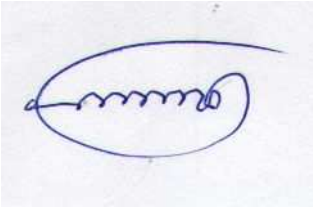
на правах рукописи



МЕАЧ МОН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУННЫХ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2014

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент, Шабров Сергей Александрович
Официальные оппоненты:	Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики, заведующий Батаронов Игорь Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный технический университет, кафедра высшей математики и физико-математического моделирования, заведующий
Ведущая организация	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»

Защита состоится 24 сентября 2014 года в 15.10 на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, аду. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и сайте Воронежского государственного университета,
http://www.science.vsu.ru/

Автореферат разослан «___» июля 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Шабров С. А.

Актуальность темы. Математическое моделирование бурно развивается: расширяются объекты, как с позиций размерности, так и с учётом нелинейных составляющих изучаемого объекта. Несмотря на это остаются объекты, моделирование различных процессов в которых либо трудно формалируемо, либо невозможно. Это особенно актуально в случае, когда математическая модель реализуется в виде граничной задачи. В этом случае трудности, возникающие, как при анализе полученных моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения (а в ряде случаев и «разрывностью» решения). Подобные проблемы обычно решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М., Владимиров В.С., Егоров Ю.В., Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р., Маслов В.П., Цупин В.А., Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. и многие другие). На этом пути возникает ряд проблем, например, проблема интерпретации умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерывных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима. Переходя к алгебре обобщенных функций Коломбо эту проблему пытаются «обойти». Но на этом пути возникают определенные трудности и неудобства при анализе решений. Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ-функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (Мышкис А.Д. и Владимиров А.А.). Другая проблема — слабая разрешимость краевых задач, что для приложений недостаточно.

Главное направление развития здесь диктовала спектральная теория. В спектральных вопросах наиболее эффективны теория обобщенных функций и теория операторов (Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Левитан Б.М., Саргсян И.С., Като Т., Марченко В.А., Рид М., Саймон Б., Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х., Гасымов М.Г., Михайлец В.А., Винокуров В.А., Садовничий В.А., Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А., Korotyaev E., Митягин Б.С., Хромов А.П., Савчук А.М., Ширяев Е.А., Djakov P., Джаков П., Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. и многие другие).

Моделирование колебательных процессов струнных и стержневых систем возникают во многих отраслях естествознания и техники, и здесь можно отметить работы В.А. Ильина, Нахушева А.М., Нахушевой В.А., Знаменской Л.Н., Чабакаури Г.Д., Бахвалова Н.С., Эглит М.Э., Боровских А.В. и многих других. В то же время, как правило, наличие у внешней среды локализованных особенностей приводящих к потере гладкости

у решения не рассматривались.

Еще одно направление развития — это качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы, имеющей структуру графа. Такой подход очень эффективен, так как моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами. В частности, для объектов имеющих разную структуру, приводящую к разным порядкам на различных ребрах (Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В., Прядиев В.Л., Лазарев К.П., Nicaise S., Lumer G., Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G., Белоглазова Т.В., Дикарева Е.В., Перловская Т.В.). Однако, при создании названной теории предполагалась достаточная гладкость коэффициентов (за исключением, быть может конечного числа точек). В последнее время для негладких на ребрах коэффициентов стали появляться работы (Зверева М.Б.) устраняющие этот пробел.

Работы Стилтьеса о нити с бусинками, Крейна М.Г. и Гантмахера Ф.Р., Крейна М.Г. и Каца И.С. о произвольно нагруженной струне, работы Келлога О. обозначили направление исследований в интересах физической теории колебаний. Однако, через некоторое время исследования в этом направлении «замерли». И после выхода работ Ю.В. Покорного в 1999 и 2002 годах в Докладах Российской Академии Наук, это направление получило новую жизнь, наряду с интегралом Стилтьеса было предложено использование производных Радона–Никодима. Это направление исследования показало свою эффективность в теории граничных задач второго порядка: построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (Покорный Ю.В., Шабров С.А., Зверева М.Б., Голованева Ф.В., Давыдова М.Б.)

Цели и задачи исследования. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложных физических систем, состоящих из струн, стержней, реализуемых в виде граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

— вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней, струн, помещенных во внешнюю с локализованными особенностями;

— доказательство корректности полученных математических моделей;

— изучение возможности применения метода Фурье;

— разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений второго и четвертого порядков (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);

— разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

— решение задач прикладного характера:

а) приближенное решение математических моделей, описывающих колебания неоднородной струны (с двумя закрепленными концами), находящейся во внешней среде с локализованными особенностями; б) приближенное решение дифференциальной модели, описывающей малые колебания консоли, находящейся в среде с особенностями.

Обьект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочлененные одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа. Адаптированный метод конечных элементов для граничных задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона-Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые колебания систем, состоящих из стержней и струн, имеющих внутренние особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Разработка эффективных численных методов решения граничных

задач для уравнений второго и четвертого порядков (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

4. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим обьектом которых является единое уравнение с производными по мере. 2. Доказана корректность математических моделей второго и четвертого порядков с производными по мере. 3. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость резултатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающей колебания одномерных обьектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающих из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны эффективные численные методы применительно к математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных задач с производными Радона-Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования обьектов и явлений», п. 2. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Современные методы теории краевых задач» на Воронежской

весенней математической школы «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2013–2014 гг.), на семинарах профессора А.Д. Баева (2013–2014 гг.), профессора М.И. Каменского (2013–2014 гг.).

Публицации. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты полученные лично автором.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 46 наименований и 5 приложений, в которых приводятся листинги программ, написанных на Python и таблицы значений приближенного решения, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 135 страницах и содержит 14 рисунков и 2 таблиц.

Основное содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность темы, научная новизна, формулируются цели и задачи исследования.

В первой главе «**Математическая модель малых колебаний стилтьесовской струны**» изучается модель вынужденных колебаний струны со средоточенными массами, поменщенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, и закрепленными концами. Пусть струна натянута вдоль отрезка $[0, \ell]$, имеющая произвольное распределение масс (включая и сосредоточенные массы), и закреплена на концах. Будем рассматривать малые поперечные колебания; смещения каждой точки происходят в одной плоскости, перпендикулярно положению равновесия струны. Через $u(x,t)$ мы обозначим отклонения от положения равновесия точки x в момент времени t. Через $M(x)$ обозначить массу участка $[0; x)$ струны. Модель малых колебания реализуется в виде:

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial \sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

($\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — начальное отклонение от положения равновесия и начальная скорость соответственно). В точках ξ_i в которых имеются сосредоточенные силы, упругие опоры или сосредоточенные силы $f(x,t)$;

уравнение в (1) реализуется в виде:

$$\Delta M(\xi_i)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_i,t) = \Delta\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\xi_i,t) - u(\xi_i,t)\Delta Q(\xi_i,t) + f(\xi_i,t),$$

где $\Delta\varphi_i(\xi_i) = \varphi(\xi+0) - \varphi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке ξ_i.

Решение $u(x,t)$ мы будем искать в классе E функций непрерывных по совокупности переменных, сама функция и ее производная u'_x при всех фиксированных x имеет непрерывные производные до второго порядка по переменной t; при каждом t $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по переменной x на отрезке $[0;\ell]$; первая производная $u'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна по переменной x для всякого фиксированного t.

Уравнение в (1) задано при всех (x,t), принадлежащих декартовому произведению множеств $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ и $[0;T]$. Первое множество строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру σ. На $[0;\ell]$ введем метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Достаточно очевидно, что $([0;\ell],\varrho)$ неполное метрическое пространство. Стандартное пополнение (с точностью до изоморфизма) приводит к множеству $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$, причем $\xi-0$ и $\xi+0$ ранее были предельными.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $Q(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, $\inf p(x) > 0$, $Q(x)$ — неубывающая функция; $f(x,t)$ — непрерывна по совокупности переменных. Математическая модель (1) не может иметь более одного решения, определенного на $\overline{[0;\ell]}_\sigma \times [0;T]$, в классе E.*

Доказано, что (1) является корректной.

Во второй главе «О возможности применения метода Фурье» изучается возможность применение метода Фурье к задаче (1). Для этого некоторые свойства амплитудные функций. Доказана возможность применение метода разделения переменных, а именно доказана.

Теорема 2. *Пусть $p(x)$, $Q(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$; $p(x)$ отделена от нуля; $Q(x)$ — не убывает на $[0;\ell]$. Пусть $\bar\varphi_0(x)$ и $\bar\varphi_1(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$; производные $\bar\varphi'_0(x)$ и $\bar\varphi'_1(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводные $p(x)\bar\varphi_0{}'(x)$ и $p(x)\bar\varphi_1{}'(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$; функции $\dfrac{L(\bar\varphi_0)(x)}{M'_\sigma(x)}$ и $\dfrac{L(\bar\varphi_1)(x)}{M'_\sigma(x)}$ непрерывны на $[0;\ell]$; $\dfrac{L(\bar\varphi_1)(x)}{M'_\sigma(x)}$ — абсолютно непрерывна и ее производ-*

ная имеет конечное изменение на $[0;\ell]$*;* $\bar{\varphi}_0(0) = \bar{\varphi}_0(\ell) = L(\bar{\varphi}_0)(0) = L(\bar{\varphi}_0)(\ell) = \bar{\varphi}_1(0) = \bar{\varphi}_1(\ell) = 0$*. Тогда, функция*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}t \right), \tag{2}$$

где $\varphi_k(x)$ *— нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению* λ_k*,*

$$A_k = \int\limits_0^{\ell} M'_\sigma \varphi_k(x)\bar{\varphi}_0(x)d\sigma, B_k = \int\limits_0^{\ell} M'_\sigma \varphi_k(x)\bar{\varphi}_1(x)d\sigma,$$

является решением математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma}, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases}$$

причем ряд (2) можно дифференцировать почленно по t *дважды и по* x, σ *также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике* $[0;l] \times [0,T]$*.*

В третье главе «**Математическая модель малых колебаний стержневой системы**» изучается математическая модель малых колебаний стержневой системы. Поместим начало координат в один из концов стержневой системы. Пусть в точках $\{\xi_i\}_{i=0}^{i=n}$ стержни соединены шарнирно и присутствует две пружины, одна — реагирующая на изгиб стержней, находящихся слева и справа от точки ξ_i , а вторая — на отклонение. Изучаемая система в состоянии покоя расположена вдоль некоторой прямой, по которой на правим ось абсцисс. Через $u(x,t)$ обозначим отклонение от положения равновесия точки в момент времени. Будем рассматривать малые колебания, при которых каждая точка системы смещается перпендикулярно положению равновесия, т.е. оси Ox. В точки ξ_i поместим массы m_i . Математическая модель малые колебаний системы реализуется в виде:

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial\mu\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u\frac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u''_{x\mu}(0,t) = u''_{x\mu}(\ell,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi_0}(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi_1}(x), \end{cases} \tag{3}$$

Показана корректность модели (2).

В четвертой главе «**Адаптация метода конечных элементов**» метод конечных элементов адаптируется на изучаемые модели.

Приближенное решение $u_N(x,t)$ математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x), \end{cases}$$

будем искать в виде

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t)\varphi_k(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определяемые следующим образом. Отрезок $[0;\ell]$ разобьем на N равных (для удобства) частей, и

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} (x - x_{k-1})\dfrac{N}{\ell}, & \text{если} \quad x \in [x_{k-1}; x_k] \\ (x_{k+1} - x)\dfrac{N}{\ell}, & \text{если} \quad x \in (x_k; x_{k+1}] \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [x_{k-1}; x_{k+1}] \end{cases}$$

здесь $x_k = k\dfrac{\ell}{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Доказана теорема.

Теорема 3. *Пусть $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma \geqslant 0$, $p(x) > 0$ и начальные условия $\overline{\varphi}_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ таковы, что математическая модель*

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x), \end{cases} \tag{4}$$

имеет единственное решение в классе E; $u(x,t)$ и $u_N(x,t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда, справедливо неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^\ell {w'_t}^2(x,t)\,dM + \int_0^\ell {w'_x}^2(x,t)\,dx + \int_0^\ell w^2(x,t)\,dQ\right)^{1/2} \leqslant \overline{C}\cdot\sqrt{h}.$$

Приближенное решение $u_N(x,t)$ математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u''_{xx}(0,t) = u''_{xx}(\ell,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x), \end{cases} \tag{5}$$

будем искать в виде

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_{2k-1}(t)\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^{N} a_{2k}(t)\varphi_{2k}(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определяемые следующим образом. Отрезок $[0;\ell]$ разобьем на N равных (для удобства) частей, и

$$\varphi_{2k-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^3, & x \in [x_k - h, x_k] \\ 1 - 3\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^3, & x \in [x_k, x_k + h] \\ 0, & \text{остальные } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2k}(x) = \begin{cases} (x-x_k)\left(1 + \dfrac{x-x_k}{h}\right)^2, & x \in [x_k - h, x_k] \\ (x-x_k)\left(1 - \dfrac{x-x_k}{h}\right)^2, & x \in [x_k, x_k + h] \\ 0, & \text{остальные } x. \end{cases}$$

здесь $x_k = k\dfrac{\ell}{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Теорема 4. *Пусть $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma \geqslant 0$, $p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$ и начальные условия $\overline{\varphi}_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ таковы, что математическая модель*

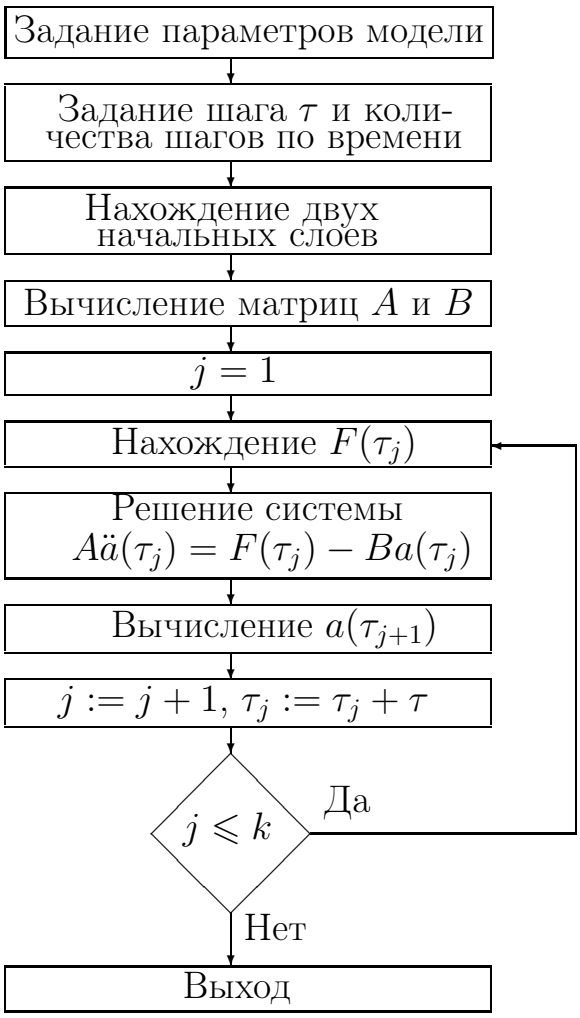
$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u''_{xx}(0,t) = u''_{xx}(\ell,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x), \end{cases} \tag{6}$$

имеет единственное решение в классе E; $u(x,t)$ и $u_N(x,t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения.

Тогда, справедливо неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int\limits_0^\ell w_t'^2(x,t)\,dM+\int\limits_0^\ell p(x)w_{xx}''^2(x,t)\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^\ell r(x)w_x'^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^\ell w^2(x,t)\,dQ\right)^{1/2}\leqslant\overline{C}\cdot h. \quad (7)$$

Алгоритм программного комплекса:



Алгоритм для проведения расчетов состоит из следующих шагов:

1. Задание коэффициентов модели.
2. Задание шага τ и количества шагов k по времени.
3. Нахождение двух начальных слоев; матриц A и B.

4. Вычисление правой части $F(\tau_j)$.
5. Решение системы $A\ddot{a}(\tau_j) = F(\tau_j) - Ba(\tau_j)$.
6. Нахождение следующего слоя.
7. Увеличение счетчика j и значения τ_j.
8. Если $j \leqslant k$, то перейти к пункту 4.

Схема взаимодействия модулей скрипта довольно проста, и представлена на рисунке 1.

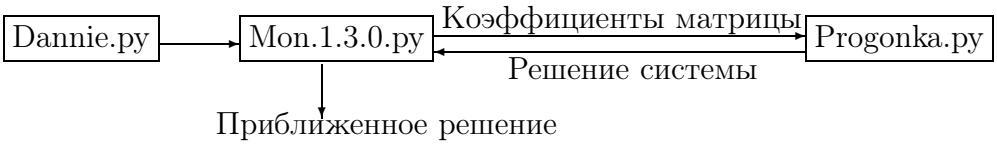


Рис. 1: Схема взаимодействия модулей

Проведены численные эксперименты с помощью программ написанных языке программирования Python.

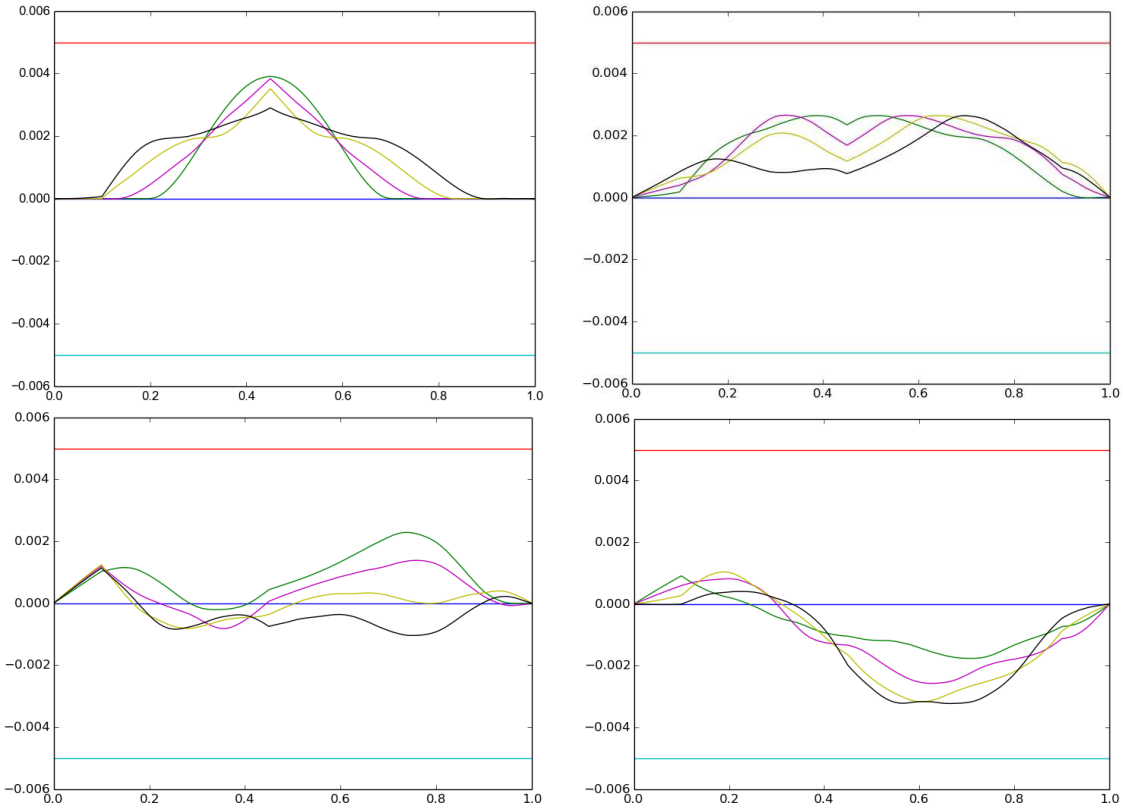


Рис. 2: Форма струны при некоторых значениях времени t

В заключении излагаются основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В работе предложены качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона-Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые колебания систем, состоящих из стержней и струн, имеющих внутренние особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений второго и четвертого порядков (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

4. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях из перечня ВАК РФ

1. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун–та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

2. Баев А.Д. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун–та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 57–63.

Публикации в других изданиях

3. Меач Мон О корретности математической модели малых поперечных колебаний стилтьесовской струны с произвольным распределением масс / Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 2. — С. 31–34.

4. Меач Мон. О функции влияния одной дифференциальной модели четвертого порядка / Меач Мон, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения — XXIV» (доп.вып.). — Воронеж, 2014. — С. 6–7.

5. Меач Мон Об адаптации метода конечных элементов для математической модели второго порядка с негладкими коэффициентами / Меач Мон // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXV». — Воронеж, 2014. — С. 122–124.

6. Меач Мон Ометоде конечных элементов, адаптированного для математической модели четвертого порядка с производными по мере / Меач Мон // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXV». — Воронеж, 2014. — С. 124–125.