

На правах рукописи

Цветкова

Цветкова Инна Владимировна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ХААРОВСКИХ РАСШИРЕНИЙ
СТАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР**

Специальность: 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж
2017

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Павлов Игорь Викторович

Официальные оппоненты: Гликлик Юрий Евгеньевич, доктор
физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
университет», математический факультет,
кафедра алгебры и топологических
методов анализа, профессор;

Гущин Александр Александрович, доктор
физико-математических наук, профессор,
Математический институт им. В.А. Стеклова
РАН, отдел теории вероятностей и
математической статистики, ведущий
научный сотрудник.

Ведущая организация ФГБОУ ВО «Уфимский государственный
авиационный технический университет»

Защита состоится «28» июня 2017 года в 15 ч. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд.335.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, а также на сайте

http://www.science.vsu.ru/dissertations/4410/Диссертация_Цветкова_И.В..pdf

Автореферат разослан «26» мая 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.20
кандидат физико-математических наук,
доцент



С.А. Шабров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В связи с высокой динамикой событий, происходящих на финансовых рынках, возникает потребность в инструментах, позволяющих производить сложные финансовые расчёты. Создание таких инструментов тесно связано с разработкой соответствующих алгоритмов и программных комплексов.

В настоящее время основные исследования в финансовой математике связаны с так называемыми неполными финансовыми рынками. В диссертации рассматриваются статические (\mathbf{B}, \mathbf{S}) -рынки со счётным числом состояний, которые автоматически являются неполными. Основная задача, решаемая в работе, — расширение таких рынков до полных. Используемые при этом методы и техника расчётов основаны на теории хааровских интерполяций финансовых рынков, предложенной проф. И.В. Павловым и развитой им и его учениками М.Н. Богачёвой, А.Г. Данекянц, Т.А. Волосатовой, Г.А. Можаяевым, Э.А. Пилосян. В настоящей диссертации эта техника получила своё дальнейшее развитие. Исследования основаны на изучении важного интерполяционного свойства мартингальных мер — ослабленного свойства универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ). С помощью мартингальных мер, удовлетворяющих этому свойству, и специальных хааровских интерполяций исходной одношаговой фильтрации можно интерполировать заданные неполные финансовые рынки до полных.

За последние сорок лет наблюдается бурное развитие методов стохастического анализа, позволяющих моделировать эволюцию цен акций, облигаций, опционов, фьючерсов и других вторичных ценных бумаг. Многие фундаментальные факты в этом направлении были получены в результате использования теории мартингалов. В нашей стране исследование проблем финансовой математики было инициировано в начале 90-х годов академиком РАН, профессором А.Н. Ширяевым и участниками руководимых им научных семинаров в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. В список этих ученых входят А.А. Гущин, Ю.М. Кабанов, Д.О. Крамков, А.В. Мельников, А.А. Новиков и многие другие. На юге России в указанном направлении активно работают И.В. Павлов, Д.Б. Рохлин и их ученики. Среди иностранных учёных следует отметить работы Ф.Делбаена, Ж. Жакода, Д. Зондермана, М. Йора, Х. Фёльмера, В. Шахермайера, А. Шида, С. Шрива и многих других. Однако в разработке и применении интерполяционных методов, создании соответствующих алгоритмов и комплексов программ южно-российская школа находится на передовых позициях.

Задача преобразования неполных рынков в полные впервые была рассмотрена в 1987 году в работе М.Такку и В.Виллингера¹, где переход от неполных

¹ *Taqqu M.S., Willinger W.* The analysis of finite security markets // *Adv. Appl. Prorab.* — 1987. — 9. p. 1-25.

рынков к полным осуществлялся заменой исходной мартингальной меры неэквивалентной ей мартингальной мерой. Иную методику предложили А.В. Мельников и К.М. Феоктистов в 2001 году ². В их работе пополнение финансового рынка проводилось посредством добавления к акциям исходного рынка дополнительных рисков активов, функционально зависящих с изначальными. В работах И.В. Павлова, М.Н. Богачёвой была заложена основа принципиально иного способа перехода от неполных рынков к полным на конечных вероятностных пространствах. Для решения этой задачи был использован метод интерполяций финансовых рынков, связанный с применением хааровских фильтраций и интерполяций мартингалов. Основными техническими инструментами здесь являлись мартингальные меры, удовлетворяющие свойству универсальной хааровской единственности (СУХЕ). Понятие ОСУХЕ на конечном вероятностном пространстве не имеет существенных отличий от понятия СУХЕ. Другая картина возникает на счётном вероятностном пространстве. В этом случае до сих пор не построен пример мартингальной меры, удовлетворяющей СУХЕ. Понятие ОСУХЕ было впервые введено в работе ³. Однако в то время была получена лишь одна модель финансового рынка, на которой существовали мартингальные меры, удовлетворяющие ОСУХЕ — это так называемый бесконечномерный вариант безарбитражной неполной модели Кокса-Росса-Рубинштейна⁴. Автор настоящей работы получил целый спектр таких моделей.

Всё вышесказанное позволяет считать тематику данной диссертации весьма актуальной.

Объектами исследования настоящей диссертации являются процессы (имитирующие эволюцию цен акций), которые допускают мартингальные меры, обладающие ОСУХЕ.

Цель диссертационной работы — изучение множества мартингальных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ, применение данного свойства для интерполяции мартингалов и статических финансовых рынков со счётным числом состояний, реализация построенной теории в виде вычислительных методов и алгоритмов, внедрённых в соответствующий программный комплекс. **Для реализации этой цели** потребовалось решить следующие задачи:

- 1) доказать теоремы существования мартингальных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ;
- 2) построить алгоритмы для вычисления мартингальных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ;

² Мельников А.В., Феоктистов К.М. Вопросы безарбитражности и полноты дискретных рынков и расчеты платежных обязательств // Обозрение прикл. и промышл. матем. — М.: ТВП. — 2001. — Т.8. — Вып.1. — С.28-40.

³ Данекянц А.Г., Павлов И.В. Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности // Обозрение прикл. и промышл. матем. — М. — 2004. — Т. 11. — № 3. — С. 506-508.

⁴ Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счетном вероятностном пространстве: Дис. канд. физ.-мат.наук. — Ростов-на-Дону, 2006.

- 3) разработать алгоритмы вычислений цен акций на (\mathbf{B}, \mathbf{S}) -рынке с бесконечным горизонтом, интерполирующих цены акций на исходном статическом (\mathbf{B}, \mathbf{S}) -рынке с бесконечным числом состояний;
- 4) получить формулы хеджирования произвольных финансовых обязательств на статических (\mathbf{B}, \mathbf{S}) -рынках со счётным числом состояний с применением мартингалльных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ;
- 5) разработать алгоритмы вычислений цен акций на рынке, интерполирующем исходный рынок, а также алгоритмы вычисления справедливых цен финансовых обязательств и компонент хеджирующих портфелей;
- 6) создать программный комплекс, реализующий полученные алгоритмы и формулы.

Методика исследований. При решении перечисленных задач были использованы методы и результаты теории вероятностей, теории мартингалов и мартингалльных мер, теории чисел (p -адические представления), методы решения оптимизационных задач линейного программирования с бесконечным числом переменных, теории алгоритмов и структур данных, имитационное моделирование.

Разработка программного комплекса проводилась в среде Qt Creator, фреймворк Qt5. В качестве основного алгоритмического языка выбран объектно-ориентированный язык C++. Дополнительно использовались: открытая «библиотека» функций для решения задач линейного программирования (GLPK – GNU Linear Programming Kit); модифицированный парсер и визуализатор языка MathML из открытой «библиотеки» Qwt. Программный комплекс состоит из основной программы (загрузчика модулей) и подгружаемых модулей (представленных в виде динамических библиотек — DLL, реализующих графические интерфейсы и расчетную часть). Он организован по принципу фреймворка таким образом, что предоставляет программисту, пишущему модуль, базовый набор примитивов для организации работы с деревьями событий, их отображением, расчетами на них, а также позволяет реализовать интуитивно понятный пользовательский интерфейс. Такая логическая организация позволяет развивать и дополнять программный комплекс новыми моделями. Представленный программный комплекс отвечает следующим требованиям: поддерживает все системы семейства Windows, начиная с Windows XP (т.е. Windows XP/Vista/7/8/8.1/10), обладает высокой производительностью, эргономичным пользовательским интерфейсом.

Научная новизна и выносимые на защиту результаты. Все основные результаты диссертации являются новыми. Перечислим наиболее важные из них, которые выносятся на защиту.

1. Доказательство существования мартингалльных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ, в случае произвольного начального значения цены акции и трёх

- произвольных значений (всевозможных кратностей) финальной цены акции. Создание алгоритма для вычисления этих мартингалльных мер.
2. Доказательство существования мартингалльных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ, в случае произвольного начального значения цены акции и **любо-го конечного числа** рациональных значений (всевозможных кратностей) финальной цены акции. Создание алгоритма для вычисления полученных мартингалльных мер.
 3. Доказательство существования мартингалльных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ, когда начальное значение цены акции находится в определённом интервале, а значения цены акции в финальный момент времени экспоненциально растут.
 4. Новые формулы для вычисления совершенных хеджирующих стратегий на интерполирующем рынке с бесконечным горизонтом с использованием мартингалльных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ.
 5. Разработанные приближённые методы квантильного хеджирования на интерполирующих **(B, S)**-рынках.
 6. Новый научно-исследовательский программный комплекс, написанный на языке C++ в среде Qt Creator, фреймворк Qt5, реализующий полученные в диссертации алгоритмы и формулы.

Личный вклад автора. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. В совместных работах с научным руководителем последнему принадлежит постановка задачи и идея доказательства.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Результаты диссертации могут использовать хеджеры и эмитенты акций и вторичных ценных бумаг, когда на рынке происходит массовая скупка рискованных активов. Полученные теоретические результаты, связанные с достаточными условиями существования мартингалльных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ, вносят значительный вклад в стохастическую финансовую математику. Основные результаты работы, а также алгоритмы программного комплекса и непосредственно программный комплекс могут найти применение в ряде компаний, использующих современные компьютерные технологии.

Область исследования. В диссертации рассматриваются задачи, связанные с развитием теории интерполяции неполных безарбитражных финансовых рынков. Полученные теоретические результаты вносят вклад в стохастическую финансовую математику.

Достоверность результатов работы подтверждается:

- 1) математическими доказательствами, результатами моделирования и обработки данных;

- 2) апробацией этих результатов на всероссийских и международных конференциях и научных семинарах.

Апробация работы. Основные результаты работы диссертации докладывались на следующих международных, всероссийских и региональных научных конференциях и научных семинарах:

- 1) на Международных конференциях «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (г. Ростов-на-Дону, 2011-2016 гг.);
- 2) на Международной научно-практической конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (г. Волгодонск, 2011 г.);
- 3) на Международных научно-практических конференциях «Строительство», секция «Математика» (г. Ростов-на-Дону, 2011-2016 гг.);
- 4) на XX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование.» (г. Ростов-на-Дону, 2012 г.);
- 5) на VI Международной конференции «ПМТУКТ-2013» «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (г. Воронеж, 2013 г.);
- 6) на XIV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (г. Великий Новгород, 2013 г.);
- 7) на Международной конференции «XXV Крымская Осенняя Математическая Школа - симпозиум по спектральным и эволюционным задачам», секция «Теория вероятностей. Случайные процессы. Финансовая математика. Математическая статистика» (г. Судак, 2014 г.);
- 8) на Международной конференции «XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа - симпозиум по спектральным и эволюционным задачам», секция «Теория вероятностей. Случайные процессы. Финансовая математика. Математическая статистика» (г. Симферополь, 2015 г.);
- 9) на Международной конференции по стохастическим методам (пос. Абрау-Дюрсо, 2016 г.);
- 10) на научном семинаре по финансовой математике и стохастическому моделированию при кафедре "Высшая математика"(ДГТУ) (рук. — д.ф.-м.н., проф. И.В.Павлов).

Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержаны грантами РФФИ (проекты 13-01-00637а и 16-01-00184).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 23 печатных работы, в том числе 4 без соавторов. Из них 4 публикации [1-4] — в российских реферируемых журналах, входящих в список ВАК Минобрнауки РФ, 2 публикации [5-6] — в журнале «Теория вероятностей и её применения», индексируемом в базе данных Web of Science. Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы (104 наименования), приложения. Каждая глава разбита на параграфы. Нумерация параграфов двойная: первая цифра указывает номер главы, в которой расположен параграф, а вторая — номер самого параграфа. Такая же нумерация определений, теорем, лемм и т.д. Нумерация рисунков сплошная. Работа проиллюстрирована 35 рисунками и изложена на 133 страницах (без приложения).

Автор диссертации выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору ф.-м.н., проф. И.В.Павлову за постановку задачи и ценные советы.

Краткое содержание работы

В данном разделе нумерация определений, теорем и т.д. совпадает с соответствующей нумерацией в тексте диссертации, а нумерация формул автономна.

Во введении изложены наиболее важные результаты, сформулированы цель и задачи исследования, дано краткое содержание диссертации по разделам.

Первая глава носит вспомогательный характер и содержит необходимые сведения из теории хааровских интерполяций финансовых рынков.

Мы рассматриваем статические (одношаговые) модели (\mathbf{B}, \mathbf{S}) -рынков, которые заданы на фильтрованном пространстве (Ω, \mathbf{F}) , $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(B_1, B_2, \dots)$ — σ -алгебра, порождённая разбиением Ω на счётное число атомов B_1, B_2, \dots . Дерево стохастического базиса таких моделей изображено на рис.1.

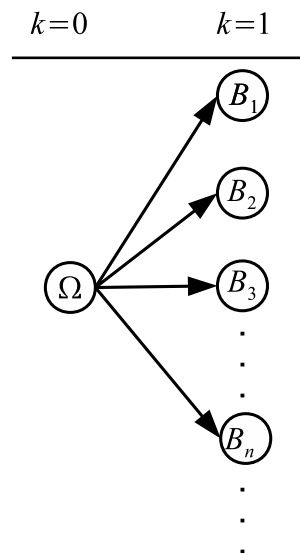


Рис. 1.

Пусть $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots)$ — некоторая перестановка натуральных чисел. Координаты вектора δ — зависимые случайные величины, определяемые с помо-

щью генератора случайных чисел, основанном на геометрическом распределении. Если исходить из того, что новые события на рынке возникают неодновременно, тогда можно определить следующие σ -алгебры событий: $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{H}_1 = \{\Omega, \emptyset, B_{\delta^{(1)}}, \bar{B}_{\delta^{(1)}}\}$ (т.е. $\mathcal{H}_1 = \sigma\{B_{\delta^{(1)}}\}$), $\mathcal{H}_2 = \sigma\{B_{\delta^{(1)}}, B_{\delta^{(2)}}\}, \dots$, $\mathcal{H}_\infty = \sigma\{B_{\delta^{(1)}}, B_{\delta^{(2)}}, \dots\}$. $\mathbf{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^\infty$ является интерполирующей фильтрацией для исходной фильтрации $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ ($\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{F}_1$). Она обладает следующим свойством: при переходе от момента времени n к моменту времени $n+1$ только один атом из \mathcal{H}_n дробится на две части, причём тот, который в результате дробления был получен на предыдущем шаге, а остальные атомы этой σ -алгебры остаются неизменными. Такие фильтрации называются **специальными хааровскими интерполирующими фильтрациями** (с.х.и.ф.) (рис.2).

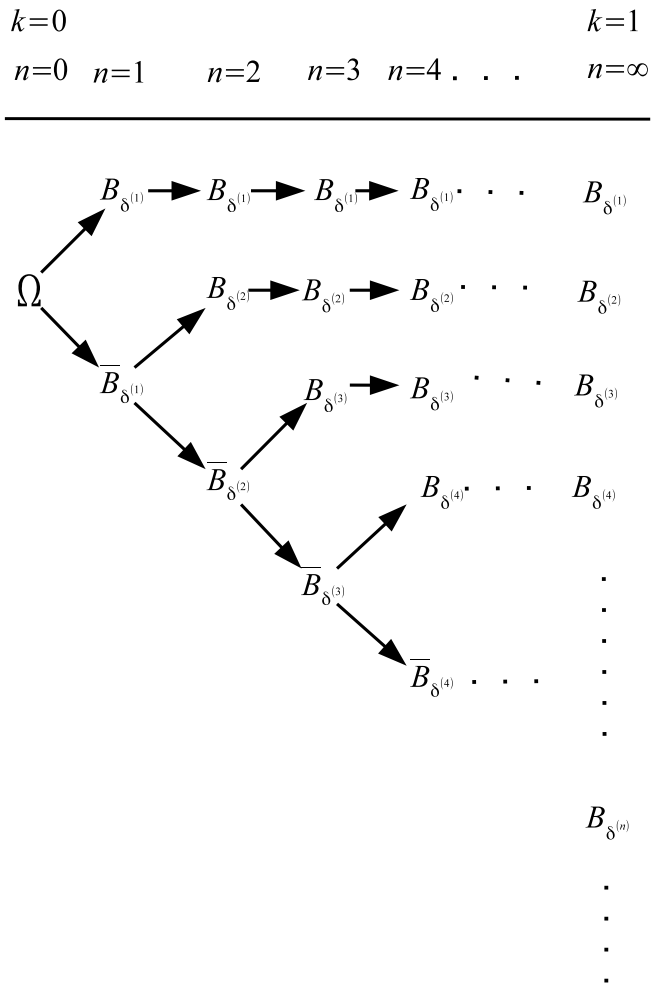


Рис. 2.

Рассмотрим \mathbf{F} -адаптированный случайный процесс $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции. Пусть \mathcal{P} — множество невырожденных вероятностных мер: $P = (p_1, p_2, \dots)$, $p_i = P(B_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Обозначим значения дисконтированной цены акции следующим образом:

$$a := Z_0|_{\Omega}, \quad b_i := Z_1|_{B_i}, \quad a, b_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

С учетом обозначений (1) рассмотрим систему :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{\infty} b_i p_i = a \\ p_i > 0, i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2)$$

Множество решений системы (2) совпадает с множеством вероятностных мер $P \in \mathcal{P}$, для которых с.п. $(Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^1$ является мартингалом. Обозначим через $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ множество невырожденных мартингальных мер с.п. Z . Будем предполагать, что выполняется неравенство:

$$\inf_{1 \leq i < \infty} b_i < a < \sup_{1 \leq i < \infty} b_i.$$

Это достаточное условие того, что $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F}) \neq \emptyset$. Согласно основным теоремам финансовой математики это означает, что рассматриваемый нами рынок является безарбитражным и неполным⁵. Зафиксируем меру $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$, для мартингала $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^1$ построим мартингальную хааровскую интерполяцию $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^{\infty}$: $Y_n = E^P[Z_1 | \mathcal{H}_n]$ ($Z_0 = Y_0$, $Z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ P-п.н.). Если с. х. и. ф. \mathbf{H} фильтрации \mathbf{F} фиксирована, то мартингал Y определяется по мартингалу Z однозначно. Обозначим через $|M|$ число элементов некоторого множества M .

Определение 1.8 Будем говорить, что мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет **ослабленному свойству универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ)**, если для любой специальной хааровской интерполяции \mathbf{H} исходной фильтрации \mathbf{F} и соответствующей хааровской интерполяции $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ мартингала $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^1$, имеет место равенство $|\mathcal{P}(Y, \mathbf{H})| = 1$.

Для перехода от неполных безарбитражных рынков к полным посредством метода хааровских интерполяций необходимо, чтобы рассматриваемая модель обладала мартингальными мерами, удовлетворяющими ОСУХЕ. Аналитическим аналогом этого свойства является следующее свойство.

Определение 1.9 Будем говорить, что мартингальная мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет **ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ)**, если:

- 1) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i p_i$ сходится абсолютно;
- 2) $\forall i = 1, 2, \dots$, для любого набора индексов $J \subset \{1, 2, \dots\}$ такого, что $i \notin J$

⁵ Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики / А.Н. Ширяев // М.: ФАЗИС. — 2004. — Т.1,2. — 1017 с.

$(b_1 < b_2 < a < b_3, m_1 = m_2 = \infty, m_3 = 1)$, то $OУНБ(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$.

В остальных случаях, когда среди элементов последовательности $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ три различных значения, $OУНБ(Z) \neq \emptyset$ и строго вложено в $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$. В параграфе 2.3 представлен конструктивистский подход получения мартингалльных мер, удовлетворяющих $OУНБ$ для случая, когда Z_1 принимает три различных значения (всевозможных кратностей). На основе полученных формул можно создать математические модели безарбитражных неполных финансовых рынков, которые с помощью метода хааровских интерполяций преобразуются в полные. Эти модели и сопровождающие их расчёты представлены в программном комплексе "Построение хеджирующих стратегий посредством хааровских интерполяций".

Для того чтобы рассмотреть случай, когда среди элементов последовательности $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ более трёх различных значений, введём обозначение:

$$x_k = \sum_{j=1}^{m_k} p_{r(j-1)+k}, \quad 1 \leq k \leq r. \quad (3)$$

С учётом (3) запишем систему (2) в виде:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m_k} x_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{m_k} b_k x_k = a \\ x_k > 0, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases} \quad (4)$$

Лемма 2.1 Пусть $b_1 < b_2 < \dots < b_r, b_1 < a < b_r, a \neq b_2, \dots, a \neq b_{r-1}$. Пусть l и n ($1 \leq l < n \leq r$) — два произвольных индекса. Тогда система (4) имеет решение (x_1, x_2, \dots, x_r) с рациональными компонентами $x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_r$.

Если числа b_1, \dots, b_r и a рациональны и $b_l < a < b_n$, то существуют решения (x_1, x_2, \dots, x_r) следующих двух типов:

- 1) все компоненты решения рациональны, а числа x_k ($k \neq l, n$) сколь угодно малы;
- 2) компоненты x_l, x_n и x_s иррациональны (s — произвольный фиксированный индекс, $s \neq l, n$), остальные компоненты решения рациональны, числа x_k ($k \neq l, n$) сколь угодно малы.

Теорема 2.3 Пусть числа $b_1 < b_2 < \dots < b_r$ рациональны, a — действительное число, $b_1 < a < b_r, a \neq b_k$ ($k = 2, 3, \dots, r-1, 3 < r < \infty$). Тогда $OУНБ(Z) \neq \emptyset$.

В случае, когда последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержит бесконечное число различных значений, был получен следующий результат.

Теорема 2.4 Пусть элементы последовательности $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяют неравенству: $b_1 < a < b_2 < b_3 < b_4 < \dots$, причём

$$b_i \geq 2b_{i-1}, \forall i \geq 2.$$

Тогда $OУНБ(Z) \neq \emptyset$ и строго вложено в $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$.

В **третьей главе** представлено описание вычислительных процессов, которые необходимы для разработки программного комплекса "Построение хеджирующих стратегий посредством хааровских интерполяций". Программный комплекс предназначен для расчёта компонент хеджирующих портфелей, реплицирующих финансовые обязательства марковского типа, а также определения справедливой цены опционов и выполнения других сложных расчётов, возникающих при исследовании различных моделей безарбитражных рынков со счётным числом состояний. Вычисления основаны на результатах первых двух глав диссертации. Как известно, основной составляющей любого программного обеспечения является набор алгоритмов, возникающих на различных этапах решения поставленной задачи.

В **параграфе 3.1** показаны:

- 1) алгоритм конструирования моделей одношаговых (\mathbf{B}, \mathbf{S}) -рынков с бесконечным числом состояний;
- 2) алгоритмы вычисления компонент мартингалльных мер;
- 3) алгоритм проведения финансовых расчётов;
- 4) ряд прочих алгоритмов, необходимых для реализации программного комплекса.

В **параграфе 3.2** изложена архитектура программного комплекса. Описаны принципы взаимодействия его компонент. Рассматриваются всевозможные информационные структуры, классы, диалоги. Программный комплекс состоит из основной программы (загрузчика модулей) и подгружаемых модулей, представленных в виде динамически подключаемых библиотек (Dynamic Link Libraries). Такая логическая организация позволяет развивать и дополнять его новыми моделями и вычислительными процедурами.

В **заключении** приводятся основные результаты работы, выносимые на защиту, которые представлены в начале автореферата.

Основные публикации по теме диссертации

1. *Цветкова И.В.* Исследование модели финансового рынка с бесконечным числом скупщиков акций с помощью аргументов двойственности / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Науковедение*. — 2012. — №4. — Вып.13. (ISSN 2223-5167) (электронное научное издание, рекомендованное ВАК РФ).

2. *Цветкова И.В.* Расчёт компонентов хеджирующего портфеля с помощью процедуры хааровской интерполяции / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Науковедение*. — 2013. — №3. — Вып.16. (ISSN 2223-5167) (электронное научное издание, рекомендованное ВАК РФ).
3. *Павлов И.В.* Расчёт компонентов хеджирующего портфеля на неполных рынках с недетерминированным поведением скупщиков акций / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Инженерный вестник Дона*. — 2013. — Вып.4. (электронное научное издание, рекомендованное ВАК РФ).
4. *Цветкова И.В.* Алгоритм вычислительных процедур при построении хеджирующих стратегий на финансовых рынках с бесконечным числом состояний / И.В. Цветкова // *Науковедение*. — 2015. — Т.7. — Вып.6. (ISSN 2223-5167) (электронное научное издание, рекомендованное ВАК РФ).
5. *Павлов И.В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счётного вероятностного пространства / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Теория вероятностей и её применения*. — Москва. — 2016. — Т.61. — В.1. — С.173-181.
6. *Цветкова И.В.* Алгоритм построения интерполяционных мартингальных мер в случае счётного вероятностного пространства и конечнозначных цен акций / И.В. Цветкова // *Теория вероятностей и её применения*. — Москва. — 2016. — Т.61. — Вып.3. — С.620.
7. *Павлов И.В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Вестник РГУПС*. — 2012. — №3. — С.177-181.
8. *Павлов И.В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров: конструктивистский подход / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Вестник РГУПС*. — 2014. — Т.4. — Вып.56. — С.132-139.
9. *Цветкова И.В.* Бесконечномерная задача оптимизации при исследовании финансового рынка с бесконечным числом скупщиков акций / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Международная научно-практическая конференция «Строительство-2011»: сборник тезисов*. — Ростов-на-Дону, 2011.
10. *Цветкова И.В.* Решение некоторых задач, возникающих при отыскании мартингальной меры в случае финансового рынка с бесконечным числом скупщиков акций / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения: тезисы докладов*. — Ростов-на-Дону, 2011. — С.68-69.
11. *Цветкова И.В.* Бесконечномерная задача оптимизации при исследовании финансового рынка со счётным числом состояний / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // *Международная научно-практическая конференция «Теория*

- операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Волгодонск, 4-8 июля 2011 г.): сборник тезисов. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.
12. *Цветкова И.В.* Некоторые модели финансового рынка с бесконечным числом скупщиков акций / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // Международная научно-практическая конференция «Строительство-2012»: сборник тезисов. — Ростов-на-Дону, 2012.
 13. *Павлов И.В.* Достаточные условия существования мартингальной меры, удовлетворяющей ослабленному условию несовпадения барицентров, для финансового рынка со счётным числом состояний / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // XX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование»: сборник тезисов. — Ростов-на-Дону, 2012. — С.169-170.
 14. *Цветкова И.В.* О множествах мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ) / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-II: тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 2012. — С.93-94.
 15. *Павлов И.В.* Сведение хеджирования на неполных рынках с бесконечным числом состояний к хеджированию на полных рынках с бесконечным горизонтом / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – III: тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 2013. — С.107-108.
 16. *Цветкова И.В.* Моделирование случайного поведения бесконечного числа скупщиков акций на финансовом рынке / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сборник трудов VI Международной конференции. — Воронеж, 2013. — С.271-273.
 17. *Павлов И.В.* Хеджирование одношаговых (B, S)-рынков с бесконечным числом состояний с помощью хааровских интерполяций / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // Обзорение прикладной и промышленной математики: сборник тезисов. — 2013. — Т.20. — Вып.2. — С.151-152.
 18. *Цветкова И.В.* Новые достаточные условия существования мартингальных мер, удовлетворяющих ОУНБ / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IV: тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 2014. — С.133-134.
 19. *Павлов И.В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров / И.В. Павлов, И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2014): сборник тезисов. — Судак, 2014. — С.73.

20. *Цветкова И.В.* Программная реализация вычисления компонент хеджирующего портфеля посредством хааровской интерполяции / *И.В. Цветкова* // XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2015): сборник тезисов. — Симферополь, 2015. — С.121-122.
21. *Цветкова И.В.* Алгоритм вычисления мартингалльных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ, в случае одношагового рынка со счётным числом состояний /*И.В. Цветкова* // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI: тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 2016. — С.144-145.
22. *Цветкова И.В.* Программный комплекс для хеджирования с помощью интерполяционных мартингалльных мер / *И.В. Цветкова* // XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2016): сборник тезисов. — Симферополь, 2016. — С.118.
23. *Цветкова И.В.* Свидетельство №2016611994 о государственной регистрации программы для ЭВМ "Построение хеджирующих стратегий посредством хааровских интерполяций" / *И.В. Цветкова* // Ростовский государственный строительный университет от 16.02.2016 г.