На правах рукописи

Костин Дмитрий Владимирович

Многопараметрические вариационные модели, вычисление и оптимизация посткритических состояний

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации

на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

В О Р О Н Е Ж — 2017

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Научный консультант: доктор физико–математических наук, профессор Сапронов Юрий Иванович

Официальные оппоненты:
Мухамадиев Эргашбой, член–корреспондент АН Республики Таджикистан, доктор физико–математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет», электроэнергетический факультет, кафедра информационных систем и технологий, профессор
Кадченко Сергей Иванович, доктор физико–математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», институт естествознания и стандартизации, кафедра прикладной математики и информатики, заведующий
Фёдоров Владимир Евгеньевич, доктор физико–математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», математический факультет, кафедра математического анализа, заведующий

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Защита состоится 7 июня 2017 г. в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 в Воронежском государственном университете по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/4300/Диссертация_Костин_Д.В..pdf

Автореферат разослан «14» марта 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.20
кандидат физико–математических наук, доцент Шабров С.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Работа выполнена в Воронежском государственном университете на кафедре математического моделирования. Тема диссертации находится на стыке первых трех направлений из списка «Основные научные направления ВГУ» (раздел «Наука» на портале ВГУ): 1. Аналитические, геометрические и численные методы исследования дифференциальных уравнений; 2. Теория функций и функциональный анализ и 3. Математическое моделирование, программное и информационное обеспечение, методы вычислительной и прикладной математики и их применение к фундаментальным исследованиям в естественных науках.

Актуальность темы.

Из разнообразных проблем математического моделирования структурных перестроек в диссертации рассмотрена важная, но мало исследованная задача, такая как **«проблема выбора оптимальной ветви[1] посткритических состояний (решений модельного уравнения)»**. Данная проблема решена в диссертационной работе для случая вариационных математических моделей, в которых критерием качества является коэффициент несимметрии (асимметрии), применяемый в инженерно-технических расчётах.

Предложенное решение переносится на другие типы функционалов качества.

Исследования, которым посвящена диссертация, относятся к решению ключевых вопросов математического моделирования, соответствующих трем этапам, сформулированным в монографии А.А. Самарского и А.П. Михайлова [2]. На первом этапе происходит выбор «эквивалента объекта», который отображает в математической форме важнейшие его свойства – законы и связи, которым объект или его составляющие подчиняется. Эта математическая модель исследуется теоретическими методами. Второй этап – это выбор алгоритмов для реализации модели на компьютере. Третий этап заключается в создании и отладки программы.

Известно, что изменение параметров внешнего воздействия (температуры, электромагнитного поля, механического сжатия и пр.) на сложную фи-

[1]Под ветвью подразумевается гладкое параметрическое семейство невырожденных состояний $w(\lambda)$, $\lambda \in K$, где K – замкнутое связанное подмножество пространства значений (векторного) параметра модели.

[2]Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М. Физматлит, 2001. — 320 с.

зическую систему (раствор, смесь, сплав и т.п.) в некоторых случаях приводит к потере устойчивости исходной фазы и, как отклик системы, к ее переходу в новое состояние с новыми структурными свойствами. Такой переход сопровождается спинодальным расслоением (распадом), выраженным в изменении локальных концентраций компонентов, в образовании сначала зернистой структуры, а затем кластеров и доменов новой фазы. Структурную перестройку физической среды часто изучают на основе нелинейных модельных уравнений типа «реакция-диффузия», Кана-Хилларда и др.

Исследования современных технических систем часто опираются и на более сложные нелинейные математические модели Свифта-Хойенберга, Фусса-Винклера-Циммермана [43] и др., при использовании которых применяются численные методы, интегрированные в мощные программные комплексы автоматизированного проектирования, системы конечно-элементного анализа и другие программные продукты для инженерных расчетов. Численные исследования модельных уравнений опираются на такие фундаментальные свойства, как корректность (вычислительная устойчивость) и, в нелинейном случае, возможность проведения достаточно полного бифуркационного анализа.

Анализом бифуркационных эффектов в математических моделях начали заниматься еще в XIX веке, и к настоящему времени накопилось большое количество методик по их прогнозированию и «полезному использованию», появились многочисленные публикации и монографии. Однако, потребность в развитии новых методов бифуркационного анализа, соответствующих новым запросам практики и современным достижениям вычислительных технологий, сохраняется до сих пор. Задача исследования посткритических структурных перестроек весьма актуальна и требует привлечения разнообразных методов современного математического моделирования и новых вычислительных средств.

Следует подчеркнуть, что представленное в диссертационной работе решение проблемы оптимального выбора посткритических состояний связано с преодолением следующих трех промежуточных и взаимосвязанных задач, каждая из которых имеет самостоятельное значение:

1. решение так называемой «проблемы многих мод» или, по-другому, проблемы описания посткритической перестройки состояния в условиях вырождения по нескольким (более одной) модам (в порождающем состоянии);

2. проблема «аналитического описания» посткритических перестроек в условиях разрушения «симметрии параллелепипеда» (при которой, вообще говоря, отсутствует непрерывно зависящее от параметра семейство базисных мод);

3. проблема создания эффективного алгоритма вычисления оптимальных значений параметров ветви нелокальных бифурцирующих экстремалей.

Актуальность исследования этих проблем подкреплена появлением новых мощностей компьютеров, достаточных для реализации и выполнения разработанных сложных алгоритмов.

Степень разработанности темы. Бифуркационный анализ краевых и начально-краевых задач развивался в Воронежской математической школе, начиная с трудов М.А. Красносельского и его учеников — В.В. Стрыгина, Ю.Г. Борисовича, Ю.С. Колесова, Э.М. Мухамадиева, Н.А. Бобылева и др.

В настоящее время значительные результаты были достигнуты школой Ю.И. Сапронова, усилиями которой построены теоретические и конструктивные схемы анализа многомодовых и нелокальных бифуркаций. Были рассмотрены также важные примеры использования новых исследовательских схем в теории упругости, теории фазовых переходов и гидродинамике. На основе результатов этих исследований были построены конструктивные схемы анализа, которые внедрены вплоть до алгоритмов в системах символьной математики. Изучены также важные примеры модельных краевых задач [16].

В диссертации использован подход, основанный на том, что рассмотренные математические модели являются градиентными. Это обстоятельство позволяет использовать прямой подход к построению траекторий спуска в точки минимума функционала энергии. Однако, такой переход требует предварительного изучения бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения в порождающей точке минимума. При использовании прямого подхода в конкретных моделях непременно возникает вопрос обоснования возможности применения «фредгольмова анализа» вместе с задачами описания каустик и классификации раскладов бифурцирующих экстремалей.

Основы локального анализа в такой ситуации были заложены в работах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Э.М. Мухамадиева [3]. Многомодовые локальные и нелокальные бифуркационные задачи изучались позже

[3]Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления / ДАН СССР. – 1978. – Т. 240, № 3. – С. 530–533.

Ю.И. Сапроновым [4], Б.М. Даринским, С.Л. Царевым, Д.В. Костиным и др.

Задача оптимизации полигармонического импульса была перенесена на модель лопатки турбонасоса (как частный случай упругой балки на упругом основании). Математическая модель упругой балки на упругом основании изучалась в работах Ю.А. Митропольского и Б.И. Мосеенкова [5], G.W. Hunt, J.M.T. Thompson [6,7] , Б.С. Бардина и С.Д. Фурты [8] и Г.С. Писаренко.

Результаты исчерпывающего локального бифуркационного анализа равновесных конфигураций упругой балки на упругом основании в условиях двухмодового вырождения в случае однородного материала упругой системы ранее были получены Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым на основе фредгольмова анализа. Но при появлении параметра неоднородности материала в математических моделях упругой балки или пластины алгоритм Даринского-Сапронова теряет силу. Потребовалась его модификация и, в частности, разработка принципиально новой методики построения нормализованной главной части ключевой функции.

Как известно, первичную основу анализа нелинейных задач составляют задачи линейного анализа и такие две ее важнейшие составляющие, как корректная разрешимость линеаризованных модельных уравнений и спектральный анализ «ведущих» линейных операторов в модельных уравнениях [9].

Бесконечномерные динамические системы (системы с распределенными параметрами) часто исследуются на основе теории линейных полугрупп, развитой в работах Э.Хилле, Р.Филлипса, С.Г. Крейна и др. В теории уравнений параболического типа важное место занимают однопараметрические полу-

---

[4] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах. Успехи матем. наук. Т. 51, №1, 101-132 (1996).

[5] Мітропольский Ю.О., Мосеенков Б.І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). – Київ : Видавництво Київського університету. 1961. С. 123

[6] Thompson J.M.T., A General Theory of Elastic Stability. JOHN WILEY & SONS SONS, 1973, 322 p.

[7] Thompson J.M.T. Advances in Shell Buckling: Theory and Experiments / International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 25, No. 1 (2015). - 25 p.

[8] Бардин Б.С., Фурта С.Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании / Актуальные проблемы классической и небесной механики, Эльф, М., 1998. - С. 13–22

[9] Кадченко С.И., Какушкин С.Н. Нахождение собственных значений и собственных функций методом регуляризованных следов. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. 2015. 246 с.

группы линейных преобразований $U(t)$, $t \geq 0$, в исследовании которых важное место занимают и работы воронежских математиков. Линейные методы, используемые для решения нелинейных уравнений, применялись в трудах М.А. Красносельского, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльника, П.Е. Соболевского [10], Дж. ГолдстейнД. Хенри [11], Ф. Клемент, Х. Хейманс, С.Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер и др.

Этой тематике посвящены также работы и других математиков С.И. Пискарёва, Г.А. Свиридюка, В.Е. Фёдорова. Один из базовых исследовательских принципов основан на следующем замечании: уравнение

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v), \ \ (0 < t \leq t_0)v(0) = v_0 \,,$$

где $f(t, x)$ при каждом $t \in [0, t_0]$ — нелинейный оператор, при условии, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, сводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t - s)f[s, v(s)]ds.$$

(*метод Дюамеля*).

В теории и практике создания ряда технических устройств имеется необходимость отыскания решений, связанных с использованием оптимизированных импульсов. Например, повышение эффективности зубчатых инерционных механизмов за счет придания им движения с увеличенным коэффициентом асимметрии силового импульса является весьма актуальной задачей. Попытки создания односторонне направленных инерционных сил были предприняты еще в 40-х годах прошлого столетия немецкими инженерами, изготовившими инерционный самобалансный механизм, создающий возмущающую направленную инерционную силу, периодически изменяющуюся по величине по закону, названному «бигармоническим». Величина асимметрии (отношение наибольшего значения суммарной направленной инерционной силы к абсолютной величине наименьшего) для бигармонического механизма равна двум, и она оказалась недостаточной для практического использования. В настоящее время применяются полигармонические силовые импульсы (универсальное вдавливающее устройство по патенту РФ 2388868 (МПК

[10] Красносельский М.А., Забрейко П.П, Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, 1966 г.

[11] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений,1985 г.

E02D7/00, опубл. 10.05.2010), способ направленного инерционного вибровозбуждения по патенту РФ 2528715 (МПК E02D7/18, B06B1/16, опубл. 20.09.2014)), но оптимальная в смысле коэффициента асимметрии конструкция в этих работах не была предложена.

Кроме того, в исследованиях использовались теоретические и практические идеи, изложенные в широко известных монографиях по математическому моделированию В.И. Арнольда [12], А.А. Самарского и А.П. Михайлова.

Цели и задачи диссертационной работы. Развитие и применение новых методов бифуркационного анализа актуальных нелинейных краевых и начально-краевых задач, соответствующих новым запросам практики математического моделирования и современным достижениям вычислительных технологий. В частности, развитие новых и эффективных методов анализа многомодовых и нелокальных бифуркаций.

Нахождение по заданным начальным условиям оптимальных значений управляющих параметров и, следовательно, наилучших конструктивных решений технических устройств, работа которых описывается рассматриваемыми в диссертации математическими моделями.

Рассмотренные в диссертации задачи.

1. Анализ многомодовых бифуркаций стационарных состояний упругих слабо неоднородных балок и пластин в виде:

1.1. построения ветвей приближенных решений модельных уравнений в аналитической форме;

1.2. классификация бифуркационных раскладов ветвей решений;

1.3 описание каустик.

2. Обоснование применения «фредгольмова анализа» для однородных и неоднородных моделей упругого равновесия.

3. Разработка и реализация алгоритмов построения собственных и корневых векторов главных линейных частей модельных уравнений.

4. Разработка и реализация алгоритма построения нормализованных главных частей ключевых функций Ляпунова-Шмидта.

5. Разработка методов исследования корректной разрешимости начально-краевых задач для дифференциальных уравнений, возникающих при анализе математических моделей из таких областей как механика, гидродинамика, теория тепломассопереноса, радиофизика и т.д., на основе теории сильно

[12] Арнольд В.И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. – 2-е изд. стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 32 с.

непрерывных полугрупп преобразований. Получение представления решения таких задач и построения устойчивых алгоритмов для компьютерной реализации.
6. Построение оптимальных параметрических ветвей бифурцирующих устойчивых состояний, рассмотренных упругих систем.
7. Оптимизация параметров полигармонического импульса вибропогружателя.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые изложен анализ многомодовых бифуркаций состояний упругих систем с условием неоднородности. Для этого была разработана новая модификация вариационной редуцирующей схемы Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта, расширенная на случай отсутствия постоянных мод бифуркаций. В случае неоднородных упругих материалов преодолен *феномен отсутствия гладкой (и даже непрерывной) зависимости мод от «управляющих» параметров*. Основу решения составило введение и использование гладких семейств квазимод. В результате для балок и пластин разработан и апробирован алгоритм построения квазимод. Разработан алгоритм построения нормализованных главных частей ключевых функций в случае понижения симметрии параллелепипеда, что является необходимым при анализе математических моделей, учитывающих важные параметры систем, например, неравномерного распределения энергии в материале. Полученный новый алгоритм был апробирован на основе компьютерной реализации, позволяющей численно получать значения коэффициентов ключевых функций.

В диссертации впервые предложены полные решения ряда задач оптимизации по критерию «коэффициент несимметрии». Применение подхода, разработанного в диссертации, дало возможность определять и доказывать оптимальность технически значимых физических характеристик для ряда устройств и процессов. Так, указанные методы были применены к исследованию оптимальности математических моделей для виброустройств, которые конструируются из наборов сцепленных между собой шестерёнчатых звеньев. Такие устройства актуальны, например, при установки строительных свай. В диссертации для произвольного числа звеньев впервые найден и сформулирован математический закон (критерий), названный здесь «полигармоническим импульсом Максвелла-Фейера» (М-Ф импульс), которому должна удовлетворять модель, оптимальная в смысле коэффициента асимметрии.

Отметим, что все ранее запатентованные и сконструированные вибропогружатели как в нашей стране, так и за рубежом не удовлетворяют этому критерию. Наиболее близко к нему приближается лишь конструкция В.Н. Ермоленко с количеством звеньев равном 7.

Импульс М-Ф оказался естественным инструментом при исследовании амплитудно-фазового синтеза в математической теории антенн. Его использование позволило решить в диссертации одну из задач П.К. Суетина [13] об оптимальном выборе диаграмм направленности.

Кроме того, предложенный подход был применен и к задаче об импульсе изгиба турбинной лопатки, где также получены оригинальные результаты [17]–[19].

Результаты, связанные с оптимизацией параметров бифурцирующих решений нелинейных модельных уравнений, впервые были получены в работах автора диссертации.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенная модифицированная схема вариационной редукции Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта дает возможность существенно расширить класс решаемых задач по качественному анализу нелинейных математических моделей. Полученный теоретический результат позволил провести прикладной анализ на основе разработанных комплексов программ [45], [46]. Значимость этого анализа определяется возможностью проведения оптимизации управляющих параметров математических моделей и, как следствие, определения их наилучших значений, что на практике является одной из важнейших задач.

Представленные в диссертации результаты могут послужить базой для исследования математических моделей теории упругих систем, прикладной механики и теории фазовых переходов. В работе рассмотрены фундаментальные примеры моделирования многомодовых закритических прогибов упругих балок и пластин с упором на случай неоднородных материалов, а также оптимизация технических устройств на основе этих математических моделей.

Применение на практике представленных в диссертации методик даёт эффект при определении и оптимизации основных рабочих характеристик устройств, таких, как КПД, статический момент и усилие, развиваемое вибропогружателем.

Кроме того, предложенные методы и алгоритмы лежат в основе решае-

[13] Суетин П.К. Начала математической теории антенн М.: Инсвязьиздат, 2008. 228 с.

мой задачи из теории антенн, поставленной П.К. Суетиным, что также позволяет на практике определять оптимальные параметры антенн.

Методология и методы исследования.

В диссертации использованы методы функционального анализа, теории нелинейных фредгольмовых операторов, вариационного исчисления, теории особенностей гладких функций и фредгольмовых функционалов, а также методов теории приближенных вычислений.

В математических конструкциях диссертации использованы методы теории бифуркаций решений нелинейных краевых задач, вариационного исчисления, численных методов, теории катастроф и общей теории математического моделирования. Базу развитой в диссертации аналитической схемы составляет модифицированный вариационный метод Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта, оснащенный конструкциями теории особенностей гладких функций и теории катастроф.

При рассмотрении краевых задач теории упругих систем естественным образом использована операторная трактовка уравнений и эквивалентная постановка в виде вариационной задачи $V_\lambda(x) \longrightarrow \inf$, в которой $V_\lambda(x)$ — гладкое семейство гладких фредгольмовых функционалов, заданное на банаховом пространстве E, λ — параметр со значениями в некотором банаховом пространстве L (конечномерном или бесконечномерном).

В работе использовались следующие численные методы:

1. метод Галёркина-Ритца;
2. нелинейная модификация метода Галёркина–Ритца;
3. метод наискорейшего спуска;
4. формула Тейлора;
5. ряд Неймана;
6. вычисление квазимод;
7. метод конечных разностей.

Для построения компьютерных реализаций разработанных алгоритмов был выбран программный пакет Maple, который представляет собой систему компьютерной математики. Данный программный продукт ориентирован на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами, а также имеет собственный язык программирования.

Положения, выносимые на защиту.

Поиск и качественный анализ многомодовых бифуркаций экстремалей осуществляется поэтапно через решение следующих составляющих задач:
1) построение системы мод и квазимод модельного уравнения в порождающей критической точке с многомерным вырождением;
2) построение главной части ключевого уравнения и анализ его основных свойств – симметрии, версальности развертки по параметрам и пр.;
3) анализ и построение каустики (дискриминантного множества) в рассмотренных задачах;
4) классификация bif-раскладов ветвей решений, соответствующих отдельным ячейкам регулярности в пространстве R^m значений параметров;
5) построение первых асимптотик ветвей решений (по вектору закритических приращений параметров);
6) компьютерное изображение двумерных сечений каустик и закритических прогибов в избранных задачах;
7) алгоритм оптимизации закритических прогибов для рассмотренной функции качества *«Коэффициент несимметрии»*.

В диссертации изложены результаты решения перечисленных задач для потенциальных уравнений в условиях нарушения и понижения симметрий.

Получены приложения к следующим конкретным задачам:

– описание многомодовых прогибов упругих балок и пластин в случае нарушения их однородности,

– описание многомодовых прогибов турбинных лопастей и их оптимизация,

– оптимизация полигармонического импульса по коэффициенту несимметрии,

– оптимизация приема радиосигнала.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на конференции «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2006, 2008 гг.) [22], [27], на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г. Петровского (г. Москва, 2007 г.) [25], на Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна» (г. Воронеж, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016 гг.) [20], [23], [26], [28], [32], [33], [34], [39], на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (г.Воронеж, 2011, 2013, 2015 гг.) [31], [40]-[42], на Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения - XXIII» (Современные методы теории краевых задач) (г.Воронеж, 2012) [24], [36], [37], на Молодежной международной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения» (г. Воронеж, 2016), на международном молодежном симпозиуме «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» (г. Воронеж, 2014), на VII Международной научно-технической конференции «СИНТ'13», «СИНТ'15» «Разработка, производство и эксплуатация турбо-, электронасосных агрегатов и систем на их основе» [38], на Международной молодежной научной школе «Теория и численные решения обратных и некорректных задач» (г. Воронеж, 2012) [35], на семинаре Воронежского государственного университета по бифуркационному анализу нелинейных задач (руководитель — проф., д.ф-м.н. Сапронов Ю.И.) и кафедральном семинаре академика А.Т. Фоменко (г. Москва, 2015).

Кроме того, результаты по данной тематике ежегодно докладывались на Научной сессии Воронежского государственного университета в период с 2006 г. по 2016 г.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на параграфы, заключения, списка цитируемой литературы из 209 наименований и 2-х приложений, в которых приводятся тексты зарегистрированных программ, написанных в Maple. Общий объем диссертации — 297 стр.

Изложение проиллюстрировано графикой (34 рисунка).

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, степень её разработанности. Определяются цели и задачи диссертационной работы, её научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования. Приводится краткое содержание работы.

В первой главе изложены основы теории фредгольмовых функционалов, которые применяются для проведения исследований нелинейных математических моделей методами функционального анализа [16]. Даны необходимые определения и описание методов классической вариационной редукции Ляпунова–Шмидта, которая впервые была обобщена автором. Введенное в этой главе понятие ключевой функции дает возможность перехода от изучения нелинейных дифференциальных уравнений, которые являются математическими моделями различных физических систем, например колебания упругих систем, к изучению нормальных форм, имеющих вид многочленов с параметрами. Изучение таких нормальных форм проводится методами теории особенностей, для чего приведены основные понятия, такие как критическая точка, дискриминантное множество, каустика. В диссертационной работе приводятся сведения, касающиеся особенности типа многомерной сборки. Это вызвано тем, что в рассматриваемых задачах о прогибах упругих балок и пластин ключевые функции представляют собой функции типа версальной развертки особенности двумерной сборки. Приведены сведения о редукции деформации сборки и общие утверждения о бифуркации экстремалей из точки минимума.

Вариационную версию схемы Пуанкаре – Ляпунова – Шмидта можно представить в виде нелинейного аналога ритцевской аппроксимации. Ритцевской аппроксимацией функционала V на банаховом пространстве E называется функция

$$W(\xi) := V\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right), \qquad \xi = (\xi_1, \ \dots \ , \xi_n)^\top,$$

где $e_1, \ \dots \ , e_n$ есть некоторый линейно независимый набор векторов в E (базис ритцевской аппроксимации). Экстремалям $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ \dots \ , \bar{\xi}_n)^\top$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V. Точность ритцевских аппроксимаций можно повысить за счет увеличения количества базисных элементов. Но если рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$

где Φ будет гладким отображением из $N := span(e_1, \dots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то можно добиваться любой аппроксимативной точности при заданном наборе базисных функций, а значит априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

В данном разделе изложен алгоритм вычисления ключевой функции и асимптотического представления решения для дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемые в работе математические модели.

Во второй главе идет речь о новых методах построения таких ключевых функций в выбранных модельных примерах упругих систем. Решаются две проблемы: построение базиса ритцевской аппроксимации состоящего из корневых функций и вычисления главной части ключевой функции на его основе.

Впервые рассматривается случай неоднородного материала в нелинейных математических моделях. Новые методы исследования обобщают и, следовательно, усложняют схемы рассмотренные в первой главе. Главным отличием является отсутствие условия постоянства собственных функций и переход к так называемым *корневым функциям.* Для лучшего представления результатов приводится классическая схема вычисления главной части ключевой функции с использованием базиса ритцевской аппроксимации, состоящей из собственных функций, а также новая обобщенная схема, основанная на базисе ритцевской аппроксимации из корневых функций.

Впервые указан способ построения такого базиса ритцевской аппроксимации. При этом используется формула ортогонального проектора в форме, предложенной академиком В.П. Масловым.

В §2.1 приведено описание процедуры вычисления главной части ключевой функции W в случае базиса ритцевской аппроксимации, на основе собственных функций, и впервые предложена модификация этой процедуры для случая произвольного базиса. В пункте 2.1.3 приводятся теоремы 2.1, 2.2, доказывающие, что на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора, приведенной в монографии В.П. Маслова[14], можно построить базис ритцевской аппроксимации (после понижения симметрии) и на его основе построить главную часть ключевой функции.

Доказательство того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» и «лишних» мономов в ключевой функции не изменяет топологию изучаемых сечений каустик и структуру $bif-$раскладов, проведено на основе теорем о конечной определенности ростков функций и их деформаций.

В §2.3 изложена схема анализа бифуркаций равновесных конфигураций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании в условиях двухмодового вырождения (на базе общих утверждений первой и начала второй главы).

[14] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений.Наука. М. 1988, 312 с.

Нелинейная математическая модель движений балки с неоднородным материалом задается следующем уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(q\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) + \kappa\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w есть прогиб балки, то есть смещений точек средней линии, расположенной вдоль оси x, параметры κ, α отвечают за упругость и внешние воздействия, а параметр $q(x) = 1 + \varepsilon\gamma(x)$ – за неоднородности материала балки, представленного скалярным коэффициентом ε и функцией неоднородности материала балки $\gamma(x)$.

Первым шагом в исследовании такой задачи является отыскание стационарных состояний, заданных уравнением

$$\frac{d^2 w}{dx^2}\left(q(x)\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \kappa\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0. \tag{1}$$

Если рассмотреть краевые условия

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0, \tag{2}$$

отвечающие случаю свободной опёртости на границе (шарнирное закрепление), то полученная граничная задача может допускать 2−мерные вырождения, порождающие 2−модовые бифуркации.

Замечание 2.2. Случай жесткого закрепления на границе исследуется аналогично. При анализе используются только соответствующие конкретному случаю краевые условия и моды прогибов.

Уравнение (1) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(q(x)\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 - \kappa\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \alpha w^2\right) + \frac{w^4}{4}\right)dx. \tag{3}$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + r^2)\pi^2, \qquad \alpha = \alpha_1 := p^2 r^2 \pi^4, \qquad p, r \in \mathbb{N},$$

со стандартными модами бифуркации

$$e_1 = \sqrt{2}\sin(p\,\pi x), \qquad e_2 = \sqrt{2}\sin(r\,\pi x).$$

В работе предполагается, что $p = 1,\ r = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2,\ \alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен), $\delta_1 := \kappa - \kappa_1,\ \ \delta_2 := \alpha - \alpha_1$ – закритические приращения, $\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2\delta_2,\ \ \lambda_1 = \delta_1 - \pi^2\delta_2$.

Наличие «весового» множителя $q(x) \neq const$ устраняет возможность применения схемы Даринского – Сапронова [15], так как из-за него не выполняется условие постоянства мод бифуркации, на котором основан вычислительный алгоритм. В диссертационной работе впервые был осуществлен бифуркационный анализ решений краевой задачи (1), (2) на основе редукции Ляпунова – Шмидта к ключевой функции более общего вида

$$\widetilde{W}(\xi,\delta) = \inf_{w:\ \langle w,\widetilde{e}_1\rangle=\xi_1,\ \langle w,\widetilde{e}_2\rangle=\xi_2} V(w,\alpha_1+\delta_1,\kappa_1+\delta_2), \tag{4}$$

где $\{\widetilde{e}_k\}$ — «возмущенные» моды бифуркации.

$\widetilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon)$, образующие базис в двумерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B}$ в нуле, где

$$\mathcal{A}u := \frac{d^4w}{dx^4} + \kappa\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha I, \qquad \mathcal{B}w := \frac{d^2}{dx^2}\left(\gamma\frac{d^2w}{dx^2}\right),$$

$$e_k = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$$

(элементы $\widetilde{e}_k$ не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора $\mathcal{H}$).

Главная техническая трудность в построении ключевой функции состоит в вычислении коэффициентов h_k. В диссертации они вычисляются на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора. То есть, вместо собственных функций рассмотрены такие элементы $\widetilde{e}_j(\lambda)$, $j = 1,\ 2$, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)\widetilde{e}_j(\lambda) = \sum_k \alpha_{jk}(\lambda)\ \widetilde{e}_k(\lambda).$$

Функции $\widetilde{e}_j(\lambda)$ называются корневыми. Входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\lambda),\ \widetilde{e}_j(\lambda)$ гладко зависят от λ. В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\widetilde{e}_k(\lambda)\ :=\ \mathbf{P}(\lambda)(e_k),\ \text{где}\ \ \mathbf{P}(\lambda)\ =\ \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\ell}\mathcal{R}(\lambda,z)dz$$

[15] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки. Известия вузов. Математика. Казань. 1997. Т.2. С. 35–46.

— ортопроектор на двумерное корневое подпространство, ℓ — окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ — резольвента: $\mathcal{R}(\lambda, z) = (\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B} - zI)^{-1}$. И, таким образом,

$$\widetilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon),$$

где

$$h_k = \mathcal{M} e_k, \qquad \mathcal{M} \ := \ \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz.$$

Соотношения для возмущенных корневых функций представлены в

Теорема 2.4. *Возмущенные корневые векторы* $\widetilde{e}_k$, $k = 1, 2$ *можно представить в виде* $\widetilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon)$, *где* h_k *определяются соотношениями*

$$h_k = \mathcal{M} e_k,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}e_1 &= \sum_{n=3}^{\infty} \tfrac{2\sqrt{2}\, n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int\limits_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(\pi s)\, ds \right) \sin(n\pi x), \\ \mathcal{M}e_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \tfrac{8\sqrt{2}\, n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int\limits_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(2\pi s)\, ds \right) \sin(n\pi x). \end{aligned}\right\} . \qquad (5)$$

На основе полученных соотношений выведены формулы для коэффициентов главной части ключевой функции (теорема 2.5). После представления ключевой функции в нормальной форме

$$\widetilde{W}_q(\xi, \nu) = \frac{1}{2} \left(\widetilde{\nu}_1\, \xi_1^2 + \widetilde{\nu}_2\, \xi_2^2 + 2\, \widetilde{\nu}_3\, \xi_1 \xi_2 \right) + \frac{1}{4} \left(\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4 \right) +$$

$$o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4) O(\widetilde{\nu}) + o(\widetilde{\nu}),$$

дано описание каустики и $bif-$раскладов по методике, изложенной в предыдущих разделах.

Описание ветвления критических точек и первые асимптотики бифурцирующих точек по закритическим приращениям управляющих параметров для функции $\widetilde{W}$ полностью задаются ее главной частью, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 2$), четную по каждой переменной.

Параметры ν_1, ν_2 вместе с параметром ε (при заданной функции неоднородности $\gamma(x)$) образуют трехмерное пространство параметров $\mathbb{R}^3$.

Теорема 2.3. *В краевой задаче (1),(2) дополнение к дискриминантному множеству (подмножество $\mathbb{R}^3 \backslash \Sigma(f)$), рассмотренное в достаточно малой окрестности нуля, состоит из четырех связных открытых подмножеств $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5$ и Ω_9 (ячеек регулярности), которым соответствуют следующие bif-расклады: (1,0,0), (2,1,0), (2,2,1), (4,4,1).*

Каустика (бифуркационная диаграмма функций) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть ячеек регулярности. Каждой ячейке соответствует один из следующих раскладов бифурцирующих критических точек: $(1,0,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,1)$, $(4,4,1)$ (компонента l_k строки (l_0, l_1, l_2) равна количеству критических точек с индексом Морса k в рассматриваемом раскладе бифурцирующих критических точек).

В результате осуществлен полный бифуркационный анализ геометрической структуры дискриминантного множества и его дополнения, а также найдены все расклады бифурцирующих решений, соответствующих ячейкам регулярности. В диссертации приведены трехмерные изображения каустики (полученные с использованием оригинальных программных комплексов в компьютерной среде Maple [46]) и метаморфоз линий уровней ключевой функции.

Данный алгоритм был адаптирован и для исследования математической модели Ка́рмана прогиба упругой пластины на упругом основании. Проведенные исследования и результаты изложены в §2.4. Аналогично со случаем изучения балки, первоначально был изучен случай однородной пластины, а затем впервые был рассмотрен случай неоднородного материала. Получена теорема о представлении ключевой функции, на основе которой были получены численные приближенные устойчивые многомодовые решения. Алгоритм был реализован в программном комплексе [46] и получены соответствующие решения и их графики.

Замечание *Полученные результаты впервые показывают существование устойчивых многомодовых решений (прогибов рассмотренных упругих систем).*

Третья глава посвящена установлению корректной разрешимости задач для линейных и нелинейных математических моделей с применением методов теории сильно непрерывных полугрупп преобразований. С этой целью впервые вводится и применяется понятие C_0-операторного интеграла Лапласа, обобщающее классические преобразования Лапласа когда экспонента заменяется C_0 полугруппой. Такой подход совместно с операторным методом Маслова-Хевисайда позволил значительно расширить классы равномерно корректных задач, указать методы их точных и приближенных решений с их точными оценками и получить следующий результат.

Пусть A – генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geq 0$ класса C_0 в E. Это значит, что область определения $D(A)$ оператора A плотна в E. Область его значений совпадает со всем E, а резольвентное множество содержит комплексную полуплоскость $Re\lambda > \omega$. Семейство $U(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$1)\, U(0)=I, \qquad 2)\, U(t+s)=U(t)U(s), \qquad 3)\, \lim_{t\to 0}\|U(t)x-x\|=0, x\in E,$$
$$4)\, \|U(t)\| \leq M\exp(\omega t). \tag{6}$$

Для $f \in E$ исследуется корректная разрешимость задачи нахождения элемента $u \in D(A^n)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего равенству

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f, \qquad a_m \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

В соответствии с Ж.Адамаром, это означает, что уравнение (7) должно быть однозначно разрешимо при любых $f \in E$, оператор $\mathbb{A}^{-1}$ определен на всех f из E и непрерывен, то есть справедливо неравенство $\|\mathbb{A}^{-1}f\|_E \leq M\|f\|_E$, где константа M не зависит от f.

Справедлива следующая

Теорема 3.9 *Если корни многочлена $P_n(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A, то задача (7) равномерно корректна и для ее решения справедливо представление*

$$u = \int_0^\infty G(t)U(t)f dt, \tag{8}$$

где $G(x)$ – решение задачи Коши

$$P_n\left(-\frac{d}{dx}\right)G(x) = \delta(x), \tag{9}$$

$$G(0) = \frac{d}{dx}G(x)|_{x=0} = \dots = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}G(x)|_{x=0}, \tag{10}$$

$\delta(x)$— дельта функция.

Следующий результат, полученный для операторных краевых задач с вырождающимися коэффициентами, даёт представление решения через полугруппы.

Пусть B – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|$, A – линейный оператор с областью определения $\overline{D(A)} = B$, $t \in (0,1)$, $\mathfrak{C}^{(k)}(B)$ – пространство вектор-функций со значениями в B, k раз непрерывно дифференцируемых на $(0,1)$; $\mathfrak{B}^{(k)}(B)$— банахово пространство функций $x(t) \in \mathfrak{C}^{(k)}(B)$ с нормой $\|\|x\|\|_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \sup_{t\in(0,1)} \|x^{(j)}(t)\|$, $\|\|x\|\|_0 = \|\|x\|\|$.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Q(t)u(t) = Au(t) + f(t), \tag{11}$$

$Q(t)u(t) = a(t)u''(t) + b(t)u'(t)$, $a(t) \geq 0$, $a \in \mathfrak{B}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$, $b \in \mathfrak{B}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$, $f \in \mathfrak{B}(B)$, A— позитивный оператор, такой, что $-A$ является генератором полугруппы $V(-A,t)$ класса C_0.

Особенностью уравнения (11) является возможность обращаться в нуль (вырождение) коэффициента $a(t)$, при $t = 0$. В зависимости от порядка вырождения коэффициента $a(t)$ в нуле, для определения ограниченного решения уравнения (11), краевое условие при $t = 0$ может ставиться, а может и отсутствовать.

В связи с этим, М.В. Келдыш вводит следующие условия, характеризующие дифференциальное выражение $Q(t)$:

Условие $D^{(m)}$. Выражение $Q(t)$ удовлетворяет условию $D^{(m)}$, если при некотором натуральном m выполняется неравенство $b(0) + ma'(0) < 0$.

$$Qu(t) = Au(t) + f(t), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \delta_0 u(0) - \Theta_0 u'(0) = \varphi,\ \delta u(1) + \Theta u'(1) = \psi, \\ \varphi, \psi \in B,\ \Theta_i \cdot \delta_i > 0,\ i = 0,2. \end{gathered} \tag{13}$$

В диссертации, с применением конечно-разностного метода, устанавливается равномерно-корректная разрешимость неоднородной задачи (12)-(13).

Определение 3.34 *C_0–интегралом Лапласа функции $\varphi \in \Omega$ будем называть оператор*

$$\varphi^*(A) = \mathfrak{L}(A)[\varphi(t)] = \int_0^\infty V(-A,t)\varphi(t)dt. \tag{14}$$

Определение 3.35 *Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (11), если 1) $u(t) \in \mathfrak{B}(B)$; 2) $Qu(t) \in \mathfrak{B}(B)$; 3) $u(t) \in D(A)$ для $t \in (0,1)$; 4) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (11) в интервале $(0,1)$ при $f \in \mathfrak{B}(B)$.*

Определение 3.36 *Краевая задача (12)—(13) называется равномерно корректной, если для любых $\varphi, \psi \in B$, $f \in \mathfrak{B}(B)$ существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее от φ и ψ в норме B, и от f в норме $\mathfrak{B}(B)$.*

Теорема 3.14 *Пусть q_i— тип полугруппы $U(Q_i,t)$, $-\omega$— тип полугруппы $V(-A,t)$, тогда при $\omega > q_i$ задача (12)-(13) равномерно корректна и её решение представимо в виде:*

$$u(t,A) = \mathfrak{L}(A)\left[\mathfrak{L}^{-1}(\lambda)\left(S_2(t,\lambda)\varphi + S_3(t,\lambda)\psi + \right.\right. \\ \left.\left. + \int_0^1 \Gamma_2(t,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right)d\lambda\right](s)ds, \tag{15}$$

где функции $S_2(t,\lambda)$, $S_3(t,\lambda)$, $\Gamma_2(t,\xi,\lambda)$ аналогичны функциям $S_1(t,\lambda)$, $\Gamma_1(t,\xi,\lambda)$.

Аппроксимация $u'(t_i) \approx \frac{1}{h}[u_{i+1}-u_i]$, $u''(t_i) \approx \frac{1}{h^2}[u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}]$, $t_i = ih$, $h = \frac{1}{n}$, $i = 0,1,\ldots,n$ приводит задачи к разностным схемам вида

$$\mathfrak{M}_n(A)u^{(h)} = Q^{(h)}u^{(h)} + Au^{(h)} = f^{(h)} \tag{16}$$

с трехдиагональной операторной матрицей.

Указывается явный вид операторной матрицы $\mathfrak{M}_n^{-1}(A)$. При этом имеет место оценка устойчивости разностной схемы

$$|||\mathfrak{M}_n^{-1}(A)|||_{\mathfrak{B}(B)} \leq M|||\mathfrak{M}_n^{-1}(\omega)|||_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)}. \tag{17}$$

В §3.1 приведены примеры генераторов с особенностью.

Пусть функция $h(x)$ определена на интервале $x \in (a,b) \subset \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условиям: $h'(x) > 0$, $h(\infty) = -\infty$, $h(b) = \infty$.

Через $L_{p,\omega,h}$ будем обозначать банахово пространство функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\omega,h} = \left[\int_a^b e^{p\omega h(x)}|\varphi(x)|^p dh\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1. \tag{18}$$

Введем операторы $\mathbb{D}_{\alpha,h} = \alpha\frac{d}{dh}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ с областью определения $D(\mathbb{D}_{\alpha,h}) = \{\varphi : \varphi \in L_{p,\omega,h},\ \frac{d\varphi}{dh} \in L_{p,\omega,h}\}$.

Нетрудно проверить, что такие операторы являются генераторами сильно непрерывных групп линейных преобразований, действующих по правилу

$$U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + \alpha t)], \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

причем для них справедливо равенство

$$\|U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi\|_{p,\omega,h} = e^{-\alpha^2 \omega t}, \tag{20}$$

которое следует из соотношений

$$\int_a^b |U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x)|^p dh = \int_a^b e^{\alpha\omega p h(s)} |\varphi[h^{-1}(h(s) + \alpha t)]|^p \; dh =$$

$$= e^{-\alpha^2 p\omega t} \int_a^b e^{\alpha\omega p h(s)} |\varphi(s)|^p dh = e^{-\alpha^2 \omega p t} \|\varphi\|_{p,\alpha\omega,h}.$$

В случае $t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ семейства (19) являются сжимающими полугруппами класса C_0. В частности, для некоторых классических случаев имеем

1. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, $h(x) = x$, $x \in (-\infty, \infty)$, $U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi(x + \alpha t)$, $u(x) = \int_0^\infty U(t, A)\varphi(x - \alpha t)dt$, $\|u\| = \left[\int_a^b e^{\alpha p\omega x} |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$.

2. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = x\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $h(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$, $U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi(xe^{\alpha t})$, $u(x) = \int_0^\infty U(t, A)\varphi(xe^{-\alpha t})dt$, $\|u\| = \left[\int_a^b x^{\alpha p\omega - 1} |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$.

3. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = (1 - x^2)\frac{d\varphi}{dx}$, $h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1, 1)$, $U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1+\operatorname{th} t}{1-x\operatorname{th} t}\right)$, $u(x) = \int_0^\infty U(t, A)\varphi\left(\frac{1+\operatorname{th} t}{1-x\operatorname{th} t}\right)dt$, $\|\varphi\| = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\alpha p\omega}{2}} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)}$.

В четвертой главе рассмотрен новый функционал, называемый коэффициентом несимметрии (асимметрии) [7], [8], [14].

Этот функционал возникает в экстремальных задачах с полигармонической функцией. Например, задача поиска оптимальных конструкций вибрационных устройств связана с эффективным использованием направленного импульса, итоговой математической моделью которого является тригонометрический полином

$$f_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(kt), \;\; t \in [0, \pi], \;\; \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{21}$$

и связанный с ним функционал качества

$$K_n(\lambda) = \frac{\max_t f_n(t,\lambda)}{|\min_t f_n(t,\lambda)|}\,, \tag{22}$$

называемый *коэффициентом несимметрии*. При этом возникает задача максимизации функционала $K_n(\lambda)$ по вариациям λ

$$K_n(\lambda) \to \sup_\lambda$$

при условиях

$$\int_0^\pi f_n(t,\lambda)dt = 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = c > 0.$$

Исследования экстремальных свойств многочленов вида (21) проводились ранее и другими математиками, в частности Г. Полиа и Г. Сегё. Однако, в диссертации в главе 4 впервые ставится и решается вопрос об однозначном определении структуры многочлена, оптимизирующего коэффициент несимметрии и доказывается теорема 4.3 [14].

Теорема 4.3 *Многочлен (21) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера*

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k)\cos(kt).$$

При этом имеет место равенство

$$\max_\lambda K_n(\lambda) = n.$$

Кроме того, сформулированы и доказаны теоремы о свойствах оптимальных многочленов Максвелла-Фейера, задающих оптимальный (в смысле коэффициента несимметрии) импульс — импульс Максвелла-Фейера (М-Ф импульс). График важного для инженерно-технических задач М-Ф импульса представлен на рисунке 1.

Отметим, что характерным свойством М-Ф импульса является расположение минимумов на одном уровне.

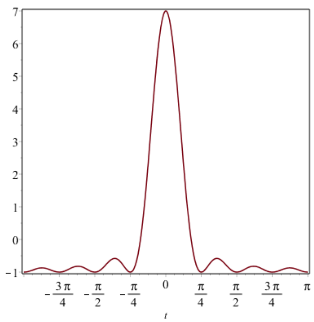

Рисунок 1

В пятой главе в §5.1 рассмотрена математическая модель изгиба упругой лопатки турбины и предложена методика оптимизации закритического изгиба, необходимая при расчетах конкретных турбонасосных конструкций. Важно, что математический аппарат, развитый в главе 2, позволил провести анализ соответствующей нелинейной модели неоднородной упругой лопатки, а затем на основе результатов, полученных в главе 4, осуществить оптимизацию устройства по критерию коэффициента несимметрии с построением соответствующего М-Ф импульса.

Эти результаты изложены в цикле статей, опубликованных в журнале «Насосы. Турбины. Системы», посвященном разработке, производству и эксплуатации энергетических систем [17], [18], [19] и докладывались на Международной научно-технической конференции «СИНТ» (Системы. Насосы.Турбины) в 2013 и 2015 годах [38].

В §5.2 рассматриваются приложения фундаментальных методов, описанных в предыдущих главах, к теории антенных устройств. Так в §5.2.1 изучается математическая модель прямоугольной антенны. При этом важным параметром является диаграмма направленности (ДН). Существуют многочисленные способы построения ДН, среди которых одним из наиболее важных является метод алгебраических многочленов.

Параметр $\Theta = \min\limits_{k} \frac{M_p}{M_k}$ назовём коэффициентом доминирования главного направления излучения. Ясно, что чем больше Θ, тем больше степень влияния главного направления излучения по сравнению с излучением боковых лепестков.

Во второй части §5.2 приведено решение задачи из математической теории антенн (поставленной П.К. Суетиным) по составлению примеров теоретически допустимых ДН.

В приложении А даны сведения о комплексах программ [45], [46]: описание, системные требования и текст программ.

В приложении Б приведены свидетельства о регистрации разработанных программ для ЭВМ.

Заключение

В диссертации разработаны новые методы посткритического анализа математических моделей и оптимизации многопараметрических ветвей (локальных и нелокальных) бифурцирующих состояний моделируемых систем. Разработка новых методов осуществлена на базе теории фредгольмовых функционалов, теории полугрупп линейных преобразований и ряда численных методов, как традиционных, так и вновь созданных. Разработанные методы легли в основу создания комплексов программ, позволивших в итоге решить следующие проблемы:

— *научная проблема*: создание аналитического аппарата для эффективного изучения рассмотренных в диссертации математических моделей (моделей неоднородных упругих систем на упругом основании, вибропогружателей и антенных устройств);

— *техническая проблема*: разработка методики подбора оптимальных значений параметров конкретных технических устройств (полигармонических вибропогружателей, турбонасосных агрегатов и антенных устройств);

— *фундаментальная проблема*: обоснования корректности применения фредгольмова анализа и численных методов, использованных в диссертации;

— *прикладная проблема*: построение и апробация алгоритмов компьютерного анализа рассмотренных моделей.

Все полученные результаты соответствуют специальности «05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Дальнейшими перспективами в разработке темы диссертационной работы являются: 1. Применение разработанных теоретических методов и вычислительных алгоритмов к анализу разнообразных посткритических процессов, моделируемых в классической механике, механике сплошных сред, теории кристаллов, технике, экономике, радиотехники и т.д. 2. Расширение и новое развитие разработанных средств анализа с целью применения к более широкому классу проблем и задач посткритического анализа разнообразных систем, в том числе к проектированию и созданию новых технических средств (виброустройств, турбинных лопаток, радиоантенн и т.д.).

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в научных журналах, рекомендованных ВАК

1. Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях / Д.В. Костин // Матем. заметки. – 2008. – Т. 83, № 1. – С. 50–60.

2. Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Доклады Академии наук. 2008. – Т. 418, № 4. – С. 295–299.

3. Костин Д.В. Итерационные пространства локально интегрируемых функций / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин //Доклады Академии Наук, 2011, том 437, №5, с. 597–600.

4. Костин Д.В. C_0-операторный интеграл Лапласа и краевые задачи для операторных уравнений с вырождением / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2011. – Т. 441, № 1. – С. 10–13.

5. Костин Д.В. Амплитудная оптимизация циклов, бифурцирующих при наличии кратных резонансов / М.Д. Джасим, А.Р. Эфендиев, А.П. Карпова, Д.В. Костин // Вестник Дагестанского государственного университета. 2012. Вып.1, С. 99-105.

6. Костин Д.В. Ветвление и оптимизация циклов при наличии кратных резонансов / М.Д. Джасим, А.П. Карпова, Д.В. Костин // Вестник воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2012. №1. С. 99-109.

7. Костин Д.В. Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов /В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // ДАН. – 2012. Т. 445, № 3. – С. 271–273.

8. Костин Д.В. Оптимизация полигармонического импульса / В.Н. Ермоленко, В.А. Костин, Ю.И. Сапронов, Д.В. Костин // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск 2012, №27 (286), вып. 13. С.35-44.

9. Костин Д.В. О точных решениях задачи Коши для некоторых уравнений параболического и гиперболического типов / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2013. – Т. 448, № 1. С. 19–21.

10. Костин Д.В. Функция нелинейного осреднения В.П. Маслова и математические модели в экономике / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии Наук, 2013, 449, №3, С. 263–266.

11. Костин Д.В. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2013, 452, №4, С. 367-370.

12. Костин Д.В. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2014, 455, №2, С. 142-146.

13. Костин Д.В. О полугруппах сдвигов и деформаций в анизотропных пространствах функций с равномерной метрикой / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2014, 459, №1, С. 14-16.

14. Костин Д.В. Бифуркации резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии / Д.В. Костин // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 12. - С. 90-109.

15. Kostin D.V. On well-posed solvability of boundary value problems for equations with fractional derivatives in hyper-weight spaces of continuous functions on R^+ / D.V. Kostin // Applicable Analysis Volume 96, 2017 – Issue 3, p.396-408.

Монография

16. Костин Д.В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем /Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов. - Воронеж: Издательство ВГУ, 2012, 207 с.

Другие научные публикации

17. Костин Д.В. К вопросу оптимизации закритического изгиба упругой лопатки турбины /Д.В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. — 2012 №3(4) — С.67-71.

18. Костин Д.В. Анализ изгибов упругой лопатки турбины с учетом неоднородности материала /Д.В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. — 2013 №3 (8). — С.56-61.

19. Костин Д.В. Математическая модель изгиба неоднородной турбинной лопатки и коэффициент несимметрии /Д.В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. № 1 (10) / 2014 С.68-71

20. Костин Д.В. Плоские сечения дискриминантного множества для уравнения прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Воронежская зимняя математическая школа - 2006 (тез. докл.).- Воронеж, 2006

21. Костин Д.В. Построение ключевой функции в краевой задаче, определяющей посткритические равновесные конфигурации слабо неоднородной балки / Д.В. Костин // Межвузовский сборник трудов семинара по фундаментальному и прикладному анализу.-Старый Оскол, 2006

22. Костин Д.В. О двухмодовых бифуркациях равновесных конфигураций слабо неоднородной балки на упругом основании / Д.В. Костин // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2006. Материалы научной конференции, 17-22 апреля 2006. - СПб., 2006. - 251 с.

23. Костин Д.В. Ортопроектор теории возмущения линейных операторов и бифуркации равновесия слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Сборник трудов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2006 .- Воронеж: ВорГУ, 2006.

24. Костин Д.В. Бифуркации равновесий конфигураций слабо неоднородной балки / Д.В. Костин // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XVIII» - 2007. - Воронеж: ВорГУ, 2007.

25. Костин Д.В. Анализ ветвления равновесных конфигураций неоднородной балки / Д.В. Костин // Международная конференция, посвященная памяти И.Г. Петровского (XXII совместное заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского): Тезисы докладов. - М.: Изд-во МГУ, 2007. - 379 с.

26. Костин Д.В. Об одной схеме бифуркационного анализа фредгольмовых уравнений / Костин Д.В. // Воронежская зимняя математическая школа - 2008 (тез. докл.).- Воронеж, 2008 - 179 с.

27. Костин Д.В. Двухмодовые бифуркации решений уравнения Кармана в случае слабо неоднородной пластины / Д.В. Костин // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2008. Материалы научной конференции, 14-19 апреля 2008. - СПб., 2008. — 180 с.

28. Костин Д.В. Применение асимптотических методов теории линейных операторов в анализе бифуркаций экстремалей /Д.В. Костин // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна 2008, Воронеж, ВорГУ, 2008, 385с.

29. Костин Д.В. Ветвление экстремалей в точках минимума однородными особенностями четвертого и шестого порядков /Б.М. Даринский, И.В. Колесникова, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // Вестник Воронежского госу-

дарственного университета Серия: Физики.Математика, 2008, №1, январь-июнь, 285с.

30. Костин Д.В Исследование дискриминантного множества полной развертки двумерной сборки / Д.В. Костин // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 7. Воронеж: ВорГУ, 2011. – С. 67-78.

31. Костин Д.В. Исследование функций заданных на R^1 введением искусственной многомерности /В.А. Костин, Д.В. Костин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронежской зимней математической школы / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. — С. 186-187.

32. Костин Д.В. К решению задачи о распространении сигнала во фрактальных средах в классах функций не преобразуемым по Лапласу / Д.В. Костин, А.В. Костин, В.А. Костин// Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С.109-111.

33. Костин Д.В. Об оптимальном выборе диаграммы направленности в математической теории антенн / Д.В. Костин // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С.111-112.

34. Костин Д.В. Об одной задачи П.К. Суетина в математической теории антенн / Д.В. Костин, М.Д. Джасим // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С.112-114.

35. Костин Д.В. О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач для уравнений с дробными производными / С. Бадран, А.В. Костин, Д.В. Костин // Материалы международной молодежной научной школы Теория и численные решения обратных и некорректных задач. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. – С.219-224.

36. Костин Д.В. О пространствах функций заданных на R, R^+, инвариантных относительно дробного интегрирования /В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XXIII» / Воронежский государствнный университет, Московский государ-

ственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. - Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 95-96.

37. Костин Д.В. О третьей краевой задаче для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве на R^+ /Д.В. Костин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XXIII» / Воронежский государствнный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. - Воронеж : Издательско - полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 97-98.

38. Костин Д.В. Изгибы неоднородной упругой лопатки турбины и ее оптимизация по коэффициенту несимметрии /Д.В. Костин // Разработка, производство и эксплуатация турбо-, электронасосных агрегатов и систем на их основе: труды VII Международной научно-технической конференции «СИНТ'13». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2013. – С. 111-116.

39. Костин Д.В. Коэффициент несимметрии /Д.В. Костин // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2014» [Текст] / под. ред. В.А. Костина. - Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2014. 435 с.

40. Костин Д.В. К моделированию кластерной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии /А.С. Коротких, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 2 февраля 2015г.) / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – С. 63-66.

41. Костин Д.В. C_0-операторные уравнения и полугрупповое /В.А. Костин, М.Х. Гим, Д.В. Костин// Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 2 февраля 2015г.) / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. - 200 с. С. 68-69.

42. Костин Д.В. Задача без начальных условий для диффузии на отрез-

ке /Д.В. Костин, М.Н. Небольсина// Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 2 февраля 2015г.) / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. - 200 с. С. 85-86

43. Костин Д.В. К моделированию структурной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии /А.С. Коротких, Д.В. Костин, Т.И. Костина, Ю.И. Сапронов // Научно-технический журнал Насосы. Турбины. Системы. Изд. ООО НПЦ «Научная книга» 1(14) 2015. - С.81-85

44. Костин Д.В. Корректная разрешимость задач без начальных условий для обобщенного уравнения Эйлера / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2016. С. 229–233.

45. Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ / Костин Д.В. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. №2017610066 09.01.2017.

46. Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ / Костин Д.В. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. №2017610263 09.01.2017.

Подписано в печать 02.03.17. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 1,86
Тираж 100 экз. Заказ 111

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательского дома ВГУ.
394000, Воронеж, ул. Пушкинская, 3