1 - \tau_0(n)}} \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0(n) - 1}{1 - \tau_0(n)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$C1(n) =$
-0.507
-0.565
-0.66
-0.72
-0.763

$$\theta(n) := C1(n) + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$\theta(n) =$
0.64259836
0.58514913
0.48975228
0.42959704
0.38725687

θ - угол растекания потока на бесконечности при отсутствии сил трения потоку (θ_{\max})

$$A(n) := \frac{V_{0n} \cdot b_n}{2 \cdot \sin(\theta(n))}$$

$A(n) =$
$1.87 \cdot 10^3$
$4.026 \cdot 10^3$
$8.753 \cdot 10^3$
$1.577 \cdot 10^4$
$2.537 \cdot 10^4$

A - постоянная, определяемая из условия отсекания крайней линии тока и осью симметрии 50% всего расхода потока

Продолжение программы 5.3

$$\tau_k(n) := \text{root} \left[\left[\frac{[\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2]}{[\tau_0(n) \cdot (1 - \tau_0(n))^2]} + \tau_k \cdot (\sin(\theta(n)))^2 - 1 \right], \tau_k, \tau_0(n), 1 \right]$$

$\tau_k(n) =$

0.836393
0.85897934
0.89542282
0.91699471
0.93121617

τ_k - квадрат скоростного коэффициента

$$\theta_k(n) := \text{asin} \left[(\tau_k(n))^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta(n)) \right]$$

$\theta_k(n) =$

0.58
0.537
0.461
0.41
0.373

θ_k - параметр потока

Для построения теоретической кривой крайней линии тока необходимо решить систему из 2-х уравнений, приведенную в главе 3, относительно x и y . Для этого, задавшись значениями x , находим значения параметра $\tau(x)$. По параметру $\tau(x)$ определим $y(\tau)$ (фрагмент программы 5.4).

Фрагмент программы 5.4 – Расчёт величин $\tau(x)$ и $y(\tau)$

$x := 0, 1..100$ x - задает значение от 0 до 100 с шагом 1

$\tau(x)$ - выводит вычисленные значения корней соответствующих значениям $x = (0, 1..100)$ удовлетворяет неравенству $\tau_0 < \tau(x) < 1$

$$\tau(x, n) := \text{root} \left[x - \frac{A(n) \cdot h_0 n}{2 \cdot H_0(n) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0(n)}} \cdot \left[\frac{1 + \tau}{\tau \cdot (1 - \tau)} - \frac{2 \cdot (\sin(\theta(n)))^2}{(1 - \tau)} - \ln \left[\frac{(1 - \tau)}{\tau} \right] \right] - \frac{1 + \tau_k(n)}{\tau_k(n) \cdot (1 - \tau_k(n))} + \ln \left[\frac{(1 - \tau_k(n))}{\tau_k(n)} \right] + \frac{2 \cdot (\sin(\theta(n)))^2}{(1 - \tau_k(n))} \right], \tau, \tau_0(n), 0.9999999999999999$$

Продолжение фрагмента программы 5.4

$\tau(x,0) =$	$\tau(x,1) =$	$\tau(x,2) =$
0.83638644151932	0.858974327345374	0.895420714345761
0.862771186704289	0.873208712585268	0.901999140117666
0.882040687669311	0.884916573542315	0.90782077544421
0.896718594605717	0.894703803314716	0.913010447701509
0.90823850852911	0.903005353859666	0.917652370727052
0.917504997530006	0.910119123038178	0.921836517095658
0.925118255321109	0.916287743769395	0.92562459040363
0.931471320232903	0.921683468959672	0.929069588147917
0.936851942876267	0.926439724283109	0.932218371003095
0.941467823091432	0.930663175313425	0.935100417570392
0.945461940659013	0.934438912000925	0.937752227668584
0.948955993492602	0.937835218400874	0.940199987939077
0.952036787032324	0.940900052974958	0.942465838732301
0.954771925814279	0.943682775983385	0.944568767372503
0.957216081927277	0.946219631502997	0.946525443383986
0.95941357417019	0.948541483661714	0.948350545263412
$\tau(x,3) =$	$\tau(x,4) =$	
0.916993753578773	0.931215686464322	
0.920644073703754	0.933482203742703	
0.92399326509844	0.935606459809249	
0.927080370345076	0.937603906629838	
0.929926742518098	0.939481491990919	
0.932568131766755	0.9412511203154	
0.935016487625865	0.942920311272233	
0.937297677001062	0.944501517979608	
0.939426743167477	0.945997192322448	
0.941418255312843	0.947415610172405	
0.943284993355615	0.948762439910794	
0.94503821291801	0.950042920338672	
0.946687864774867	0.951261794494041	
0.94824277761612	0.952423366654185	
0.949711743695241	0.953531551680885	
0.951099371394596	0.954589917878683	
<p>Полученные значения $\tau(x)$ подставим в выражение для нахождения поперечной координаты $y(x)$</p> $y(x,n) := \frac{b_n}{2} + \frac{A(n) \cdot h_0 \cdot \sin(\theta(n))}{(H_0(n)) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0(n)}} \left[\frac{\sqrt{1 - (\tau(x,n)) \cdot (\sin(\theta(n)))^2}}{\sqrt{\tau(x,n) \cdot (1 - \tau(x,n))}} - \frac{\cos(\theta k(n))}{\sqrt{\tau k(n) \cdot (1 - \tau k(n))}} \right]$		

В итоге полученный результат можно представить графически в виде зависимостей $y(x, n)$, представленных на рисунке 5.1. Из рисунка видим, что все графики выходят из разных точек. Это связано с тем, что в каждом варианте была принята разная ширина трубы. Разный наклон графиков характеризуется углами $\theta_k(n)$, получаемыми при разных значениях Фруда. Значения $\theta_k(n)$ в зависимости от чисел Фруда приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Зависимость θ_k от чисел Фруда Fr

Fr	8	10	15	20	25
θ_k	0,58	0,537	0,461	0,41	0,373

Из таблицы следует, что с увеличением чисел Фруда θ_k уменьшается, т.е. чем больше число Фруда, тем степень растекания потока меньше.

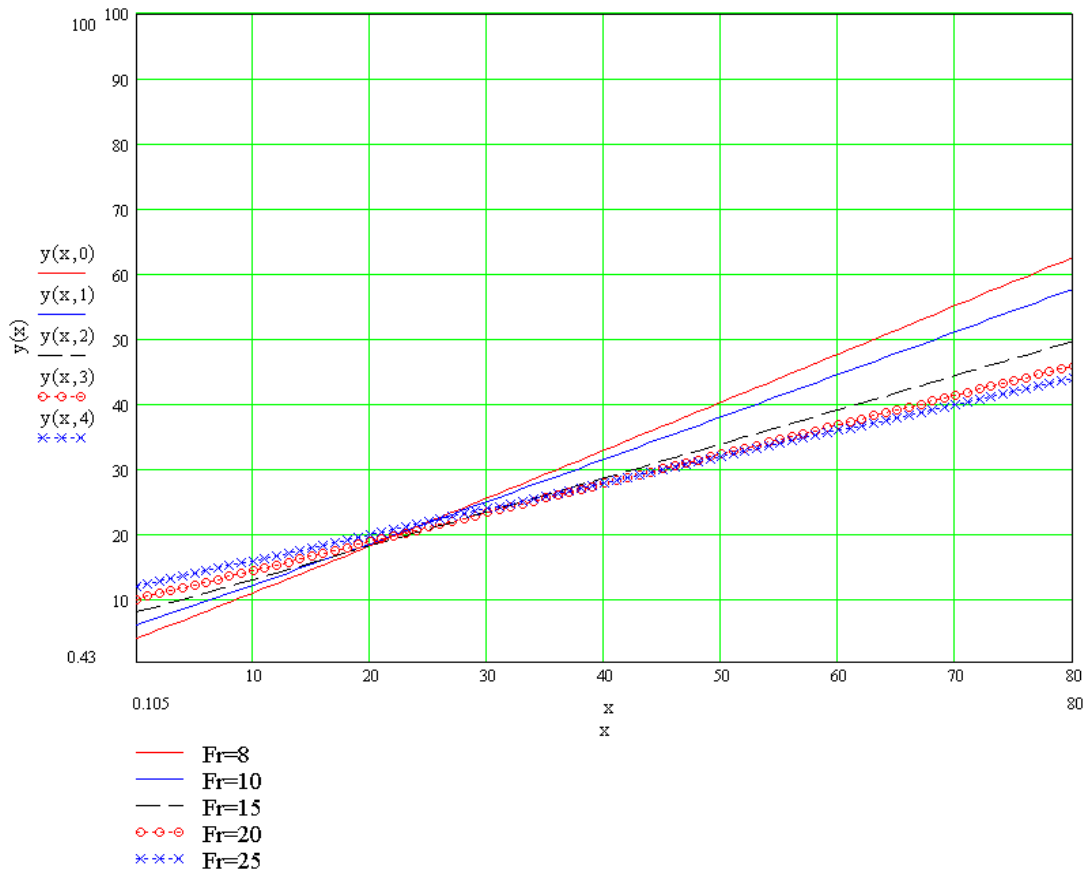


Рисунок 5.1 – Графики крайних линий тока для пяти вариантов в зависимости от числа Фруда на выходе потока из трубы

Аналогичные зависимости можно представить и в безразмерных координатах. На рисунке 5.2 представлена зависимость $\frac{y(x, n)}{b_n}$ от $\frac{x}{b_n}$, где n меняется в пределах от 0 до 4 с шагом, равным единице. Видим, что графики выходят из одной точки и сохраняется зависимость: с увеличением чисел Фруда θ_k уменьшается, т.е. чем больше число Фруда,

тем степень растекания потока меньше, и наоборот. Крайние линии тока расширяются монотонно без скачков и разрывов.

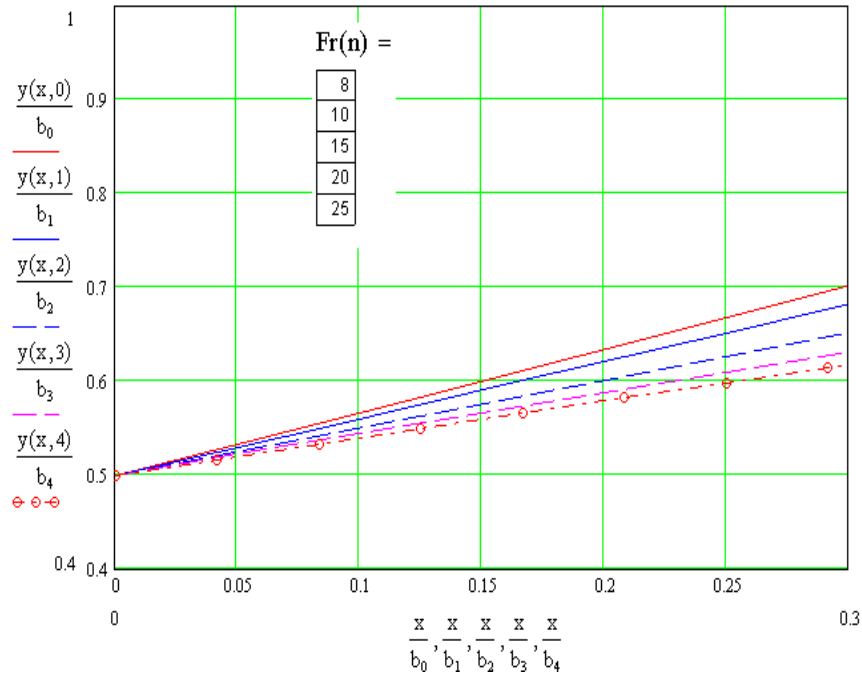


Рисунок 5.2 – Графики расположения крайних линий тока для пяти вариантов в безразмерных координатах

Выполним построение зависимостей относительных значений глубин $\frac{h(x,n)}{h_{0_n}}$ и скоростей $\frac{V(x,n)}{V_{0_n}}$ потока для крайней линии тока при введенных значениях параметра Фруда от расстояния вдоль оси потока. Относительные параметры определяются из выражений:

$$h(x,n) = \frac{H_0(n) \cdot [1 - \tau(x,n)]}{h_{0_n}}; \quad V(x,n) = \frac{\sqrt{2gH_0(n)\tau(x,n)}}{V_{0_n}}.$$

Графики изменения относительных глубин показаны на рисунке 5.3, а графики изменения относительных скоростей показаны на рисунке 5.4.

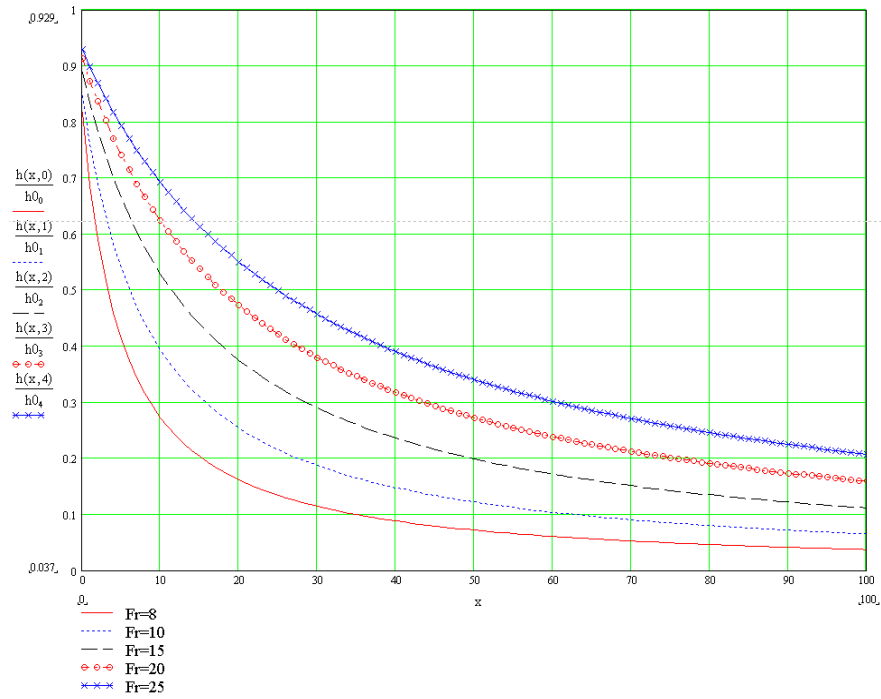


Рисунок 5.3 – Графики изменения относительных глубин вдоль крайних линий тока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда

Из рисунка 5.3 следует, что с увеличением чисел Фруда степень пологости относительных глубин на крайней линии тока уменьшается.

Из рисунка 5.4 следует, что с увеличением чисел Фруда графики относительных скоростей располагаются ближе к оси θx , т.е. относительные скорости меньше.

Полученные значения глубин можно отнести к значениям, достигаемым на начальной эквипотенциали $h(0, n)$, тем самым добиться того, что все кривые будут выходить из 1 (рисунок 5.5). Из графиков, приведенных на рисунке 5.5, следует, что с увеличением чисел Фруда величины относительных глубин возрастают, хотя на каждом из графиков с возрастанием x они монотонно убывают.

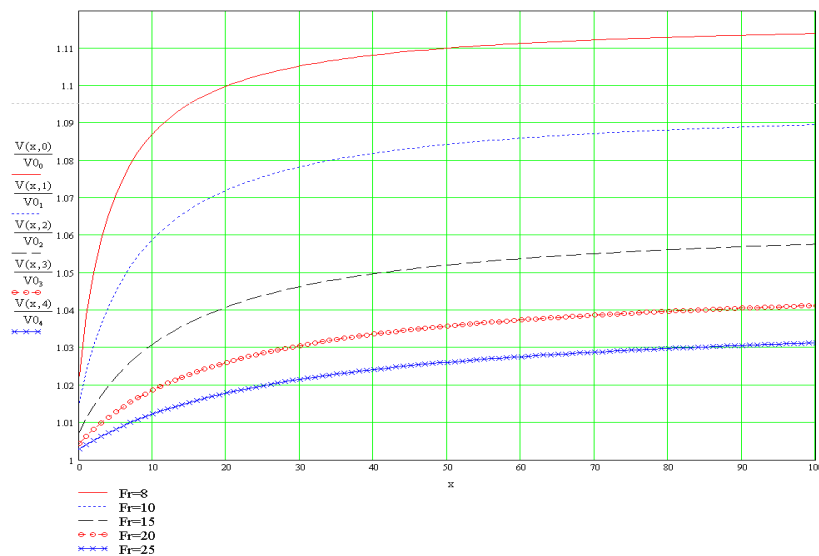


Рисунок 5.4 – Графики изменения относительных скоростей вдоль крайних линий тока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда

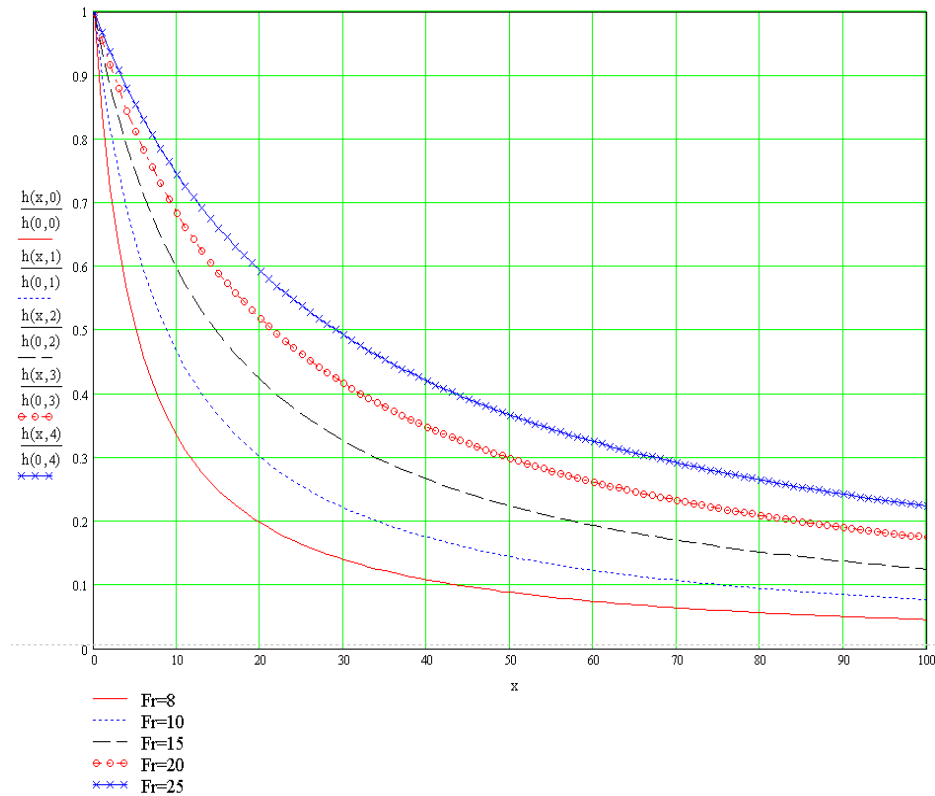
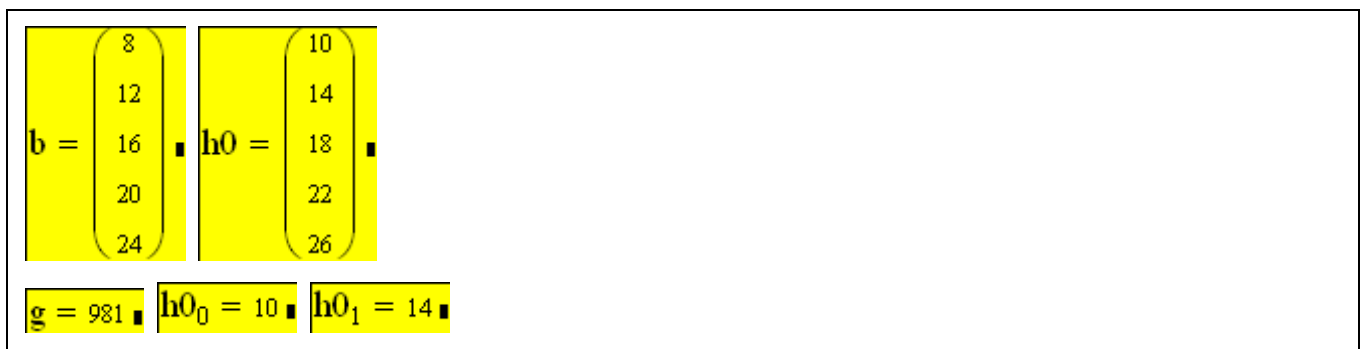


Рисунок 5.5 – Графики изменения относительных глубин вдоль крайних линий тока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда (глубины отнесены к глубинам на начальных эквипотенциалах)

5.2 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИН И СКОРОСТЕЙ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ ПОТОКА ПРИ РАЗНЫХ ЧИСЛАХ ФРУДА

Выполним построение зависимостей приведенных значений глубин $\frac{h(x,n)}{h_{0_n}}$ и скоростей $\frac{V(x,n)}{V_{0_n}}$ потока вдоль оси симметрии при введенных значениях параметра Фруда (фрагмент программы 5.6).

Фрагмент программы 5.6 – Расчёт приведенных значений глубин и скоростей вдоль оси симметрии потока



$\tau_0(n) =$	$H_0(n) =$	$A(n) =$	$\tau_k(n) =$
0.8	50	$1.87 \cdot 10^3$	0.836
0.833	84	$4.026 \cdot 10^3$	0.859
0.882	153	$8.753 \cdot 10^3$	0.895
0.909	242	$1.577 \cdot 10^4$	0.917
0.926	351	$2.537 \cdot 10^4$	0.931

$$xD(n) := \frac{b_n \cdot (1 - \cos(\theta_k(n)))}{2 \cdot \sin(\theta_k(n))}$$

$xD(n) =$
1.193762
1.652138
1.878721
2.080543
2.264444

$$p1(n) := \begin{cases} \text{ind} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0, 1 \dots 100 \\ \quad \left| \begin{array}{l} p1_{\text{ind}} \leftarrow xD(n) + 0.00001 + i \\ \text{ind} \leftarrow \text{ind} + 1 \end{array} \right. \\ p1 \end{cases}$$

$p1(n)$ - параметр, соответствующий продольной координате с шагом 1

$p1(i) =$	
	0
	1.652
	2.652
	3.652
	4.652
	5.652
	6.652
	7.652
	8.652
	9.652
	10.652
	11.652
	12.652
	13.652
	14.652
	15.652
	16.652

Продолжение фрагмента программы 5.6

$x1 := 0,4..100$

$x1$ - параметр, соответствующий номеру ячейки с продольной координатой, т.е. шаг, равный 4, соответствует выбору каждого четвертого значения по порядку из полученных для $p1(n)$

$$\tau1A(n,x1) := \text{root} \left[\left[xD(n) + \frac{A(n) \cdot h0_n}{2 \cdot H0(n) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H0(n)}} \cdot \left[\frac{1 + \tau}{\tau \cdot (1 - \tau)} - \ln \left(\frac{1 - \tau}{\tau} \right) \right] - \frac{1 + \tau0(n)}{\tau0(n) \cdot (1 - \tau0(n))} + \ln \left(\frac{1 - \tau0(n)}{\tau0(n)} \right) \right] - p1(n)_{x1} \right], \tau, \tau0(n), 0.9999999$$

$$h_{oc}(n,x1) := H0(n) \cdot (1 - \tau1A(n,x1))$$

$$V_{oc}(n,x1) := (\tau1A(n,x1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H0(n)}$$

$\tau1A(0,x1)$
0.8
0.877
0.912
0.931
0.944
0.952
0.959
0.964
0.968
0.971
0.973
0.975
0.977
0.979
0.98
0.982

$h0$
10
14
18
22
26

$V0$
280.143
370.594
514.655
656.993
798.53

$h_{oc}(0,x1)$
10
6.16
4.424
3.441
2.812
2.376
2.056
1.811
1.618
1.462
1.333
1.225
1.133
1.054
0.985
0.925

$V_{oc}(0,x1)$
280.143
293.281
299.034
302.238
304.273
305.677
306.703
307.485
308.1
308.596
309.006
309.348
309.64
309.89
310.108
310.3

Результаты расчетов приведены в виде графиков распределения глубин и скоростей вдоль оси потока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда. На рисунке 5.6 показаны графики изменения глубин, на рисунке 5.7 – графики изменения скоростей, на рисунке 5.8 – графики изменения относительных глубин, на рисунке 5.9 – графики изменения относительных скоростей.

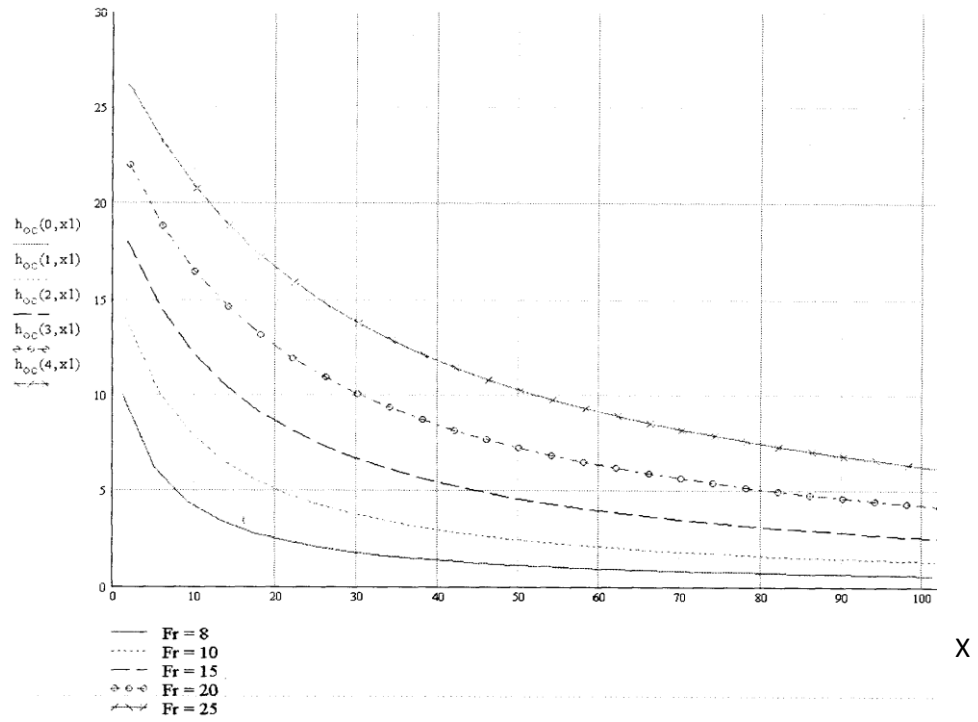


Рисунок 5.6 – Графики изменения глубин вдоль оси потока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда

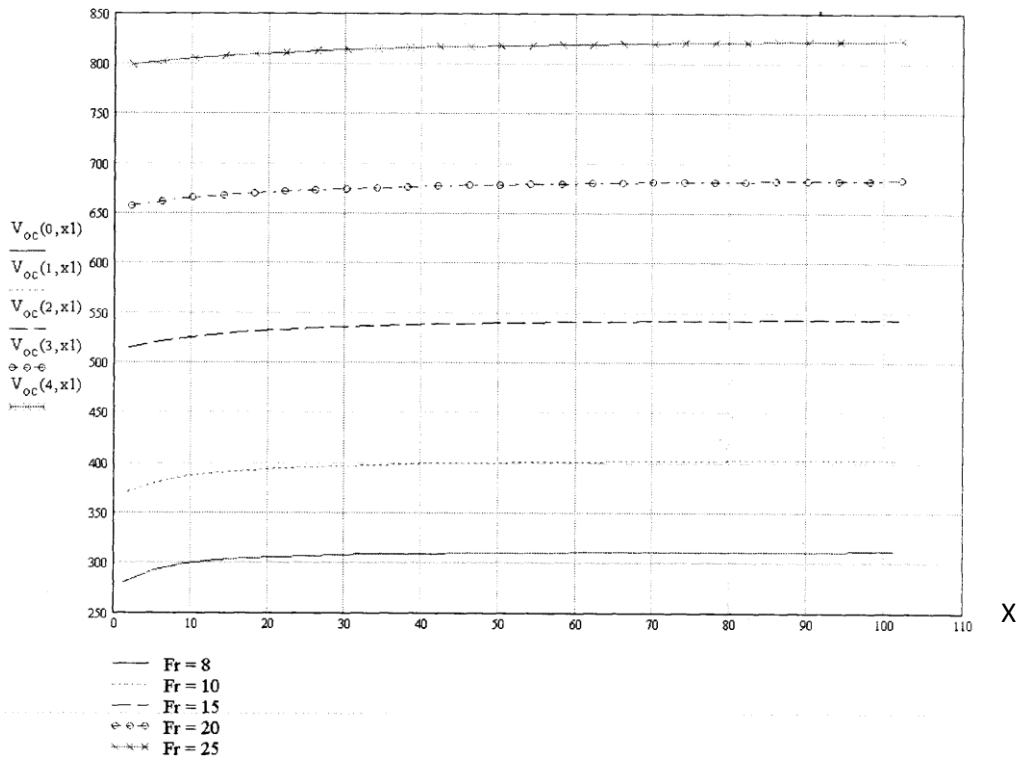


Рисунок 5.7 – Графики изменения скоростей вдоль оси потока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда

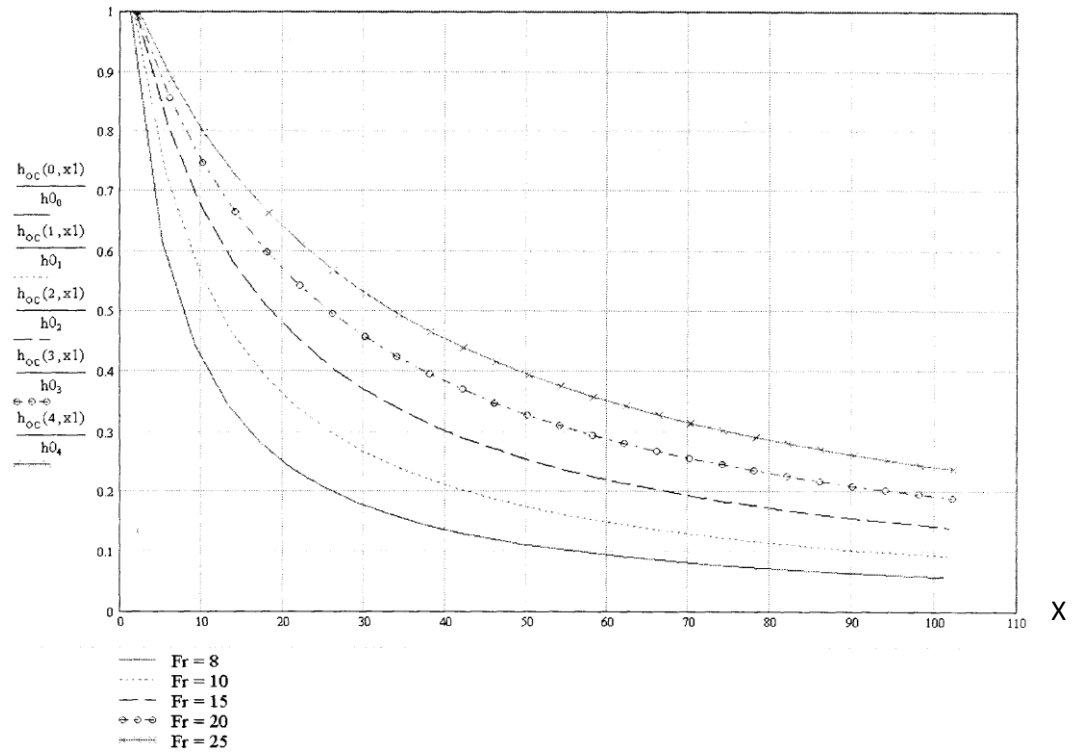


Рисунок 5.8 – Графики изменения относительных глубин вдоль оси потока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда

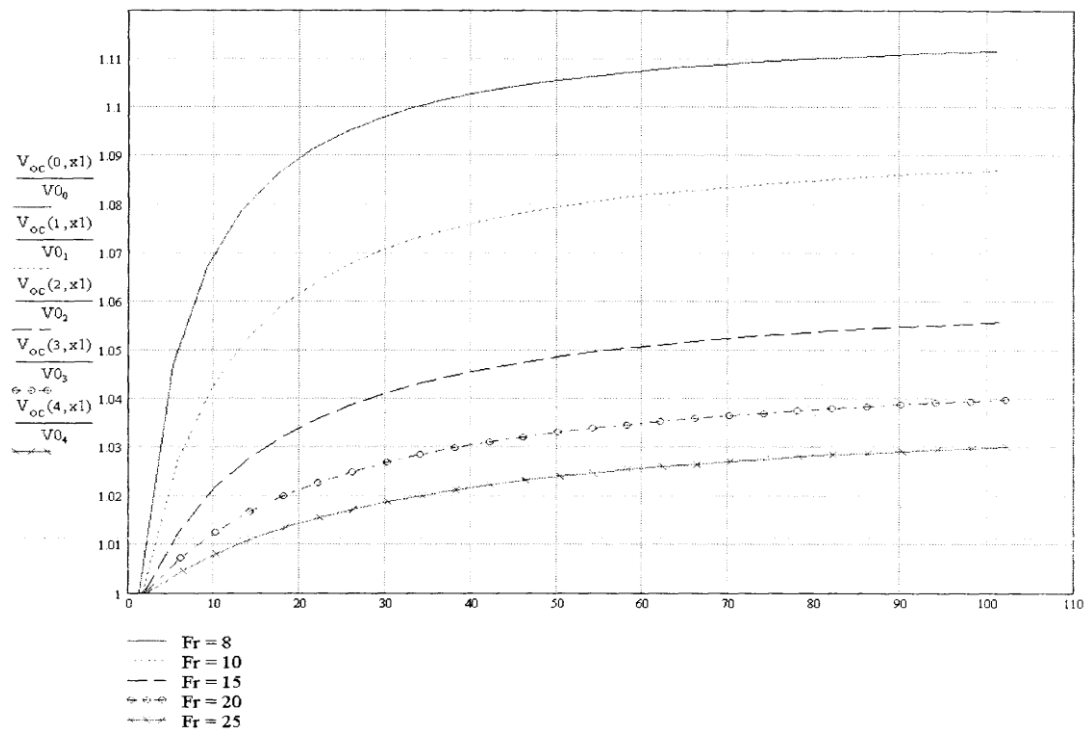


Рисунок 5.9 – Графики изменения относительных скоростей вдоль оси потока для пяти вариантов в зависимости от критерия Фруда

5.3 ГЕОМЕТРИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИН И СКОРОСТЕЙ ВДОЛЬ КРАЙНЕЙ ЛИНИИ ТОКА ПРИ ОДИНАКОВЫХ ЧИСЛАХ ФРУДА

Для исследования геометрии, а также распределения глубин и скоростей вдоль крайней линии тока при одинаковых числах Фруда были рассмотрены следующие исходные данные.

Ширина трубы взята разной для всех пяти вариантов: $b = 8; 12; 16; 20; 24$ см. Глубины на выходе из трубы взяты разные и составили: $h_0 = 10; 14; 18; 22; 26$ см. Числа Фруда взяты одинаковые и составили 7. На компьютере исходные данные выглядят следующим образом (Фрагмент программы 5.7).

Фрагмент программы 5.7 – Ввод исходных данных

$n := 0, 1.. 4$

$g := 981$

$h_0 := \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 18 \\ 22 \\ 26 \end{pmatrix}$

$b := \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$

Исходные данные модели:
 b - ширина прямоугольной трубы, $[b]=[см]$
 h_0 - глубина потока на его выходе из трубы, $[h_0]=[см]$
 g - ускорение силы тяжести, $[g]=[см/сек^2]$
 n - число вводимых значений величин b, h_0

Числа Фруда взяты равными 7 и вводятся в программу при расчете скоростей (Фрагмент программы 5.8).

Фрагмент программы 5.8 – Расчёт скоростей

$V_0 := \begin{bmatrix} \text{root} \left[7 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_0}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[7 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_1}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[7 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_2}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[7 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_3}}, V_0, 0, 1000000 \right] \\ \text{root} \left[7 - \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_{0_4}}, V_0, 0, 1000000 \right] \end{bmatrix}$

$V_0 = \begin{pmatrix} 262.05 \\ 310.061 \\ 351.576 \\ 388.682 \\ 422.542 \end{pmatrix}$

V_0 - величина скорости потока на его выходе из трубы

Для контроля вводимых значений критерия Фруда сделаем дополнительный вывод на экран этих значений (Фрагмент программы 5.9).

Фрагмент программы 5.9 – Вывод значений критерия Фруда

$$Fr(n) := \frac{(V0_n)^2}{g \cdot h0_n}$$

$Fr(n) =$ Fr - критерий Фруда

7
7
7
7
7

Далее рассчитываем начальные параметры, которые необходимы для дальнейших расчетов (фрагмент программы 5.10).

Фрагмент программы 5.10 – Расчёт постоянных величин

$$H0(n) := h0_n + \frac{(V0_n)^2}{2 \cdot g}$$

$H0(n) =$ H_0 - постоянная в интеграле Бернулли

45
63
81
99
117

$$\tau0(n) := \frac{(V0_n)^2}{2 \cdot g \cdot H0(n)}$$

$\tau0(n) =$ τ_0 - квадрат скоростного коэффициента

0.778
0.778
0.778
0.778
0.778

$$C1(n) := \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau0(n) - 1}{1 - \tau0(n)}}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau0(n) - 1}{1 - \tau0(n)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$C1(n) =$

-0.471
-0.471
-0.471
-0.471
-0.471

$$\theta(n) := C1(n) + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

 $\theta(n) =$

0.67844544
0.67844544
0.67844544
0.67844544
0.67844544

θ - угол растекания потока на бесконечности при отсутствии сил трения потока (θ_{\max})

$$A(n) := \frac{V0_n \cdot b_n}{2 \cdot \sin(\theta(n))}$$

 $A(n) =$

1.67·10 ³
2.964·10 ³
4.482·10 ³
6.193·10 ³
8.079·10 ³

A - постоянная, определяемая из условия отсекания крайней линии тока и осью симметрии 50% всего расхода потока

$$\tau_k(n) := \text{root} \left[\left[\frac{[\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2]}{[\tau_0(n) \cdot (1 - \tau_0(n))^2]} + \tau_k \cdot (\sin(\theta(n)))^2 - 1 \right], \tau_k, \tau_0(n), 1 \right]$$

 $\tau_k(n) =$

0.82228677
0.82228677
0.82228677
0.82228677
0.82228677

τ_k - квадрат скоростного коэффициента

$$\theta_k(n) := \text{asin} \left[(\tau_k(n))^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta(n)) \right]$$

 $\theta_k(n) =$

0.605
0.605
0.605
0.605
0.605

θ_k - параметр потока

После определения указанных выше параметров начинаем теоретические исследования при неизменных числах Фруда.

Для построения теоретической кривой крайней линии тока необходимо решить систему из 2-х уравнений относительно x и y . Для этого, задавшись значениями x , найдем значения параметра $\tau(x)$. По параметру $\tau(x)$ определим $y(\tau)$ (Фрагмент программы 5.11).

Фрагмент программы 5.11 – Расчёт величин $\tau(x)$ и $y(\tau)$

$x := 0, 1.. 100$

x - задает значение от 0 до 100 с шагом 1

$\tau(x)$ - выводит вычисленные значения корней соответствующих значениям $x = (0, 1.. 100)$ удовлетворяет неравенству $\tau_0 < \tau(x) < 1$

$$\tau(x, n) := \text{root} \left[x - \frac{A(n) \cdot h_0 n}{2 \cdot H_0(n) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0(n)}} \cdot \left[\frac{1 + \tau}{\tau \cdot (1 - \tau)} - \frac{2 \cdot (\sin(\theta(n)))^2}{(1 - \tau)} - \ln \left[\frac{(1 - \tau)}{\tau} \right] - \frac{1 + \tau k(n)}{\tau k(n) \cdot (1 - \tau k(n))} + \ln \left[\frac{(1 - \tau k(n))}{\tau k(n)} \right] + \frac{2 \cdot (\sin(\theta(n)))^2}{(1 - \tau k(n))} \right], \tau, \tau_0(n), 0.999999999999999 \right]$$

$\tau(x, 0) =$

0.822280052378508
0.852909774439841
0.874822354149881
0.89124987569931
0.903979669338329
0.914119487035334
0.922375113243152
0.929216608210092
0.934978584405618
0.939886423966717
0.944120798427889
0.947808692607468
0.951047416455686
0.953914083272933
0.956469717188206
0.958763091988484

$\tau(x, 1) =$

0.822280052378507
0.843887585768663
0.860970352625926
0.874822354149881
0.886255128211508
0.895839146386487
0.903979669338329
0.910976944012415
0.917056142118216
0.922375113243152
0.927070363779897
0.931243280389574
0.934978584405618
0.93833272345458
0.941365665852014
0.944120798427889

$\tau(x, 2) =$

0.822280052378508
0.838967638162999
0.852892416873521
0.864699834946843
0.874822354149881
0.883589386335375
0.89124987569931
0.897996384241609
0.903979669338329
0.909321420713067
0.914119487035334
0.918453964541325
0.922375113243152
0.925949110309034
0.929216608210092
0.93221480530276

$\tau(x, 3) =$

0.822280052378507
0.83587060041638
0.847603421624591
0.857842849199424
0.866847223671166
0.874822354149881
0.881931848412912
0.8883049086479
0.894049001122138
0.899249820024767
0.903979669338329
0.90829939396569
0.912260082786912
0.915904680809565
0.919265771187155
0.922375113243152

$\tau(x, 4) =$

0.822280052378507
0.833741803120951
0.843872325458745
0.852892416873521
0.860970352625926
0.868243019635107
0.874822354149881
0.880801550261635
0.886255128211508
0.89124987569931
0.895839146386487
0.900069058551987
0.903979669338329
0.907609355057714
0.910980573225435
0.914119487035334

Продолжение фрагмента программы 5.11

Полученные значения $\tau(x)$ подставим в выражение для нахождения поперечной координаты $y(x)$

$$y(x, n) := \frac{b_n}{2} + \frac{A(n) \cdot h_0 \cdot \sin(\theta(n))}{(H_0(n)) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0(n)}} \left[\frac{\sqrt{1 - (\tau(x, n)) \cdot (\sin(\theta(n)))^2}}{\sqrt{\tau(x, n) \cdot (1 - \tau(x, n))}} - \frac{\cos(\theta_k(n))}{\sqrt{\tau_k(n) \cdot (1 - \tau_k(n))}} \right]$$

В итоге полученный результат можно представить графически в виде таблиц или зависимостей $y(x, n)$ (рисунок 5.10). Из графиков видно, что все они параллельны между собой, т.к. имеют одинаковое число Фруда. Выход всех графиков из разных точек объясняется разной исходной шириной трубы.

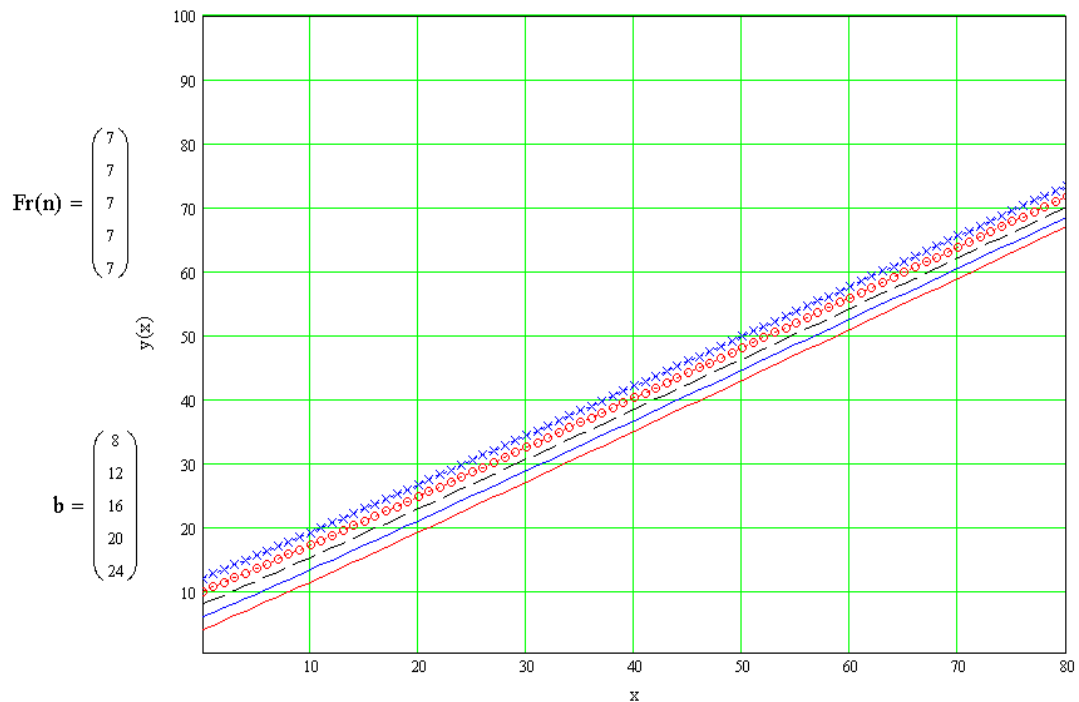


Рисунок 5.10 – Графики зависимости $y(x)$ при одинаковых числах Фруда

Аналогичные зависимости можно представить и в безразмерных координатах.

Зависимость $\frac{y(x, n)}{b_n}$ от $\frac{x}{b_n}$, где n меняется в пределах от 0 до 4 с шагом, равным единице, соотносит представленные на графиках величины с вводимыми ранее значениями чисел Фруда (рисунок 5.11).

Из рисунка 5.11 следует, что в безразмерных координатах все графики слились в одну линию. Это говорит о том, что при одинаковых числах Фруда все крайние линии тока в безразмерных координатах совпадают.

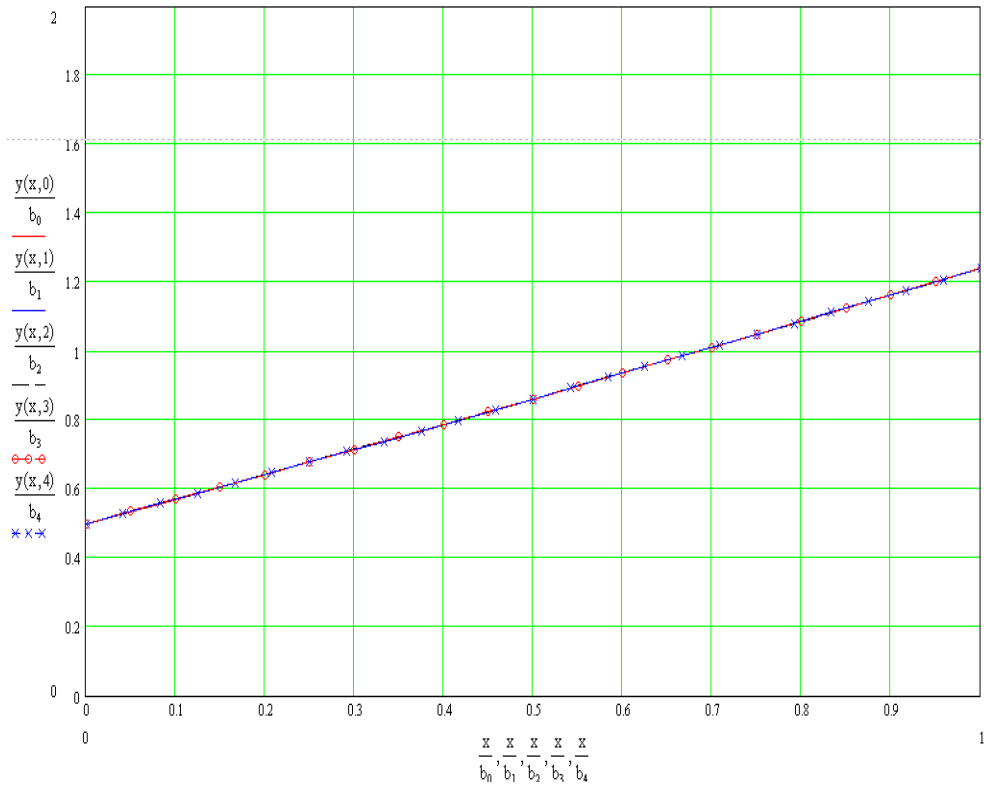


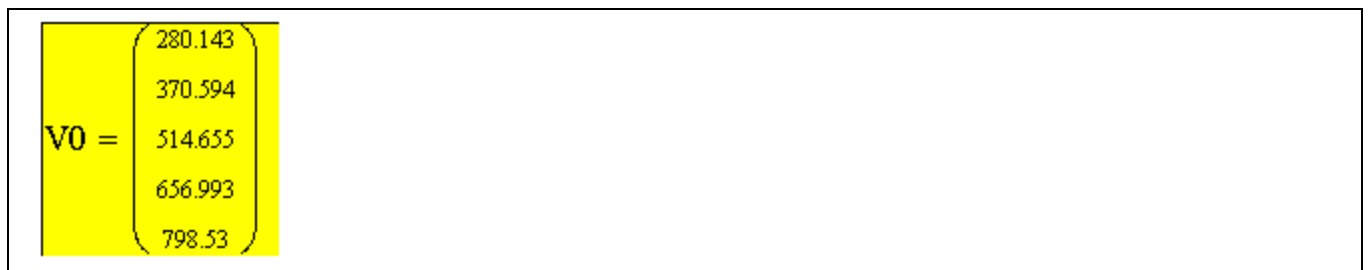
Рисунок 5.11 – Графики зависимости $\frac{y}{b} = f\left(\frac{x}{b}\right)$

Выполним построение зависимостей относительных значений глубин $\frac{h(x,n)}{h_{0n}}$ и скоростей $\frac{V(x,n)}{V_{0n}}$ потока для крайних линий тока при постоянных значениях параметра Фруда в зависимости от расстояния вдоль оси потока (рисунки 5.12, 5.13), используя выражения:

$$h(x,n) = \frac{H_0(n) \cdot [1 - \tau(x,n)]}{h_{0n}}; \quad V(x,n) = \frac{\sqrt{2gH_0(n)\tau(x,n)}}{V_{0n}}.$$

Из рисунка 5.12 видим, что все графики выходят из одной точки, но имеют разную пологость. Последнее объясняется тем, что при одинаковых числах Фруда во всех вариантах имеем разную начальную скорость (Фрагмент программы 5.12).

Фрагмент программы 5.12 – Вывод значений начальных скоростей



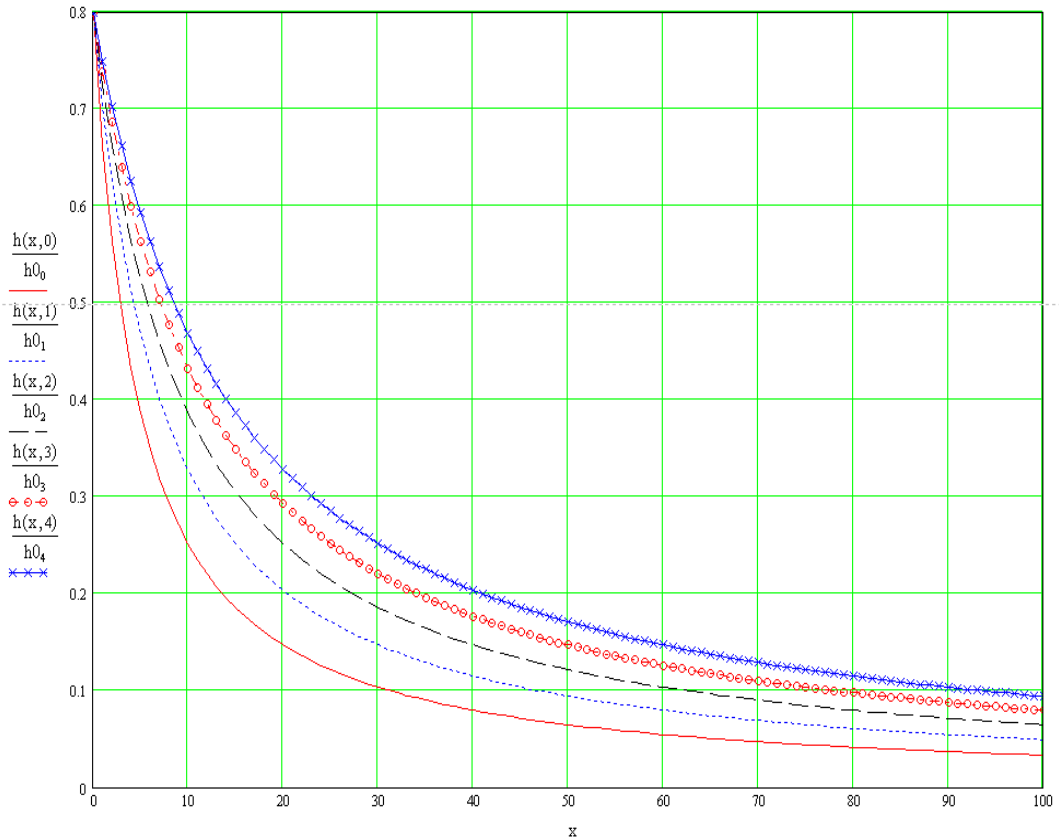


Рисунок 5.12 – Графики зависимости относительных глубин вдоль крайних линий тока

Из графиков видим, что при максимальной скорости $V_0 = 798,53 \text{ см/с}$ имеем менее пологий верхний график, т.е. монотонное убывание относительной глубины происходит менее интенсивно. При минимальной скорости $V_0 = 280,143 \text{ см/с}$ имеем наиболее пологий нижний график.

Из рисунка 5.13 следует, что с увеличением начальных скоростей относительные скорости на крайних линиях тока возрастают монотонно, но менее интенсивно, т.е. при максимальной скорости $V_0 = 798,53 \text{ см/с}$ имеем нижний график, а при минимальной скорости $V_0 = 280,143 \text{ см/с}$ имеем верхний график.

Можно отнести полученные значения глубин к значениям $h(0, n)$, достигаемым на начальной эквипотенциали, и тем самым добиться того, что все кривые будут выходить из 1. При этом закономерность, приведенная выше, не меняется.

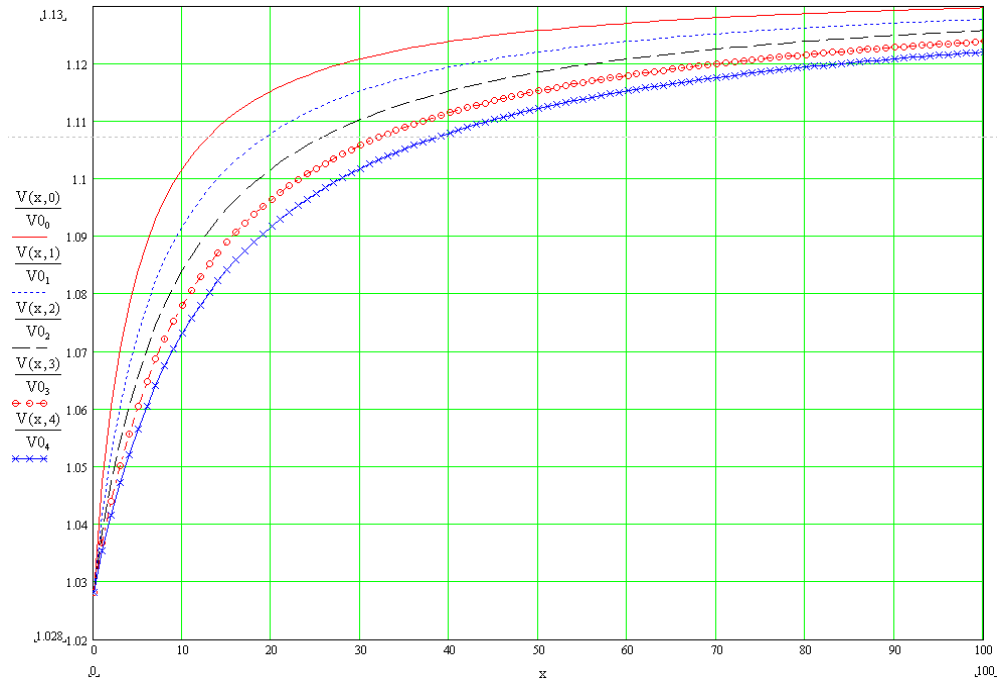


Рисунок 5.13 – Графики изменения относительных скоростей в зависимости от продольной координаты x .

5.4 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИН И СКОРОСТЕЙ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ ПОТОКА ПРИ ОДИНАКОВЫХ ЧИСЛАХ ФРУДА

Выполним построение зависимостей приведенных значений глубин $\frac{h(x,n)}{h_{0n}}$ и скоростей $\frac{V(x,n)}{V_{0n}}$ потока на оси симметрии при введенных значениях параметра Фруда от расстояния вдоль оси потока.

Приведем для наглядности ранее рассчитанные параметры, которые будут использованы в настоящих расчетах (фрагмент программы 5.13).

Фрагмент программы 5.13 – Значения ранее рассчитанных параметров

$b =$	$h_0 =$		
8	10		
12	14		
16	18		
20	22		
24	26		
$g = 981$	$h_{00} = 10$	$h_{01} = 14$	
$\tau_0(n) =$	$H_0(n) =$	$A(n) =$	$\tau_k(n) =$
0.778	45	$1.67 \cdot 10^3$	0.822
0.778	63	$2.964 \cdot 10^3$	0.822
0.778	81	$4.482 \cdot 10^3$	0.822
0.778	99	$6.193 \cdot 10^3$	0.822
0.778	117	$8.079 \cdot 10^3$	0.822

Выполним расчет параметра x_D , который имеется в формуле для расчета продольной координаты x (фрагмент программы 5.14).

Фрагмент программы 5.14 – Расчет параметра x_D

$$xD(n) := \frac{b_n \cdot (1 - \cos(\theta k(n)))}{2 \cdot \sin(\theta k(n))}$$

$x_D(n) =$	
1.249193	■
1.87379	
2.498387	
3.122983	
3.74758	

Далее рассчитаем параметр $p_1(n)$, который соответствует продольной координате x и имеет разное значение для каждого варианта, т.к. x_D имеет разные значения (фрагмент программы 5.15).

Фрагмент программы 5.15 – Расчет параметра $p_1(n)$

```

p1(n) :=
  ind ← 0
  for i ∈ 0,1..100
    p1_ind ← xD(n) + 0.00001 + i
    ind ← ind + 1
  p1

```

$p_1(n)$ - параметр, соответствующий продольной координате с шагом 1

$p_1(i) =$		0	
	0	1.874	
	1	2.874	
	2	3.874	
	3	4.874	
	4	5.874	
	5	6.874	
	6	7.874	
	7	8.874	■
	8	9.874	
	9	10.874	
	10	11.874	
	11	12.874	
	12	13.874	
	13	14.874	
	14	15.874	
	15	16.874	

Далее рассчитываются глубины и скорости вдоль оси потока в зависимости от $\tau_{1A}(n, x_1)$ по формулам в фрагменте программы 5.16.

Фрагмент программы 5.16 – Расчет глубин и скоростей вдоль оси потока

$x_1 := 0, 4.. 100$

x_1 - параметр, соответствующий номеру ячейки с продольной координатой, т.е. шаг, равный 4, соответствует выбору каждого четвертого значения по порядку из полученных для $p_1(n)$

$$\tau_{1A}(n, x_1) := \text{root} \left[\left[xD(n) + \frac{A(n) \cdot h_{0n}}{2 \cdot H_0(n) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0(n)}} \cdot \left[\frac{1 + \tau}{\tau \cdot (1 - \tau)} - \ln \left(\frac{1 - \tau}{\tau} \right) - \frac{1 + \tau_0(n)}{\tau_0(n) \cdot (1 - \tau_0(n))} + \ln \left(\frac{1 - \tau_0(n)}{\tau_0(n)} \right) \right] - p_1(n)_{x_1} \right], \tau, \tau_0(n), 0.9999999 \right]$$

$$h_{oc}(n, x_1) := H_0(n) \cdot (1 - \tau_{1A}(n, x_1))$$

$$V_{oc}(n, x_1) := (\tau_{1A}(n, x_1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0(n)}$$

$h_0 =$	10	$V_0 =$	262.05
	14		310.061
	18		351.576
	22		388.682
	26		422.542

$\tau_{1A}(0, x_1)$	$h_{oc}(0, x_1)$	$V_{oc}(0, x_1) =$
0.778	10	262.05
0.866	6.031	276.508
0.905	4.288	282.626
0.926	3.316	285.979
0.94	2.699	288.087
0.949	2.274	289.531
0.956	1.964	290.581
0.962	1.727	291.378
0.966	1.541	292.004
0.969	1.391	292.508
0.972	1.267	292.922
0.974	1.164	293.269
0.976	1.076	293.563
0.978	1	293.816
0.979	0.934	294.035
0.981	0.877	294.228

Из рисунка 5.14 следует, что все глубины вдоль оси потока в рассматриваемых вариантах монотонно убывают в зависимости от продольной координаты.

Из рисунка 5.15 следует, что все скорости вдоль оси потока в рассматриваемых вариантах монотонно возрастают в зависимости от продольной координаты.

На рисунке 5.16 представлено изменение относительных глубин вдоль оси потока в зависимости от продольной координаты x . Из рисунка 5.16 следует, что относительные глубины вдоль оси потока монотонно убывают. При этом чем больше начальная скорость потока, тем медленнее убывают относительные глубины.

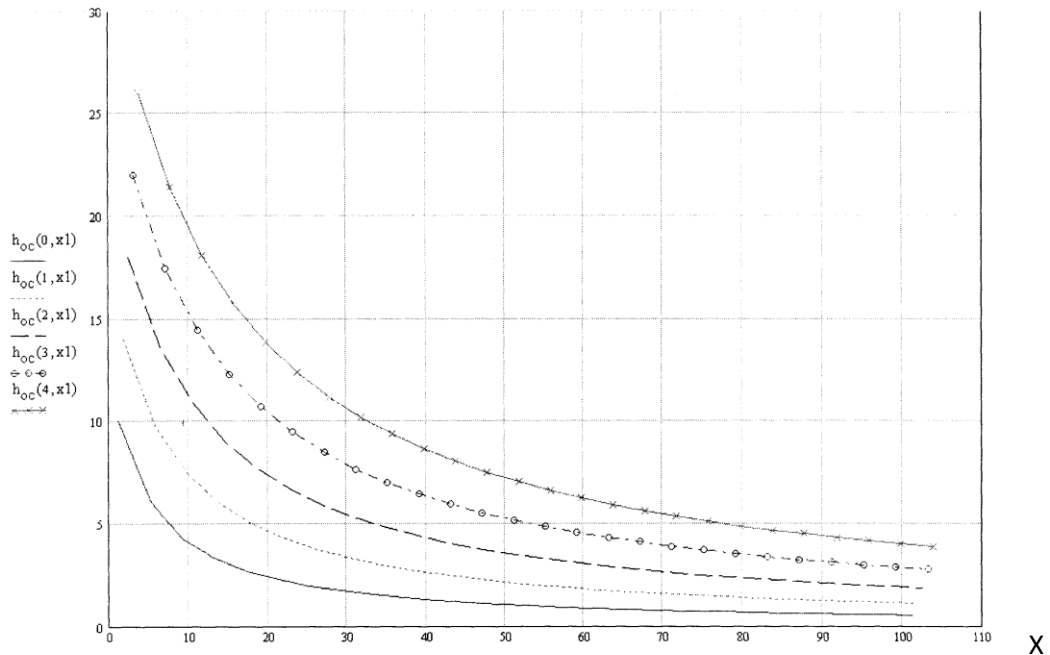


Рисунок 5.14 – Изменение глубин вдоль оси потока в зависимости от продольной координаты при одинаковых числах Фруда

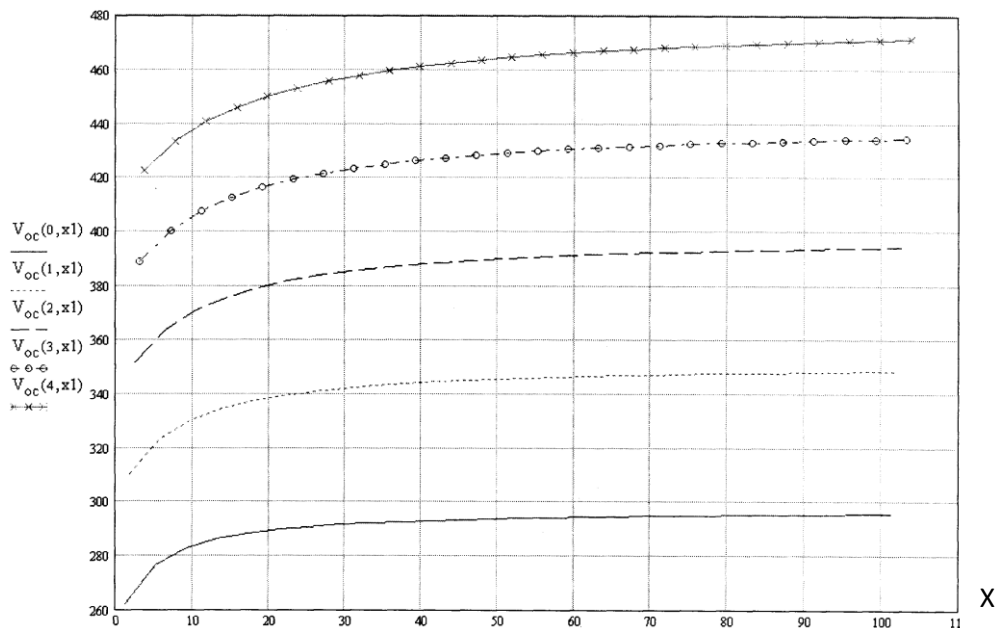


Рисунок 5.15 - Изменение скоростей вдоль оси потока в зависимости от продольной координаты при одинаковых числах Фруда

Графики изменения относительных скоростей приведены на рисунке 5.17.

Из графиков, приведенных на рисунке 5.17, следует, что относительные скорости для каждого варианта монотонно возрастают вдоль оси потока. При этом чем меньше начальная скорость потока, тем интенсивнее она возрастает.

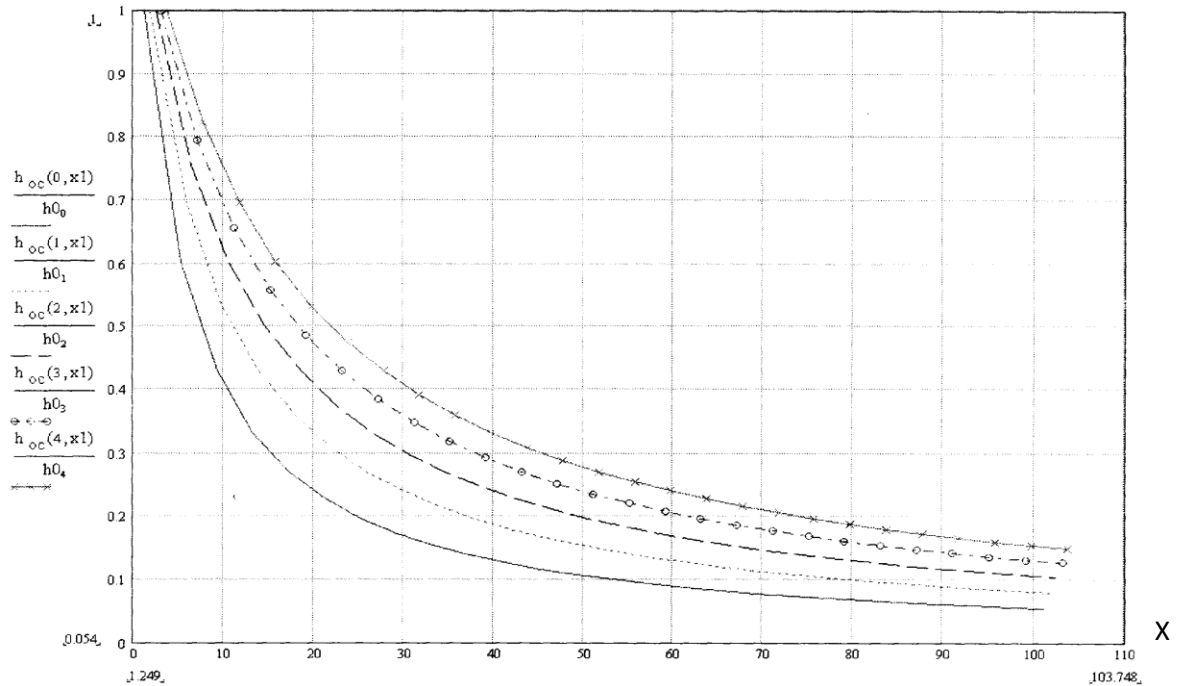


Рисунок 5.16 – Изменение относительных глубин вдоль оси потока в зависимости от продольной координаты

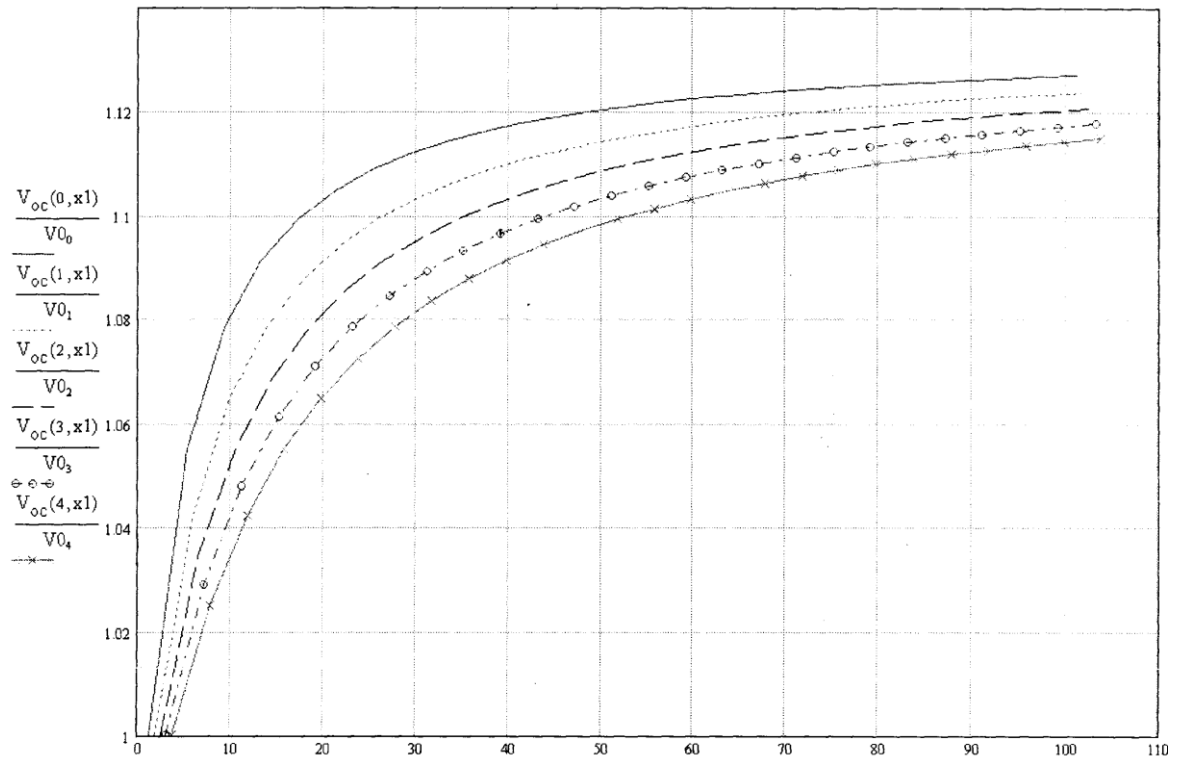


Рисунок 5.17 – Изменение относительных скоростей вдоль оси потока в зависимости от продольной координаты

5.5 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ГЛУБИН ПО ЖИВОМУ СЕЧЕНИЮ ПОТОКА (ВДОЛЬ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЕЙ) В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЕЛ ФРУДА

Построим зависимость приведенного значения глубины от расстояния по эквипотенциали "раскладка по живому сечению". Для начала введем исходные данные и рассчитаем параметры, необходимые для дальнейших расчетов (фрагмент программы 5.17). Величину числа Фруда планируем изменять косвенно, изменяя расход Q , который в первом варианте составил $7 \text{ дм}^3/\text{с}$. Как видим, число Фруда при первом варианте составило $Fr = 1,327$.

Фрагмент программы 5.17 – Ввод исходных данных и расчет необходимых параметров

$b := 10$	$h_0 := 7.22$	$Q := 7 \cdot 10^3$	
$g := 981$	$\beta := 10$		
$B := \beta \cdot b$	$B = 100$		
$V_0 := \frac{Q}{h_0 b}$	$V_0 = 96.953$	V_0 - величина скорости потока на его выходе из трубы	
$Fr := \frac{(V_0)^2}{g \cdot h_0}$	$Fr = 1.327$	Fr - критерий Фруда	
$H_0 := h_0 + \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g}$	$H_0 = 12.011$	H_0 - постоянная в интеграле Бернулли	
$\tau_0 := \frac{(V_0)^2}{2 \cdot g \cdot H_0}$	$\tau_0 = 0.399$	τ_0 - квадрат скоростного коэффициента	
$C_1 := \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0 - 1}{1 - \tau_0}}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$C_1 = -0.033$		
$\theta := C_1 + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$	$\theta = 1.11701708$		
θ - угол растекания потока на бесконечности при отсутствии сил трения потоку (θ_{\max})			

Продолжение фрагмента программы 5.17

$$A := \frac{V_0 \cdot b}{2 \cdot \sin(\theta)}$$

$$A = 539.348$$

A - постоянная, определяемая из условия отсекания крайней линии тока и осью симметрии 50% всего расхода потока

$$\tau_k := \text{root} \left[\left[\frac{\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^2} + \tau_k \cdot (\sin(\theta))^2 - 1 \right], \tau_k, \tau_0, 1 \right]$$

$$\tau_k = 0.70174335$$

τ_k - параметр потока

$$\left[\frac{\tau_k \cdot (1 - \tau_k)^2}{\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^2} + \tau_k \cdot (\sin(\theta))^2 \right] = 1 \quad \text{Уравнение, которому удовлетворяет } \tau_k$$

$$\theta_k := \text{asin} \left[(\tau_k)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta) \right]$$

$$\theta_k = 0.852$$

θ_k - параметр потока

После определения необходимых параметров переведем полученные значения координат точек пересечения линии тока и эквипотенциали в векторные столбцы так, что параметр a будет отвечать за номер эквипотенциали (фрагмент программы 5.18).

Фрагмент программы 5.18 – Задание координат точек пересечения линии тока и эквипотенциали в виде векторных столбцов

$\begin{array}{l} \mathbf{xm1}(a) := \\ \quad \text{ind} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } i \in 0, 0.5..5 \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} \mathbf{xm1}_{\text{ind}} \leftarrow \mathbf{xm}(i, a) \\ \text{ind} \leftarrow \text{ind} + 1 \end{array} \right. \\ \quad \mathbf{xm1} \end{array}$	$\begin{array}{l} \mathbf{ym1}(a) := \\ \quad \text{ind} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } i \in 0, 0.5..5 \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} \mathbf{ym1}_{\text{ind}} \leftarrow \mathbf{ym}(i, a) \\ \text{ind} \leftarrow \text{ind} + 1 \end{array} \right. \\ \quad \mathbf{ym1} \end{array}$
---	---

Сформируем величину, которая будет отвечать за расстояние по эквипотенциали:

$$S = p(a, i) = \sqrt{[x_{m_1}(a)_{i+1} - x_{m_1}(a)_i]^2 + [y_{m_1}(a)_{i+1} - y_{m_1}(a)_i]^2},$$

где $x_{m_1}(a)_i$, $x_{m_1}(a)_{i+1}$ – горизонтальные координаты двух соседних узлов; $y_{m_1}(a)_i$, $y_{m_1}(a)_{i+1}$ – вертикальные координаты двух соседних узлов.

Сформируем из полученной величины вектор, зависящий только от параметра a (фрагмент программы 5.19).

Фрагмент программы 5.19 – Задание вектора расстояний по эквипотенциали

```

p(a,i) :=  $\sqrt{(ym1(a)_{i+1} - ym1(a)_i)^2 + (xm1(a)_{i+1} - xm1(a)_i)^2}$ 
p1(a) := | p1_0 ← 0
          | ind ← 1
          | for i ∈ 0,1..9
          |   | p1_ind ← p(a,i) + p1_ind-1
          |   | ind ← ind + 1
          | p1

```

Теперь переведем полученные значения глубин в точках пересечения линии тока и эквипотенциали в векторные столбцы так, что параметр a будет отвечать за номер эквипотенциали.

Фрагмент программы 5.20 – Задание глубин точек пересечения линии тока и эквипотенциали в виде векторных столбцов

```

hml(a) := | ind ← 0
          | for i ∈ 0,0.5..5
          |   | hml_ind ← hm(i,a)
          |   | ind ← ind + 1
          | hmlT

```

Теперь можно построить искомую зависимость приведенного значения глубины от расстояния вдоль эквипотенциали, показанную на рисунке 5.18.

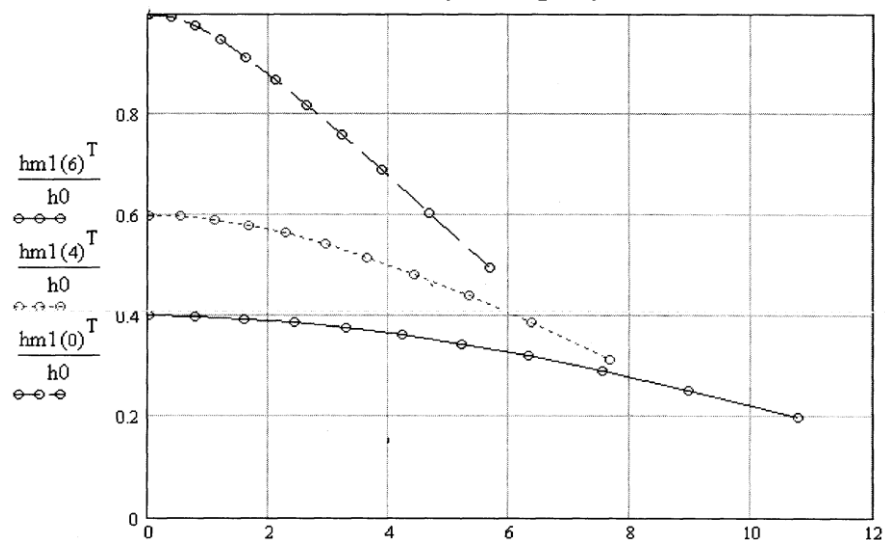


Рисунок 5.18 – Распределение относительных глубин на начальной, четвертой и шестой эквипотенциалах при числе Фруда $Fr = 1,327$

В следующем втором варианте расход задаем равным $10 \text{ дм}^3/\text{с}$. Ввод исходных данных и вывод полученного числа Фруда приведены в фрагменте программы 5.21. Число Фруда составило $Fr = 2,708$. Полученный при этом график будет иметь вид, приведенный на рисунке 5.19.

Фрагмент программы 5.21 – Ввод исходных данных и вывод полученного числа Фруда для 2-го варианта

$b := 10$	$h_0 := 7.22$	$Q := 10 \cdot 10^3$
$g := 981$	$\beta := 10$	
$Fr = 2.708$	Fr - критерий Фруда	

В следующем третьем варианте расход задаем равным $13 \text{ дм}^3/\text{с}$. Ввод исходных данных и вывод полученного числа Фруда приведены в фрагменте программы 5.22. При этом число Фруда составило $Fr = 4,577$, а график имеет вид, приведенный на рисунке 5.20.

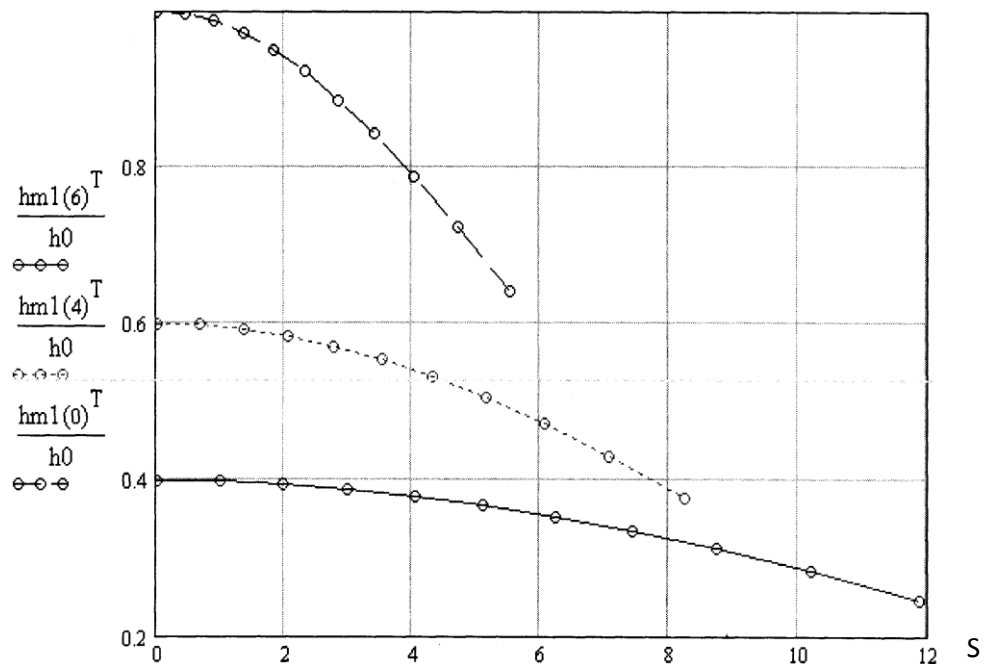


Рисунок 5.19 – Распределение относительных глубин на начальной, четвертой и шестой эквипотенциалах при числе Фруда $Fr = 2,708$

Фрагмент программы 5.22 – Ввод исходных данных и вывод полученного числа Фруда для 3-го варианта

$b := 10$	$h_0 := 7.22$	$Q := 13 \cdot 10^3$
$g := 981$	$\beta := 10$	
$Fr = 4.577$	Fr - критерий Фруда	

Из графиков, приведенных на рисунках 5.18 – 5.20, следует:

- 1) Длины начальных эквипотенциалей практически не изменились с изменением числа Фруда и составили около 5,5 см.
- 2) Длины четвертых и шестых эквипотенциалей с увеличением числа Фруда немало возросли.

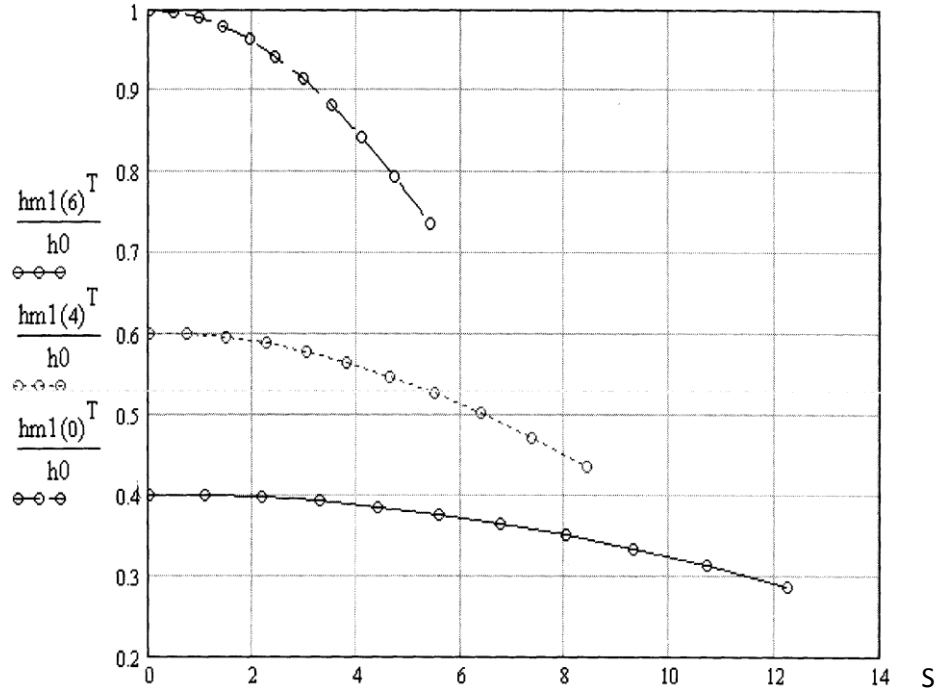


Рисунок 5.20 – Распределение относительных глубин на начальной, четвертой и шестой эквипотенциалах при числе Фруда $Fr = 4,577$

3) Изменение относительных глубин с увеличением чисел Фруда уменьшилось: на начальной эквипотенциали относительная глубина уменьшилась с 1 до 0,5 при числе Фруда $Fr = 1,327$; с 1 до 0,64 при числе Фруда $Fr = 2,708$; с 1 до 0,74 при $Fr = 4,577$. На четвертой эквипотенциали уменьшение относительной глубины составило: с 0,6 до 0,31 при $Fr = 1,327$; с 0,6 до 0,39 при $Fr = 2,708$; с 0,6 до 0,44 при $Fr = 4,577$. На шестой эквипотенциали уменьшение составило: с 0,4 до 0,2 при $Fr = 1,327$; с 0,4 до 0,25 при $Fr = 2,708$; с 0,4 до 0,29 при $Fr = 4,577$.

ВЫВОДЫ В ПЯТОЙ ГЛАВЕ

1. С увеличением числа Фруда на выходе потока из трубы степень его растекания вдоль оси симметрии потока уменьшается.
2. Параметры потока изменяются монотонно вдоль оси симметрии потока.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

- В работе для решения практических задач по определению параметров свободно растекающегося потока было обосновано выбран перспективный метод расчета с использованием плоскости годографа скорости.
- Поставлена и решена граничная задача по свободному растеканию бурных потенциальных потоков.
- Получены аналитические и численные решения системы, описывающей движение бурного потенциального потока.
- Получены алгоритмы и программы для определения всего спектра параметров потока.
- Доказана адекватность полученных геометрических параметров реальному процессу и улучшена по сравнению с ранее известными методами (Приложение 2).
- Сформулирована общая технология решения граничных задач по течению потенциальных бурных водных потоков, позволяющая решать разнообразные типовые задачи по свободному растеканию водного потока, что находит применение на практике при проектировании ГТС.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 1

ГЕОМЕТРИЯ РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПЛАНОВОГО ПОТОКА ЗА ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ТРУБАМИ

ОПЫТ № 1. Труба 16×16 см

Режим безнапорный. Относительное расширение нижнего бьефа $\beta = \frac{B}{b} = 10$ – предельное расширение. $Q = 12,2$ л/с; $h_{\text{блх}} = 67,6$ мм.

Координаты контура растекания

x (см)	0	4	24	44	64	69	84	104	124	144	164	184	191
y (см)	8	12	39	65	87	90	86	65	57	45	38	26	20

ОПЫТ № 2. Труба 16×16 см

Режим полупапорный. Относительное расширение нижнего бьефа $\beta = \frac{B}{b} = 10$. $Q = 36,9$ л/с; $h_{\text{блх}} = 108,2$ мм.

Координаты контура растекания

x (см)	0	4	24	44	64	80	84	104	124	144	164	184	204
y (см)	8	10	27	50	68	80	78	76	65	62	60	55	50

ОПЫТ № 3. Труба 16×8 см

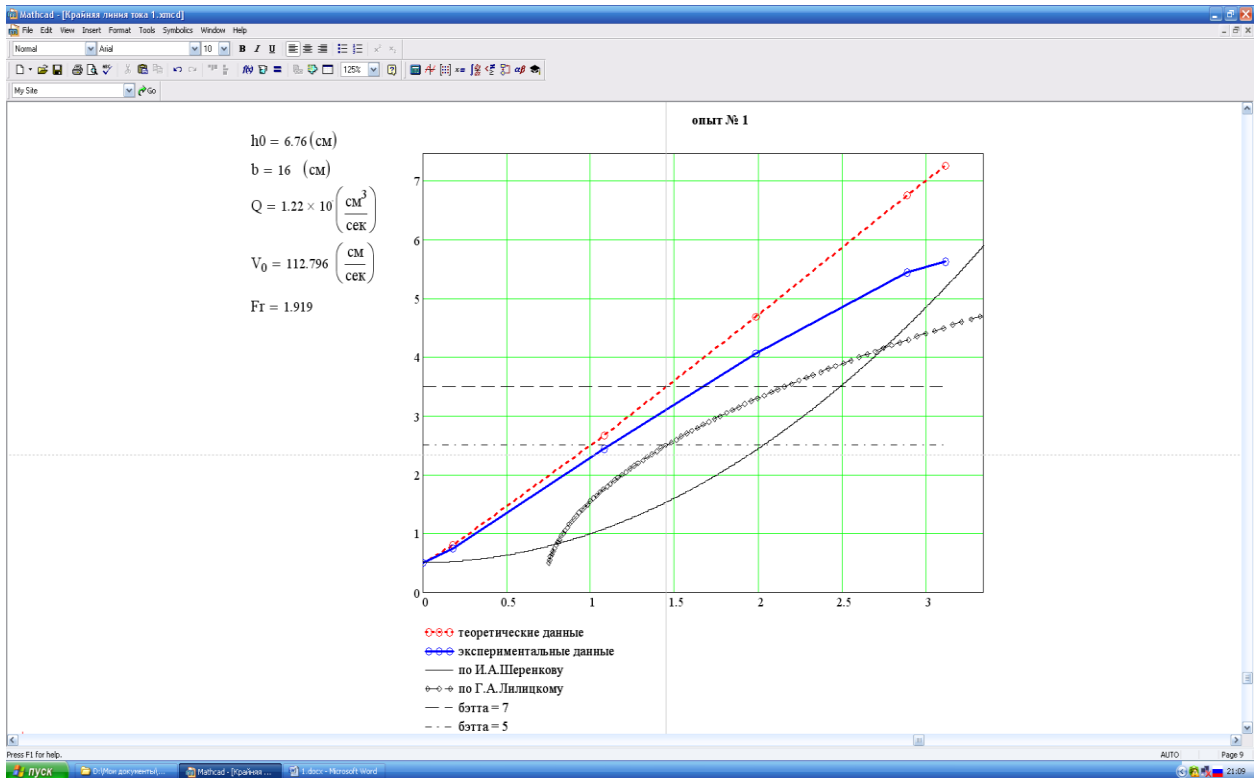
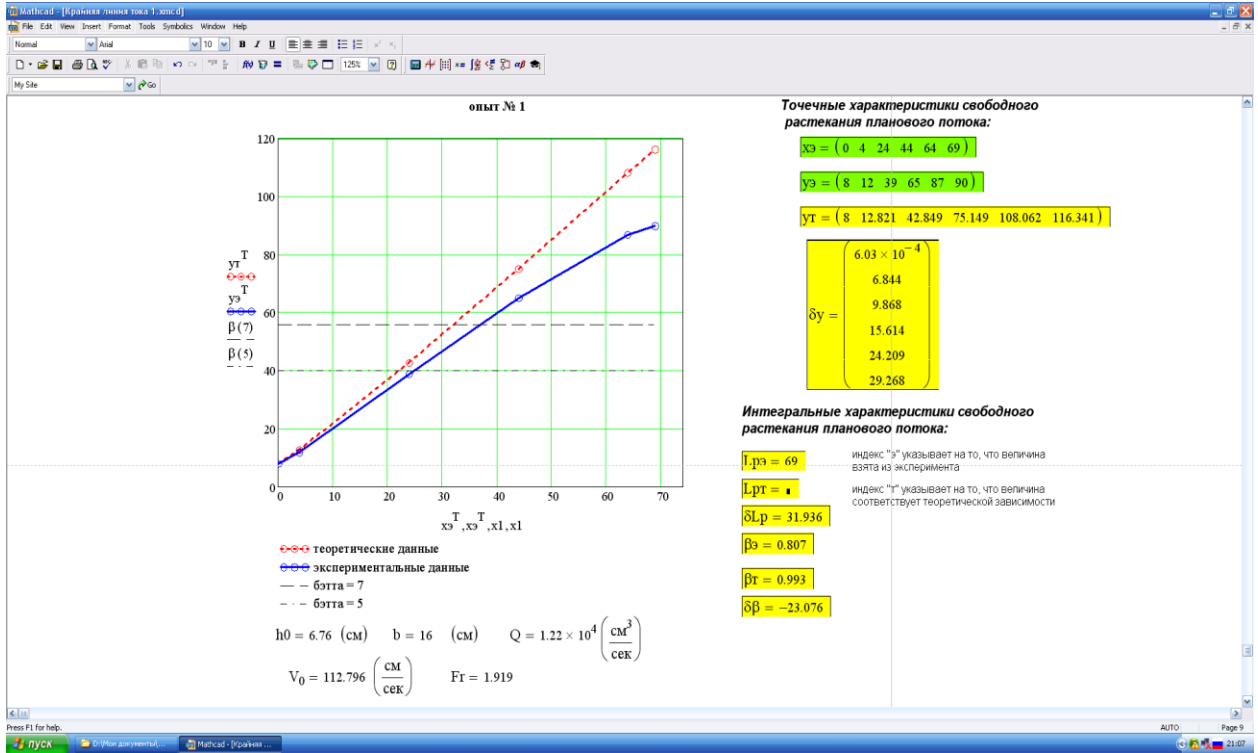
Режим полупапорный. Относительное расширение нижнего бьефа $\beta = \frac{B}{b} = 27$ – предельное расширение. $Q = 10,5$ л/с; $h_{\text{блх}} = 87,1$ мм.

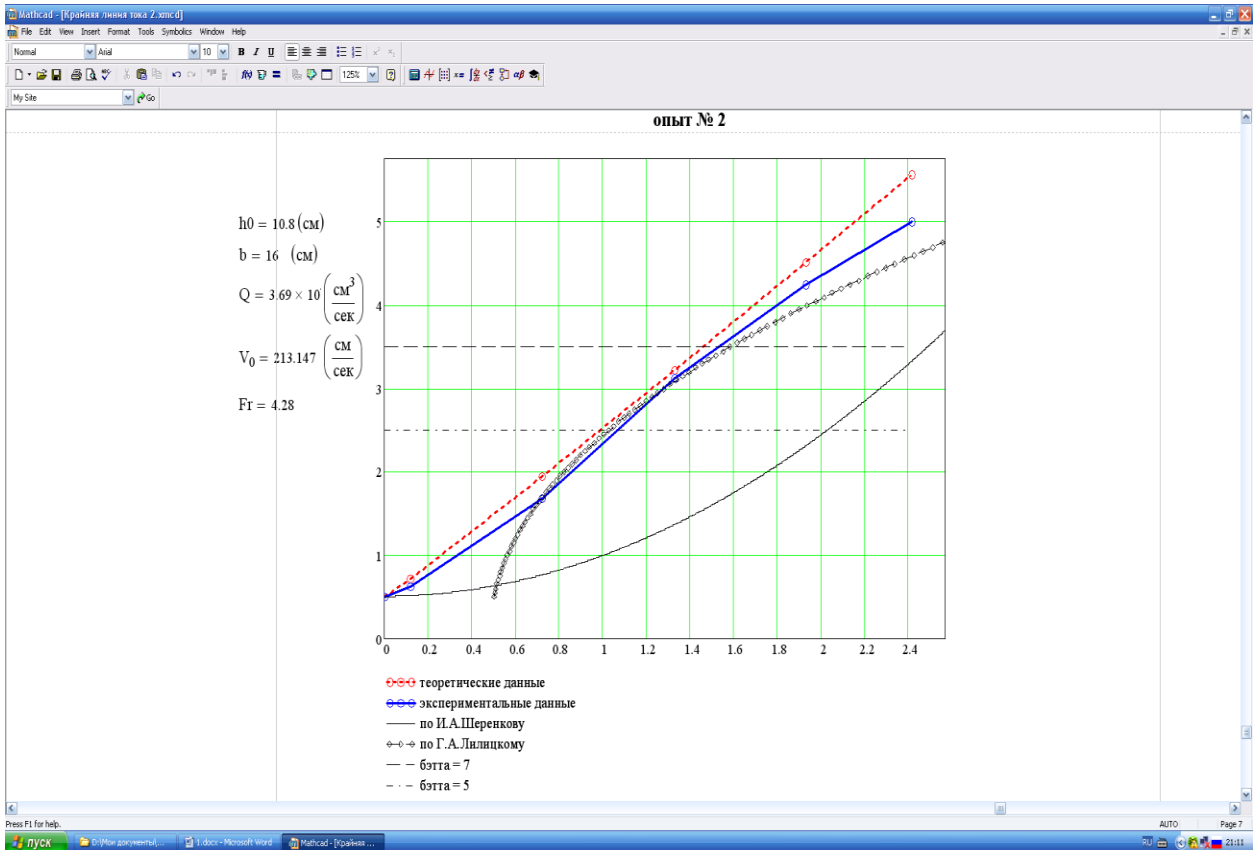
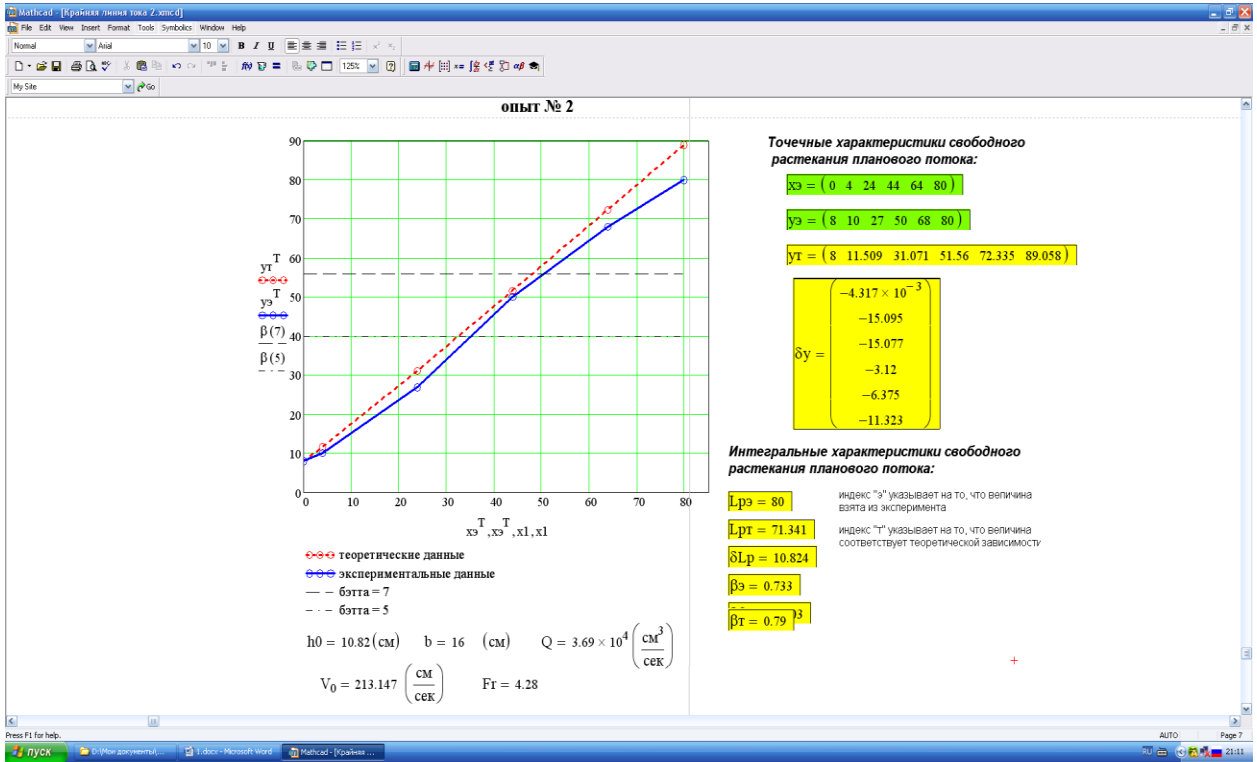
Координаты контура растекания

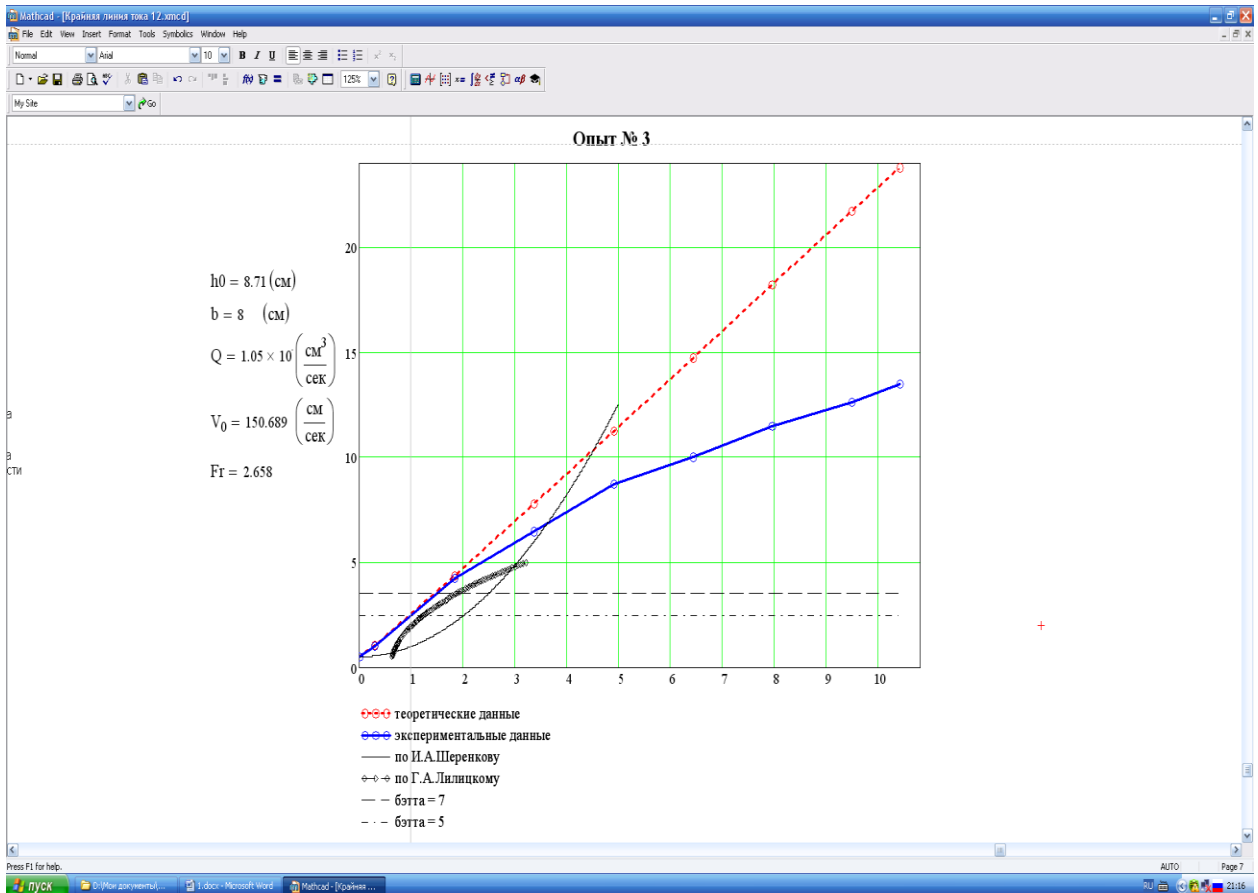
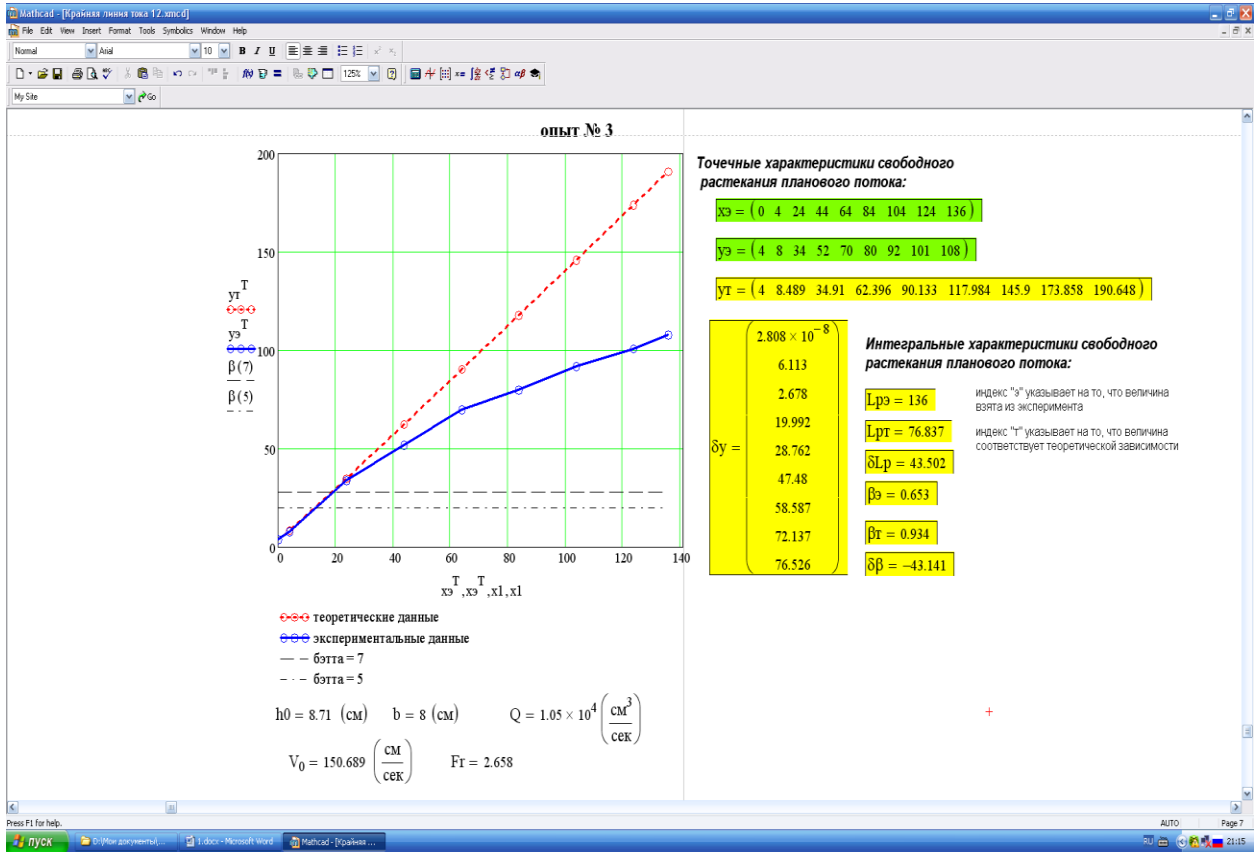
x (см)	0	4	24	44	64	84	104	124	136	144	164	184	196
y (см)	4	8	34	52	70	80	92	101	108	94	66	47	20

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭКРАННЫЕ ФОРМЫ ФРАГМЕНТОВ ПРОГРАММ







ПРИЛОЖЕНИЕ 3
АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014611308

**РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ И ГЕОМЕТРИИ ДВУХМЕРНОГО
ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ВОДНОГО ПОТОКА**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Донской государственный аграрный университет" (RU)*

Автор: *Папченко Наталья Геннадиевна (RU)*

Заявка № **2013661327**

Дата поступления **06 декабря 2013 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **30 января 2014 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Б.П. Симонов



«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор ДонГАУ, профессор

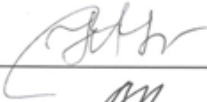
А.И. Бараников

2013г.

**СПРАВКА**

о внедрении результатов научно-исследовательской работы в учебный процесс ФГБОУ ВПО "Донской государственной аграрный университет"

Дана Папченко Н.Г. в том, что результаты исследований по теме: "МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХМЕРНЫХ БУРНЫХ ВОДНЫХ ПОТОКОВ", разработанные рекомендации по проектированию ГТС и программное обеспечение приняты к использованию в учебном процессе Донского ГАУ при изучении курсов "Гидравлика", "Гидрогазодинамика" и "Реология" в процессе подготовки специалистов технологического профиля очной и заочной форм обучения, а также слушателей курсов повышения квалификации.

Исполнитель  Папченко Н.Г.

Руководитель НИР  Коханенко В.Н.

ТЕХНИЧЕСКИЙ АКТ ВНЕДРЕНИЯ НИР

Мы, нижеподписавшиеся, Генеральный директор ООО ИКЦ «Безопасность ГТС» Волосухин Яков Викторович, с одной стороны, и представитель вуза - ФГБОУ ВПО «Донской государственный аграрный университет» проректор по научно-исследовательской работе д.с-х. н., профессор Юрий Анатольевич Колосов подтверждаем настоящим актом, что результаты научно-исследовательской работы «Моделирование потенциального течения двухмерных бурных водных потоков», выполненной на кафедре «Механики и оборудования процессов пищевых производств» ФГБОУ ВПО «Донской государственный аграрный университет» под руководством д.т.н. профессора Коханенко В.Н. исполнителя Папченко Н.Г., внедрены в проектной практике в качестве конкурирующего варианта расчета и конструирования дорожного водоотвода.

Научное значение работы. Результаты работы по развитию теории двухмерных в плане открытых водных потоков и совершенствованию расчетов и моделирования параметров водных потоков вошли в кандидатскую диссертационную работу Папченко Н.Г. «Моделирование потенциального течения двухмерных бурных водных потоков» и в программное обеспечение расчета параметров водного потока в дорожных водоотводах для проектируемых сооружений.

1. Планируемое использование

1.1. Результаты НИР использованы. В ООО ИКЦ «Безопасность ГТС»

1.2. Вид и форма использования. Применение в проектной практике новых методов расчета параметров водного потока в сооружениях дорожного водоотвода и оценки надежности ГТС.

1.3. Целевая направленность исследований. Разработка сооружений дорожного водоотвода на базе современных методов расчета параметров водного потока.

1.4. Форма планируемого внедрения. Использование результатов НИР при проектировании сооружений дорожного водоотвода и оценки их надежности.

1.5. Вид и объем внедрения. Составление конкурирующего варианта расчета параметров водного потока в сооружениях дорожного водоотвода.

2. Ожидаемая эффективность

2.1. База для сравнения. Существующие методы моделирования потенциального течения стационарных бурных водных потоков.

2.2. Организационно-технические преимущества разрабатываемого варианта. Повышение надежности и увеличение срока эксплуатации сооружений дорожного водоотвода на 15 лет.

2.3. Ожидаемые социально-экономические результаты. Улучшение экологической ситуации в зоне расположения дорожного водоотвода.

2.4. Ожидаемый годовой эффект от внедрения. 80 тыс. руб. от внедрения одной конструкции.

Руководитель работы д.т.н.
профессор Коханенко В.Н.



Представитель ФГБОУ ВПО
«ДонГАУ» проректор по НИР
профессор Колосов Ю.А.




Представитель ООО ИКЦ «Безопасность
ГТС» генеральный директор
Волосухин Я.В.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Константинов Н.М. Некоторые вопросы гидравлики нижнего бьефа малых дорожных водопропускных сооружений при свободном растекании бурного потока / Н.М. Константинов // Гидравлика дорожных водопропускных сооружений. – Киев, 1969. – С. 255-269.
2. Караушев А.В. Проблемы динамики естественных водных потоков / А.В. Караушев // Л.: Гидрометеиздат, 1960.
3. Емцев Б.Т. Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967. – 212 с.
4. Шеренков И.А. О плановой задаче растекания струи бурного потока несжимаемой жидкости / И.А. Шеренков // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958, № 1. – С. 72-78.
5. Sherenkov I.A. Solution by computers of the plane problem of the supercritical turbulent flows movement, XI Congress IANR, Leningrad, 1965.
6. Шеренков И.А. Экспериментальные исследования растекания бурного потока за выходными оголовками водопропускных сооружений / И.А. Шеренков // Труды объединенного семинара по гидроэнергетическому и водохозяйственному строительству. Харьков, 1959. Вып. 1.
7. Мелещенко Н.Т. Плановая задача гидравлики открытых водотоков / Н.Т. Мелещенко // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. – 1948. – Т. 36. – С. 33-59.
8. Франкль Ф.И. Теоретический расчет неравномерного бурного потока на быстротоке / Ф.И. Франкль // Труды Киргизского университета. Физико-математический факультет. – 1955. – Вып. 3. – 228 с.
9. Скребков Г.П. Метод расчета распределения скоростей по ширине слабо деформированного участка реки / Г.П. Скребков // Метеорология и гидрология. 1972. № 3.
10. Слиссский С.М. Расчет сопряжения бьефов при поверхностных режимах при истечении из-под щита / С.М. Слиссский // Гидротехническое строительство. – 1952, № 4. – С. 44-45.
11. Емцев Б.Т. Качественный анализ движения жидкости в непризматическом русле / Б.Т. Емцев // Труды МЭИ. 1961. Вып. 36.
12. Бернадский Н.М. Теория турбулентного потока и её применение к построению плана течений в открытых водоёмах : Материалы по гидрологии, гидрографии и водным силам СССР / Н.М. Бернадский. – Вып. 20. – М., Л.: Госэнергоиздат, 1993. – 83 с.
13. Васильев О.Ф. Численный метод расчета неустановившихся течений в открытых руслах / О.Ф. Васильев, Т.А. Темноева, С.М. Шугрин // Изв. АН СССР. Механика. – 1965, № 2. – С. 43-58.
14. Васильев О.Ф., Темноева Т.А., Шугрин С.М. Численный метод расчета неустановившихся течений в открытых руслах. – Изв. АН СССР. Механика. М., 1965. – № 2. – С.43-58.
15. Лилицкий Г.А. Исследования растекания бурного потока в нижнем бьефе водопропускных сооружений / Г.А. Лилицкий // Гидравлика и гидротехника: Респ. межвед. научно-техн. сб. – Киев: Техника, 1966. – Вып. 2. – С. 78-84.

16. Коханенко В.Н. Двухмерные в плане течения бурных потоков за круглыми водопропускными трубами : дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: Коханенко Виктор Николаевич. – М., 1992. – 240 с.
17. Рауз Х. Механика жидкости для инженеров-гидротехников: / Х. Рауз. – М., Л.: Госэнергоиздат, 1958. – 368 с.
18. Takeda R. Theoretical research an propeller type current meters / R. Takeda // Trans. ASME. – 1975, A. 97, № 4. – P. 599-602.
19. Ляхтер В.М., Прудовский А.М. Гидравлическое моделирование. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 392 с.
20. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М. Наука. 2003. – 416 с.
21. Высоцкий Л.И. Управление бурными потоками на водосбросах. – М.: Энергия, 1977. – 280 с.
22. Шеренков И.А. Прикладные плановые задачи гидравлики спокойных потоков. – М.: Энергия, 1978. – 240 с.
23. Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические решения / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Изд 2-е. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
24. Коханенко В.Н. Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков / В.Н. Коханенко, В.Я. Волосухин, М.А. Лемешко, Н.Г. Папченко. // Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. - 186 с.
25. Справочник по гидравлике / Под ред. В.А.Большакова. – изд. 2-е, перераб. и доп. – Киев: Вища школа, 1984. – 343 с.
26. Пособие по гидравлическим расчетам малых водопропускных сооружений / Под ред. Г.Я. Волченкова. – М.: Транспорт, 1992. – 408 с.
27. Есин А.И. Задачи технической механики жидкости в естественных координатах / ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2003. – 144 с.
28. Штеренлихт Д.В. Гидравлика / Д.В. Штеренлихт. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Колос, 2005. – 656 с.
29. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – Изд-во Дрофа, 2003. – 840 с.
30. Гидравлические расчёты водосбросных гидротехнических сооружений. Справочное пособие – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 257 с.
31. Справочник по гидравлическим расчетам / Под ред. П.Г. Кисилева. – М: Энергия, 1974. – 313 с.
32. Христианович С.А. Механика сплошной среды / С.А. Христианович – М.: Наука, 1981. – 483 с.
33. Чугаев Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергоиздат, 1982. - 672 с.
34. Коханенко В.Н. Технология решения плановых задач с использованием плоскости годографа скорости на примере задачи радиального растекания бурного потока // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. – 2013, № 4.

35. Коханенко В.Н. Определение параметров бурного потока при обтекании выпуклого угла методом использования плоскости годографа скорости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. – 2013, № 5.
36. Коханенко В.Н. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общей ред. В.Н. Коханенко. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.
37. Чаплыгин С.А. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика: избранные труды / С.А. Чаплыгин. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
38. Мицик М.Ф., Косиченко Н.В., Лемешко М.А. Метод с использованием годографа скорости применительно к расчету параметров бурного двухмерного потока // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. IV Междунар. научн.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2010. – с. 130-141.
39. Ширяев В.В. Развитие теории двухмерных открытых водных потоков : монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская: под общей ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.
40. Косиченко Н.В. Поиск решений уравнений математической физики для функции тока в плоскости годографа скорости методом разделения переменных [Текст] / Н.В. Косиченко, Е.Г. Баленко, В.В. Ширяев, Тарусова Т.Ю. // Материалы междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы агропромышленного комплекса». / Зерноград: АЧГАА, 2005. – С. 25-29.
41. Косиченко Н.В. Исследование и моделирование процесса свободного растекания бурного потока за водопропускными сооружениями : дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук : Косиченко Наталья Викторовна. – М., 2011. – 201 с.
42. Ткаченко Н.И. Краткий анализ методов гидравлического расчета нижнего бьефа при свободном растекании бурного потока// Гидравлика сооружений оросительных систем и водотоков. – Новочеркасск, 1985. – С.23-30.
43. Цивин М.Н., Ткаченко Н.И., Кольченко О.Л. О предельном расширении двухмерного бурного потока// Гидромелиорация и гидротехническое строительство. – Львов, 1987. Вып. 15. – С. 41- 44.
44. Нумеров С.Н. Плановая задача гидравлики открытых водотоков в случае бурного вихревого течения / С.Н. Нумеров // Изв. ВНИИГ. – 1949. – Т. 40. – С. 149 – 153.
45. Ширяев В.В. Развитие теории двухмерных открытых водных потоков : монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская: под общей ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.
46. Лятхер В.М. Исследование открытых потоков на напорных моделях / В.М. Лятхер, А.М. Прудовский – М.: Энергия. 1971. 288 с.
47. Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений [Сборник]: межвуз. науч. сб. / Редкол. Л.И. Высоцкий и др. // Саратовск. гос. техн. ун-т. – Саратов, 1994. – 94 с.
48. Сухомел Г.И. Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений / Г.И. Сухомел. – Киев, Изд-во АН УССР, 1949. – 314 с.

49. Гарзанов А.В. Применение метода Кирхгофа-Чаплыгина к расчету сжатия открытых потоков / А.В. Гарзанов // Сб. тр. каф. гидравлики Саратовск. политехн. ин-та.– Саратов, 1963. – Вып. 19.
50. Гиргидов А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика) : учеб. пособие / А.Д. Гиргидов. – 2-е изд.– СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2003. – 545 с.
51. Takeda R. The influence of turbulence on the characteristic of the propeller current meters / R. Takeda, M. Kawanami // Trans. Soc. Mtch. Eng.– 1978, № 383. – V. 44. – P. 2389-2394.
52. Ippen A.T. Mechanics of Supercritical Flow / A.T. Ippen. – Proceedings American Society of Civil Engineers. – 1949, Nov., № 9. – V. 75. – 178 p.
53. Мицик М.Ф. Метод с использованием годографа скорости применительно к расчету параметров бурного двухмерного потока / М.Ф. Мицик, Н.В. Косиченко, М.А. Лемешко // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. IV Междунар. научн.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2010. – с. 130-141.
54. Коханенко В.Н. Вывод основной системы уравнений движения двухмерного потока в плоскости годографа скорости и поиск ее частных решений : монография / В.Н. Коханенко. – М., 1996 – 98с. – Деп. в ВИНТИ 10.12.96 № 3584 – В 96.
55. Коханенко В.Н. Вывод системы двухмерных уравнений бурного потока в плоскости годографа скорости / В.Н. Коханенко. – М., 1996 – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 10.12.96 № 3587 – В 97.
56. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Под общ. ред. Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
57. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962.
58. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984.
59. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
60. Папченко Н.Г. О формальном совпадении уравнений движения двухмерных в плане открытых водных потоков и уравнений движения идеального газа / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н., Папченко И.В. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. – 2008, № 5.
61. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Пер. с нем. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
62. Папченко Н.Г. Определение уравнения крайней линии тока в плоскости годографа скорости в задаче свободного растекания бурного потока за безнапорными трубами / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н. // Роль мелиорации, лесного и водного хозяйства в развитии аграрного сектора: материалы междунар. науч.-практ. конф. – г. Новочеркасск, 2012.

63. Папченко Н.Г. Вывод упрощенного уравнения крайней линии тока в задаче свободного растекания бурного планового потока / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н., Лемешко М.А. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. – 2013, № 6.
64. Коханенко В.Н. О плановой задаче растекания бурного потока несжимаемой жидкости. / Известия вузов. Серия: Технические науки. № 6. 2012. с 82-88.
65. Папченко Н.Г. Сопряжение потоков в нижнем бьефе гидротехнических сооружений / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н., Мицик М.Ф. // Современные технологии производства продуктов питания: состояние, проблемы и перспективы развития: материалы науч.-практ. конф. факультета биотехнологии, товароведения и экспертизы товаров / ДонГАУ. – Персиановский, 2010.
66. Косиченко Н.В. Анализ изучения и уточнения методов свободного растекания потока за безнапорными водопропускными отверстиями // Вестник. Саратовский госагроуниверситет им. Н.И. Вавилова. – 2011. – № 9. – С. 27.
67. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. – М.: Мир – 1982г. – Т 2.
68. Мак-Доуэлл Д.М. Гидравлика приливных устьев рек / Д.М. Мак-Доуэлл, Б.А. Коннор. – М.: Энергоатомиздат, 1983, 312 с.
69. Папченко Н.Г. Определение потенциальной функции в плоскости годографа скорости свободно растекающегося водного потока за водопропускной трубой / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н., Косиченко Н.В. // Интеграция науки, образования и бизнеса для обеспечения продовольственной безопасности РФ: материалы междунар. науч.-практ. конф. / ДонГАУ. – Персиановский, 2010. – Т.2.
70. Папченко Н.Г. Определение параметров бурного стационарного открытого водного потока в произвольной точке области течения потока / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н., Косиченко Н.В. // Проблемы и тенденции инновационного развития агропромышленного комплекса и аграрного образования России: материалы междунар. науч.-практ. конф. / ДонГАУ. – Персиановский, 2012. – Т.2.
71. Милитеев А.Н. Метод расчета сопряжения бьефов в пространственных условиях / А.Н. Милитеев, Н.П. Тогунова // Гидравлика сооружений оросительных систем: тр. НИМИ. – Новочеркасск, 1976. – Т. 18. – Вып. 5. – С. 180-194.
72. Нумеров С.Н. Об учете сил сопротивления при построении плана бурного течения / С.Н. Нумеров // Труды ЛПИ. – Л., 1948, № 5, с 184 – 189.
73. Сухомел Г.И. Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений / Г.И. Сухомел. – Киев, Изд-во АН УССР, 1949. – 314 с.
74. Справочник по гидравлическим расчетам / Под ред. П.Г. Киселева. – М.: Энергия, 1974. – 313 с.
75. Коханенко В.Н. Двухмерные в плане бурные стационарные потоки за водопропускными сооружениями в условиях свободного растекания : дисс. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.16: Коханенко Виктор Николаевич. – М., 1997. – 238 с.
76. Папченко Н.Г. О предельном расширении свободно растекающегося бурного потока / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н., Коханенко Н.В. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. – 2009, № 1.

77. Коханенко В.Н. Определение параметров свободно растекающегося бурного потока в плане на перпендикуляре к оси симметрии русло / В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик // Мелиорация и водное хозяйство, 2013. №1. – С. 28-29.
78. Бахвалов Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. – М.: Бином, 2003, – 633 с.
79. Папченко Н.Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014611308 от 30.01.2014 г. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент).
80. Папченко Н.Г. Сравнение кривых, описывающих крайнюю линию тока, в плоскости годографа и в физической плоскости / Папченко Н.Г., Коханенко В.Н., Мицик М.Ф. // Инновации в науке, образовании и бизнесе - основа эффективного развития АПК: материалы междунар. науч.-практ. конф. / ДонГАУ. – Персиановский, 2011. – Т.2.