

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

ШАБРОВ СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПРОИЗВОДНЫМИ
ПО МЕРЕ**

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:

Доктор физико-математических наук,

Профессор Баев Александр Дмитриевич

Воронеж — 2017

Оглавление

Введение	7
1 Математическая модель сингулярной струны	29
1.1 Необходимые сведения	30
1.2 Вывод математической модели сингулярной струны	34
1.3 Простейшие свойства дифференциальной модели для сингулярной струны	38
1.4 Аналоги теорем Штурма и свойство неосцилляции	42
1.5 Анализ математической модели сингулярной струны и функция влияния невырожденной математической модели	53
1.6 Корректность математической модели второго порядка	64
1.7 Оценки функции влияния модели второго порядка с производными по мере и положительные решения дифференциальных неравенств	73
1.8 Осцилляционность спектра математической модели второго порядка с производными по мере	77
Выводы	78
2 Математические модели с разрывными решениями и разнорядковыми уравнениями	80
2.1 Математическая модель с разрывными решениями	81
2.2 Функция влияния математической модели с разрывными решениями	85
2.3 Математическая модель малых деформаций системы с сильной особенностью	88
2.4 Математическая модель малых деформаций струнно-стержневой системы	95
Выводы	105

3	Граничные задачи с производными по мере при моделировании малых деформаций сложно-сочленённых стержневых систем	107
3.1	Линейная математическая модель малых деформаций стержневой системы	108
3.2	Анализ дифференциальной модели четвертого порядка	115
3.3	Свойство неосцилляции	120
3.4	Простейшие свойства линейных математических моделей четвертого порядка	140
3.5	Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка	145
3.6	Функция влияния математической модели, описывающей малые деформации сингулярной балки	159
3.7	Корректность математической модели четвертого порядка	166
3.8	Осцилляционность спектра дифференциальной модели четвертого порядка с производными по мере в случае отсутствия упругих опор	173
3.9	Осцилляционность спектра дифференциальной модели при наличии упругой подушки	181
	Выводы	187
4	Податливость сингулярных математических моделей четвертого порядка	189
4.1	Положительность функции влияния математической модели четвертого порядка	190
4.2	Достаточные условия податливости математической модели сингулярной консоли	193
4.3	Положительность функции влияния сильно сингулярной математической модели	196
4.4	Оценки функции влияния математической модели четвёртого порядка	200
	Выводы	209
5	Нелинейные модели с негладкими решениями	210

5.1	О числе решений математической модели второго порядка с «монотонной нелинейностью»	212
5.2	Нелокальные условия существования хотя бы одного знакоопределенного решения нелинейной модели второго порядка .	216
5.3	Достаточное условие существования второго решения нелинейной модели второго порядка	219
5.4	Нелинейная математическая модель второго порядка с сильной нелинейностью	220
5.5	Дифференциальные модели четвертого порядка со ступенчатыми нелинейностями	221
5.6	Нелинейные модели четвертого порядка с монотонной нелинейностью	226
5.7	О вторых решениях математической модели четвертого порядка с производными по мере	233
5.8	Математическая модель четвертого порядка с сильной нелинейностью	240
	Выводы	242
6	Адаптация метода конечных элементов к изучаемым моделям	243
6.1	Метод конечных элементов для математической модели сингулярно нагруженной струны	243
6.1.1	Построение алгоритма	243
6.1.2	Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов для моделей второго порядка	246
6.2	Адаптация метода конечных элементов для математической модели с разрывными решениями	253
6.2.1	Построение алгоритма	254
6.2.2	Оценка погрешности	257
6.3	О методе конечных элементов для математической модели стержневых систем	260
6.3.1	Построение алгоритма	261
6.3.2	Оценка погрешности	263
6.4	Адаптация метода конечных элементов для разнорядковой математической модели	271

6.4.1	Построение алгоритма	271
6.4.2	Об оценке погрешности	274
	Выводы	274
7	Численные эксперименты	276
7.1	Численные эксперименты для математической модели	276
7.2	Численные эксперименты для модели с разрывными решениями	288
7.3	Численные эксперименты для модели четвертого порядка . . .	297
7.4	Вычислительные эксперименты для разнопорядковой модели .	300
	Выводы	305
	Заключение	307
	Литература	309
A	Комплекс программ для реализации численных экспериментов	333
A.1	Программы для реализации численных экспериментов для математической модели второго порядка	333
A.1.1	Программа, написанная в пакете Maple	333
A.1.2	Программа написанная на Python	337
A.2	Программа для реализации численных экспериментов для математической модели второго порядка с разрывным решением	347
A.2.1	Программа написанная в пакете Maple	347
A.2.2	Программа, написанная на Python	352
A.3	Программа для реализации численных экспериментов для математической модели четвертого порядка	364
A.3.1	Программа написанная в пакете Maple	366
A.3.2	Программа написанная на Python	369
A.4	Программа для реализации численных экспериментов для разнопорядковой математической модели	385
A.4.1	Программа написанная на Python	386
B	Таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, полученные при проведении численных экспериментов	402
B.1	Модель второго порядка	402

В.2	Таблица значений для еще одной модели второго порядка . . .	404
В.3	Модель второго порядка с разрывными решениями	405
В.4	Модель четвертого порядка	408
В.5	Разнопорядковая модель ($N = 5$)	409
С.	Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ	411

Предисловие

Настоящая работа посвящена математическому моделированию деформаций систем, состоящих из струн, стержней, имеющих внутренние особенности, и помещенных в неоднородную среду с локальными особенностями.

Проблемы, которые возникают при моделировании подобных систем, порождаемые как внутренними, так и внешними факторами, мы преодолеваем используя концепцию поточечного подхода Ю. В. Покорного [148] к трактовке возникающего уравнения — как уравнения, которое связывает неизвестную функцию и её производные до определенного порядка. Предложенный подход позволяет применять к анализу полученных моделей качественные методы. Последнее в свою очередь даёт возможность установить важные для приложений свойства решений дифференциальных моделей, например, количество нулей, экстремума, перемен знака и пр.

Введение

Актуальность темы

Несмотря на бурное развитие математического моделирования и расширение объектов, как с позиций увеличения размерности, так и учёт нелинейных составляющих изучаемого объекта, тем не менее остаются объекты, моделирование различных процессов в которых либо трудно формализуемо, либо невозможно с помощью существующих методов и подходов. В случае, когда математическая модель реализуется в виде граничной задачи, то, как правило, трудности, возникающие, как при анализе полученных моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения (а в ряде случаев и «разрывностью» решения). Формально эти проблемы обычно решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалицин С.Т., Сесекин А.Н. [105], Завалицин С.Т. [104], Дерр В.Я. [97], Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. [96], Владимиров В.С. [66], [67], Егоров Ю.В. [103], Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р. [53], Маслов В.П., Цупин В.А. [137], Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. [101] и многие другие). Однако на этом пути возникает ряд проблем. Например, проблема умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерыв-

ных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима [66, 215]. Эту проблему решают, как правило, переходя к алгебре обобщенных функций Коломбо [6], [96]. Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ -функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (см., например, работы Мышкиса А.Д. [142] и Владимирова А.А. [65]). Другая проблема — слабая разрешимость краевых задач, что для приложений недостаточно.

Главное направление развития здесь диктовала спектральная теория, и теория обобщенных функций и теория операторов очень эффективно себя проявили в спектральных вопросах [2, 18, 39, 52, 54, 68, 73, 86, 118, 121, 133, 136, 138, 172, 197, 217] и, в дальнейшем многие сотни работ (см. библиографию в [10, 11, 16, 22, 64, 72, 99, 140, 141, 145, 176, 178–180, 199, 216, 218]).

Еще одно направление развития — это качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы имеющей структуру графа. Такой подход очень эффективен когда моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами. В частности, для объектов имеющих разную структуру приводящую к разным порядкам на различных ребрах [58, 131, 147, 159, 162]). Однако, при создании названной теории предполагалась достаточная гладкость коэффициентов на ребрах графа. В последнее время для негладких на ребрах коэффициентов стали появляться работы устраняющие этот пробел [108].

Работы Стилтеса о нити с бусинками, Крейна М.Г., Гантмахера Ф.Р. [71], Крейна М.Г., Каца И.С. [120] о произвольно нагруженной струне, работы Келлога О. [19–21], обозначили направление исследований в интересах физической теории колебаний. Однако, через некоторое время развитие этого направления несколько замедлилось. Отметим некоторые работы [55, 71, 119, 123, 128, 214]. После выхода работ Ю.В. Покорного [148, 163] это направление получило новый «импульс»: наряду с интегралом Стилтеса было предложено использование производных Радона–Никодима.

Цель работы. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложных физических систем, состоящих из струн, стержней, реализуемых в виде граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффек-

тивных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

- вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней, струн, помещенных во внешнюю с локализованными особенностями;
- доказательство корректности полученных математических моделей;
- изучение нелинейных математических моделей, возникающих при моделировании нелинейных деформаций изучаемых систем при учете нелинейности;
- изучение некоторых вопросов теории математических моделей с разрывными решениями; показать корректность моделей с решениями, имеющими не только разрывы, но и самостоятельное значение в точке разрыва, которое приходится учитывать для адекватности модели соответствующему процессу;
- изучить структуру спектра, а именно, доказать, что спектр математической модели, как второго, так и четвертого порядков, обладает свойством осцилляционности;
- получить достаточные условия при которых математические модели сингулярной и сильно сингулярной консоли обладают свойством податливости;
- разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений второго и четвертого порядков (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);
- разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;
- решение задач прикладного характера:

- а) приближенное решение математических моделей, описывающих деформации неоднородной струны (с одним или двумя закрепленными концами), находящейся во внешней среде с локализованными особенностями;
- б) приближенное решение дифференциальной модели, описывающей малые деформации консоли, находящейся в среде с особенностями;
- в) нахождение деформаций системы, состоящей из стержня и струны.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочлененные одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа. Адаптированный метод конечных элементов для граничных задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона–Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней и струн, имеющих внутренние особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Интегральная обратимость математических моделей с производными по мере; доказательство оценок функции влияния.

4. Изучение нелинейных математических моделей, возникающих при моделировании нелинейных деформаций изучаемых систем при учете «нелинейности».

5. Разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений второго и четвертого порядков (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка бли-

зости приближенного решения к точному решению).

6. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим объектом которых является единое уравнение с производными по мере. 2. Результаты диссертационной работы содержат подробное исследование серии спектральных задач: изучена структура спектра спектральной задачи для граничных задач второго и четвертого порядков с производными Радона–Никодима. 3. Доказана возможность интегрального представления решения изученных дифференциальных моделей; показана корректность математических моделей второго и четвертого порядков с производными по мере. 4. Доказаны оценки функции влияния математических моделей второго и четвертого порядков; изучены нелинейные математические модели. 5. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающей деформации одномерных объектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающих из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, которые формализованы в виде единого уравнения с производными по Радону–Никодиму. При этом исследована структура спектра соответствующих граничных задач, построены функции влияния и получены их оценки. Проведено исследование нелинейных дифференциальных моделей второго и четвертого порядков; получены достаточные условия их разрешимости.

Разработаны эффективные численные методы применительно к математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных

задач с производными Радона-Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского (Москва, 2004 г.), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения» (Санкт-Петербург, 1998 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы» на Саратовской зимней математической школы (Саратов, 1998 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы» на Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 1999, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015 гг.), «Современные методы теории краевых задач» на Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2006–2014 гг.), «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2012 г.), Международной молодежной научной школе «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Воронеж, 2012 г.), Всероссийской молодежной научной школе «Взаимодействие математики и физики: новые перспективы» (Воронеж, 2012 г.), на семинарах профессора Ю.В. Покорного (1997, 1999, 2004–2008 гг.), профессора В.Г. Задорожного (1998 г.), профессора А.Д. Баева (2009–2016 гг.), профессора М.И. Каменского (2012–2015 гг.), семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений МГУ имени М.В. Ло-

моносова под руководством проф., д.ф.-м.н. Н.Х. Розова, проф., д.ф.-м.н. И.Н. Сергеева, проф., д.ф.-м.н. И.В. Асташовой, проф., д.ф.-м.н. А.В. Боровских (2016 г.), межвузовском научном семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством проф., д.ф.-м.н. И.В. Асташовой (МГУ им. М.В. Ломоносова — РЭУ им. Г.В. Плеханова), проф., д.ф.-м.н. А.В. Филиновского (МГТУ им. Н.Э. Баумана — МГУ им. М.В. Ломоносова).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 61 работе: [34, 35, 75–84, 87–92, 109, 110, 113–117, 149, 150, 152–154, 156, 158, 160, 165, 166, 168–171, 188–191, 196, 200–207, 210–213], из них [34, 88, 91, 109, 110, 116, 149, 166, 170, 190, 200, 203, 204, 210–213] из перечня, рекомендованных ВАК и в 5 монографиях — [93, 100, 164, 208, 209]. Получены два свидетельства [219, 220] о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты полученные лично автором.

Научные гранты и программы. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.574.21.0093 от 11.08.2014 г. Уникальный идентификатор прикладных научных исследований (проекта) RFMEFI57414X0093.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 7 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 215 наименований и 3 приложений, в котором приводятся листинги программ, написанных на Maple и Python и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 412 страницах и содержит 95 рисунков и 9 таблиц.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цели и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Математическая модель сингулярной струны» исследу-

ется математическая модель второго порядка

$$\begin{cases} -\left(p\frac{d}{dx}u\right)' + Q'u = F', \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1.0.1)$$

полученная как экстремаль функционала потенциальной энергии неоднородной струны, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, в естественных (с точки зрения механики) предположениях, что $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации и $\inf_{x \in [0; \ell]} p(x) > 0$, а штрихами обозначено обобщенное дифференцирование; уравнение (1.0.1) заменяется на привычное, с позиций обыкновенных дифференциальных уравнений, поточечно заданное уравнение

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(p \frac{d}{dx} u \right) + \left(\frac{d}{d\sigma} Q \right) u = \frac{d}{d\sigma} F, \quad (1.0.2)$$

где производная $\frac{d}{d\sigma}$ понимается по Радону-Никодиму, т. е. по мере. Уравнение (1.0.1) в ряде случаев удобнее изучать в интегро-дифференциальной форме

$$-(pu'_x)(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) - (pu'_x)(0).$$

Решения ищутся в классе непрерывных функций. Точное описание класса функций в котором рассматривается модель дается в первом параграфе.

Естественность такой трактовки модели объясняется в § 1 — для случая, когда уравнение (1.0.1) имеет физическую природу, возникая по схеме Лагранжа из задачи минимизации функционала энергии

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{pu^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^\ell u dF \quad (1.2.1)$$

для неоднородной струны. Доказывается

Теорема 1.2.1. Пусть $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf p(x) > 0$. Тогда существует такая строго возрастающая функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0; \ell]$ меру, что x , $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ -абсолютно непрерывными на $[0; \ell]$, а функция $u(x)$, приводящая (1.2.1) к минимуму, является решением дифференциальной модели

$$\begin{cases} -(pu')'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Во втором параграфе изучаются простейшие свойства модели; вводятся необходимые множества. Обозначим через $S(\sigma)$ множество точек разрыва $\sigma(x)$. Наиболее интересный для нас случай, когда $S(\sigma)$ непусто. При этом мы допускаем у функции $\sigma(x)$ счетное число точек разрыва. Каждая из таких точек имеет σ -меру, равную $\Delta\sigma(\xi) = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)$.

Пусть $J_\sigma = [0, \ell] \setminus S(\sigma)$. Введем на J_σ метрику равенством $\varrho(x, y) = \sigma(y + 0) - \sigma(x - 0)$ для $x < y$. Пополнение J_σ по этой метрике обозначим через $\overline{[0; \ell]}_S$. В этом множестве вместо прежних точек $\xi \in S(\sigma)$ появляется пара собственных элементов ξ_- и ξ_+ . Индуцируя на $\overline{[0; \ell]}_S$ исходную упорядоченность, имеем $\xi_- < \xi_+$. Формальное объединение $\overline{[0; \ell]}_S$ с $S(\sigma)$, при котором $\xi_- < \xi < \xi_+$ для каждой $\xi \in S(\sigma)$, обозначим через $\overline{[0; \ell]}_\sigma$. В этом множестве точки из $S(\sigma)$ как бы вставлены на прежние места, но теперь они обрамлены с боков уже собственными в $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ элементами ξ_- , ξ_+ , а не символами предельных переходов в этих точках, как было ранее. Отметим, что в точках ξ_- и ξ_+ множества $\overline{[0; \ell]}_S$ (когда $\xi \in S(\sigma)$) σ -абсолютно непрерывная функция $F(x)$ определена своими предельными значениями: $F(\xi_\pm) = F(\xi \pm 0)$; σ -абсолютно непрерывные функции, определенные на $\overline{[0; \ell]}_S$, достигают на $\overline{[0; \ell]}_S$ наибольшее и наименьшее значения, что на $[0; \ell]$ могло и не быть. Например, функция $F(x) = \frac{\ell - x}{\ell - \xi} \theta(x - \xi)$, очевидно, σ -абсолютно непрерывна при $\sigma(x) = x + \theta(x - \xi)$, здесь и далее, $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$, и единице при $x > 0$, наибольшее значение не достигает на $[0; \ell]$, а на $\overline{[0; \ell]}_S$ — в точке ξ_+ . σ -производная σ -абсолютно непрерывной функции $v(x)$ определена почти всюду (относительно σ -меры) на множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ как отношение скачков: $\frac{dv}{d\sigma}(\xi) = \frac{\Delta v(\xi)}{\Delta\sigma(\xi)}$.

В третьем — получены аналоги теорем Штурма о перемежаемости нулей; изучено свойство важное не только для приложений, но при анализе нелинейных математических моделей — свойство *неосцилляции однородного уравнения*.

Будем говорить, что однородное уравнение $-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, если любое нетривиальное решение имеет не более одного нуля.

Четвертый параграф посвящен проблеме интегрального представления

решения; анализу функции влияния дифференциальной модели.

Математическую модель

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ}{d\sigma}u = \frac{dF}{d\sigma} \\ l_1u \equiv pu'(0) - \gamma_1u(0) = 0, \\ l_2u \equiv pu'(\ell) + \gamma_2u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

назовем невырожденной, если однородная модель (при $F(x) \equiv \text{const}$) имеет только тривиальное решение.

В дальнейшем под записью $\gamma_1 = \infty$ ($\gamma_2 = \infty$) мы будем понимать условие $u(0) = 0$ ($u(\ell) = 0$).

Получены достаточные условия невырожденности математической модели.

Теорема 1.5.1. Пусть $\min_{\overline{[0; \ell]_S}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0; \ell]_S}$, $\gamma_1 \geq 0$ и $\gamma_2 \geq 0$. Математическая модель (1.5.1) невырождена, если выполнено одно из следующих условий:

- (а) $\gamma_1 = \infty$ и/или $\gamma_2 = \infty$;
- (б) $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$;
- (в) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и $Q(\ell) - Q(0) > 0$.

Также показана интегральная обратимость дифференциальной модели, при условии ее невырожденности.

В пятом параграфе доказана корректность дифференциальной модели сингулярной струны. Доказательство основано на интегральном представлении решения.

В следующем параграфе получены оценки функции влияния при $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$:

$$G(x, s) \geq \tilde{u}_0(x)G(\tau, s), \quad (1.7.3)$$

где $u_0(x) = \tilde{k}x(\ell - x)$, \tilde{k} — достаточно малое положительное число.

В последнем — седьмом — параграфе показано, что линейная математическая модель обладает *осцилляционным спектром*, т. е. спектр модели состоит из счётной последовательности собственных положительных частот, единственная точка сгущения которых $+\infty$; амплитудные функции удовлетворяют следующим свойствам: первая (отвечающая ведущей частоте) нулей

внутри интервала $(0; \ell)$ не имеет, каждая последующая имеет на один нуль больше, чем предыдущая, причем их нули перемежаются.

Вторая глава «**Математические модели с разрывными решениями и разнопорядковыми уравнениями**» посвящена двум направлениям развития качественной теории математического моделирования одномерных систем с внутренними и внешними особенностями: наличие разрыва у решения модели и разный порядок на различных частях системы. Ключевыми моментами здесь (как впрочем и в остальных главах) являются 1) поточечно заданное уравнение и 2) возникающее уравнение одно на всем отрезке.

Изучается математическая модель малых деформаций следующей системы: одномерный упругий континуум (стильесовскую струну), расположенный вдоль $[0, \ell]$ и упруго закрепленный на концах; в конечном числе точек, которые мы обозначим через ξ_i ($0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$), локализована особенность, порождаемая разрывом струны в этих точках, при этом мы предполагаем наличие в точке ξ_i упругой связи типа пружины жесткости γ_i , скрепляющей левый и правый части системы (на которые «разорвана» струна).

Обозная через $u(x)$ отклонение точки x от положения равновесия под влиянием внешней силы интенсивности $f(x)$, для малых деформаций рассматриваемого объекта в вертикальной плоскости (перпендикулярно положению равновесия) получаем дифференциальную модель

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)'_x + qu = f, & \text{(а)} \\ pu'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) = 0, & \text{(б)} \\ pu'_\mu(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0, & \text{(в)} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

причем (2.1.3а) в точках ξ разрыва функции $\mu(x)$ реализуется в виде равенств

$$(pu'_\mu)(\xi - 0) = p(\xi) \frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} = (pu'_\mu)(\xi + 0),$$

γ_i — коэффициенты упругого закрепления концов. Заметим, что в точках $x = \xi_i$ функция $u(x)$ не определена, но определены и имеют физический смысл предельные значения $u(\xi_i - 0)$, $u(\xi_i + 0)$. Интенсивность внешней силы определена при $x \neq \xi_i$.

Для (2.1.3) показана интегральное представление решения.

Далее, изучается модель с сильными внутренними особенностями, когда в объекте каждая внутренняя особенность, реализуемая в виде пружины,

заменяется на две различной жесткости, и, таким образом, приходится следить за точкой спайки, более того, к этой точке допускается приложение сосредоточенной силы. Тогда, у $u(x)$ — отклонения точки x от положения равновесия — в каждой такой точке помимо различных предельных значений, имеется самостоятельное значение, отличное от предельных, которое нельзя игнорировать. Используя развиваемый математический аппарат для дифференциальной модели, удалось показать корректность.

Рассматривается модель малых деформаций механической системы, состоящей из растянутого стержня, один из концов которого закреплён, а к свободному — прикреплена растянутая струна, второй конец которой закреплен; точку спайки стержня и струны обозначим через ξ . Эта модель реализуется в виде граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.4.4)$$

где коэффициент $p(x) \equiv 0$ на $[\xi; \ell]$, $p(x)$ и $r(x)$ отделены от нуля на оставшейся части отрезка $[0; \ell]$; $r(x) \geq 0$ для всех x . Для (2.4.4) показана невырожденность, интегральная обратимость, и доказано, что пространство решений имеет размерность три.

В третьем главе «Граничные задачи с производными по мере при моделировании малых деформаций сложно-сочленённых стержневых систем» изучены линейная модель, возникающая при моделировании малых деформаций стержневых систем, при этом используется поточечный подход.

В этой и последующих главах предполагаются выполненными условия:

- 1) x , $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$;
- 2) $p(x) > 0$ для всех $x \in [0; \ell]$, $\min_{\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \setminus S(\mu)} p(x) > 0$;
- 3) интеграл $\int_0^{\ell} \frac{d\mu(x)}{p(x)}$ конечен;
- 4) $r(x) \geq 0$ на всем $\overline{[0; \ell]}_S$;
- 5) $Q(x)$ не убывает.

Математическая модель, изучаемая в этой главе, возникает как необходи-

мое условие экстремали функционала

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \int_0^\ell \frac{pu''_{x\mu}}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{ru'_x{}^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^\ell u dF + \\ & + \gamma_1 \frac{u'_x{}^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u'_x{}^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}. \end{aligned}$$

на множестве E абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций, первая производная которых μ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, вторая производная $u''_{x\mu}(x)$ имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение.

Теорема 3.1.1. *Необходимое условие экстремума функционала $\Phi(u)$ реализуется в виде дифференциальной модели*

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Следует отметить, что уравнение в (3.1.16) в каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

здесь $\Delta v(\xi) (= v(\xi + 0) - v(\xi - 0))$ — скачок функции $v(x)$ в точке ξ .

Показывается, что уравнение $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + Q'_\sigma = F'_\sigma$ имеет единственное решение для любых начальных данных. Также исследуется структура решений: показано, что пространство решений однородного уравнения имеет размерность четыре, а неоднородного — сдвиг пространства решений однородного уравнения на некоторый фиксированный элемент.

Далее, изучается важное для приложений свойство *неосцилляции* однородного уравнения.

Точку x_0 назовем нулем решения $u(x)$ уравнения

$$Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0, \quad (3.3.1)$$

кратности 1 (или простым нулём), если $u(x_0) = 0$ и $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) > 0$; кратности 2, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) \leq 0$ и $(pu''_{x\mu})(x_0) \neq 0$;

кратности 3, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) = u'_x(x_0 + 0) = 0$, $(pu''_{x\mu})(x_0) = 0$ и $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 - 0) \cdot (pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0) > 0$.

Определение. Однородное уравнение $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$ назовем неосциллирующим на $[\overline{0; \ell}]_{\sigma}$, если любое нетривиальное решение этого уравнения имеет не более трех нулей (с учетом кратностей).

Определение. Будем говорить, что система непрерывных на $[0; \ell]$ функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является системой Чебышева порядка $n - 1$ (T_{n-1} -системой) на I ($= [0; \ell], (0; \ell], [0; \ell)$ или $(0; \ell)$), если произвольный нетривиальный обобщенный многочлен $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более $n - 1$ нуля на I с учётом кратности.

Определение. Систему $\{\varphi_i(x)\}$ непрерывных на $[0; \ell]$ функций (возможно состоящую и из счётного числа функций) назовём системой Маркова или M -системой, если для любого n система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является T_{n-1} -системой.

Следующая теорема играет ключевую роль при изучении нелинейных математических моделей.

Теорема 3.3.1. *Следующие условия эквивалентны: 1) однородное уравнение $Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\mu} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$ не осциллирует на $[\overline{0; \ell}]_{\sigma}$; 2) справедливо представление По́йа–Маммана $Lu = \psi_4 \left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 (\psi_0 u)'_{x\mu} \right)'_{\mu} \right)'_{x\sigma} \right)'_{\sigma}$,*

где функции $\psi_0(x)$, $\int_0^x \psi_1(s) ds$, $\int_0^x \int_0^t \psi_2(s) ds d\mu(t)$, $\int_0^x \int_0^{\tau} \int_0^t \psi_3(s) ds d\mu(t)$ принадлежат E , $\psi_4(x) - \sigma$ -суммируема на $[0; \ell]$ и $\psi_i(x) > 0$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$);

3) существует фундаментальная система $\{u_i(x)\}_{i=1}^4$ решений однородного уравнения $Lu = 0$ такая, что $W_1(x) = u_1(x) > 0$, $W_2(x) =$

$$W[u_1, u_2](x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_{1x}'(x) & u_{2x}'(x) \end{vmatrix} > 0, \quad W_3(x) = W[u_1, u_2, u_3](x) =$$

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ u_{1x}'(x) & u_{2x}'(x) & u_{3x}'(x) \\ u_{1x\mu}''(x) & u_{2x\mu}''(x) & u_{3x\mu}''(x) \end{vmatrix} > 0 \text{ и } W_4(x) = W[u_1, u_2, u_3, u_4](x) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & u_4(x) \\ u_{1x}'(x) & u_{2x}'(x) & u_{3x}'(x) & u_{4x}'(x) \\ pu_{1x\mu}''(x) & pu_{2x\mu}''(x) & pu_{3x\mu}''(x) & pu_{4x\mu}''(x) \\ (pu_{1x\mu}''(x))'_x & (pu_{2x\mu}''(x))'_x & (pu_{3x\mu}''(x))'_x & (pu_{4x\mu}''(x))'_x \end{vmatrix} > 0$$

4) в пространстве решений однородного уравнения $Lu = 0$ существует фун-

даментальная система решений являющаяся M -системой на $[0, \ell]$; 5) существует фундаментальная система решений однородного уравнения, которая является системой Чебышева порядка 3.

Получены достаточные условия невырожденности и доказана интегральная обратимость математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Показано, что при условии невырожденности функция влияния существует и единственна в классе непрерывных функций.

Функцией влияния математической модели (3.1.16) будем называть любую непрерывную по совокупности переменных x, s (на квадрате $\overline{[0; \ell]}_S \times \overline{[0; \ell]}_S$) функцию $G(x, s)$, позволяющую получить решение (3.1.16) в виде

$$u(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) F'_{\sigma}(s) d\sigma(s) \quad (3.5.2)$$

для любой σ -абсолютной непрерывной функции $F(x)$.

Получен явный вид функции влияния математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} = F'_{\sigma}, & (a) \\ u(0) = u'_x(0) = 0, & (b) \\ pu''_{x\mu}(\ell) = (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) = 0, & (c) \end{cases} \quad (3.6.1)$$

которая описывает малые деформации системы из растянутых балок, соединенных шарнирно, и имеющей в точках шарнирного соединения локальную особенность реагирующую на изгибающий момент; она имеет вид

$$G(x, s) = \int_0^{\min\{x, s\}} \frac{(\psi(x) - \psi(t))(\psi(s) - \psi(t))}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} d\mu(t),$$

где $\varphi(x) = \psi'_x(x) > 0$ и $\psi(x)$ удовлетворяет условиям $pu''_{x\mu}(\ell) = 0$ и $(pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) = 0$. Это представление справедливо при дополнительном предположении относительно меры μ (функции $\mu(x)$ ее порождающей): величины $\frac{\mu(x+\varepsilon) - \mu(x+0)}{\varepsilon}$ и $\frac{\mu(x-\varepsilon) - \mu(x-0)}{\varepsilon}$ ограничены для положительного ε .

Показана корректность математической модели (3.1.16).

Доказана осцилляционность спектра моделей

$$\left\{ \begin{array}{l} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} = \lambda M'_{\sigma} u, \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_2 u'_x(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + \\ + uQ'_{\sigma} = \lambda M'_{\sigma} u, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{array} \right.$$

соответственно. Здесь λ — спектральный параметр, $M(x)$ — строго возрастающая σ -абсолютно непрерывная функция.

В четвертой главе «Податливость сингулярных математических моделей четвертого порядка» изучается свойство двух сингулярных математических моделей четвертого порядка. Первая модель описывает малые деформации консоли, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, один конец которой свободен, а второй — защемлен; у второй модели — один конец свободен, а другой — закреплен шарнирно. Эти две модели реализуются в виде граничных задач

$$\left\{ \begin{array}{l} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_{\sigma} + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_{\sigma} + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x), \\ u(0) = (pu''_{xx})(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{array} \right.$$

соответственно (при условии $r(\ell) = 0$). Трудность изучения второй (по сравнению с первой) заключается в том, что при $Q(x) \equiv \text{const}$ последняя модель не обладает свойством невырожденности. Тем не менее удалось показать, что жесткость внешней среды можно уменьшить так, чтобы модель стала податливой.

Получены оценки функции влияния дифференциальной модели, которые имеют не только самостоятельное значение, но и позволяют изучать некоторые нелинейные математические модели четвертого порядка.

Пусть $G(x, s)$ — функция влияния дифференциальной модели

$$\left\{ \begin{array}{l} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

при этом (4.4.1) обладает свойством невырожденности; однородное уравнение $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.4.3. Пусть однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$; $G(x; s)$ — функция влияния модели (4.4.1); $u_0(x) = \int_0^x (x - \tau) d\mu(\tau) \cdot \int_x^{\ell} (\tau - x) d\mu(\tau)$. Тогда существуют σ -суммируемые, положительные функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ такие, что

$$u_0(x)v_1(s) \leq G(x, s) \leq u_0(x)v_2(s)$$

для всех x и s , принадлежащих $[0; \ell]$.

Теорема 4.4.4. Пусть однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$; $G(x, s)$ — функция влияния математической модели (4.4.1). Тогда существует положительная константа C такая, что неравенство

$$G(x, s) \geq C\varphi_1(x)\varphi_3(x)G(\tau, s) \quad (4.4.10)$$

справедливо для всех $x, s, \tau \in [0; \ell]$.

Здесь $\varphi_1(x) = \int_0^x (x - \tau) d\mu(\tau)$ и $\varphi_3(x) = \int_x^{\ell} (\tau - x) d\mu(\tau)$.

В пятой главе «**Нелинейные модели порядка с негладкими решениями**» посвящена анализу нелинейных математических моделей

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x) + \frac{dQ}{d\sigma}(x)u(x) = f(x, u(x)), \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Доказана теорема

Теорема 5.1.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$;
- 2) функция $f(x, u)$ не убывает по u при каждом $x \in [0; \ell]$ и $f(x, 0) \geq 0$;
- 3) существует N пар чисел α_i, β_i , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n$

$$f(x, \beta_k u_0(x)) \leq \beta_k \left(\int_0^{\ell} h_2(s) d\sigma(s) \right)^{-1} \quad (x \in [0; \ell]). \quad (5.1.4)$$

4) для каждого k существует множество $w_k \subset [0; \ell]$ положительной σ -меры такое, что

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) \geq \alpha_k \left(\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s) \right)^{-1} \quad (x \in [0; \ell], k = 1, \dots, N) \quad (5.1.5)$$

Если неравенства (5.1.4) и (5.1.5) превращаются в строгие на множествах положительной σ -меры, то задача (5.1.1) имеет $2N - 1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам $u_i(x) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 2N - 1$) и $u_{2i-1}(x) \leq u_{2i+1}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$).

Через K обозначим конус неотрицательных непрерывных на $[0; \ell]$ функций.

Изучается нелинейная модель

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}u = f(x, u) & (x \in \overline{[0; \ell]}_{\sigma}), \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.0.2)$$

с неосциллирующим однородным уравнением $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}u = 0$.

Для точек $\xi \in S(\sigma)$ уравнение в (5.0.2) принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta\alpha(\xi) = \alpha(\xi + 0) - \alpha(\xi - 0)$ — полный скачок функции $\alpha(x)$ в точке ξ .

Решение модели (5.0.2) мы ищем в классе E — абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций $u(x)$, производная $u'_x(x)$ которых μ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$, квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, $(pu''_{x\mu})'_x(x)$, $ru'_x(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Также будем предполагать выполненным условие: оператор суперпозиции $(Fu)(x) = v_2(x)f(x, u_0(x)u(x))$ действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p,\sigma}[0; \ell]$ — пространство измеримых на $[0, \ell]$ функций $f(x)$ для которых интеграл $\int_0^{\ell} |f(x)|^p d\sigma(x)$ конечен, при некотором $p \in (1; +\infty]$.

Для выполнимости последнего условия достаточно, чтобы $f(x, u)$ удовлетворяла условиям Каратеодори:

- 1) $f(x, u)$ измерима при каждом u ;
- 2) $f(x, u)$ при каждом x непрерывна по u ;

3) существует σ -суммируемая на $[0, \ell]$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x, u)| \leq m(x)$.

Приводятся условия на «монотонный» рост нелинейности $f(x, u)$, для которой модель

$$\begin{cases} Lu = (pv''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}u = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.6.1)$$

может иметь не более одного нетривиального неотрицательного решения, т. е. решения, принадлежащего конусу K .

Теорема 5.6.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) уравнения $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_{\sigma}}$;
- 2) $f(x, 0) \equiv 0$;
- 3) $f(x, u)$ не убывает по u при $u \geq 0$ и каждом $x \in [0; \ell]$;
- 4) $\frac{f(x, u)}{u}$ убывает по u при $u > 0$;
- 5) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u_0(x)u)$ непрерывно действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$ при некотором $p \in (1; +\infty)$.

Тогда множество Λ неотрицательных значений λ , при которых задача (5.6.1) имеет хотя бы одно нетривиальное в K решение, обладает следующими свойствами:

(а) Множество Λ непусто и совпадает с некоторым интервалом $(\lambda_0, \lambda_{\infty})$, при $0 \leq \lambda_0 < \lambda_{\infty} \leq +\infty$;

(б) Каждому $\lambda \in \Lambda$ отвечает лишь одно решение $u(x, \lambda) \in K$ решение модели (5.6.1), и $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|u(\cdot, \lambda)\|_C = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\infty}} \|u(\cdot, \lambda)\|_C = \infty$.

(в) Функция $u(x, \lambda)$ монотонна по λ : при всех $x \in [0; \ell]$ справедливо неравенство $(\lambda_1 - \lambda_2)(u(x, \lambda_1) - u(x, \lambda_2)) \geq 0$.

(г) При каждом фиксированном $\lambda^* \in \Lambda$ для любого начального приближения $u_0(x)$ итерационная последовательность $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемая как решение дифференциальной модели $Lu = \lambda^* f(x, u_{n-1}(x))$, $u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к $u(x, \lambda^*)$.

Проводится анализ случая, когда нелинейная дифференциальная модель имеет одно известное решение (без ограничения общности мы можем считать его нулевым ввиду очевидной функциональной замены), ставится вопрос о наличии второго решения. Изучается модель с сильной нелинейностью.

В шестой главе «Адаптация метода конечных элементов к изучаемым моделям» к изучаемым моделям адаптируется метод конечных элементов, доказаны оценки близости приближенного решения к точному.

Построен алгоритм адаптированного метода конечного элемента для стилтьесовской струны, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, точнее, для математической модели

$$\begin{cases} -(pu')'_\sigma(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x), \\ u(0) = u'_x(1) = 0. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Введем энергетическое скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 p\varphi'\psi' dx + \int_0^1 \varphi\psi dQ$$

в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций, имеющих производную суммируемую с квадратом, и удовлетворяющих условию $u(0) = 0$.

Для погрешности доказана теорема.

Теорема 6.1.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (6.1.1); $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда

$$\langle u - v, u - v \rangle \leq \tilde{C} \cdot h,$$

где константа \tilde{C} не зависит от $h = 1/N$ (N — количество интервалов на которые производится разбиение отрезка $[0; 1]$, причем сетка предполагается равномерной).

Несмотря на то, что в качестве базисных функций берутся классические функции, приближенное решение сходится к точному при измельчении сетки. Это вызвано тем обстоятельством, что при построении алгоритма интегрирование производится по мере, которая содержит все (локализованные) особенности, порожденные как внутренней структурой изучаемого объекта, так и внешними факторами (среда и сила).

Также для различных коэффициентов модели (6.1.1) проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретическую оценку.

Также метод конечных элементов адаптируется для разрывной стилтье-

совской струны:

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)'(x) + \int_0^x u(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0) - (pu'_\mu)'(0), \\ u(0) = u'_\mu(1) = 0. \end{cases}$$

Показано, что

$$a(w, w) = \int_0^1 w_\mu'^2 d\mu + \int_0^1 w^2 d[Q] \leq (C_1 + C_2) \cdot h,$$

где постоянные C_i не зависят от h .

Далее проводятся адаптация метода конечных элементов и оценка погрешности для математической модели $(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x)$, $u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$. Доказана

Теорема 6.3.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (6.3.1), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей отрезка $[0; 1]$. Тогда справедлива оценка

$$a(u - v, u - v) \leq C \cdot h^2,$$

где $h = 1/N$, C не зависит от h и $a(u, u)$ — энергетическая норма:

$$a(u, u) = \int_0^1 u''^2 dx + \int_0^1 ru'^2 dx + \int_0^1 u^2 dQ.$$

Проведены численные эксперименты, которые подтверждают теоретическую оценку h^2 .

Четвертый параграф посвящен адаптации метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (6.4.1)$$

где $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf_{[0, \xi]} p > 0$, $p(x) \equiv 0$ на $[\xi; 1]$, $r(x) \geq 0$ и $r(x) > 0$ на $[\xi; 1]$.

Получена оценка погрешности, и проведены численные эксперименты, которые подтверждают теоретическую оценку.

В седьмой главе «**Численные эксперименты**» приведены результаты численных экспериментов, проведенных с помощью программ, написанных в пакете символьной математики Maple и на языке высокого уровня Python.

Каждая глава завершается выводами, вытекающими из результатов данной главы.

Приложения содержит листинги программ, написанных для описанных выше моделей на Maple и Python, и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, полученных при численных экспериментах.

Глава 1

Математическая модель сингулярной струны

В этой главе исследуется математическая модель второго порядка

$$\begin{cases} -\left(p\frac{d}{dx}u\right)' + Q'u = F', \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1.0.1)$$

полученная как экстремаль функционала потенциальной энергии неоднородной струны, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, в естественных (с точки зрения механики) предположениях, что $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации и $\inf_{x \in [0; \ell]} p(x) > 0$, а штрихами обозначено обобщенное дифференцирование; уравнение (1.0.1) мы заменяем на привычное, с позиций обыкновенных дифференциальных уравнений, поточечно заданное уравнение

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(p \frac{d}{dx} u \right) + \left(\frac{d}{d\sigma} Q \right) u = \frac{d}{d\sigma} F, \quad (1.0.2)$$

где производная $\frac{d}{d\sigma}$ понимается по Радону-Никодиму, т. е. по мере. Уравнение (1.0.1) в ряде случаев удобнее изучать в интегро-дифференциальной форме

$$-(pu'_x)(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) - (pu'_x)(0).$$

Решения ищутся в классе непрерывных функций. Точное описание класса функций в котором рассматривается модель дается в первом параграфе.

В первом параграфе излагаются необходимые сведения, которые используются на протяжении всей работы.

Естественность такой трактовки модели объясняется в § 1.2 — для случая, когда уравнение (1.0.1) имеет физическую природу, возникая по схеме Лагранжа из задачи минимизации функционала энергии

$$\Phi(u) = \int_0^{\ell} \frac{p}{2} \left(\frac{d}{dx} u \right)^2 dx + \int_0^{\ell} \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^{\ell} u dF$$

для неоднородной струны. В третьем параграфе изучаются простейшие свойства модели; в четвертом — получены аналоги теорем Штурма о перемежаемости нулей; изучено свойство, важное не только для приложений, но при анализе нелинейных математических моделей — свойство *неосцилляционности однородного уравнения*. Пятый параграф посвящен проблеме интегрального представления решения; анализу функции влияния дифференциальной модели. В шестом параграфе изучается важный вопрос — корректность математической модели. В следующем параграфе получены оценки функции влияния, которые будут использоваться в следующей главе при анализе нелинейных дифференциальных моделей. В последнем — восьмом — параграфе показано, что линейная математическая модель обладает *осцилляционным спектром*, т. е. спектр модели состоит из счётной последовательности собственных положительных частот, единственная точка сгущения которых $+\infty$; амплитудные функции удовлетворяют следующим свойствам: первая (отвечающая ведущей частоте) нулей внутри интервала $(0; \ell)$ не имеет, каждая последующая имеет на один нуль больше, чем предыдущая, причем их нули перемежаются.

1.1 Необходимые сведения

В этом параграфе доказываются некоторые важные факты, которые используются на протяжении всей работы.

Пусть $\sigma(x)$ — ограниченная, строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. Наиболее интересный для нас случай, когда $S(\sigma)$ непусто. При этом мы допускаем у функции $\sigma(x)$ счетное число точек разрыва. Каждая из таких точек имеет σ -меру, равную $\Delta\sigma(\xi) = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)$.

Определение 1.1.1. Функцию $F(x)$, заданную на $[0; \ell]$, назовем σ -абсолютно непрерывной на $[0; \ell]$, если для любого положительного ε найдется такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^n$ попарно непересекающихся интервалов для которой $\sum_{i=1}^n (\sigma(\beta_i) - \sigma(\alpha_i)) < \delta$, справедливо неравенство $\sum_{i=1}^n |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \varepsilon$.

Функцию $\sigma(x)$ и всякую σ -абсолютно непрерывную на $[0; \ell]$ функцию $F(x)$ нам удобней считать заданной на специальном множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, в котором каждая точка разрыва ξ функции $\sigma(x)$ переходит в пару собственных элементов. Строится это множество следующим образом.

Пусть $J_\sigma = [0, \ell] \setminus S(\sigma)$. Введем на J_σ метрику равенством $\varrho(x, y) = \sigma(y + 0) - \sigma(x - 0)$ для $x < y$. Пополнение J_σ по этой метрике обозначим через $\overline{[0; \ell]}_S$. В этом множестве вместо прежних точек $\xi \in S(\sigma)$ появляется пара собственных элементов ξ_- и ξ_+ . Индуцируя на $\overline{[0; \ell]}_S$ исходную упорядоченность, имеем $\xi_- < \xi_+$. Формальное объединение $\overline{[0; \ell]}_S$ с $S(\sigma)$, при котором $\xi_- < \xi < \xi_+$ для каждой $\xi \in S(\sigma)$, обозначим через $\overline{[0; \ell]}_\sigma$. В этом множестве точки из $S(\sigma)$ как бы вставлены на прежние места, но теперь они обрамлены с боков уже собственными в $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ элементами ξ_- , ξ_+ , а не символами предельных переходов в этих точках, как было ранее. Отметим, что в точках ξ_- и ξ_+ множества $\overline{[0; \ell]}_S$ (когда $\xi \in S(\sigma)$) σ -абсолютно непрерывная функция $F(x)$ определена своими предельными значениями: $F(\xi_\pm) = F(\xi \pm 0)$; σ -абсолютно непрерывные функции, определенные на $\overline{[0; \ell]}_S$, достигают на $\overline{[0; \ell]}_S$ наибольшее и наименьшее значения, что на $[0; \ell]$ могло и не быть. Например, функция $F(x) = \frac{\ell - x}{\ell - \xi} \theta(x - \xi)$, очевидно, σ -абсолютно непрерывна при $\sigma(x) = x + \theta(x - \xi)$, здесь и далее, $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$, и единице при $x > 0$, наибольшее значение не достигает на $[0; \ell]$, а на $\overline{[0; \ell]}_S$ — в точке ξ_+ .

На множестве $\overline{[0; \ell]}_S$ определим функцию сегмента $\sigma(\overline{[\alpha; \beta]}_S)$ для множества $\overline{[\alpha; \beta]}_S \subset \overline{[0; \ell]}_S$ следующим равенством $\sigma(\overline{[\alpha; \beta]}_S) = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$. Через σ обозначим аддитивную меру, полученную из функции $\sigma(\overline{[\alpha; \beta]}_S)$ стандартным распространением (см., например, [102]).

По функции $F(x)$, определенной на $\overline{[0; \ell]}_S$, так же можно построить ад-

дитивную функцию $F(A)$ множества, следовательно, мы вправе применять результаты общей теории меры и интеграла (см., например, [183]).

Определение 1.1.2. Функцию $f(x)$, σ -суммируемую на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, назовем σ -производной функции $F(x)$, если для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_S$ выполняется равенство

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(s) d\sigma.$$

Производная по мере σ , или σ -производная σ -абсолютно непрерывной функции $v(x)$ определена почти всюду (относительно σ -меры) на множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ как отношение скачков: $\frac{dv}{d\sigma}(\xi) = \frac{\Delta v(\xi)}{\Delta \sigma(\xi)}$.

Теорема 1.1.1. Пусть $F(x)$ и $Q(x)$ — функции ограниченной на $[0; \ell]$ вариации. Тогда существует строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция $\sigma(x)$ такая, что $F(x)$ и $Q(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$, причем σ -производные $F'_\sigma(x)$ и $Q'_\sigma(x)$ функций $F(x)$ и $Q(x)$ ограничены на $[0; \ell]$.

Доказательство. Каждая функция с конечным изменением есть разность двух неубывающих: $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и $Q(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$. Положим

$$\sigma(x) \equiv x + \sum_{j=1}^2 (Q_j(x) + F_j(x)). \quad (1.1.1)$$

Покажем, что функция $\sigma(x)$, определенная равенством (1.1.1), удовлетворяет требованиям теоремы.

Пусть задано произвольно $\varepsilon > 0$, и $\{(\alpha_i; \beta_i)\}_{i=1}^n$ — система непересекающихся интервалов. Из неравенств

$$\begin{aligned} -(Q_1(\beta_i) - Q_1(\alpha_i)) - (Q_2(\beta_i) - Q_2(\alpha_i)) &\leq Q_1(\beta_i) - Q_1(\alpha_i) - (Q_2(\beta_i) - Q_2(\alpha_i)) \leq \\ &\leq Q_1(\beta_i) - Q_1(\alpha_i) + (Q_2(\beta_i) - Q_2(\alpha_i)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(F_1(\beta_i) - F_1(\alpha_i)) - (F_2(\beta_i) - F_2(\alpha_i)) &\leq F_1(\beta_i) - F_1(\alpha_i) - (F_2(\beta_i) - F_2(\alpha_i)) \leq \\ &\leq F_1(\beta_i) - F_1(\alpha_i) + (F_2(\beta_i) - F_2(\alpha_i)) \end{aligned}$$

следует неравенство $-(\sigma(\beta_i) - \sigma(\alpha_i)) \leq F(\beta_i) - F(\alpha_i) \leq \sigma(\beta_i) - \sigma(\alpha_i)$, или $|F(\beta_i) - F(\alpha_i)| \leq \sigma(\beta_i) - \sigma(\alpha_i)$. Суммируя последнее неравенство по i от 1 до

n , и взяв $\delta = \varepsilon$, мы получим, что функция $F(x)$ σ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$. Аналогично доказывается σ -абсолютная непрерывность функции $Q(x)$.

Остальная часть теоремы вытекает из неравенства $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \leq \sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$, справедливого для любых α и β . \square

Замечание 1.1.1. Теорема справедлива для конечного числа функций с ограниченной на $[0; \ell]$ вариацией.

Отметим, что если $f(x)$ σ -суммируемая функция, то $F(x) = \int_0^x f(s) d\sigma(s)$

является σ -абсолютно непрерывной на $[0; \ell]_S$ функцией.

Теорема 1.1.2 (Теорема о преобразовании меры). Пусть $\sigma(x) \in BV[0, \ell]$, $\varphi(x) \in C[0, \ell]$ и $u(x)$ — σ -суммируема. Тогда выполнено равенство

$$\int_0^\ell \varphi d\mu = \int_0^\ell \varphi u d\sigma,$$

где $\mu(x) = \int_0^x u d\sigma$.

Доказательство. Если функция $u(x)$ принимает значения одного знака, то утверждение теоремы является прямым следствием теоремы 15.1 из [183, стр. 61].

Пусть теперь $u(x)$ не является знакопостоянной. Положим $u_+(x) = \frac{1}{2}(u(x) + |u(x)|)$ и $u_-(x) = \frac{1}{2}(u(x) - |u(x)|)$. Каждая из введенных функций принимает значения одного знака, следовательно, для них справедливо требуемое соотношение. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \varphi d\mu &= \int_0^\ell \varphi d \left(\int_0^x u_+ d\sigma + \int_0^x u_- d\sigma \right) = \int_0^\ell \varphi d \left(\int_0^x u_+ d\sigma \right) + \\ &+ \int_0^\ell \varphi d \left(\int_0^x u_- d\sigma \right) = \int_0^\ell \varphi u_+ d\sigma + \int_0^\ell \varphi u_- d\sigma = \int_0^\ell \varphi u d\sigma, \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

1.2 Вывод математической модели сингулярной струны

Пусть вдоль отрезка $[0, \ell]$ оси Ox натянута струна. Предположим, что рассматриваемый объект деформируется в одной плоскости, деформации малые и происходят перпендикулярно положению равновесия, т. е. отрезку $[0; \ell]$.

Будем считать деформации непрерывными функциями, заданными на отрезке $[0, \ell]$. Если $u(x)$ — форма деформации, принятая струной под воздействием на элемент $[x, x + dx)$ силой $dF(x)$, то работа, выполняемая этой силой при перемещении нашего элемента на дистанцию $u(x)$, равна $u(x) dF(x)$. В целом вдоль всей струны затрачивается энергия $\Phi_F(u) = \int_0^\ell u(x) dF(x)$, где $F(x)$ — суммарное внешнее воздействие на $[0, x)$ — функция ограниченной вариации, причем скачки $F(x)$ соответствуют импульсным воздействиям: силам, приложенным в точках разрыва.

Столь же элементарно описывается энергия Φ_Q , накапливаемая за счет упругой реакции окружающей среды. Если через dQ обозначить локальный коэффициент упругости среды, то при отклонении элемента $[x, x + dx)$ на дистанцию h сила упругой реакции по закону Гука равна $h dQ(x)$, поэтому работа по преодолению этой силы при изменении h от нуля до $u(x)$ равна $\left(\int_0^{u(x)} h dh \right) dQ = \frac{u^2}{2} dQ$, что на всем $[0, \ell]$ приводит к интегралу $\Phi_Q(u) = \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ$.

Полная энергия $\Phi(u)$, накапливаемая струной под воздействием нагрузки $F(x)$, равна $\Phi_0(u) + \Phi_Q(u) - \Phi_F(u)$, где $\Phi_0(u)$ определяет внутреннюю энергию струны.

Изменение длины струны на участке $[x, x + dx)$, произошедшее под воздействием силы интенсивности $dF(x)$, равно $\left(\sqrt{1 + u'^2} - 1 \right) dx$. Энергия, затрачиваемая на изменение длины участка dx , равна $p(x) \left(\sqrt{1 + u'^2} - 1 \right) dx$, где $p(x)$ — сила натяжения струны в точке x . Для всей струны имеем $\int_0^\ell p(x) \left(\sqrt{1 + u'^2} - 1 \right) dx$. Разлагая выражение $\sqrt{1 + u'^2}$ в ряд Тейлора по

степеням u' и отбрасывая малые более высокого порядка, чем u'^2 , имеем

$$\Phi_0(u) = \int_0^\ell \frac{pu'^2}{2} dx.$$

Подчеркнем, что рассматриваемая функция $u(x)$ — это гипотетическая (виртуальная) деформация. Реальная деформация должна давать минимум полной энергии

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) + \Phi_Q(u) - \Phi_F(u),$$

на множестве допустимых функций.

Будем рассматривать функционал

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{pu'^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^\ell u dF \quad (1.2.1)$$

при условиях закрепления концов. В (1.2.1) все интегралы понимаются по Лебегу-Стилтьесу. Мы считаем, что (1.2.1) задан на E — множестве абсолютно непрерывных функций $u(x)$, производная $u'(x)$ которых имеет конечное на $[0, \ell]$ изменение, т. е. принадлежит $BV[0, \ell]$, и принимающих на концах отрезка $[0; \ell]$ нулевые значения.

Собственные значения $v(\xi)$ функции $v(x) \in BV[0; \ell]$ во внутренних точках ξ , принадлежащих множеству $S(v)$ точек разрыва функции $v(x)$, в интеграле $\int_0^\ell u dv$, понимаемом по Риману-Стилтьеса, роли не играют. В связи с этим будем считать функцию $v(x)$, ограниченной на $[0; \ell]$ вариации, непрерывной во всякой точке ξ для которой пределы слева и справа совпадают.

Если $u(x)$ дает минимум $\Phi(u)$ на E , то по схеме Лагранжа для первой вариации $\delta\Phi(u)h = \left. \frac{d}{d\lambda} \Phi(u + \lambda h) \right|_{\lambda=0}$ должно быть

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^\ell pu' dh + \int_0^\ell uh dQ - \int_0^\ell h dF = 0$$

для любой h из $E_0 = \{h \in E \mid h(0) = h(\ell) = 0\} (= E)$. Вводя обозначение $\varphi(x) = \int_0^x u(s) dQ(s)$ (x — точка непрерывности $Q(x)$), мы можем переписать

равенство (1.2) в виде

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^\ell pu' dh + \int_0^\ell h d\varphi - \int_0^\ell h dF = 0. \quad (1.2.2)$$

Проинтегрировав второе и третье слагаемые в (1.2.2) по частям, будем иметь

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^\ell pu' dh - \int_0^\ell \varphi dh + \int_0^\ell F dh = 0$$

или

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^\ell (pu' - \varphi + F) dh = 0 \quad (1.2.3)$$

для любой $h \in E_0$.

В силу непрерывности $u(x)$ функция $\varphi(x)$ имеет вместе с $Q(x)$ ограниченную вариацию. Отмеченное интегрирование по частям возможно ввиду того, что в силу непрерывности $u(x)$ оба интеграла, понимаемые по Лебегу-Стилтьесу, оказываются интегралами Римана-Стилтьеса, а для последнего интегрирование по частям правомерно.

Лемма 1.2.1. Пусть $A(x)$ — функция ограниченной вариации и пусть для любой $h \in E_0$

$$\int_0^\ell A dh = 0.$$

Тогда $A(x)$ есть константа на $(0; \ell)$.

Доказательство. Так как $h \in E_0$, то интеграл $\int_0^\ell (A - C) dh$ равен ну-

лю для любой константы C , и, для $C^* = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell A(s) ds$, в частности. Функ-

ция $h(x) = \int_0^x (A(s) - C^*) ds$ очевидно принадлежит E_0 . Поэтому равенство

$\int_0^\ell (A - C^*) dh = 0$ принимает вид $\int_0^\ell (A(s) - C^*)^2 ds = 0$. Отсюда вытекает,

что равенство $A(x) - C^* = 0$ справедливо почти всюду.

Пусть ξ — внутренняя точка в которой равенство $A(x) - C^* = 0$ нарушается. Так как $A(x)$ имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение, то односторонние пределы $A(\xi - 0)$ и $A(\xi + 0)$ существуют. Ввиду того, что множество точек в которых $A(x) = C^*$ имеет полную меру, найдутся две последовательности $\{\xi'_n\}$ и $\{\xi''_n\}$ такие, что для всех n справедливо 1) $\xi'_n < \xi < \xi''_n$; 2) $\xi'_n \rightarrow \xi$ и $\xi''_n \rightarrow \xi$; 3) $A(\xi'_n) = A(\xi''_n) = C^*$.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве $A(\xi'_n) = A(\xi''_n) = C^*$, будем иметь $A(\xi - 0) = A(\xi + 0) = C^*$, т. е. односторонние пределы совпадают, что вместе с принятым соглашением означает непрерывность $A(x)$ в точке ξ^* . Таким образом, $A(x) \equiv C^*$ на $(0; \ell)$. Лемма доказана. \square

Из равенства (1.2.3), в силу леммы 1.2.1, следует

$$(pu')(x) = \int_0^x u dQ - F(x) + \text{const.} \quad (1.2.4)$$

Равенство (1.2.4) мы продифференцируем по некоторой мере, используя понятие производной Радона-Никодима, а именно покажем, что верна следующая

Теорема 1.2.1. Пусть $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf p(x) > 0$. Тогда существует такая строго возрастающая функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0; \ell]$ меру, что x , $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ -абсолютно непрерывными на $[0; \ell]$, а функция $u(x)$, приводящая (1.2.1) к минимуму, является решением дифференциальной модели

$$\begin{cases} -(pu')'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Доказательство. Существование функции $\sigma(x)$ такой, что $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ -абсолютно непрерывными на $[0; \ell]$ функциями вытекает из теоремы 1.1.1 и замечания 1.1.1.

Из σ -абсолютной непрерывности $Q(x)$ следует σ -абсолютная непрерывность первого слагаемого в правой части (1.2.4), а вместе с этим и всей правой части. Дифференцирование (1.2.4) по σ -мере приводит к (1.2.5). \square

Замечание 1.2.1. Выше мы рассмотрели задачу о малых деформациях струны с закрепленными концами. Если один или оба конца имеют упругое закрепление, то граничные условия меняются на

$$\begin{aligned}(pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) &= 0, \\ (pu'_x)(\ell) + \gamma_2 u(\ell) &= 0,\end{aligned}$$

где γ_1 и γ_2 — коэффициенты упругости пружин, прикрепленных к концам струны; причем $\gamma_i = 0$ соответствует случаю свободного конца.

1.3 Простейшие свойства дифференциальной модели для сингулярной струны

Всюду далее, мы предполагаем, что выполнены следующие условия:

- 1) функции x , $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ -абсолютно непрерывными на $[0; \ell]$;
- 2) $\min_{\overline{[0; \ell]_S}} p(x) > 0$;

Через E_σ мы обозначим множество абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций, производная каждой из которых — σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]_S}$.

Присутствие в

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + u \frac{dQ}{d\sigma} = \frac{dF}{d\sigma}. \quad (1.3.1)$$

σ -дифференцирования означает, что это уравнение задано на множестве $\overline{[0; \ell]_\sigma}$. При этом в каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ уравнение принимает вид

$$-\Delta(pu')(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi).$$

Решением уравнения (1.3.1) будем называть любую функцию из E_σ , которая удовлетворяет (1.3.1) на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$ почти всюду (по σ -мере).

Теорема 1.3.1 (Аналог теоремы Коши-Пикара). *Покажем, что при любых u_0 , v_0 и любой точке $x_0 \in \overline{[0; \ell]_S}$ уравнение (1.3.1) имеет единственное решение, принадлежащее E_σ , удовлетворяющее условиям*

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = v_0.$$

Доказательство. Проинтегрируем уравнение по мере σ . С учетом начального условия $u'(x_0) = v_0$, уравнение (1.3.1) принимает вид

$$(pu')(x) = \int_{x_0}^x u(s) dQ(s) - F(x) + p(x_0)v_0 + F(x_0), \quad (1.3.2)$$

которое можно переписать в виде $u = Au + z$ при

$$(Au)(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \left(\int_{x_0}^t u(s) dQ(s) \right) dt, \quad (1.3.3)$$

$$z(x) = u_0 + \int_{x_0}^x (p(x_0)v_0 - F(t) + F(x_0)) \frac{dt}{p(t)}. \quad (1.3.4)$$

Оператор A , определяемый (1.3.3), действует из $C[0, \ell]$ в $C[0, \ell]$. Очевидно, $z(x) \in C[0, \ell]$. Покажем, что оператор $(I - A)$ имеет обратный. Для этого достаточно показать, что спектральный радиус $\rho(A)$ меньше 1. Тогда, резольвентный оператор $(I - A)^{-1}$ может быть представлен в виде ряда Неймана $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, который вследствие неравенства $\rho(A) < 1$ будет сходиться по операторной норме. Покажем, что в нашей ситуации $\rho(A) = 0$. Опираясь на формулу $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, мы докажем, что

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq C \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

с некоторой константой C . Для этого покажем, что для любого натурального n и произвольной $\varphi(x)$ из $C[0, \ell]$

$$|(A^n \varphi)(x)| \leq C^n \|\varphi\| \frac{|x - x_0|^n}{n!}, \quad (1.3.5)$$

где $C = \frac{1}{c_0} \bigvee_0^\ell(Q)$, $c_0 = \min_{[0; \ell]_s} p(x)$, $\|\varphi\|$ — норма $\varphi(x)$ в $C[0, \ell]$ и $\bigvee_0^\ell(Q)$ — полная вариация функции $Q(x)$ на отрезке $[0; \ell]$.

Доказательство (1.3.5) проведем по индукции. При $n = 1$ имеем

$$|(A\varphi)(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \cdot \left| \bigvee_{x_0}^t(Q) \right| dt \right| \|\varphi\| \leq C|x - x_0| \|\varphi\|,$$

что и требуется. Предположив, справедливость (1.3.5) при $n = k$, последовательно получаем

$$\begin{aligned}
 |A(A^k\varphi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t (A^k\varphi)(s) dQ(s) dt \right| \leq \\
 &\leq \frac{\|\varphi\|}{c_0} \left| \int_{x_0}^x \left| \int_{x_0}^t \frac{|s-x_0|^k}{k!} C^k dQ(s) \right| dt \right| \leq \frac{\|\varphi\|}{c_0} \frac{C^k}{k!} \bigvee_0^\ell(Q) \left| \int_{x_0}^x |t-x_0|^k dt \right| = \\
 &= \frac{C^{k+1}}{(k+1)!} \|\varphi\| |x-x_0|^{k+1},
 \end{aligned}$$

что и требовалось для (1.3.5).

Таким образом, уравнение $u = Au + z$ имеет единственное решение $u(x)$ в $C[0; \ell]$, принадлежность которого E_σ непосредственно следует из (1.3.2).

Доказанное позволяет изучить структуру решения линейной математической модели второго порядка с производными по мере: при любом $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$ двум начальным задачам $u(x_0) = 0, u'(x_0) = 1$, $u(x_0) = 1, u'(x_0) = 0$, отвечают линейно независимые решения уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + Q'_\sigma u = 0. \quad (1.3.6)$$

Все пространство решений (1.3.6) исчерпывается их линейной оболочкой.

Доказательство совершенно стандартно в силу установленной ранее однозначной разрешимости математической модели в форме начальной задачи.

На основании доказанного выше можно утверждать, что общее решение $u(x)$ неоднородного уравнения $-\frac{d}{d\sigma}(pu') + Q'_\sigma u = F'_\sigma$ имеет вид $u(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + v(x)$, где $\varphi_i(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, $v(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (удовлетворяющее, например, нулевым начальным условиям $u(x_0) = 0$ и $u'(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$), C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Всякую систему $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ линейно независимых решений однородного уравнения (1.3.6) назовем фундаментальной системой решений (ФСР).

Для пары функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ из E_σ рассмотрим обычный определитель

Вронского

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix},$$

определенный на множестве $\overline{[0; \ell]}_S$. Изучим его свойства, необходимые нам при построении функции влияния математической модели.

Для любых двух решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ уравнения (1.3.6) следующие свойства эквивалентны:

(а) $W[\varphi_1, \varphi_2](x) \neq 0$ при некотором $x \in \overline{[0; \ell]}_S$.

(б) $W[\varphi_1, \varphi_2](x) \neq 0$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_S$.

(в) $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ — ФСР.

Более того, функция $p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ непрерывна.

Доказательство вполне стандартно и проводится алгебраическими рассуждениями. Покажем, что справедлива

Теорема 1.3.2. Для любой пары решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ уравнения (1.3.6)

$$p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x) \equiv \text{const} \quad \left(x \in \overline{[0; \ell]}_S\right).$$

Доказательство. Так как $\varphi_i(x)$ абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$ и x — σ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, то $\varphi_i(x)$ σ -абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$. Поэтому функция $pW[\varphi_1, \varphi_2](x)$ — σ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$ и множество точек в которых существует σ -производная функций x , $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$) имеет полную σ -меру.

Пусть x — точка в которой производные $\frac{dx}{d\sigma}$, $\frac{d\varphi_i}{d\sigma}$, $\frac{d}{d\sigma}(p\varphi_i')$ ($i = 1, 2$) и $\frac{dQ}{d\sigma}$ существуют. Как отмечалось ранее множество таких точек имеет полную σ -меру.

Для случая, когда $x \in \overline{[0; \ell]}_\sigma \setminus S(\sigma)$, последовательно находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}(pW[\varphi_1, \varphi_2](x)) &= \frac{d}{d\sigma} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ p\varphi_{1x}'(x) & p\varphi_{2x}'(x) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_{1x}'(x) & \varphi_{2x}'(x) \\ p\varphi_{1x}'(x) & p\varphi_{2x}'(x) \end{vmatrix} \frac{dx}{d\sigma} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ (p\varphi_{1x}')'_\sigma(x) & (p\varphi_{2x}')'_\sigma(x) \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{1x}'(x) & \varphi_{2x}'(x) \\ p\varphi_{1x}'(x) & p\varphi_{2x}'(x) \end{vmatrix} \frac{dx}{d\sigma} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(x)Q'_\sigma(x) & \varphi_2(x)Q'_\sigma(x) \end{vmatrix} = 0,$$

так как в обоих определителях стоят пропорциональные строки.

Если точка x принадлежит множеству $S(\sigma)$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} (pW[\varphi_1, \varphi_2](x)) &= \frac{\Delta(pW[\varphi_1, \varphi_2](x))}{\Delta\sigma} = \\ &= \frac{1}{\Delta\sigma(x)} \left[\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ p\varphi_{1x}'(x+1) & p\varphi_{2x}'(x+0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ p\varphi_{1x}'(x+0) & p\varphi_{2x}'(x+0) \end{vmatrix} \right] = \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \frac{\Delta(p\varphi_{1x}')}{\Delta\sigma(x)}(x) & \frac{\Delta(p\varphi_{2x}')}{\Delta\sigma(x)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(x)\frac{\Delta Q}{\Delta\sigma(x)} & \varphi_2(x)\frac{\Delta Q}{\Delta\sigma(x)} \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

так как $\varphi_i(x)$ непрерывны и в последнем определителе строки пропорциональны.

Как известно, что если σ -производная σ -абсолютно непрерывной функции почти всюду (относительно меры σ) равна нулю, то функция есть константа. Теорема доказана. \square

1.4 Аналоги теорем Штурма и свойство неосцилляции

Этот параграф посвящен анализу решений однородного уравнения; доказаны аналоги теорем Штурма, которые имеют важное значение при анализе качественных свойств решений. Изучено важное свойство неосцилляции, которое играет не только фундаментальную роль в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но и ключевую при анализе нелинейных математических моделей.

Очевидно, любое нетривиальное решение уравнения может иметь лишь конечное число нулей.

Теорема 1.4.1. *Для любых двух линейно независимых решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ однородного уравнения*

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + Q'_\sigma u = 0 \tag{1.4.1}$$

их нули в $\overline{[0; \ell]}_S$ перемежаются, т. е. для любой пары нулей ξ_1 , ξ_2 решения $\varphi_1(x)$, другое решение меняет между ними знак (и наоборот).

Доказательство. Пусть ξ_1 и ξ_2 — соседние нули решения $\varphi_1(x)$. Без ограничения общности, мы можем считать, что $\varphi_1(x) > 0$ на (ξ_1, ξ_2) . Если $\varphi_2(x) \neq 0$ на $[\xi_1, \xi_2]$, то умножением на -1 мы можем добиться положительности $\varphi_2(x)$ на этом отрезке. При достаточно большом λ , очевидно, имеет место неравенство $\lambda\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ при всех $x \in [\xi_1, \xi_2]$. Беря в этом неравенстве \inf по λ , будем иметь при некотором $\lambda_0 > 0$ и каком-то $\tau \in [\xi_1, \xi_2]$, что функция $h(x) = \lambda_0\varphi_2(x) - \varphi_1(x)$ неотрицательна в окрестности τ и $h(\tau) = 0$. Покажем, что производные $h'(\tau \pm 0)$ равны нулю. Отсюда будет следовать, что $h(x) \equiv 0$. В самом деле, точка τ является точкой локального минимума функции $h(x)$. Поэтому $h'(\tau + 0) \geq 0$ и $h'(\tau - 0) \leq 0$. Если $\tau \notin S(\sigma)$ (— множество точек разрыва функции $\sigma(x)$), $h'(\tau - 0) = h'(\tau + 0)$, и, следовательно, $h'(\tau - 0) = h'(\tau + 0) = 0$. Если $\tau \in S(\sigma)$, то уравнение (1.4.1) в точке τ принимает вид $-\frac{\Delta p h'(\tau)}{\Delta \sigma(\tau)} + \frac{\Delta Q(\tau)}{\Delta \sigma(\tau)} h(\tau) = 0$, или $-\frac{\Delta p h'(\tau)}{\Delta \sigma(\tau)}$, так как $h(\tau) = 0$. Отсюда приходим к неравенствам $0 \geq p h'(\tau - 0) = p u'(\tau + 0) \geq 0$, т. е. $p h'(\tau \pm 0) = 0$. Рассуждения упрощаются, если решение $\varphi_2(x)$ обращается в нуль в одной из точек ξ_1, ξ_2 . \square

Рассмотрим теперь два уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ_1}{d\sigma}u = 0, \quad (1.4.2)$$

$$-\frac{d}{d\sigma}(pv') + \frac{dQ_2}{d\sigma}v = 0. \quad (1.4.3)$$

Теорема 1.4.2. Пусть $\frac{dQ_1}{d\sigma} \geq \frac{dQ_2}{d\sigma}$ и $\frac{dQ_1}{d\sigma} \neq \frac{dQ_2}{d\sigma}$. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение (1.4.2) и ξ_1, ξ_2 — его нулевые точки в $[\overline{0; \ell}]_S$. Тогда любое решение $v(x) (\neq 0)$ уравнения (1.4.3) меняет в (ξ_1, ξ_2) знак.

Доказательство. Подставляя в уравнения (1.4.2) и (1.4.3) решения $u(x)$, $v(x)$, умножая первое на $v(x)$, второе — на $u(x)$, вычитая почленно одно из другого и интегрируя по мере σ , будем иметь

$$\int_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} v d(pu') - \int_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} u d(pv') = \int_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} uv d(Q_1 - Q_2).$$

Первая часть в предположении $v(x) \geq 0$ — неотрицательна (если $u(x)$ была неотрицательна). После интегрирования по частям обеих слагаемых слева

мы получим (в результате взаимоликвидации пары интегралов)

$$[v(pu')]_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} - [u(pv')]_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} = [pvu']_{\xi_1+0}^{\xi_2-0},$$

так как $u(\xi_1 + 0) = u(\xi_2 - 0) = 0$. Но $u'(\xi_1 + 0) > 0$ и $u'(\xi_2 - 0) < 0$. Поэтому выражение (1.4) вместе с левой частью (1.4) должно быть строго отрицательным, что противоречит неотрицательности (1.4). \square

Рассмотрим теперь уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}(p_1u'_x) + Q'_\sigma u = 0, \quad (1.4.4)$$

$$-\frac{d}{d\sigma}(p_2v'_x) + Q'_\sigma v = 0. \quad (1.4.5)$$

Теорема 1.4.3. Пусть $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_S$; $u(x)$ — нетривиальное решение (1.4.4), $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ — его нулевые точки в $\overline{[0; \ell]}_S$. Тогда любое нетривиальное решение $v(x)$ уравнения (1.4.5) меняет в $(\xi_1; \xi_2)$ знак.

Доказательство. Пусть Z — множество точек в которых существует производная по σ функций $x, u(x), v(x), (p_1u'_x)(x)$ и $(p_2v'_x)(x)$. Очевидно, что Z имеет полную σ -меру.

Для точек $x \in Z \setminus S(\sigma)$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{u}{v} (p_1u'_x v - p_2v'_x u) \right\} &= \frac{u'_x v - uv'_x}{v^2} (p_1u'_x v - p_2v'_x u) \frac{dx}{d\sigma} + \\ &+ \frac{u}{v} \left((p_1u'_x)'_\sigma v + p_1u'_x v'_x \frac{dx}{d\sigma} - (p_2v'_x)'_\sigma u - p_2v'_x u'_x \frac{dx}{d\sigma} \right), \end{aligned}$$

или, после очевидных преобразований,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{u}{v} (p_1u'_x v - p_2v'_x u) \right\} &= \left\{ p_1u_x'^2 - 2p_2 \frac{u'_x v'_x u}{v^2} + p_2 \frac{u^2 v_x'^2}{v^2} \right\} \frac{dx}{d\sigma} = \\ &= \left\{ (p_1 - p_2)u_x'^2 + p_2 \left(u'_x - \frac{uv'_x}{v} \right)^2 \right\} \frac{dx}{d\sigma} \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $u(x)$ и $v(x)$ — решения соответствующих уравнений).

Если $x \in S(\sigma)$, то

$$\Delta \left(\frac{u}{v} (p_1u'_x v - p_2v'_x u) \right) (x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u(x+0)}{v(x+0)} \left((p_1 u'_x)(x+0)v(x+0) - (p_2 v'_x)(x+0)u(x+0) \right) - \\
&- \frac{u(x-0)}{v(x-0)} \left((p_1 u'_x)(x-0)v(x-0) - (p_2 v'_x)(x-0)u(x-0) \right) = \\
&= \frac{u(x)}{v(x)} \left(v(x)\Delta(p_1 u'_x)(x) - u(x)(p_2 v'_x)(x) \right) = 0,
\end{aligned}$$

так как $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и являются решениями уравнений (1.4.4) и (1.4.5) соответственно. Откуда

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{u}{v} (p_1 u'_x v - p_2 v'_x u) \right) (x) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$$\frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{u}{v} (p_1 u'_x v - p_2 v'_x u) \right\} = \left\{ (p_1 - p_2) u_x'^2 + p_2 \left(u'_x - \frac{u v'_x}{v} \right)^2 \right\} \frac{dx}{d\sigma},$$

которое является аналогом равенства Пиконе. Интегрируя последнее равенство по мере σ по множеству $[\xi^{(1)}; \xi^{(2)}]$:

$$\left\{ \frac{u}{v} (p_1 u'_x v - p_2 v'_x u) \right\} \Big|_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}} = \int_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}} \left\{ (p_1 - p_2) u_x'^2 + p_2 \left(u'_x - \frac{u v'_x}{v} \right)^2 \right\} \frac{dx}{d\sigma} d\sigma. \quad (1.4.6)$$

Но левая часть последнего равенства равна нулю, а правая — положительна, если $v(x) > 0$ для всех $x \in [\xi^{(1)}; \xi^{(2)}]$, и приходим к противоречию.

Если $v(x)$ обращается в нуль, например, при $x = \xi^{(1)}$, то в равенстве (1.4.6) неопределенная величина $\frac{u}{v}$ при $x = \xi^{(1)}$ заменяется на $\lim_{x \rightarrow \xi^{(1)+0}} \frac{u}{v} = \frac{u'(\xi^{(1)}+0)}{v'(\xi^{(1)}+0)}$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \xi^{(1)+0} } \left(\frac{u}{v} (p_1 u'_x v - p_2 v'_x u) \right) = \lim_{x \rightarrow \xi^{(1)+0} } \left(u(p_1 - p_2) u_x' \right) = 0,$$

и снова приходим к противоречию. Случай $x = \xi^{(2)}$ рассматривается аналогично. Таким образом, $v(x)$ обязана внутри интервала $(\xi^{(1)}; \xi^{(2)})$ менять знак. \square

Из теорем 1.4.2 и 1.4.3 очевидным образом вытекает

Теорема 1.4.4. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — нетривиальные решения уравнений

$$-\frac{d}{d\sigma} (p_1 u'_x) + \frac{dQ_1}{d\sigma} u = 0,$$

$$-\frac{d}{d\sigma}(p_2 v'_x) + \frac{dQ_2}{d\sigma}v = 0$$

соответственно, причем $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$ и $\frac{dQ_1}{d\sigma}(x) \geq \frac{dQ_2}{d\sigma}(x)$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_S$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ — нулевые точки $u(x)$ в $\overline{[0; \ell]}_S$. Тогда $v(x)$ меняет в $(\xi_1; \xi_2)$ знак.

Перейдем к изучению свойства неосцилляции. Приведем необходимые определения.

Определение 1.4.1. Будем говорить, что система непрерывных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является системой Чебышева порядка $n - 1$ (T_{n-1} -системой) на I ($= [0; \ell], (0; \ell], [0; \ell)$ или $(0; \ell)$), если произвольный нетривиальный обобщённый многочлен $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более $n - 1$ нуля на I с учётом кратности.

Определение 1.4.2. Систему $\{\varphi_i(x)\}$ непрерывных на I функций (возможно состоящую и из счётного числа функций) назовём системой Маркова или M -системой, если для любого n система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является T_{n-1} -системой.

Назовем однородное уравнение

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu'_x) + \frac{dQ}{d\sigma}u = 0 \quad (1.4.7)$$

неосциллирующим на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, если любое нетривиальное его решение имеет не более одного нуля. Из теоремы 1.4.1 следует, что для неосцилляции (1.4.7) достаточно, чтобы функция $Q(x)$ не убывала.

Доказательство. Покажем вначале, что (1.4.7) не осциллирует при $Q(x) \equiv \text{const}$. Если $u(x)$ — решение уравнения $-\frac{d}{d\sigma}(pu') = 0$, то $(pu') \equiv \text{const}$, откуда следует, что $u'(x)$ не имеет нулей в $\overline{[0; \ell]}_S$, т. е. $u(x)$ строго монотонна. Значит, $u(x)$ может иметь не более одного нуля.

Пусть теперь $Q'_\sigma(x) \geq 0$ ($\neq 0$) и ξ_1, ξ_2 — какие-либо нулевые точки его нетривиального решения $u(x)$. Взяв за пределами (ξ_1, ξ_2) любую точку η , выпустим из нее решение $v(x)$ уравнения (1.4.7), например — с условиями $v(\eta) = 0, v'(\eta + 0) = 1$ (или $v'(\eta - 0) = 1$). Тогда по теореме 1.4.2 у $v(x)$ должен быть нуль и строго между ξ_1, ξ_2 , что невозможно. \square

Покажем, что следующие свойства эквивалентны:

- (1) уравнение (1.4.7) имеет строго положительное на $\overline{[0; \ell]}_S$ решение;
- (2) решение $u(x)$ уравнения (1.4.7) при условиях $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ не имеет других нулей;
- (3) уравнение (1.4.7) не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$;
- (4) существует хотя бы одно строго положительное решение дифференциального неравенства

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ}{d\sigma}u \geq 0,$$

т. е. уравнения (1.3.1) при $F'_\sigma(x) \geq 0$.

Условие (2) адекватно условию Якоби вариационного исчисления. Эквивалентность (3)–(4) для обычного уравнения есть известная теорема Валле-Пуссена.

Докажем цепочку следствий 1) \implies 2) \implies 3) \implies 4) \implies 1).

Следствие 1) \implies 2). Обозначим положительное решение (1.4.7) через $u(x)$. Если η — отличный от $x = 0$ нуль решения $v(x)$ уравнения (1.4.7) с начальными условиями $v(0) = 0$ и $v'(0) = 1$, то из теоремы 1.4.1 следует, что решение $u(x)$ обязано менять знак в $(0, \eta)$, что невозможно.

2) \implies 3). Если существует решение $u(x)$, которое в точках η_1 и η_2 ($0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq 1$) обращается в нуль, то функция $v(x)$, являясь решением $-(pu'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = 0$, удовлетворяющее условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, обязано обратиться в нуль на (η_1, η_2) , что также невозможно.

3) \implies 4) Если уравнение (1.4.7) не осциллирует, то сумма решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ задач

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = 0, \\ u(0) = 0, u'(0) = 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -(pu'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = 0, \\ u(\ell) = 0, u'(\ell) = -1, \end{cases}$$

соответственно, положительна.

Пусть $v(x)$ — решение уравнения (1.3.1) при $F'_\sigma \geq 0$, удовлетворяющее условиям $v(x_0) = v'(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$. Пусть $M > 0$ такое, что при всех $x \in \overline{[0; \ell]}_S$ выполняется неравенство $|v(x)| \leq M$, η — такая точка, что $\varphi_1(\eta) = \varphi_2(\eta)$. Такая точка очевидно существует. Пусть

$C_1 = \frac{M}{\min_{x \geq \eta} \varphi_1(x)}$ и $C_2 = \frac{M}{\min_{x \leq \eta} \varphi_2(x)}$. Покажем, что функция $u(x) = v(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ положительна на $[0, \ell]$. Если $x \in [0, \eta]$, то

$$u(x) \geq -M + C_1\varphi_1(x) + \frac{M}{\min_{[0, \eta]} \varphi_2} \varphi_2(x) > 0.$$

Если же $x \in [\eta, \ell]$, то

$$u(x) \geq -M + \frac{M}{\min_{[\eta, \ell]} \varphi_1} \varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) > 0.$$

Таким образом, $u(x)$ — положительное решение уравнения (1.3.1) при $F'_\sigma \geq 0$.

Следствие 4) \implies 1) очевидно.

Также легко показывается, что если однородное уравнение (1.4.7) не осциллирует на $[0; \ell]_\sigma$, то найдется такая положительная на $[0; \ell]$ функция $\varphi(x)$, что для любой $u(x) \in E_\sigma$ выполняется равенство

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu'_x) + \frac{dQ}{d\sigma}u = -\frac{1}{\varphi} \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_x \right)'_\sigma. \quad (1.4.8)$$

Докажем равенство (1.4.8). Пусть $\varphi(x)$ положительное решение неосциллирующего уравнения (1.4.7). Пусть x одна из точек в которых существуют производные $(pu'_x)'_\sigma$, $(p\varphi')'_\sigma$, Q'_σ и x'_σ . Множество таких точек имеет полную σ -меру. Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{u}{\varphi} \right) (x + \varepsilon) - \left(\frac{u}{\varphi} \right) (x + 0) \right] &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{u(x + \varepsilon)}{\varphi(x + \varepsilon)} - \frac{u(x + 0)}{\varphi(x + 0)} \right] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{u(x + \varepsilon) - u(x + 0)}{\varphi(x + \varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{u(x + 0)}{\varphi(x + \varepsilon)} - \frac{u(x + 0)}{\varphi(x + 0)} \right] = \\ &= \frac{1}{\varphi(x + \varepsilon)} \left\{ \frac{u(x + \varepsilon) - u(x + 0)}{\varepsilon} - u'(x + 0) \right\} + \frac{u'(x + 0)}{\varphi(x + \varepsilon)} - \\ &- \frac{u(x + 0)}{\varphi(x + \varepsilon)\varphi(x + 0)} \left\{ \frac{\varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x + 0)}{\varepsilon} - \varphi'(x + 0) \right\} - \\ &- \frac{u(x + 0)}{\varphi(x + \varepsilon)\varphi(x + 0)} \varphi'(x + 0). \quad (1.4.9) \end{aligned}$$

Выражения в фигурных скобках в правой части равенства (1.4.9) стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$, так как x одна из точек в которой существуют производные $(pu'_x)'_\sigma$ и $(p\varphi')'_\sigma$ (и, как необходимое условие, существуют производные $u'(x + 0)$ и $\varphi'(x + 0)$).

Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{\varphi}\right)'(x+0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{u}{\varphi}\right)(x+\varepsilon) - \left(\frac{u}{\varphi}\right)(x+0) \right] = \\ &= \frac{u'(x+0)}{\varphi(x+0)} - \frac{u(x+0)}{\varphi(x+0)\varphi(x+0)}\varphi'(x+0) = \\ &= \frac{u'(x+0)}{\varphi(x)} - \frac{u(x)}{\varphi(x)\varphi(x)}\varphi'(x+0), \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

так $u(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x .

Для левых производных доказательство проводится аналогично:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{\varphi}\right)'(x-0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{u}{\varphi}\right)(x-\varepsilon) - \left(\frac{u}{\varphi}\right)(x-0) \right] = \\ &= \frac{u'(x-0)}{\varphi(x-0)} - \frac{u(x-0)}{\varphi(x-0)\varphi(x-0)}\varphi'(x-0) = \\ &= \frac{u'(x-0)}{\varphi(x)} - \frac{u(x)}{\varphi(x)\varphi(x)}\varphi'(x-0), \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Равенства (1.4.10) и (1.4.11) можно объединить

$$\left(\frac{u}{\varphi}\right)'(\tau) = \frac{u'(\tau)}{\varphi(\tau)} - \frac{u(\tau)}{\varphi(\tau)\varphi(\tau)}\varphi'(\tau), \quad (1.4.12)$$

где τ равно $x-0$ или $x+0$.

Умножаем обе части (1.4.12) на $p(\tau)\varphi^2(\tau)$, будем иметь

$$p(\tau)\varphi^2(\tau) \left(\frac{u}{\varphi}\right)'(\tau) = p(\tau)u'(\tau)\varphi(\tau) - u(\tau)p(\tau)\varphi'(\tau).$$

Рассмотрим случай $x \notin S(\sigma)$. Для правых производных имеем

$$\begin{aligned} \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi}\right)'\right)'_{\sigma}(x+0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} \left\{ (pu')(x+\varepsilon)\varphi(x+\varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - u(x+\varepsilon)(p\varphi')(x+\varepsilon) - (pu')(x+0)\varphi(x+0) + u(x+0)(p\varphi')(x+0) \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} \left\{ \left[(pu')(x+\varepsilon) - (pu')(x+0) \right] \varphi(x+\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + (pu')(x+0)\varphi(x+\varepsilon) - u(x+\varepsilon) \left[(p\varphi')(x+\varepsilon) - (p\varphi')(x+0) \right] - \right. \\ &\quad \left. - u(x+\varepsilon)(p\varphi')(x+0) - (pu')(x+0)\varphi(x+0) + u(x+0)(p\varphi')(x+0) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(pu')(x + \varepsilon) - (pu')(x + 0)}{\sigma(x + \varepsilon) - \sigma(x + 0)} \varphi(x + \varepsilon) \right) - \\
&- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(p\varphi')(x + \varepsilon) - (p\varphi')(x + 0)}{\sigma(x + \varepsilon) - \sigma(x + 0)} u(x + \varepsilon) \right) + \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sigma(x + \varepsilon) - \sigma(x + 0)} \left((pu')(x + 0) \varphi(x + \varepsilon) - \right. \right. \\
&\left. \left. - u(x + \varepsilon) (p\varphi')(x + 0) - (pu')(x + 0) \varphi(x + 0) + u(x + 0) (p\varphi')(x + 0) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Первые два слагаемые нам дают:

$$(pu')'_\sigma(x + 0) \varphi(x + 0) - (p\varphi')'_\sigma(x + 0) u(x + 0).$$

Остается показать, что третий предел в (1.4.13) равен нулю. В самом деле,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sigma(x + \varepsilon) - \sigma(x + 0)} \left((pu')(x + 0) \varphi(x + \varepsilon) - \right. \right. \\
&\left. \left. - u(x + \varepsilon) (p\varphi')(x + 0) - (pu')(x + 0) \varphi(x + 0) + u(x + 0) (p\varphi')(x + 0) \right) \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sigma(x + \varepsilon) - \sigma(x + 0)} \left[(pu')(x + 0) \left(\varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x + 0) \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(u(x + \varepsilon) - u(x + 0) \right) (p\varphi')(x + 0) \right] \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{(x + \varepsilon) - x}{\sigma(x + \varepsilon) - \sigma(x + 0)} \left[(pu')(x + 0) \cdot \frac{\varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x + 0)}{\varepsilon} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{u(x + \varepsilon) - u(x + 0)}{\varepsilon} \cdot (p\varphi')(x + 0) \right] \right\} = \\
&= x'_\sigma \cdot \left[(pu')(x + 0) \cdot \varphi'(x + 0) - u'(x + 0) \cdot (p\varphi')(x + 0) \right] = 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)'_\sigma (x + 0) = (pu')'_\sigma(x + 0) \varphi(x + 0) - (p\varphi')'_\sigma(x + 0) u(x + 0). \tag{1.4.14}$$

для левых производных рассуждения аналогичны:

$$\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)'_\sigma (x - 0) = (pu')'_\sigma(x - 0) \varphi(x - 0) - (p\varphi')'_\sigma(x - 0) u(x - 0). \tag{1.4.15}$$

Для случая $x \in S(\sigma)$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \Delta \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right) (x) &= \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right) (x+0) - \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right) (x-0) = \\ &= \left(pu' \varphi \right) (x+0) - \left(up\varphi' \right) (x+0) - \left(pu' \varphi \right) (x-0) + \left(up\varphi' \right) (x-0) = \\ &= \varphi(x) \Delta \left(pu' \right) (x) - u(x) \Delta \left(p\varphi' \right) (x), \quad (1.4.16) \end{aligned}$$

так как $u(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны. Из (1.4.16) мы находим (деля обе части на $\Delta\sigma(x)$)

$$\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)'_{\sigma} (x) = \varphi(x) \left(pu' \right)'_{\sigma} (x) - u(x) \left(p\varphi' \right)'_{\sigma} (x). \quad (1.4.17)$$

Равенства (1.4.14), (1.4.15) и (1.4.17) можно объединить

$$\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)'_{\sigma} (x) = \varphi(x) (pu')'_{\sigma} (x) - u(x) (p\varphi')'_{\sigma} (x). \quad (1.4.18)$$

А так как $\varphi(x)$ решение однородного уравнения, то $(p\varphi')'_{\sigma} (x) = \varphi(x)Q'_{\sigma}(x)$, и (1.4.18) принимает вид

$$\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)'_{\sigma} (x) = \varphi(x) (pu')'_{\sigma} (x) - u(x)\varphi(x)Q'_{\sigma}(x). \quad (1.4.19)$$

Делим (1.4.19) на $-\varphi(x)$ придем к (1.4.8).

Теорема 1.4.5. *Следующие условия эквивалентны*

1) *однородное уравнение*

$$-\frac{d}{d\sigma} (pu'_x) + \frac{dQ}{d\sigma} u = 0$$

не осциллирует на $[\overline{0}; \ell]_{\sigma}$;

2) *справедливо представление По́йа–Маммана*

$$-\frac{d}{d\sigma} (pu'_x) + \frac{dQ}{d\sigma} u = -\frac{1}{\varphi} \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)'_{\sigma};$$

3) *существует фундаментальная система $\{u_i(x)\}_{i=1}^2$ решений однородного уравнения такая, что $W_1(x) = u_1(x) > 0$, $W_2(x) = W[u_1, u_2](x) =$*

$$= \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'_x(x) & u_2'_x(x) \end{vmatrix} > 0;$$

- 4) в пространстве решений однородного уравнения $Lu = 0$ существует фундаментальная система решений являющаяся M -системой на $[0, \ell]$;
- 5) существует фундаментальная система решений однородного уравнения, которая является системой Чебышева порядка 1.

Доказательство. Докажем цепочку следствий $1) \implies 2) \implies 3) \implies 4) \implies 5) \implies 1)$.

$1) \implies 2)$. Так как однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, то, как доказано ранее, существует положительное решение однородного уравнения. Следовательно, справедливо (1.4.8).

$2) \implies 3)$. Для произвольной ФСР $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ определитель Вронского отличен от нуля. Так как $\varphi(x)$ — положительное решение однородного уравнения, то какая-то из функций $\varphi_1(x)$ или $\varphi_2(x)$ линейно независима с $\varphi(x)$. Пусть для определенности это будет $\varphi_1(x)$. Система $\{\varphi(x), \varphi_1(x)\}$ — линейно независима. Ее вронскиан сохраняет знак. Если он положителен, то искомая система будет $u_1(x) = \varphi(x), u_2(x) = \varphi_1(x)$; если же отрицателен, то искомая система — $u_1(x) = \varphi(x), u_2(x) = -\varphi_1(x)$.

$3) \implies 4)$. Так как $u_1(x) > 0$, то система $\{u_1(x)\}$ — T_0 -система. Покажем, что $\{u_1(x), u_2(x)\}$ — T_1 -система. Предположим противное: при некоторых α_1 и α_2 обобщенный многочлен $\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x)$ имеет не менее двух перемен знака. Так как $u_1(x) > 0$, то этим же свойством обладает и функция $f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{u_2(x)}{u_1(x)}$. Эта функция абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, как отношение двух абсолютно непрерывных функций (знаменатель отделен от нуля). Поэтому почти всюду

$$f'(x) = \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{u_2(x)}{u_1(x)} \right)' = \alpha_2 \frac{u_2'(x)u_1(x) - u_2(x)u_1'(x)}{u_1^2(x)} = \alpha_2 \frac{W_2(x)}{u_1^2(x)} \neq 0$$

для всех $x \in [0; \ell]$. Поэтому $f(x)$ монотонна на всем $[0; \ell]$, следовательно, имеет не более одной перемены знака, что противоречит нашему предположению.

Импlications $4) \implies 5)$ и $5) \implies 1)$ следуют из определений. □

1.5 Анализ математической модели сингулярной струны и функция влияния невырожденной математической модели

Мы возвращаемся к анализу линейной математической модели

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ}{d\sigma}u = \frac{dF}{d\sigma}; \\ l_1u \equiv pu'(0) - \gamma_1u(0) = 0; \\ l_2u \equiv pu'(\ell) + \gamma_2u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

В дальнейшем под записью $\gamma_1 = \infty$ ($\gamma_2 = \infty$) мы будем понимать условие $u(0) = 0$ ($u(\ell) = 0$).

Определение 1.5.1. Будем говорить, что математическая модель (1.5.1) обладает свойством невырожденности (или просто невырождена), если однородная модель (при $F(x) \equiv \text{const}$) имеет только тривиальное решение.

Также как и в классической теории показывается, что математическая модель (1.5.1) невырождена тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\|l_i\varphi_j\|_{i,j=1}^2$ отличен от нуля, где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^2$ — какая-то фундаментальная система функций однородного уравнения $-\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ}{d\sigma}u = 0$.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия невырожденности математической модели сингулярной струны.

Теорема 1.5.1. Пусть $\min_{[0;\ell]_S} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0;\ell]_S}$, $\gamma_1 \geq 0$ и $\gamma_2 \geq 0$. Математическая модель (1.5.1) невырождена, если выполнено одно из следующих условий:

- (а) $\gamma_1 = \infty$ и/или $\gamma_2 = \infty$;
- (б) $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$;
- (в) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и $Q(\ell) - Q(0) > 0$.

Доказательство. Предположим, что однородная математическая модель не обладает свойством невырожденности, т. е. имеет нетривиальное решение

$u_0(x)$. После подстановки $u_0(x)$ в уравнение, умножения полученного тождества на $u_0(x)$ и интегрирования по мере σ по всему $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, будем иметь

$$\int_0^\ell \left(- (pu_{0x}')'_\sigma \right) u_0 d\sigma + \int_0^\ell u_0^2 Q'_\sigma d\sigma = 0,$$

или, после интегрирования по частям первого интеграла,

$$- pu_0' u_0 \Big|_0^\ell + \int_0^\ell pu_{0x}^{\prime 2} dx + \int_0^\ell u_0^2 Q'_\sigma d\sigma = 0.$$

Откуда, с учетом граничных условий,

$$\gamma_1 u_0^2(0) + \gamma_2 u_0^2(\ell) + \int_0^\ell pu_{0x}^{\prime 2} dx + \int_0^\ell u_0^2 Q'_\sigma d\sigma = 0.$$

Отсюда, $\gamma_1 u_0^2(0) = 0$, $\gamma_2 u_0^2(\ell) = 0$, $\int_0^\ell pu_{0x}^{\prime 2} dx = 0$ и $\int_0^\ell u_0^2 Q'_\sigma d\sigma = 0$.

Во всех трех случаях из предпоследнего равенства мы находим, что $pu_{0x}^{\prime 2}(x) = 0$ почти всюду, и, с учетом $p(x) > 0$, $u_{0x}^{\prime 2}(x) = 0$. Так как $u_0(x)$ абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, то $u_0(x)$ есть константа на $[0; \ell]$: $u_0(x) \equiv C = \text{const}$.

Рассмотрим первый случай: $\gamma_1 = \infty$ и/или $\gamma_2 = \infty$. Пусть для определенности $\gamma_1 = \infty$. Тогда, первое граничное условие превращается в $u(0) = 0$, что влечет за собой равенство нулю $u_0(x)$ на всем $[0; \ell]$.

Во втором случае: $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, используя равенства $\gamma_1 u_0^2(0) = 0$ и $\gamma_2 u_0^2(\ell) = 0$, мы найдем, что $u_0(0) \cdot u_0(\ell) = 0$. Последнее опять приводит к тождеству $u_0(x) \equiv 0$ на $[0; \ell]$.

В третьем случае, в равенство $\int_0^\ell u_0^2 Q'_\sigma d\sigma = 0$ вместо $u_0(x)$ мы подставим

C — значение константы которой равна $u_0(x)$, и получим $C^2 \int_0^\ell Q'_\sigma d\sigma = 0$, или $C^2(Q(\ell) - Q(0)) = 0$. Отсюда $C^2 = 0$, т. е. опять $u_0(x) \equiv 0$.

Итак, во всех трех случаях мы пришли к противоречию. Теорема доказана. \square

Ниже показывается, что у невырожденной модели малых деформаций сингулярной струны существует единственная функция влияния.

Следуя работе Ю. В. Покорного и А. В. Боровских [151], непрерывную функцию $G(x, s)$ двух переменных $x, s \in \overline{[0; \ell]}_S$ назовем функцией влияния модели

$$\begin{cases} Lu = F'_\sigma, \\ l_j u = 0, \quad (j = 1, 2), \end{cases} \quad (1.5.2)$$

если решение $u(x)$ можно представить в виде

$$u(x) = \int_0^\ell G(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (1.5.3)$$

Если математическая модель (1.5.2) невырождена, то функция влияния существует и может быть найдена по формуле

$$G(x, s) = -\frac{1}{pW(0)} \begin{cases} \varphi_2(x)\varphi_1(s), & 0 \leq s \leq x \leq \ell, \\ \varphi_1(x)\varphi_2(s), & 0 \leq x \leq s \leq \ell, \end{cases} \quad (1.5.4)$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^2$ — ФСР однородного уравнения, биортогональная к функционалам l_j , $W(s) = W[\varphi_1, \varphi_2](s)$ — определитель Вронского. Существование такой системы следует из невырожденности модели.

Покажем справедливость (1.5.3) для (1.5.4). Для $x \in \overline{[0; \ell]}_S$ формула (1.5.3) принимает вид

$$u(x) = -\frac{\varphi_2(x)}{(pW)(0)} \int_0^x \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \frac{\varphi_1(x)}{(pW)(0)} \int_x^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (1.5.5)$$

Из последнего равенства для точек $x \in S(\sigma)$ находим

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \\ &= -\frac{\Delta\varphi_2(x)}{(pW)(0)} \int_0^{x+0} \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \frac{\varphi_2(x-0)}{(pW)(0)} \int_{x-0}^{x+0} \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \\ &\quad - \frac{\Delta\varphi_1(x)}{(pW)(0)} \int_{x+0}^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \frac{\varphi_1(x-0)}{(pW)(0)} \int_{x-0}^{x+0} \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \end{aligned}$$

Отсюда, как нетрудно видеть, $\Delta u(x) = 0$, другими словами, у функции $u(x)$ нет ненулевых скачков. Таким образом, $u(x)$ мы можем считать непрерывной и определенной на $[0; \ell]$.

Из представления разности $u(\beta) - u(\alpha)$ ($\alpha, \beta \in \overline{[0; \ell]}_S$) в виде

$$\begin{aligned} u(\beta) - u(\alpha) = & -\frac{[\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)]}{(pW)(0)} \int_0^\beta \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \\ & -\frac{[\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)]}{(pW)(0)} \int_\beta^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \\ & -\frac{1}{(pW)(0)} \int_\alpha^\beta \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(\alpha) - \varphi_1(s) & \varphi_2(\alpha) - \varphi_2(s) \end{array} \right| F'_\sigma(s) d\sigma(s) \end{aligned}$$

следует абсолютная непрерывность функции $u(x)$ на $[0; \ell]$. Отсюда вытекает, что производная $u'(x)$ существует почти всюду. Покажем, что производная $u'(x)$, определенная на $\overline{[0; \ell]}_S$, находится по формуле

$$u'_x(x) = -\frac{\varphi_{2x}'(x)}{(pW)(0)} \int_0^x \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \frac{\varphi_{1x}'(x)}{(pW)(0)} \int_x^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (1.5.6)$$

Докажем равенство (1.5.6) для правых производных (для левых — рассуждения аналогичны). Имеем при $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \frac{u(x + \varepsilon) - u(x + 0)}{\varepsilon} = & \\ = & -\frac{1}{(pW)(0)} \left[\frac{\varphi_2(x + \varepsilon) - \varphi_2(x + 0)}{\varepsilon} - \varphi_2'(x + 0) \right] \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \\ & -\frac{1}{(pW)(0)} \left[\frac{\varphi_1(x + \varepsilon) - \varphi_1(x + 0)}{\varepsilon} - \varphi_1'(x + 0) \right] \int_{x+\varepsilon}^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \\ & -\frac{\varphi_2'(x + 0)}{(pW)(0)} \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \frac{\varphi_1'(x + 0)}{(pW)(0)} \int_{x+\varepsilon}^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \\ & -\frac{1}{(pW)(0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varepsilon} F'_\sigma(s) d\sigma(s). \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые в правой части последнего равенства стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Предел третьего и четвертого слагаемых при $\varepsilon \rightarrow +0$, как нетрудно видеть, равен

$$-\frac{\varphi_2'(x+0)}{(pW)(0)} \int_0^{x+0} \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \frac{\varphi_1'(x+0)}{(pW)(0)} \int_{x+0}^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s).$$

Остается показать равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varepsilon} F'_\sigma(s) d\sigma(s) = 0.$$

Имеем

$$\left| \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varepsilon} F'_\sigma(s) d\sigma(s) \right| \leq \bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F) \sup_{x < s < x+\varepsilon} \frac{|\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)|}{\varepsilon}$$

(здесь мы воспользовались теоремой о преобразовании меры [166]). Отношение $\frac{\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varepsilon}$ ограничено при $s \in (x; x+\varepsilon)$ в силу принадлежности $\varphi_i(x)$ пространству E_σ : $\frac{|\varphi_i(s) - \varphi_i(x)|}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} (|\varphi_i'(x+0)|(s-x) + o(s-x)) \leq |\varphi_i'(x+0)| + o(1)$. Тогда (1.5) является следствием (1.5) и равенства $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F) = 0$. Таким образом, равенство (1.5.6) доказано.

Докажем равенства (первое справедливо почти всюду по мере σ)

$$(pu')'_\sigma(x) = -\frac{1}{(pW)(0)} (p\varphi_2')'_\sigma(x) \int_0^x \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \frac{1}{(pW)(0)} (p\varphi_1')'_\sigma(x) \int_x^\ell \varphi_2(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - F'_\sigma(x), \quad (1.5.7)$$

если $x \in \overline{[0; \ell]_\sigma} \setminus S(\sigma)$, и

$$\Delta(pu')(x) = -\Delta F(x) - \frac{\varphi_2(x)\Delta Q(x)}{(pW)(0)} \int_0^{x-0} \varphi_1(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) -$$

$$-\frac{\varphi_2(x)\varphi_1(x)}{(pW)(0)}\Delta Q(x)\Delta F(x) - \frac{\varphi_1(x)\Delta Q(x)}{(pW)(0)} \int_{x+0}^{\ell} \varphi_2(s)F'_\sigma(s) d\sigma(s), \quad (1.5.8)$$

если $x \in S(\sigma)$.

Из (1.5.6) непосредственно следует σ -абсолютная непрерывность $pu'_x(x)$ на $\overline{[0; \ell]}_S$. Поэтому $\frac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x)$ существует почти всюду. Пусть $Z \subset \overline{[0; \ell]}_\sigma$ — множество точек в которых существуют производные $\frac{d}{d\sigma}(p\varphi'_{i_x})$, $\frac{dQ}{d\sigma}$ и $\frac{dF}{d\sigma}$. Это множество имеет полную σ -меру. Для точек $x \in Z \setminus S(\sigma)$, из (1.5.6) следует (1.5.7), так как

$$\frac{d}{d\sigma} \int_0^x \varphi_1(s)F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \varphi_1(x)F'_\sigma(x) \text{ и } \frac{d}{d\sigma} \int_x^\ell \varphi_2(s)F'_\sigma(s) d\sigma(s) = -\varphi_2(x)F'_\sigma(x)$$

для точек из множества $Z \setminus S(\sigma)$. Равенство (1.5.8) проверяется непосредственно.

Теперь из (1.5.7), (1.5.5) и свойств функций $\varphi_i(x)$ вытекает, что $u(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению $Lu = F'_\sigma$; а из (1.5.6) и (1.5.5) — граничным условиям $l_j u = 0$ ($j = 1, 2$).

У невырожденной модели функция влияния единственна (в классе непрерывных функций).

Доказательство. Пусть $G_1(x, s)$ и $G_2(x, s)$ — две функции влияния (1.5.2); (x_0, s_0) — точка, в которой функции $G_i(x, s)$ различны. Без ограничения общности можно считать, что $G_1(x_0, s_0) - G_2(x_0, s_0) > 0$. В силу непрерывности $G_i(x, s)$ существует окрестность $U_\delta(x_0, s_0)$ точки (x_0, s_0) в которой разность $G_1(x, s) - G_2(x, s)$ положительна. Функции $u_1(x) = \int_0^\ell G_1(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s)$ и $u_2(x) = \int_0^\ell G_2(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s)$ являются решениями (1.5.2) при

$$\widehat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < s_0 - \delta, \\ \frac{\sigma(x) - \sigma(s_0 - \delta)}{\sigma(s_0 + \delta) - \sigma(s_0 - \delta)} & \text{если } s_0 - \delta \leq x \leq s_0 + \delta, \\ 1 & \text{если } x > s_0 + \delta. \end{cases}$$

Но в силу невырожденности математической модели, $u_1(x) \equiv u_2(x)$. Поэтому

$$0 = \int_0^{\ell} (G_1(x, s) - G_2(x, s)) \widehat{F}'_{\sigma}(s) d\sigma(s) = \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} (G_1(x, s) - G_2(x, s)) d\sigma(s) > 0$$

при $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, и мы приходим к противоречию. Теорема доказана. \square

Замечание 1.5.1. При построении функции влияния мы использовали ФСР, биортогональную к l_j . Если взять произвольную ФСР, то формула для функции влияния выглядит следующим образом

$$G(x, s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} K(x, s) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ l_1(K(\cdot, s)) & l_1\varphi_1 & l_1\varphi_2 \\ l_2(K(\cdot, s)) & l_2\varphi_1 & l_2\varphi_2 \end{vmatrix},$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} & \text{если } s < x \\ 0 & \text{если } s \geq x \end{cases}$$

Δ — определитель матрицы $\|l_j\varphi_i\|_{i,j=1}^2$.

Раскроем определитель в

$$G(x, s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} K(x, s) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ l_1(K(\cdot, s)) & l_1\varphi_1 & l_1\varphi_2 \\ l_2(K(\cdot, s)) & l_2\varphi_1 & l_2\varphi_2 \end{vmatrix},$$

по первой строке $G(x, s) = K(x, s) + \alpha_1(s)\varphi_1(x) + \alpha_2(s)\varphi_2(x)$, где

$$\alpha_1(s) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} l_1(K(\cdot, s)) & l_1\varphi_2 \\ l_2(K(\cdot, s)) & l_2\varphi_2 \end{vmatrix}, \alpha_2(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} l_1(K(\cdot, s)) & l_1\varphi_1 \\ l_2(K(\cdot, s)) & l_2\varphi_1 \end{vmatrix}$$

и Δ — определитель матрицы $\|l_j\varphi_i\|_{i,j=1}^2$.

Функция

$$u(x) = \int_0^{\ell} K(x, s) F'_{\sigma}(s) d\sigma(s) + \sum_{i=1}^2 \varphi_i(x) \int_0^{\ell} \alpha_i(s) F'_{\sigma}(s) d\sigma(s)$$

является решением математической модели (1.5.2), так она удовлетворяет уравнению $Lu = F'_{\sigma}$.

Равенство

$$u'(x) = \int_0^\ell K'_x(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \sum_{i=1}^2 \varphi'_i(x) \int_0^\ell \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s)$$

обосновывается также как и выше. Поэтому

$$\begin{aligned} l_j u &= \int_0^\ell l_j K(\cdot, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \sum_{i=1}^2 l_j \varphi_i \int_0^\ell \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\ &= \int_0^\ell \left(l_j K(\cdot, s) + \alpha_1(s) l_j \varphi_1 + \alpha_2(s) l_j \varphi_2 \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s), \end{aligned}$$

или, вспоминая определения $\alpha_i(s)$,

$$\begin{aligned} l_j u &= \int_0^\ell \left(\frac{1}{\Delta} l_j K(\cdot, s) \cdot \begin{vmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1\varphi_2 \\ l_2(\varphi_1) & l_2\varphi_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} l_1(K(\cdot, s)) & l_1\varphi_2 \\ l_2(K(\cdot, s)) & l_2\varphi_2 \end{vmatrix} l_j \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} l_1(K(\cdot, s)) & l_1\varphi_1 \\ l_2(K(\cdot, s)) & l_2\varphi_1 \end{vmatrix} l_j \varphi_2 \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_0^\ell \begin{vmatrix} l_j K(\cdot, s) & l_j \varphi_1 & l_j \varphi_2 \\ l_1 K(\cdot, s) & l_1 \varphi_1 & l_1 \varphi_2 \\ l_2 K(\cdot, s) & l_2 \varphi_1 & l_2 \varphi_2 \end{vmatrix} F'_\sigma(s) d\sigma(s) = 0, \end{aligned}$$

так как в определителе имеются две одинаковые строки. Следовательно, $u(x)$ является решением математической модели.

Замечание 1.5.2. Если кроме невырожденности модели

$$\begin{cases} Lu = F'_\sigma, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1.5.9)$$

однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, то функция влияния (1.5.9) имеет вид

$$G(x, s) = \left(\int_0^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right)^{-1} \cdot \varphi(x)\varphi(s) \int_0^{\min\{x,s\}} \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \int_{\max\{x,s\}}^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)}, \quad (1.5.10)$$

где $\varphi(x)$ — положительное решение однородного уравнения.

Доказательство. Покажем, что функция

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_0^\ell G(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\
 &= C\varphi(x) \int_0^x \varphi(s) \left(\int_0^s \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \cdot \int_x^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} + \\
 &\quad + C\varphi(x) \int_x^\ell \varphi(s) \left(\int_s^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \cdot \int_0^x \frac{dt}{p\varphi^2(t)}, \quad (1.5.11)
 \end{aligned}$$

где $C = \int_0^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)}$ является решением математической модели (1.5.9).

Подставляя в (1.5.11) последовательно $x = 0$ и $x = \ell$, получим $u(0) = u(\ell) = 0$.

Так как однородное уравнение не осциллирует на $[0; \ell]$, то достаточно показать, что $u(x)$ удовлетворяет соотношению $-\frac{1}{\varphi} \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)' = F'_\sigma$. Из (1.5.11) находим

$$\begin{aligned}
 \frac{u(x)}{\varphi(x)} &= C \int_0^x \varphi(s) \left(\int_0^s \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \cdot \int_x^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} + \\
 &\quad + C \int_x^\ell \varphi(s) \left(\int_s^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \cdot \int_0^x \frac{dt}{p\varphi^2(t)},
 \end{aligned}$$

Функции $\varphi(x)$, $\int_0^x \frac{dt}{p\varphi^2(t)}$, $\int_x^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)}$ абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$, поэтому почти всюду (относительно меры Лебега) справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'(x) &= C\varphi(x) \int_0^x \frac{dt}{p\varphi^2(t)} F'_\sigma(x) \frac{1}{x'_\sigma} \cdot \int_x^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} - \\
 &\quad - C \int_0^x \varphi(s) \left(\int_0^s \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \cdot \frac{1}{p(x)\varphi^2(x)} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C\varphi(x) \int_x^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} F'_\sigma(x) \frac{1}{x'_\sigma} \cdot \int_0^x \frac{dt}{p\varphi^2(t)} + \\
& + C \int_x^\ell \varphi(s) \left(\int_s^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \cdot \frac{1}{p(x)\varphi^2(x)} = \\
& = -C \frac{1}{p(x)\varphi^2(x)} \int_0^x \varphi(s) \left(\int_0^s \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\
& \quad + C \frac{1}{p(x)\varphi^2(x)} \int_x^\ell \varphi(s) \left(\int_s^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s).
\end{aligned}$$

Умножим последнее равенство на $p(x)\varphi^2(x)$:

$$\begin{aligned}
\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right) (x) & = -C \int_0^x \varphi(s) \left(\int_0^s \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\
& \quad + C \int_x^\ell \varphi(s) \left(\int_s^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} \right) F'_\sigma(s) d\sigma(s).
\end{aligned}$$

В правой части последнего равенства стоит σ -абсолютно непрерывная на $[0; \ell]$ функция, поэтому

$$\begin{aligned}
\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)' \right)'_\sigma (x) & = -C\varphi(x) \int_0^x \frac{dt}{p\varphi^2(t)} F'_\sigma(x) - C\varphi(x) \int_x^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} F'_\sigma(x) = \\
& = -C\varphi(x) F'_\sigma(x) \int_0^\ell \frac{dt}{p\varphi^2(t)} = -\varphi(x) F'_\sigma(x).
\end{aligned}$$

Разделив последнее равенство на $-\varphi(x)$ мы и получим требуемое. \square

Замечание 1.5.3. Функция влияния $G(x, s)$ математической модели может быть введена как «отклик» точки x системы на единичное воздействие в точке s , т. е. как минималь функционала

$$\Phi_s(u) = \int_0^\ell \frac{pu'^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^\ell u d\theta(x-s),$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$, единице при $x > 0$. В силу доказанной выше единственности функции влияния она будет совпадать с введенной ранее. Очевидно, что $G(x, s)$ обладает свойствами:

- 1) при $x \neq s$ $G(x, s)$ удовлетворяет однородному уравнению;
- 2) при всех s по переменной x $G(x, s)$ удовлетворяет граничным условиям;
- 3) если $x \notin S(\sigma)$, то

$$(pG'_x)(x+0, x) - (pG'_x)(x-0, x) = -1$$

и

$$(pG'_x)(x+0, x) - (pG'_x)(x-0, x) - G(x, x)\Delta Q(x) = -1,$$

если $x \in S(\sigma)$.

- 4) Функция влияния симметрична: $G(x, s) = G(s, x)$.

Интегральный оператор

$$(AF)(x) = \int_0^\ell G(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s)$$

вполне непрерывен при действии из $AB_\sigma[0; \ell]$ — σ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_S$ функций в $C[0; \ell]$. В самом деле, используя теорему о замене, оператор A можно переписать в виде $(AF)(x) =$

$= \int_0^\ell G(x, s) dF(s)$. Если $V = \{F(x)\}$ — ограниченное (по норме пространства $BV[0; \ell]$) множество, то (применяя свойство интеграла Римана-

Стилтьеса) $|AF(x)| = \left| \int_0^\ell G(x, s) dF(s) \right| \leq \max_{x,s} |G(x, s)| \bigvee_0^\ell(F)$, следовательно

но, $\|AF\|_C = \max_{[0; \ell]} |AF(x)| \leq \max_{x,s} |G(x, s)| \cdot K$, где $K = \sup_{F \in V} \bigvee_0^\ell(F) < \infty$.

Другими словами, множество $\{AV\}$ равномерно ограничено. Покажем, что оно равностепенно непрерывно.

Так как $G(x, s)$ непрерывна на компактном множестве $[0; \ell] \times [0; \ell]$, то, в силу теоремы Кантора, она равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

найдется положительное δ такое, что $|G(x_1, s_1) - G(x_2, s_2)| < \frac{\varepsilon}{2K}$, для всех (x_1, s_1) и (x_2, s_2) из $[0; \ell] \times [0; \ell]$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$ и $|s_1 - s_2| < \delta$.

Отрезок $[0; \ell]$ разобьем точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1} = \ell$ на несколько частей так, чтобы $\tau_{i+1} - \tau_i < \delta$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Имеем

$$\begin{aligned}
|(AF)(x_1) - (AF)(x_2)| &= \left| \int_0^\ell \left(G(x_1, s) - G(x_2, s) \right) dF(s) \right| = \\
&= \left| \sum_{i=0}^n \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-0} \left(G(x_1, s) - G(x_2, s) \right) dF(s) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{n+1} \left(G(x_1, \tau_i) - G(x_2, \tau_i) \right) \Delta F(\tau_i) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^n \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-0} \left(G(x_1, s) - G(x_2, s) \right) dF(s) \right| + \\
&\quad + \left| \sum_{i=0}^{n+1} \left(G(x_1, \tau_i) - G(x_2, \tau_i) \right) \Delta F(\tau_i) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^n \max_{s \in [\tau_i; \tau_{i+1}]} \left| G(x_1, s) - G(x_2, s) \right| \bigvee_{\tau_{i+1}-0}^{\tau_i+0} (F) + \sum_{i=0}^{n+1} \left| G(x_1, \tau_i) - G(x_2, \tau_i) \right| |\Delta F(\tau_i)| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{i=0}^n \bigvee_{\tau_{i+1}-0}^{\tau_i+0} (F) + \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{i=0}^{n+1} |\Delta F(\tau_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \bigvee_0^\ell (F) + \frac{\varepsilon}{2K} \bigvee_0^\ell (F) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

т. е. $|(AF)(x_1) - (AF)(x_2)| < \varepsilon$ как только $|x_1 - x_2| < \delta$.

1.6 Корректность математической модели второго порядка

Здесь мы изучим вопрос о корректности полученной ранее математической модели. В начале покажем, что пространство решений уравнения с производными по мере полно по соответствующей норме. Затем покажем, что решение дифференциальной модели непрерывно зависит от начальных условий и коэффициентов уравнения, и в конце параграфа покажем, что полученная ранее математическая модель корректна.

В пространстве E_σ введем норму

$$\|u\|_\sigma = \max_{x \in [0; \ell]} |u(x)| + \bigvee_0^\ell (pu'), \quad (1.6.1)$$

где $\bigvee_0^\ell (pu')$ — вариация функции $pu'(x)$ на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Пространство E_σ полно по норме (1.6.1).

Заметим, что E_σ является замкнутым подпространством более широкого пространства E — абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций, первая производная которых имеет конечное на $\overline{[0; \ell]}_S$ изменение. Поэтому достаточно показать полноту E по норме (1.6.1). Очевидно, что E полно по норме

$$\|u\|_1 = |u(0)| + \bigvee_0^\ell (u) + |pu'(0)| + \bigvee_0^\ell (pu'). \quad (1.6.2)$$

Докажем, что нормы (1.6.1) и (1.6.2) эквивалентны. В самом деле, для любой функции $u(x)$, принадлежащей E , имеем $u(\ell) - u(0) = \int_0^\ell u'(s) ds$. Так

как $p(x)$ положительна и σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$, то функция $P(x) = \int_0^x \frac{dt}{p(t)}$ абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$. Интеграл $\int_0^\ell (pu')(s) dP(s)$ проинтегрируем по частям:

$$\int_0^\ell (pu')(s) dP(s) = (pu')(s)P(s) \Big|_0^\ell - \int_0^\ell P(s) d(pu')(s).$$

Тогда

$$p(\ell)u'(\ell)P(\ell) = u(\ell) - u(0) + \int_0^\ell P(s) d(pu')(s).$$

Отсюда следует неравенство

$$|u'(\ell)| \leq \frac{1}{p(\ell)P(\ell)} \left\{ |u(\ell)| + |u(0)| + \max_{0 \leq s \leq \ell} P(s) \bigvee_0^\ell (u') \right\}. \quad (1.6.3)$$

Из неравенства $||u(x)| - |u(y)|| \leq \bigvee_0^\ell (u)$, справедливого для любых x и y и любой функции, имеющей ограниченную на $[0, \ell]$ вариацию, вытекают

неравенства

$$|u(x)| \leq |u(\ell)| + \bigvee_0^\ell(u) \quad (1.6.4)$$

и

$$\max_{0 \leq x \leq \ell} |u(x)| \leq |u(0)| + \bigvee_0^\ell(u).$$

Из последнего неравенства последовательно имеем

$$\|u\|_\sigma = \max_{0 \leq x \leq \ell} |u(x)| + \bigvee_0^\ell(pu') \leq |u(0)| + \bigvee_0^\ell(u) + \bigvee_0^\ell(pu') \leq \|u\|_1,$$

т. е.

$$\|u\|_\sigma \leq \|u\|_1. \quad (1.6.5)$$

Для любых x и y из отрезка $[0, \ell]$, и любой $u(x)$ из E , находим

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y (pu')(s) dP(s) \right| \leq \sup_{x \leq s \leq y} |(pu')(s)| \cdot |P(y) - P(x)|. \quad (1.6.6)$$

Пусть $\{x_i\}_{i=0}^n$ — произвольное разбиение отрезка $[0, \ell]$. Тогда, применяя неравенство (1.6.6), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (pu')(s) dP(s) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x_i \leq s \leq x_{i+1}} |(pu')(s)| \cdot |P(x_{i+1}) - P(x_i)| \leq \sup_{0 \leq s \leq \ell} |(pu')(s)| \cdot P(\ell), \end{aligned}$$

так как функция $P(x)$ возрастает на $[0; \ell]$.

Применяя неравенство (1.6.4) к функции $(pu')(x)$, получим

$$|(pu')(x)| \leq |(pu')(\ell)| + \bigvee_0^\ell(pu') \quad (1.6.7)$$

при всех x из отрезка $[0; \ell]$. Отсюда

$$\bigvee_0^\ell(u) \leq \left(|(pu')(\ell)| + \bigvee_0^\ell(pu') \right) P(\ell). \quad (1.6.8)$$

Из неравенств (1.6.8), (1.6.7) и (1.6.3) последовательно находим

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &= |u(0)| + \bigvee_0^\ell (u) + |pu'(0)| + \bigvee_0^\ell (pu') \leq \\
&\leq \max_{0 \leq x \leq \ell} |u(x)| + \left(|pu'(\ell)| + \bigvee_0^\ell (pu') \right) P(\ell) + |pu'(\ell)| + \bigvee_0^\ell (pu') + \bigvee_0^\ell (pu') \leq \\
&\leq \|u\|_\sigma + (1 + P(\ell)) \left(\frac{1}{P(\ell)} \left(|u(\ell)| + |u(0)| + P(\ell) \bigvee_0^\ell (pu') \right) + \bigvee_0^\ell (pu') \right) \leq \\
&\leq \left(1 + 2 \frac{(1 + P(\ell))^2}{P(\ell)} \right) \|u\|_\sigma. \quad (1.6.9)
\end{aligned}$$

Теперь неравенства (1.6.5) и (1.6.9) нам дают

$$\|u\|_\sigma \leq \|u\|_1 \leq \left(1 + 2 \frac{(1 + P(\ell))^2}{P(\ell)} \right) \|u\|_\sigma,$$

что и доказывает эквивалентность норм.

Предположим, что коэффициенты уравнения

$$-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma \quad (1.6.10)$$

от параметра λ не зависят. Нас интересует вопрос о зависимости от параметра λ решения уравнения (1.6.10) с начальными условиями, зависящими от λ : $u(x_0) = \psi_1(\lambda)$, $u'(x_0) = \psi_2(\lambda)$, при фиксированном $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$.

Если функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ непрерывны по λ , то решение $u(x, \lambda)$ уравнения (1.6.10), удовлетворяющее начальным условиям $u(x_0) = \psi_1(\lambda)$, $u'(x_0) = \psi_2(\lambda)$, зависит от λ непрерывно по метрике (1.6.1).

Доказательство. Пусть $v(x)$ — решение уравнения (1.6.10) с условиями $v(x_0) = v'(x_0) = 0$; $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения $-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $u(x_0) = 1$, $u'(x_0) = 0$ и $u(x_0) = 0$, $u'(x_0) = 1$ соответственно. Тогда решение $u(x; \lambda)$ математической модели (1.6.10), дополненное условиями $u(x_0) = \psi_1(\lambda)$, $u'(x_0) = \psi_2(\lambda)$, может быть записано в виде

$$u(x, \lambda) = v(x) + \psi_1(\lambda)\varphi_1(x) + \psi_2(\lambda)\varphi_2(x).$$

Отсюда

$$u(x, \lambda) - u(x, \lambda_0) = \varphi_1(x) (\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)) + \varphi_2(x) (\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)). \quad (1.6.11)$$

Из последнего равенства следует неравенство

$$\begin{aligned} \max_x |u(x, \lambda) - u(x, \lambda_0)| &\leq \\ &\leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \cdot \max_x |\varphi_1(x)| + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \cdot \max_x |\varphi_2(x)|. \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Пусть $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \ell$ — произвольное разбиение отрезка $[0; \ell]$. Тогда, используя (1.6.11), последовательно находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |(pu'(x_k, \lambda) - pu'(x_k, \lambda_0)) - (pu'(x_{k-1}, \lambda) - pu'(x_{k-1}, \lambda_0))| &\leq \\ &\leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \sum_{k=1}^n |p\varphi_1'(x_k) - p\varphi_1'(x_{k-1})| + \\ &+ |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \sum_{k=1}^n |p\varphi_2'(x_k) - p\varphi_2'(x_{k-1})| \leq \\ &\leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \int_0^\ell (p\varphi_1') + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \int_0^\ell (p\varphi_2'), \end{aligned}$$

Из последнего и (1.6.12) находим, что справедливо неравенство

$$\|u(\cdot, \lambda) - u(\cdot, \lambda_0)\|_\sigma \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \cdot \|\varphi_1\|_\sigma + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \cdot \|\varphi_2\|_\sigma$$

(здесь точка указывает по какому аргументу взята норма), которое и доказывает теорему. \square

Предположим, что коэффициенты $Q(x)$ и $F(x)$ уравнения

$$-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma$$

зависят от параметра, точнее коэффициенты имеют вид

$$Q(x, \lambda) = Q_0(x) + \psi_1(\lambda)Q_1(x) \text{ и } F(x, \lambda) = F_0(x) + \psi_2(\lambda)F_1(x),$$

где функции $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $F_0(x)$ и $F_1(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Для удобства дальнейшего изложения введём обозначения:

$$q_i = \frac{d}{d\sigma} Q_i \quad \text{и} \quad f_i = \frac{d}{d\sigma} F_i \quad (i = 0, 1).$$

Функции $q_0(x)$, $q_1(x)$, $f_0(x)$ и $f_1(x)$, как нетрудно видеть, σ -суммируемы.

Из вида (1.3.3) и (1.3.2) очевидным образом вытекают важные для дальнейшего оценки

$$\|u\|_C \leq e^{\widehat{C}} \cdot \|z\|_C, \quad (1.6.13)$$

$$\bigvee_0^\ell (pu') \leq \|u\|_C \bigvee_0^\ell (Q) + \bigvee_0^\ell (F). \quad (1.6.14)$$

где $\|\cdot\|_C$ — норма в $C[0; \ell]$ пространстве непрерывных на $[0; \ell]$ функций, $\widehat{C} = \frac{1}{c_0} \bigvee_0^\ell (Q)$ и $z(x)$ определяется равенством (1.3.4). Из (1.6.13) и (1.6.14) мы находим, что

$$\begin{aligned} \|u\|_\sigma &= \max_x |u(x)| + \bigvee_0^\ell (pu') \leq \max_x |u(x)| \left(1 + \bigvee_0^\ell (Q) \right) + \bigvee_0^\ell (F) \leq \\ &\leq \|z\|_C \cdot e^{\widehat{C}} \left(1 + \bigvee_0^\ell (Q) \right) + \bigvee_0^\ell (F). \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Теорема 1.6.1. Пусть $u(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$-(pu'_x)'_\sigma + (q_0 + \psi_1(\lambda)q_1)u = f_0 + \psi_2(\lambda)f_1 \quad (1.6.16)$$

при начальных условиях $u(x_0) = u_0$, $u'(x_0) = v_0$ при каком-то $\overline{[0; \ell]}_S$. Тогда

1. $u(x, \lambda)$ непрерывна, если $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ непрерывны;
2. $u(x, \lambda)$ имеет непрерывные производные по λ до k -го порядка включительно, если $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ имеют непрерывные производные до k -го порядка.

Доказательство. Пусть $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — решения (1.6.16), удовлетворяющие условиям $u(x_0) = u_0$, $u'(x_0) = v_0$ при значениях параметра λ и λ_0 соответственно, т. е. $v_1(x) = u(x, \lambda)$ и $v_2(x) = u(x, \lambda_0)$. Положим $w(x) = v_1(x) - v_2(x)$.

Функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} -(pw')'_\sigma + q(x, \lambda)w &= \\ &= v_1(x)q_2(x) (\psi_1(\lambda_0) - \psi_1(\lambda)) + f_1(x) (\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)), \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

и нулевым начальным данным: $w(x_0) = 0$, $w'(x_0) = 0$.

Из неравенства (1.6.15) следует оценка для $w(x)$

$$\|w\|_\sigma \leq e^{C_1} \|z(\cdot, \lambda)\|_C \left(1 + \bigvee_0^\ell (Q) \right) + \bigvee_0^\ell (F),$$

$$C_1 = \bigvee_0^\ell(Q_0) + |\psi_1(\lambda)| \bigvee_0^\ell(Q_1), \text{ и}$$

$$z(x, \lambda) = (\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)) \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t u_2(s) dQ_2(s) dt + \\ + (\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)) \int_{x_0}^x \frac{F(x_0) - F(t)}{p(t)} dt.$$

Оценим максимум функции $z(x, \lambda)$ (по переменной x) на отрезке $[0; \ell]$. Последовательно имеем

$$|z(x, \lambda)| \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \left| \int_{x_0}^t |v_2(s)| dQ_1(s) \right| dt \right| + \\ + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \left| \int_{x_0}^x \frac{|F_1(x_0) - F_1(t)|}{p(t)} dt \right| \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \frac{\|v_2\|_C}{c_0} \bigvee_0^\ell(Q_1) + \\ + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \frac{1}{c_0} \bigvee_0^\ell(F_1),$$

откуда

$$\|z(\cdot, \lambda)\|_C \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \frac{\|v_2\|_C}{c_0} \bigvee_0^\ell(Q_1) + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \frac{1}{c_0} \bigvee_0^\ell(F_1). \quad (1.6.18)$$

Далее, для вариации $\bigvee_0^\ell(pw'_x)$ функции $pw'(x)$, на основании (1.6.14), имеем

$$\bigvee_0^\ell(pw') \leq \|w(\cdot, \lambda)\|_C \bigvee_0^\ell(Q) + \bigvee_0^\ell(\tilde{F}),$$

здесь

$$\tilde{F}(x, \lambda) = (\psi_1(\lambda_0) - \psi_1(\lambda)) \int_0^x u(s) dQ_1(s) + (\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)) F_1(x).$$

Для вариаций функций $Q(x, \lambda)$ и $\tilde{F}(x, \lambda)$ имеем оценки

$$\bigvee_0^\ell(Q) \leq \bigvee_0^\ell(Q_0) + |\psi_1(\lambda)| \bigvee_0^\ell(Q_1) \quad (1.6.19)$$

и

$$\bigvee_0^\ell (\tilde{F}) \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \cdot \|v_2\| \cdot \bigvee_0^\ell (Q_1) + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \cdot \bigvee_0^\ell (F). \quad (1.6.20)$$

На основании неравенств (1.6.18), (1.6.19) и (1.6.20), оценку (1.6) мы можем переписать в виде

$$\begin{aligned} \bigvee_0^\ell (pw') &\leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \cdot \|v_2\| \cdot \bigvee_0^\ell (Q_1) \times \\ &\quad \times \left[\frac{e^{C_1}}{c_0} \left(\bigvee_0^\ell (Q_0) + |\psi_1(\lambda)| \cdot \bigvee_0^\ell (Q_1) \right) + 1 \right] + \\ &\quad + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \cdot \bigvee_0^\ell (F_1) \left[\frac{e^{C_1}}{c_0} \left(\bigvee_0^\ell (Q_0) + |\psi_1(\lambda)| \cdot \bigvee_0^\ell (Q_1) \right) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Тогда утверждение первой части теоремы следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|w\|_\sigma &\leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \cdot \|v_2\| \cdot \bigvee_0^\ell (Q_1) \times \\ &\quad \times \left[\frac{e^{C_1}}{c_0} \left(\bigvee_0^\ell (Q_0) + |\psi_1(\lambda)| \cdot \bigvee_0^\ell (Q_1) + 1 \right) + 1 \right] + \\ &\quad + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \cdot \bigvee_0^\ell (F_1) \left[\frac{e^{C_1}}{c_0} \left(\bigvee_0^\ell (Q_0) + |\psi_1(\lambda)| \cdot \bigvee_0^\ell (Q_1) + 1 \right) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Пусть теперь функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда, используя формулу конечных разностей, (1.6.17) мы можем записать в следующем виде

$$-(pw')'_\sigma + q(x, \lambda)w = v_2(x)q_1(x)\psi_1(\tilde{\lambda}_1)(\lambda_0 - \lambda) + f_1(x)\psi_2(\tilde{\lambda}_2)(\lambda - \lambda_0).$$

Обозначим $y = \frac{w}{\lambda - \lambda_0}$. Разделим обе части последнего равенства на $\lambda - \lambda_0$, будем иметь

$$-(py')'_\sigma(x) + q(x, \lambda)y = -v_2(x)q_1(x)\psi'_1(\tilde{\lambda}_1) + f_1(x)\psi'_2(\tilde{\lambda}_2).$$

Таким образом, для определения y мы получили уравнение (1.6). Величина y пока определена только при $\lambda \neq \lambda_0$. Определим ее при $\lambda = \lambda_0$ так,

чтобы y удовлетворяло (1.6) и $x = x_0$ обращалось в нуль, вместе со своей производной. Так как y и y'_x обращается в нуль при $x = x_0$ при всех λ , и коэффициенты уравнения (1.6) удовлетворяют первой части теоремы, то y непрерывно зависит от параметра λ по норме пространства E_σ при всех λ достаточно близких к λ_0 , следовательно, y и y'_x стремятся к определенным пределам при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, что влечет существование производных $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \lambda}$, причем для определения $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ мы получаем уравнение

$$-\left(p\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)'\right)'_\sigma(x) + q(x, \lambda)\frac{\partial u}{\partial \lambda} = v_2(x)q_1(x)\psi'_1(\lambda) + f_1(x)\psi'_2(\lambda).$$

Остается применить первую часть теоремы, чтобы получить требуемое.

Пусть теперь функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ k раз непрерывно дифференцируемы. Применяя последовательно k раз вторую часть теоремы, мы получим утверждение теоремы. Теорема доказана. \square

Для завершения доказательства корректности математической модели

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ}{d\sigma}u = \frac{dF}{d\sigma} \\ pu'(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ pu'(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0. \end{cases}$$

достаточно заметим, что решение представимо в виде

$$u(x) = \int_0^\ell G(x, s) dF(s),$$

где $G(x, s)$ функция влияния математической модели, воспользоваться представлением (1.5.4) функции влияния, отметить, что $G(x, s)$ непрерывно зависит от коэффициентов уравнения (так как $\varphi_i(x)$ обладают этим свойством) и интеграл Стильтеса непрерывно зависит от функции по которой производится интегрирование.

1.7 Оценки функции влияния модели второго порядка с производными по мере и положительные решения дифференциальных неравенств

В этом параграфе устанавливается ряд утверждений, имеющих важное значение в качественной теории математических моделей второго порядка.

В этом параграфе мы покажем, что если $Q(x)$ не убывает, $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$, то

$$m_1 g(x, s) \leq G(x, s) \leq m_2 g(x, s) \quad (1.7.1)$$

при некоторых положительных постоянных m_1 и m_2 , независимых от x и s , $g(x, s) = \frac{1}{\ell} \min\{x, s\} (\ell - \max\{x, s\})$ — функция влияния простейшей математической модели

$$\begin{cases} -u''_{x\sigma} = F'_\sigma, \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.7.2)$$

Мы воспользуемся формулой (1.5.10) (которая имеет место ввиду неосцилляции соответствующего однородного уравнения). Так как $\varphi(x)$ непрерывна на $[0; \ell]$, то существуют положительные константы C_1^* , C_2^* такие, что $C_1^* \leq \varphi(x) \leq C_2^*$ для всех $[0; \ell]$. Тогда, (1.7.1) справедливо, как нетрудно видеть, при $m_1 = \frac{p_0 C_1^{*4}}{p_1^2 C_2^{*4}}$ и $m_2 = \frac{p_1 C_2^{*4}}{p_0^2 C_1^{*4}}$, где $p_0 = \min_{[0; \ell]_S} p(x) > 0$ и $p_1 = \max_{x \in [0; \ell]_S} p(x) < \infty$.

Доказанная оценка позволяет установить следующие результаты.

I. Пусть $\gamma_i = \infty$ ($i = 1, 2$); $p(x) \in BV[0; \ell]$; $\min_{[0; \ell]_S} p(x) > 0$ и $Q(x)$ — не убывает на $[0; \ell]$. Тогда существует функция $\tilde{u}_0(x)$ такая, что для всех x, s и τ , принадлежащих $[0; \ell]_S$, справедливо неравенство

$$G(x, s) \geq \tilde{u}_0(x) G(\tau, s). \quad (1.7.3)$$

Доказательство. Для функции влияния модели (1.7.2) $u_0(x)$ удастся указать в явном виде $u_0(x) = kx(\ell - x)$, где k — достаточно малое положительное число.

Тогда, (1.7.3) следует из цепочки неравенств

$$G(x, s) \geq m_1 g(x, s) \geq m_1 u_0(x) g(\tau, s) \geq m_1 u_0(x) \frac{1}{m_2} G(\tau, s) = \tilde{u}_0(x) G(\tau, s),$$

где $\tilde{u}_0(x) = \frac{m_1}{m_2} u_0(x)$. □

II. Пусть выполнены все условия предыдущего пункта. Тогда существуют положительная внутри $\overline{[0; \ell]}_S$ функция $\tilde{u}_0(x)$ и σ -суммируемые и ограниченные на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ $v_1(s), v_2(s)$ такие, что

$$\tilde{u}_0(x)v_1(s) \leq G(x, s) \leq \tilde{u}_0(x)v_2(s) \quad (1.7.4)$$

Доказательство. Для $g(x, s)$ существование $v_1(s)$ и $v_2(s)$ очевидно, и остается сослаться на (1.7.1), чтобы получить (1.7.4). \square

Изучим положительные решения математической модели второго порядка.

Будем называть однородное уравнение $Lu = 0$ критически неосциллирующим на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, если оно не осциллирует на любом, отличном от $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ промежутке $\overline{[a, b]}_\sigma \subset \overline{[0; \ell]}_\sigma$, не обладая этим свойством на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$.

Рассмотрим следующую модель

$$Lu \equiv -(pu')'_\sigma + Q'_\sigma u = 0, \quad u(0) = u(\ell) = 0. \quad (1.7.5)$$

Наряду с (1.7.5) рассматривается дифференциальное неравенство $Lu \geq 0$, под решениями которого понимается функция из E_σ , удовлетворяющая уравнению $Lu = F'_\sigma$ при $F'_\sigma \geq 0$.

Теорема 1.7.1. Пусть уравнение $Lu = 0$ критически не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$. Тогда любое нетривиальное и неотрицательное на $(0; \ell)$ решение $u(x)$ неравенства $Lu \geq 0$ не имеет нулей в $(0; \ell)$, т. е. $u(x) > 0$ на $(0; \ell)$. При этом $u'(0) \neq 0$ ($u'(\ell) \neq 0$), если $u(0) = 0$ ($u(\ell) = 0$).

Доказательство. Покажем вначале, что если $u(x) > 0$ на (ξ_1, ξ_2) , причём $u(\xi_1) = 0$, то $u'(\xi_1 + 0) \neq 0$. Уравнение $Lu = 0$ не осциллирует «на $[\xi_1, \xi_2]$ ». Поэтому существует такая строго положительная на $[\xi_1, \xi_2]$ функция $\varphi(x)$, что $(pu'_x)_\sigma - Q'_\sigma u \equiv \frac{1}{\varphi} \left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_x \right)'_\sigma$. Поэтому из $Lu \geq 0$ следует $\left(p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_x \right)'_\sigma \leq 0$, т. е. $p\varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_x$ не возрастает на $[\xi_1; \xi_2]$. Если бы $u'(\xi_1 + 0) = 0$, то в силу $u(\xi_1) = 0$ мы имели бы и $\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_x(\xi_1 + 0) = 0$, откуда следовало бы невозрастание $\frac{u}{\varphi}(x)$ на $[\xi_1, \xi_2]$. Поэтому вследствие $u(\xi_1) = 0$ мы имели бы $u(x) \leq 0$ на (ξ_1, ξ_2) , что противоречит неравенству $u(x) > 0$, предположенному на (ξ_1, ξ_2) . Значит, $u'(\xi_1 + 0) \neq 0$.

Покажем теперь, что в условиях теоремы $u(x) > 0$ на $(0; \ell)$. Предполагая противное, обозначим через A множество нулевых точек $u(x)$. Оно, очевидно, замкнуто относительно $[0; \ell]$ и не совпадает с $[0; \ell]$. Пусть $x_0 (\in (0; \ell))$ — некоторая граничная точка A . Обозначим через (ξ_1, ξ_2) интервал, примыкающий к x_0 (т. е. $\xi_1 = x_0$) и не лежащий в A . Так как $u(x) = 0$ на A , то $u(x_0) = 0$. Отсюда и из неравенства $u(x) \geq 0$, справедливого по обе стороны от x_0 , следует, что одна из производных $u'(x_0 \pm 0)$ обращается в нуль, что противоречит неравенству $u(x) > 0$ на (x_0, ξ_2) , вытекающего из предположения $(x_0, \xi_2) \not\subset A$. По предположению (x_0 — граничная точка для A) существует примыкающий к x_0 интервал (x_0, ξ_2) , который не входит в A . Поэтому $u(x) > 0$ на $(x_0; \xi_2)$. А это противоречит равенствам $u(x_0) = 0$, $u'(x_0 + 0) = 0$. Значит, внутри $(0; \ell)$ граничных для A точек нет, т. е. либо $Q = \emptyset$, либо $Q = (0; \ell)$.

Пусть теперь $u(\xi) = 0$ для некоторой граничной точки $(0; \ell)$. Беря точку ξ_1 достаточно близко к ξ , будем иметь неосцилляцию L «на $[\xi, \xi_1]$ ». Поэтому из неравенств $Lu \geq 0$ и $u(x) > 0$, мы получаем, что равенство $u'(\xi + 0) = 0$ невозможно. Теорема доказана. \square

Теорема 1.7.2. Пусть $Lu = 0$ критически не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$. Тогда любое решение $Lu \geq 0$ при условиях

$$u(0) \geq 0, \quad u(\ell) \geq 0$$

превращает эти неравенства в равенства, т. е. является решением модели (1.7.5).

Доказательство. Так как однородное уравнение $Lu = 0$ критически не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, то существует положительное решение $v(x)$ уравнения $Lu = 0$. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение $Lu \geq 0$, $u(0) \geq 0$, $u(\ell) \geq 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Если она не константа и если её нижняя грань $\lambda_0 = \inf_{x \in (0; \ell)} \varphi(x)$ достигается в одной из точек $x_0 \in (0; \ell)$, то функция $h(x) = u(x) - \lambda_0 v(x)$ будет противоречить теореме 1.7.1. Пусть $\lambda_0 = \inf_{x \in (0; \ell)} \varphi(x)$ достигается в одной из граничных точек $(0; \ell)$. Если $\lambda_0 > -\infty$, то из конечности λ_0 (т. к., очевидно, $\lambda_0 < \infty$) и равенства $v(a) = 0$ следует, что $u(a) = 0$. Но тогда $\lambda_0 = \frac{u'_x(a)}{v'_x(a)}$ и неотрицательная на $(0; \ell)$ функция

$h(x) = u(x) - \lambda_0 v(x)$, удовлетворяя $Lu \geq 0$, имела бы в точке $x = a$ нулевое значение и нулевую производную, противореча теореме 1.7.1. Предположим теперь, $\lambda_0 = \inf_{x \in (0; \ell)} \varphi(x) = -\infty$. Это возможно в силу неравенства $u(a) \geq 0$ лишь в случае (так как $v(x) > 0$ на $(0; \ell)$), когда $u(a) = 0$. А так как $v'(a) > 0$ и предел $\varphi(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ при $x \rightarrow a$ равен $\frac{u'_x(a)}{v'_x(a)}$, то равенство $\lambda_0 = -\infty$ невозможно. Значит, функция $\varphi(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ есть константа на $(0; \ell)$. \square

Теорема 1.7.3. Пусть $v_0(x)$ – нетривиальное решение

$$Lu = 0, \quad u(0) = u(\ell) = 0$$

и $u(x)$ – решение неравенства

$$v_0(x)Lu \geq 0 \quad (x \in (0; \ell)), \quad v'_0(\ell - 0)u(\ell) \leq 0,$$

причем $u(0) = 0$. Тогда найдется такая константа C , что $u(x) \equiv Cv_0(x)$, причем во всякой нулевой точке ξ функции $v_0(x)$ выполняется равенство $p(\xi - 0)u(\xi - 0) = p(\xi + 0)u(\xi + 0)$.

Доказательство проведем индукцией по количеству нулей $v_0(x)$.

Если $v_0(x)$ сохраняет знак в $(0; \ell)$, утверждение следует из теоремы 1.7.2.

Предположим, что теорема верна для k точек, в которых $v_0(x)$ обращается в нуль. Если $\{\xi_i\}_1^{k+1}$ – нули решения $v_0(x)$, то на интервале $(0, \xi_1)$ выполнены все условия теоремы 1.7.1, что влечет $u(x) \equiv C_0 v_0(x)$ при некоторой C_0 . Теперь на (ξ, ℓ) выполняются все предпосылки теоремы и у $v_0(x)$ k нулей, тогда по предположению индукции существует C_1 , для которой $u(x) \equiv C_1 v_0(x)$ на (ξ_1, ℓ) . Остается доказать, что $C_0 = C_1$. Для этого сначала заметим, что $pv'_0(x)$ непрерывна в точках ξ_k . Если ξ_k принадлежат $S(\sigma)$, то мы имеем равенство $(pv'_0)(\xi_k - 0) = (pv'_0)(\xi_k + 0)$, которое и означает непрерывность $pv_0(x)$ в точке ξ_k . Если же $\xi_k \notin S(\sigma)$, то непрерывность $pv'_0(x)$ очевидна. Тогда из непрерывности $pu'(x)$ и $pv'_0(x)$ в точках ξ_k следует, что отношения производных $\frac{u'_0(\xi_1 + 0)}{u'_0(\xi - 0)}$ и $\frac{v'_0(\xi_1 + 0)}{v'_0(\xi - 0)}$ одинаковы (и равны $\frac{p(\xi_1 - 0)}{p(\xi_1 + 0)}$). Поэтому $C_0 = C_1$ и $u(x) \equiv C_0 v_0(x)$ на всем $(0; \ell)$. Теорема доказана.

1.8 Осцилляционность спектра математической модели второго порядка с производными по мере

В этом параграфе дается доказательство осцилляционности спектра спектральной задачи

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x) + u(x)\frac{dQ}{d\sigma}(x) = \lambda u(x)\frac{dM}{d\sigma}(x), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1.8.1)$$

где λ — спектральный параметр, $M(x)$ — строго возрастающая функция, $\gamma_i \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, с привлечением теории осцилляционных ядер.

Пусть $G(x, s)$ — функция влияния математической модели

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ}{d\sigma}u = \frac{dF}{d\sigma}, \\ pu'(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ pu'(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0. \end{cases}$$

Тогда (1.8.1) эквивалентна

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell G(x, s)u(s) dM(s).$$

Из (1.5.4) следует, что $G(x, s)$ является однопарной [71]. Поэтому для доказательства осцилляционности спектра (1.8.1) достаточно показать осцилляционность ядра $G(x, s)$, что в свою очередь эквивалентно возрастанию $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ [71, стр. 125].

Напомним определение осцилляционного ядра (см. [71]).

Функция $G(x, s)$ является *осцилляционным* ядром, если

- 1) $G(x, s) > 0$ для всех $(x, s) \in (0; \ell) \times (0; \ell)$;
- 2) все ассоциированные ядра

$$G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} G(x_1, s_1) & G(x_1, s_2) & \dots & G(x_1, s_m) \\ G(x_2, s_1) & G(x_2, s_2) & \dots & G(x_2, s_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(x_m, s_1) & G(x_m, s_2) & \dots & G(x_m, s_m) \end{vmatrix}$$

неотрицательны для упорядоченных наборов $0 \leq x_1, s_1 < x_2, s_2 < \dots < x_m, s_m \leq \ell$;

$$3) G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} > 0 \text{ для всех } 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < \ell.$$

Покажем монотонность $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$. Для всякого $x \in \overline{[0; \ell]}_S$ имеем

$$\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \right)'_x = - \frac{W[\varphi_1, \varphi_2](x)}{\varphi_2^2(x)},$$

где $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$, как и ранее, — определитель Вронского системы $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$. Ранее показано, что $pW[\varphi_1, \varphi_2](x)$ есть константа на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Поэтому $\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \right)'_x$ сохраняет знак, причем знак «+», так как

$$W[\varphi_1, \varphi_2](0) = p(0)(-\gamma_2) - p(\ell)\gamma_1 = -(p(0)\gamma_2 + p(\ell)\gamma_1)$$

и $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$.

Выводы

Глава посвящена анализу линейной математической модели второго порядка, которая описывает малые деформации неоднородной струны, помещённой во внешнюю среду с локальными особенностями типа струны. Подобные задачи для случая гладких коэффициентов, либо в случае отсутствия внешней среды ставились и изучались многими авторами начиная с работ Штурма [38]. Здесь мы укажем лишь малую толику: М.Г. Крейн, J. Kurzweil, С. Т. Завалишин, А. Н. Сесекин, А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов, А. Д. Мышкис и др. (см., например и библиографию там, [71], [17], [97] [105], [177], [104], [142], [1]).

Однако, как правило, изучались вопросы спектральной теории (спектральная полнота, асимптотика спектра и пр.). Получение качественных свойств решений упиралось в трудно разрешимую проблему умножения обобщенной функции на разрывную, если изучать модель с позиций теории обобщенных функций, или отсутствие разумного аппарата, способного привести к ответу при наличии в дифференциальной модели тех или иных разрывов.

Основные результаты главы.

1. Получена и изучена математическая модель малых деформаций неоднородной струны с внутренними особенностями, находящейся во внешней среде с локальными «изъянами».
2. Показана корректность полученной модели.
3. Доказаны аналоги теорем Штурма о перемежаемости нулей однородного уравнения и изучено свойство неосцилляции, которое играет важную роль при изучении нелинейных дифференциальных моделей.
4. Показано, что математическая модель второго порядка обладает осцилляционным спектром, т. е. спектр модели состоит из счётной последовательности собственных положительных частот, единственная точка сгущения которых $+\infty$; амплитудные функции удовлетворяют следующим свойствам: первая (отвечающая ведущей частоте) нулей внутри интервала $(0; \ell)$ не имеет, каждая последующая имеет на один нуль больше, чем предыдущая, причем их нули перемежаются.

Глава 2

Математические модели с разрывными решениями и разнопорядковыми уравнениями

Одним из направлений дальнейшего развития теории математического моделирования с использованием поточечной трактовки уравнения с обобщенными коэффициентами, является изучение моделей с разрывными решениями: когда в уравнении присутствуют особенности типа δ' , или более «сильные». Далее мы рассмотрим три математические модели механических систем, первые две из которых состоят из одномерного упругого континуума (стильесовской струны), расположенного вдоль $[0, \ell]$ и закрепленного упруго на концах. При этом мы предполагаем наличие в каждой точке разрыва, упругой связи типа пружины жесткости γ , скрепляющей левый и правый куски для первой системы, и у второй — особенность состоит из двух пружин различной жесткости, причем в точке «спайки» приложена сосредоточенная сила, отличная от сосредоточенных сил, приложенных к «точкам» $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$.

В последнем параграфе главы мы рассмотрим математическую модель, которая описывает малые деформации системы, состоящей из растянутой балки, с жестко закрепленным концом, и свободным вторым, к которому прикреплена натянутая струна, второй конец которой закреплен.

2.1 Математическая модель с разрывными решениями

Рассмотрим одномерный упругий континуум (стильесовскую струну), расположенный вдоль $[0, \ell]$ и упруго закрепленный на концах. Предположим, что в конечном числе точек, которые мы обозначим через ξ_i ($0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$), локализована особенность, порождаемая разрывом струны в этих точках. При этом мы предполагаем наличие в точке ξ_i упругой связи типа пружины жесткости γ_i , скрепляющей левый и правый части системы (на которые «разорвана» струна). Пусть правый конец левой части системы (в «точке $\xi_i - 0$ ») и левый конец правой части (в «точке $\xi_i + 0$ ») дополнительно упруго связаны с внешней средой с помощью пружин жесткости γ_i^- и γ_i^+ соответственно.

Предположим, что рассматриваемый объект деформируется в вертикальной плоскости, деформации малые и происходят перпендикулярно положению равновесия. Обозначим через $u(x)$ отклонение точки x от положения равновесия под влиянием внешней силы интенсивности $f(x)$. Заметим, что в точках $x = \xi_i$ функция $u(x)$ не определена, но определены и имеют физический смысл предельные значения $u(\xi_i - 0)$, $u(\xi_i + 0)$. Интенсивность внешней силы определена при $x \neq \xi_i$. Предположим, что в «точках $\xi_i - 0$ и $\xi_i + 0$ » струны действуют сосредоточенные силы f_i^- и f_i^+ . Тогда, общая энергия, затрачиваемая внешней силой на придание системе формы $u(x)$, равна

$$\sum_{i=0}^n \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} u(x)f(x) dx + \sum_{i=0}^n (f_i^- u(\xi_i - 0) + f_i^+ u(\xi_i + 0)),$$

здесь для однообразия записи положено $\xi_0 = 0$ и $\xi_{n+1} = \ell$. Пусть $p(x)$ — функция, характеризующая локальное натяжение струн при $x \neq \xi_i$. Будем считать $p(\xi_i) = \gamma_i$, тем самым полагая натяжение системы в точке $x = \xi_i$ равным упругости пружины, соединяющей струны. Внутренняя энергия, накапливаемая системой за счет собственной упругости, выражается суммой

$$\sum_{i=0}^n \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} \frac{pu'^2}{2} dx.$$

Энергия, накапливаемая пружинами за счет смещения концов $u(\xi_i - 0)$,

$u(\xi_i + 0)$, равна

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i (\Delta u(\xi_i))^2}{2} + \frac{\gamma_i^- u^2(\xi_i - 0)}{2} + \frac{\gamma_i^+ u^2(\xi_i + 0)}{2} \right).$$

Таким образом, потенциальная энергия рассматриваемой системы равна

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \sum_{i=0}^n \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} \frac{pu^2}{2} dx + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i (\Delta u(\xi_i))^2}{2} + \frac{\gamma_i^- u^2(\xi_i - 0)}{2} + \frac{\gamma_i^+ u^2(\xi_i + 0)}{2} \right) - \\ & - \sum_{i=0}^n \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} u(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n (f_i^- u(\xi_i - 0) + f_i^+ u(\xi_i + 0)). \quad (2.1.1) \end{aligned}$$

Введем функцию $\mu(x) = x + \sum_{i=1}^n \theta(x - \xi_i)$, где $\theta(x)$ — классическая функция Хевисайда, равная 0 при $x < 0$, и 1 при $x > 0$. Воспользовавшись интегралом Лебега – Стильтьеса по мере μ , порождаемой функцией $\mu(x)$ (см., например, [74], [173]), будем иметь

$$\int_0^\ell \frac{pu_\mu^2}{2} d\mu = \sum_{i=0}^n \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} \frac{pu^2}{2} dx + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i (\Delta u(\xi_i))^2}{2}.$$

Однако выразить с помощью интегралов Стильтьеса $\int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ$, $\int_0^\ell u dF$, остальные слагаемые в (2.1.1) как это делалось в [100], [163], [35], не удастся. Причина тому достаточно банальна: при интегрировании по Стильтьесу в точках ненулевой меры важны лишь собственные значения функции интегрируемой и предельные значения функции интегрирующей. В нашем случае, вообще говоря, $u(\xi - 0) \neq u(\xi + 0)$, и физически очевидно, что функции $Q(x)$, $F(x)$ не могут быть непрерывными в точках $x = \xi_i$. Другими словами, Q -, F -меры точек ξ_i ненулевые, и кроме того, «расщеплены» в силу двойных разрывов функций $Q(x)$, $F(x)$. Исправить ситуацию позволяет интеграл $\int_0^\ell u d[v]_0$, введенный Ю. В. Покорным [148] и названный π -интегралом, для

которого справедлива формула

$$\int_0^\ell u d[v]_0 = \int_0^\ell u dv_0 + \sum_{0 < s \leq \ell} u(s-0)(v(s) - v(s-0)) + \\ + \sum_{0 \leq s < \ell} u(s+0)(v(s+0) - v(s)),$$

где $v(x)$ — функция ограниченной вариации, $v_0(x)$ — непрерывная часть $v(x)$, интеграл $\int_0^\ell u dv_0$ понимается по Лебегу-Стилтьесу. Введем функции

$$Q(x) = \sum_{i: \xi_i < x} (\gamma_i^- + \gamma_i^+) + \begin{cases} 0, & x \neq \xi_i, \\ \gamma_i^-, & x = \xi_i, \end{cases}$$

и

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds + \sum_{i: \xi_i < x} (f_i^- + f_i^+) + \begin{cases} 0, & x \neq \xi_i \\ f_i^-, & x = \xi_i. \end{cases}$$

Тогда, согласно определению π -интеграла (2.1),

$$\int_0^\ell \frac{u^2}{2} d[Q]_0 = \frac{\gamma_i^- u^2(\xi_i - 0)}{2} + \frac{\gamma_i^+ u^2(\xi_i + 0)}{2},$$

$$\int_0^\ell u d[F]_0 = \int_0^\ell u(x) f(x) dx + \sum_{i=1}^n (f_i^- u(\xi_i - 0) + f_i^+ u(\xi_i + 0)).$$

С привлечением π -интеграла, функционал энергии (2.1.1) мы запишем в виде

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{p u_\mu^2}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} d[Q]_0 + \int_0^\ell u d[F]_0.$$

Чтобы не затенять сути дела, мы ограничимся случаем, когда упругий коэффициент dQ реакции внешней среды и внешняя сила dF допускают запись $q(x) dx$ и $f(x) dx$ при некоторых суммируемых $q(x)$ и $f(x)$ соответственно, т. е. мы будем предполагать, что $Q(x)$ и $F(x)$ — абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$, добавив лишь пружины в точках 0 и ℓ . Потенциальная энергия системы

имеет вид

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{pu'_\mu}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{qu^2}{2} dx - \int_0^\ell uf dx + \gamma_1 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(\ell)}{2}, \quad (2.1.2)$$

где $\mu(x)$ — строго возрастающая функция, порождающая на $[0; \ell]$ меру, измеримая с наблюдаемым процессом, γ_i — жёсткости пружин на концах. Функционал (2.1.2) мы будем рассматривать на множестве E_μ — μ -абсолютно непрерывных на $[\overline{0; \ell}]_{S(\mu)}$ функций, μ -производная которых имеет конечное на $[\overline{0; \ell}]_\mu$ изменение. Первый интеграл в (2.1.2) понимается по Лебегу–Стилтьесу, остальные — по Риману–Стилтьесу.

Применяя, как и в первой главе, к функционалу (2.1.2) схему Лагранжа, придём к равенству

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^\ell pu'_\mu dh + \int_0^\ell uqh dx - \int_0^\ell hf dx + \gamma_1 u(0)h(0) + \gamma_2 u(\ell)h(\ell) = 0.$$

Вводя обозначение $\alpha(x) = \int_0^x (u(s)q(s) - f(s)) ds$, и интегрируя по частям

интеграл $\int_0^\ell u d\alpha$ (что возможно ввиду принадлежности $u(x)$ пространству $BV[0; \ell]$ и непрерывности $\alpha(x)$), приходим к равенству

$$\int_0^\ell (pu'_\mu - \alpha) dh + \gamma_1 u(0)h(0) + (\gamma_2 u(\ell) + \alpha(\ell)) h(\ell) = 0.$$

Применяя лемму 1.2.1, приходим к тождеству $pu'_\mu(x) - \alpha(x) \equiv C (= \text{const})$, и равенствам $\gamma_1 u(0) - C = 0$ и $\gamma_2 u(\ell) + \alpha(\ell) + C = 0$. Повторяя рассуждения, проведенные в § 1.2, мы придём к следующей математической модели

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)'_x + qu = f, & \text{(а)} \\ pu'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) = 0, & \text{(б)} \\ pu'_\mu(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0, & \text{(в)} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

причем (2.1.3а) в точках ξ разрыва функции $\mu(x)$ реализуется в виде равенств

$$(pu'_\mu)(\xi - 0) = p(\xi) \frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} = (pu'_\mu)(\xi + 0).$$

Также, как и в первой главе показывается корректность полученной математической модели (см., например, [107]).

2.2 Функция влияния математической модели с разрывными решениями

В этом параграфе получено явное представление функции влияния $G(x, s)$ модели

$$\begin{cases} L_\mu u \equiv - (pu'_\mu)'_x + uq = f, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

с разрывными решениями, которая определяется как ядро интегрального оператора

$$u(x) = \int_0^\ell G(x, s) f(s) ds. \quad (2.2.2)$$

Отметим, что само решение математической модели (2.2.1) определено на множестве $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на пару собственных элементов $\{\xi_-, \xi_+\}$, причем в этих точках $u(x)$ равна своим предельным значениям $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$ соответственно. Производная $u'_\mu(x)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \cup S(\mu)$, но так как $pu'_\mu(x)$ непрерывна (более того, абсолютно непрерывна), то можно считать, что $u'_\mu(x)$ определена на отрезке $[0; \ell]$. Но в отличие от случая, когда $u'_\mu(x)$ определена на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \cup S(\mu)$, $u(x)$ может и не достигать наибольшего и/или наименьшего значений на $[0; \ell]$.

Точку $\tau \in [0; \ell]$ мы назовем нулевым местом решения $u(x)$, если $u(\tau - 0) \times u(\tau + 0) \leq 0$.

Покажем, что если математическая модель (2.2.1) обладает свойством невырожденности и $q(x) \geq 0$ на $[0; \ell]$, то функция влияния (2.2.1) имеет вид

$$G(x, s) = \frac{\varphi(x)\varphi(s)}{\psi(\ell)} \psi(\min\{x, s\}) (\psi(\ell) - \psi(\max\{x, s\})),$$

где $\varphi(x)$ — положительное на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ решение однородного уравнения

$$L_\mu u = 0 \text{ и } \psi(x) = \int_0^x \frac{d\mu(t)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)}.$$

Функция влияния $G(x, s)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \times \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$, и равномерно $[\mu \times \mu]$ -непрерывна на нем же. Последнее определяется следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всяких (x_1, s_1) и (x_2, s_2) , принадлежащих множеству $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \times \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$, для которых справедливы неравенства $|\mu(x_1) - \mu(x_2)| < \delta$ и $|\mu(s_1) - \mu(s_2)| < \delta$ выполняется $|G(x_1, s_1) - G(x_2, s_2)| < \varepsilon$.

Последнее обстоятельство позволяет установить полную непрерывность интегрального оператора

$$(A_\mu f)(x) = \int_0^\ell G(x, s) f(s) ds$$

при действии из $L_1[0; \ell]$ в $C_\mu \left(\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \right)$ — пространство μ -непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ функций с нормой $\|u\|_{C_\mu} = \max_{x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}} |u(x)|$.

Равенство (2.2.2) проверяется непосредственно, если существует положительное на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ решение однородного уравнения.

Покажем, что решение $\varphi_1(x)$ однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $(p u'_\mu)(0) = 1$, положительно на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \setminus \{0\}$. Из непрерывности $(p \varphi_{1\mu}') (x)$ и условия $(p \varphi_{1\mu}') (0) = 1$ вытекает, что $(p \varphi_{1\mu}') (x) > 0$ в некоторой правосторонней окрестности точки $x = 0$. Так как $p(x) > 0$, то $\varphi_1(x)$ возрастает в этой же окрестности, следовательно, положительна в ней же.

Предположим теперь, что найдется точка $\tau_0 \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \setminus \{0\}$ в которой $\varphi(x)$ меняет знак: $\varphi_1(\tau_0 - 0) \cdot \varphi_1(\tau_0 + 0) \leq 0$. Из сказанного выше вытекает существование такого интервала $\overline{(0; \tau^*)}_{S(\mu)} = \{x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} : 0 < x < \tau^*\}$, что $\varphi_1(x) > 0$ для всякого $x \in \overline{(0; \tau^*)}_{S(\mu)}$ и в точке τ^* меняет знак. Тогда на $\overline{(0; \tau^*)}_{S(\mu)}$ неотрицательна вторая производная $(p \varphi_{1\mu}')'_x (= q(x) \varphi_1(x))$, следовательно, $(p \varphi_{1\mu}') (x)$ не убывает на $\overline{(0; \tau^*)}_{S(\mu)}$ ($(p \varphi_{1\mu}') (x)$ непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_\mu$, поэтому можно считать заданной на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$), что вместе с условием $(p \varphi_{1\mu}') (0) = 1$ означает положительность $(p \varphi_{1\mu}') (x)$ на $\overline{(0; \tau^*)}_{S(\mu)}$. Из положительности $p(x)$ вытекает положительность $\varphi_{1\mu}'(x)$ на $\overline{(0; \tau^*)}_{S(\mu)}$. Последнее означает, что $\varphi_1(x)$ возрастает на $\overline{(0; \tau^*)}_{S(\mu)}$: $\varphi_1(\tau^* - 0) > \varphi_1(0) = 0$.

С другой стороны, из непрерывности $(p \varphi_{1\mu}') (x)$ на всем $\overline{[0; \ell]}_\mu$ вытекает $(p \varphi_{1\mu}') (\tau^* - 0) = p(\tau^*) \frac{\Delta \varphi_1(\tau^*)}{\Delta \mu(\tau^*)} > 0$, из которого находим, что $0 < \varphi_1(\tau^* - 0) <$

$< \varphi_1(\tau^* + 0)$. Последнее означает отсутствие у $\varphi_1(x)$ в точке τ^* нулевого места.

Если τ^* совпадает с точкой непрерывности $\mu(x)$ или с ℓ , то рассуждения упрощаются.

Таким образом, $\varphi_1(x)$ положительна на $\overline{[0; \ell]_{S(\mu)}} \setminus \{0\}$.

Аналогично показывается положительность $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $u(\ell) = 0$, $(pu'_\mu)(\ell) = -1$, на $\overline{[0; \ell]_{S(\mu)}} \setminus \{\ell\}$.

Тогда, $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ будет положительна на всем $\overline{[0; \ell]_{S(\mu)}}$.

Доказанный факт позволяет установить положительность, простоту ведущей частоты.

Теорема 2.2.1. Пусть математическая модель (2.2.1) обладает свойством невырожденности, $q(x) \geq 0$ и $t(x)$ — непрерывная положительная на $[0; \ell]$ функция. Тогда ведущая частота спектральной задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)'_x + qu = \lambda ti, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

где λ — спектральный параметр, положительна и обладает свойством простоты, т. е. амплитудная функция ей отвечающая единственна с точностью до константы и сохраняет знак внутри $\overline{[0; \ell]_{S(\mu)}}$.

Замечание 2.2.1. В общем случае, когда $Q(x)$ и $F(x)$ произвольные функции ограниченной вариации ($Q(x)$ неубывающая), уравнение принимает вид

$$-\frac{d}{d[\sigma]} \left(p \frac{du}{d\mu} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]} = \frac{dF}{d[\sigma]}, \quad (2.2.3)$$

где квадратные скобки означают, что производная берется по дробной мере, и принимает два, вообще говоря, различных значения (помимо предельных, которые тоже различны; таким образом, производная по $[\sigma]$ имеет четыре значения), и уравнение принимает вид

$$-\frac{\Delta^- (pu'_\mu)(\xi)}{\Delta^- \sigma(\xi)} + u(\xi - 0) \frac{\Delta^- Q(\xi)}{\Delta^- \sigma(\xi)} = \frac{\Delta^- F(\xi)}{\Delta^- \sigma(\xi)}$$

и

$$-\frac{\Delta^+ (pu'_\mu)(\xi)}{\Delta^+ \sigma(\xi)} + u(\xi + 0) \frac{\Delta^+ Q(\xi)}{\Delta^+ \sigma(\xi)} = \frac{\Delta^+ F(\xi)}{\Delta^+ \sigma(\xi)},$$

где $\Delta^-u(\xi)$ и $\Delta^+u(\xi)$ — левый и правый скачки функции $u(x)$ в точке ξ . Отметим, что функция $\sigma(x)$ определяется равенством $\sigma(x) = \frac{\mu(x-0) + \mu(x+0)}{2} + Q_1(x) + Q_2(x) + F_1(x) + F_2(x)$, здесь $Q_i(x)$ и $F_i(x)$ — неубывающие функции, участвующие в жордановом разложении функций $Q(x)$ и $F(x)$ соответственно на разность неубывающих функций; $\mu(0-0) = \mu(0)$ и $\mu(\ell+0) = \mu(\ell)$. Уравнение (2.2.3) в интегро-дифференциальной форме

$$-pu'_\mu(x) + \int_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0),$$

дополненное граничными условиями $u(0) = u(\ell) = 0$, изучалось в работах [107], [165], [152].

2.3 Математическая модель малых деформаций системы с сильной особенностью

В этом параграфе мы рассматриваем математическую модель «разорванной» струны, когда «склейка» частей струны производится с помощью двух пружин различной жёсткости, кроме того, в точках «спайки» пружин допускается приложение сосредоточенной силы, помимо «точек $\xi - 0$ » и « $\xi + 0$ ». Предположим, что таких точек конечное число. Обозначим их через $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \ell$. Для удобства обозначим $\xi_0 = 0$ и $\xi_{n+1} = \ell$.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \sum_{i=0}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{pu_x^2}{2} dx + \sum_{i=1}^n \left(\gamma_i^{(1)} \frac{(\Delta^-u(\xi_i))^2}{2} + \gamma_i^{(2)} \frac{(\Delta^+u(\xi_i))^2}{2} \right) + \\ & + \int_0^\ell \frac{qu^2}{2} dx + \sum_{i=1}^n \left(\gamma_i^- \frac{u^2(\xi_i - 0)}{2} + \gamma_i^\xi \frac{u^2(\xi_i)}{2} + \gamma_i^+ \frac{u^2(\xi_i + 0)}{2} \right) - \\ & - \int_0^\ell fu dx - \sum_{i=1}^n \left(f_i^- u(\xi_i - 0) + f_i^\xi u(\xi_i) + f_i^+ u(\xi_i + 0) \right). \end{aligned}$$

Здесь $\Delta^-u(\xi) = u(\xi) - u(\xi - 0)$ и $\Delta^+u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi)$ — левый и правый скачки соответственно функции $u(x)$ в точке ξ , $\gamma_i^{(1)}$, $\gamma_i^{(2)}$ — жёсткости

пружин, с помощью которых производится «склейка» «разорванной» струны в точке ξ_i ; γ_i^- , γ_i^ξ , γ_i^+ — жёсткости пружин, припаянных к точкам $\xi_i - 0$, ξ_i , $\xi_i + 0$ соответственно, и имеющих смысл реакции внешней среды в точках $\xi_i - 0$, ξ_i , $\xi_i + 0$; аналогично f_i^- , f_i^ξ , f_i^+ — сосредоточенные силы, приложенные к точкам $\xi_i - 0$, ξ_i , $\xi_i + 0$ соответственно.

Записать потенциальную энергию в виде интегралов с привлечением как интеграла Лебега–Стилтьеса, так и π -интеграла, введенного Ю. В. Покорным, невозможно. Ситуацию спасают два расширения π -интеграла, которые, в дальнейшем, мы будем называть π_1 - и π_1^* -интегралами.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — функции ограниченной вариации, непрерывные в точках 0 и ℓ , заданные на множествах $\overline{[0; \ell]}_\mu^T$ и $\overline{[0; \ell]}_\mu$ (построения которых мы приводим ниже). Необходимость в множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^T$ обусловлена следующим обстоятельством: μ -производная μ -абсолютно непрерывной функции $u(x)$, в точке $\xi \in S(\mu)$ имеет два самостоятельных значения $\frac{\Delta^- u(\xi)}{\Delta^- \mu(\xi)}$ и $\frac{\Delta^+ u(\xi)}{\Delta^+ \mu(\xi)}$ (помимо предельных значений $u'_\mu(\xi - 0)$ и $u'_\mu(\xi + 0)$), причем, вообще говоря, все они различны, и, как показано в работе Ю. В. Покорного [157], необходимы для корректного восстановления $u(x)$ по ее μ -производной. Поэтому, для «их запоминания» мы и вводим множество $\overline{[0; \ell]}_\mu^T$.

Пусть $S(\mu)$, как и ранее, множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Введем на $[0; \ell]$ метрику $\varrho(x, y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство $([0; \ell], \varrho)$, очевидно, не является полным, если $S(\mu) \neq \emptyset$. Более того, мы предполагаем, что $\mu(x)$ имеет в каждой точке $\xi \in S(\mu)$ свое собственное значение $\mu(\xi)$, отличное от предельных $\mu(\xi - 0)$ и $\mu(\xi + 0)$. Обозначим через $\overline{[0; \ell]}_\mu$ его стандартное пополнение по метрике ϱ . При таком пополнении каждая точка ξ из $S(\mu)$ превращается в тройку собственных элементов, которые ранее были предельными, обозначаемые нами через ξ_- , ξ и ξ_+ . Множество $\overline{[0; \ell]}_\mu^T$ получается из $\overline{[0; \ell]}_\mu$ заменой каждой точки $\xi \in S(\mu)$ на пару собственных элементов ξ_1^T и ξ_2^T , причем будем считать, что $\xi_- < \xi_1^T < \xi_2^T < \xi_+$. Производная $(pu'_\mu)(x)$ определена на $\overline{[0; \ell]}_\mu^T$, и для точек $\xi \in S(\mu)$

$$(pu'_\mu)(\xi_1^T) = p(\xi_1^T) \frac{\Delta^- u'(\xi)}{\Delta^- \mu(\xi)} \quad \text{и} \quad (pu'_\mu)(\xi_2^T) = p(\xi_2^T) \frac{\Delta^+ u'(\xi)}{\Delta^+ \mu(\xi)},$$

где $\Delta^- u(\xi)$ и $\Delta^+ u(\xi)$ — левый и правый скачки функции $u(x)$ в точке ξ .

Тогда π_1 -интеграл определяется по формуле

$$\int_0^\ell u d[v]_1 = \int_0^\ell u dv_0 + \sum_{\substack{s \in S(\mu) \\ 0 < s < \ell}} u(\tau_1^s) \Delta^- v(s) + u(\tau_2^s) \Delta^+ v(s),$$

где $v_0(x)$ — непрерывная составляющая $v(x)$ и интеграл в правой части понимается по Риману–Стилтьесу; π_1^* -интеграл введём следующим образом

$$\begin{aligned} \int_0^\ell v d[u]_1^* &= \int_0^\ell v du_0 + \sum_{\substack{0 < s < \ell \\ s \in S(\mu)}} v(s-0) \left(u(s_1^\tau) - u(s-0) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{0 < s < \ell \\ s \in S(\mu)}} v(s) \left(u(s_2^\tau) - u(s_1^\tau) \right) + \sum_{\substack{0 < s < \ell \\ s \in S(\mu)}} v(s+0) \left(u(s+0) - u(s_2^\tau) \right), \end{aligned}$$

$u_0(x)$ — непрерывная часть $u(x)$ и интеграл в правой части понимается по Риману–Стилтьесу.

Следующее равенство достаточно очевидно

$$\int_0^\ell u d[v]_1 + \int_0^\ell v d[u]_1^* = uv \Big|_0^\ell. \quad (2.3.1)$$

Используя π_1^- , π_1^* -интегралы и μ -производную, потенциальную энергию $\Phi(u)$, можно записать в виде

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{pu_\mu^2}{2} d[\mu]_1 + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} d[Q]_1^* - \int_0^\ell u d[F]_1^*, \quad (2.3.2)$$

где $Q(x)$ и $F(x)$, определены на множестве $\overline{[0; \ell]_\mu^\tau}$, равенствами

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^x q(s) ds + \sum_{i: \xi_{i1}^\tau \leq x} \gamma_i^- + \sum_{i: \xi_{i2}^\tau \leq x} \gamma_i^\xi + \sum_{i: \xi_{i+} \leq x} \gamma_i^+, \\ F(x) &= \int_0^x f(s) ds + \sum_{i: \xi_{i1}^\tau \leq x} f_i^- + \sum_{i: \xi_{i2}^\tau \leq x} f_i^\xi + \sum_{i: \xi_{i+} \leq x} f_i^+. \end{aligned}$$

Функционал (2.3.2) мы считаем заданным на E — μ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0; \ell]_\mu}$ функций, μ -производная которых имеет конечное на $\overline{[0; \ell]_\mu^\tau}$ изменение, и удовлетворяющих условиям $u(0) = u(\ell) = 0$.

Применим к (2.3.2) схему Лагранжа, мы приходим к равенству нулю первой вариации

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^\ell pu'_\mu d[h]_1 + \int_0^\ell uh d[Q]_1^* - \int_0^\ell h d[F]_1^* \quad (2.3.3)$$

для всякой $h \in E$ (здесь предполагается, что $u(x)$ доставляет минимум функционалу (2.3.2)).

Вводя функцию $\alpha(x) = \int_0^x u d[Q]_1^*$, определенную на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, и интегрируя интегралы $\int_0^\ell h d[\alpha]_1^*$ и $\int_0^\ell h d[F]_1^*$ по частям, что возможно в силу (2.3.1), равенство (2.3.3) мы можем записать в виде

$$\int_0^\ell \left(pu'_\mu(x) - \alpha(x) + F(x) \right) d[h]_1 = 0$$

(внеинтегральные слагаемые равны нулю, так как h принадлежит E). Как и в §§ 1.2 и 2.1, из последнего равенства мы получаем тождество

$$pu'_\mu(x) - \alpha(x) + F(x) \equiv C$$

при некоторой постоянной C , или, вспоминая определение $\alpha(x)$,

$$- (pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q]_1^* = F(x) - F(0) - (pu'_\mu)(0). \quad (2.3.4)$$

Уравнение (2.3.4) в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ реализуется в виде равенств

$$\begin{aligned} - \left[(pu'_\mu)(\xi_1^T) - (pu'_\mu)(\xi - 0) \right] + u(\xi - 0) \left[Q(\xi_1^T) - Q(\xi - 0) \right] = \\ = F(\xi_1^T) - F(\xi - 0), \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$- \left[(pu'_\mu)(\xi_2^T) - (pu'_\mu)(\xi_1^T) \right] + u(\xi) \left[Q(\xi_2^T) - Q(\xi_1^T) \right] = F(\xi_2^T) - F(\xi_1^T),$$

$$- \left[(pu'_\mu)(\xi + 0) - (pu'_\mu)(\xi_2^T) \right] + u(\xi + 0) \left[Q(\xi + 0) - Q(\xi_2^T) \right] =$$

$$= F(\xi + 0) - F(\xi_2^T). \quad (2.3.6)$$

Легко видеть, что для любой точки $x_0 \in \overline{[0; \ell]_\mu^T} \setminus \{\xi_1^T, \xi_2^T\}$ и любых чисел u_0, v_0 уравнение (2.3.4) имеет единственное решение $u(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x_0) = u_0, u'_\mu(x_0) = v_0$.

В случае, когда $Q(x) \equiv \text{const}$ утверждение очевидно.

Пусть $Q(x) \not\equiv \text{const}$. Рассмотрим два случая, когда множество $S(\mu)$ точек разрыва функции $\mu(x)$ конечно и когда $S(\mu)$ счетно. Пусть $S(\mu)$ конечно: $S(\mu) = \{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}\}$.

Уравнение (2.3.4) нам удобно заменить эквивалентным уравнением

$$u(x) = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t u(s) d[Q(s)]_1^* \right) d[\mu(t)]_1 + z(x),$$

$$\text{где } z(x) = u_0 + \int_{x_0}^x \frac{p(x_0) - F(t) + F(x_0)}{p(t)} d[\mu(t)]_1.$$

Разрешимость последнего уравнения эквивалентна разрешимости уравнения $u = Au + z$ с оператором

$$(Au)(x) = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t u(s) d[Q(s)]_1^* \right) d[\mu(t)]_1,$$

действующим из $C(\overline{[0; \ell]_\mu^T})$ в $C(\overline{[0; \ell]_\mu^T})$, где $C(\overline{[0; \ell]_\mu^T})$ — пространство μ -непрерывных на $\overline{[0; \ell]_\mu^T}$ функций.

Из вида оператора A непосредственно вытекает, для любых двух μ -непрерывных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, определенных на $\overline{[0; \ell]_\mu}$, выполняется неравенство

$$|A(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \leq \frac{1}{p_0} \bigvee_0^\ell(Q) |\mu(x) - \mu(x_0)| \sup_{s \in [x_0; x]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|, \quad (2.3.7)$$

где $p_0 = \min_{\overline{[0; \ell]_\mu}} p(x) > 0$, $\bigvee_0^\ell(Q)$ — полная вариация $Q(x)$ на $\overline{[0; \ell]_\mu^T}$.

Пусть $x_0 \in [\xi_+^{(i)}, \xi_-^{(i+1)}]$ и $\varepsilon = \left(2 \bigvee_0^\ell(Q) \right)^{-1} p_0$. Так как $\mu(x)$ строго возрастает и непрерывна на $[\xi_+^{(i)}, \xi_-^{(i+1)}]$, то существует такое разбиение множества $[\xi_+^{(i)}, \xi_-^{(i+1)}]$ точками $x_0^{\xi_i} = \xi_+^{(i)} < x_1^{(\xi_i)} < \dots < x_{n_i}^{(\xi_i)} = \xi_-^{(i+1)}$, что

$0 < \mu(x_{j+1}^{(\xi_i)}) - \mu(x_j^{(\xi_i)}) < \varepsilon$ для всех $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$. Точка x_0 принадлежит $[x_k^{(\xi_i)}; x_{k+1}^{(\xi_i)}]$ при некотором k . Из (2.3.7) вытекает неравенство

$$|Au(x)| \leq \frac{1}{p_0} \max_{x \in [x_k^{(\xi_i)}; x_{k+1}^{(\xi_i)}]} |u(x)| \bigvee_0^\ell (Q) \left(\mu(x_{k+1}^{(\xi_i)}) - \mu(x_k^{(\xi_i)}) \right) < \frac{1}{2} \|u\|,$$

справедливое при всех $x \in [x_k^{(\xi_i)}; x_{k+1}^{(\xi_i)}]$. Следовательно, оператор A является сжимающим, и уравнение $u = Au + z$ разрешимо в $C\left([x_k^{(\xi_i)}; x_{k+1}^{(\xi_i)}]\right)$ — пространстве μ -непрерывных на $[x_k^{(\xi_i)}; x_{k+1}^{(\xi_i)}]$ функций. Обозначим через $\varphi(x)$ решение уравнения на этом отрезке.

Рассмотрим отрезок $[x_{k+1}^{(\xi_i)}; x_{k+2}^{(\xi_i)}]$, примыкающий к $[x_k^{(\xi_i)}; x_{k+1}^{(\xi_i)}]$ справа. Поставим теперь начальную задачу в точке $x_{k+1}^{(\xi_i)}$: $u(x_{k+1}^{(\xi_i)}) = \varphi(x_{k+1}^{(\xi_i)})$, $u'_\mu(x_{k+1}^{(\xi_i)}) = \varphi'_\mu(x_{k+1}^{(\xi_i)})$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что в $C\left([x_{k+1}^{(\xi_i)}; x_{k+2}^{(\xi_i)}]\right)$ оператор A также будет сжимающим, следовательно, существует решение уравнения (2.3.4), удовлетворяющее начальным условиям $u(x_{k+1}^{(\xi_i)}) = \varphi(x_{k+1}^{(\xi_i)})$, $u'_\mu(x_{k+1}^{(\xi_i)}) = \varphi'_\mu(x_{k+1}^{(\xi_i)})$. Продолжим этот процесс вправо до тех пор, пока не достигнем точки $x = \xi_-^{(i+1)}$. Тогда после проведения описанной выше процедуры нам становятся известны значения $\varphi(\xi_-^{(i+1)})$ и $\varphi'_\mu(\xi_-^{(i+1)})$. Воспользовавшись формулами (2.3.5)–(2.3.6) получаем значения для $\varphi(\xi_+^{(i+1)})$ и $\varphi'_\mu(\xi_+^{(i+1)})$. Проводя теперь для отрезка $[\xi_+^{(i+1)}; \xi_-^{(i+2)}]$ аналогичные рассуждения покажем существование на нем решения. Таким образом, решение продолжаемо до точки $x = \ell$. Аналогично решение продолжается и влево до точки $x = 0$.

Пусть теперь $S(\mu)$ счетно. Выберем из $S(\mu)$ только те точки ξ_i , в которых величина скачка функции $\mu(x)$ превышает ε . Таких точек будет конечное количество, поскольку функция $\mu(x)$ имеет ограниченную вариацию. Поэтому отрезок $[0; \ell]$ разбивается на конечное число отрезков, и дальнейшие рассуждения проводятся как и в случае конечного числа точек разрыва.

Замечание 2.3.1. При постановке задачи Коши мы исключали точки x_0 разрыва функции $\mu(x)$. Дело в том, что если $x_0 \in S(\mu)$, то функция $u(x)$ в точке $x = x_0$ имеет единственное значение, а производная $u'_\mu(x)$ имеет два значения: $u'_\mu(x_{01}^T)$ и $u'_\mu(x_{02}^T)$. Поэтому при $x_0 \in S(\mu)$ мы можем

рассматривать задачи

$$\begin{cases} - (pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q]_1^* = F(x) - F(0) - (pu'_x)(0), \\ u(x_{0-}) = u_0, u'_\mu(x_{01}^T) = v_0. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{cases} - (pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q]_1^* = F(x) - F(0) - (pu'_x)(0), \\ u(x_0) = u_0, u'_\mu(x_{01}^T) = v_0. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{cases} - (pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q]_1^* = F(x) - F(0) - (pu'_x)(0), \\ u(x_0) = u_0, u'_\mu(x_{02}^T) = v_0. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

$$\begin{cases} - (pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q]_1^* = F(x) - F(0) - (pu'_x)(0), \\ u(x_{0+}) = u_0, u'_\mu(x_{02}^T) = v_0. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

В силу равенств (2.3.5)–(2.3.6) задачи (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11) сводятся к рассмотренной задаче. Поэтому в силу предыдущей теоремы задачи (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11) также однозначно разрешимы.

Решение математической модели

$$\begin{cases} - (pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q]_1^* = F(x) - F(0) - (pu'_x)(0), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

при условии невырожденности последней, может быть найдено по формуле

$$u(x) = \int_0^\ell G(x, s) d[F(s)]_1^*. \quad (2.3.13)$$

Функцию $G(x, s)$ мы назовем функцией влияния математической модели (2.3.12). Так же как в § 2.2 доказывается, что модель (2.3.12) невырождена, если $Q(x)$ не убывает. Как и ранее показывается, что $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \begin{cases} \widehat{\varphi}_1(x)\widehat{\varphi}_2(s), & 0 \leq x < s \leq \ell, \\ \widehat{\varphi}_2(x)\widehat{\varphi}_1(s), & 0 \leq s \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения, удовлетворяющие начальным условиям $u(0) = 0$, $(pu'_\mu)(0) = 1$ и $u(\ell) = 0$, $(pu'_\mu)(\ell) = -1$ соответственно; $\widehat{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x)$, если $x \notin S(\mu)$, и $\widehat{\varphi}_i(\xi_j^r) = \varphi_i(\xi)$ ($j = 1, 2$), если ξ совпадает с одной из точек разрыва функции $\mu(x)$. Функции $\widehat{\varphi}_1(x)$ и $\widehat{\varphi}_2(x)$ положительны в $(0; \ell]_\mu^r$ и $[0; \ell)_\mu^r$ соответственно. Поэтому $G(x, s) > 0$ внутри $(0; \ell)_\mu^r \times (0; \ell)_\mu^r$, откуда следует податливость модели (2.3.12).

Более того, из (2.3.13) очевидным образом вытекает корректность линейной математической модели с сильными внутренними особенностями, так как π_1^* -интеграл, как нетрудно видеть, обладает, также как и классический интеграл Римана–Стилтьеса, свойством непрерывной зависимости от $F(x)$.

2.4 Математическая модель малых деформаций струно-стержневой системы

В этом параграфе рассматривается модель малых деформаций механической системы, состоящей из растянутого стержня, один из концов которого закреплён, а к свободному — прикреплена растянутая струна, второй конец которой закреплён.

Вдоль этой механической системы пустим ось x , перпендикулярно ей в точке заземления стержня ($x = 0$) восстановим ось y перпендикулярно x . Деформации этой системы будем предполагать малыми и происходящими в одной плоскости, перпендикулярно положению равновесия. Закрепленный конец струны обозначим ℓ . Через ξ обозначим точку соединения стержня и струны; $u(x)$ — отклонение точки x от положения равновесия, произошедшее под воздействием силы интенсивности $dF(x)$. Кроме того, будем считать, что эта система помещена во внешнюю среду, локальный коэффициент упругости, которой равен $dQ(x)$. Пусть $p(x)$ означает коэффициент, характеризующий материал стержня; $r(x)$ — коэффициент растяжения стержня при $x < \xi$ и силу натяжения струны при $x > \xi$. Очевидно, что $p(x)$ определена только при $x < \xi$, продолжим её вправо до точки ℓ нулем; продолженную функцию мы также будем обозначать через $p(x)$. Нетрудно видеть, что потенциальная

(полная) энергия этой системы имеет вид:

$$\Phi(u) = \int_0^{\ell} \frac{pu''^2}{2} dx + \int_0^{\ell} \frac{ru'^2}{2} dx + \int_0^{\ell} \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^{\ell} u dF. \quad (2.4.1)$$

В (2.4.1) все интегралы могут рассматриваться в смысле Римана-Стилтьеса, так как деформация рассматриваемой системы мы предполагаем непрерывными. Реальная деформация изучаемого объекта, согласно принципу Гамильтона, дает минимум функционала (2.4.1) на E — множестве абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывны на $[0, \xi]$, имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение, вторая квази-производная $pu''_{xx}(x)$ является функцией ограниченной на $[0, \xi]$ вариации, и удовлетворяет условиям: $u(0) = u'(\ell) = u(\ell) = 0$ ($u(0) = u(\ell) = 0$ — условия закрепления, $u'(\ell) = 0$ — условие защемления).

Пусть $u(x)$ дает минимум функционалу $\Phi(u)$ на E . Введем в рассмотрение скалярную функцию $\varphi(\lambda) = \Phi(u + \lambda h)$. У этой функции точка $\lambda = 0$ является точкой минимума, поэтому производная $\varphi'(0)$, если она существует обязана обращаться в 0. Легко видеть, что $\varphi(\lambda)$ является квадратичной относительно λ функцией, поэтому

$$\varphi'(0) \equiv \int_0^{\ell} pu''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^{\ell} ru'_x h'_x dx + \int_0^{\ell} uh dQ - \int_0^{\ell} h dF = 0$$

для любой функции $h \in E$.

На множестве $[0; \ell] \setminus S(Q)$ определим функцию $\alpha(x) = \int_0^x u dQ$. Тогда

$\int_0^{\ell} uh dQ = \int_0^{\ell} h d\alpha$ и $\int_0^{\ell} pu''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^{\ell} ru'_x h'_x dx + \int_0^{\ell} h d(\alpha - F) = 0$. Третий интеграл в последнем равенстве мы проинтегрируем по частям, что возможно в силу свойств $h(x)$, $\alpha(x)$ и $F(x)$:

$$\int_0^{\ell} pu''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^{\ell} (ru'_x - \alpha + F) h'_x dx = 0 \quad (2.4.2)$$

(внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль ввиду принадлежности h множеству E).

Рассмотрим множество $E_1 = \{u \in E | u(x) = 0 \text{ для всех } x \geq \xi\}$. Для $h \in E_1$ равенство (2.4.2) принимает вид

$$\int_0^\xi pu''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^\xi (ru' - \alpha + F) h' dx = 0.$$

Вводя функцию $\beta(x) = \int_0^x (ru'(s) - \alpha(s) + F(s)) ds$ и интегрируя по частям

интеграл $\int_0^\xi h'_x d\beta$, будем иметь

$$\int_0^\xi (pu'' - \beta) h'' dx + \beta(\xi - 0) h'(\xi - 0) = 0. \quad (2.4.3)$$

Покажем теперь, что если $A(x)$ имеет конечное на $[0; \xi]$ изменение, интеграл $\int_0^\xi A(x) h''(x) dx$ равен нулю для любой $h \in E$, удовлетворяющей дополнительным условиям: $h(\xi) = h'(\xi) = 0$, то $A(x)$ — линейная на $[0; \xi]$ функция.

В самом деле, для любых C_1, C_2 интеграл $\int_0^\xi (C_1 + C_2 x) h''(x) dx$ равен нулю. Подбирая C_1 и C_2 так, чтобы функция $h(x) = \int_0^x \int_0^t (A(s) - C_1 - C_2 s) ds dt$ удовлетворяла условиям $h(\xi) = h'(\xi) = 0$, и подставляя в равенство $\int_0^\xi (A(x) - C_1 - C_2 x) h''(x) dx = 0$, получим $\int_0^\xi (A(x) - C_1 - C_2 x)^2 dx = 0$, из которого следует, что $A(x) = C_1 + C_2 x$ почти всюду. Но с учетом нашей договорённости мы находим, что последнее равенство справедливо всюду на $[0; \xi]$.

Таким образом, $pu''_{xx}(x) - \beta(x) = C_1 + C_2 x$ почти всюду, а так как $\beta(x)$ и $C_1 + C_2 x$ абсолютно непрерывны на $[0; \xi]$, то равенство $pu''_{xx}(x) - \beta(x) = C_1 + C_2 x$ превращается на $[0; \xi]$ в тождество. Из (2.4.3) также находим,

что $C_1 + C_2\xi + \beta(\xi - 0) = 0$ (так как в качестве $h(x)$ допускаются функции для которых $h'(\xi - 0) \neq 0$). Тогда $pu''_{xx}(\xi - 0) = 0$.

Отсюда мы находим, что $pu''_{xx}(x)$ абсолютно непрерывна на всем $[0; \ell]$, следовательно, интеграл $\int_0^\ell pu''_{xx} h''_{xx} dx$ допускает интегрирование по частям:

$$\int_0^\ell pu''_{xx} h''_{xx} dx = pu''_{xx} h'_x \Big|_0^\ell - \int_0^\ell (pu''_{xx})'_x h'_x dx = - \int_0^\ell (pu''_{xx})'_x h'_x dx,$$

так как $h'_x(0) = 0$ и $pu''_{xx}(\ell) = 0$. Тогда равенство (2.4.2) принимает вид

$$\int_0^\ell \left[-(pu''_{xx})'_x + ru' - \alpha + F \right] h' dx = 0$$

для любой $h \in E$. Из которого, на основании леммы 1.2.1, мы получаем тождество $-(pu''_{xx})'_x(x) + ru'(x) - \alpha(x) + F(x) \equiv \text{const}$ при некоторой постоянной C . Дифференцируя по мере σ последнее тождество, мы придем к математической модели малых деформаций изучаемой системы

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Уравнение в (2.4.4) в точке ξ реализуется в виде равенств

$$\begin{aligned} u(\xi - 0) &= u(\xi + 0), \\ (pu''_{xx})(\xi - 0) &= 0, \\ \Delta (pu''_{xx})'_x(\xi) - \Delta (ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) &= \Delta F(\xi). \end{aligned}$$

Последнее равенство принимает вид $(pu''_{xx})'_x(\xi - 0) + (ru'_x)(\xi + 0) = 0$, если вспомнить, что $p(x) \equiv 0$ при $x \geq \xi$ и предположить отсутствие упругой опоры и сосредоточенной силы в точке ξ .

Покажем, что модель (2.4.4) обладает свойством невырожденности, т. е. однородная задача (при $F(x) \equiv \text{const}$) имеет только тривиальное решение.

Если это не так, то существует нетривиальное решение $u(x)$. Подставим $u(x)$ в уравнение, умножим полученное тождество на $u(x)$, и проинтегрируем по мере σ по всему $[0; \ell]$:

$$\int_0^\ell \left((pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma \right) u(x) d\sigma = 0.$$

Разбивая интеграл на три, и интегрируя дважды по частям первый, второй — один раз, будем иметь

$$\begin{aligned} (pu''_{xx})'_x u(x) \Big|_0^\ell - (pu''_{xx}) u'_x(x) \Big|_0^\ell - (ru'_x) u(x) \Big|_0^\ell + \\ + \int_0^\ell pu''_{xx} dx + \int_0^\ell ru'_x dx + \int_0^\ell u^2 Q'_\sigma d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Так как внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль в силу условий $u(0) = u'_x(0) = 0$, $u(\ell) = pu''_{xx}(\ell) = 0$ и все слагаемые неотрицательны, то мы получаем равенства $\int_0^\ell pu''_{xx} dx = 0$, $\int_0^\ell ru'_x dx = 0$ и $\int_0^\ell u^2 Q'_\sigma d\sigma = 0$. Из первого и второго мы находим, что $pu''_{xx}(x) = 0$ и $ru'_x(x) = 0$ почти всюду на $[0; \ell]$. Из первого мы находим, что $u(x)$ на $[0; \xi]$ есть линейная функция, что вместе с условиями $u(0) = u'_x(0) = 0$ дает на $[0; \xi]$ тождество $u(x) \equiv 0$. Аналогично мы получим, что на $[\xi; \ell]$ $u(x) \equiv 0$, т. е. $u(x)$ есть нуль на всем $[0; \ell]$, что противоречит нашему предположению.

Покажем, что рассматриваемая модель занимает «промежуточное» положение между моделями второго порядка и четвертого порядка в следующем смысле: размерность пространства решений равна трем, т. е. существует система из трех линейно независимых решения однородной модели; любые другие решения могут быть выражены через эти три. Следует отметить, что применить здесь классическую схему не представляется возможным. В самом деле, если поставить задачу Коши в точке x_0 слева от ξ , то решение будет существовать на всем полуинтервале $[0; \xi)$. Используем теперь условия вклейки в точке ξ . Мы можем подставить начальную задачу в точку $\xi + 0$. Мы получим решение на полуинтервале $(\xi; \ell]$. Таким образом мы можем получить решения на всем $[0; \ell]$. Однако, ставя задачу Коши справа от ξ в силу теоремы о существовании единственности, мы получим решение на полуинтервале $(\xi; \ell]$, но «перебраться» за точку ξ без соблюдения единственности мы не можем ($u'_x(\xi - 0)$ не определено).

Введем обозначения: $l_1 u = u(0)$; $l_2 u = u'(0)$; $l_3 u = u(\ell)$.

Покажем, что существует система линейно независимых функций, удовлетворяющих условию $l_i \varphi_j = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и 0 в противном случае.

На полуинтервале $[0; \xi)$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ и $\varphi_*(x)$ определим как решения однородного уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$ и неоднородного уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}$ соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_i(0) = \delta_i^1$, $\varphi'_i(0) = \delta_i^2$, $p\varphi''_{i\sigma}(0) = \delta_i^3$, $(p\varphi''_{i\sigma})'(0) = \delta_i^4$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $\varphi_*(0) = \varphi'_*(0) = p\varphi''_{*\sigma}(0) = (p\varphi''_{*\sigma})'(0) = 0$. Аналогично на $(\xi; \ell]$ определим функции $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^2$ и $\varphi^*(x)$ как решения однородного $-(ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$ и неоднородного $-(ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}$ уравнений соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $\psi_j^{(i-1)}(\ell) = \delta_i^j$ и $\varphi^{*(i-1)}(\ell) = 0$ ($i, j = 1, 2$). Существование решений задач Коши обеспечивается соответствующими результатами.

Функция

$$u(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi_i(x) + \varphi_*(x) & \text{при } x < \xi, \\ \sum_{j=1}^2 \beta_j \psi_j(x) + \varphi^*(x) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

удовлетворяет граничным условиям $u(0) = u'(0) = u(\ell) = 0$ при любых α_3, α_4 и β_2 , если только $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$. Остается заметить, что существует единственная тройка чисел $(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2)$ такая, что функция $u(x)$ удовлетворяет остальным трем условиям. В самом деле, для этого, необходимо и достаточно, чтобы α_3, α_4 и β_2 удовлетворяли системе

$$\begin{cases} \alpha_3 \varphi_3(\xi - 0) + \alpha_4 \varphi_4(\xi - 0) + \varphi_*(\xi - 0) = \beta_2 \psi_2(\xi + 0) + \varphi^*(\xi + 0), \\ \alpha_3 (p\varphi''_{3\sigma})(\xi - 0) + \alpha_4 (p\varphi''_{4\sigma})(\xi - 0) + (p\varphi''_{*\sigma})(\xi - 0) = 0, \\ \alpha_3 (p\varphi''_{3\sigma})'(\xi - 0) + \alpha_4 (p\varphi''_{4\sigma})'(\xi - 0) + (p\varphi''_{*\sigma})'(\xi - 0) + \\ + \beta_2 r(\xi + 0) \psi_2'(\xi + 0) + r(\xi + 0) \varphi^{*'}(\xi + 0) = 0, \end{cases}$$

определитель которой отличен от нуля, так как однородная система (при $\varphi_*(x) \equiv \varphi^*(x) \equiv 0$, что соответствует однородной модели) имеет только нулевое решение ввиду доказанной выше невырожденности. Таким образом, система (2.4.1) имеет единственное решение при любой допустимой $F(x)$.

Беря в (2.4.5) $\varphi_*(x) \equiv \varphi^*(x) \equiv 0$, и последовательно $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\beta_1 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получим три линейно независимых решения однородной модели (2.4.1), причем всё пространство решений однородной модели исчерпывается ими. Последнее и означает, что размерность пространства решений однородной уравнения $Lu = 0$, равна

трём.

Из приведенных рассуждений следует, что математическая модель однозначно разрешима при $F_s(x) = \theta(x - s)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$, и единице при $x > 0$, для всякого $s \in (0; \ell)$. Обозначим решение через $G(x, s)$.

Отметим очевидные свойства функции $G(x, s)$, как решения дифференциальной модели (2.4.4) при $F_s(x) = \theta(x - s)$.

- 1) $G(x, s)$ непрерывна по совокупности переменных;
- 2) при $x < \xi$ производная $G'_x(x, s)$ и квазипроизводная $p(x)G''_{xx}(x, s)$ непрерывны по совокупности переменных;
- 3) при $x < \xi$ $(p(x)G''_{xx})'_x(x, s)$ при переходе через диагональ $x = s$ терпит единичный скачок;
- 4) при $x > \xi$ у $(r(x)G'_x)(x, s)$ на диагонали $x = s$ величина скачка равна 1;
- 5) на множествах $[0; s)$ и $(s; \xi)$ $(p(x)G''_{xx})'_x(x, s)$ σ -абсолютно непрерывна; $(r(x)G'_x)(x, s)$ σ -абсолютно непрерывна на $(\xi; s)$ и $(s; \ell]$;
- 6) $G(x, s)$ удовлетворяет однородному уравнению при $x \neq s$;
- 7) справедливы равенства $(pG''_{xx})'_x(\xi - 0, s) + (rG'_x)(\xi + 0, s) = 0$, если $s \neq \xi$, и $-(pG''_{xx})'_x(\xi - 0, \xi) - (rG'_x)(\xi + 0, \xi) = 1$.

Из отмеченных свойств вытекает, что функция

$$u(x) = \int_0^\ell G(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s)$$

является решением дифференциальной модели (2.4.4).

В заключение параграфа рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(\ell) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.4.6)$$

которая возникает при применении метода Фурье в математической модели, которая описывает малые собственные колебания системы, состоящей из стержня, один конец которого зашпелен, а ко второму прикрепленa растянутая струна, другой конец которой закреплен.

Задача (2.4.6) эквивалента интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_0^{\ell} G(x, s)u(s)M'_{\sigma}(s)d\sigma,$$

или, вспоминая теорему о замене [166],

$$u(x) = \lambda \int_0^{\ell} G(x, s)u(s)dM(s).$$

Интегральный оператор $(Au)(x) = \int_0^{\ell} G(x, s)u(s)dM(s)$ действует в $C[0; \ell]$ и вполне непрерывен. Поэтому его спектр состоит из собственных значений, причем каждое из них имеет конечную кратность.

Покажем, что у каждого собственного значения присоединенные элементы отсутствуют.

Предположим противное: у некоторого собственного значения λ_k существует цепочка присоединенных ненулевых векторов. Тогда, первая (за собственной функцией, которую мы обозначим через φ_k) является решением граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = \lambda_k M'_{\sigma}u + \varphi_k, \\ u(0) = u(\ell) = u'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Умножим уравнение (2.4.7) на φ_k и проинтегрируем по мере σ вдоль всего отрезка $[0, \ell]$:

$$\int_0^{\ell} (pu''_{xx})''_{x\sigma} \varphi_k d\sigma - \int_0^{\ell} (ru'_x)'_{\sigma} \varphi_k d\sigma + \int_0^{\ell} uQ'_{\sigma} \varphi_k d\sigma = \lambda_k \int_0^{\ell} uM'_{\sigma} \varphi_k d\sigma + \int_0^{\ell} \varphi_k^2 d\sigma. \quad (2.4.8)$$

Первый и второй интеграл равенства (2.4.8) проинтегрируем по частям (первый интеграл — четыре раза, второй — два):

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} (pu''_{xx})''_{x\sigma} \varphi_k d\sigma &= (pu''_{xx})'_x \varphi_k \Big|_0^{\ell} - pu''_{xx} \varphi'_{kx} \Big|_0^{\ell} + p\varphi''_{kxx} u' \Big|_0^{\ell} - (p\varphi''_{kxx})'_u \Big|_0^{\ell} + \\ & \int_0^{\ell} (p\varphi''_{kxx})''_{x\sigma} u d\sigma = \int_0^{\ell} (p\varphi''_{kxx})''_{x\sigma} u d\sigma \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

и

$$\int_0^\ell (ru'_x)' \varphi_k d\sigma = ru'_x \varphi_k \Big|_0^\ell - r\varphi_{kx} u \Big|_0^\ell + \int_0^\ell (r\varphi'_{kx})'_\sigma u d\sigma = \int_0^\ell (r\varphi'_{kx})'_\sigma u d\sigma \quad (2.4.10)$$

Все подынтегральные слагаемые равны нулю, так как $p(\ell) = r(0) = 0$ и $\varphi_k(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют краевым условиям. С учетом равенств (2.4.9) и (2.4.10), соотношение (2.4.8) принимает вид:

$$\int_0^\ell [(p\varphi'_{kx})''_{x\sigma} - (r\varphi''_{kxx})'_\sigma + Q'_\sigma \varphi_k] u d\sigma = \lambda_k \int_0^\ell u M'_\sigma \varphi_k d\sigma + \int_0^\ell \varphi_k^2 d\sigma. \quad (2.4.11)$$

Но $\varphi_k(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k , потому (2.4.11) принимает вид: $\int_0^\ell \varphi_k^2 d\sigma = 0$, откуда следует, в силу непрерывности $\varphi_k(x)$, тождество $\varphi_k(x) \equiv 0$. Последнее противоречит нетривиальности $\varphi_k(x)$.

Собственные значения спектральной задачи (2.4.7) определяются как нули оператора Фредгольма, который в нашем случае определяется следующим образом (см, например, [71, 135])

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n,$$

где

$$A_n = \int_0^\ell \dots \int_0^\ell \begin{vmatrix} G(s_1, s_1) & \dots & G(s_1, s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ G(s_n, s_1) & \dots & G(s_n, s_n) \end{vmatrix} dM(s_1) \dots dM(s_n).$$

Точно так же, как и в [71, 135], доказывається сходимость ряда при всех λ . Однако, применить схему, использованную в [135], в нашем случае нельзя, так как $G(x, s)$ не имеет непрерывной производной по x , если $x > \xi$.

В то же время, каждую разность $G(s_{i+1}, s_i) - G(s_i, s_j)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, n$) при некоторых κ_{ij} , заключенными между $\inf_{x, s \in [0; \ell]} G'_x(x, s)$ и $\sup_{x, s \in [0; \ell]} G'_x(x, s)$, можно записать в следующем виде $G(s_{i+1}, s_i) - G(s_i, s_j) = \kappa_{ij}(s_{i+1} - s_i)$. Так как $G(x, s)$ — решение уравнения $Lu = \theta(x - s)$, то $G'_x(x, s)$ ограничена на всем квадрате $[0, \ell] \times [0, \ell]$. Поэтому, величины $\kappa_{i,j}$ ограничены в совокупности некоторой постоянной C .

Тогда, при $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} G(s_1, s_1) & G(s_1, s_2) & \dots & G(s_1, s_n) \\ G(s_2, s_1) & G(s_2, s_2) & \dots & G(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(s_{n-1}, s_1) & G(s_{n-1}, s_2) & \dots & G(s_{n-1}, s_n) \\ G(s_n, s_1) & G(s_n, s_2) & \dots & G(s_n, s_n) \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} G(s_1, s_1) & G(s_1, s_2) & \dots & G(s_1, s_n) \\ G(s_2, s_1) & G(s_2, s_2) & \dots & G(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(s_{n-1}, s_1) & G(s_{n-1}, s_2) & \dots & G(s_{n-1}, s_n) \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_n - s_{n-1}) = \dots = \\
 & = \begin{vmatrix} G(s_1, s_1) & G(s_1, s_2) & \dots & G(s_1, s_n) \\ \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & \dots & \kappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{n-2,1} & \kappa_{n-2,2} & \dots & \kappa_{n-2,n} \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Адамара и оценку

$$|(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1})| \leq \left(\frac{\ell}{n-1} \right)^{n-1},$$

для A_n (при $n \geq 2$) будем иметь

$$|A_n| \leq C^n \cdot n^{\frac{n}{2}} (M(\ell) - M(0))^n \left(\frac{\ell}{n-1} \right)^{n-1} = \frac{1}{\ell} (C(M(\ell) - M(0))\ell)^n \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}}.$$

Так как для любого фиксированного положительного ε , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = 0$, то при достаточно большом n (зависящем от ε), справедливо неравенство

$$|A_n| \leq \frac{1}{\ell} (C(M(\ell) - M(0))\ell)^n n^{-\frac{n}{2} + \varepsilon n}.$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [134, 187], показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $\frac{2}{3} - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $2/3$, следовательно, для произвольности $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/3+\delta}} \tag{2.4.12}$$

сходится. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции конечного на $[0, \ell]$ изменения, $Q(x)$ — не убывает на $[0, \ell]$ и $\inf_{x \in [0, \xi]} p(x) > 0$, $\inf_{x \in (\xi, \ell]} r(x) > 0$. Более того, пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи (2.4.6), причем каждое из них является простым. Тогда ряд (2.4.12) сходится при любом $\delta > 0$.

Доказанная теорема позволяет получить достаточные условия применимости метода Фурье к разнопорядковой математической модели, описывающей малые свободные колебания системы, состоящей из стержня, один конец которого зашцеplен, а к другому — прикреплен растянута струна, другой конец которой закремлен.

Замечание 2.4.1. Выше мы рассмотрели систему с зашцеplенным левым концом стержня и закремленным правым концом струны. Если система имеет упругое закрепление, как на левом, так и правом концах, то разнопорядковая математическая модель принимает вид

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ (pu''_{xx})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(0) - \gamma_2 u'_x(0) = 0, \\ (ru'_x)(\ell) + \gamma_3 u(\ell) = 0, \end{cases}$$

где γ_1, γ_3 — жесткости пружин, реагирующих на смещение; γ_2 — на поворот.

Выводы

В этой главе рассмотрены математические модели второго порядка с «сильными» особенностями, применение классических методов анализа к которым крайне затруднительно ввиду наличия неустранимых разрывов у решения математической модели; использование теории распределений Шварца–Соболева приводит к трудноразрешимым проблемам, например, умножения обобщенной функции на разрывную. Применение производных по мере позволяет обойти не только эту проблему, но и получить ряд важных результатов, например, интегральную обратимость математической модель. Основные результаты главы.

- 1) Изучена математическая модель с разрывными решениями.
- 2) Показана интегральное представление решения математической модели с «сильной» внутренней особенностью.
- 3) Рассмотрена модель, которая моделирует малые деформации струнно-стержневой системы, порождая при этом разнопорядковую граничную задачу.
- 4) Получена оценка скорости роста собственные значения разнопорядковой спектральной задачи.

Глава 3

Граничные задачи с производными по мере при моделировании малых деформаций сложно-сочленённых стержневых систем

В этой главе изучается линейная модель, возникающая при моделировании малых деформаций стержневых систем, при этом мы используем поточечный подход. Используемый подход позволит нам в дальнейшем изучить не только линейные модели. В первом параграфе, исходя из вариационных принципов, получена математическая модель малых деформаций стержневой системы.

Второй параграф посвящен анализу полученной математической модели. В третьем — изучается важное для приложений свойство неосцилляции решений однородного уравнения, получены достаточные условия. Четвертый и пятый параграфы посвящены достаточным условиям невырожденности полученной математической модели и анализу функции влияния дифференциальной модели, которая заведомо существует если модель невырождена. В следующем параграфе получено явное представление функции влияния одной специальной математической модели. В седьмом параграфе доказана корректность изучаемой дифференциальной модели. Последние два параграфа посвящены доказательству осцилляционности спектра двум математическим моделям, у первой из них коэффициент $Q(x) \equiv \text{const}$, т. е. внешняя среда отсутствует, но граничные условия соответствуют различным способам закрепления концов; у второй — внешняя среда присутствует, но оба конца заземлены.

3.1 Линейная математическая модель малых деформаций стержневой системы

Пусть изучаемый объект, который состоит из конечного числа стержней сочлененных шарнирно, растянут вдоль отрезка $[0; \ell]$ оси Ox и деформируется в вертикальной плоскости. Обозначим через $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \ell$ — точки шарнирного сочленения стержней. К этим точкам, для удобства рассуждений, добавим точки $\xi_0 = 0$ и $\xi_{n+1} = \ell$.

Пусть система деформируется под воздействием внешней силы, приложенной перпендикулярно к положению равновесия и действующей в одной плоскости. Мы предполагаем деформации малыми, опуская в рассуждениях малые старших порядков. Также мы считаем деформации системы непрерывными функциями, заданными на отрезке $[0, \ell]$. Пусть $u(x)$ — форма деформации, принятая под воздействием на элемент $[x, x + dx]$ силой $dF(x)$, где $F(x)$ — суммарная сила, приложенная к участку $[0; x]$, причем $F(x)$, что вполне естественно с точки зрения физики, имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение. Выполняемая этой силой работа при перемещении нашего элемента на дистанцию $u(x)$, равна $u(x) dF(x)$. Вдоль всей цепочки стержней затрачивается энергия $\Phi_F(u) = \int_0^\ell u(x) dF(x)$. Последний интеграл существует по Риману–Стилтьесу, так как $u(x)$ непрерывна на $[0; \ell]$ и $F(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0; \ell]$.

Найдем энергию $\Phi_Q(u)$, накапливаемую за счет упругой реакции окружающей среды. Пусть dQ — локальный коэффициент упругости внешней среды. При отклонении элемента $[x, x + dx]$ на дистанцию h сила упругой реакции по закону Гука равна $h dQ(x)$. Поэтому работа по преодолению этой силы при изменении h от нуля до $u(x)$ равна $\left(\int_0^{u(x)} h dh \right) dQ = \frac{u^2}{2} dQ$, что в целом на $[0, \ell]$ приводит к интегралу $\Phi_Q(u) = \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ$, который опять же существует по Риману–Стилтьесу. Полная энергия $\Phi(u)$, накапливаемая стержнем под воздействием нагрузки $F(x)$, определяется еще дополнительным слагаемым $\Phi_0(u)$, описывающим внутреннюю энергию стержней. Подчеркнем, что рас-

смаатриваемая функция $u(x)$ — это гипотетическая (виртуальная) деформация. Реальная деформация должна давать минимум потенциальной (полной) энергии $\Phi(u)$.

Работа, которую необходимо совершить на изменение длины участка $[x; x+dx]$ на величину $dl-dx = \left(\sqrt{1+u'^2(x)}-1\right) dx$, согласно закону Гука, равна $r(x) \cdot \left(\sqrt{1+u'^2(x)}-1\right) dx$, где $r(x)$ — натяжение стержня в точке x , что вдоль всей системы приводит к интегралу $\int_0^\ell r(x) \cdot \left(\sqrt{1+u'^2(x)}-1\right) dx$.

Раскладывая $\sqrt{1+u'^2}$ в ряд Тейлора и отбрасывая малые высокого порядка, будем иметь $\sqrt{1+u'^2}-1 \cong \frac{u'^2}{2}$. Тогда накопленная энергия за счет внутренних сил упругости равна $\int_0^\ell \frac{r(x)u'^2(x)}{2} dx$.

Пусть x — регулярная точка, т. е. x не совпадает ни с одной ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда $\hat{p}(x) = E(x)I(x)$, где $E(x)$ — модуль Юнга и $I(x)$ — момент инерции сечения; $(\hat{p}u''_{xx})(x)$ имеет физический смысл изгибающего момента, действующего в поперечном сечении, проходящего через точку x . Поэтому, работа, необходимая для придания элементу $[x; x+dx]$ изгибающего момента $(\hat{p}u''_{xx})(x)$, равна $\frac{\hat{p}(x)u''_{xx}(x)}{2} dx$, что вдоль всей цепочки приводит к сумме

$$\sum_{i=0}^m \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\hat{p}(x)u''_{xx}(x)}{2} dx.$$

Пусть в каждой точке ξ_i шарнирного сочленения стержней добавлена пружина жесткости $\hat{\gamma}_i$, реагирующая исключительно на изгибающий момент, следующим образом. Один конец пружины припаен к правому концу стержня, находящегося слева от ξ_i , а другой — к левому концу стержня, находящегося правее точки ξ_i . Тогда энергия, накапливаемая этой пружиной, равна $\hat{\gamma}_i \frac{(\Delta u'(\xi_i))^2}{2}$, так как с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, изменение длины пружины равно $\Delta u'(\xi_i) = u'(\xi_i + 0) - u'(\xi_i - 0)$. Следовательно, всеми пружинами накапливается энергия

$$\sum_{i=1}^m \hat{\gamma}_i \frac{(\Delta u'(\xi_i))^2}{2}.$$

К каждой точке $x = 0$ и $x = \ell$ присоединены еще по две пружины жесткостью γ_1, γ_2 и γ_3, γ_4 соответственно. Первая пружина, присоединенная к левому концу системы, реагирует на крутящий момент, возникающий в точке $x = 0$, а вторая — на смещение левого конца. Тогда энергия, накапливаемая этими пружинами, равна $\gamma_1 \frac{u'^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2}$. Аналогично для пружин, находящихся на правом конце — $\gamma_3 \frac{u'^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}$.

Таким образом, потенциальная (полная) энергия системы равна

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \sum_{i=0}^m \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\widehat{p}(x) u''^2(x)}{2} dx + \int_0^{\ell} \frac{r(x) u_x'^2(x)}{2} dx + \int_0^{\ell} \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^{\ell} u dF + \\ & + \sum_{i=1}^m \widehat{\gamma}_i \frac{(\Delta u'_x(\xi_i))^2}{2} + \gamma_1 \frac{u'^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Пусть $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная 0 при $x < 0$, и 1 в противном случае. Введем в рассмотрение возрастающую на $[0; \ell]$ функцию $\widehat{\mu}(x) = x + \sum_{i=1}^m \widehat{\gamma}_i \theta(x - \xi_i)$. Заметим, что $\widehat{\mu}(x)$ не определена в точках ξ_i .

Введенная функция порождает на $[0; \ell]$ меру $\widehat{\mu}$, причем мера точки ξ_i равна $\widehat{\mu}\{\xi_i\} = \widehat{\mu}(\xi_i + 0) - \widehat{\mu}(\xi_i - 0) = \Delta \widehat{\mu}_i(\xi_i) = \widehat{\gamma}_i$.

Положим

$$p(x) = \begin{cases} \widehat{p}(x), & \text{если } x \neq \xi_i (i = 1, 2, \dots, m), \\ \widehat{\gamma}_i^2, & \text{если } x = \xi_i \text{ при каком-то } i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Если теперь воспользоваться понятием μ -производной, то (3.1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \int_0^{\ell} \frac{p u_{x\widehat{\mu}}'^2}{2} d\widehat{\mu} + \int_0^{\ell} \frac{r u_x'^2}{2} dx + \int_0^{\ell} \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^{\ell} u dF + \\ & + \gamma_1 \frac{u'^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Далее мы изучим функционал более общего, чем (3.1.2), на минимум.

Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция, непрерывная на концах отрезка $[0; \ell]$. Меру, которую порождает функция $\mu(x)$, обозначим через μ .

На множестве E абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций, первая производная которых μ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, вторая производная $u''_{x\mu}(x)$ имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение, рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \int_0^\ell \frac{p u''_{x\mu}{}^2}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{r u_x'^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^\ell u dF + \\ & + \gamma_1 \frac{u_x'^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u_x'^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}. \end{aligned}$$

Если $u(x) \in E$ дает минимум функционалу $\Phi(u)$, то, применяя схему Лагранжа, мы получим, что первая вариация $\delta\Phi(u)h = \left. \frac{d}{d\lambda} \Phi(u + \lambda h) \right|_{\lambda=0}$ равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta\Phi(u)h = & \int_0^\ell p u''_{x\mu} h''_{x\mu} d\mu + \int_0^\ell r u_x' h_x' dx + \int_0^\ell u h dQ - \int_0^\ell h dF + \\ & + \gamma_1 u_x'(0) h_x'(0) + \gamma_2 u(0) h(0) + \gamma_3 u_x'(\ell) h_x'(\ell) + \gamma_4 u(\ell) h(\ell) = 0 \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

для любой $h \in E$. Положив $R(x) = \int_0^x r(s) u_x'(s) ds$, второй интеграл в правой части (3.1.3) проинтегрируем по частям:

$$\int_0^\ell h_x' r u_x' dx = R \cdot h_x' \Big|_0^\ell - \int_0^\ell R h''_{x\mu} d\mu = R(\ell) h_x'(\ell) - \int_0^\ell R h''_{x\mu} d\mu. \quad (3.1.4)$$

Аналогично взяв $\alpha(x) = \int_0^x u dQ$ ($x \notin S(Q)$ — множество точек разрыва функции $Q(x)$), третий интеграл дважды проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u h dQ = & \alpha(x) \cdot h(x) \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \alpha h_x' dx = h(\ell) \alpha(\ell) - \alpha^{(-1)}(x) h_x'(x) \Big|_0^\ell + \\ & + \int_0^\ell \alpha^{(-1)} h''_{x\mu} d\mu = h(\ell) \alpha(\ell) - h'(\ell) \alpha^{(-1)}(\ell) + \int_0^\ell \alpha^{(-1)} h''_{x\mu} d\mu, \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

где $\alpha^{(-1)}(x) = \int_0^x \alpha(t) dt$. И, наконец, четвертый интеграл в (3.1.3) проинте-

грируем дважды по частям, положив $F^{(-1)}(x) = \int_0^x F(t) dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell h dF &= F(x) \cdot h(x) \Big|_0^\ell - F^{(-1)}(x) \cdot h'_x(x) \Big|_0^\ell + \int_0^\ell F^{(-1)} h''_{x\mu} d\mu = \\ &= h(\ell)F(\ell) - h(0)F(0) - h'_x(\ell)F^{(-1)}(\ell) + \int_0^\ell F^{(-1)} h''_{x\mu} d\mu. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Тогда (3.1.3), с учетом (3.1.4), (3.1.5) и (3.1.6), принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[pu''_{x\mu} - R + \alpha^{(-1)} - F^{(-1)} \right] h''_{x\mu} d\mu + h'(0) \cdot \gamma_1 u'(0) + h(0) \gamma_2 u(0) + \\ + h'(\ell) \cdot \left[\gamma_3 u'(\ell) + R(\ell) - \alpha^{(-1)}(\ell) + F^{(-1)}(\ell) \right] + \\ + h(\ell) \cdot \left[\gamma_4 u(\ell) + \alpha(\ell) - F(\ell) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Покажем, что если $A(x) \in BV[0; \ell]$ и для любой $h \in E_0 = \{h \in E \mid h(0) = h'_x(0) = h(\ell) = h'_x(\ell) = 0\}$ справедливо равенство

$$\int_0^\ell A(x) h''_{x\mu}(x) d\mu(x) = 0, \quad (3.1.8)$$

то $A(x)$ — линейная функция, т. е. $A(x) = C_1 + C_2 x$ при некоторых постоянных C_1 и C_2 .

Так как $\int_0^\ell (C_1 + C_2 x) h''_{x\mu} d\mu = 0$ для любых C_1 и C_2 , то (3.1.8) можно переписать следующим образом $\int_0^\ell \left[A(x) - C_1 - C_2 x \right] h''_{x\mu} d\mu = 0$. Рассмотрим

функцию $h_0(x) = \int_0^x \int_0^t (A(s) - C_1 - C_2 s) d\mu(s) dt$. Для любых C_1 и C_2 имеем $h_0(0) = h'_0(0) = 0$. Если в качестве C_1 и C_2 взять решение линейной системы

(отличие от нуля определителя системы проверяется непосредственно)

$$\begin{cases} C_1(\mu(\ell) - \mu(0)) + C_2 \int_0^\ell s d\mu(s) = \int_0^\ell A(s) d\mu(s), \\ C_1 \int_0^\ell \int_0^t d\mu(s) ds + C_2 \int_0^\ell \int_0^t s d\mu(s) dt = \int_0^\ell A(s) d\mu(s) dt, \end{cases}$$

то будут выполняться равенства $h_0(\ell) = h_0'(\ell) = 0$, т. е. $h_0 \in E_0$. Подставляя $h_0(x)$ в (3.1.8) будем иметь

$$\int_0^\ell \left(A(x) - (C_1 + C_2x) \right)^2 d\mu(x) = 0.$$

Тогда $A(x) - (C_1 + C_2x) = 0$ почти всюду (по мере μ), причем $A(x-0) = A(x+0) = C_1 + C_2x$ для каждой точки x , следовательно, так как собственное значение $A(x)$ в точках разрыва x функции с конечным изменением не играет роли, $A(x)$ непрерывна и $A(x) = C_1 + C_2x$ для всех x .

На основании доказанного, из равенства (3.1.7) вытекает тождество

$$(pu''_{x\mu})(x) - R(x) + \alpha^{(-1)}(x) - F^{(-1)}(x) \equiv C_1 + C_2x,$$

или, с учетом введенных обозначений,

$$(pu''_{x\mu})(x) \equiv \int_0^x r(s)u'_x(s) ds - \int_0^x \alpha(t) dt + \int_0^x F(t) dt + C_1 + C_2x. \quad (3.1.9)$$

Равенство (3.1.7), с учетом последнего тождества, принимает вид

$$\begin{aligned} h'_x(0) [\gamma_1 u'_x(0) - C_1] + h(0) [\gamma_2 u(0) + F(0) + C_2] + \\ + h'_x(\ell) \left[\gamma_3 u'_x(\ell) + R(\ell) - \alpha^{(-1)}(\ell) + F^{(-1)}(\ell) + C_1 + C_2 \right] + \\ + h(\ell) [\gamma_4 u(\ell) + \alpha(\ell) - F(\ell) - C_2] = 0. \end{aligned}$$

Откуда немедленно получаем равенства

$$\begin{aligned} \gamma_1 u'_x(0) - C_1 &= 0, \\ \gamma_2 u(0) + F(0) + C_2 &= 0, \\ \gamma_3 u'_x(\ell) + R(\ell) - \alpha^{(-1)}(\ell) + F^{(-1)}(\ell) + C_1 + C_2 &= 0, \\ \gamma_4 u(\ell) + \alpha(\ell) - F(\ell) - C_2 &= 0. \end{aligned}$$

При $x = 0$ равенство (3.1.9) принимает вид $(pu''_{x\mu})(0) = C_1$, что вместе с (3.1.10), нам дает граничное условие $(pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0$. Аналогично получаем условие $(pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0$.

Функция $R(x) = \int_0^x r(s)u'_x(s) ds$ абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, так как $r(x) \in BV[0; \ell]$ (следовательно и суммируема) и $u'_x(x)$ суммируема как производная Лебега абсолютно непрерывной функции $u(x)$. Тогда $R(x)$ дифференцируема и $R'_x(x) = r(x)u'_x(x)$.

Функции $\alpha(x) = \int_0^x u(s) dQ(s)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0; \ell]$ изменение, поэтому $\alpha(x) - F(x)$ суммируема и $(\alpha^{(-1)}(x) - F^{(-1)}(x))'_x(x) = \alpha(x) - F(x)$. Тогда, равенство (3.1.9) допускает дифференцирование по x :

$$(pu''_{x\mu})'_x(x) = r(x)u'_x(x) - \int_0^x u(s) dQ(s) + F(x) + C_2. \quad (3.1.14)$$

Из равенств $(pu''_{x\mu})'_x(0) = (ru'_x)(0) + F(0) + C_2$, полученного из (3.1.14) при $x = 0$, и (3.1.11), получаем третье условие $(pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0$. Аналогично находим четвертое граничное условие $(pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0$.

Так как $u'_x(x)$ μ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, то $u'_x(x) \in BV[0; \ell]$. Отсюда следует, что в каждой точке существуют пределы слева и справа.

Согласно [201] существует строго возрастающая функция $\sigma(x)$, порождающая меру на $[0; \ell]$, такая, что x , $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ будут σ -абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$.

Так как $u'_x(x)$ является на $[0; \ell]$ μ -абсолютно непрерывной функцией и $\mu(x)$ σ -абсолютно непрерывна на этом же множестве, то и $u'_x(x)$ также σ -абсолютно непрерывна на отрезка $[0; \ell]$. Тогда, в правой части равенства (3.1.14) стоит σ -абсолютно непрерывная на $[0; \ell]$ функция, следовательно, и в левой части стоит σ -абсолютно непрерывная на $[0; \ell]$ функция, что позволяет продифференцировать по σ равенство (3.1.14):

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_{\sigma}(x) + u(x)Q_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x). \quad (3.1.15)$$

Уравнение (3.1.15) понимается на множестве $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$, построение которого описано в § 1.3.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3.1.1. *Необходимое условие экстремума функционала $\Phi(u)$ реализуется в виде дифференциальной модели*

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Следует отметить, что уравнение (3.1.15) в каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi), \quad (3.1.17)$$

(здесь $\Delta v(\xi)$ — скачок функции $v(x)$ в точке ξ , т. е. $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$).

Равенство (3.1.17) означает, что скачок перерезывающей силы прямо пропорционален скачку $\Delta(ru'_x)(\xi)$, значению решения $u(\xi)$ и величине сосредоточенной силы $\Delta F(\xi)$.

В первом слагаемом в левой части равенства (3.1.15) третье дифференцирование по x означает, что квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ непрерывна во всех точках, в частности, в точках $\xi \in S(\mu)$:

$$p(\xi - 0)u''_{x\mu}(\xi - 0) = p(\xi) \frac{\Delta u'(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} = p(\xi + 0)u''_{x\mu}(\xi + 0) \quad (3.1.18)$$

Окончательно получаем, что в точках ξ , принадлежащих множеству $S(\sigma)$, выполнены четыре условия: условие непрерывности $u(x)$, два — (3.1.18), и — (3.1.17).

В дальнейшем мы покажем, что при определённых условиях дифференциальная модель (3.1.16) разрешима.

В следующем параграфе устанавливается разрешимость уравнения (3.1.15).

3.2 Анализ дифференциальной модели четвертого порядка

Всюду далее мы предполагаем выполненными следующие условия:

- 1) $x, \mu(x), p(x), r(x), Q(x)$ и $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$;
- 2) $p(x) > 0$ для всех $x \in [0; \ell]$, $\min_{\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)} \setminus S(\mu)} p(x) > 0$;
- 3) интеграл $\int_0^\ell \frac{d\mu(x)}{p(x)}$ конечен;
- 4) $r(x) \geq 0$ на всем $\overline{[0; \ell]}_S$;
- 5) $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0; \ell]}_S$.

В этом параграфе устанавливается разрешимость уравнения

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma. \quad (3.2.1)$$

Теорема 3.2.1. Для любой точки $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$, любых чисел u_0, u_1, u_2, u_3 и любой σ -абсолютно непрерывной функции $F(x)$, существует единственное решение уравнения (3.2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, (pu''_{x\mu})(x_0) = u_2, \left((pu''_{x\mu})'_x \right)(x_0) = u_3. \quad (3.2.2)$$

Доказательство. Функция $P(x) = \int_0^x \frac{d\mu(\tau)}{p(\tau)}$ ($x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$), в силу условий теоремы, принадлежит $BV[0; \ell]$. После четырехкратного интегрирования в предела от x_0 до x (первый раз по мере σ , второй и четвертый — по x , третий по μ), интегрирования по частям интеграла $\int_{x_0}^x r(s) du(s)$, что возможно, так как $r(x) \in BV[0; \ell]$ и $u(x)$ принадлежит $C[0; \ell]$, разрешимость задачи (3.2.1), (3.2.2), эквивалентна разрешимости в $C[0; \ell]$ интегрального уравнения $u(x) = \alpha(x) + (Au)(x)$, где

$$\begin{aligned} \alpha(x) = & u_0 + u_1 x + (u_2 + r(x_0)u_0) \int_{x_0}^x (P(\eta) - P(x_0)) d\eta + \\ & + (u_3 - r(x_0)u_1) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^\eta (\tau - x_0) dP(\eta) d\eta + \end{aligned}$$

$$+ \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} (F(t) - F(x_0)) dt dP(\tau) d\eta, \quad (3.2.3)$$

$$(Au)(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} u(\tau)r(\tau) dP(\tau) d\eta + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} u(s) dr(s) dP(\tau) d\eta + \\ + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} \int_{x_0}^t u(s) dQ(s) dt dP(\tau) d\eta. \quad (3.2.4)$$

Функция $\alpha(x)$, определенная равенством (3.2.3), как нетрудно видеть, является непрерывной; оператор A действует из $C[0; \ell]$ в $C[0; \ell]$. Методом математической индукции доказывается неравенство

$$|(A^n u)(x)| \leq \|u\|_C \cdot C^n \frac{|x - x_0|^n}{n!}, \quad (3.2.5)$$

где $\|u\|_C = \max_x |u(x)|$ — норма в $C[0; \ell]$, $C = \sup_{\tau} r(\tau) \cdot \bigvee_0^{\ell} (P) + \bigvee_0^{\ell} (r) \cdot \bigvee_0^{\ell} (P) + \bigvee_0^{\ell} (Q) \cdot \bigvee_0^{\ell} (P)$.

Из (3.2.5) следует, что спектральный радиус оператора A равен нулю, следовательно, интегральное уравнение $u = \alpha + Au$ однозначно разрешимо в $C[0; \ell]$ для любой α , более того, решение представимо в виде равномерно сходящегося ряда Неймана $u = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \alpha$. Теорема доказана. \square

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что пространство решений однородного уравнения

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0 \quad (3.2.6)$$

четырёхмерно. В частности, система функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=4}$ — решений однородного уравнения (3.2.6), удовлетворяющих начальным условиям $\varphi_i(x_0) = \delta_1^i$, $\varphi'_{i_x}(x_0) = \delta_2^i$, $(p\varphi''_{i_{x\mu}})(x_0) = \delta_3^i$, $\left((p\varphi''_{i_{x\mu}})'_x\right)(x_0) = \delta_4^i$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и нулю в противном случае, при некотором $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$, образуют базис в пространстве решений однородного уравнения (3.2.6).

На множестве $\overline{[0; \ell]}_S$ определим аналог определителя Вронского

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_{1x}'(x) & \varphi_{2x}'(x) & \varphi_{3x}'(x) & \varphi_{4x}'(x) \\ \varphi_{1x\mu}''(x) & \varphi_{2x\mu}''(x) & \varphi_{3x\mu}''(x) & \varphi_{4x\mu}''(x) \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x(x) & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x(x) & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x(x) & (p\varphi_{4x\mu}'')'_x(x) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), — решения однородного уравнения (3.2.6). Для простоты введенный определитель будем обозначать через $W(x)$, всякий раз когда из контекста будет понятно для каких функций он посчитан.

Пусть $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — решения однородного уравнения (3.2.6). Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) найдется точка $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$ такая, что $W(x_0) = 0$;
- б) $W(x) \equiv 0$ на $\overline{[0; \ell]}_S$;
- в) Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ линейно зависимы на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Доказательство на основе теоремы 3.2.1 проводится элементарно — алгебраическими рассуждениями.

Если $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, и $\varphi_4(x)$ — решения однородного уравнения (3.2.6), то $pW[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4](x)$ постоянна на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Так как $\varphi_i(x)$, $p\varphi_{ix\mu}''(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$, $\varphi_{ix}'(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — μ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$, мера Лебега и мера, порождённая функцией $\mu(x)$, являются σ -абсолютно непрерывными мерами, то $\varphi_i(x)$, $\varphi_{ix}'(x)$, $p\varphi_{ix\mu}''(x)$ и $(p\varphi_{ix\mu}'')'_x(x)$ являются σ -абсолютными на $\overline{[0; \ell]}_S$ функциями, следовательно, $(pW)(x)$ — σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$. Последнее означает, что почти всюду (по мере σ) у функции $(pW)(x)$ существует σ -производная по Радону-Никодиму. Пусть Z — множество точек в которых существуют σ -производные $\frac{dx}{d\sigma}$, $\frac{d}{d\sigma}(pW)$, $\frac{d}{d\sigma}r$ и $\frac{d}{d\sigma}\mu$. Множество Z имеет полную σ -меру.

Для точек $x \in Z \setminus S(\sigma)$ имеем

$$\frac{d}{d\sigma}(pW) = \begin{vmatrix} \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & \varphi_{4x}' \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & \varphi_{4x}' \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & p\varphi_{4x\mu}'' \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x & (p\varphi_{4x\mu}'')'_x \end{vmatrix} \cdot \frac{dx}{d\sigma} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_{1x\mu}'' & \varphi_{2x\mu}'' & \varphi_{3x\mu}'' & \varphi_{4x\mu}'' \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & p\varphi_{4x\mu}'' \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x & (p\varphi_{4x\mu}'')'_x \end{vmatrix} \cdot \frac{d\mu}{d\sigma} + \\
& + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & \varphi_{4x}' \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x & (p\varphi_{4x\mu}'')'_x \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x & (p\varphi_{4x\mu}'')'_x \end{vmatrix} \cdot \frac{dx}{d\sigma} + \\
& + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & \varphi_{4x}' \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & p\varphi_{4x\mu}'' \\ (p\varphi_{1x\mu}'')''_{x\sigma} & (p\varphi_{2x\mu}'')''_{x\sigma} & (p\varphi_{3x\mu}'')''_{x\sigma} & (p\varphi_{4x\mu}'')''_{x\sigma} \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

так как во всех определителях имеются пропорциональные строки.

Если $x \in S(\mu)$, то

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}(pW)(x) &= \frac{\Delta(pW)(x)}{\Delta\sigma(x)} = \frac{1}{\Delta\sigma(x)} \times \\
& \times \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \Delta\varphi_{1x}'(x) & \Delta\varphi_{2x}'(x) & \Delta\varphi_{3x}'(x) & \Delta\varphi_{4x}'(x) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x) & p\varphi_{2x\mu}''(x) & p\varphi_{3x\mu}''(x) & p\varphi_{4x\mu}''(x) \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x(x+0) & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x(x+0) & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x(x+0) & (p\varphi_{4x\mu}'')'_x(x+0) \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_{1x}'(x-0) & \varphi_{2x}'(x-0) & \varphi_{3x}'(x-0) & \varphi_{4x}'(x-0) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x) & p\varphi_{2x\mu}''(x) & p\varphi_{3x\mu}''(x) & p\varphi_{4x\mu}''(x) \\ \Delta(p\varphi_{1x\mu}'')'_x(x) & \Delta(p\varphi_{2x\mu}'')'_x(x) & \Delta(p\varphi_{3x\mu}'')'_x(x) & \Delta(p\varphi_{4x\mu}'')'_x(x) \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta\sigma(x)}.
\end{aligned}$$

В силу пропорциональности соответствующих строк, оба определителя в правой части последнего равенства равны нулю. Наконец, в случае $x \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$, имеем

$$\frac{d}{d\sigma}(pW)(x) = \frac{\Delta(pW)(x)}{\Delta\sigma(x)} = \frac{1}{\Delta\sigma(x)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x) & p\varphi_{2x\mu}''(x) & p\varphi_{3x\mu}''(x) & p\varphi_{4x\mu}''(x) \\ \Delta(p\varphi_{1x\mu}''(x))' & \Delta(p\varphi_{2x\mu}''(x))' & \Delta(p\varphi_{3x\mu}''(x))' & \Delta(p\varphi_{4x\mu}''(x))' \end{vmatrix} = 0,$$

так как строки пропорциональны. Таким образом, $\frac{d}{d\sigma}(pW)(x)$ равна нулю почти всюду, следовательно, $pW(x)$ есть константа.

3.3 Свойство неосцилляции

В этом параграфе вводится и изучается понятие неосцилляции уравнения

$$Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0, \quad (3.3.1)$$

Напомним необходимые определения. Мы будем следовать терминологии из [71], [60].

Определение 3.3.1. Будем говорить, что система непрерывных на $[0; \ell]$ функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является системой Чебышева порядка $n - 1$ (T_{n-1} -системой) на I ($= [0; \ell], (0; \ell], [0; \ell)$ или $(0; \ell)$), если произвольный нетривиальный обобщённый многочлен $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более $n - 1$ нуля на I с учётом кратности.

Определение 3.3.2. Систему $\{\varphi_i(x)\}$ непрерывных на $[0; \ell]$ функций (возможно состоящую и из счётного числа функций) назовём системой Маркова или M -системой, если для любого n система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является T_{n-1} -системой.

Введём следующее обозначение

$$\Delta \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \det \|\varphi_i(x_j)\|_{i,j=1}^n = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Определение 3.3.3. M -система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ называется M^+ -системой, если все главные миноры (3.3.2) положительны при всех $x_1 < x_2 < \dots$

Как известно [14], для того, чтобы $\{\varphi(x)\}_{i=1}^{i=n}$ была системой Чебышева (T_{n-1} -системой), необходимо и достаточно, отличие от нуля определителя

$$\Delta \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

для всех $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq \ell$.

Точку x_0 назовем нулем решения $u(x)$ уравнения (3.3.1), кратности 1 (или простым нулём), если $u(x_0) = 0$ и $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) > 0$; кратности 2, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) \leq 0$ и $(pu''_{x\mu})(x_0) \neq 0$; кратности 3, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) = u'_x(x_0 + 0) = 0$, $(pu''_{x\mu})(x_0) = 0$ и $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 - 0) \times (pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0) > 0$.

Если x_0 не принадлежит множеству $S(\sigma)$, т. е. является точкой непрерывности самого решения и всех ее производных до третьего порядка включительно, то введенное определение совпадает с классическим. Если x_0 принадлежит разности множеств $S(\sigma)$ и $S(\mu)$ ($x_0 \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$), то определение нуля кратности 1 и 2 снова совпадает с классическим.

Заметим, что нули кратности больше, чем 3 могут быть только у тривиального решения. В самом деле, если x_0 — нуль кратности больше, чем 3 некоторого нетривиального решения $u(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$, то $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) = u'_x(x_0 + 0) = 0$, $(pu''_{x\mu})(x_0) = 0$ и $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0) \cdot (pu''_{x\mu})'_x(x_0 - 0) \leq 0$. Если одна из третьих производных $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 - 0)$ или $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0)$ обращается в нуль, то $u(x)$ тождественный нуль в силу теоремы единственности. Поэтому, можно считать $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 - 0) \cdot (pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0) < 0$. Последнее означает, что $x_0 \in S(\sigma)$, следовательно, справедливо равенство

$$\Delta (pu''_{x\mu})'_x(x_0) - \Delta (ru'_x)(x_0) + u(x_0)\Delta Q(x_0) = 0.$$

Но $\Delta (ru'_x)(x_0) = (ru'_x)(x_0 + 0) - (ru'_x)(x_0 - 0) = 0$ и $u(x_0) = 0$, и тогда $\Delta (pu''_{x\mu})'_x(x_0) = 0$, или $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0) = (pu''_{x\mu})'_x(x_0 - 0)$. Последнее равенство противоречит предположению о противоположности знаков левой и правой производных.

Покажем, что у любого нетривиального решения однородного уравнения $Lu = 0$ конечное число нулей на $[0; \ell]$.

Пусть у нетривиального решения $u(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$ бесконечное число различных нулей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0; \ell]$. Переходя если необходимо

к подпоследовательности, можно считать $\{x_n\}$ сходящейся, причем монотонно. Рассмотрим случай $x_n \rightarrow x_0 + 0$. (Случай $x_n \rightarrow x_0 - 0$ рассматривается аналогично.)

В силу непрерывности $u(x)$ имеем $u(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n)$. Из теоремы Ролля следует существование последовательности $\{x_n^{(1)}\}$ такой, что

- 1) $x_n^{(1)}$ заключена между x_n и x_{n+1} ;
- 2) $u'_x(x_n^{(1)} - 0) \cdot u'_x(x_n^{(1)} + 0) \leq 0$.

Из первого заключаем, что $x_n^{(1)} \rightarrow x_0 + 0$, из второго — $u'_x(x_0 + 0) \times u'_x(x_0 + 0) \leq 0$, следовательно, $u'_x(x_0 + 0) = 0$.

На каждом множестве $I_n = \{x \in [0; \ell]_S \mid x_{n+1}^{(1)} \leq x \leq x_n^{(1)}\}$ производная $u'_x(x)$ μ -непрерывна, следовательно, достигает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках. Обозначим эту точку через $x_n^{(2)}$. Как нетрудно видеть, $u''_{x\mu}(x)$ в точке $x_n^{(2)}$ меняет знак, и, в силу непрерывности $(pu''_{x\mu})(x)$, заключаем, что $(pu''_{x\mu})(x_n^{(2)}) = 0$. Тогда, последовательность $x_n^{(2)}$ сходится к $x_0 + 0$, и $(pu''_{x\mu})(x_0 + 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (pu''_{x\mu})(x_n^{(2)}) = 0$. Аналогично устанавливается существование последовательности $x_n^{(3)}$ такой, что $x_n^{(3)}$ лежит между $x_n^{(2)}$ и $x_{n+1}^{(2)}$, и $(pu''_{x\mu})'_x(x)$ меняет знак в точке $x_n^{(3)}$, т. е. $(pu''_{x\mu})'_x(x_n^{(3)} - 0) \cdot (pu''_{x\mu})'_x(x_n^{(3)} + 0) \leq 0$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве, получим, в силу существования предела справа у производной $(pu''_{x\mu})'_x(x)$, равенство $(pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0) = 0$. Тогда, $u(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $Lu = 0$ и нулевым начальным условиям $u(x_0 + 0) = u'_x(x_0 + 0) = (pu''_{x\mu})(x_0 + 0) = (pu''_{x\mu})'_x(x_0 + 0) = 0$, следовательно, $u(x) \equiv 0$, что противоречит предположению о нетривиальности $u(x)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 3.3.1. Пусть $u(x) \in E$ и отлична от константы на любом подотрезке $[\alpha; \beta]$; $u(x)$ имеет два нуля кратности 2 (или более). Тогда существует точка в которой $u''_{x\mu}(x)$ равна нулю.

Доказательство. Если у $u(x)$ хотя бы один нуль кратности 3, то утверждение леммы следует из определения нуля кратности 3.

Пусть τ_1 и τ_2 — нули $u(x)$ кратности 2. Предположим, что утверждение леммы неверно: $u''_{x\mu}(x) \neq 0$ для всех $x \in [0; \ell]$. Так как $(pu''_{x\mu})(x)$ непрерывна на $[0; \ell]$ (более того, она абсолютно непрерывна), то $(pu''_{x\mu})(x)$ сохраняет

знак на всем $[0; \ell]$. Так как $p(x) > 0$, то этим же свойством обладает и $u''_{x\mu}(x)$. Пусть для определенности $u''_{x\mu}(x) > 0$. Тогда $u'_x(x)$ возрастает на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, откуда вытекают неравенства

$$u'_x(\tau_1 - 0) \leq u'_x(\tau_1 + 0) < u'_x(\tau_2 - 0) \leq u'_x(\tau_2 + 0). \quad (3.3.3)$$

По условию τ_1 и τ_2 — нули кратности 2, т. е. $u'_x(\tau_1 - 0) \cdot u'_x(\tau_1 + 0) \leq 0$ и $u'_x(\tau_2 - 0) \cdot u'_x(\tau_2 + 0) \leq 0$. Предположим, что $u'_x(\tau_1 - 0) < 0$. Тогда $u'_x(\tau_1 + 0) \geq 0$, и как следствие (3.3.3), $u'_x(\tau_2 - 0) > 0$ и $u'_x(\tau_2 + 0) > 0$. Отсюда вытекает, что τ_2 — нуль кратности 1, что противоречит условию.

Если же $u'_x(\tau_2 + 0) \geq 0$, то из (3.3.3) опять находим, что $u'_x(\tau_2 - 0) > 0$ и $u'_x(\tau_2 + 0) > 0$, т. е. τ_2 — нуль кратности 1. Лемма доказана. \square

Определение 3.3.4. *Однородное уравнение*

$$(ru''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0 \quad (3.3.4)$$

назовем неосциллирующим на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, если любое нетривиальное решение этого уравнения имеет не более трех нулей (с учетом кратностей).

Следующая теорема играет ключевую роль в качественной теории линейных дифференциальных моделей.

Теорема 3.3.1. *Следующие условия эквивалентны*

- 1) *однородное уравнение $Lu \equiv (ru''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$;*
- 2) *справедливо представление Поля–Маммана*

$$Lu = \psi_4 \left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 (\psi_0 u)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right)'_\sigma, \quad (3.3.5)$$

где функции

$$\psi_0(x), \int_0^x \psi_1(s) ds, \int_0^x \int_0^t \psi_2(s) ds d\mu(t), \int_0^x \int_0^\tau \int_0^t \psi_3(s) ds d\mu(t) d\tau$$

принадлежат E , $\psi_4(x)$ — σ -суммируема на $[0; \ell]$ и $\psi_i(x) > 0$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$);

3) существует фундаментальная система $\{u_i(x)\}_{i=1}^4$ решений однородного уравнения $Lu = 0$ такая, что

$$\left. \begin{aligned} W_1(x) &= u_1(x) > 0, \\ W_2(x) &= W[u_1, u_2](x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_{1x}'(x) & u_{2x}'(x) \end{vmatrix} > 0, \\ W_3(x) &= W[u_1, u_2, u_3](x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ u_{1x}'(x) & u_{2x}'(x) & u_{3x}'(x) \\ u_{1x\mu}''(x) & u_{2x\mu}''(x) & u_{3x\mu}''(x) \end{vmatrix} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.6)$$

и

$$\begin{aligned} W_4(x) &= W[u_1, u_2, u_3, u_4](x) = \\ &= \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & u_4(x) \\ u_{1x}'(x) & u_{2x}'(x) & u_{3x}'(x) & u_{4x}'(x) \\ pu_{1x\mu}''(x) & pu_{2x\mu}''(x) & pu_{3x\mu}''(x) & pu_{4x\mu}''(x) \\ (pu_{1x\mu}'')'(x) & (pu_{2x\mu}'')'(x) & (pu_{3x\mu}'')'(x) & (pu_{4x\mu}'')'(x) \end{vmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

4) в пространстве решений однородного уравнения $Lu = 0$ существует фундаментальная система решений, являющаяся M -системой на $[0, \ell]$;

5) существует фундаментальная система решений однородного уравнения, которая является системой Чебышева порядка 3.

Доказательство. Докажем цепочку импликаций $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$. Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ — решения уравнения (3.3.4), удовлетворяющие условиям $\varphi_i(0) = \delta_1^{5-i}$, $\varphi_{ix}'(0) = \delta_2^{5-i}$, $(p\varphi_i'')(0) = \delta_3^{5-i}$ и $(p\varphi_{ix\mu}'')'(0) = \delta_4^{5-i}$ соответственно, где δ_i^j — символ Кронекера, равный нулю, если $i \neq j$, и единице в противном случае. Очевидно, что $\{\varphi_i(x)\}$ линейно независимы.

Функция $\varphi_1(x)$ не имеет в $(0, \ell]$ нулей, так как $x = 0$ — нуль кратности 3.

Положим

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_{1x}'(x) & \varphi_{2x}'(x) \end{vmatrix}$$

при $x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$. Других нулей, кроме $x = 0$, функция $W_2(x)$ в $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ не имеет. В самом деле, пусть $x_0 (\neq 0)$ — нуль функции $W_2(x)$. Функция

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_{1x}'(x_0) & \varphi_{2x}'(x_0) \end{vmatrix}$$

является решением однородного уравнения (3.3.4), и имеет два нуля $x = 0$ и $x = x_0$, причем кратность каждого из них равна двум, что противоречит неосцилляции (3.3.4).

Аналогично доказывается, что

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_{1x}'(x) & \varphi_{2x}'(x) & \varphi_{3x}'(x) \\ \varphi_{1x\mu}''(x) & \varphi_{2x\mu}''(x) & \varphi_{3x\mu}''(x) \end{vmatrix}$$

имеет единственный нуль в $[0, \ell]$, а именно, точку $x = 0$.

И, наконец, положим $W_4(x) \equiv W(x)$, где $W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4](x)$ — определитель Вронского системы $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$. Так как $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ линейно независимы, то функция $W_4(x)$ отлична от нуля.

Покажем, что (3.3.5) справедливо для $x \in (0, \ell]$.

Пусть $\psi_0(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)}$. Тогда, для x из $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ мы имеем

$$(\psi_0 u)'_x(x) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & u(x) \\ \varphi_{1x}'(x) & u'_x(x) \end{vmatrix}}{\varphi_1^2(x)}.$$

Положим $\psi_1(x) = \frac{\varphi_1^2(x)}{W_2(x)}$. Числитель дроби ($\varepsilon > 0$)

$$\frac{(\psi_1(\psi_0 u)'_x)(x + \varepsilon) - (\psi_1(\psi_0 u)'_x)(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} = \frac{1}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} \times \\ \times \left[\frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x + \varepsilon) & u(x + \varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x + \varepsilon) & u'_x(x + \varepsilon) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x + \varepsilon) & \varphi_2(x + \varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x + \varepsilon) & \varphi_{2x}'(x + \varepsilon) \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x + 0) & u(x + 0) \\ \varphi_{1x}'(x + 0) & u'_x(x + 0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) \\ \varphi_{1x}'(x + 0) & \varphi_{2x}'(x + 0) \end{vmatrix}} \right],$$

после приведения к общему значению, можно записать в следующем виде

$$\left| \begin{vmatrix} \varphi_1(x + \varepsilon) & u(x + \varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x + \varepsilon) & u'_x(x + \varepsilon) \end{vmatrix} \right| \cdot \left| \begin{vmatrix} \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) \\ \varphi_{1x}'(x + 0) & \varphi_{2x}'(x + 0) \end{vmatrix} \right| -$$

$$- \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & u_x'(x+0) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+\varepsilon) & \varphi_2(x+\varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) \end{array} \right|.$$

Вводя обозначения $\Delta_\varepsilon \alpha = \alpha(x+\varepsilon) - \alpha(x+0)$, последнюю разность перепишем в виде

$$\left\{ \left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon \varphi_2 \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) \end{array} \right| + \right. \\ \left. + \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & u(x+0) \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon u_x' \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) \end{array} \right| - \right. \\ \left. - \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & u_x'(x+0) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon \varphi_2 \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) \end{array} \right| - \right. \\ \left. - \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & u_x'(x+0) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon \varphi_{2x}' \end{array} \right| \right\} \frac{1}{\Delta_\varepsilon \mu}. \quad (3.3.8)$$

Первое и третье слагаемые в (3.3.8) запишем следующим образом

$$\left\{ \left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon u \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon u_x' \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) \end{array} \right| + \right. \\ \left. + \left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon u \\ \varphi_{1x}'(x+0) & u_x'(x+0) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) \end{array} \right| - \right. \\ \left. - \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & u_x'(x+0) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon \varphi_2 \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon \varphi_{2x}' \end{array} \right| - \right. \\ \left. - \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & u_x'(x+0) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon \varphi_2 \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) \end{array} \right| \right\} \frac{1}{\Delta_\varepsilon \mu}. \quad (3.3.9)$$

Первое и третье слагаемые в последней сумме стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, так как

$$\left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon u \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon u_x' \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \varphi_{1x}'' & u_{x\mu}'' \end{array} \right| = 0 \text{ и } \left| \begin{array}{cc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon \varphi_2 \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon \varphi_{2x}' \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \varphi_{1x}'' & \varphi_{2x}'' \end{array} \right| = 0.$$

Второе и четвертое слагаемые в (3.3.9) вместе дают [106]

$$\left| \begin{array}{ccc} \Delta_\varepsilon \varphi_1 & \Delta_\varepsilon \varphi_2 & \Delta_\varepsilon u \\ \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) & u_x'(x+0) \end{array} \right| \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\Delta_\varepsilon \mu}. \quad (3.3.10)$$

Покажем, что предел (3.3.10) при $\varepsilon \rightarrow +0$ равен нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon \varphi_i &= \varphi_i(x + \varepsilon) - \varphi_i(x + 0) = \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi_{i_x}'(s) ds = \\ &= \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \left[\varphi_{i_x}'(x + 0) + \int_{x+0}^s \varphi_{i_{x\mu}}''(t) d\mu(t) \right] ds = \\ &= \varphi_{i_x}'(x + 0)\varepsilon + \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi_{i_{x\mu}}''(t)(x + \varepsilon - t) d\mu(t). \quad (3.3.11) \end{aligned}$$

К последнему интегралу мы применим теорему Фубини. Так как $(p\varphi_{i_{x\mu}}'')(x)$ непрерывна на всем $[0; \ell]$, то равенство (3.3.11) перепишем в виде

$$\Delta_\varepsilon \varphi_i = \varphi_{i_x}'(x + 0)\varepsilon + (p\varphi_{i_{x\mu}}'')(\tau_i) \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (x + \varepsilon - t) dP(t)$$

при некотором $\tau_i \in [x + 0; x + \varepsilon]$. Аналогично

$$\Delta_\varepsilon u = u_x'(x + 0)\varepsilon + (pu_{x\mu}'')(\bar{u}) \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (x + \varepsilon - t) dP(t)$$

при некотором $\bar{u} \in [x + 0; x + \varepsilon]$. Тогда (3.3.10) принимает вид

$$\begin{vmatrix} (p\varphi_{1_{x\mu}}'')(\tau_1) & (p\varphi_{2_{x\mu}}'')(\tau_2) & (pu_{x\mu}'')(\bar{u}) \\ \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) & u(x + 0) \\ \varphi_{1_x}'(x + 0) & \varphi_{2_x}'(x + 0) & u_x'(x + 0) \end{vmatrix} \cdot \Delta_\varepsilon \varphi_1 \cdot \frac{1}{\Delta_\varepsilon \mu} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (x + \varepsilon - t) dP(t). \quad (3.3.12)$$

Так как $(p\varphi_{i_{x\mu}}'')(\tau_i) \rightarrow (p\varphi_{i_{x\mu}}'')(x + 0)$ ($i = 1, 2$) и $(pu_{x\mu}'')(\bar{u}) \rightarrow (pu_{x\mu}'')(x + 0)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, то первый сомножитель в (3.3.12) ограничен при $\varepsilon \rightarrow +0$; второй — в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ дает 0; третий — ограничен при $\varepsilon \rightarrow +0$, так как для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_\varepsilon \mu} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (x + \varepsilon - t) dP(t) &= \frac{1}{\Delta_\varepsilon \mu} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (x + \varepsilon - t) dP(t) \leq \\ &\leq \sup_{x+0 < t < x+\varepsilon} (x + \varepsilon - t) \frac{P(x + \varepsilon) - P(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} = \varepsilon \frac{P(x + \varepsilon) - P(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)}; \end{aligned}$$

отношение $\frac{P(x + \varepsilon) - P(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)}$ стремится к $\frac{1}{p(x + 0)}$, так как $P(x)$ является μ -абсолютно непрерывной (по определению) и, по условию, $\inf_{[0; \ell] \setminus S(\mu)} p(x) > 0$, и, поэтому ограничено.

Таким образом, первое и третье слагаемые в (3.3.8) в пределе дают нуль.

Второе и четвертое слагаемые в (3.3.8) можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) & u(x + 0) \\ \varphi_{1'_x}(x + 0) & \varphi_{2'_x}(x + 0) & u'_x(x + 0) \\ \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_{1'_x}}{\Delta_\varepsilon \mu} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_{2'_x}}{\Delta_\varepsilon \mu} & \frac{\Delta_\varepsilon u'_x}{\Delta_\varepsilon \mu} \end{vmatrix} \varphi_1(x + 0).$$

Но $\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_{i'_x}}{\Delta_\varepsilon \mu} \rightarrow \varphi_{i_{x\mu}''}(x + 0)$ и $\frac{\Delta_\varepsilon u'_x}{\Delta_\varepsilon \mu} \rightarrow u''_{x\mu}(x + 0)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{(\psi_1(\psi_0 u)'_x)(x + \varepsilon) - (\psi_1(\psi_0 u)'_x)(x + 0)}{\Delta_\varepsilon \mu} &= \\ &= \varphi_1(x + 0) \begin{vmatrix} \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) & u(x + 0) \\ \varphi_{1'_x}(x + 0) & \varphi_{2'_x}(x + 0) & u'_x(x + 0) \\ \varphi_{1_{x\mu}''}(x + 0) & \varphi_{2_{x\mu}''}(x + 0) & u''_{x\mu}(x + 0) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается равенство для левых производных.

Найдем скачок функции $(\psi_1(\psi_0 u)'_x)(x)$ в точке x , принадлежащей множеству $S(\mu)$:

$$\begin{aligned} \Delta(\psi_1(\psi_0 u)'_x)(x) &= \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x + 0) & u(x + 0) \\ \varphi_{1'_x}(x + 0) & u'_x(x + 0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) \\ \varphi_{1'_x}(x + 0) & \varphi_{2'_x}(x + 0) \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x - 0) & u(x - 0) \\ \varphi_{1'_x}(x - 0) & u'_x(x - 0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x - 0) & \varphi_2(x - 0) \\ \varphi_{1'_x}(x - 0) & \varphi_{2'_x}(x - 0) \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{1}{W_2(x + 0)W_2(x - 0)} \left[\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & u(x) \\ \varphi_{1'_x}(x + 0) & u'_x(x + 0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_{1'_x}(x - 0) & \varphi_{2'_x}(x - 0) \end{vmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & u(x) \\ \varphi_{1'_x}(x - 0) & u'_x(x - 0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_{1'_x}(x + 0) & \varphi_{2'_x}(x + 0) \end{vmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Как и ранее, разность в квадратных скобках можно представить в виде:

$$\Delta (\psi_1 (\psi_0 u)'_x) (x) = \frac{\varphi_1(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & u(x) \\ \varphi_1'(x-0) & \varphi_2'(x-0) & u'_x(x-0) \\ \varphi_1'(x+0) & \varphi_2'(x+0) & u'_x(x+0) \end{vmatrix}}{W_2(x-0)W_2(x+0)}.$$

Вычитая из третьей строки вторую, приходим к равенству

$$(\psi_1 (\psi_0 u)'_x)'_\mu (x) = \frac{\varphi_1(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & u(x) \\ \varphi_1'(x-0) & \varphi_2'(x-0) & u'_x(x-0) \\ \varphi_1''_{x\mu}(x) & \varphi_2''_{x\mu}(x+0) & u''_{x\mu}(x+0) \end{vmatrix}}{W_2(x-0)W_2(x+0)}.$$

Окончательно получаем

$$(\psi_1 (\psi_0 u)'_x)'_\mu (x) = \frac{\varphi_1(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & u(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & u'_x(x) \\ \varphi_1''_{x\mu}(x) & \varphi_2''_{x\mu}(x) & u''_{x\mu}(x) \end{vmatrix}}{W_2(x-0)W_2(x+0)}. \quad (3.3.13)$$

при $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$. Если x совпадает с одной из точек, принадлежащей множеству $S(\mu)$, то во второй строке определителя третьего порядка в равенстве (3.3.13) в качестве x можно брать либо точку $x-0$, либо $x+0$, так как $\Delta \varphi_{i_x}'(x) = \varphi_{i_x}'(x+0) - \varphi_{i_x}'(x-0)$ и $\Delta u'_x = u'_x(x+0) - u'_x(x-0)$.

Положим $\psi_2(x) = \frac{W_2(x-0)W_2(x+0)}{\varphi_1(x)W_3(x)}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\psi_2 (\psi_1 (\psi_0 u)'_x)'_\mu \right) (x) = \\ & = \left[\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ p\varphi_1''_{x\mu}(x) & p\varphi_2''_{x\mu}(x) & p\varphi_3''_{x\mu}(x) \end{vmatrix} \right]^{-1} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & u(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & u'_x(x) \\ p\varphi_1''_{x\mu}(x) & p\varphi_2''_{x\mu}(x) & pu''_{x\mu}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(здесь мы числитель и знаменатель умножили на $p(x)$, чтобы функции стоящие в третьей строке каждого определителя были непрерывны). Введем для удобства обозначение

$$U(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & u(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & u'_x(x) \\ p\varphi_1''_{x\mu}(x) & p\varphi_2''_{x\mu}(x) & pu''_{x\mu}(x) \end{vmatrix}.$$

Для положительных ε имеем

$$\frac{\Delta_\varepsilon \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)}{\varepsilon} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x+\varepsilon) & \varphi_2(x+\varepsilon) & u(x+\varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) & u'_x(x+\varepsilon) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{2x\mu}''(x+\varepsilon) & pu''_{x\mu}(x+\varepsilon) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x+\varepsilon) & \varphi_2(x+\varepsilon) & \varphi_3(x+\varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{3x}'(x+\varepsilon) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{2x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{3x\mu}''(x+\varepsilon) \end{vmatrix}} \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) & u'_x(x+0) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+0) & p\varphi_{2x\mu}''(x+0) & pu''_{x\mu}(x+0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) & \varphi_{3x}'(x+0) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+0) & p\varphi_{2x\mu}''(x+0) & p\varphi_{3x\mu}''(x+0) \end{vmatrix}} \frac{1}{\varepsilon}.$$

После приведения к общему знаменателю и очевидных преобразований, приходим к

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\varepsilon \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)}{\varepsilon} &= \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} \varphi_1(x+\varepsilon) & \varphi_2(x+\varepsilon) & \varphi_3(x+\varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{3x}'(x+\varepsilon) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{2x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{3x\mu}''(x+\varepsilon) \end{vmatrix} \times \right. \\ &\times \left. \begin{vmatrix} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) & \varphi_{3x}'(x+0) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+0) & p\varphi_{2x\mu}''(x+0) & p\varphi_{3x\mu}''(x+0) \end{vmatrix}^{-1} \right\} \times \\ &\times \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon u}{\varepsilon} \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) & u'_x(x+\varepsilon) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{2x\mu}''(x+\varepsilon) & pu''_{x\mu}(x+\varepsilon) \end{vmatrix} (pW_3)(x+0) + \right. \\ &+ \left. \begin{vmatrix} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & u(x+\varepsilon) \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) & u'_x(x+\varepsilon) \\ \frac{\Delta_\varepsilon(p\varphi_{1x\mu}'')}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon(p\varphi_{2x\mu}'')}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon(pu''_{x\mu})}{\varepsilon} \end{vmatrix} (pW_3)(x+0) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -U(x+0) \left| \begin{array}{ccc} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_3}{\varepsilon} \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{3x}'(x+\varepsilon) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{2x\mu}''(x+\varepsilon) & p\varphi_{3x\mu}''(x+\varepsilon) \end{array} \right| - \\
& -U(x+0) \left| \begin{array}{ccc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{2x}'(x+\varepsilon) & \varphi_{3x}'(x+\varepsilon) \\ \frac{\Delta_\varepsilon(p\varphi_{1x\mu}'')}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon(p\varphi_{2x\mu}'')}{\varepsilon} & \frac{\Delta_\varepsilon(p\varphi_{3x\mu}'')}{\varepsilon} \end{array} \right| + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \left(\left| \begin{array}{ccc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & u(x+0) \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon \varphi_{2x}' & \Delta_\varepsilon u_x' \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+0) & p\varphi_{2x\mu}''(x+0) & pu_{x\mu}''(x+0) \end{array} \right| (pW_3)(x+0) - \right. \\
& \left. -U(x+0) \left| \begin{array}{ccc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) \\ \Delta_\varepsilon \varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon \varphi_{2x}' & \Delta_\varepsilon \varphi_{3x}' \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+0) & p\varphi_{2x\mu}''(x+0) & p\varphi_{3x\mu}''(x+0) \end{array} \right| \right) \quad (3.3.14)
\end{aligned}$$

Так как функции $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) и $u(x)$ являются решениями уравнений $Lu = 0$ и $Lu = F'_\sigma$ соответственно, то первое и третье слагаемые в (3.3.14) стремятся к нулю. Второе и четвертое слагаемые в пределе дают

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{ccc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) & u_x'(x+0) \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x(x+0) & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x(x+0) & (pu_{x\mu}'')'_x(x+0) \end{array} \right| (pW_3)(x+0) - \\
& - \left| \begin{array}{ccc} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) \\ \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) & \varphi_{3x}'(x+0) \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x(x+0) & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x(x+0) & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x(x+0) \end{array} \right| U(x+0). \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

Вспоминая определения $(pW_3)(x+0)$, $U(x+0)$ и формулу из [106], разность (3.3.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & u_x' \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x & (pu_{x\mu}'')'_x \end{array} \right| \quad (3.3.16)
\end{aligned}$$

(здесь значение каждой функции и производных берется в точке $x+0$). Поменяв местами вторую и третью строки в каждом определителе пятого и шестого слагаемых в правой части (3.3.14) их сумму можно представить сле-

дующим образом

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & u_x' \\ \Delta_\varepsilon\varphi_{1x}' & \Delta_\varepsilon\varphi_{2x}' & \Delta_\varepsilon\varphi_{3x}' & \Delta_\varepsilon u_x' \end{vmatrix} \quad (3.3.17)$$

(значение всех функций и производных, кроме четвертой строки, берутся в точке $x + 0$). После применения теоремы о среднем к последнему интегралу в равенстве

$$\Delta_\varepsilon\varphi_{i_x}' = \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (p\varphi_{ix\mu}'')(s) dP(s),$$

что возможно в силу непрерывности $(p\varphi_{ix\mu}'')(x)$, будем иметь $\Delta_\varepsilon\varphi_{i_x}' = (p\varphi_{ix\mu}''(\tau_i))(P(x + \varepsilon) - P(x + 0))$ при некотором $\tau_i \in [x + 0, x + \varepsilon]$ ($i = 1, 2, 3$). Аналогично $\Delta_\varepsilon u_x' = (pu_{x\mu}''(\bar{\tau}))(P(x + \varepsilon) - P(x + 0))$ при некотором $\bar{\tau} \in [x + 0; x + \varepsilon]$. Тогда, произведение (3.3.17), после несложных преобразований, может быть представлено в виде

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & u_x' \\ \frac{p\varphi_{1x\mu}''(\tau_1) - p\varphi_{1x\mu}''}{\varepsilon} & \frac{p\varphi_{2x\mu}''(\tau_2) - p\varphi_{2x\mu}''}{\varepsilon} & \frac{p\varphi_{3x\mu}''(\tau_3) - p\varphi_{3x\mu}''}{\varepsilon} & \frac{pu_{x\mu}''(\bar{\tau}) - pu_{x\mu}''}{\varepsilon} \end{vmatrix} \times \\ \times \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' \end{vmatrix} \cdot (P(x + \varepsilon) - P(x + 0))$$

значение функций берутся в точке $x + 0$. Отметим, что выражения стоящие в последней строке определителя четвертого порядка ограничены и $P(x + \varepsilon) - P(x + 0)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Таким образом, из (3.3.14), с учетом (3.3.16), вытекает равенство для правых производных

$$\begin{aligned} & \left(\psi_2 (\psi_1 (\psi_0 u)_x')'_\mu \right)'_x = \\ & = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' \end{vmatrix}}{(pW_3)^2} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ \varphi_{1x}' & \varphi_{2x}' & \varphi_{3x}' & u_x' \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ (p\varphi_{1x\mu}'')'_x & (p\varphi_{2x\mu}'')'_x & (p\varphi_{3x\mu}'')'_x & (pu_{x\mu}'')'_x \end{vmatrix} \quad (3.3.18) \end{aligned}$$

Аналогичное равенство получается для левых производных.

Пусть

$$\psi_3(x) = \frac{(pW_3)^2(x)}{W_2(x)} \quad (x \in \overline{[0; \ell]_\sigma}). \quad (3.3.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_\varepsilon \left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right)}{\Delta_\varepsilon \sigma} = \\ & = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1(x + \varepsilon) & \varphi_2(x + \varepsilon) & \varphi_3(x + \varepsilon) & u(x + \varepsilon) \\ \varphi'_{1x}(x + \varepsilon) & \varphi'_{2x}(x + \varepsilon) & \varphi'_{3x}(x + \varepsilon) & u'_x(x + \varepsilon) \\ p\varphi''_{1x\mu}(x + \varepsilon) & p\varphi''_{2x\mu}(x + \varepsilon) & p\varphi''_{3x\mu}(x + \varepsilon) & pu''_{x\mu}(x + \varepsilon) \\ (p\varphi''_{1x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{2x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{3x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (pu''_{x\mu})'_x(x + \varepsilon) \end{array} \right\} - \\ & - \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ \varphi'_{1x} & \varphi'_{2x} & \varphi'_{3x} & u'_x \\ p\varphi''_{1x\mu} & p\varphi''_{2x\mu} & p\varphi''_{3x\mu} & pu''_{x\mu} \\ (p\varphi''_{1x\mu})'_x & (p\varphi''_{2x\mu})'_x & (p\varphi''_{3x\mu})'_x & (pu''_{x\mu})'_x \end{array} \right\} (x + 0) \left\{ \frac{1}{\Delta_\varepsilon \sigma} = \right. \\ & = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_3}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon u}{\Delta_\varepsilon \sigma} \\ \varphi'_{1x}(x + \varepsilon) & \varphi'_{2x}(x + \varepsilon) & \varphi'_{3x}(x + \varepsilon) & u'_x(x + \varepsilon) \\ p\varphi''_{1x\mu}(x + \varepsilon) & p\varphi''_{2x\mu}(x + \varepsilon) & p\varphi''_{3x\mu}(x + \varepsilon) & pu''_{x\mu}(x + \varepsilon) \\ (p\varphi''_{1x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{2x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{3x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (pu''_{x\mu})'_x(x + \varepsilon) \end{array} \right\} + \\ & + \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) & \varphi_3(x + 0) & u(x + 0) \\ \frac{\Delta_\varepsilon \varphi'_{1x}}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi'_{2x}}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon \varphi'_{3x}}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon u'_x}{\Delta_\varepsilon \sigma} \\ p\varphi''_{1x\mu}(x + \varepsilon) & p\varphi''_{2x\mu}(x + \varepsilon) & p\varphi''_{3x\mu}(x + \varepsilon) & pu''_{x\mu}(x + \varepsilon) \\ (p\varphi''_{1x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{2x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{3x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (pu''_{x\mu})'_x(x + \varepsilon) \end{array} \right\} + \\ & + \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1(x + 0) & \varphi_2(x + 0) & \varphi_3(x + 0) & u(x + 0) \\ \varphi'_{1x}(x + 0) & \varphi'_{2x}(x + 0) & \varphi'_{3x}(x + 0) & u'_x(x + 0) \\ \frac{\Delta_\varepsilon (p\varphi''_{1x\mu})}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon (p\varphi''_{2x\mu})}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon (p\varphi''_{3x\mu})}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon (pu''_{x\mu})}{\Delta_\varepsilon \sigma} \\ (p\varphi''_{1x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{2x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (p\varphi''_{3x\mu})'_x(x + \varepsilon) & (pu''_{x\mu})'_x(x + \varepsilon) \end{array} \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_1'(x+0) & \varphi_2'(x+0) & \varphi_3'(x+0) & u'(x+0) \\ p\varphi_{1x\mu}''(x+0) & p\varphi_{2x\mu}''(x+0) & p\varphi_{3x\mu}''(x+0) & pu_{x\mu}''(x+0) \\ \frac{\Delta_\varepsilon (p\varphi_{1x\mu}'')'_x}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon (p\varphi_{2x\mu}'')'_x}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon (p\varphi_{3x\mu}'')'_x}{\Delta_\varepsilon \sigma} & \frac{\Delta_\varepsilon (pu_{x\mu}'')'_x}{\Delta_\varepsilon \sigma} \end{vmatrix}. \quad (3.3.20)$$

Первое слагаемое в правой части (3.3.20) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, так как $\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_i}{\Delta_\varepsilon \sigma} = \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_i}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\Delta_\varepsilon \sigma}$, и первый сомножитель в пределе дает $\varphi_{i_x}'(x+0)$, второй сомножитель — ограничен при всех $\varepsilon > 0$. Аналогично, отношение $\frac{\Delta_\varepsilon u}{\Delta_\varepsilon \sigma}$ можно представить в виде произведения дроби $\frac{\Delta_\varepsilon u}{\varepsilon}$, которая сходится к $u'(x+0)$, и отношения $\frac{\varepsilon}{\Delta_\varepsilon \sigma}$, которое ограничено. Следовательно, первое слагаемое можно представить в виде произведения определителя, который в пределе дает нуль (так как у него первая и вторая строки равны), и ограниченного отношения $\frac{\varepsilon}{\Delta_\varepsilon \sigma}$ (так как по условию x σ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$), что говорит о равенстве нулю предела первого слагаемого в (3.3.20).

Аналогично второй и третий слагаемые стремятся к нулю, так как $\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_{i_x}'}{\Delta_\varepsilon \sigma} = \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_{i_x}'}{\Delta_\varepsilon \mu} \cdot \frac{\Delta_\varepsilon \mu}{\Delta_\varepsilon \sigma}$ и $\frac{\Delta_\varepsilon u'_x}{\Delta_\varepsilon \sigma} = \frac{\Delta_\varepsilon u'_x}{\Delta_\varepsilon \mu} \cdot \frac{\Delta_\varepsilon \mu}{\Delta_\varepsilon \sigma}$.

Если x точка в которой существуют производные $(p\varphi_{ix\mu}'')''_{x\sigma}$, $\varphi_{ix\sigma}''$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $(pu_{x\mu}'')''_{x\sigma}$, $u''_{x\sigma}$, r'_σ , Q'_σ и F'_σ (напомним, что множество таких точек имеет полную σ -меру), то последнее слагаемое в (3.3.20) в пределе дает

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ \varphi_1' & \varphi_{2_x}' & \varphi_{3_x}' & u'_x \\ p\varphi_{1x\mu}'' & p\varphi_{2x\mu}'' & p\varphi_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ (p\varphi_{1x\mu}'')''_{x\sigma} & (p\varphi_{2x\mu}'')''_{x\sigma} & (p\varphi_{3x\mu}'')''_{x\sigma} & (pu_{x\mu}'')''_{x\sigma} \end{vmatrix}, \quad (3.3.21)$$

значение функций и производных берется в точке $x+0$. В силу равенств

$$\begin{aligned} (p\varphi_{ix\mu}'')''_{x\sigma}(x+0) - (r\varphi_{i_x}')'_\sigma(x+0) + \varphi_i Q'_\sigma(x+0) &= 0, \\ (pu_{x\mu}'')''_{x\sigma}(x+0) - (ru'_x)'_\sigma(x+0) + u Q'_\sigma(x+0) &= F'_\sigma(x+0), \end{aligned}$$

и $(ru'_x)'_\sigma(x+0) = r'_\sigma(x+0)u'(x+0) + r(x+0)u''_{x\sigma}(x+0)$, из (3.3.21) следует

$$\left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right)'_\sigma (x+0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & u(x+0) \\ \varphi_{1'_x}(x+0) & \varphi_{2'_x}(x+0) & \varphi_{3'_x}(x+0) & u'_x(x+0) \\ p\varphi_{1''_{x\mu}}(x+0) & p\varphi_{2''_{x\mu}}(x+0) & p\varphi_{3''_{x\mu}}(x+0) & pu''_{x\mu}(x+0) \\ 0 & 0 & 0 & F'_\sigma(x+0) \end{vmatrix} = \\
&= F'_\sigma(x+0)(pW_3)(x+0). \quad (3.3.22)
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается

$$\left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right)'_\sigma (x-0) = F'_\sigma(x-0)pW_3(x-0). \quad (3.3.23)$$

Найдем скачок функции $\left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right) (x)$ в точке x , принадлежащей $S(\mu)$. Из (3.3.18), с учетом обозначения (3.3.19), имеем

$$\begin{aligned}
&\Delta \left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right) (x) = \\
&= \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ \varphi_{1'_x} & \varphi_{2'_x} & \varphi_{3'_x} & u'_x \\ p\varphi_{1''_{x\mu}} & p\varphi_{2''_{x\mu}} & p\varphi_{3''_{x\mu}} & pu''_{x\mu} \\ (p\varphi_{1''_{x\mu}})'_x & (p\varphi_{2''_{x\mu}})'_x & (p\varphi_{3''_{x\mu}})'_x & (pu''_{x\mu})'_x \end{vmatrix} (x+0) - \\
&- \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & u \\ \varphi_{1'_x} & \varphi_{2'_x} & \varphi_{3'_x} & u'_x \\ p\varphi_{1''_{x\mu}} & p\varphi_{2''_{x\mu}} & p\varphi_{3''_{x\mu}} & pu''_{x\mu} \\ (p\varphi_{1''_{x\mu}})'_x & (p\varphi_{2''_{x\mu}})'_x & (p\varphi_{3''_{x\mu}})'_x & (pu''_{x\mu})'_x \end{vmatrix} (x-0) = \\
&= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & u(x) \\ \varphi_{1'_x}(x+0) & \varphi_{2'_x}(x+0) & \varphi_{3'_x}(x+0) & u'_x(x+0) \\ p\varphi_{1''_{x\mu}}(x) & p\varphi_{2''_{x\mu}}(x) & p\varphi_{3''_{x\mu}}(x) & pu''_{x\mu}(x) \\ \Delta (p\varphi_{1''_{x\mu}})'_x(x) & \Delta (p\varphi_{2''_{x\mu}})'_x(x) & \Delta (p\varphi_{3''_{x\mu}})'_x(x) & \Delta (pu''_{x\mu})'_x(x) \end{vmatrix}, \quad (3.3.24)
\end{aligned}$$

так как $\varphi_i(x)$, $p\varphi_{i''_{x\mu}}(x)$ ($i = 1, 2, 3$) и $u(x)$ непрерывны непрерывны, и, в силу равенств $p\varphi_{i''_{x\mu}}(x) = p \frac{\Delta \varphi_{i'_x}(x)}{\Delta \mu(x)}$ ($i = 1, 2, 3$) и $pu''_{x\mu}(x) = \frac{p \Delta u'_x(x)}{\Delta \mu(x)}$, во второй строке каждого определителя можно брать одновременно либо $x+0$, либо $x-0$. Теперь, равенство (3.3.24) нам дает

$$\left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right)'_\sigma (x) = F'_\sigma(x)(pW_3)(x). \quad (3.3.25)$$

Если $x \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$, то производные до второго порядка включительно функций $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) и $u(x)$ в этих точках непрерывны, поэтому можно утверждать, что $\left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u\right)'_x\right)'_\mu\right)'_x\right)'_\sigma(x)$ равно последнему определителю в (3.3.24) (и, следовательно, $F'_\sigma(x) \cdot (pW_3)(x)$).

Положив теперь $\psi_4(x) = \frac{1}{(pW_3)(x)}$, из равенств (3.3.22), (3.3.23) и (3.3.25) будем иметь

$$\psi_4 \left(\psi_3 \left(\psi_2 \left(\psi_1 \left(\psi_0 u \right)'_x \right)'_\mu \right)'_x \right)'_\sigma(x) = F'_\sigma(x)$$

для почти всех x (относительно меры σ) из $\overline{[0; \ell]}_\sigma$.

Остается заметить, что функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ можно выбрать так, чтобы $W_i(x) \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$) для всех x (принадлежащего $[0, \ell]$, если $i = 1, 3$; $\overline{[0; \ell]}_\mu$ — если $i = 2$).

Пусть $\varphi_1^{(\varepsilon)}(x)$ — решение однородного уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = \varepsilon$, $u'_x(0) = 0$, $pu''_{x\mu}(0) = 0$, $(pu''_{x\mu})'_x(0) = 1$ при некотором $\varepsilon > 0$. Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\varphi_1^{(\varepsilon)}(x)$ сходится к $\varphi(x)$ по норме $\|\cdot\|_\sigma$ (в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий), то при достаточно малом ε_1 при всех $\varphi_1^{(\varepsilon_1)}(x) > 0$ при всех $x \in [0, \ell]$.

Пусть $\varphi_2^{(\varepsilon)}(x)$ — решение $Lu = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $u'_x(0) = \varepsilon$, $(pu''_{x\mu})(0) = 1$, $(pu''_{x\mu})'_x(0) = 0$. Так как $\varphi_2^{(\varepsilon)}(x)$ сходится к $\varphi_2(x)$ по норме $\|\cdot\|_\sigma$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, то $W_2^{(\varepsilon)}(x) = W_2[\varphi_1^{(\varepsilon)}, \varphi_2^{(\varepsilon)}](x)$ при достаточно малом ε_2 сохраняет на $[0; \ell]$ знак, причем, как нетрудно видеть, знак «+».

Пусть $\varphi_3^{(1)}(x)$ — решение однородного уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $u'_x(0) = -1$, $(pu''_{x\mu})(0) = 0$, $(pu''_{x\mu})'_x(0) = 0$. Тогда $W_3^{(\varepsilon)}(x) = W[\varphi_1^{(\varepsilon)}, \varphi_2^{(\varepsilon)}, \varphi_3^{(1)}](x) > 0$ для всех $x \in [0, \ell]$ при $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

И, наконец, $\varphi_4^{(1)}(x)$ — решение однородного уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = -1$, $u'_x(0) = 0$, $(pu''_{x\mu})(0) = 0$, $(pu''_{x\mu})'_x(0) = 0$. Как нетрудно видеть, $W_4^{(\varepsilon)}(x) = W[\varphi_1^{(\varepsilon)}, \varphi_2^{(\varepsilon)}, \varphi_3^{(1)}, \varphi_4^{(1)}](x)$ положительна на $[0; \ell]$.

Зафиксируем ε_0 так, чтобы $0 < \varepsilon_0 < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Равенство (3.3.5) справедливо при $\psi_0(x) = \frac{1}{\varphi_1^{(\varepsilon_0)}(x)}$, $\psi_1(x) = \frac{(\varphi^{(\varepsilon_0)}(x))^2}{W_2^{(\varepsilon_0)}(x)}$, $\psi_2(x) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{W_2^{(\varepsilon_0)}(x-0)W_2^{(\varepsilon_0)}(x+0)}{\varphi^{(\varepsilon_0)}(x)W_3^{(\varepsilon_0)}(x)}, \psi_3(x) = \frac{(pW_3^{(\varepsilon_0)}(x))^2}{W_2^{(\varepsilon_0)}(x)} \text{ и } \psi_4(x) = \frac{1}{pW_3^{(\varepsilon_0)}(x)}. \\
&2) \Rightarrow 3). \text{ Введём обозначения } \mathcal{D}_0u = \psi_0u, \mathcal{D}_1u = \psi_1(\mathcal{D}_0u)'_x, \mathcal{D}_2u = \\
&= \psi_2(\mathcal{D}_1u)'_\mu, \mathcal{D}_3u = \psi_3(\mathcal{D}_2u)'_x \text{ и } \mathcal{D}_4u = \psi_4(\mathcal{D}_3u)'_\sigma. \text{ Функции } u_1(x) = \\
&= \frac{1}{\psi_0(x)}, u_2(x) = \frac{1}{\psi_0(x)} \int_0^x \frac{ds}{\psi_1(s)}, u_3(x) = \frac{1}{\psi_0(x)} \int_0^x \frac{ds}{\psi_1(s)} \int_0^s \frac{d\mu(t)}{\psi_2(t)} \text{ и } u_4(x) = \\
&= \frac{1}{\psi_0(x)} \int_0^x \frac{ds}{\psi_1(s)} \int_0^s \frac{d\mu(t)}{\psi_2(t)} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi_3(\tau)} \text{ образуют фундаментальную систему ре-} \\
&\text{шений однородного уравнения } Lu = 0, \text{ так как } \mathcal{D}_k u_{k+1} = 1 \text{ (} k = 0, 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Для любой функции $u \in E$ имеем $\mathcal{D}_0u = \psi_0u = \frac{u}{u_1}$. Так как $u_1(x) = \frac{1}{\psi_0(x)} > 0$ и принадлежит E , то отношение $\frac{u(x)}{u_1(x)}$ — абсолютно непрерывно на $[0; \ell]$. Поэтому $\mathcal{D}_1u = \psi_1(\mathcal{D}_0u)'_x = \psi_1 \frac{W[u_1, u]}{u_1^2}$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$. Последнее равенство справедливо при всех $u \in E$ и для u_2 в частности. Поэтому $\mathcal{D}_1u_2 = \frac{\psi_1}{u_1^2} W[u_1, u_2]$, отсюда $W[u_1, u_2] = \frac{u_1^2}{\psi_1} > 0$. Таким образом, $\mathcal{D}_1u = \frac{W[u_1, u]}{W[u_1, u_2]}$. Аналогично показывается равенство $\frac{d}{d\mu}(\mathcal{D}_1u)(x) = \frac{u_1(x)W[u_1, u_2, u](x)}{p(x)W[u_1, u_2](x-0)W[u_1, u_2](x+0)}$, т. е. $\mathcal{D}_2u(x) = \frac{\psi_2(x) \cdot u_1(x)}{p(x)W[u_1, u_2](x-0)W[u_1, u_2](x+0)} W[u_1, u_2, u](x)$. Из последнего равенства (при $u = u_3$) вытекает $W[u_1, u_2, u_3](x) = \frac{p(x)W[u_1, u_2](x-0)W[u_1, u_2](x+0)}{\psi_2(x)u_1(x)} > 0$ для всех $x \in [0; \ell]$; более того, $\mathcal{D}_2u = \frac{W[u_1, u_2, u]}{W[u_1, u_2, u_3]} = \frac{pW[u_1, u_2, u]}{pW[u_1, u_2, u_3]}$.

Функция

$$pW[u_1, u_2, u] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u \\ u_1'_x & u_2'_x & u'_x \\ pu''_{1x\mu} & pu''_{2x\mu} & pu''_{x\mu} \end{vmatrix}$$

абсолютна непрерывна на $[0; \ell]$. В самом деле, так как для всякой $v(x)$, таковой, что $\int_0^x v(s) ds$ принадлежит E , справедливо равенство $v(\beta) - v(\alpha) =$

$= pv'_\mu(\tau) \int_\alpha^\beta \frac{d\mu(t)}{p(t)}$ при некотором τ , лежащем между α и β , то утверждение вытекает из представления разности $pW[u_1, u_2, u](\beta) - pW[u_1, u_2, u](\alpha)$ в виде

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} u_1(\beta) - u_1(\alpha) & u_2(\beta) - u_2(\alpha) & u(\beta) - u(\alpha) \\ u_{1x}'(\beta) & u_{2x}'(\beta) & u_x'(\beta) \\ pu_{1x\mu}''(\beta) & pu_{2x\mu}''(\beta) & pu_{x\mu}''(\beta) \end{array} \right| + \\ & + \left| \begin{array}{ccc} u_1(\alpha) & u_2(\alpha) & u(\alpha) \\ u_{1x}'(\beta) & u_{2x}'(\beta) & u_x'(\beta) \\ pu_{1x\mu}''(\beta) - pu_{1x\mu}''(\alpha) & pu_{2x\mu}''(\beta) - pu_{2x\mu}''(\alpha) & pu_{x\mu}''(\beta) - pu_{x\mu}''(\alpha) \end{array} \right| + \\ & + \left| \begin{array}{ccc} u_1(\alpha) & u_2(\alpha) & u(\alpha) \\ pu_{1x\mu}''(\tau_1) & pu_{2x\mu}''(\tau_2) & pu_{x\mu}''(\tau) \\ pu_{1x\mu}''(\alpha) & pu_{2x\mu}''(\alpha) & pu_{x\mu}''(\alpha) \end{array} \right| \int_\alpha^\beta \frac{d\mu(t)}{p(t)} \end{aligned}$$

и абсолютной непрерывности (на соответствующих множествах) $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u(x)$, $pu_{1x\mu}''(x)$, $pu_{2x\mu}''(x)$, $pu_{x\mu}''(x)$.

Аналогично доказывается абсолютная непрерывность функции $pW[u_1, u_2, u_3](x)$.

Из абсолютной непрерывности $pW[u_1, u_2, u]$ и $pW[u_1, u_2, u_3]$ вытекает равенство (см. [106])

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 u &= \psi_3 \frac{d}{dx} \mathcal{D}_2 u = \\ &= \psi_3 \frac{W[u_1, u_2]}{(pW[u_1, u_2, u_3])^2} \left| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u \\ u_{1x}' & u_{2x}' & u_{3x}' & u_x' \\ pu_{1x\mu}'' & pu_{2x\mu}'' & pu_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ (pu_{1x\mu}'')'_x & (pu_{2x\mu}'')'_x & (pu_{3x\mu}'')'_x & (pu_{x\mu}'')'_x \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u \\ u_{1x}' & u_{2x}' & u_{3x}' & u_x' \\ pu_{1x\mu}'' & pu_{2x\mu}'' & pu_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ (pu_{1x\mu}'')'_x & (pu_{2x\mu}'')'_x & (pu_{3x\mu}'')'_x & (pu_{x\mu}'')'_x \end{array} \right| = \frac{(pW[u_1, u_2, u_3])^2}{\psi_3 W[u_1, u_2]} > 0.$$

Таким образом, $\{u_i(x)\}_{i=1}^{i=4}$ — фундаментальная система решений одного уравнения $Lu = 0$, для которой справедливы неравенства (3.3.6) и (3.3.7).

3) \Rightarrow 4). Так как $u_1(x) > 0$ для всех $x \in [0; \ell]$, то система состоящая из одной функции $u_1(x)$ является T_0 -системой.

Покажем, что $\{u_1(x), u_2(x)\}$ являются T_1 -системой. Предположим противное: найдется линейная комбинация $u(x) = \alpha_1(x)u_1(x) + \alpha_2(x)u_2(x)$ такая, что $u(x)$ имеет не менее двух нулей с учетом кратностей. Функция $\frac{u(x)}{u_1(x)} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{u_2(x)}{u_1(x)}$ обладает тем же свойством. Из обобщенной теоремы Ролля вытекает, что у функции $\left(\frac{u(x)}{u_1(x)}\right)' = \alpha_2 \left(\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\right)' = \alpha_2 \frac{W[u_1, u_2](x)}{u_1^2(x)}$ не менее одного нулевого места. Но по условию $W[u_1, u_2](x)$ и $u_1(x)$ положительны на $[0; \ell]_\mu$, что противоречит предположению. Таким образом, $\{u_1(x), u_2(x)\}$ — T_1 -система.

Покажем, что $\{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}$ — T_2 -система. Если это не так, то функции $u(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \alpha_3 u_3(x)$ и $\frac{u_2(x)}{u_1(x)} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 u_2(x)}{u_1(x)} + \frac{\alpha_3 u_3(x)}{u_1(x)}$ имеют не менее трех нулей с учетом кратности каждого нуля.

Из обобщенной теоремы Ролля вытекает, что $\left(\frac{u(x)}{u_1(x)}\right)' = \alpha_2 \frac{W[u_1, u_2](x)}{u_1^2(x)} + \alpha_3 \frac{W[u_1, u_3](x)}{u_1^2(x)}$ имеет не менее двух нулей. Этим же свойством обладает и функция $v(x) = \alpha_2 + \frac{W[u_1, u_3](x)}{W[u_1, u_2](x)}$, так как $u_1(x) > 0$ и $W[u_1, u_2](x) > 0$. Из

леммы 3.3.1 следует, что у $v'_\mu(x) = \alpha_3 \frac{W[u_1, u_2, u_3](x)u(x)}{(W[u_1, u_2](x))^2}$ не менее одного нуля, что противоречит положительности $u_1(x)$ и $W[u_1, u_2, u_3](x)$.

Остается показать, что $\{u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)\}$ — T_3 -система. Если это не так, то у функций $\sum_{i=1}^{k=4} \alpha_i \frac{u_i(x)}{u_1(x)}$ и $\alpha_1 + \sum_{i=2}^{k=4} \alpha_i \frac{u_i(x)}{u_1(x)}$ количество нулей не менее четырех с учетом кратностей. Из обобщенной теоремы Ролля следует, что у функции $\sum_{i=2}^{k=4} \alpha_i \frac{W[u_1(x), u_i(x)]}{u_1^2(x)}$ количество нулей не менее трех. Этим же

свойством обладает и функция $v(x) = \alpha_2 + \alpha_3 \frac{W[u_1, u_3](x)}{W[u_1, u_2](x)} + \alpha_4 \frac{W[u_1, u_4](x)}{W[u_1, u_2](x)}$.

Тогда, $(v'_\mu)(x) = \alpha_3 \frac{u_1(x)W[u_1, u_2, u_3](x)}{(W[u_1, u_2](x))^2} + \alpha_4 \frac{u_1(x)W[u_1, u_2, u_4](x)}{(W[u_1, u_2](x))^2}$, на основании леммы 3.3.1, имеет не менее двух нулей. Так как $u_1(x) > 0$, $W[u_1, u_2](x) >$

> 0 и $W[u_1, u_2, u_3](x) > 0$, то у функции $\alpha_3 + \alpha_4 \frac{u_1(x)W[u_1, u_2, u_4](x)}{W[u_1, u_2](x)}$ также количество нулей менее двух. Тогда у производной

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_3 + \alpha_4 \frac{pW[u_1, u_2, u_4](x)}{pW[u_1, u_2, u_3](x)} \right)'_x = \\ & = \alpha_4 \frac{W[u_1, u_2](x)}{(pW[u_1, u_2, u_3](x))^2} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u \\ u_{1x}' & u_{2x}' & u_{3x}' & u_x' \\ pu_{1x\mu}'' & pu_{2x\mu}'' & pu_{3x\mu}'' & pu_{x\mu}'' \\ (pu_{1x\mu}'')'_x & (pu_{2x\mu}'')'_x & (pu_{3x\mu}'')'_x & (pu_{x\mu}'')'_x \end{vmatrix} (x), \end{aligned}$$

в силу обобщенной теоремы Ролля, количество нулей не менее одного, что противоречит положительности $W[u_1, u_2](x)$, $W[u_1, u_2, u_3](x)$ и $W[u_1, u_2, u_3, u_4](x)$. Обобщенная теорема Ролля здесь применима ввиду абсолютной непрерывности $W[u_1, u_2, u_3](x)$, $W[u_1, u_2, u_4](x)$, положительности $W[u_1, u_2, u_3](x)$ и принадлежности производной пространству $BV[0, \ell]$.

Импликация $4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)$ следуют из определений. Теорема доказана. \square

3.4 Простейшие свойства линейных математических моделей четвертого порядка

Здесь проводится анализ линейных моделей стержневых систем, полученных в предыдущих параграфах, а именно изучается вопрос о разрешимости математической модели

$$\begin{cases} (pu_{x\mu}''')_{x\sigma} - (ru_x')'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma \\ (pu_{x\mu}'')(0) - \gamma_1 u'(0) = 0, & \text{(а)} \\ (pu_{x\mu}'')'_x(0) - ru'(0) + \gamma_2 u(0) = 0, & \text{(б)} \\ (pu_{x\mu}'')(l) + \gamma_3 u'(l) = 0, & \text{(в)} \\ (pu_{x\mu}'')'_x(l) - ru'(l) - \gamma_4 u(l) = 0, & \text{(г)} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

при условии, что $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ -абсолютно непрерывными функциями на $[0; \ell]$, причем $Q(x)$ не убывает.

Условие (а) означает, что на левом конце присутствует пружина жесткостью γ_1 , которая реагирует на изменение крутящего момента, причем случай

$\gamma_1 = \infty$ соответствует ситуации, когда крутящий момент в точке $x = 0$ отсутствует, и тогда граничное условие (а) принимает вид $u'(0) = 0$. Если же $\gamma_1 = 0$, то пружина отсутствует, и условие превращает в $(pu''_{x\mu})(0) = 0$.

Граничное условие (б) означает, что на левом конце присутствует пружина, реагирующая на смещение $u(0)$, причем случай $\gamma_2 = \infty$ соответствует условию $u(0) = 0$ — различным способам закрепления левого конца, либо защемления: $u'(0) = 0$, либо шарнирного: $u''_{x\mu}(0) = 0$.

Аналогично обстоит дело и с правым концом $x = \ell$.

В дальнейшем под записью $\gamma_1 = \infty$ мы будем подразумевать граничное условие $u'_x(0) = 0$; аналогично $\gamma_2 = \infty - u(0) = 0$, $\gamma_3 = \infty - u'_x(\ell) = 0$, $\gamma_4 = \infty - u(\ell) = 0$.

Определение 3.4.1. *Дифференциальную модель (3.4.1) назовём невырожденной (или будем говорить обладает свойством невырожденности), если однородная модель (при $F(x) \equiv \text{const}$) имеет только тривиальное решение.*

Следующая теорема даёт достаточные условия невырожденности модели (3.4.1).

Теорема 3.4.1. *Пусть x , $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$, причём $p(x) > 0$, $\min_{x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $\int_0^\ell \frac{d\mu(x)}{p(x)} < \infty$, $r(x) \geq 0$ и $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0; \ell]}_S$; $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда математическая модель (3.4.1) обладает свойством невырожденности при выполнении одного из следующих условий:*

- 1) $\gamma_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (включая случаи $\gamma_i = \infty$);
- 2) $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$ и $\gamma_2 + \gamma_4 > 0$;
- 3) $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ или $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$, и $Q(\ell) - Q(0) > 0$;
- 4) $\gamma_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), найдется точка $x_1 \in \overline{[0; \ell]}_S$ такая, что $r(x)$ непрерывна в точке x_1 и $r(x_1) > 0$ и $Q(\ell) - Q(0) > 0$.
- 5) $\gamma_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $r(x) \equiv 0$ и найдутся точки x_1, x_2 , принадлежащие множеству $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, такие, что $\Delta Q(x_1) > 0$ и $\Delta Q(x_2) > 0$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$, удовлетворяющее граничным условиям (3.4.1a)–(3.4.1г). После подстановки в однородное уравнение решения $u(x)$, умножения полученного тождества на $u(x)$, и интегрирования по $[0; \ell]_{\sigma}$ по мере σ , будем иметь

$$\int_0^{\ell} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} u d\sigma - \int_0^{\ell} (ru'_x)'_{\sigma} u d\sigma + \int_0^{\ell} u^2 dQ = 0.$$

Первый интеграл в последнем равенстве дважды проинтегрируем по частям, а второй — один раз, получим

$$(pu''_{x\mu})'_x u \Big|_0^{\ell} - pu''_{x\mu} u'_x \Big|_0^{\ell} - ru'_x u \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} pu''_{x\mu} d\mu + \int_0^{\ell} ru'_x{}^2 dx + \int_0^{\ell} u^2 dQ = 0,$$

или,

$$u(\ell) \left[(pu''_{x\mu})'_x(\ell) - ru'_x(\ell) \right] - u(0) \left[(pu''_{x\mu})'_x(0) - ru'_x(0) \right] - pu''_{x\mu}(\ell)u'_x(\ell) + \\ + pu''_{x\mu}(0)u'_x(0) + \int_0^{\ell} pu''_{x\mu}{}^2 d\mu + \int_0^{\ell} ru'_x{}^2 dx + \int_0^{\ell} u^2 dQ = 0. \quad (3.4.2)$$

Если все $\gamma_i = \infty$, то внеинтегральные слагаемые равны нулю, так как $u(0) = u'_x(0) = u'_x(\ell) = u(\ell) = 0$.

Если, например, $\gamma_1 > 0$ и $\neq \infty$, а остальные равны ∞ , т. е. $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \infty$, то сумма внеинтегральных слагаемых равна $\gamma_1 u'^2(0)$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи: хотя бы одно γ_i равно ∞ .

Пусть теперь все γ_i конечны. Тогда внеинтегральные слагаемые можно переписать в виде

$$\gamma_1 u'^2(0) + \gamma_2 u^2(0) + \gamma_3 u'^2(\ell) + \gamma_4 u^2(\ell), \quad (3.4.3)$$

и равенство (3.4.2) есть сумма неотрицательных слагаемых. Отсюда следуют тождества

$$pu''_{x\mu}{}^2(x) \stackrel{\text{п.в.}}{\equiv} 0 \text{ и } ru'_x{}^2(x) \stackrel{\text{п.в.}}{\equiv} 0 \quad (3.4.4)$$

и равенство

$$\int_0^{\ell} u^2 dQ = 0. \quad (3.4.5)$$

Из первого тождества (3.4.4) следует, что $u'_x(x) \equiv \text{const}$ всюду на $\overline{[0; \ell]}_S$. Тогда $u(x)$ есть линейная функция, т. е. $u(x) = C_1 + C_2x$. Если выполнено первое или второе условия, то либо $u(0) = u'_x(0) = u'_x(\ell) = u(\ell) = 0$, либо $u(0) \cdot u'_x(0) = 0$, $u(\ell) \cdot u'_x(\ell) = 0$ и $u(0) \cdot u(\ell) = 0$. В любом случае, как нетрудно видеть, приходим к выводу $u(x) \equiv 0$.

В третьем случае рассмотрим подслучай $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$; второй — аналогичен. Из (3.4.3) мы находим, что $u(0) \cdot u'_x(0) = 0$. Если $u'_x(0) = 0$, то $u(x) \equiv C_1$ и, подставляя в (3.4.5), получим $C_1^2(Q(\ell) - Q(0)) = 0$. По условию $Q(\ell) - Q(0) > 0$, поэтому, $C_1 = 0$, т. е. $u(x) \equiv 0$.

Предположим, что $u'_x(0) \neq 0$. Тогда $u(x) \equiv C_2x$, и равенство (3.4.5) принимает вид $C_2^2 \int_0^\ell x^2 dQ = 0$. Интеграл $\int_0^\ell x^2 dQ$ положителен в силу условия. Поэтому $C_2 = 0$ (и как следствие $C_1 = 0$). Таким образом, $u(x) \equiv 0$.

Пусть теперь выполнено четвертое условие. Из второго тождества (3.4.4) в силу непрерывности $r(x)$ в точке x_1 и условия $r(x_1) > 0$, выполняет равенство $u'_x(x_1) = 0$, следовательно, $u'_x(x) \equiv 0$. Тогда, $u(x) \equiv \text{const}$, и равенство (3.4.5) принимает вид

$$0 = u^2(0) \int_0^\ell dQ = u^2(0)(Q(\ell) - Q(0)).$$

По условию $Q(\ell) - Q(0) > 0$, отсюда вытекает равенство $u^2(0) = 0$, т. е. $u(x) \equiv 0$.

В пятом случае мы последовательно находим

$$\int_0^\ell u^2 dQ \geq u^2(x_1)\Delta Q(x_1) + u^2(x_2)\Delta Q(x_2).$$

Но слева, в силу равенства (3.4.5), стоит нуль, а справа — сумма неотрицательных чисел. Поэтому $u(x_1) = u(x_2) = 0$, а так как $u(x)$ есть линейная функция, то $u(x) \equiv 0$.

Таким образом, во всех случаях мы приходим к противоречию. Теорема доказана. \square

Введем обозначения

$$\begin{aligned} l_1 u &= (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0), \\ l_2 u &= (pu''_{x\mu})'_x(0) - ru'_x(0) + \gamma_2 u(0), \\ l_3 u &= (pu''_{x\mu})(\ell) - \gamma_3 u'_x(\ell), \\ l_4 u &= (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - ru'_x(\ell) + \gamma_4 u(\ell), \end{aligned}$$

Очевидно, что функционалы l_j ($j = 1, 2, 3, 4$) являются линейными и непрерывными на пространстве решений однородного уравнения.

Математическая модель (3.4.1) обладает свойством невырожденности, тогда и только тогда, когда определитель

$$\det \|l_i \varphi_j\|_{i,j}^4 = \begin{vmatrix} l_1 \varphi_1 & l_1 \varphi_2 & l_1 \varphi_3 & l_1 \varphi_4 \\ l_2 \varphi_1 & l_2 \varphi_2 & l_2 \varphi_3 & l_2 \varphi_4 \\ l_3 \varphi_1 & l_3 \varphi_2 & l_3 \varphi_3 & l_3 \varphi_4 \\ l_4 \varphi_1 & l_4 \varphi_2 & l_4 \varphi_3 & l_4 \varphi_4 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, если только $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ фундаментальная система решений однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$.

Пусть $u(x)$ — произвольное решение однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$. Тогда, $u(x)$ можно представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$: $u(x) = \sum_{i=1}^4 C_i \varphi_i(x)$ при некоторых

C_1, C_2, C_3, C_4 . Для того, чтобы $u(x)$, определенная последним равенством, удовлетворяла граничным условиям (3.4.1a)–(3.4.1г), необходимо и достаточно,

чтобы выполнялись $l_j u = \sum_{i=1}^4 C_i l_j \varphi_i = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} l_1 \varphi_1 & l_1 \varphi_2 & l_1 \varphi_3 & l_1 \varphi_4 \\ l_2 \varphi_1 & l_2 \varphi_2 & l_2 \varphi_3 & l_2 \varphi_4 \\ l_3 \varphi_1 & l_3 \varphi_2 & l_3 \varphi_3 & l_3 \varphi_4 \\ l_4 \varphi_1 & l_4 \varphi_2 & l_4 \varphi_3 & l_4 \varphi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя система имеет единственное решение в том и только том случае, когда определитель $\det \|l_j \varphi_i\|_{i,j=1}^4$ отличен от нуля.

Покажем, что математическая модель (3.4.1) имеет единственное решение для любой σ -абсолютно непрерывной на $\overline{[0; \ell]}_S$ функции $F(x)$, тогда и только тогда, когда она является невырожденной.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Если модель (3.4.1) имеет единственное решение для любой σ -абсолютно непрерывной на $\overline{[0; \ell]}_S$ функции, то и для $F(x) \equiv \text{const}$, в частности. Значит $u(x) \equiv 0$ — единственное решение однородной дифференциальной модели, т. е. модель невырождена.

Пусть теперь модель (3.4.1) обладает свойством невырожденности. Любое решение $u(x)$ неоднородного уравнения

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma} \quad (3.4.10)$$

можно представить в виде $u(x) = v(x) + \sum_{i=1}^4 C_i \varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ — фундаментальная система однородного уравнения, $v(x)$ — решение неоднородного уравнения (3.4.10), удовлетворяющих нулевым начальным условиям $v(x_0) = v'_x(x_0) = (pv''_{x\mu})(x_0) = (pv''_{x\mu})'_x(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$. Существование и единственность такого решения следует из теоремы 3.2.1. Подберем коэффициенты C_i так, чтобы функция $u(x)$ удовлетворяла граничным условиям. Для этого необходимо и достаточно, чтобы имела единственное решение система уравнений (относительно C_i): $l_j u \equiv l_j v + \sum_{i=1}^4 C_i l_j \varphi_i = 0$, или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} l_1 \varphi_1 & l_1 \varphi_2 & l_1 \varphi_3 & l_1 \varphi_4 \\ l_2 \varphi_1 & l_2 \varphi_2 & l_2 \varphi_3 & l_2 \varphi_4 \\ l_3 \varphi_1 & l_3 \varphi_2 & l_3 \varphi_3 & l_3 \varphi_4 \\ l_4 \varphi_1 & l_4 \varphi_2 & l_4 \varphi_3 & l_4 \varphi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 v \\ -l_2 v \\ -l_3 v \\ -l_4 v \end{pmatrix}.$$

Последняя система имеет единственное решение, так как определитель $\det \|l_j \varphi_i\|_{i,j=1}^4$ системы отличен от нуля в силу невырожденности модели. \square

3.5 Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка

В этом параграфе мы изучаем функции влияния математической модели четвертого порядка, при этом мы вводим ее отталкиваясь не от аксиоматического подхода, а используя подход, предложенный Ю. В. Покорным

в [148]; доказываемое ее существование и единственность в классе непрерывных функций, исследуются ее свойства.

Определение 3.5.1. *Функцией влияния математической модели*

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ l_j u = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \end{cases} \quad (3.5.1)$$

будем называть непрерывную по совокупности переменных x, s (на квадрате $[0; \ell]_S \times [0; \ell]_S$) функцию $G(x, s)$, позволяющую получить решение (3.5.1) в виде

$$u(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) F'_{\sigma}(s) d\sigma(s) \quad (3.5.2)$$

для любой σ -абсолютной непрерывной функции $F(x)$.

Следующая теорема дает достаточные условия существования функции влияния.

Теорема 3.5.1. *Пусть модель (3.5.1) невырождена. Тогда функция влияния (3.5.1) существует и единственна.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=4}$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $Lu = 0$, такая, что $l_j \varphi_i = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и нулю в противном случае. Такая система существует в силу невырожденности модели.

На множестве $[0; \ell]_S \times [0; \ell]_S$ определим функцию

$$K(x, s) = \frac{1}{(pW)(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_{1x}'(s) & \varphi_{2x}'(s) & \varphi_{3x}'(s) & \varphi_{4x}'(s) \\ (p\varphi_{1x\mu}''(s)) & (p\varphi_{2x\mu}''(s)) & (p\varphi_{3x\mu}''(s)) & (p\varphi_{4x\mu}''(s)) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{vmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Формулу (3.5.3) перепишем в виде

$$K(x, s) = \frac{1}{(pW)(s)} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \alpha_i(s) \varphi_i(x), \quad (3.5.4)$$

где $\alpha_i(s)$ — минор к элементу $\varphi_i(x)$, стоящему на пересечении четвертой строки и i -го столбца определителя в правой части (3.5.3).

Покажем, что у функций $\alpha_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), определенных на $\overline{[0; \ell]}_S$, нет ненулевых скачков, и, следовательно, могут быть доопределены по непрерывности в точках множества $S(\sigma)$. Рассуждения проведем для $\alpha_1(s)$. Для $\alpha_2(s)$, $\alpha_3(s)$ и $\alpha_4(s)$ рассуждения аналогичны. Так как $\varphi_i(x)$ и $(p\varphi_{i_{x\mu}})''(x)$ — непрерывны, то

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1(s) &= \alpha_1(s+0) - \alpha_1(s-0) = \\ &= - \begin{vmatrix} \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \Delta\varphi_{2'_x}(s) & \Delta\varphi_{3'_x}(s) & \Delta\varphi_{4'_x}(s) \\ (p\varphi_{2''_{x\mu}})(s) & (p\varphi_{3''_{x\mu}})(s) & (p\varphi_{4''_{x\mu}})(s) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Если s точка непрерывности производной $\varphi_{i'_x}(s)$, т. е. s не принадлежит $S(\mu)$ ($\subset S(\sigma)$), то $\Delta\varphi_{i'_x}(s) = 0$, и поэтому $\Delta\alpha_1(s) = 0$. Если же s принадлежит множеству $S(\mu)$, то в определении (3.5.5) вторая и третья строки пропорциональны, так как $(p\varphi_{i''_{x\mu}})(s) = p(s) \cdot \frac{\Delta\varphi_{i'_x}(s)}{\Delta\mu(s)}$. Таким образом, непрерывность $\alpha_1(s)$ доказана.

Из (3.5.4) и непрерывности $\alpha_i(s)$ непосредственно следуют следующие свойства $K(x, s)$:

- 1) $K(x, s)$ непрерывна по совокупности переменных и для всех s $K(s, s) = 0$;
- 2) производная $K'_x(x, s)$, определенная на $\overline{[0; \ell]}_S \times \overline{[0; \ell]}_S$, при каждом s является μ -абсолютно непрерывной на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ функцией (по x); $r(x)K'_x(x, s)$ — σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$; $K'_x(s, s) = 0$;
- 3) вторая производная $K''_{x\mu}(x, s)$ такова, что $p(x)K''_{x\mu}(x, s)$ — абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$ по переменной x при каждом фиксированном s и $p(s)K''_{x\mu}(s, s) = 0$;
- 4) третья производная $(p(x)K''_{x\mu})'_x(x, s)$, определенная на $\overline{[0; \ell]}_S \times \overline{[0; \ell]}_S$, σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$ по переменной x при каждом s , и $(p(s)K''_{x\mu})'_x(s, s) = 1$;
- 5) при каждом s и почти каждом x существуют σ -производные $(pK''_{x\mu})''_{x\sigma}(x, s)$ и $(rK'_x)'_{x\sigma}(x, s)$, и при $x \neq s$ функция $K(x, s)$ удовлетворяет однородному условию.

На множестве $\overline{[0; \ell]}_S$ определим функцию

$$v(x) = \int_0^x K(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.6)$$

Из первого свойства $K(x, s)$ следует отсутствие ненулевых скачков у $v(x)$. Доопределим ее по непрерывности во всех точках отрезка $[0; \ell]$. Продолженную функцию будем, для простоты, обозначать также как и исходную.

Используя (3.5.4), равенство (3.5.6) позволяет переписать в виде

$$v(x) = \frac{1}{(pW)(0)} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \varphi_i(x) \int_0^x \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s),$$

так как $(pW)(s)$ есть константа.

Найдем производную функции $v(x)$. Для этого рассмотрим отношение $\frac{v(x+\varepsilon) - v(x+0)}{\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$. Как нетрудно видеть, его можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} \frac{v(x+\varepsilon) - v(x+0)}{\varepsilon} &= \\ &= \frac{1}{(pW)(0)} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \frac{\varphi_i(x+\varepsilon) - \varphi_i(x+0)}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\ &\quad + \frac{1}{(pW)(0)} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \frac{\varphi_i(x+0)}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Так как $\frac{\varphi_i(x+\varepsilon) - \varphi_i(x+0)}{\varepsilon} \rightarrow \varphi'_{i_x}(x+0)$ и

$$\int_0^{x+\varepsilon} \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \rightarrow \int_0^{x+0} \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$, то первая сумма в (3.5.7) стремится к

$$\frac{1}{(pW)(0)} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \varphi'_{i_x}(x+0) \int_0^{x+0} \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) =$$

$$= \int_0^{x+0} K'_x(x+0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s).$$

Покажем, что вторая сумма в правой части (3.5.7) стремится к нулю.

Так как $\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \alpha_i(s) dF(s)$ (см., например, [166]), то для второй суммы в правой части (3.5.7) мы имеем

$$\frac{1}{(pW)(0)} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \frac{\varphi_i(x+0)}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \alpha_i(s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} K(x+0, s) dF(s).$$

Заметим, что последний интеграл существует по Риману-Стилтьеса, так как $K(x+0, s)$ непрерывна и $F(x)$ имеет конечное на $[\overline{0}; \ell]_S$ изменение.

Так как $\varphi_i(s) - \varphi_i(x) = \int_x^s \varphi'_{i_x}(t) dt$, то при некотором $k_i^{(1)}$, принадлежащем $\left[\inf_{x < t \leq x+\varepsilon} \varphi'_{i_x}(t), \sup_{x < t \leq x+\varepsilon} \varphi'_{i_x}(t) \right]$, $\varphi_i(s) - \varphi_i(x) = k_i^{(1)}(s - x)$. При этом $k_i^{(1)} \rightarrow \varphi'_{i_x}(x+0)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ ввиду существования предела $\varphi'_{i_x}(\tau)$ при всех τ из $[\overline{0}; \ell]_S$.

Тогда (обозначая $\mathcal{K}_i = k_i^{(1)} - \varphi'_{i_x}(x+0)$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} K(x+0, s) dF(s) &= \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{s-x}{(pW)(0) \cdot \varepsilon} \times \\ &\times \begin{vmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 & \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_4 \\ \varphi'_{1_x}(s) & \varphi'_{2_x}(s) & \varphi'_{3_x}(s) & \varphi'_{4_x}(s) \\ (p\varphi''_{1_{x\mu}})(s) & (p\varphi''_{2_{x\mu}})(s) & (p\varphi''_{3_{x\mu}})(s) & (p\varphi''_{4_{x\mu}})(s) \\ \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & \varphi_4(x+0) \end{vmatrix} dF(s) + \\ &+ \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{s-x}{(pW)(0) \cdot \varepsilon} \begin{vmatrix} \varphi'_{1_x}(x+0) & \varphi'_{2_x}(x+0) & \varphi'_{3_x}(x+0) & \varphi'_{4_x}(x+0) \\ \varphi'_{1_x}(s) & \varphi'_{2_x}(s) & \varphi'_{3_x}(s) & \varphi'_{4_x}(s) \\ (p\varphi''_{1_{x\mu}})(s) & (p\varphi''_{2_{x\mu}})(s) & (p\varphi''_{3_{x\mu}})(s) & (p\varphi''_{4_{x\mu}})(s) \\ \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & \varphi_4(x+0) \end{vmatrix} dF(s). \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Оба слагаемых в правой части равенства (3.5.8) стремятся к нулю. В самом

деле, для первого из них мы имеем оценку (так как при всех s , принадлежащих отрезку $[x; x + \varepsilon]$, справедливо неравенство $\frac{s-x}{\varepsilon} \leq 1$)

$$\left| \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{s-x}{(pW)(0)\varepsilon} \begin{vmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 & \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_4 \\ \varphi_{1x}'(s) & \varphi_{2x}'(s) & \varphi_{3x}'(s) & \varphi_{4x}'(s) \\ p\varphi_{1x\mu}''(s) & p\varphi_{2x\mu}''(s) & p\varphi_{3x\mu}''(s) & p\varphi_{4x\mu}''(s) \\ \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & \varphi_4(x+0) \end{vmatrix} dF(s) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F)}{|(pW)(0)|} \sup_{x < s \leq x+\varepsilon} \begin{vmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 & \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_4 \\ \varphi_{1x}'(s) & \varphi_{2x}'(s) & \varphi_{3x}'(s) & \varphi_{4x}'(s) \\ p\varphi_{1x\mu}''(s) & p\varphi_{2x\mu}''(s) & p\varphi_{3x\mu}''(s) & p\varphi_{4x\mu}''(s) \\ \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & \varphi_4(x+0) \end{vmatrix},$$

причем супремум конечен и $\bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Для второго слагаемого последовательно находим

$$\left| \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{s-x}{(pW)(0)\varepsilon} \begin{vmatrix} \varphi_{1x}'(x+0) & \varphi_{2x}'(x+0) & \varphi_{3x}'(x+0) & \varphi_{4x}'(x+0) \\ \varphi_{1x}'(s) & \varphi_{2x}'(s) & \varphi_{3x}'(s) & \varphi_{4x}'(s) \\ p\varphi_{1x\mu}''(s) & p\varphi_{2x\mu}''(s) & p\varphi_{3x\mu}''(s) & p\varphi_{4x\mu}''(s) \\ \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & \varphi_4(x+0) \end{vmatrix} dF(s) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{x+0 < s \leq x+\varepsilon} \begin{vmatrix} \varphi_1'(x+0) & \varphi_2'(x+0) & \varphi_3'(x+0) & \varphi_4'(x+0) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) & \varphi_3'(s) & \varphi_4'(s) \\ p\varphi_{1x\mu}''(s) & p\varphi_{2x\mu}''(s) & p\varphi_{3x\mu}''(s) & p\varphi_{4x\mu}''(s) \\ \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) & \varphi_3(x+0) & \varphi_4(x+0) \end{vmatrix} \frac{\bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F)}{|(pW)(0)|} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$, так как супремум конечен и $\bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Таким образом

$$v'(x) = \int_0^x K'_x(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \quad \left(x \in \overline{[0; \ell]}_S \right). \quad (3.5.9)$$

Равенство (3.5.9) мы доказали для правых производных, для левых — рассуждения проводятся аналогично.

Покажем, что справедливо равенство

$$v''_{x\mu}(x) = \int_0^x K''_{x\mu}(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \quad (x \in \overline{[0; \ell]_\mu}). \quad (3.5.10)$$

Для этого отношение $\frac{v'_x(x + \varepsilon) - v'_x(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)}$ представим в виде суммы

$$\begin{aligned} & \frac{v'_x(x + \varepsilon) - v'_x(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} = \\ & = \int_0^{x+\varepsilon} \left[\frac{K'_x(x + \varepsilon, s) - K'_x(x + 0, s)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} - K''_{x\mu}(x + 0, s) \right] F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\ & + \int_0^{x+\varepsilon} K''_{x\mu}(x + 0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{K'_x(x + 0, s)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.11) \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках первого слагаемого в правой части (3.5.11) равно

$$\begin{aligned} & \frac{K'_x(x + \varepsilon, s) - K'_x(x + 0, s)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} - K''_{x\mu}(x + 0, s) = \\ & = \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i \alpha_i(s)}{(pW)(0)} \left(\frac{\varphi'_{i_x}(x + \varepsilon) - \varphi'_{i_x}(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} - \varphi''_{i_{x\mu}}(x + 0) \right). \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\frac{K'_x(x + \varepsilon, s) - K'_x(x + 0, s)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)}$ сходится равномерно к $K''_{x\mu}(x + 0, s)$ на $[0; \ell]$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда, первое слагаемое в (3.5.11) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Второе слагаемое, очевидно, неограниченно приближается при $\varepsilon \rightarrow +0$ к $\int_0^{x+0} K''_{x\mu}(x + 0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s)$.

Введя обозначение $\widehat{\varphi}_i(s) = \frac{\varphi'_{i_x}(s) - \varphi'_{i_x}(x + 0)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)}$, для третьего слагаемого мы последовательно находим

$$\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{K'_x(x + 0, s)}{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s) =$$

$$= \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{1}{(pW)(0)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \widehat{\varphi}_1(s) & \widehat{\varphi}_2(s) & \widehat{\varphi}_3(s) & \widehat{\varphi}_4(s) \\ p\varphi_{1x\mu}''(s) & p\varphi_{2x\mu}''(s) & p\varphi_{3x\mu}''(s) & p\varphi_{4x\mu}''(s) \\ \varphi_1'(x+0) & \varphi_2'(x+0) & \varphi_3'(x+0) & \varphi_4'(x+0) \end{vmatrix} F'_\sigma(s) d\sigma(s),$$

откуда, в силу равенства

$$\varphi_{i_x}'(s) - \varphi_{i_x}'(x+0) = \int_{x+0}^s \varphi_{ix\mu}''(t) d\mu(t) = k_i^{(2)}(\mu(s) - \mu(x+0)),$$

справедливого при некотором $k_i^{(2)} \in \left[\inf_{x+0 < t \leq x+\varepsilon} \varphi_{ix\mu}''(t), \sup_{x+0 < t \leq x+\varepsilon} \varphi_{ix\mu}''(t) \right]$, следует ($\mathcal{K}_i^{(2)} = k_i^{(2)} - \varphi_{ix\mu}''(x+0)$)

$$\begin{aligned} & \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{K_x'(x+0, s)}{\mu(x+\varepsilon) - \mu(x+0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\ & = \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\mu(s) - \mu(x+0)}{(\mu(x+\varepsilon) - \mu(x+0))(pW)(0)} \times \\ & \quad \times \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \mathcal{K}_1^{(2)} & \mathcal{K}_2^{(2)} & \mathcal{K}_3^{(2)} & \mathcal{K}_4^{(2)} \\ p\varphi_{1x\mu}''(s) & p\varphi_{2x\mu}''(s) & p\varphi_{3x\mu}''(s) & p\varphi_{4x\mu}''(s) \\ \varphi_{1_x}'(x+0) & \varphi_{2_x}'(x+0) & \varphi_{3_x}'(x+0) & \varphi_{4_x}'(x+0) \end{vmatrix} F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\ & + \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\mu(s) - \mu(x+0)}{(\mu(x+\varepsilon) - \mu(x+0))(pW)(0)} \times \\ & \quad \times \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_{1x\mu}''(x+0) & \varphi_{2x\mu}''(x+0) & \varphi_{3x\mu}''(x+0) & \varphi_{4x\mu}''(x+0) \\ p\varphi_{1x\mu}''(s) & p\varphi_{2x\mu}''(s) & p\varphi_{3x\mu}''(s) & p\varphi_{4x\mu}''(s) \\ \varphi_{1_x}'(x+0) & \varphi_{2_x}'(x+0) & \varphi_{3_x}'(x+0) & \varphi_{4_x}'(x+0) \end{vmatrix} F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.12) \end{aligned}$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным для (3.5.8), делаем вывод, что оба слагаемых в правой части (3.5.12) стремятся к нулю, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{K_x'(x+0, s)}{\mu(x+\varepsilon) - \mu(x+0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s) = 0.$$

Тогда, переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$ в равенстве (3.5.11) будем иметь

$$v''_{x\mu}(x+0) = \int_0^{x+0} K''_{x\mu}(x+0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.13)$$

Аналогично доказывается равенство (3.5.13) для левых производных.

Для точек x , принадлежащих множеству $S(\mu)$, последовательно имеем

$$\begin{aligned} \Delta v'_x(x) &= v'_x(x+0) - v'_x(x-0) = \\ &= \int_0^{x+0} K'_x(x+0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \int_0^{x-0} K'_x(x-0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\ &= \int_0^{x+0} \Delta K'_x(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + K'_x(x-0, x) \Delta F(x). \end{aligned}$$

Но $K'_x(x-0, x) = 0$, поэтому, последнее равенство принимает вид

$$\Delta v'_x(x) = \int_0^{x+0} \Delta K'_x(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \int_0^{x-0} \Delta K'_x(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.14)$$

Равенства (3.5.13) и (3.5.14) вместе дают

$$v''_{x\mu}(x) = \int_0^x K''_{x\mu}(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s)$$

при всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$, причем в случае когда $x \in S(\mu)$, интегрирование может производиться как в пределах от 0 до $x-0$, так и в пределах от 0 до $x+0$.

Проводя аналогичное рассуждение для отношения $\frac{1}{\varepsilon}((pv''_{x\mu})(x+\varepsilon) - (pv''_{x\mu})(x+0))$ мы приходим к равенству

$$(pv''_{x\mu})'_x(x) = \int_0^x (pK''_{x\mu})'_x(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s),$$

которое справедливо не только для правых производных, но и для левых.

Пусть теперь x — точка в которой существуют σ -производные $(p\varphi''_{i_{x\mu}})''_{x\sigma}(x)$, $(r\varphi'_i)'_\sigma(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $F'_\sigma(x)$ и $Q'_\sigma(x)$.

Отношение $\frac{(pv''_{x\mu})'_x(x+\varepsilon) - (pv''_{x\mu})'_x(x+0)}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)}$ представим в виде суммы:

$$\frac{(pv''_{x\mu})'_x(x+\varepsilon) - (pv''_{x\mu})'_x(x+0)}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{x+\varepsilon} \frac{(pK''_{x\mu})'_x(x+\varepsilon, s) - (pK''_{x\mu})'_x(x+0, s)}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\
&\quad + \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{(pK''_{x\mu})'_x(x+0, s) - 1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.15)
\end{aligned}$$

Также как и при доказательстве (3.5.10) устанавливается равномерная сходимость $\frac{(pK''_{x\mu})'_x(x+\varepsilon, s) - (pK''_{x\mu})'_x(x+0, s)}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)}$ к $(pK''_{x\mu})''_{x\sigma}(x+0, s)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда, первое слагаемое в (3.5.15) в пределе нам дает

$$\int_0^{x+0} (pK''_{x\mu})''_{x\sigma}(x+0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s).$$

Для второго последовательно находим (через $\psi_i^*(s)$ мы обозначили разность $(p\varphi''_{ix\mu})'_x(x+0) - (p\varphi''_{ix\mu})'_x(s)$)

$$\begin{aligned}
&\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{(pK''_{x\mu})'_x(x+0, s) - 1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\
&= \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{1}{(pW)(0)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_{1x}(s) & \varphi_{2x}(s) & \varphi_{3x}(s) & \varphi_{4x}(s) \\ p\varphi''_{1x\mu}(s) & p\varphi''_{2x\mu}(s) & p\varphi''_{3x\mu}(s) & p\varphi''_{4x\mu}(s) \\ \psi_1^*(s) & \psi_2^*(s) & \psi_3^*(s) & \psi_4^*(s) \end{vmatrix} \times \\
&\quad \times \frac{F'_\sigma(s)}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} d\sigma(s).
\end{aligned}$$

Правую часть последнего равенства можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{(pK''_{x\mu})'_x(x+0, s) - 1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\
&= \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{1}{(pW)(0)} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \alpha_i(s) \frac{(p\varphi''_{ix\mu})'_x(x+0) - (p\varphi''_{ix\mu})'_x(s)}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.16)
\end{aligned}$$

Так как $(p\varphi_{i_{x\mu}}''')'_x(x+0) - (p\varphi_{i_{x\mu}}''')'_x(s) = k_i^{(3)}(\sigma(x+0) - \sigma(s))$ при некотором $k_i^{(3)} \in \left[\inf_{x+0 < t \leq s} (p\varphi_{i_{x\mu}}''')'_x(t), \sup_{x+0 < t \leq s} (p\varphi_{i_{x\mu}}''')'_x(t) \right]$, то из равенства (3.5.16) следует оценка

$$\left| \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{(pK_{x\mu}''')'_x(x+0, s) - 1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} \cdot F'_\sigma(s) d\sigma(s) \right| \leq \frac{1}{|(pW)(0)|} \sum_{i=1}^4 \sup_s |\alpha_i(s)| \sup_s |(p\varphi_{i_{x\mu}}''')'_x(s)| \cdot \bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F),$$

но сумма в правой части последнего неравенства ограничена и $\bigvee_{x+0}^{x+\varepsilon} (F) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому второе слагаемое в равенстве (3.5.15) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Для последнего слагаемого в правой части (3.5.15), мы имеем

$$\frac{1}{\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x+0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} F'_\sigma(s) d\sigma(s) = F'_\sigma(x+0),$$

так как x — точка, в которой производная $F'_\sigma(x)$ существует.

Таким образом,

$$(pv_{x\mu}''')''_{x\sigma}(x+0) = \int_0^{x+0} (pK_{x\mu}''')''_{x\sigma}(x+0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + F'_\sigma(x+0).$$

Аналогично доказывается равенство для левых производных.

Пусть теперь $x \in S(\sigma)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(pv_{x\mu}''')'_x(x) &= (pv_{x\mu}''')'_x(x+0) - (pv_{x\mu}''')'_x(x-0) = \\ &= \int_0^{x+0} [(pK_{x\mu}''')'_x(x+0, s) - (pK_{x\mu}''')'_x(x-0, s)] F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\ &+ \int_{x-0}^{x+0} (pK_{x\mu}''')'_x(x-0, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \int_0^{x+0} \Delta(pK_{x\mu}''')'_x(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\ &+ (pK_{x\mu}''')'_x(x-0, x) \Delta F(x). \end{aligned}$$

Из свойств $K(x, s)$ следует, что $(pK''_{x\mu})'_x(x-0, x) = (pK''_{x\mu})'_x(x+0, x) = 1$. Поэтому

$$\Delta(pv''_{x\mu})'_x(x) = \int_0^{x+0} \Delta_x(pK''_{x\mu})'_x(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \Delta F(x),$$

причем интеграл может быть взят в пределах от 0 до $x-0$, так как $(pK''_{x\mu})'_x(x-0, x) = (pK''_{x\mu})'_x(x+0, x)$.

Таким образом,

$$(pv''_{x\mu})''_{x\sigma}(x) = \int_0^x (pK''_{x\mu})''_{x\sigma}(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s) + F'_\sigma(x) \quad (3.5.17)$$

для всякого $x \in \overline{[0; \ell]}_\sigma$, для которого существуют производные $(p\varphi''_{i x\mu})''_{x\sigma}(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $F'_\sigma(x)$ и $Q'_\sigma(x)$. Аналогично устанавливается равенство

$$(rv'_x)'_\sigma(x) = \int_0^x (rK'_x)'_\sigma(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s). \quad (3.5.18)$$

Равенства (3.5.17), (3.5.18) и (3.5.6) вместе показывают, что функция $v(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$(pv''_{x\mu})''_{x\sigma}(x) - (rv'_x)'_\sigma(x) + vQ'_\sigma(x) = F'_\sigma(x).$$

Положим

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=1}^4 C_i \varphi_i(x), \quad (3.5.19)$$

где C_i — произвольные постоянные; $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$, напомним, является фундаментальной системой решений однородного уравнения, функция $v(x)$ определяется равенством (3.5.6). Пусть

$$g(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < s \leq \ell, \\ K(x, s), & \text{если } 0 \leq s \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Тогда (3.5.6) можно записать в виде

$$v(x) = \int_0^\ell g(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s).$$

Функция $u(x)$, определяемая равенством (3.5.19), как нетрудно видеть, является общим решением неоднородного уравнения $Lu = F'_\sigma$. Подберем константы C_i так, чтобы $u(x)$ удовлетворяла граничным условиям, т. е. $l_j u = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$l_j v + \sum_{i=1}^4 C_i l_j \varphi_i = 0.$$

Последняя система имеет единственное решение в силу невырожденности математической модели, более того, в силу выбора системы $\{\varphi_i(x)\}$ будем иметь $l_j v + C_j = 0$, откуда следует $C_j = -l_j v$. Таким образом,

$$u(x) = \int_0^\ell g(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) - \sum_{i=1}^4 \varphi_i(x) l_i(v). \quad (3.5.20)$$

Так как l_j непрерывный функционал на пространстве решений, то интеграл и функционал l_j можно поменять местами:

$$l_i(v) = \int_0^\ell l_i(g(\cdot, s)) F'_\sigma(s) d\sigma(s),$$

где точка означает по какому аргументу применяется функционал.

Равенство (3.5.20) перепишем в виде

$$u(x) = \int_0^\ell \left[g(x, s) - \sum_{i=1}^4 \varphi_i(x) l_i(g(\cdot, s)) \right] F'_\sigma(s) d\sigma(s).$$

Тогда функция влияния $G(x, s)$ математической модели (3.5.1) имеет вид

$$G(x, s) = g(x, s) - \sum_{i=1}^4 \varphi_i(x) l_i(g(\cdot, s)). \quad (3.5.21)$$

Существование функции влияния доказано.

Покажем её единственность. Предположим противное: существуют две различные функции влияния $G_1(x, s)$ и $G_2(x, s)$. Так как они различны, то найдётся такая внутренняя точка (x_0, s_0) , что $G_1(x_0, s_0) - G_2(x_0, s_0) \neq 0$, причём без ограничения общности можно считать, что $G_1(x_0, s_0) - G_2(x_0, s_0) > 0$. Из непрерывности вытекает существование окрестности $U_\varepsilon(x_0, s_0)$ точки (x_0, s_0) такой, что для всех (x, s) из $U_\varepsilon(x_0, s_0)$ справедливо неравенство $G_1(x, s) - G_2(x, s) \geq \eta_0 > 0$ при некоторой η_0 .

В равенство $\int_0^\ell [G_1(x,s) - G_2(x,s)]F'_\sigma(s) d\sigma = 0$, которое справедливо для любой σ -абсолютно непрерывной функции $F(x)$, подставим функцию

$$\widehat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \leq s_0 - \varepsilon, \\ \frac{\sigma(x) - \sigma(s_0 - \varepsilon)}{\sigma(s_0 + \varepsilon) - \sigma(s_0 - \varepsilon)} & \text{если } s_0 - \varepsilon < x < s_0 + \varepsilon, \\ 1 & \text{если } x \geq s_0 + \varepsilon, \end{cases}$$

σ -абсолютная непрерывность которой очевидна, будем иметь

$$0 = \int_0^\ell [G_1(x,s) - G_2(x,s)]\widehat{F}'_\sigma(s) d\sigma(s) = \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} \left[\frac{G_1(x,s) - G_2(x,s)}{\sigma(s_0 + \varepsilon) - \sigma(s_0 - \varepsilon)} \right] d\sigma(s).$$

Тогда $0 = \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} \frac{G_1(x,s) - G_2(x,s)}{\sigma(s_0 + \varepsilon) - \sigma(s_0 - \varepsilon)} d\sigma(s) \geq \eta_0 > 0$ для всех $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

Полученное противоречие и доказывает единственность функции влияния.

Теорема доказана. \square

Замечание 3.5.1. При доказательстве теоремы мы брали фундаментальную систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$, биортогональную к функционалам $\{l_j\}_{j=1}^4$, т. е. $l_j\varphi_i = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$. В качестве $\{\varphi_i(x)\}$ можно брать произвольную фундаментальную систему. В этом случае формула (3.5.21) принимает вид

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} g(x,s) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ l_1(g(\cdot,s)) & l_1\varphi_1 & l_1\varphi_2 & l_1\varphi_3 & l_1\varphi_4 \\ l_2(g(\cdot,s)) & l_2\varphi_1 & l_2\varphi_2 & l_2\varphi_3 & l_2\varphi_4 \\ l_3(g(\cdot,s)) & l_3\varphi_1 & l_3\varphi_2 & l_3\varphi_3 & l_3\varphi_4 \\ l_4(g(\cdot,s)) & l_4\varphi_1 & l_4\varphi_2 & l_4\varphi_3 & l_4\varphi_4 \end{vmatrix},$$

где Δ — определитель матрицы $\|l_j\varphi_i\|_{i,j=1}^4$.

Замечание 3.5.2. Найдя $l_j(g(\cdot,s))$, формулу (3.5.21) можно записать в виде

$$G(x,s) = g(x,s) - l_3(g(\cdot,s))\varphi_3(x) - l_4(g(\cdot,s))\varphi_4(x),$$

так как $l_1(g(\cdot,s)) \equiv 0$ и $l_2(g(\cdot,s)) \equiv 0$.

3.6 Функция влияния математической модели, описывающей малые деформации сингулярной балки

В этом параграфе мы предъявим вид функции влияния математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} = F'_{\sigma}, & (a) \\ u(0) = u'_x(0) = 0, & (b) \\ pu''_{x\mu}(\ell) = (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) = 0, & (c) \end{cases} \quad (3.6.1)$$

которая описывает малые деформации системы из растянутых балок, соединенных шарнирно, и имеющей в точках шарнирного соединения локальную особенность, реагирующую на изгибающий момент; этот вид существенно упрощает ее анализ. Напомним, что мы предполагаем выполненными следующие условия:

- 1) $x, \mu(x), p(x), r(x)$ и $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$;
- 2) $p(x) > 0$ для всех $x \in [0; \ell]$, $\min_{\overline{[0; \ell]}_{\mu} \setminus S(\mu)} p(x) > 0$;

- 3) интеграл $\int_0^{\ell} \frac{d\mu(x)}{p(x)}$ конечен;

- 4) $r(x) \geq 0$ на всем $\overline{[0; \ell]}_S$.

Эти условия обеспечивают существование возрастающего решения $\psi(x)$ однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} = 0$, и удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям.

В этом параграфе мы будем предполагать выполненным еще одно техническое условие, которое обеспечивает отсутствие у модели экзотических особенностей типа «лестницы Кантора».

- 5) величины $\frac{\mu(x + \varepsilon) - \mu(x + 0)}{\varepsilon}$ и $\frac{\mu(x - \varepsilon) - \mu(x - 0)}{\varepsilon}$ ограничены для положительного ε .

Последнее условие позволяет установить ограниченность величины $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \alpha(t) d\mu(t)$, а в случае $\alpha(x + 0) = 0$ и вовсе равенство нулю последней величины, когда $\varepsilon \rightarrow +0$.

Теорема 3.6.1. *Функция влияния модели (3.6.1) имеет вид*

$$G(x, s) = \int_0^{\min\{x, s\}} \frac{(\psi(x) - \psi(t)) (\psi(s) - \psi(t))}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} d\mu(t),$$

где $\varphi(x) = \psi'_x(x) > 0$ и $\psi(x)$ удовлетворяет условиям $ru''_{x\mu}(\ell) = 0$ и $(ru''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)'(\ell) = 0$.

Доказательство. Если функция о которой говорится в теореме существует, то функция

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^\ell G(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s) = \\ &= \int_0^x \int_0^s \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^x \varphi(\tau) d\tau \int_t^s \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) F'_\sigma(s) d\sigma(s) + \\ &+ \int_x^\ell \int_0^x \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^x \varphi(\tau) d\tau \int_t^s \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) F'_\sigma(s) d\sigma(s) \quad (3.6.2) \end{aligned}$$

является решением (3.6.1).

К каждому из интегралов в правой части (3.6.2) применим теорему Фубини, выполнимость условий которой проверяется непосредственно, будем иметь

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \int_t^x \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^x \varphi(\tau) d\tau \int_t^s \varphi(\tau) d\tau F'_\sigma(s) d\sigma(s) d\mu(t) + \\ &+ \int_0^x \int_x^\ell \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^x \varphi(\tau) d\tau \int_t^s \varphi(\tau) d\tau F'_\sigma(s) d\sigma(s) d\mu(t), \end{aligned}$$

или,

$$u(x) = \int_0^x \int_t^x \varphi(\tau) \int_t^\ell \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^s \varphi(\tau) d\tau F'_\sigma(s) d\sigma(s) d\tau d\mu(t).$$

Применяя снова теорему Фубини, приходим к равенству

$$u(x) = \int_0^x \varphi(\tau) \int_0^\tau \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \int_t^s \varphi(\tau) d\tau F'_\sigma(s) d\sigma(s) d\mu(t) d\tau.$$

Отсюда следует абсолютная непрерывность $u(x)$ на $[0; \ell]$ и равенство

$$\begin{aligned} u'_x(x) &= \\ &= \varphi(x) \int_0^x \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \int_t^s \varphi(\tau) d\tau F'_\sigma(s) d\sigma(s) d\mu(t). \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

($x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$). Из последнего равенства находим, что $u'_x(x)$ μ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$, более того, для $x = \xi \pm 0$, где $\xi \in S(\mu)$, справедливо равенство (в последнем интеграле мы применили теорему Фубини)

$$\begin{aligned} (pu''_{x\mu})(\xi \pm 0) &= \\ &= (p\varphi'_\mu)(\xi \pm 0) \int_0^{\xi \pm 0} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \int_t^s \varphi(\tau) d\tau F'_\sigma(s) d\sigma(s) d\mu(t) + \\ &\quad + \frac{1}{\varphi(\xi \pm 0)} \int_{\xi \pm 0}^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Найдем значение μ -производной $u''_{x\mu}(x)$ в точке ξ , где $\xi \in S(\mu)$. Из (3.6.3) находим

$$\begin{aligned} \Delta u'_x(\xi) &= \Delta\varphi(\xi) \int_0^{\xi+0} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau d\mu(t) + \\ &\quad + \frac{1}{p(\xi)\varphi(\xi+0)} \int_\xi^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau \cdot \Delta\mu(\xi), \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

или,

$$\begin{aligned} \Delta u'_x(\xi) &= \Delta\varphi(\xi) \int_0^{\xi-0} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{p(\xi)\varphi(\xi-0)} \int_\xi^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau \cdot \Delta\mu(\xi). \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Из (3.6.5), (3.6.6), (3.6.4) следует непрерывность $(pu''_{x\mu})(x)$.

Найдем правую производную $(pu''_{x\mu})'_x(x+0)$; левая производная $(pu''_{x\mu})'_x(x-0)$ находится аналогично. Имеем

$$\begin{aligned}
(pu''_{x\mu})'_x(x+0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{(pu''_{x\mu})'_x(x+\varepsilon) - (pu''_{x\mu})'_x(x+0)}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \left[(p\varphi'_\mu)(x+\varepsilon) \int_0^{x+\varepsilon} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau d\mu(t) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varphi(x+\varepsilon)} \int_{x+\varepsilon}^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau - \right. \\
&\quad \left. - (p\varphi'_\mu)(x+0) \int_0^{x+0} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau d\mu(t) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\varphi(x+0)} \int_{x+0}^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{(p\varphi'_\mu)(x+\varepsilon) - (p\varphi'_\mu)(x+0)}{\varepsilon} \times \\
&\quad \times \int_0^{x+\varepsilon} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_{x+0}^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau d\mu(t) + \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{(p\varphi'_\mu)(x+0)}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau d\mu(t) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varphi(x+0) - \varphi(x+\varepsilon)}{\varepsilon\varphi(x+\varepsilon)\varphi(x+0)} \int_{x+\varepsilon}^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau \right] - \\
&\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon\varphi(x+0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau. \quad (3.6.7)
\end{aligned}$$

Первый предел в правой части последнего равенства равен

$$(p\varphi'_\mu)(x+0) \int_0^{x+0} \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) d\tau d\mu(t)$$

в силу свойств функции $\varphi(x)$.

Последнее слагаемое в (3.6.7), как нетрудно видеть, равно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon \varphi(x+0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau))d\tau = F(\ell) - F(x+0).$$

Покажем, что второе слагаемое в (3.6.7) равно нулю. Для этого к первому интегралу применим теорему Фубини, и после перегруппировки слагаемых, будем иметь оценку

$$\begin{aligned} & \left| \left(\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) \int_{x+0}^{\tau} \frac{d\mu(t)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{x+\varepsilon}^{\ell} \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau)) \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{d\mu(t)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} d\tau \right) \frac{p\varphi'_{\mu}(x+0)}{\varepsilon} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\varepsilon \varphi(x+\varepsilon)\varphi(x+0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi'_{\mu}(t)d\mu(t) \int_{x+\varepsilon}^{\ell} \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau))d\tau \right| \leq \\ & \leq |p\varphi'_{\mu}(x+0)| \cdot \sup_{x+0 < \tau < x+\varepsilon} \varphi(\tau) \cdot \bigvee_0^{\ell}(F) \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{d\mu(t)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} + \\ & \quad + \int_{x+\varepsilon}^{\ell} \varphi(\tau)|F(\ell) - F(\tau)|d\tau \times \\ & \quad \times \sup_{x+0 < \tau < x+\varepsilon} \left| \frac{p\varphi'_{\mu}(x+0)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} - \frac{\varphi'_{\mu}(t)}{\varphi(x+\varepsilon)\varphi(x+0)} \right| \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} d\mu(t). \end{aligned}$$

Оба слагаемых в правой части последнего неравенства стремятся к нулю при

$\varepsilon \rightarrow +0$, так как $\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{d\mu(t)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, супремум функции

$\left| \frac{p\varphi'_{\mu}(x+0)}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} - \frac{\varphi'_{\mu}(t)}{\varphi(x+\varepsilon)\varphi(x+0)} \right|$ на множестве $[x+0; x+\varepsilon]$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$ и отношение $\frac{\mu(x+\varepsilon) - \mu(x+0)}{\varepsilon}$ ограничено.

Таким образом,

$$(pu''_{x\mu})'_x(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= (p\varphi'_\mu)'_x(x) \int_0^x \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau))d\tau d\mu(t) + \\
&\quad + F(x) - F(\ell) \quad (x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\sigma)}). \quad (3.6.8)
\end{aligned}$$

Так как $(p\varphi'_\mu)'_x(x)$, $\mu(x)$ и $F(x)$ σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_{S(\sigma)}$, то из (3.6.8) следует σ -абсолютно непрерывность $(pu''_{x\mu})'_x(x)$ на $\overline{[0; \ell]}_{S(\sigma)}$. Также легко устанавливается, что $(ru'_x)(x)$ σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_{S(\sigma)}$. Отсюда находим, что $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(x)$ и $(ru'_x)'_\sigma(x)$ существуют почти всюду (относительно меры σ). Последнее обстоятельство позволяет нам сначала найти разность $(pu''_{x\mu})'_x(x) - (ru'_x)(x)$, и затем продифференцировать по σ :

$$\begin{aligned}
&(pu''_{x\mu})'_x(x) - (ru'_x)(x) = \\
&= (p\varphi'_\mu)'_x(x) \int_0^x \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau))d\tau d\mu(t) + \\
&+ F(x) - F(\ell) - \\
&- (r\varphi)(x) \int_0^x \frac{1}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)} \int_t^\ell \varphi(\tau)(F(\ell) - F(\tau))d\tau d\mu(t) = \\
&\quad = F(x) - F(\ell), \quad (3.6.9)
\end{aligned}$$

так как $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению $(p\varphi'_\mu)'_x - r\varphi = 0$. Из (3.6.9) следует равенство $(pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) = 0$, т. е. $u(x)$ удовлетворяет граничному условию (3.6.1с).

Из (3.6.2), (3.6.3), (3.6.4) и свойств функции $\varphi(x)$ находим, что $u(x)$ удовлетворяет остальным граничным условиям.

Продифференцировав (3.6.9) по σ получим, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (3.6.1а).

Покажем, что существует возрастающее решение однородного уравнения, удовлетворяющее двум условиям в точке $x = \ell$. Пусть $\psi(x)$ — решение однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(\ell) = 0$, $u'_x(\ell) = 1$, $(pu''_{x\mu})(\ell) = 0$ и $(pu''_{x\mu})'_x(\ell) = r(\ell)$. В силу теоремы 3.2.1 такое решение существует и единственно. Проинтегрировав однородное уравнение $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma = 0$ по мере σ будем иметь уравнение для $\psi(x)$: $(pu''_{x\mu})'_x(x) - (ru'_x)(x) = C$ при некоторой постоянной C .

Так как $\psi(x)$ удовлетворяет условию $(pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) = 0$ (это следует из начальных условий), то $C = 0$. Введём обозначения $v = \psi'_x$. Тогда $v(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(pv'_\mu)'_x(x) - rv(x) = 0 \quad (3.6.10)$$

Как явствует из работы [107] существует положительное на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ решение $\widehat{\varphi}(x)$ уравнения (3.6.10) такое, что левая часть (3.6.10) представима в виде:

$$\frac{1}{\widehat{\varphi}(x)} \left(p(x)\widehat{\varphi}(x-0)\widehat{\varphi}(x+0) \left(\frac{v(x)}{\widehat{\varphi}(x)} \right)'_\mu \right)'_x = 0. \quad (3.6.11)$$

Покажем, что $\widehat{\varphi}(x)$ можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла дополнительному условию: $v'_\mu(\ell) = 0$. В самом деле, пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения (3.6.10), удовлетворяющие условиям $v(0) = 0$, $(pv'_\mu)(0) = 1$ и $v(\ell) = 0$, $(pv'_\mu)(\ell) = -1$ соответственно. Тогда функция $\varphi_1(x) + \varphi_{1\mu}'(\ell)\varphi_2(x)$ искомая. В самом деле, для этого достаточно показать, что $\varphi_{1\mu}'(\ell) > 0$. Из тождества $(p\varphi_{1\mu}')'_x \equiv r\varphi_1$ следует неубывание $p\varphi_{1\mu}'(x)$ на всём $[0; \ell]$, так как $(r\varphi_1)(x) \geq 0$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$. Отсюда имеем неравенство $(p\varphi_{1\mu}')(\ell) > (p\varphi_{1\mu}')(0) = 1$, что и требовалось доказать. Итак, в (3.6.11) в качестве $\widehat{\varphi}(x)$ можно взять функцию $\varphi_1(x) + \varphi_{1\mu}'(\ell)\varphi_2(x)$.

Из (3.6.11) находим, что $\left(p(x)\widehat{\varphi}(x-0)\widehat{\varphi}(x+0) \left(\frac{v(x)}{\widehat{\varphi}(x)} \right)'_\mu \right)'_x(x) = C_1$ при некоторой постоянной C_1 . Так как $v(\ell) = 0$ и $\varphi'_{1\mu}(\ell) = 0$, то $C_1 = 0$, т. е. $v(x) \equiv C_2\widehat{\varphi}(x)$ при некоторой C_2 . Отсюда немедленно находим, что $v(x) > 0$ на всём $\overline{[0; \ell]}_\mu$. Таким образом, $\psi(x)$ — строго возрастающее решение уравнения (3.6.9). Теорема доказана. \square

Замечание 3.6.1. Начальное условие $u(\ell) = 0$ не играет роли: для нас важна лишь монотонность $\psi(x)$.

Замечание 3.6.2. При доказательстве существования решения $\psi(x)$ был предъявлен явный вид функции: $\psi(x) = \frac{1}{\widehat{\varphi}(\ell)} \int_0^x \widehat{\varphi}(s) ds$.

3.7 Корректность математической модели четвертого порядка

В этом параграфе изучается вопрос о корректности полученной математической модели: непрерывной (точнее $C^{(3)}$) зависимости решения от начальных условий и параметра.

В начале мы покажем полноту пространства решений по соответствующей норме.

В пространстве E введем норму

$$\|u\|_{\mu,\sigma} = \max_{0 \leq x \leq \ell} |u(x)| + \int_0^\ell (u') + \max_{0 \leq x \leq \ell} |pu''_{x\mu}(x)| + \int_0^\ell \left((pu''_{x\mu})'_x \right). \quad (3.7.1)$$

Как и в параграфе 1.6, доказываем, что норма (3.7.1) эквивалентна норме

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\sigma} = & |u(0)| + \int_0^\ell (u) + |u'(0)| + \int_0^\ell (u') + |pu_{x\mu}(0)| + \int_0^\ell (pu''_{x\mu}) + \\ & + \left| (pu''_{x\mu})'_x(0) \right| + \int_0^\ell \left((pu''_{x\mu})'_x \right). \end{aligned}$$

Полнота E по норме $\|\cdot\|_{1,\sigma}$ достаточно очевидна.

Изучим сначала непрерывную зависимость решения от начальных условий.

Покажем, что если $u(x, \alpha)$ — решение уравнения

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)' + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \quad (3.7.2)$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x_0) = \alpha_1(\alpha)$, $u'_x(x_0) = \alpha_2(\alpha)$, $(pu''_{x\mu})(x_0) = \alpha_3(\alpha)$, $\left((pu''_{x\mu})'_x \right)(x_0) = \alpha_4(\alpha)$, при некотором $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$, то $u(x, \alpha)$ непрерывно зависит от α , если этим свойством обладают функции $\alpha_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i(x)\}$ — решения однородного уравнения

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x) + uQ'_\sigma = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_i(x_0) = \delta_i^1$, $(\varphi_i)'_x(x_0) = \delta_i^2$, $\left(p(\varphi_i)''_{x\mu} \right)(x_0) = \delta_i^3$, $\left(p(\varphi_i)''_{x\mu} \right)'_x(x_0) = \delta_i^4$ ($i = 1, 2, 3, 4$), где δ_i^j — символ

Кронекера, равный 1, если $i = j$, 0 в противном случае; $v(x)$ — решение уравнения (3.7.2), удовлетворяющее начальным условиям $v(x_0) = v'_x(x_0) = (pv''_{x\mu})'_x(x_0) = ((pv''_{x\mu})'_x)'(x_0) = 0$. Тогда $u(x, \alpha) = v(x) + \sum_{i=1}^4 \varphi_i(x) \alpha_i(\alpha)$.

Теперь утверждение теоремы следует из неравенства

$$\|u(\cdot, \alpha) - u(\cdot, \alpha_0)\|_{\mu, \sigma} \leq \sum_{i=1}^4 |\alpha_i(\alpha) - \alpha_i(\alpha_0)| \cdot \|\varphi_i\|_{\mu, \sigma}. \quad \square$$

Последнее утверждение можно усилить: *Если $\alpha_i(\alpha)$ дифференцируемы k раз, то решение $u(x, \alpha)$ имеет производные (по α) до k -го порядка.*

Изучим далее вопрос о непрерывной зависимости решения уравнения

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma} \quad (3.7.3)$$

от параметра λ , когда коэффициент $p(x)$ не зависит от λ ; при каждом $\lambda \in [\lambda_*; \lambda_{**}]$, $r(x, \lambda) \geq 0$, и коэффициенты имеют вид $r(x, \lambda) = r_0(x) + \psi_1(\lambda) \times r_1(x)$, $Q(x, \lambda) = Q_1(x) + \psi_2(\lambda)Q_2(x)$ и $F(x, \lambda) = F_1(x) + \psi_3(\lambda)F_2(x)$, причем функции $r_0(x)$, $r_1(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Теорема 3.7.1. *Пусть $u(x, \lambda)$ — решение уравнения (3.7.3), удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x_0) = u_0, u'_x(x_0) = u_1, (pu''_{x\mu})(x_0) = u_2, ((pu''_{x\mu})'_x)'(x_0) = u_3 \quad (3.7.4)$$

при некотором $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_S$. Тогда,

- 1) $u(x, \lambda)$ непрерывно зависит от λ по норме $\|\cdot\|_{\sigma}$, если $\psi_i(\lambda)$ непрерывны;
- 2) $u(x, \lambda)$ имеет непрерывные производные по λ до порядка k , если $\psi_i(\lambda)$, k раз непрерывно дифференцируемы.

Доказательство. Пусть $u_0(x) = u(x, \lambda_0)$ и $u_1(x) = u(x, \lambda_1)$ — решения уравнения (3.7.3) при $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_1$ соответственно, удовлетворяющие условиям (3.7.4). Тогда $w(x) = u_1(x) - u_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} (pw''_{x\mu})''_{x\sigma} - (r(x, \lambda_1)w'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}(x, \lambda_1)w = \\ = (\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0)) (r_1(x)u'_{0x})'_{\sigma} + (\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1)) u_0(x)Q'_{2\sigma}(x) + \\ + (\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0)) F'_{2\sigma}(x), \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

и нулевым начальным условиям $u(x_0) = u'(x_0) = (pu''_{x\mu})(x_0) = (pu''_{x\mu})'_x(x_0) = 0$. Интегрируя (3.7.5) четыре раза в пределах от x_0 до x , первый раз — по мере σ , второй и четвертый — по мере Лебега, и третий — по мере, порождаемой функцией $P(x) = \int_0^x \frac{d\mu(\tau)}{p(\tau)}$, получим четыре равенства (с учётом нулевых начальных данных для $w(x)$)

$$\begin{aligned} (pw''_{x\mu})'_x(x) &= r(x, \lambda_1)w'_x(x) - \int_{x_0}^x w(s) dQ(s, \lambda_1) + \\ &+ (\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0)) (r_1(x)u_0'(x) - r_1(x_0)u_1) + \\ &+ (\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1)) \int_{x_0}^x u_0(s) dQ_2(s) + (\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0)) (F_2(x) - F_2(x_0)), \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

$$\begin{aligned} (pw''_{x\mu})(x) &= r(x, \lambda_1)w(x) - \int_{x_0}^x w(t) dr(t, \lambda_1) - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t w(s) dQ(s, \lambda_1) dt + \\ &+ (\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0)) \int_{x_0}^x (r_1(t)u_0'(t) - r_1(x_0)u_1) dt + \\ &+ (\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1)) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t u_0(s) dQ_2(s) dt + \\ &+ (\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0)) \int_{x_0}^x (F_2(t) - F_2(x_0)) dt \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

(здесь мы интеграл $\int_{x_0}^x r(t, \lambda_1) dw(t)$ проинтегрировали по частям, что возможно ввиду его существования по Риману–Стилтьесу),

$$w'_x(x) = \int_{x_0}^x r(\tau, \lambda_1)w(\tau) dP(\tau) - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\tau} w(t) dr(t, \lambda_1) dP(\tau) -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\tau} \int_{x_0}^t w(s) dQ(s, \lambda_1) dt dP(\tau) + \\
& + \left(\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\tau} (r_1(t)u_{0x}'(t) - r_1(x_0)u_1) dt dP(\tau) + \\
& + \left(\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\tau} \int_{x_0}^t u_0(s) dQ_2(s) dt dP(\tau) + \\
& + \left(\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\tau} (F_2(t) - F_2(x_0)) dt dP(\tau), \quad (3.7.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x) = & \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} r(\tau, \lambda_1) w(\tau) dP(\tau) d\eta - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} w(t) dr(t, \lambda_1) dP(\tau) d\eta - \\
& - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} \int_{x_0}^t w(s) dQ(s, \lambda_1) dt dP(\tau) d\eta + \\
& + \left(\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} (r_1(t)u_{0x}'(t) - r_1(x_0)u_1) dt dP(\tau) d\eta + \\
& + \left(\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} \int_{x_0}^t u_0(s) dQ_2(s) dt dP(\tau) d\eta + \\
& + \left(\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} (F_2(t) - F_2(x_0)) dt dP(\tau) d\eta, \quad (3.7.9)
\end{aligned}$$

Из (3.7.6), (3.7.7), (3.7.8) и (3.7.9) последовательно находим

$$\begin{aligned}
\bigvee_0^{\ell} \left((pw''_{x\mu})'_x \right) & \leq \bigvee_0^{\ell} (r(\cdot, \lambda_1)w'_x(\cdot)) + \|w\| \bigvee_0^{\ell} (Q(\cdot, \lambda_1)) + \\
& + \left| \psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right| \bigvee_0^{\ell} (r_1(\cdot)u_{0x}'(\cdot)) + \\
& + \left| \psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right| \|u_0\| \bigvee_0^{\ell} (Q_2) + \left| \psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right| \bigvee_0^{\ell} (F_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|pw''_{x\mu}\|_C &\leq \sup r(\cdot, \lambda_1) \|w\|_C + \|w\|_C \bigvee_0^\ell (r(\cdot, \lambda_1)) + \ell \|w\| \bigvee_0^\ell (Q(\cdot, \lambda_1)) + \\ &+ \left| \psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right| \ell (\sup r_1(x) \sup u'_{0x}(x) + r_1(x_0) |u_1|) + \\ &+ \left| \psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right| \ell \|u_0\|_C \bigvee_0^\ell (Q_2) + \ell \left| \psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right| \bigvee_0^\ell (F_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigvee_0^\ell (w'_x) &\leq \sup r(\cdot, \lambda_1) \|w\|_C \bigvee_0^\ell (P) + \|w\|_C \bigvee_0^\ell (r(\cdot, \lambda_1)) \bigvee_0^\ell (P) + \\ &+ \|w\|_C \ell \bigvee_0^\ell (Q(\cdot, \lambda_1)) \bigvee_0^\ell (P) + \\ &+ \left| \psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right| \ell \sup_x (r_1(x) u'_{0x}(x) - r_1(x_0) u_1) \bigvee_0^\ell (P) + \\ &+ \ell \left| \psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right| \|u_0\| \bigvee_0^\ell (Q_2) \bigvee_0^\ell (P) + \\ &+ \left| \psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right| \ell \sup_x |F_2(x) - F_2(x_0)| \bigvee_0^\ell (P), \end{aligned}$$

Таким образом, для нормы $\|w\|_{\mu, \sigma}$ справедлива оценка (ниже, точка вместо аргумента означает, что по этому аргументу берется соответствующая операция: нахождение супремума или вариации)

$$\begin{aligned} \|w\|_{\mu, \sigma} &= \max_{0 \leq x \leq \ell} |w(x)| + \bigvee_0^\ell (w') + \max_{0 \leq x \leq \ell} |pw''_{x\mu}(x)| + \bigvee_0^\ell \left((pw''_{x\mu})'_x \right) \leq \\ &\leq \|w\|_C + \sup r(\cdot, \lambda_1) \|w\|_C \bigvee_0^\ell (P) + \|w\|_C \bigvee_0^\ell (r(\cdot, \lambda_1)) \bigvee_0^\ell (P) + \\ &+ \|w\|_C \ell \bigvee_0^\ell (Q(\cdot, \lambda_1)) \bigvee_0^\ell (P) + \\ &+ \left| \psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right| \ell \sup_x (r_1(x) u'_{0x}(x) - r_1(x_0) u_1) \bigvee_0^\ell (P) + \\ &+ \ell \left| \psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right| \|u_0\| \bigvee_0^\ell (Q_2) \bigvee_0^\ell (P) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right| \ell \sup_x |F_2(x) - F_2(x_0)| \bigvee_0^\ell (P) + \\
& + \sup r(\cdot, \lambda_1) \|w\|_C + \|w\|_C \bigvee_0^\ell (r(\cdot, \lambda_1)) + \ell \|w\| \bigvee_0^\ell (Q(\cdot, \lambda_1)) + \\
& + \left| \psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right| \ell (\sup r_1(x) \sup u_{0x}'(x) + r_1(x_0) |u_1|) + \\
& + \left| \psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right| \ell \|u_0\|_C \bigvee_0^\ell (Q_2) + \ell \left| \psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right| \bigvee_0^\ell (F_2) + \\
& + \left(\sup_x r(x, \lambda_1) + \bigvee_0^\ell (r(\cdot, \lambda_1)) \right) \left(\sup r(\cdot, \lambda_1) \|w\|_C \bigvee_0^\ell (P) + \right. \\
& + \|w\|_C \bigvee_0^\ell (r(\cdot, \lambda_1)) \bigvee_0^\ell (P) + \|w\|_C \ell \bigvee_0^\ell (Q(\cdot, \lambda_1)) \bigvee_0^\ell (P) + \\
& + \left. \left| \psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right| \ell \sup_x (r_1(x) u_{0x}'(x) - r_1(x_0) u_1) \bigvee_0^\ell (P) + \right. \\
& + \ell \left| \psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right| \|u_0\| \bigvee_0^\ell (Q_2) \bigvee_0^\ell (P) + \\
& + \left. \left| \psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right| \ell \sup_x |F_2(x) - F_2(x_0)| \bigvee_0^\ell (P) \right) + \|w\| \bigvee_0^\ell (Q(\cdot, \lambda_1)) + \\
& + \left| \psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0) \right| \bigvee_0^\ell (r_1(\cdot) u_{0x}'(\cdot)) + \\
& + \left| \psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1) \right| \|u_0\| \bigvee_0^\ell (Q_2) + \left| \psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0) \right| \bigvee_0^\ell (F_2). \quad (3.7.10)
\end{aligned}$$

Из (3.7.10) видно, что норма $\|w\|_{\mu, \sigma}$ оценивается сверху величинами $|\psi_i(\lambda_1) - \psi_i(\lambda_0)|$ и $\|w\|_C$. Так как $w(x)$ является решением интегрального уравнения

$$w(x) = z(x) + (Aw),$$

где

$$z(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^\eta \int_{x_0}^\tau \left(r_1(t) (\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0)) u_{0x}'(t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1)) \int_{x_0}^t u_0(s) dQ_2(s) + F_2(t)(\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0)) - \\
& \quad - F_2(x_0)(\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0)) \Big) dt dP(\tau) d\eta, \quad (3.7.11)
\end{aligned}$$

полученного из (3.2.3), с учетом нулевым начальных условий, и A определяется равенством (3.2.4), то для $\|w\|_C$ справедлива оценка

$$\|w\|_C \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n z\|_C \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n \ell^n}{n!} \|z\|_C = \|z\|_C \cdot e^{C\ell}.$$

Из последней оценки вытекает, что $\|w\|_C$ оценивается нормой $z(x)$ в $C[0; \ell]$, которая в силу (3.7.11) может быть сделана сколь угодно малой ввиду непрерывности $\psi_i(\lambda)$, и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\psi_i(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы. Применяя теорему Лагранжа о конечных разностях к $\psi_i(\lambda_1) - \psi_i(\lambda_0)$, равенство (3.7.5) мы можем переписать в виде

$$\begin{aligned}
& (pw''_{x\mu})''_{x\sigma} - (r(x, \lambda_1)w'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}(x, \lambda_1)w = \\
& = \psi'_1(\widehat{\lambda}_1) (\lambda_1 - \lambda_0) (r_1(x)u'_{0x})'_{\sigma} - \psi'_2(\widehat{\lambda}_2) (\lambda_1 - \lambda_0) u_0(x) Q'_{2\sigma}(x) + \\
& \quad + \psi'_3(\widehat{\lambda}_3) (\lambda_1 - \lambda_0) F'_{2\sigma}(x),
\end{aligned}$$

при некоторых $\widehat{\lambda}_i$. Обозначим $y = \frac{w}{\lambda - \lambda_0}$. Разделим обе части последнего равенства на $\lambda_1 - \lambda_0$, будем иметь

$$\begin{aligned}
& (py''_{x\mu})''_{x\sigma} - (r(x, \lambda_1)y'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}(x, \lambda_1)y = \\
& = \psi'_1(\widehat{\lambda}_1) (r_1(x)u'_{0x})'_{\sigma} - \psi'_2(\widehat{\lambda}_2) u_0(x) Q'_{2\sigma}(x) + \psi'_3(\widehat{\lambda}_3) F'_{2\sigma}(x). \quad (3.7.12)
\end{aligned}$$

Таким образом, для определения y мы получили уравнение (3.7.12). Величина y пока определена только при $\lambda \neq \lambda_0$. Определим ее при $\lambda = \lambda_0$ так, чтобы y удовлетворяло уравнению (3.7.12) и $x = x_0$ обращалось в нуль, вместе со всеми производными до третьего порядка включительно. Так как $y, y'_x, y''_{x\mu}$ и $y'''_{x\mu x}$ обращается в нуль при $x = x_0$ при всех λ , и коэффициенты уравнения (3.7.12) удовлетворяют первой части теоремы, то y непрерывно зависит от параметра λ по норме пространства E при всех λ достаточно близких

к λ_0 , следовательно, y , y'_x , $y''_{x\mu}$ и $y'''_{x\mu x}$ стремятся к определенным пределам при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Остается применить первую часть теоремы, чтобы получить требуемое.

Пусть теперь функции $\psi_i(\lambda)$ k раз непрерывно дифференцируемы. Применяя последовательно k раз вторую часть теоремы, мы получим утверждение теоремы. Теорема доказана. \square

В случае, когда коэффициенты $r(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ и $F(x, \lambda)$ удовлетворяют по второму аргументу условию Липшица, то можно утверждать, что решение соответствующей начальной задачи непрерывно зависит от параметра λ локально, т. е. существует окрестность точки x_0 в которой при достаточной близости λ к λ_0 функции $u(x, \lambda)$ и $u(x, \lambda_0)$ отличаются мало по норме $\|\cdot\|_{\mu, \sigma}$, только максимум и вариации берутся по окрестности точки x_0 .

Теперь можно показать, что математическая модель корректна. Это вытекает из интегрального представления решения

$$u(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) dF'_\sigma(s),$$

и заметить, что малые изменения коэффициентов уравнения приводят к малым изменениям $G(x, s)$, интеграл непрерывно зависит от $F(x)$.

3.8 Осцилляционность спектра дифференциальной модели четвертого порядка с производными по мере в случае отсутствия упругих опор

В этом параграфе доказывается осцилляционность спектра модели

$$\begin{aligned} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} &= \lambda M'_\sigma u, \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_1 u(0) &= 0, \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_2 u'_x(0) &= 0, \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) &= 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) &= 0, \end{aligned}$$

где $M(x)$ — строго возрастающая σ -абсолютно непрерывная на $\overline{[0; \ell]}_S$ функция; λ — спектральный параметр; $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 3$); $\gamma_1 + \gamma_4 > 0$ и $\gamma_2 + \gamma_3 > 0$.

Введем необходимые определения.

Определение 3.8.1. Если отрезок I можно разбить на $k + 1$ непересекающихся, связных подмножеств ненулевой меры, на каждом из которых функция $f(x)$ сохраняет знак, отлична от тождественного нуля, и на соседних принимает значения разных знаков, то будем говорить, что функция $f(x)$, принадлежащая некоторому классу функций \mathcal{R} , меняет знак k раз на I , и писать $S(f; I; \mathcal{R}) = k$; при этом разбить отрезок I на меньшее число подмножеств, удовлетворяющих всем требованиям, нельзя. Если ни при каком k такого разбиения не существует, то будем писать $S(f; I; \mathcal{R}) = \infty$.

Одна и та же функция, рассматриваемая как элемент разных классов, может иметь разное количество перемен знака.

В дальнейшем нами будет постоянно использоваться очевидное свойство перемены знака: если $v(x)$ положительна на множестве I , то число перемен знака функций $u(x)$ и $u(x) \cdot v(x)$ на I совпадают, если только обе функции $u(x)$ и $u(x) \cdot v(x)$ принадлежат одному классу.

Например, для функции $f(x)$, определенной на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ следующим образом: $f(x)$ равна $\frac{2}{\xi}$, если $x < \xi$, -2 , если $x = \xi$, и $\frac{2}{\ell - \xi}$, если $x > \xi$, где ξ — какая-то точка разрыва функции $\sigma(x)$, $S(f; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}(\overline{[0; \ell]}_\sigma)) = 2$. В этом случае множества на которые нужно разбить $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ следующие $\overline{[0; \xi]_\sigma}$, $\{\xi\}$ и $\overline{[\xi; \ell]}_\sigma$.

В то же время, $S(f; [0; \ell]; L_1[0; \ell]) = 0$.

Для функции $F(x)$, определенной на множестве $\overline{[0; \ell]}_S$, следующим образом: $F(x) = -1 + \frac{2}{\xi}x$ при $x < \xi$, и $-1 + \frac{2}{\ell - \xi}(x - \xi)$ при $x > \xi$, $S(F; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma(\overline{[0; \ell]}_S)) = 3$, так как множества на которые разбиваем $\overline{[0; \ell]}_S$: $\overline{[0; \xi/2]}_\sigma$, $\overline{[\xi/2; \xi]_\sigma}$, $\overline{[\xi; \frac{\ell + \xi}{2}]_\sigma}$ и $\overline{[\frac{\ell + \xi}{2}; \ell]}_\sigma$. Нетрудно видеть, что $F'_\sigma = f$.

Следующая лемма достаточно очевидна.

Лемма 3.8.1. Пусть σ -производная σ -абсолютно непрерывной на $\overline{[0; \ell]}_S$ функции $F(x)$ имеет t перемен знака на множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma$: $S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}(\overline{[0; \ell]}_\sigma)) = t$. Тогда справедливо неравенство $S(F; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma \overline{[0; \ell]}_S) \leq t + 1$.

Через $\text{sign}_1 u$ мы обозначим знак $u(x)$ на первом интервале разбиения отрезка I в определении числа перемен знака $v(x)$ в случае конечности

$S(u; I; \mathcal{R})$.

Теорема 3.8.1. *Для решения $u(x)$ модели*

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4), (3.8.5), \end{cases} \quad (3.8.6)$$

справедливы следующие высказывания:

- 1) $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(F'_{\sigma}; \overline{[0; \ell]}_{\sigma}; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_{\sigma})$;
- 2) *если $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) = S(F'_{\sigma}; \overline{[0; \ell]}_{\sigma}; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_{\sigma}) < \infty$, то $\text{sign}_1 u = \text{sign}_1 F'_{\sigma}$.*

Доказательство. Факторизуем задачу (3.8.6). Для этого введем следующие обозначения: $v(x) = u'_x$ и $y = (pu''_{x\mu})'_x - (ru'_x)$. Тогда,

$$\begin{aligned} y'_{\sigma} &= F'_{\sigma}, \\ u'_x &= v, \\ y(0) + \gamma_1 u(0) &= 0, \\ y(\ell) - \gamma_4 u(\ell) &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{cases} (pv'_{\mu})'_x - rv = y, \\ (pv'_{\mu})(0) - \gamma_2 v(0) = 0, \\ (pv'_{\mu})(\ell) + \gamma_3 v(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.8.11)$$

Задача (3.8.11) — это самостоятельная задача Штурма–Лиувилля, изучение которой при граничных условиях $v(0) = v(\ell) = 0$, проводилось в работе [107]; уравнения (3.8.7) и (3.8.8) связаны граничными условиями (3.8.9) и (3.8.10).

В [107] доказано существование положительной на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ функции $\varphi(x)$ такой, что уравнение $(pv'_{\mu})'_x - rv = y$ представимо в виде $\frac{1}{\varphi(x)} \left(p(x)\varphi(x-0)\varphi(x+0) \left(\frac{v(x)}{\varphi(x)} \right)'_{\mu} \right)'_x = y$. В выборе функции $\varphi(x)$ есть некоторый произвол: в качестве $\varphi(x)$ можно брать любую функцию вида $\alpha\varphi^*(x)$, где α — положительное число и $\varphi^*(x)$ — какое-то положительное на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ решение однородного уравнения. Покажем, что $\varphi(x)$ можно подобрать так, чтобы $(p\varphi'_{\mu})(0) - \gamma_2\varphi(0) = 0$ и $(p\varphi'_{\mu})(\ell) + \gamma_3\varphi(\ell) > 0$.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения $(pv'_\mu)'_x - rv = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $v(0) = 0$, $v'_\mu(0) = 1$ и $v(\ell) = 0$, $v'_\mu(\ell) = -1$ соответственно. Положим $\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$, где $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2$) — некоторые числа. Для того чтобы выполнялось первое условие $(p\varphi'_\mu)(0) - \gamma_2\varphi(0) = 0$, в качестве α_1 возьмем число $\frac{\gamma_2\varphi_2(0) + p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}{p(0)}\alpha_2$, которое, как нетрудно видеть, положительно, если $\alpha_2 > 0$. Для выполнения неравенства $p\varphi'_\mu(\ell) + \gamma_3\varphi(\ell) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_1(p(\ell)\varphi'_{1\mu}(\ell) + \gamma_2\varphi_1(\ell)) > p(\ell)\alpha_2$, или, так как $\alpha_2 > 0$, $\left(-\varphi'_{2\mu}(0) + \varphi_2(0)\frac{\gamma_2}{p(0)}\right)\left(\varphi'_1(\ell) + \varphi_1(\ell)\frac{\gamma_3}{p(\ell)}\right) > 1$.

Последнее неравенство выполняется, так как $\varphi_2(0) > 0$, $\varphi_1(\ell) > 0$, $\gamma_i > 0$ ($i = 2, 3$), $\varphi'_{1\mu}(\ell) > 1$ и $\varphi'_{2\mu}(0) < -1$. (Последние два неравенства следуют из возрастания $\varphi'_{i\mu}(x)$ на $[0; \ell]$).

Замечание 3.8.1. Функцию $\varphi(x)$ можно выбрать так, чтобы $(p\varphi'_\mu)(\ell) + \gamma_3\varphi(\ell) = 0$ и $(p\varphi'_\mu)(0) - \gamma_2\varphi(0) < 0$.

Введем обозначения $\mathcal{D}_0v = \frac{v}{\varphi}$ и $\mathcal{D}_1v = p\varphi^2(\mathcal{D}_0v)'_\mu$. Тогда $v = \varphi\mathcal{D}_0v$ и $pv'_\mu = \frac{1}{\varphi}\mathcal{D}_1v + p\varphi'_\mu\mathcal{D}_0v$, причем граничные условия превращаются в следующие

$$(\mathcal{D}_1v)(0) = 0 \text{ и } (\mathcal{D}_1v)(\ell) + \widehat{\gamma}(\mathcal{D}_0v)(\ell) = 0,$$

где $\widehat{\gamma} = \varphi(\ell)((p\varphi'_\mu)(\ell) + \gamma_3\varphi(\ell)) > 0$, соответственно.

Дальнейшие рассуждения основана на ряде вспомогательных утверждений.

Следуя работе [61] через $\varkappa(x+0)$ ($\varkappa(x-0)$) обозначим знак $u(x)$ справа (слева) от точки x . Если x — точка непрерывности $u(x)$ и $u(x) \neq 0$, то, очевидно, $\varkappa u(x+0) = \varkappa u(x-0) = \text{sign } u(x)$. Если же x не является точкой непрерывности $u(x)$, то $\varkappa u(x+0)$ и $\varkappa u(x-0)$, вообще говоря, различны и в случае, когда $u(x+0) \cdot u(x-0) \neq 0$ совпадают со знаками $u(x+0)$ и $u(x-0)$. Использование $\varkappa u(x+0)$ и $\varkappa u(x-0)$ позволяет нам приписывать этому нулю, вполне определенный знак в случаях, когда $u(x \pm 0) = 0$.

Пусть u_0, u_1, \dots, u_m — набор ненулевых чисел. Через $s(\cdot) = s(u_0, u_1, \dots, u_m)$ обозначим число перемен знака в наборе u_0, u_1, \dots, u_m ;

$s(u_0, u_1, \dots, u_m)$ может быть найдено по формуле

$$s(u_0, u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=0}^{m-1} s(u_i, u_{i+1})$$

и

$$s(\bar{u}, \bar{u}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{u} \cdot \bar{u} < 0 \\ 0, & \text{если } \bar{u} \cdot \bar{u} > 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $s(\cdot)$ обладает следующими свойствами

$$s(u_0, u_1, \dots, u_m) = s(-u_0, -u_1, \dots, -u_m) = s(u_m, u_{m-1}, \dots, u_1, u_0), \quad (3.8.12)$$

$$s(u_0, u_1) + s(u_0, -u_1) = 1.$$

Лемма 3.8.2 (Обобщенная теорема Ролля). Пусть $u(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, производная $u'_x(x)$ которой имеет конечное на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ изменение, и $u'_x(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда

$$S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(u'_x; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; BV[0; \ell]) + 1 - s(\varkappa u(+0), -\varkappa u'_x(+0)) - s(\varkappa u(\ell - 0), \varkappa u'_x(\ell - 0)). \quad (3.8.13)$$

Доказательство. На промежутке, где производная сохраняет знак, функция монотонна и меняет знак не более одного раза. Поэтому $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(u'_x; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; BV[0; \ell]) + 1$. Если справа от точки $x = 0$ знаки $u(x)$ и $u'_x(x)$ совпадают (это соответствует случаю $s(\varkappa u(+0), -\varkappa u'_x(+0)) = 1$), то на первом промежутке знакопостоянства производной сама функция $u(x)$ знака не меняет. Аналогично если слева от точки $x = \ell$ знаки $u(x)$ и $u'_x(x)$ различны, то $u(x)$ на последнем промежутке знакопостоянства производной $u'_x(x)$ знака не меняет (это соответствует равенству $s(\varkappa u(\ell - 0), \varkappa u'_x(\ell - 0)) = 1$). Лемма доказана. \square

Абсолютно аналогично доказывается следующая

Лемма 3.8.3. Пусть $v(x)$ μ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$; μ -производная $v'_\mu(x)$ принадлежит $BV[0; \ell]$; $S(v'_\mu; \overline{[0; \ell]}_\mu; AB_\mu[0; \ell]) < \infty$. Тогда

$$S(v; \overline{[0; \ell]}_\mu; AB_\mu[0; \ell]) \leq S(v'_\mu; \overline{[0; \ell]}_\mu; BV[0; \ell]) + 1 -$$

$$-s(\mathfrak{a}v(+0), -\mathfrak{a}v'_\mu(+0)) - s(\mathfrak{a}u(\ell-0), \mathfrak{a}u'_x(\ell-0)). \quad (3.8.14)$$

Лемма 3.8.4 (обобщенное правило Декарта). Пусть $u(x)$ принадлежит E , т. е. абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$, производная $u'_x(x)$ μ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$, квазипроизводная $(pu''_{x\mu})(x)$ абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$ и $(pu''_{x\mu})'_x(x)$ σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$. Если $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}$ имеет конечное число перемен знака, т. е. $S((pu''_{x\mu})''_{x\sigma}; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) < \infty$, то

$$\begin{aligned} S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) &\leq S((pu''_{x\mu})''_{x\sigma}; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) + 4 - \\ &- s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}u'_x(+0), \mathfrak{a}pu''_{x\mu}(+0), -\mathfrak{a}(pu''_{x\mu})'_x(+0), \mathfrak{a}(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(+0)) - \\ &- s(\mathfrak{a}u(\ell-), \mathfrak{a}u'_x(\ell-), \mathfrak{a}pu''_{x\mu}(\ell-), \mathfrak{a}(pu''_{x\mu})'_x(\ell-), \mathfrak{a}(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(\ell-)). \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

Замечание 3.8.2. Если функция $v(x)$ σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$ и $S(v'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) < \infty$, то (3.8.14) заменяется на

$$\begin{aligned} S(v; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma\overline{[0; \ell]}_S) &\leq S(v'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) + 1 - \\ &- s(\mathfrak{a}v(+0), \mathfrak{a}v'_\sigma(+0)) - s(\mathfrak{a}v(\ell-0), \mathfrak{a}v'_\sigma(\ell-0)). \end{aligned}$$

Доказательство. В (3.8.14) положим $v(x) = u'_x(x)$ и $v(x) = (pu''_{x\mu})'_x$ заменив при этом μ на σ , в (3.8.13) взяв в качестве $u(x) = (pu''_{x\mu})(x)$, сложим полученные неравенства, получим

$$\begin{aligned} S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) &\leq S((pu''_{x\mu})''_{x\mu}; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) + 4 - \\ &- s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}u'_x(+0)) - s(\mathfrak{a}u'_x(+0), -\mathfrak{a}pu''_{x\mu}(+0)) - \\ &- s(\mathfrak{a}pu''_{x\mu}(+0), -\mathfrak{a}(pu''_{x\mu})'_x(+0)) - s(\mathfrak{a}(pu''_{x\mu})'_x(+0), -\mathfrak{a}(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(+0)) - \\ &- s(\mathfrak{a}u(\ell-0), \mathfrak{a}u'_x(\ell-0)) - s(\mathfrak{a}u'_x(\ell-0), \mathfrak{a}pu''_{x\mu}(\ell-0)) - \\ &- s(\mathfrak{a}pu''_{x\mu}(\ell-0), \mathfrak{a}(pu''_{x\mu})'_x(\ell-0)) - s(\mathfrak{a}(pu''_{x\mu})'_x(\ell-0), \mathfrak{a}(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(\ell-0)). \end{aligned}$$

Остаётся применить теперь свойства (3.8.12), чтобы получить (3.8.15). Лемма доказана. \square

Замечание 3.8.3. Для решения $u(x)$ дифференциальной модели (3.8.1)–(3.8.5) справедливо аналогичное неравенство

$$\begin{aligned} S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) &\leq S(Lu; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) + 4 - \\ &- s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}u'_x(+0), \mathfrak{a}pu''_{x\mu}(+0), \mathfrak{a}y(+0), -\mathfrak{a}y'_\sigma(+0)) - \end{aligned}$$

$$-s(\mathfrak{a}u(\ell-0), \mathfrak{a}u'_x(\ell-0), \mathfrak{a}pu''_{x\mu}(\ell-0), \mathfrak{a}y(\ell-0), \mathfrak{a}y'_\sigma(\ell-0)). \quad (3.8.16)$$

В самом деле, из равенства $y'_\sigma = F'_\sigma$ следует неравенство

$$S(y; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma \overline{[0; \ell]}_S) \leq S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}[0; \ell]) + 1 - \\ -s(\mathfrak{a}y(+0), -\mathfrak{a}F'_\sigma(+0)) - s(\mathfrak{a}y(\ell-0), \mathfrak{a}F'_\sigma(\ell-0)). \quad (3.8.17)$$

Аналогично получаем неравенство

$$S(u'_x; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \leq S(y; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma[0; \ell]) + 2 - \\ -s(\mathfrak{a}u'_x(+0), -\mathfrak{a}pu''_{x\mu}(+0), y(+0)) - \\ -s(\mathfrak{a}u'_x(\ell-0), \mathfrak{a}pu''_{x\mu}(\ell-0), y(\ell-0)). \quad (3.8.18)$$

Складывая теперь неравенства (3.8.17), (3.8.18)

$$S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(u'_x; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu[0; \ell]) + 1 - \\ -s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}u'_x(+0)) - s(\mathfrak{a}u(\ell-), \mathfrak{a}u'_x(\ell-)) \quad (3.8.19)$$

и применяя свойство $s(\cdot)$, придём к (3.8.16).

Вернемся к доказательству теоремы 3.8.1.

Пусть $\varphi(x)$ — положительное решение однородного уравнения, удовлетворяющее неравенствам $pu'_\mu(0) - \gamma_2\varphi(0) < 0$ и $p\varphi'_\mu(\ell) + \gamma_3\varphi(\ell) > 0$. Тогда неравенство (3.8.18) можно переписать в следующем виде

$$S(u'_x; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \leq S(y; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma \overline{[0; \ell]}_S) + 2 - \\ -s(\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0), -\mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(+0), y(+0)) - \\ = s(\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(\ell-), y(\ell-)), \quad (3.8.20)$$

где $\mathcal{D}_0v = \frac{v}{\varphi}$ и $\mathcal{D}_1v = p\varphi^2 \left(\frac{v}{\varphi} \right)'_\mu$. Складывая теперь (3.8.17), (3.8.20), (3.8.19) будем иметь

$$S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma} \overline{[0; \ell]}_\sigma) + 4 - \\ -s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(+0), \mathfrak{a}y(+0), \mathfrak{a}F'_\sigma(+0)) - \\ -s(\mathfrak{a}u(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(\ell-), \mathfrak{a}y(\ell-), \mathfrak{a}F'_\sigma(\ell-))$$

(после применения свойств $s(\cdot)$ и равенств $\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0) = \mathfrak{a}u'_x(+0)$, $\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(\ell-) = \mathfrak{a}u'_x(\ell-)$).

Для доказательства $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma} \overline{[0; \ell]}_\sigma)$ остаётся показать, что

$$s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(+0), -\mathfrak{a}y(+0), \mathfrak{a}F'_\sigma(+0)) + \\ + s(\mathfrak{a}u(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(\ell-), \mathfrak{a}y(\ell-), \mathfrak{a}F'_\sigma(\ell-)) \geq 4. \quad (3.8.21)$$

В ряде чисел

$$\mathfrak{a}u(+0), -\mathcal{D}_0u'_x(+0), \mathcal{D}_1u'_x(+0), -\mathfrak{a}y(+0)$$

средние числа $\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0)$ и $\mathcal{D}_1u'_x(+0)$ имеют противоположные знаки, а крайние $-\mathfrak{a}u(+0)$, $-\mathfrak{a}y(+0)$ — одинаковые. Поэтому

$$s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathcal{D}_0u'_x(+0), \mathcal{D}_1u'_x(+0), -\mathfrak{a}y(+0)) \geq 2.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$s(\mathfrak{a}u(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(\ell-), \mathfrak{a}y(\ell-)) \geq 2. \quad (3.8.22)$$

Таким образом, (3.8.21) доказано.

Остаётся доказать, что $\text{sign}_1 u = \text{sign}_1 F'_\sigma$, если $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) = S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma} \overline{[0; \ell]}_\sigma) < \infty$. Если это не так, то

$$s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(+0), -\mathfrak{a}y(+0), \mathfrak{a}F'_\sigma(+0)) + \\ + s(\mathfrak{a}u(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(\ell-), \mathfrak{a}y(\ell-), \mathfrak{a}F'_\sigma(\ell-)) \leq 4. \quad (3.8.23)$$

Но ранее было доказано, что

$$s(\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(+0), -\mathfrak{a}y(+0)) \geq 2$$

и

$$s(\mathfrak{a}u(\ell-), -\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(\ell-), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(\ell-), \mathfrak{a}y(\ell-)) \geq 2.$$

По предположению $\mathfrak{a}u(+0)$ и $\mathfrak{a}F'_\sigma(+0)$ разных знаков, поэтому в ряду чисел

$$\mathfrak{a}u(+0), -\mathfrak{a}\mathcal{D}_0u'_x(+0), \mathfrak{a}\mathcal{D}_1u'_x(+0), -\mathfrak{a}y(+0), \mathfrak{a}F'_\sigma(+0)$$

как минимум три перемены знака, что вместе с (3.8.22) даёт неравенство, противоречащее (3.8.23). Теорема доказана. \square

3.9 Осцилляционность спектра дифференциальной модели при наличии упругой подушки

В этом параграфе устанавливается осцилляционность спектра следующей спектральной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = \lambda M'_{\sigma}u, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (3.9.1)$$

где λ — спектральный параметр. Ниже под записью $Lu = \delta(x - s)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака, мы будем понимать уравнение $Lu = \Theta'_{\sigma_s}(x - s)$ ($\Theta(x)$ функция Хевисайда) и $\sigma_s(x)$ — функция равная $\sigma(x)$, если $x < s$, и $\sigma(x) + 1 - \Delta\sigma(s)$, если $x > s$. Другими словами, в точке s приложена единичная сила.

Теорема 3.9.1. Пусть $p(x)$ — функция ограниченной на $[0; \ell]$ вариации; $p(x) > 0$; $r(x) \geq 0$, $\int_0^{\ell} \frac{d\mu(t)}{p(t)}$, $\min_{x \in [0; \ell]_{S(\mu)}} p(x) > 0$ и $Q(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[\overline{0; \ell}]_S$; $Q(x)$ — неубывающая на $[\overline{0; \ell}]_S$ функция; $Lu = 0$ не осциллирует на $[\overline{0; \ell}]_{\sigma}$; $M(x)$ — σ -абсолютно непрерывна на $[\overline{0; \ell}]_S$ и возрастает на $[\overline{0; \ell}]_S$. Тогда спектр (3.9.1) является осцилляционным, т. е.

- 1) спектр состоит из неограниченной последовательности вещественных положительных простых (в смысле геометрической кратности) собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, единственная точка сгущения которых есть $+\infty$;

Если $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ — соответствующие собственные функции, то для них:

- 2) система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{k=\infty}$ есть M -система;
- 3) при каждом $k (= 0, 1, 2, \dots)$ функция $\varphi_k(x)$ имеет в $(0; \ell)$ точно k нулей, причем нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются.
- 4) при любых $k \leq n$ и произвольных α_i функция $\sum_{i=k}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более n нулей и не менее k перемен знака.

Доказательство. Покажем вначале, что справедливо неравенство $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(Lu; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma)$, где $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell])$ — количество перемен знака решения $u(x)$ модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.9.2)$$

Если $S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) = \infty$, то неравенство очевидно.

Пусть $S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) = m$. Предположим, что для соответствующего решения $u(x)$ модели (3.9.2) справедливо неравенство $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \geq m + 1$.

Из леммы 3.8.1 вытекает, что $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma\overline{[0; \ell]}_S) \leq m + 1$.

Неравенство $S(\mathcal{D}_2u; \overline{[0; \ell]}_\mu; AB[0; \ell]) \leq m + 2$ доказывается аналогично лемме 3.8.1. Отсюда немедленно следуют неравенства $S\left(\psi_2 \frac{d}{d\mu}(\mathcal{D}_1u); \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}\right) \leq m + 3$ и (так как $\psi_2(x) > 0$) $S\left(\frac{d}{d\mu}(\mathcal{D}_1u); \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}\right) \leq m + 3$. Последнее неравенство

допускает усиление: $S\left(\frac{d}{d\mu}(\mathcal{D}_1u); \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}\right) \leq m + 1$.

По определению $S\left(\frac{d}{d\mu}(\mathcal{D}_1u); \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}\right) = k$ существует разбиение отрезка $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ на $k + 1$ подмножеств $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ ненулевой μ -меры, на каждом из которых $\frac{d}{d\mu}(\mathcal{D}_1u)$ сохраняет знак, отлична от тождественного нуля, и на соседних — принимает значения разных знаков.

Рассмотрим первое множество $[\tau_0, \tau_1]$. На нем $(\mathcal{D}_1u)(x)$ монотонна и $(\mathcal{D}_1u)(0) = (\psi_1\psi_0u')(0) + (\psi_1\psi'_0u)(0) = 0$, поэтому $(\mathcal{D}_1u)(x)$ на $[\tau_0, \tau_1]$ сохраняет знак, другими словами, $(\mathcal{D}_1u)(x)$ знака на $[\tau_0, \tau_1]$ не меняет. Аналогично на последнем множестве $[\tau_k; \tau_{k+1}]$ $(\mathcal{D}_1u)(x)$ сохраняет знак. Из последних двух выводов и вытекает требуемое усиление.

Аналогично доказывается справедливость импликации

$$S\left(\frac{d}{dx}(\mathcal{D}_0u); \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}\right) = k \rightarrow S(\mathcal{D}_0u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq k - 1.$$

Теперь из неравенства $S\left(\frac{d}{dx}(\mathcal{D}_0u); \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}\right) \leq m + 1$ следует

$S(\mathcal{D}_0 u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq m$. Откуда $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq m$ ввиду $\psi_0(x) > 0$, что противоречит предполагаемому неравенству $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \geq m + 1$.

Доказанное неравенство $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(Lu; \overline{[0; \ell]_\sigma}; L_{1,\sigma} \overline{[0; \ell]_\sigma})$ эквивалентно неравенству

$$S(GF; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]_\sigma}; L_{1,\sigma} \overline{[0; \ell]_\sigma}), \quad (3.9.3)$$

где G — интегральный оператор, ядро которого является функцией влияния дифференциальной модели

$$\begin{cases} Lu = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.9.4)$$

В свою очередь (3.9.3) означает, что G является знакорегулярным, последнее эквивалентно [71] знакопостоянству каждого из ассоциированных ядер

$$G \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} G(x_1, s_1) & \dots & G(x_1, s_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ G(x_m, s_1) & \dots & G(x_m, s_m) \end{vmatrix} \quad (3.9.5)$$

для упорядоченных наборов $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq \ell$, $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m \leq \ell$.

Напомним, что знак $u(x)$ на первом из промежутков, на которые разбивается отрезок $[0; \ell]$, называют знаком $u(x)$ и обозначается $\text{sign}_1 u$.

Лемма 3.9.1. Пусть $S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]_\sigma}; L_{1,\sigma} \overline{[0; \ell]_\sigma}) = S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) = m < \infty$. Тогда

$$\text{sign}_1 u = \text{sign}_1 F'_\sigma. \quad (3.9.6)$$

Доказательство. Ранее были доказаны неравенства

$$S(\mathcal{D}_3 u; \overline{[0; \ell]_S}; AB_\sigma \overline{[0; \ell]_S}) \leq m + 1, S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; BV[0; \ell]) \leq m + 2,$$

$S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]_{S(\mu)}}; AB_\mu[0; \ell]) \leq m + 1$. Из обобщенной теоремы Ролля следует, что $S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]_{S(\mu)}}; AB_\mu[0; \ell]) \geq m + 1$. Неравенства $S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]_{S(\mu)}}; AB_\mu[0; \ell]) \leq m + 1$ и $S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]_{S(\mu)}}; AB_\mu[0; \ell]) \geq m + 1$ нам дают $S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]_{S(\mu)}}; AB_\mu[0; \ell]) = m + 1$. Из леммы 3.3.1 следует $S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; BV[0; \ell]) \geq m + 2$, что вместе с неравенством $S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; BV[0; \ell]) \leq m + 2$, приводит нас к равенству $S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; BV[0; \ell]) = m + 2$.

Аналогично мы получим $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]_S}; AB_\sigma[0; \ell]) = m + 1$.

Предположим, что (3.9.6) неверно. Пусть для определенности $\text{sign}_1 F'_\sigma = 1$. Тогда $\text{sign}_1 u = -1$.

Равенство $S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]_\sigma}; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]_\sigma}) = m$ означает существование разбиения $\overline{[0; \ell]_\sigma}$ на $m + 1$ подмножеств точками $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = \ell$, таких, что $F'_\sigma (= \mathcal{D}_4u)$ на каждом сохраняет знак, не эквивалентна нулю и на соседних принимает значение разных знаков. По предложению $(\mathcal{D}_4u)(x) \geq 0$ на $[x_0; x_1]$, т. е. $\psi(x) \frac{d}{d\sigma}(\mathcal{D}_3u)(x) \geq 0$ и $\neq 0$. Так как $\psi_k(x) > 0$, то $\frac{d}{d\sigma}(\mathcal{D}_3u)(x) \geq 0$, т. е. $(\mathcal{D}_3u)(x)$ не убывает на $[x_0; x_1]$. Равенство $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]_S}; AB_\sigma\overline{[0; \ell]_S}) = m + 1$ означает, что \mathcal{D}_3u будучи монотонной на каждом $[x_i; x_{i+1}]$ непременно изменяет знак и, в частности, на $[x_0; x_1]$. Отсюда следует $\text{sign}_1 \mathcal{D}_3u = -1$. Рассуждая аналогично мы придем к равенствам $\text{sign}_1 \mathcal{D}_2u = 1$, $\text{sign}_1 \mathcal{D}_1u = -1$ и $\text{sign}_1 \mathcal{D}_0u = 1$. Последнее означает, что $\text{sign}_1 u = 1$, что противоречит предложению $\text{sign}_1 u = -1$. Лемма доказана. \square

Из неравенства (3.9.1) и леммы 3.9.1 следует, что все ассоциированные ядра (3.9.5) неотрицательны для упорядоченных наборов x_i, s_i :

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m \quad \text{и} \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m.$$

В самом деле, при $m = 1$ ассоциированное ядро (3.9.5) принимает вид $G(x_1, s_1)$, неотрицательность которого очевидна. Пусть

$$G \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \geq 0$$

для всех $k \leq m$ и упорядоченных наборов $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq \ell$, $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq \ell$.

Покажем неотрицательность

$$G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & x_{m+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m & s_{m+1} \end{pmatrix}$$

для всех x_i, s_i таких, что $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m+1} \leq \ell$ и $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{m+1} \leq \ell$. Рассмотрим функцию

$$u(x) = G \begin{pmatrix} x & x_2 & \dots & x_m & x_{m+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m & s_{m+1} \end{pmatrix}. \quad (3.9.7)$$

Раскрыв последний определитель по первой строке, будем иметь

$$u(x) = G(x, s_1)\alpha_1 + G(x, s_2)\alpha_2 + \dots + G(x, s_{m+1})\alpha_{m+1}, \quad (3.9.8)$$

где α_i — алгебраическое дополнение к элементу, стоящему на пересечении первой строки и i -го столбца. Функция $u(x)$, определенная равенством (3.9.8), является решением дифференциальной модели (3.9.4) при $F'_\sigma(x) = \alpha_1\delta(x - s_1) + \alpha_2\delta(x - s_2) + \dots + \alpha_{m+1}\delta(x - s_{m+1})$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. У функции (3.9.7), как нетрудно видеть, $m + 1$ переменная знака, т. е. $S(u; [0; \ell]; C[0; \ell]) = m + 1$. Тогда и у $F'_\sigma(x)$ столько же: $S(F'_\sigma; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) = m + 1$. Из теоремы 3.9.1 следует, что $\text{sign}_1 u = \text{sign}_1 F'_\sigma = \text{sign}_1 \alpha_1 = 1$, так как $\alpha_1 = G \begin{pmatrix} x_2 & \dots & x_{m+1} \\ s_2 & \dots & s_{m+1} \end{pmatrix} \geq 0$ по предположению индукции.

Покажем теперь, что $G(x, x) > 0$ для всех $x \in (0; \ell)$.

Предположим, что существует точка $x_0 \in (0; \ell)$, в которой $G(x_0, x_0) = 0$. Функция $u(x) = G(x; x_0)$ является решением дифференциальной модели

$$\begin{cases} Lu = \delta(x - x_0), \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0. \end{cases}$$

Так как однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ и правая часть сохраняет на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ знак, то $S(\mathcal{D}_4 u; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}\overline{[0; \ell]}_\sigma) = 0$. Отсюда немедленно следует, что $S(\mathcal{D}_3 u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma\overline{[0; \ell]}_S) \leq 1$ и $S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; BV[0; \ell]) \leq 2$. С другой стороны, из обобщенной теоремы Ролля вытекает $S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \geq 3$. В самом деле, на каждом $\overline{(0; x_0)}_{S(\mu)}$ и $\overline{(x_0, \ell)}_{S(\mu)}$ $\mathcal{D}_1 u$ меняет знак минимума один раз, и x_0 — точка минимума, т. е. в некоторой окрестности x_0 $\mathcal{D}_1 u$ меняет знак с «−» на «+»; в то время как в первой точке (если таких точек несколько) $\overline{(0; x_0)}_{S(\mu)}$ $\mathcal{D}_1 u$ меняет знак с «+» на «−» и в последней точке (если опять таких точек несколько) — с «+» на «−». Теперь рассуждая аналогичным образом, опираясь при этом на лемму 3.3.1, мы приходим к неравенству $S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \geq 3$, которое противоречит установленному ранее $S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; BV[0; \ell]) \leq 2$. Таким образом, нулей $G(x, x)$ в интервале $(0; \ell)$ не имеет.

Покажем теперь по индукции, что

$$G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} > 0 \quad (x_1 < x_2 < \dots < x_m). \quad (3.9.9)$$

При $m = 1$ (3.9.9) превращается в

$$G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = G(x_1, x_1) > 0,$$

которое было доказано выше. Предположим, что (3.9.9) выполнено для всех $m \leq k$. Покажем справедливость (3.9.9) при $m = k + 1$. Предположим противное: для некоторого набора $x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1}$

$$G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Матрица, порождающая определитель

$$G \begin{pmatrix} x & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} \\ s & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} \end{pmatrix},$$

где x и s — произвольные числа из (x_1, x_2) , вполне неотрицательна (так как все миноры вполне неотрицательны).

Ранг матрицы равен k (см. [71, гл. II, § 7, лемма 2], так как

$$G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots & x_k \\ x_1 & x_2 \dots & x_k \end{pmatrix} > 0 \quad \text{и} \quad G \begin{pmatrix} x_2 \dots & x_{k+1} \\ x_2 \dots & x_{k+1} \end{pmatrix} > 0$$

(в силу предположения индукции).

Поэтому

$$u(x, s) = G \begin{pmatrix} x & x_2 \dots & x_{k+1} \\ s & x_2 \dots & x_{k+1} \end{pmatrix} \equiv 0 \quad (3.9.10)$$

на $(x_1; x_2) \times (x_1; x_2)$. Зафиксировав произвольным образом $s \in (x_1; x_2)$, разложим (3.9.10) по первой строке:

$$u(x, s) = c_1 G(x, s) + c_2 G(x, x_2) + \dots + c_{k+1} G(x, x_{k+1})$$

Так как $u(x, s)$ как функция от x является решением дифференциальной модели (3.9.4) при $F'_\sigma(x) = c_1 \delta(x - s) + c_2 \delta(x - x_2) + \dots + c_{k+1} \delta(x - x_{k+1})$, и

$u(x, s) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки s , то $c_1 = 0$. С другой стороны, c_1 является алгебраическим дополнением элемента $G(x, s)$ в (3.9.10) и равен

$$c_1 = G \begin{pmatrix} x_2 \cdots x_{k+1} \\ x_2 \cdots x_{k+1} \end{pmatrix},$$

более того, $c_1 > 0$ в силу предположения индукции. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно, и (3.9.9) доказано при $m = k + 1$.

Таким образом, непрерывная функция $G(x, s)$ является ядром Келлога; утверждение теоремы следует теперь из теории «ядер Келлога» (см. [19–21]). Теорема доказана. \square

Замечание 3.9.1. В доказательстве теоремы было показано неравенство $G(x, x) > 0$; аналогичными рассуждениями можно доказать, $G(x, s) > 0$ на $(0; \ell) \times (0; \ell)$ и тогда $G(x, s)$ — осцилляционное ядро.

Замечание 3.9.2. Рассуждения, проведенные в последней теореме близки к рассуждениям, изложенным в работах [62], [184].

Выводы

В главе изучена дифференциальная модель четвертого порядка, которая моделирует малые деформации стержневой системы, имеющей в точках шарнирного соединения локализованные особенности типа пружин, реагирующих на поворот. Наличие подобных точек приводит к отсутствию уже первой производной (в классическом смысле) решения модели, не говоря о старших производных. Привлечение теории обобщенных функций, к сожалению, требует решения проблемы умножения обобщенной функции на разрывную, и в дополнении ко всему двукратного дифференцирования, например, производная u'' содержит δ -функции умножается на функцию ограниченной на $[0; \ell]$ вариации, и, чтобы получить член $(pu'')''$, результат умножения необходимо дважды продифференцировать. Применение понятия производных по мере к математическим моделям четвертого порядка дает поточечную трактовку уравнения, что позволяет обойти эту проблему (и не только). Основные результаты главы.

1. Изучена линейная дифференциальная модель четвертого порядка, моделирующая малые деформации растянутой стержневой системы со сложной внутренней структурой, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями.
2. Доказана корректность полученной математической модели: малое изменение внешнего воздействия силы и/или среды, дает малое изменение решения.
3. Изучено важное для качественной теории дифференциальных моделей свойство — неосцилляция решений однородного уравнения.
4. Показано, что линейная дифференциальная модель обладает осцилляционным спектром, т. е. спектр состоит только из собственных частот, каждой из которых с точностью до постоянного множителя соответствует единственная амплитудная функция; у амплитудной функции, отвечающей ведущей частоте, нулей внутри отрезка нет, у каждой последующей количество нулей на единицу больше, чем у предыдущей, причем нули перемежаются.

Глава 4

Податливость сингулярных математических моделей четвертого порядка

В этой главе мы изучим свойство податливости двух сингулярных математических моделей четвертого порядка. Первая модель описывает малые деформации консоли, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, один конец которой свободен, а второй — защемлен; у второй модели — один конец свободен, а другой — закреплен шарнирно. В последнем параграфе получены оценки функции влияния дифференциальной модели, которые имеют не только самостоятельное значение, но и позволяют изучать некоторые нелинейные математические модели четвертого порядка.

На протяжении всей главы мы предполагаем выполненными следующие условия:

1) x , $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$;

2) $p(x) > 0$ для всех $x \in [0; \ell]$, $\min_{\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$;

3) интеграл $\int_0^\ell \frac{d\mu(x)}{p(x)}$ конечен;

4) $r(x) \geq 0$ на всем $\overline{[0; \ell]}_S$;

5) $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0; \ell]}_S$.

4.1 Положительность функции влияния математической модели четвертого порядка

В этом параграфе доказывается положительность в $(0; \ell) \times (0; \ell)$ функции влияния математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = pu''_{x\mu}(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = pu''_{x\mu}(\ell) + \gamma_2 u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

при условиях невырожденности модели и неосцилляции однородного уравнения, которая возникает при моделировании малых деформаций растянутой системы шарнирно сочлененных стержней, в точках шарнирного сочленения присутствует пружина реагирующая на поворот, и помещенной во внешнюю среду, локальный коэффициент упругости которой равен dQ , возникающей под воздействием силы dF .

Покажем справедливость импликации: $F'_{\sigma}(x) \geq 0$ на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma} \Rightarrow u(x) \geq 0$ на $[0; \ell]$.

Сначала заметим, если утверждение неверно, то решение $u(x)$ дифференциальной модели (4.1.1) не может принимать только неположительные значения. Предполагая, что это не так, умножим обе части уравнения в (4.1.1) на $u(x)$ и проинтегрируем по мере σ по всему $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$:

$$\int_0^{\ell} \left((pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} \right) u(x) d\sigma = \int_0^{\ell} F'_{\sigma}(x)u(x) d\sigma.$$

Разбивая интеграл в левой части последнего равенства на три, и первый интеграл дважды проинтегрируем по частям, второй — один раз, в силу граничных условий, будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma_1 u_x'^2(0) + \gamma_2 u_x'^2(\ell) + \int_0^{\ell} pu_{x\mu}'^2(x) d\sigma + \\ + \int_0^{\ell} ru'^2(x) d\sigma + \int_0^{\ell} u^2(x)Q'_{\sigma}(x) d\sigma = \int_0^{\ell} F'_{\sigma}(x)u(x) d\sigma. \end{aligned}$$

И мы приходим к противоречию, так как слева стоит неотрицательное число, а справа — неположительное. (Возможность $u(x) \equiv 0$ исключается ввиду

$F(x) \neq \text{const.}$) Таким образом, если $u(x)$ принимает отрицательные на $(0; \ell)$ значения, то она обязана принимать и положительные значения.

Так как однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, то существуют положительные функции $\psi_i(x)$, ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) такие, что $Lu = \mathcal{D}_4u$, где $\mathcal{D}_k u = \psi_k \frac{d}{d\mu_k} \mathcal{D}_{k-1} u$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\mathcal{D}_0 u = \psi_0 u$, $\mu_1 = x$, $\mu_2 = \mu$, $\mu_3 = \mu_1$, $\mu_4 = \sigma$.

Применяя теперь к $(\mathcal{D}_0 u)(x)$ обобщенную теорему Ролля, мы получим, что $(\mathcal{D}_1 u)(x)$ меняет знак как минимум в двух точках. Отсюда $S(\mathcal{D}_1 u; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \geq 2$.

Лемма 4.1.1. Пусть μ -абсолютно непрерывная на $\overline{[0; \ell]}_S$ функция $v(x)$ имеет на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ m перемен знака, причем в граничных точках равна нулю, или $v(0) \cdot v'_\mu(0) > 0$ и $v(\ell) \cdot v'_\mu(\ell) < 0$. Тогда $S(v'_\mu; \overline{[0; \ell]}_\mu; L_{1,\mu} \overline{[0; \ell]}_\mu) \geq m + 1$.

Доказательство. Предположим, что $S(v'_\mu; \overline{[0; \ell]}_\mu; L_{1,\mu} \overline{[0; \ell]}_\mu) = k$ и $k \leq m$. Из леммы 3.8.1 вытекает неравенство $S(v; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \leq k + 1$. Согласно определению числа перемен знака, множество $\overline{[0; \ell]}_\mu$ можно разбить на $k + 1$ связных подмножеств, μ -мера каждого из них отлична от нуля, $v'_\mu(x)$ сохраняет на каждом из них знак и на соседних принимает значения разных знаков. Рассмотрим крайние множества на которые разложено множество $\overline{[0; \ell]}_\mu$. На каждом из них $v'_\mu(x)$ сохраняет знак, поэтому $v(x)$ монотонна, но по условию $v(0) = v(\ell) = 0$, и, следовательно, $v(x)$ на крайних множествах знака не меняет. В случае, когда $v(0) \cdot v'_\mu(0) > 0$ мы также имеем, что $v(x)$ знака не меняет. Аналогично рассматривается второй случай: $v(\ell) \cdot v'_\mu(\ell) < 0$. Таким образом, $S(v; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \leq k - 1$, а это противоречит условию леммы. \square

Из доказанной леммы мы находим, что $S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; AB[0; \ell]) \geq 3$.

С другой стороны, из неравенства $F'_\sigma(x) \geq 0$ вытекает, что $S(\mathcal{D}_3 u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma \overline{[0; \ell]}_S) \leq 1$, причем, если перемена знака есть, то с « $-$ » на « $+$ ». Так как $\mathcal{D}_3 u = \psi_3 \frac{d}{d\mu_2} \mathcal{D}_2 u$, то из последнего неравенства легко получить $S(\mathcal{D}_2 u; [0; \ell]; AB[0; \ell]) \leq 2$, которое противоречит установленному выше.

Таким образом, решение $u(x)$ дифференциальной модели (4.1.1) не может принимать отрицательных значений при $F'_\sigma(x) \geq 0$.

Покажем, что $G(x, s) > 0$ для всех $(x, s) \in (0; \ell) \times (0; \ell)$. Если $G(x, s)$ обращается в нуль в некоторой внутренней точке (x_0, s_0) квадрата $[0; \ell] \times [0; \ell]$,

то функция $u(x) = G(x, s_0)$ является решением модели (4.1.1) при $F'_\sigma(x) = \delta(x - s_0)$.

Ранее были доказаны неравенства $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma \overline{[0; \ell]}_S) \leq 1$ и $S(\mathcal{D}_2u; [0; \ell]; AB[0; \ell]) \leq 2$. С другой стороны, аналогично доказываются неравенства, $S(\mathcal{D}_1u; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \geq 2$ и $S(\mathcal{D}_2u; [0; \ell]; AB[0; \ell]) \geq 3$. Полученное противоречие и доказывает положительность $G(x, s)$ внутри квадрата $[0; \ell] \times [0; \ell]$.

Лемма 4.1.2. Пусть $u(x)$ – решение (4.1.1) с неосциллирующим однородным дифференциальным уравнением $Lu = 0$ и $F'_\sigma \geq 0$ на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$. Тогда $u(x) > 0$ для всех $x \in (0; \ell)$, $u''_{x\mu}(0) > 0$ ($u''_{x\mu}(\ell) < 0$), если $u(0) = u'_x(0) = 0$ ($u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$).

Доказательство. Положительность $u(x)$ внутри $(0; \ell)$ была доказана выше. Покажем, что $u''_{x\mu}(0) > 0$. Предположим противное: $u''_{x\mu}(0) \leq 0$. Так как $Lu = 0$ не осциллируется на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, то $Lu = \mathcal{D}_4u$ и, как нетрудно видеть, $(\mathcal{D}_2u)(0) \leq 0$.

Ранее мы выяснили, что $S(\mathcal{D}_1u; \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}; AB_\mu \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}) \geq 1$, причём \mathcal{D}_1u меняет знак с «+» на «-». Далее, $S(\mathcal{D}_2u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \geq 2$. С другой стороны, $S(\mathcal{D}_4u; \overline{[0; \ell]}_\sigma; L_{1,\sigma}[0; \ell]) = 0$, поэтому, $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma[0; \ell]) \leq 1$ и $S(\mathcal{D}_2u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq 2$. Тогда, $S(\mathcal{D}_2u; [0; \ell]; C[0; \ell]) = 2$. Отсюда следует $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma[0; \ell]) \geq 1$, что вместе с неравенством $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma[0; \ell]) \leq 1$, нам даёт $S(\mathcal{D}_3u; \overline{[0; \ell]}_S; AB_\sigma[0; \ell]) = 1$. Так как $F'_\sigma(x) \geq 0$, то \mathcal{D}_3u не убывает на $\overline{[0; \ell]}_S$, т. е. меняет знак с «+» на «-». Таким образом, отрезок $\overline{[0; \ell]}_S$ можно разбить на два подмножества $\overline{[0; \tau_1]}_S$ и $\overline{[\tau_1; \ell]}_S$ таких, что $\mathcal{D}_3u \leq 0$ ($\neq 0$) на $\overline{[0; \tau_1]}_S$ и $\mathcal{D}_3u \geq 0$ ($\neq 0$) на $\overline{[\tau_1; \ell]}_S$. Тогда, $(\mathcal{D}_2u)(x)$ на $[0; \tau_1]$ не возрастает, что вместе с неравенством $(\mathcal{D}_2u)(0) \leq 0$ означает отсутствие перемены знака \mathcal{D}_2u на $[0; \tau_1]$, т. е. $S(\mathcal{D}_2u; [0; \ell]; C[0; \ell]) \leq 1$. Последнее противоречит равенству $S(\mathcal{D}_2u; [0; \ell]; C[0; \ell]) = 2$.

Аналогично доказывается $u''_{x\mu}(\ell) < 0$. Лемма доказана. □

Выше мы получили положительность функции влияния математической модели (4.1.1), аналогично мы получим, что $g(x, s) > 0$, где $g(x, s)$ – функция влияния модели

$$\begin{cases} u'''_{x\mu x\sigma} = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

4.2 Достаточные условия податливости математической модели сингулярной консоли

В этом параграфе устанавливаются достаточные условия положительности функции влияния дифференциальной модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_{\sigma} + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x); \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

при условии $r(\ell) = 0$. Последнее условие позволяет свести (4.2.1) к изучению модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x); \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

так как существует строго возрастающая положительная функция $\varphi(x)$, такая, что $(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} \equiv \left(\frac{1}{\varphi} \left(p\varphi^2 \left(\frac{u'_x}{\varphi} \right)' \right)' \right)'_{\sigma}$ и $\varphi'(\ell) = 0$ (см. замечание 3.8.1 на странице 176).

Рассмотрим сначала модель

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) + \varkappa u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x); \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

где \varkappa — положительный параметр. Очевидно, что (4.2.3) однозначно разрешима при любом $\varkappa \geq 0$ и равносильна $u + \varkappa Au = BF$, где $(Au)(x) = \int_0^{\ell} g(x, s)u(s) dQ(s)$, $(BF)(x) = \int_0^{\ell} g(x, s) dF(s)$, $g(x, s)$ — функция влияния модели $(pu''_{xx})''_{x\sigma} = F'_{\sigma}$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $(pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0$.

Будем говорить, что положительный оператор A , определенный на банаховом пространстве E с конусом K , является u -положительным, если для всех $v \in K$ справедливо $Av \geq \|Av\|_E \cdot u$.

Теорема 4.2.1. Пусть выполнены условия 1)–5) и $F(x)$ не убывает на $\overline{[0; \ell]}_S$. Тогда при достаточно малом положительном ε задача (4.2.3) положительно обратима.

Доказательство. При положительном ε уравнение $u + \varepsilon Au = BF$ допускает запись $Au + \lambda u = \lambda BF$, где $\lambda = 1/\varepsilon$. Из очевидной u -положительности оператора B вытекает неравенство $(BF)(x) \geq kx^2 \|BF\|_C$ при некотором положительном k . Нетрудно видеть, что для функции $g(x, s)$ справедливо неравенство $g(x, s) \leq kx^2 \cdot v(s)$ при некоторой ограниченной σ -суммируемой функции $v(s)$. Тогда, $(ABF)(x) \leq \|BF\|_C \cdot (Av_0)(x) \leq kx^2 \|BF\|_C \cdot \beta$, где $\beta = \int_0^\ell v(s) dQ(s)$ и $v_0(x) \equiv 1$. Но $kx^2 \|BF\|_C \leq (BF)(x)$, если $k \leq \frac{1}{\ell^2}$, поэтому, $(ABF)(x) \leq \beta(BF)(x) \leq \lambda(BF)(x)$, если $\beta \leq \lambda$. Если, вдобавок, λ больше спектрального радиуса $\rho(A)$ вполне непрерывного оператора A , то уравнение $Au + \lambda u = \lambda BF$ равносильно $\lambda^2 u - A^2 u = \lambda(\lambda BF - ABF)$. Таким образом, при $\lambda > \beta$ и $\lambda > \rho(A)$ решение уравнения $Au + \lambda u = \lambda BF$ положительно при любой неубывающей σ -абсолютно непрерывной на $\overline{[0; \ell]}_S$ функции. Тогда, при достаточно малых положительных ε , математическая модель (4.2.3) обладает свойством податливости. Теорема доказана. \square

Теорема 4.2.2. Если кроме условий 1)–5) выполнено $Q(\ell) - Q(0) > 0$, $Q(x)$ непрерывна на концах $\overline{[0; \ell]}_S$, $g(x; s)$ — функция влияния дифференциальной модели $(ru''_{xx})''_{x\sigma}(x) = F'_\sigma(x)$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $(ru''_{xx})(\ell) = (ru''_{xx})'_x(\ell) = 0$, то величину $Q(\ell) - Q(0)$ можно сделать настолько малой, что модель (4.2.2) положительно обратима.

Доказательство. Так как предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x; t)}{kx^2}$ положителен для всех $t > 0$, то найдётся такая односторонняя окрестность $(0; \delta)$ точки $x = 0$, что $\frac{g(x; t)}{kx^2} \leq y(t)$ для всех $x \in (0; \delta)$ и $t \in (0; \ell]$. Если же $x \in [\delta; \ell]$ и всех $t > 0$, то неравенство $\frac{g(x; t)}{kx^2} \leq \frac{\max_{\delta \leq x \leq \ell} g(x; t)}{\min_{\delta \leq x \leq \ell} kx^2} = y(t)$ справедливо при всех $x \in [\delta; \ell]$ и $t \in (0; \ell]$, при этом $y(t)$ — непрерывна и ограничена на $(0; \ell]$, более того, интеграл Стильеса $\int_0^\ell y(t) dQ(t)$ существует и конечен.

Таким образом получаем оценку $\frac{g(x;t)}{kx^2} \leq \max\{C(t); y(t)\} = \omega(t)$. Так как $g(x, s) \geq kx^2 g(\tau, s)$ при всех x, s, τ , то последовательно находим $\frac{g(x;t)g(t;s)}{g(x;s)} \leq \frac{g(x;t)g(t;s)}{kx^2 \max_x g(x;s)} \leq \frac{g(x;t)}{kx^2}$ ввиду очевидного неравенства $g(x, s) \leq \max_x g(x, s)$. Окончательно мы получаем $\frac{g(x;t)g(t;s)}{g(x;s)} \leq \omega(t)$, при

этом интеграл $\int_0^\ell \omega(t) dQ(t)$, как нетрудно видеть, конечен. Отсюда следует,

что величина $\sup_{x;s} \int_0^\ell \frac{g(x;t)g(t;s)}{g(x;s)} dQ(t)$ конечна.

Для доказательства второй части теоремы запишем уравнение, эквивалентное дифференциальной модели (4.2.3) при $\varkappa = 1$:

$$\begin{aligned} u(x) - (A^2 u)(x) &= (BF)(x) - (ABF)(x) = \\ &= \int_0^\ell g(x;s) dF(s) - \int_0^\ell g(x;t) \left(\int_0^\ell g(t;s) dF(s) \right) dQ(t) = \\ &= \int_0^\ell g(x;s) dF(s) - \int_0^\ell \left(\int_0^\ell g(x;t)g(t;s) dQ(t) \right) dF(s) \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

(в последнем интеграле в правой части (4.2.4) смена порядка интегрирования законна ввиду непрерывности $g(x, s)$).

Тогда (4.2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x) - (A^2 u)(x) &= (BF)(x) - (ABF)(x) = \\ &= \int_0^\ell g(x;s) \cdot \left(1 - \int_0^\ell \frac{g(x;t)g(t;s)}{g(x;s)} dQ(t) \right) dF(s). \quad (4.2.5) \end{aligned}$$

Остается заметить, что уменьшение разности $Q(\ell) - Q(0)$ приводит к уменьшению величины $\int_0^\ell \frac{g(x;t)g(t;s)}{g(x;s)} dQ(t)$, в частности, можно добиться спра-

ведливости неравенства $\int_0^\ell \frac{g(x;t)g(t;s)}{g(x;s)} dQ(t) \leq 1$, следовательно, правая

часть равенства (4.2.5) есть неотрицательный оператор. Последнее означает положительную обратимость математической модели (4.2.2). \square

4.3 Положительность функции влияния сильно сингулярной математической модели

В этом параграфе рассматривается вопрос о положительности функции влияния сильно сингулярной математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_{\sigma} + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x), & x \in \overline{[0; \ell]}_{\sigma}, \\ u(0) = (pu''_{xx})(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

при условии $r(\ell) = 0$. Последнее условие, как и в предыдущем параграфе, позволяет свести (4.2.1) к изучению модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x), & x \in \overline{[0; \ell]}_{\sigma}, \\ u(0) = (pu''_{xx})(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Так как при $Q(x) \equiv \text{const}$ задача (4.3.1) не обладает свойством невырожденности, то всюду далее предполагается, что $Q(\ell) > Q(0)$.

Теорема 4.3.1. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0; \ell]$, причём $Q(\ell) > Q(0)$. Тогда разность $Q(\ell) - Q(0)$ можно сделать на столько малой, что решение $\varphi(x)$ дифференциальной модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) + u(x)Q'_{\sigma}(x) = 0; \\ u(0) = 0; \\ (pu''_{xx})(0) = 1; \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

неположительно на всём $[0; \ell]$.

Дифференциальная модель (4.3.2) означает, что в точке $x = 0$, которая закреплена шарнирно, присутствует крутящий момент. Сама теорема означает, что упругость внешней среды можно сделать настолько малой, что решение модели будет неположительно.

Доказательство. Покажем в начале, что $\varphi'(0) < 0$. Решение $\varphi(x)$ подставим в уравнение из (4.3.2), полученное тождество умножим на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по мере σ по множеству $\overline{[0; \ell]}_\sigma$:

$$\int_0^\ell (p\varphi''_{xx})''_{x\sigma}(x)\varphi(x) d\sigma + \int_0^\ell \varphi^2(x)Q'_\sigma(x) d\sigma = 0.$$

Проинтегрируем первый интеграл дважды по частям. Тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$(p\varphi''_{xx})'_x \varphi \Big|_0^\ell - p\varphi''_{xx}\varphi'_x \Big|_0^\ell + \int_0^\ell p(x)\varphi''_{xx}(x) dx + \int_0^\ell \varphi^2(x)Q'_\sigma(x) d\sigma = 0$$

или, с учётом граничных условий, $\varphi'(0) + \int_0^\ell p(x)\varphi''_{xx} dx + \int_0^\ell \varphi^2(x)Q'_\sigma(x) d\sigma = 0$. Отсюда следует, что $\varphi'(0) \leq 0$. Остаётся показать, что равенство $\varphi'(0) = 0$ невозможно. В самом деле, в предположении противного будем иметь $\int_0^\ell p(x)\varphi''_{xx}(x) dx = 0$, $\int_0^\ell \varphi^2(x) dQ = 0$. Тогда $p(x)\varphi''_{xx}(x) = 0$ почти всюду, а так как $p(x) > 0$, то $\varphi''_{xx}(x) = 0$. В силу непрерывности $\varphi''(x)$, будем иметь тождество $\varphi''_{xx}(x) \equiv 0$, что невозможно в виду равенства $\varphi''_{xx}(0) = \frac{1}{p(0)} > 0$.

Через $\omega(x; \alpha; \beta)$ обозначим решение однородного уравнения

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = 0, \quad (4.3.3)$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $u'_x(0) = \alpha$, $(pu''_{xx})(0) = 1$, $(pu''_{xx})'_x(0) = \beta$. Следует отметить, что функция $\omega(x; \alpha; \beta)$ удовлетворяет граничным условиям $u(0) = 0$ и $(pu''_{xx})(0) = 1$ при всех α и β .

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (4.3.3), удовлетворяющая начальным условиям $u(0) = \delta_i^1$, $u'_x(0) = \delta_i^2$, $(pu''_{xx})(0) = \delta_i^3$, $(pu''_{xx})'_x(0) = \delta_i^4$, где δ_i^j — символ Кронекера, соответственно. Тогда $\omega(x; \alpha; \beta) = \alpha\varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \beta\varphi_4(x)$. Подберём α и β так, чтобы функция $\omega(x; \alpha; \beta)$ удовлетворяла условиям $(pu''_{xx})(\ell) = 0$ и $(pu''_{xx})'_x(\ell) = 0$. Для

этого необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система

$$\begin{cases} \alpha(p\varphi_2''(\ell) + (p\varphi_3''(\ell) + \beta(p\varphi_4''(\ell) = 0; \\ \alpha(p\varphi_2''(\ell))'(\ell) + (p\varphi_3''(\ell))'(\ell) + \beta(p\varphi_4''(\ell))'(\ell) = 0, \end{cases}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} (p\varphi_2''(\ell) & (p\varphi_4''(\ell) \\ (p\varphi_2''(\ell))'(\ell) & (p\varphi_4''(\ell))'(\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(p\varphi_3''(\ell) \\ -(p\varphi_3''(\ell))'(\ell) \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Но математическая модель (4.3.2) обладает свойством невырожденности, поэтому, система (4.3.4) имеет единственное решение

$$\alpha_0 = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -(p\varphi_3''(\ell) & (p\varphi_4''(\ell) \\ -(p\varphi_3''(\ell))'(\ell) & (p\varphi_4''(\ell))'(\ell) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p\varphi_2''(\ell) & (p\varphi_4''(\ell) \\ (p\varphi_2''(\ell))'(\ell) & (p\varphi_4''(\ell))'(\ell) \end{vmatrix}} \text{ и } \beta_0 = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} (p\varphi_2''(\ell) & -(p\varphi_3''(\ell) \\ (p\varphi_2''(\ell))'(\ell) & -(p\varphi_3''(\ell))'(\ell) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p\varphi_2''(\ell) & (p\varphi_4''(\ell) \\ (p\varphi_2''(\ell))'(\ell) & (p\varphi_4''(\ell))'(\ell) \end{vmatrix}}, \quad (4.3.5)$$

которое непрерывно зависит от коэффициентов системы. Таким образом, малое изменение значений $(p\varphi_2''(\ell)$, $(p\varphi_3''(\ell)$, $(p\varphi_4''(\ell)$, $(p\varphi_2''(\ell))'(\ell)$, $(p\varphi_3''(\ell))'(\ell)$ и $(p\varphi_4''(\ell))'(\ell)$ влечёт за собой малое колебание решения $(\alpha_0; \beta_0)$.

Так как математическая модель (4.3.1) не обладает свойством невырожденности, если $Q(\ell) = Q(0)$, то при стремлении разности $Q(\ell) - Q(0)$ к нулю определитель системы (4.3.4) стремится к нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p\varphi_2''(\ell) & (p\varphi_4''(\ell) \\ (p\varphi_2''(\ell))'(\ell) & (p\varphi_4''(\ell))'(\ell) \end{vmatrix} \rightarrow 0.$$

Кроме того, $\varphi_i(x) \rightarrow \widehat{\varphi}_i(x)$ ($i = 2, 3, 4$) по норме $\|\cdot\|_E$, где $\widehat{\varphi}_2(x) \equiv x$, $\widehat{\varphi}_3(x) \equiv \int_0^x dt \int_0^t \frac{ds}{p(s)}$ и $\widehat{\varphi}_4(x) \equiv \int_0^x dt \int_0^t \frac{s ds}{p(s)}$ — это решения уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma} = 0$, удовлетворяющие условиям $u(0) = (pu''(0) = (pu''(0))' = 0$, $u'(0) = 1$, $u(0) = u'(0) = (pu''(0))' = 0$, $(pu''(0))' = 1$, $u(0) = u'(0) = (pu''(0))' = 0$, $(pu''(0))' = 1$ соответственно. Нетрудно видеть, что определитель Δ_α стремится к

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} -(p\widehat{\varphi}_3''(1) & (p\widehat{\varphi}_4''(1) \\ -(p\widehat{\varphi}_3''(1))' & (p\widehat{\varphi}_4''(1))' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда $\alpha_0 \rightarrow \infty$ при $Q(\ell) - Q(0) \rightarrow 0$. Таким образом, мы получаем, что α_0 стремится к $-\infty$.

Так как

$$\Delta_\beta \rightarrow \begin{vmatrix} (p\widehat{\varphi}_2'')(\ell) & -(p\widehat{\varphi}_3'')(\ell) \\ (p\widehat{\varphi}_2'')'(\ell) & -(p\widehat{\varphi}_3'')'(\ell) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

то из (4.3.5) следует, что $\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\Delta_\beta}{\Delta_\alpha} \rightarrow 0$ при $Q(\ell) - Q(0) \rightarrow 0$. Функции $\varphi_i(x)$ сходятся к $\widehat{\varphi}_i(x)$ ($i = 2, 3, 4$) по норме $\|\cdot\|_E$ при $Q(\ell) - Q(0) \rightarrow 0$, поэтому, разность $Q(\ell) - Q(0)$ можно сделать настолько малой, что $\varphi_i(x) > 0$ при $x \in (0; \ell]$ ($i = 2, 3, 4$), $\alpha_0 < 0$ и функция $\varphi(x) = (v(x; \alpha_0; \beta_0) =) \alpha_0 \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \beta_0 \varphi_4(x)$ принимала отрицательные значения при всех $x \in (0; \ell]$. Теорема доказана. \square

Теорема 4.3.2. Пусть $g(x; s)$ — функция влияния дифференциальной модели $(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) = F'_\sigma(x)$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $(pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0$. Тогда разность $Q(\ell) - Q(0)$ можно сделать настолько малой, что функция влияния модели (4.3.1) будет неотрицательна на квадрате $[0; \ell] \times [0; \ell]$.

Доказательство. Функция влияния дифференциальной модели (4.3.1) может быть найдена по формуле $G(x; s) = G_0(x; s) - (G_0)''_{xx}(0; s)\varphi(x)$, где $G_0(x, s)$ — функция влияния (4.2.2), $\varphi(x)$ — решение (4.3.2).

Из теорем 4.2.2 и 4.3.1 вытекает положительность $G_0(x, s)$ и неположительность $\varphi(x)$. Показать справедливость неравенства $(G_0)''_{xx}(0; s) \geq 0$.

Предположим противное: найдётся такая точка s_0 , что $(G_0)''_{xx}(0; s_0)$ отрицательна. Тогда, в силу непрерывности $(G_0)''_{xx}(0; s)$, существует отрезок $[s_1; s_2]$ (при этом мы можем считать, что $s_i \in \overline{[0; \ell]_S}$) такой, что 1) $s_0 \in [s_1; s_2]$; 2) $(G_0)''_{xx}(0; s) < 0$ для всех $s \in [s_1; s_2]$. Для неубывающей на $\overline{[0; \ell]_S}$ функции

$$\widehat{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq s_1, \\ \frac{\sigma(x) - \sigma(s_1)}{\sigma(s_2) - \sigma(s_1)}, & \text{если } s_1 < x < s_2, \\ 1, & \text{если } x \geq s_2, \end{cases}$$

соответствующее решение $u(x)$ математической модели $(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) = F'_\sigma(x)$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $(pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0$ неотрицательно на $[0; \ell]$, так как $G_0(x; s)$ неотрицательна на всем квадрате $[0; \ell] \times [0; \ell]$.

Покажем, что $u''(0) \geq 0$. В самом деле, в предположении противного, найдётся окрестность $U_\varepsilon(0)$ точки $x = 0$ такая, что $u''(x) < 0$ для всех x ,

принадлежащих $U_\varepsilon(0)$. Отсюда следует, что $u'(x)$ убывает на $U_\varepsilon(0)$, и, в силу условия $u'(0) = 0$, для всех $x \in U_\varepsilon(0)$ производная $u'(x)$ отрицательна. Тогда, $u(x)$ убывает на $U_\varepsilon(0)$, и, так как $u'(0) = 0$, $u(x) < 0$ для $x \in U_\varepsilon(0)$, что противоречит неотрицательности $u(x)$ на $[0; \ell]$. Таким образом, $u''(0) \geq 0$. С другой стороны,

$$u''(0) = \int_0^\ell (G_0)''_{xx}(0; s) \widehat{F}'_\sigma(s) d\sigma(s) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{(G_0)''_{xx}(0; s)}{\sigma(s_2) - \sigma(s_1)} d\sigma(s) < 0,$$

что противоречит неравенству $u''(0) \geq 0$. Теорема доказана. \square

4.4 Оценки функции влияния математической модели четвёртого порядка

В этом параграфе будут доказаны оценки функции влияния.

Теорема 4.4.1. Пусть $G(x, s)$ — функция влияния дифференциальной модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (4.4.1)$$

при этом (4.4.1) обладает свойством невырожденности; однородное уравнение

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0 \quad (4.4.2)$$

не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$; $G^*(x, s)$ — функция влияния модели $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} = F'_\sigma$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$. Тогда

$$m \cdot G^*(x, s) \leq G(x, s) \leq M \cdot G^*(x, s), \quad (4.4.3)$$

где m, M — конечные положительные константы, для всех x и s , принадлежащих $[0, \ell]$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ — решения уравнения (4.4.2), удовлетворяющих начальным условиям $u(0) = u'_x(0) = 0$, $pu''_{x\mu}(0) = (pu''_{x\mu})'_x(0) = 1$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $(pu''_{x\mu})(0) = -1$, $(pu''_{x\mu})'_x(0) = 0$, $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$, $(pu''_{x\mu})(\ell) = (pu''_{x\mu})'_x(\ell) = 1$ и $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$, $(pu''_{x\mu})(\ell) = -1$,

$(pu''_{x\mu})'_x(\ell) = 0$ соответственно. Функция влияния (4.4.1), как следует из параграфа § 3.5, имеет вид

$$G(x, s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} K(x, s) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_3(\ell) & \varphi_4(\ell) \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'_3(\ell) & \varphi'_4(\ell) \\ K(\ell, s) & \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) & 0 & 0 \\ K'_x(\ell, s) & \varphi'_1(\ell) & \varphi'_2(\ell) & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.4.4)$$

где

$$K(x, s) = \frac{1}{pW(s)} \begin{cases} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_{1x}(s) & \varphi_{2x}(s) & \varphi_{3x}(s) & \varphi_{4x}(s) \\ p\varphi''_{1x\mu}(s) & p\varphi''_{2x\mu}(s) & p\varphi''_{3x\mu}(s) & p\varphi''_{4x\mu}(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{vmatrix} & s \leq x, \\ 0 & x < s, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) \\ \varphi'_2(\ell) & \varphi'_2(\ell) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_3(\ell) & \varphi_4(\ell) \\ \varphi'_3(\ell) & \varphi'_4(\ell) \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель в (4.4.4) по первой строке и, используя свойства $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $K(x, s)$ (раскрыв при этом определитель в определении по последней строке), будем иметь

$$G(x, s) = \frac{1}{(pW)(s)} \begin{cases} \varphi_1(x)\alpha_1(s) + \varphi_2(x)\alpha_2(s) & x \leq s, \\ \varphi_3(x)\alpha_3(s) + \varphi_4(x)\alpha_4(s) & x < s, \end{cases}$$

где $\alpha_i(s)$ – алгебраическое дополнение к элементу $\varphi_i(s)$, стоящему на пересечении последней строки и i -го столбца определителя (4.4).

Функция влияния дифференциальной модели $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} = F'_\sigma$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$ имеет вид

$$G^*(s, x) = \frac{1}{W^*(s)} \begin{cases} \varphi_1^*(x)\alpha_1^*(s) + \varphi_2^*(x)\alpha_2^*(s) & x \leq s, \\ \varphi_3^*(x)\alpha_3^*(s) + \varphi_4^*(x)\alpha_4^*(s) & x < s, \end{cases}$$

где функции $\{\varphi_i^*(x)\}$ – определяются также, как и $\{\varphi_i(x)\}$, – решения однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} = 0$, удовлетворяющие соответствующим усло-

виям; $\alpha^*(s)$ – алгебраические дополнения к элементу $\{\varphi_i^*(x)\}$ определителя

$$\begin{vmatrix} \varphi_1^*(s) & \varphi_2^*(s) & \varphi_3^*(s) & \varphi_4^*(s) \\ \varphi_{1x}^*(s) & \varphi_{2x}^*(s) & \varphi_{3x}^*(s) & \varphi_{4x}^*(s) \\ \varphi_{1x\mu}^*(s) & \varphi_{2x\mu}^*(s) & \varphi_{3x\mu}^*(s) & \varphi_{4x\mu}^*(s) \\ \varphi_1^*(x) & \varphi_2^*(x) & \varphi_3^*(x) & \varphi_4^*(x) \end{vmatrix};$$

$W_i^*(s)$ – определитель Вронского системы $\{\varphi_i^*\}_{i=1}^4$.

Если $x \cdot s \cdot (\ell - x) \cdot (\ell - s) = 0$, то (4.4.3) справедливо при любых m и M .

Пусть $x \cdot s \cdot (\ell - x) \cdot (\ell - s) \neq 0$. Рассмотрим отношение

$$\frac{G(x, s)}{G^*(x, s)} = \frac{pW^*(s)}{pW(s)} \begin{cases} \frac{\varphi_1(x)\alpha_1(s) + \varphi_2(x)\alpha_2(s)}{\varphi_1^*(x)\alpha_1^*(s) + \varphi_2^*(x)\alpha_2^*(s)} & \text{если } x \leq s, \\ \frac{\varphi_3(x)\alpha_3(s) + \varphi_4(x)\alpha_4(s)}{\varphi_3^*(x)\alpha_3^*(s) + \varphi_4^*(x)\alpha_4^*(s)} & \text{если } s < x, \end{cases}$$

Так как $G(x, s) > 0$ и $G^*(x, s) > 0$ для всех x и s , принадлежащих интервалу $(0, \ell)$, то предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \rightarrow s_0}} \frac{G(x, s)}{G^*(x, s)}$ существует, конечен и положителен для всякой (x_0, s_0) , где $x_0 \cdot s_0 > 0$ и $(x_0 - \ell) \cdot (s_0 - \ell) > 0$. Поэтому, если особенность возникает, то в одном из следующих случаев: 1) $x = 0$; 2) $x = \ell$; 3) $s = 0$; 4) $s = \ell$; 5) $x = 0, s = 0$; 6) $x = 0, s = \ell$; 7) $x = \ell, s = 0$; 8) $x = \ell, s = \ell$. В силу симметрии $G(x, s)$ достаточно рассмотреть первый, второй, пятый, шестой и восьмой случаи.

Дальнейшие рассуждения опираются на следующей лемме.

Лемма 4.4.1 (Аналог правила Лопиталья). Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат E – пространству решений уравнения $Lu = F'_\sigma$. Тогда

- 1) если $\varphi_i(x_0) = 0$ ($i = 1, 2$), $\varphi_{2x}'(x_0 + 0) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{\varphi_{1x}'(x_0 + 0)}{\varphi_{2x}'(x_0 + 0)}$;
- 2) если $\varphi_i(x_0) = \varphi_{ix}'(x_0 + 0) = 0$ ($i = 1, 2$), $\varphi_{2x\mu}''(x_0 + 0) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{\varphi_{1x\mu}''(x_0 + 0)}{\varphi_{2x\mu}''(x_0 + 0)}$;
- 3) если $\varphi_i(x_0) = \varphi_{ix}'(x_0 + 0) = \varphi_{ix\mu}''(x_0 + 0) = 0$ ($i = 1, 2$), $(\varphi_{2x\mu}''')_x'(x_0 + 0) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{(\varphi_{1x\mu}''')_x'(x_0 + 0)}{(\varphi_{2x\mu}''')_x'(x_0 + 0)}$.

Доказательство. В первом случае имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{\frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0)}{x - x_0}}{\frac{\varphi_2(x) - \varphi_2(x_0)}{x - x_0}} = \frac{\varphi_{1x}'(x_0 + 0)}{\varphi_{2x}'(x_0 + 0)}.$$

Второй случай. Из равенств ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) = & \int_{x_0+0}^x \int_{x_0+0}^s (\varphi_{ix\mu}''(\tau) - \varphi_{ix\mu}''(x_0 + 0)) d\mu(\tau) ds + \\ & + \varphi_{ix\mu}''(x_0 + 0) \int_{x_0+0}^x (\mu(s) - \mu(x_0 + 0)) ds, \end{aligned}$$

следует

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = & \lim_{x \rightarrow x_0+0} \left[\left(\varphi_{1x\mu}''(x_0 + 0) + \int_{x_0+0}^x \left(\int_{x_0+0}^s (\varphi_{1x\mu}''(\tau) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \varphi_{1x\mu}''(x_0 + 0)) d\mu(\tau) \right) ds \left(\int_{x_0+0}^x (\mu(s) - \mu(x_0 + 0)) ds \right)^{-1} \right) / \right. \\ & / \left(\varphi_{2x\mu}''(x_0 + 0) + \int_{x_0+0}^x \left(\int_{x_0+0}^s (\varphi_{2x\mu}''(\tau) - \varphi_{2x\mu}''(x_0 + 0)) \right) d\mu(\tau) ds \times \right. \\ & \left. \left. \left. \times \left(\int_{x_0+0}^x (\mu(s) - \mu(x_0 + 0)) ds \right)^{-1} \right) \right] = \frac{\varphi_{1x\mu}''(x_0 + 0)}{\varphi_{2x\mu}''(x_0 + 0)}, \end{aligned}$$

так как $\varphi_{2x\mu}''(x_0 + 0) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0+0}^x \left(\int_{x_0+0}^s (\varphi_{ix\mu}''(\tau) - \varphi_{ix\mu}''(x_0 + 0)) d\mu(\tau) \right) ds \times \right. \\ & \left. \times \left(\int_{x_0+0}^x (\mu(s) - \mu(x_0 + 0)) ds \right)^{-1} \right| \leq \sup_{x_0 < \tau < x} |\varphi_{ix\mu}''(\tau) - \varphi_{ix\mu}''(x_0 + 0)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow x_0 + 0$.

Для доказательства третьего пункта достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) = & \int_{x_0+0}^x \int_{x_0+0}^s \int_{x_0+0}^{\tau} ((p\varphi_{ix\mu}'')'(t) - (p\varphi_{ix\mu}'')'(x_0+0)) dt \frac{d\mu(\tau)}{p(\tau)} ds + \\ & + (p\varphi_{ix\mu}'')'(x_0+0) \int_{x_0+0}^x \int_{x_0+0}^s \frac{\tau - x_0}{p(\tau)} d\mu(\tau) ds \end{aligned}$$

и повторить рассуждения проведенные во втором пункте. Лемма доказана. \square

Замечание 4.4.1. Справедливо аналогичное утверждение и для левых производных.

Замечание 4.4.2. Во втором случае можно утверждать, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{(p\varphi_{1x\mu}'')(x_0)}{(p\varphi_{2x\mu}'')(x_0)} = \frac{\varphi_{1x\mu}''(x_0-0)}{\varphi_{2x\mu}''(x_0-0)}.$$

Из леммы следует, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ s \rightarrow s_0}} \frac{G(x, s)}{G^*(x, s)} = \frac{pW^*(s_0)}{pW(s_0)} \cdot \frac{p\varphi_{1x\mu}''(0)\alpha_1(s_0) + p\varphi_{2x\mu}''(0)\alpha_2(s_0)}{p\varphi_{1x\mu}^{*''}(0)\alpha_1^*(s_0) + p\varphi_{2x\mu}^{*''}(0)\alpha_2^*(s_0)}$$

при условии, что $p\varphi_{1x\mu}^{*''}(0)\alpha_1^*(s_0) + p\varphi_{2x\mu}^{*''}(0)\alpha_2^*(s_0) \neq 0$.

Последнее неравенство заведомо выполняется, если $s_0 \cdot (\ell - s_0) \neq 0$. Если же $s_0 = \ell$ или $s_0 = 0$, то предел отношения $\frac{G(x, s)}{G^*(x, s)}$ равен, как нетрудно видеть, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ s \rightarrow s_0}} \frac{G(x, s)}{G^*(x, s)} = \frac{p\varphi_{1x\mu}''(0)\alpha_{1x\mu}''(s_0) + p\varphi_{2x\mu}''(0)\alpha_{2x\mu}''(s_0)}{p\varphi_{1x\mu}^{*''}(0)\alpha_{1x\mu}^{*''}(s_0) + p\varphi_{2x\mu}^{*''}(0)\alpha_{2x\mu}^{*''}(s_0)}$, причем знаменатель дроби, стоящей в правой части последнего равенства отличен от нуля.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. \square

Лемма 4.4.2. Пусть $g(x, s)$ — функция влияния математической модели

$$\begin{cases} (u''_{x\mu})''_{x\sigma} = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0; \end{cases} \quad (4.4.5)$$

$u_0(x) = \int_0^x (x-\tau) d\mu(\tau) \cdot \int_x^\ell (\tau-x) d\mu(\tau)$. Тогда существуют σ -суммируемые,

ограниченные и положительные на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ такие, что

$$u_0(x)v_1(s) \leq g(x, s) \leq u_0(x)v_2(s) \quad (4.4.6)$$

для всех $x, s \in [0; \ell] \times \overline{[0; \ell]}_\sigma$.

Доказательство. Как нетрудно видеть, $g(x, s)$ имеет вид

$$g(x, s) = \frac{1}{a} \begin{cases} \varphi_1(x)\psi_1(s) + \varphi_2(x)\psi_2(s), & 0 \leq x \leq s \leq \ell, \\ \varphi_1(s)\psi_1(x) + \varphi_2(s)\psi_2(x), & 0 \leq s \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

$$\text{где } \varphi_1(x) = \int_0^x (x - \tau) d\mu(\tau), \quad \varphi_2(x) = \int_0^x (x - \tau)\tau d\mu(\tau), \quad \psi_1(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} x & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \ell & \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) \\ 1 & \varphi'_{1x}(\ell) & \varphi'_{2x}(\ell) \end{vmatrix}, \quad \psi_2(x) = - \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ 1 & \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) \\ 0 & \varphi'_{1x}(\ell) & \varphi'_{2x}(\ell) \end{vmatrix} \text{ и}$$

$$a = \varphi_1(\ell)\varphi'_{2x}(\ell) - \varphi'_{1x}(\ell)\varphi_2(\ell) = \int_0^\ell \tau^2 d\mu(\tau) \int_0^\ell d\mu(\tau) - \left(\int_0^\ell \tau d\mu(\tau) \right)^2.$$

Отметим очевидные свойства функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и числа a :

- 1) $\varphi_i(0) = \varphi'_{ix}(0) = \psi_i(\ell) = \psi'_{ix}(\ell) = 0$ ($i = 1, 2$);
- 2) $\varphi''_{1x\mu}(0) \cdot \psi''_{1x\mu}(\ell) \neq 0$ ($i = 1, 2$);
- 3) $a > 0$.

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x, s)}{u_0(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(x)\psi_1(s) + \varphi_2(x)\psi_2(s)}{a\varphi_1(x)\varphi_3(x)} = \frac{\varphi_1(s)}{a\varphi_3(0)} > 0$, где

$\varphi_3(x) = \int_x^\ell (\tau - x) d\mu(\tau)$, то существует окрестность $[0; \varepsilon_1)$ точки $x = 0$ та-

кая, что $u_0(x) \frac{\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)} \leq g(x, s) \leq u_0(x) \frac{3\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)}$ для всех $x \in [0; \varepsilon_1)$ и всех $s \in (0; \ell)$. Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow \ell} \frac{g(x, s)}{u_0(x)} = \lim_{x \rightarrow \ell} \frac{\varphi_1(s)\psi_1(x) + \varphi_2(s)\psi_2(x)}{a\varphi_1(x)\varphi_3(x)} =$$

$$= \frac{1}{a\varphi_1(\ell)} (\varphi_1(s)\varphi_2(\ell) + \varphi_2(s)\varphi_1(\ell)) > 0.$$

Поэтому существует такая окрестность $(\ell - \varepsilon_2, \ell]$ точки $x = \ell$, что для всех $x \in (\ell - \varepsilon_2, \ell]$ и $s \in (0, \ell)$ справедливо неравенство

$$u_0(x) \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(\ell) + \varphi_2(s)\varphi_1(\ell)}{2a\varphi_1(\ell)} \leq g(x, s) \leq u_0(x) \frac{3(\varphi_1(s)\varphi_2(\ell) + \varphi_2(s)\varphi_1(\ell))}{2a\varphi_1(\ell)}.$$

На отрезке $[\varepsilon_1, \ell - \varepsilon_2]$ отношение $\frac{g(x, s)}{u_0(x)}$ ограничено сверху и снизу положительными константами. Обозначим их через α и β соответственно. Положив $v_1(s) = \min \left\{ \frac{\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)}; \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(\ell) + \varphi_2(s)\varphi_1(\ell)}{2a\varphi_1(\ell)}; \beta \right\}$ и $v_2(s) = \max \left\{ \frac{3\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)}; \frac{3(\varphi_1(s)\varphi_2(\ell) + \varphi_2(s)\varphi_1(\ell))}{2a\varphi_1(\ell)}; \alpha \right\}$ мы приходим к (4.4.6). Лемма доказана. \square

Теорема 4.4.2. Пусть выполнены условия 1)–5); уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$. Тогда существуют положительные константы m_1 и m_2 , не зависящие от x и s , такие, что для всех x и s , принадлежащих отрезку $[0, \ell]$, справедливо

$$m_1 g(x, s) \leq G(x, s) \leq m_2 g(x, s), \quad (4.4.7)$$

где $G(x, s)$ и $g(x, s)$ — функции влияния моделей (4.1.1) и (4.1.2) соответственно.

Утверждение теоремы очевидным образом вытекает из положительности функций $G(x, s)$ и $g(x, s)$ внутри квадрата $[0; \ell] \times [0; \ell]$, симметричности $G(x, s)$ и $g(x, s)$, положительности производных $G''_{x\mu}(0, s)$ и $g''_{x\mu}(0, x)$, и отрицательности $G''_{x\mu}(\ell, s)$ и $g''_{x\mu}(\ell, s)$.

Из доказанной леммы и неравенства (4.4.7) вытекает

Теорема 4.4.3. Пусть однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$; $G(x, s)$ — функция влияния модели (4.4.1); $u_0(x) = \int_0^x (x - \tau) d\mu(\tau) \times \int_x^\ell (\tau - x) d\mu(\tau)$. Тогда существуют σ -суммируемые, положительные функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ такие, что

$$u_0(x)v_1(s) \leq G(x, s) \leq u_0(x)v_2(s)$$

для всех x и s , принадлежащих $[0; \ell]$.

Лемма 4.4.3. Пусть $g(x, s)$ — функция влияния (4.4.5). Тогда существует такая положительная константа C , что для всех x, s и τ , принадлежащих

щих $[0; \ell]$, справедливо неравенство

$$g(x, s) \geq C\varphi_1(x)\varphi_3(x)g(\tau, s),$$

$$\text{где } \varphi_1(x) = \int_0^x (x - \tau) d\mu(\tau) \text{ и } \varphi_3(x) = \int_x^\ell (\tau - x) d\mu(\tau).$$

Доказательство. Неравенство (4.4.3) выполняется для любого C , если хотя бы одна из точек x , s и τ совпадает с 0 или ℓ . Пусть все точки x , s и τ являются внутренними отрезка $[0; \ell]$.

Предположим противное: для всякого $C = \frac{1}{n}$ существует тройка (x_n, s_n, τ_n) внутренних точек $[0; \ell]$ такая, что

$$g(x_n; s_n) \leq \frac{1}{n}\varphi_1(x_n)\varphi_3(x_n)g(\tau_n; s_n). \quad (4.4.8)$$

Без ограничения общности, мы можем считать, что последовательности $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ и $\{\tau_n\}$ сходятся; обозначим их пределы соответственно через x_0 , s_0 и τ_0 .

Переходя в (4.4.8) к пределу при $n \rightarrow \infty$ (в силу непрерывности $g(x, s)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$), мы делаем вывод, что (x_0, s_0) не может являться внутренней точкой квадрата $[0; \ell] \times [0; \ell]$, другими словами, x_0 и/или s_0 совпадает или с 0 или с ℓ .

Рассмотрим случай $x_0 = 0$. Предположим, что $s_0 \in (0; \ell)$. Тогда (4.4.8) принимает вид (так как $x_n < s_n$ начиная с некоторого n)

$$0 \leq \frac{\psi_1(s_n)}{a} + \frac{\varphi_2(x_n)}{\varphi_1(x_n)} \cdot \frac{\psi_2(s_n)}{a} \leq \frac{1}{n}\varphi_3(x_n)g(\tau_n, s_n).$$

Отсюда, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(x_n)}{\varphi_1(x_n)} = 0$ (это следует из леммы об аналоге правила Лопиталя), вытекает равенство $\psi_1(s_0) = 0$, которое означает, что наше предположение $s_0 \in (0; \ell)$ неверно, т. е. $s_0 = 0$ или $s_0 = \ell$.

Если $s_0 = 0$, то для бесконечного числа индексов справедливо одно из неравенств (или оба) $x_n \leq s_n$ или $s_n < x_n$.

Переходя к подпоследовательностям, в первом случае ($x_n \leq s_n$), неравенство (4.4) перепишем в виде

$$\frac{\psi_1(s_{n_m}) - \psi_1(0)}{a \cdot s_{n_m}} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\varphi_2(x_{n_m}) \cdot \psi_2(s_{n_m})}{\varphi_1(x_{n_m})s_{n_m}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \varphi_3(x_{n_m}) \frac{g(\tau_{n_m}, s_{n_m}) - g(\tau_{n_m}, 0)}{s_{n_m}} \quad (4.4.9)$$

Так как оба слагаемые в первой части последнего неравенства положительны, то в случае существования предела каждого слагаемого, они непременно неотрицательны. С другой стороны, предел правой части (4.4.9) равен $\varphi_3(0)G'_s(\tau_0, 0) = 0$. Поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(s_{n_m}) - \psi_1(0)}{a \cdot s_{n_m}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(x_{n_m})\psi_2(s_{n_m})}{a \cdot \varphi_1(x_{n_m})s_{n_m}} = 0.$$

Но первый предел равен $\frac{1}{a} \cdot \psi'_1(+0) > 0$. Таким образом в этом случае мы приходим к противоречию.

В случае $s_n < x_n$ неравенство (4.4.8) принимает вид

$$\frac{1}{a}(\varphi_1(s_{n_m})\psi_1(x_{n_m}) + \varphi_2(s_{n_m})\psi_2(x_{n_m})) \leq \frac{1}{n_m} \varphi_1(x_{n_m})\varphi_3(x_{n_m})g(\tau_{n_m}, s_{n_m}),$$

или

$$\frac{\psi_1(x_{n_m})}{a \cdot x_{n_m}} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\varphi_2(s_{n_m})\psi_2(x_{n_m})}{x_{n_m}\varphi_1(s_{n_m})} \leq \frac{1}{n_m} \frac{\varphi_1(x_{n_m})}{x_{n_m}} \varphi_3(x_{n_m}) \frac{g(\tau_{n_m}, s_{n_m})}{\varphi_1(s_{n_m})}.$$

Предел первого слагаемого в левой части последнего равенства равен $\frac{1}{a} \times \psi'_1(+0) = 1$. Предел второго слагаемого, если он существует, то он неотрицателен и конечен (ограничен единицей). В самом деле, из неравенства $\frac{\varphi_2(s_{n_m})}{x_{n_m}\varphi_1(s_{n_m})} \leq \frac{\varphi_2(s_{n_m})}{s_{n_m}\varphi_1(s_{n_m})} \leq 1$ (последнее следует из определения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$) и существования предела $\psi_2(x_{n_m})$ при $m \rightarrow \infty$. Правая часть в пределе дает нуль: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(x_{n_m})}{x_{n_m}} = \varphi'_1(0) = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(\tau_{n_m}, s_{n_m})}{\varphi_1(s_{n_m})} = g''_{s\mu(s)}(\tau_0; 0)$ И мы снова приходим к противоречию: $0 = \psi_1(0) = \Delta > 0$.

Аналогично рассматривается случай. Лемма доказана. \square

Из доказанной леммы вытекает существование функции $u_0(x) = C\varphi_1(x)\varphi_3(x)$ такой, что неравенство

$$G(x, s) \geq u_0(x)G(\tau, s)$$

справедливо для всех x, s и τ , принадлежащих $[0; \ell]$.

Из леммы 4.4.3 и равенства (4.4.7) вытекает

Теорема 4.4.4. Пусть однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$; $G(x, s)$ — функция влияния математической модели (4.4.1). Тогда существует положительная константа C такая, что неравенство

$$G(x, s) \geq C\varphi_1(x)\varphi_3(x)G(\tau, s) \quad (4.4.10)$$

справедливо для всех $x, s, \tau \in [0; \ell]$.

Вводя обозначение $u_0(x) = C\varphi_1(x)\varphi_3(x)$ неравенство (4.4.10) можно записать в виде $G(x, s) \geq u_0(x)G(\tau, s)$, которое показывает, что интегральный оператор $(GF)(x) = \int_0^\ell G(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s)$, действующий из пространства $AB_\sigma[0; \ell]$ — σ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_S$ функций в $C[0; \ell]$, конус K_{AB_σ} — неотрицательных на $[0; \ell]$ функций преобразует в конус

$$K(u_0) = \{u(x) \in C[0; \ell] | u(x) \geq u_0(x) \cdot \|u\|_C, 0 \leq x \leq \ell\}.$$

Выводы

В этой главе изучено свойство податливости дифференциальных моделей, моделирующих малые деформации консольной системы (один конец закреплен, другой — свободен), помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями. Установлены достаточные условия при выполнении которых требуемой имеет место. Основные результаты главы.

1. Изучен вопрос о положительности функции влияния математической модели, которая описывает малые деформации консоли, помещенной в среду с локальными особенностями, и закрепленной шарнирно с пружинами, реагирующими на поворот.
2. Рассмотрена математическая модель малых деформаций консоли, находящейся во внешней среде. Получены достаточные условия податливости модели.
3. Изучена дифференциальная модель малых деформаций сильно сингулярной консоли, которой не обладает свойством невырожденности при отсутствии внешней среды.
4. Доказаны оценки функции влияния математической модели стрижневой системы с заземленными концами.

Глава 5

Нелинейные модели с негладкими решениями

В этой главе рассматриваются нелинейные математические модели второго и четвертого порядков с производными по мере

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x) + \frac{dQ}{d\sigma}(x)u(x) = f(x, u(x)), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.0.1)$$

и

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}u = f(x, u) \quad (x \in \overline{[0; \ell]}_{\sigma}), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.0.2)$$

Уравнение в (5.0.1), также как и в первой главе, задано на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$ — расширении отрезка $[0; \ell]$ в котором каждая точка ξ , принадлежащая множеству $S(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma(x)$, заменена на тройку собственных элементов $\{\xi_-, \xi, \xi_+\}$ бывшие ранее предельными. Само уравнение в точке ξ понимается как равенство

$$-\Delta(pu'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)).$$

Для простоты, мы рассмотрим нелинейности не содержащие производной.

В первом параграфе изучена нелинейная дифференциальная модель с «монотонной нелинейностью», когда участок быстрого роста сменяется участком медленного. Это обеспечивает наличие нескольких различных решений. Во втором параграфе изучаются нелокальные условия существования решения нелинейной дифференциальной модели. Третий параграф посвящен анализу нелинейной модели у которой гарантировано одно решение

(как правило нулевое), и ставится вопрос о наличии еще одного. В четвертом — рассматривается дифференциальная модель с сильной нелинейностью, которая не вписывается ни в одну из рассмотренных ранее, которая важна для приложений.

В последующих параграфах изучаются нелинейные математические модели четвертого порядка.

Предполагаются выполненными следующие условия:

- 1) $x, \mu(x), p(x), r(x), Q(x)$ и $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$;
- 2) $p(x) > 0$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$;
- 3) $\min_{x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$;
- 4) интеграл $\int_0^\ell \frac{d\mu(x)}{p(x)}$ конечен;
- 5) $r(x) \geq 0$ на всем $\overline{[0; \ell]}_S$;

Для точек $\xi \in S(\sigma)$ уравнение в (5.0.2) принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta\alpha(\xi) = \alpha(\xi + 0) - \alpha(\xi - 0)$ — полный скачок функции $\alpha(x)$ в точке ξ .

Решение задачи (5.0.2) мы ищем в классе E — абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций $u(x)$, производная $u'_x(x)$ которых μ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$, квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, $(pu''_{x\mu})'_x(x), ru'_x(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Также будем предполагать выполненным условие:

- 6) оператор суперпозиции $(Fu)(x) = v_2(x)f(x, u_0(x)u(x))$ действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$ — пространство измеримых на $[0, \ell]$ функций $f(x)$ для которых интеграл $\int_0^\ell |f(x)|^p d\sigma(x)$ конечен, при некотором $p \in (1; +\infty]$.

Функции $u_0(x)$ и $v_2(x)$ — это функции из оценок $v_1(s)u_0(x) \leq G(x, s) \leq v_2(s)u_0(x)$ функции влияния $G(x, s)$, полученные в предыдущей главе.

Для выполнимости последнего условия достаточно, чтобы $f(x, u)$ удовлетворяла условиям Каратеодори:

- i) $f(x, u)$ измерима при каждом u ;
- ii) $f(x, u)$ при каждом x непрерывна по u ;
- iii) существует σ -суммируемая на $[0, \ell]$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x, u)| \leq m(x)$.

Будем использовать терминологию полуупорядоченных пространств [129], [126].

Пусть E — банахово пространство. Множество $K \subset E$ называется конусом, если оно выпукло, замкнуто; $\alpha u \in K$ для $u \in K$ и $\alpha \geq 0$; не содержит противоположенных элементов. Каждый конус K порождает в E полуупорядоченность, согласованную с линейной структурой E : отношение $u \leq v$ по определению означает $v - u \in K$.

Конус K называется *телесным*, если его внутренность $\overset{0}{K}$ непуста, причем $u \in \overset{0}{K}$ записывается в виде $u \gg 0$.

Конус K называется *нормальным*, если норма в E полумонотонна, т. е. для некоторого $M > 0$ из $0 \leq u \leq v$ следует $\|u\|_E \leq M\|v\|_E$.

Оператор A , действующий в E , назовем монотонным, если из $u \leq v$ следует $Au \leq Av$.

5.1 О числе решений математической модели второго порядка с «монотонной нелинейностью»

В этом параграфе получены достаточные условия существования нескольких различных решений модели

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x) + \frac{dQ}{d\sigma}(x)u(x) = f(x, u(x)), \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Теорема 5.1.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$;
- 2) функция $f(x, u)$ не убывает по u при каждом $x \in [0; \ell]$ и

$$f(x, 0) \geq 0; \quad (5.1.2)$$

3) существует N пар чисел α_i, β_i , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n \quad (5.1.3)$$

$$f(x, \beta_k u_0(x)) \leq \frac{\beta_k}{\int_0^\ell h_2(s) d\sigma(s)} \quad (x \in [0; \ell]). \quad (5.1.4)$$

4) для каждого k существует множество $w_k \subset [0; \ell]$ положительной σ -меры такое, что

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) \geq \alpha_k \frac{1}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)} \quad (x \in [0; \ell], k = 1, \dots, N) \quad (5.1.5)$$

Если неравенства (5.1.4) и (5.1.5) превращаются в строгие на множествах положительной σ -меры, то задача (5.1.1) имеет $2N - 1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам

$$u_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2N - 1) \quad (5.1.6)$$

и $u_{2i-1}(x) \leq u_{2i+1}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$).

Неравенства (5.1.6) связывают лишь решения $u_i(x)$ с нечетными номерами. По отношению к этим решениям остальные расположены «между» ними в следующем смысле: при каждом $k = 1, 2, \dots, N - 1$ существуют точки x'_k и x''_k такие, что $u_{2k-1}(x'_k) < u_{2k}(x'_k)$ и $u_{2k}(x''_k) \leq u_{2k+1}(x''_k)$.

Доказательство. Вопрос о разрешимости модели (5.1.1) эквивалентен вопросу разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^\ell G(x, s) f(s, u(s)) d\sigma(s), \quad (5.1.7)$$

где $G(x, s)$ — функция влияния математической модели

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x) + \frac{dQ}{d\sigma}(x)u(x) = F'_\sigma(x), \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases}$$

Уравнение (5.1.7) можно записать в виде $u = GHu$, где G — интегральный оператор с ядром $G(x, s)$: $(GF)(x) = \int_0^\ell G(x, s)F'_\sigma(s) d\sigma(s)$ и H — оператор суперпозиции: $(Hu)(x) = f(x, u(x))$.

Уравнение $u = GHu$ эквивалентно уравнению

$$\frac{u(x)}{u_0(x)} = \int_0^\ell \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f\left(s, \frac{u(s)}{u_0(s)} \cdot u_0(s)\right) d\sigma(s),$$

или $\hat{u}(x) = (\hat{G}\hat{H}\hat{u})(x)$, где \hat{G} — интегральный оператор с ядром $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$, \hat{H} — оператор суперпозиции $(\hat{H}u)(x) = f(x, u(x) \cdot u_0(x))$ и $\hat{u}(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$.

По условию теоремы \hat{H} непрерывно действует из $C[0; \ell]$ в $L_{1,\sigma}[0; \ell]$; \hat{G} — действует и вполне непрерывен из $L_{1,\sigma}[0; \ell]$ в $C[0; \ell]$. Поэтому, $\hat{G}\hat{H}$ действует и вполне непрерывен из $C[0; \ell]$ в $C[0; \ell]$.

Покажем, что $\hat{G}\hat{H}$ удовлетворяет всем условиям теоремы из [127, § 45, стр. 373] (при соответствующем выборе E и K). Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

Теорема ([127, § 45, стр. 373]). Пусть K — нормальный телесный конус в банаховом пространстве E и A — действующий в E монотонный вполне непрерывный оператор. Пусть существует N пар элементов

$$u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq \dots \leq u_N \leq v_N. \quad (5.1.8)$$

таких, что

$$u_i \ll Au_i, \quad Av_i \ll v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.1.9)$$

Тогда существует $2N - 1$ неподвижных точек $x_1, x_2, \dots, x_{2N-1}$ оператора A , удовлетворяющих неравенствам

$$u_i \leq x_{2i-1} \leq v_i, \quad u_i \leq x_{2i} \leq v_{i+1}$$

$$u_{i+1} \not\leq x_{2i}, \quad x_{2i} \not\leq v_i$$

при всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Положим $E = C[0; \ell]$ и в качестве конуса K возьмем множество неотрицательных функций из $C[0; \ell]$. Телесность и нормальность этого конуса

очевидны, причем $u \gg 0$ эквивалентно $u(x) > 0$ при всех $x \in [0; \ell]$. По условию теоремы $f(x, u)$ монотонна по u . Отсюда и из неотрицательности $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$ следует монотонность оператора $\widehat{G}\widehat{H}$. Компактность установлена ранее.

Введем в рассмотрение функции

$$u_i(x) \equiv \alpha_i \quad \text{и} \quad v_i(x) \equiv \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Из (5.1.3) вытекает, что функции $u_i(x)$ и $v_i(x)$ удовлетворяют неравенствам (5.1.8). Докажем выполнимость (5.1.9).

Интегральный оператор \widehat{G} с ядром $\widehat{G}(x, s)$ обладает свойством сильной положительности: для любой неубывающей, отличной от константы, функции $F(x)$ ее образ $(\widehat{G}F)(x)$ есть функция строго положительная. По условию теоремы функция

$$w(x) = \beta_i - \int_0^\ell h_2(s) d\sigma(s) \cdot f(x, \beta_i u_0(x))$$

неотрицательна и отлична от тождественного нуля. Поэтому $(\widehat{G}\widehat{F}w)(x) \gg 0$, что означает

$$\beta_i \int_0^\ell \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s) > \int_0^\ell h_2(s) d\sigma(s) \cdot (\widehat{G}\widehat{F})v_i(x). \quad (5.1.10)$$

Так как $\frac{G(x, s)}{u_0(x)} \leq h_2(s)$ и $\int_0^\ell h_2(s) d\sigma(s) > 0$, то из (5.1.10) вытекает $\beta_i > (\widehat{G}\widehat{F}v_i)(x)$ для $x \in [0; \ell]$. Последнее и означает, что $(\widehat{G}\widehat{F}v_i) \ll v_i$.

Докажем теперь неравенство $\widehat{G}\widehat{F}u_k \geq u_k$. При фиксированном k рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} f(x, \alpha_k u_0(x)) - \frac{\alpha_k}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)}, & x \in w_k, \\ 0, & x \notin w_k \end{cases}$$

По условию $u(x) \geq 0$ и положительна на множестве положительной меры. Сильно положительным оператором $\widehat{G}\widehat{F}$ эта функция переводится в строго положительную функцию $(\widehat{G}\widehat{F}u) > 0$ на $(0; \ell)$, т. е. $\widehat{G}\widehat{F}u \gg 0$. Так как

$G(x, s) \geq u_0(x)h_1(s)$, то

$$\int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s)) d\sigma(s) \geq \frac{\alpha_k \int \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s)}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)} \geq \alpha_k = u_k(x). \quad (5.1.11)$$

С другой стороны, из (5.1.2) и монотонности по u функции $f(x, u)$ вытекает неотрицательность функции $f(x; \alpha)$ при любом $\alpha \geq 0$. Поэтому

$$(\widehat{G}\widehat{F}u_k)(x) \geq \int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s)) d\sigma(s).$$

Отсюда и из (5.1.11) следует $\widehat{G}\widehat{F}u_k \gg u_k$.

Итак, для оператора $\widehat{G}\widehat{F}$ выполнены все условия теоремы 45.3 из [127]. Теорема доказана. \square

5.2 Нелокальные условия существования хотя бы одного знакоопределенного решения нелинейной модели второго порядка

Здесь мы продолжим изучение нелинейной модели

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x) + u(x)\frac{dQ}{d\sigma}(x) = f(x, u(x)), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

с неосциллирующим на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$ уравнением $Lu = 0$; в отличие от предыдущего параграфа, ниже нас интересуют условия нелокального типа, требующие проверки лишь в «окрестности бесконечности» и, может быть, в окрестности некоторой точки. Рассмотрен случай, когда задача имеет одно известное решение и стоит вопрос о наличии другого, связанного с известным с помощью некоторого неравенства. Без ограничения общности мы будем считать известное решение нулевым, так как в противном случае сделаем функциональную замену, осуществляющую сдвиг этого решения в нуль.

Теорема 5.2.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u)$, действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$ при некотором $p \in (1; +\infty)$;
- 2) $f(x, u) \geq 0$ при всех $x \in [0; \ell]$ и $u \geq 0$;
- 3) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0; 1)$ модель

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

не имеет решений $u(x)$ таких, что

$$u(x) \geq Ru_0(x), \quad (5.2.3)$$

$$\text{где } u_0(x) = \frac{x(\ell - x)}{\ell}.$$

Тогда модель (5.2.1) имеет хотя бы одно решение в K .

Доказательство. В условиях теоремы оператор

$$(Au)(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) f(s, u(s)) d\sigma(s) \quad (5.2.4)$$

действует и вполне непрерывен в $C[0; \ell]$, оставляя при этом инвариантным конус K .

Покажем, что A преобразует K в значительно более узкое множество

$$K(\tilde{u}_0) = \{u(x) \in C[0; \ell] : u(x) \geq \tilde{u}_0(x) \cdot \|u\|_C \quad x \in [0; \ell]\},$$

где $\tilde{u}_0(x) = Mu_0(x)$, M — некоторая положительная константа.

Покажем, что для того, чтобы интегральный оператор

$$(Bu)(x) = \int_0^{\ell} B(x, s)u(s) d\sigma(s) \quad (B(x, s) \geq 0)$$

преобразовывал K в $K(\tilde{u}_0)$, т. е. $BK \subset K(\tilde{u}_0)$, необходимо и достаточно, справедливость неравенства $B(x, s) \geq \tilde{u}_0(x)B(\tau, s)$ для всех x, s, τ .

Пусть $BK \subset K(\tilde{u}_0)$. Если $u(x)$ — произвольная функция из K , то включение $Bu \in K(\tilde{u}_0)$ означает справедливость неравенства $\int_0^{\ell} B(x, s)u(s) d\sigma(s) \geq$

$\geq \tilde{u}_0(x) \max_{\tau \in [0; \ell]} \int_0^{\ell} B(\tau, s)u(s) d\sigma(s)$ для всех $x \in [0; \ell]$. Снимая знак максимума,

будем иметь отсюда при любых x и τ $\int_0^\ell (B(x, s) - \tilde{u}_0(x)B(\tau, s))u(s) d\sigma(s) \geq 0$.

Так как $u(x)$ — произвольная неотрицательная на $[0; \ell]$ функция, то мы получаем $B(x, s) \geq \tilde{u}_0(x)B(\tau, s)$.

В обратную сторону, умножая на произвольную неотрицательную на $[0; \ell]$ функцию $u(x)$ и интегрируя по мере σ по отрезку $[0; \ell]$, будем иметь $\int_0^\ell B(x, s)u(s) d\sigma(s) \geq \tilde{u}_0(x) \int_0^\ell B(\tau, s)u(s) d\sigma(s)$ при произвольных x и τ . Беря максимум по τ , мы приходим к $BK \subset K(\tilde{u}_0)$.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Неравенство $G(x, s) \geq \tilde{u}_0(x)G(\tau, s)$ доказано нами в параграфе 1.7, поэтому $AK \subset K(\tilde{u}_0)$. Таким образом, вопрос о существовании у оператора A неподвижной точки в K сужается на $K(\tilde{u}_0)$.

Разрешимость (5.2.2) при $\lambda \in (0; 1)$ эквивалентна разрешимости уравнения $Au = \frac{1}{\lambda}u$ с оператором (5.2.4). Если уравнение $Au = \frac{1}{\lambda}u$ имеет решение $u_1 \in K(\tilde{u}_0)$, удовлетворяющее при некотором $R_0 > 0$ неравенству $\|u_1\|_C \geq R_0$, то $u_1(x) \geq R_0\tilde{u}_0(x)$. Тогда $u_1(x)$ будет удовлетворять неравенству (5.2.3) при $R = M \cdot R_0$. Поэтому условие 3) теоремы об отсутствии таких решений означает, что при $\frac{1}{\lambda} > 1$ уравнение $Au = \frac{1}{\lambda}u$ не имеет в $K(\tilde{u}_0)$ решений $u_1(x)$ таких, что $\|u_1\| \geq \frac{R}{M} = R_1$.

Рассмотрим на $K(\tilde{u}_0)$ оператор \tilde{A} :

$$\tilde{A}u = \begin{cases} Au & \text{при } \|u\|_C \leq R_1, \\ A \left(R_1 \frac{u}{\|u\|_C} \right) & \text{при } \|u\|_C \geq R_1. \end{cases}$$

Этот оператор вполне непрерывен на $K(\tilde{u}_0)$ и преобразует $K(\tilde{u}_0)$ в ограниченную часть. Поэтому \tilde{A} оставляет инвариантным пересечение $K(\tilde{u}_0)$ с некоторым шаром. Так как это пересечение выпукло, замкнуто и ограничено, то в силу принципа Шаудера оператор \tilde{A} имеет в $K(\tilde{u}_0)$ неподвижную точку \tilde{u} : $\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{u}$.

Если окажется, что $\|\tilde{u}\|_C > R_1$, то $\tilde{u} = \tilde{A}\tilde{u} = A \left(\frac{R_1 \cdot \tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_C} \right)$. Положим $v(x) = \frac{R_1}{\|\tilde{u}\|_C} \tilde{u}(x)$. Имеем $Av = \frac{\|\tilde{u}\|_C}{R_1} v$, т. е. уравнение $Au = \frac{1}{\lambda}u$ при $\frac{1}{\lambda} =$

$= \frac{\|\tilde{u}\|_C}{R_1} < 1$ имеет решение v , удовлетворяющее неравенству $\|\tilde{u}\|_C > R_1$. Таким образом, неравенство $\|\tilde{u}\|_C > R_1$ невозможно. Тогда должно быть $\|\tilde{u}\|_C \leq R_1$ и, вследствие определения оператора \tilde{A} , $\tilde{u} = A\tilde{u}$. Теорема доказана. \square

5.3 Достаточное условие существования второго решения нелинейной модели второго порядка

Если $f(x, 0) \equiv 0$, то дифференциальная модель (5.2.1) имеет в K тривиальное решение и применение теоремы 5.2.1 никакой дополнительной информации не дает. В этом параграфе нас интересуют условия существования в K неотрицательного решения.

Теорема 5.3.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u)$, действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$ при некотором $p \in (1; \infty)$;
- 2) $f(x, 0) \geq 0$ при всех $x \in [0; \ell]$ и $u \geq 0$;
- 3) $f(x, 0) \equiv 0$;
- 4) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0; 1)$ модель

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.3.1)$$

не имеет решений $u(x)$ таких, что $\sup_{x \in (0; \ell)} \frac{u(x)}{u_0(x)} \geq R$;

- 5) для некоторого $r > 0$ и некоторой функции $h(x) \geq 0$, отличной от тождественного нуля, такой, что $h(x) \in L_\infty[0; \ell]$ при достаточно малом $\lambda > 0$ задача

$$\begin{cases} Lu = f(x, u) + \lambda h(x), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.3.2)$$

не имеет решений, для которых

$$\tilde{u}_0(x) \cdot \|u\|_C \leq u(x) \leq r, \quad (5.3.3)$$

где $\tilde{u}_0(x) = Mu_0(x)$. (M — некоторая положительная константа.)

Тогда задача (5.2.1) имеет в K нетривиальное решение.

Доказательство. В условиях теоремы оператор

$$(Au)(x) = \int_0^{\ell} G(x, s)u(s) d\sigma(s)$$

преобразует K в $K(\tilde{u}_0)$ и $A\Theta = \Theta$, где Θ — нулевая функция. Введем на $K(\tilde{u}_0)$ следующий оператор

$$A_r v = \begin{cases} Av + (r - \|v\|_C)h_0 & \text{при } \|v\|_C \leq r, \\ Av & \text{при } \|v\|_C \geq r, \end{cases} \quad (5.3.4)$$

где $h_0(x) = \int_0^{\ell} G(x, s)h(s) d\sigma(s)$. Введенный оператор вполне непрерывен на $K(\tilde{u}_0)$.

Рассуждениями аналогичными, проведенными при доказательстве теоремы 5.2.1, показывается, что если $r > 0$ достаточно мало, то при $\frac{1}{\lambda} > 1$ равенство $A_r v = \frac{1}{\lambda}v$ не может выполняться на элементах большой нормы из $K(\tilde{u}_0)$. Поэтому каждый оператор A_r при малых $r > 0$ имеет неподвижную точку v_r : $v_r = A_r v_r$.

Если при некотором $r > 0$ будет выполняться неравенство $\|v_r\|_C \geq r$, то вследствие определения оператора A_r эта точка окажется неподвижной и для оператора A , определяя нетривиальное решение задачи (5.2.1).

Неравенство $\|v_r\|_C < r$ означает в силу (5.3.4), что $v_r = Av_r + \lambda h_0$ при $\lambda = r - \|v_r\|_C > 0$. Таким образом, $v_r(x)$ удовлетворяет уравнению (5.3.2) при $\lambda > 0$, а при достаточно малых r функция удовлетворяет вдобавок и неравенствам (5.3.3), что невозможно по условию теоремы. Полученное противоречие означает, что неравенство $\|v_r\|_C < r$ не может выполняться при всех $r > 0$. Теорема доказана. \square

5.4 Нелинейная математическая модель второго порядка с сильной нелинейностью

В этом параграфе мы изучаем случай сильной нелинейности (например, $f(x, u) = |u|^{2m}$, $m > 1$), который предыдущими теоремами не охватывается.

Теорема 5.4.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $f(x, 0) \equiv 0$;
- 2) $f(x, u)$ порождает непрерывный оператор суперпозиции, действующий из $C[0; \ell]$ в некоторое $L_{p, \sigma}[0; \ell]$;
- 3) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$;
- 4) при некоторых $0 < r < R < \infty$ справедливо
 - (а) модель (5.3.1) при любых $\lambda \in (0; 1)$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам $u_0(x) \cdot \|u\|_C \leq u(x) \leq r$;
 - (б) для некоторой $h(x)$, (отличной от тождественного нуля), принадлежащей $L_{1, \sigma}[0; \ell]$, и для любого $\lambda > 0$ модель (5.3.2) не имеет решений, для которых $u_0(x)\|u\|_C \leq u(x) \leq R$.

Тогда нелинейная модель (5.2.1) имеет в K нетривиальное решение.

Доказательство. На $K \setminus \{\Theta\}$ рассмотрим следующий оператор

$$\widehat{A}u = \|u\|_C^2 A \left(\frac{u}{\|u\|_C^2} \right),$$

где A оператор, определенный ранее. Неподвижная точка \widehat{u} этого оператора дает неподвижную точку оператора A , определяемую равенством $u = \frac{\widehat{u}}{\|\widehat{u}\|_C^2}$.

Поэтому достаточно показать, что A имеет в $K \setminus \{\Theta\}$ неподвижную точку.

Оператор \widehat{A} переводит $K \setminus \{\Theta\}$ в $K(\tilde{u}_0)$, причем \widehat{A} вполне непрерывен в K вне шара любого радиуса.

Также как и при доказательстве теоремы 5.2.1 и 5.3.1 убеждаемся в том, что для оператора \widehat{A} не может выполняться $Au = \frac{1}{\lambda}u$ при $0 < \lambda < 1$ на множестве элементов $K(\tilde{u}_0)$ с большой нормой, а на элементах малой нормы из $K(\tilde{u}_0)$ при любом $\lambda > 0$ не может выполняться $v = \widehat{A}v + \lambda h_0$. Поэтому, оператор \widehat{A} имеет в $K(\tilde{u}_0)$ неподвижную точку. Теорема доказана. \square

5.5 Дифференциальные модели четвертого порядка со ступенчатыми нелинейностями

Сформулируем основной результат этого параграфа. Напомним, что в параграфе § 4.4 доказано неравенство $u_0(x)v_1(s) \leq G(x, s) \leq u_0(x)v_2(s)$ при

условии, что $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\sigma$.

Теорема 5.5.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $f(x, u)$ не убывает по u при каждом $x \in [0, \ell]$; $f(x, 0) \geq 0$;
- 2) существует N пар чисел a_i, b_i , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \dots < a_N < b_N$$

и таких, что при всех $k = 1, 2, \dots, N$

$$f(x, b_k u(x)) \leq \frac{b_k}{\int_0^\ell v_2(s) d\sigma(s)}; \quad (5.5.1)$$

- 3) для каждого k существует множество $w_k \subset \overline{[0; \ell]}_\sigma$ положительной σ -меры такое, что

$$f(x, a_k u_0(x)) \geq \frac{a_k}{\int_{w_k} v_1(s) d\sigma(s)}; \quad (5.5.2)$$

- 4) неравенства (5.5.1) и (5.5.2) превращаются в строгие на множествах положительной меры.

Тогда задача (5.0.2) имеет $2N - 1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам

$$u_{2i-1} \leq u_{2i+1}(x)$$

($i = 1, 2, \dots, N - 1$).

Доказательство. Вопрос о разрешимости (5.0.2) мы заменим вопросом о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^\ell G(x, s) f(s, u(s)) d\sigma(s), \quad (5.5.3)$$

где $G(x, s)$ — функция влияния линейной модели (4.4.1). Уравнение (5.5.3) эквивалентно в $C[0; \ell]$ следующему

$$\widehat{u}(x) = \int_0^{\ell} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, u_0(s)) \widehat{u}(s) d\sigma(s), \quad (5.5.4)$$

где $\widehat{u}(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$. В самом деле, если $u_1(x)$ — решение уравнения (5.5.3), то $u_1(x)$ удовлетворяет граничным условиям. Поэтому, $\frac{u(x)}{u_0(x)}$ — равномерно непрерывна на $(0; \ell)$, и, следовательно, доопределяемо до непрерывной на $[0; \ell]$ функции. В обратную сторону, если $\widehat{u}_1(x)$ — решение уравнения (5.5.4), то функция $u_0(x) \cdot \widehat{u}_1(x)$, как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнению (5.5.3).

Интегральный оператор $(Au)(x) = \int_0^{\ell} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, u_0(s)u(s)) d\sigma(s)$ представим в виде суперпозиции $A = \widehat{G}\widehat{F}$, где \widehat{G} — линейный интегральный оператор, порождаемый ядром $\widehat{G}(x, s) = \frac{G(x, s)}{u_0(x)}$, и \widehat{F} — оператор суперпозиции $(\widehat{F}u)(x) = f(x, u_0(x)u(x))$.

Оператор \widehat{F} непрерывен при действии из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$; \widehat{G} — вполне непрерывен из $L_{p, \sigma}[0; \ell]$ в $C[0; \ell]$. В самом деле, пусть $\{f_n(x)\}$ — ограниченная по норме $L_{p, \sigma}[0; \ell]$ последовательность. Из включения $f_n(x) \in L_{p, \sigma}[0; \ell]$ следует, что $f_n(x)$ принадлежит $L_{1, \sigma}[0; \ell]$.

Функции $F_n(x) = \int_0^x f_n(s) d\sigma(s)$ ($x \in \overline{[0; \ell]}_S$) являются σ -абсолютно непрерывными на $\overline{[0; \ell]}_S$, и, более того, вариации последовательности $\{F_n(x)\}$ ограничены в совокупности. Из теоремы о замене в интеграле Лебега-Стилтьеса [166] следует, что \widehat{G} представим в виде $(\widehat{G}f)(x) = \int_0^{\ell} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} dF(s)$. Согласно теореме Хелли из последовательности $\{F_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{F_{n_k}(x)\}$, сходящуюся на $[0; \ell]$ поточечно к функции $F(x) \in BV[0; \ell]$.

Без ограничения общности можно считать, что $\{(GF_{n_k})(x)\}$ сходится на $[0; \ell]$ равномерно. Из непрерывной зависимости решения от коэффициентов

вытекает, что $(GF_{n_k})''_{x\mu}(x)$ сходится равномерно к $(GF)''_{x\mu}(x)$.

Если предположить, что $\frac{(GF_{n_k})(x)}{u_0(x)}$ сходится к $\frac{(GF)(x)}{u_0(x)}$ неравномерно, то для некоторых положительного ε_0 и последовательности $\{x_k\}$ справедливо неравенство $|(G(F_{n_k} - F))(x_k)| \geq \varepsilon_0 u_0(x_k)$. Без ограничения общности мы будем считать, что $\{x_k\}$ сходится. Легко понять, что $\{x_k\}$ не может сходиться к внутренней точке отрезка $[0; \ell]$.

Рассмотрим случай, когда x_k сходится к нулю. Второй случай — $x_k \rightarrow \ell$ рассматривается аналогично. Тогда мы имеем $\left| \frac{G(F_{n_k} - F)(x_k)}{\varphi_1(x_k)} \right| \geq \varepsilon_0 C \varphi_3(x_k)$. Предел левой части последнего неравенства, как нетрудно видеть, равен $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{G(F_{n_k} - F)(x_k)}{\varphi_1(x_k)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{G''_{x\mu}(F_{n_k} - F)(x_k)}{\varphi_1''_{x\mu}(x_k)} \right| = 0$, здесь мы применили аналог правила Лопиталья. Поэтому, переходя в неравенстве $\left| \frac{G(F_{n_k} - F)(x_k)}{\varphi_1(x_k)} \right| \geq \varepsilon_0 C \varphi_3(x_k)$ к пределу при $k \rightarrow \infty$ мы придём к противоречивому неравенству $0 \geq \varepsilon_0 C \varphi_3(0) > 0$, которое доказывает компактность оператора A при действии из $BV[0; \ell]$ в E_{u_0} .

Покажем, что оператор A удовлетворяет всем условиям цитированной теоремы при $E = C[0; \ell]$. В качестве конуса K возьмём множество неотрицательных функций из $C[0; \ell]$; телесность и нормальность K очевидны, причём $u \gg 0$ эквивалентно $u(x) > 0$ для всех $x \in [0; \ell]$. Из неотрицательности отношения $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$ и монотонности $f(x, u)$, легко следует монотонность A . Компактность A установлена выше.

Введем в рассмотрение функции $\hat{u}_i(x) \equiv a_i$ и $\hat{v}_i(x) \equiv b_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Из условий теоремы следует справедливость (5.1.8) для этих функций. Покажем, что справедливы неравенства (5.1.9).

Линейный интегральный оператор \tilde{G} с ядром $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$ является сильно положительным: для любой неотрицательной функции $f(x) = F'_\sigma(x)$ её образ $(\tilde{G}f)(x)$ есть функция строго положительная. В самом деле, если $f(x) \geq 0$ ($\neq 0$), то для функции $u(x) = (\tilde{G}f)(x)$ выполняются неравенства

$$0 < \alpha = \int_0^\ell v_1(s) f(s) d\sigma(s) \leq \frac{(\tilde{G}f)(x)}{u_0(x)} \leq \int_0^\ell v_2(s) f(s) d\sigma(s) = \beta < \infty.$$

Отсюда следует, что $u(x)$ является внутренним (относительно E_{u_0}) элемен-

том K_{u_0} : если $v \in E_{u_0}$ и $\|v\|_{u_0} < \frac{\alpha}{2}$, то $\frac{-\alpha}{2} < \frac{v(x)}{u_0(x)} < \frac{\alpha}{2}$ ($x \in (0; \ell)$), следовательно, $0 < \frac{\alpha}{2} \leq \frac{u(x) + v(x)}{u_0} \leq \beta + \frac{\alpha}{2}$, т. е. $u + v \in K_{u_0}$.

Из условий теоремы следует, что функция $w(x) = b_i - \int_0^\ell \widehat{v}_2(s) d\sigma(s) \times \times f(x, b_i u_0(x))$ неотрицательна и отлична от тождественного нуля. Поэтому, $(\widetilde{G}w) \gg 0$, или $b_i \int_0^\ell \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s) > (A\widehat{v}_i)(x) \int_0^\ell \widehat{v}_2(s) d\sigma(s)$. Так как $\int_0^\ell v_2(s) d\sigma(s) > 0$, то $b_i > (A\widehat{v}_i)(x)$ для всех $x \in (0; \ell)$. Последнее и означает, что $A\widehat{v}_i \ll \widehat{v}_i$.

Покажем неравенство $A\widehat{u}_i \gg \widehat{u}_i$. Рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} f(x, a_i u_0(x)) - \frac{a_i}{\int_{\omega_i} v_1(s) d\sigma(s)}, & x \in \omega_i, \\ 0, & x \notin \omega_i, \end{cases}$$

которая неотрицательна (ввиду условия (5.5.2)) и положительна (по условию теоремы) на множестве положительной σ -меры. Сильно положительным оператором \widetilde{G} эта функция переводится в строго положительную функцию. Поэтому

$$\int_{\omega_i} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_i u_0(s)) d\sigma(s) \geq \frac{\alpha_i \int_{\omega_i} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s)}{\int_{\omega_i} v_1(s) d\sigma(s)} \geq \alpha_i = \widehat{u}_i(x). \quad (5.5.5)$$

Но с другой стороны, из неравенства $f(x, 0) \geq 0$ и монотонности $f(x, u)$ по u вытекает неотрицательность $f(x, \alpha_i u_0(x))$ при любом $\alpha \geq 0$. Тогда

$$(A\widehat{u}_i)(x) \geq \int_{\omega_i} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_i u_0(s)) d\sigma(s). \quad (5.5.6)$$

Из (5.5.5) и (5.5.6) следует $A\widehat{u}_i \gg \widehat{u}_i$.

Таким образом, для оператора A выполняются все условия теоремы; причем неподвижные точки этого оператора являются решениями уравнения (5.5.4). Теорема доказана. \square

Замечание 5.5.1. Для любого N существует функция $f(x, u)$, удовлетворяющая при некоторых α_i и b_i всем условиям теоремы. Для доказательства положим: $\alpha = \int_0^\ell v_1(s) d\sigma(s)$, $\beta = \int_0^\ell v_2(s) d\sigma(s)$. В плоскости (u, v) рассмотрим две прямые $v = \frac{2}{\beta}u$ и $v = \frac{1}{2\alpha}u$. Возьмём $a_1 = 1$, $b_1 = \frac{4\alpha}{\beta}$ и при $k = 2, \dots, N$ положим $a_k = b_{k-1} + 1$, $b_k = \frac{4\alpha}{\beta}a_{k-1}$. Так как $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$, то для всех $k = 2, \dots, N$ справедливы неравенства $b_{k-1} < a_k < b_k$. Точки $M_k^{(1)} \left(a_k; \frac{2a_k}{\beta} \right)$ и $M_k^{(2)} \left(b_k; \frac{b_k}{2\alpha} \right)$ связаны следующими неравенствами $M_1^{(1)} \leq M_1^{(2)} \leq M_2^{(1)} \leq \dots \leq M_N^{(1)} \leq M_N^{(2)}$, понимаемые по координатам. Значит, ломаная соединяющая последовательно точки $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, M_2^{(1)}, M_2^{(2)}, \dots, M_N^{(1)}, M_N^{(2)}$ служит графиком неубывающей неотрицательной на $[a_1, b_N]$ функции $\hat{f}(u)$.

Вне отрезка $[a_1, b_N]$ функцию $\hat{f}(u)$ непрерывно продолжим константами. По построению точек a_k и b_k функция $f(u)$ удовлетворяет неравенствам

$$\hat{f}(a_k) = \frac{2a_k}{\beta} > \frac{a_k}{\beta} \quad \text{и} \quad \hat{f}(b_k) = \frac{1}{2\alpha}b_k < \frac{b_k}{\alpha}.$$

Поэтому функция $f(x, u) = \frac{1}{v_2(x)}\hat{f}(u)$ удовлетворяет неравенствам (5.5.1) и (5.5.2), причём последнему при $\omega_k = [0; \ell]$.

5.6 Нелинейные модели четвертого порядка с монотонной нелинейностью

В этом параграфе приводятся условия на «монотонный» рост нелинейности $f(x, u)$, для которой модель

$$\begin{cases} Lu = (pv''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + Q'_\sigma u = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0 \end{cases} \quad (5.6.1)$$

(λ — спектральный параметр), может иметь не более одного нетривиального неотрицательного решения, т. е. решения, принадлежащего конусу K неотрицательных на $[0; \ell]$ функций.

Теорема 5.6.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) уравнения $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$;
- 2) $f(x, 0) \equiv 0$;
- 3) $f(x, u)$ не убывает по u при $u \geq 0$ и каждом $x \in [0; \ell]$;
- 4) $\frac{f(x, u)}{u}$ убывает по u при $u > 0$;
- 5) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u_0(x)u)$ непрерывно действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$ при некотором $p \in (1; +\infty]$.

Тогда множество Λ неотрицательных значений λ , при которых задача (5.6.1) имеет хотя бы одно нетривиальное в K решение, обладает следующими свойствами:

- (i) Множество Λ непусто и совпадает с некоторым интервалом $(\lambda_0, \lambda_\infty)$, при $0 \leq \lambda_0 < \lambda_\infty \leq +\infty$;
- (ii) Каждому $\lambda \in \Lambda$ отвечает лишь одно решение $u(x, \lambda) \in K$ задачи (5.6.1), и $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|u(\cdot, \lambda)\|_C = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_\infty} \|u(\cdot, \lambda)\|_C = \infty$.
- (iii) Функция $u(x, \lambda)$ монотонна по λ : при всех $x \in [0; \ell]$ справедливо неравенство $(\lambda_1 - \lambda_2)(u(x, \lambda_1) - u(x, \lambda_2)) \geq 0$.
- (iv) При каждом фиксированном $\lambda^* \in \Lambda$ для любого начального приближения $u_0(x)$ итерационная последовательность $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$, определяемая как решение дифференциальной модели

$$\begin{cases} Lu = \lambda^* f(x, u_{n-1}(x)), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к $u(x, \lambda^*)$.

Доказательство. Так как $f(x, u)$ не убывает по u при $u \geq 0$ и $f(x, 0) \equiv 0$, то $f(x, u) \geq 0$ для всех $x \in [0; \ell]$ и $u \geq 0$; из убывания $\frac{f(x, u)}{u}$ при $u > 0$ вытекает, что если математическая модель (5.6.1) разрешима в K при некотором $\lambda > 0$, то ее решение $u(x, \lambda)$ принадлежит внутренности K_{u_0} .

Покажем непустоту Λ . Для этого достаточно доказать, что хотя бы при каком-то $\lambda > 0$ существует нетривиальное решение, принадлежащее K , уравнения $u = \lambda Au$, где $A = \tilde{G}\tilde{F}$ и $(\tilde{G}f)(x) = \int_0^\ell \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s) d\sigma(s)$, $(\tilde{F}u)(x) = f(x, u_0(x)u(x))$. Оператор $A_k^{(r)}v = \frac{kAv + v_0}{\|kAv + v_0\|_C} \cdot r$, $v_0(x) \equiv 1$, $v(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$, где r — положительное фиксированное число, $k = 1, 2, \dots$, в условиях теоремы действует и вполне непрерывен в $C[0; \ell]$, оставляет инвариантным конус K . Более того, $A_k^{(r)}$ вполне непрерывен на K , так как норма в $C[0; \ell]$ монотонна: $\|kAv + v_0\|_C \geq \|v_0\|_C$ при $v(x) \geq 0$; преобразует K в единичную сферу $C[0; \ell]$. Поэтому $A_k^{(r)}$ оставляет инвариантным множество функций $v(x) \in K$, для которых $\|u\|_C \leq 1$, которое, как нетрудно видеть, ограничено, выпукло и замкнуто. Вследствие принципа Шаудера у $A_k^{(r)}$ существует точка v_k : $A_k^{(r)}v_k = v_k$. Вспоминая определения $A_k^{(r)}$, последнее равенство перепишем в следующем виде

$$r(Av_k)(x) + \frac{r}{k} = \varkappa v_k(x), \quad (5.6.2)$$

где $\varkappa = \|Av_k + 1/k\|_C$. Из компактности A и равенства $\|v_k\|_C = r$ следует, что последовательности $\{\varkappa_k v_k\}$ и $\{\varkappa_k\}$ компактны. Покажем, что $\inf_k \{\varkappa_k\} > 0$. Предположим противное: $\inf_k \{\varkappa_k\} = 0$. Из (5.6.2) вытекает положительность $u_k(x)$ для всех $x \in [0; \ell]$. Поэтому $m_k = \inf_{x \in (0; \ell)} v_k(x) > 0$. Так как $\|v_k\|_C \leq r$, то $m_k \leq r$. Если $m_k = r$ при некотором k , то $v_k(x) \equiv r$ и $(Av_k)(x) = (\varkappa_k/r - 1/k)v_k(x)$ и доказательство непустоты Λ на этом завершилось (следует отметить, что предположение $m_k = r$ никак не связано со сделанным предположением $\inf_k \{\varkappa_k\} = 0$).

Значит, можно считать $m_k < r$. Так как $f(x, u)$ убывает по u , то $f(x, r) \leq \frac{1}{m_k} f(x, m_k)$ при всех $x \in [0; \ell]$; из не убывания $f(x, u)$ по u и неравенства $v_k(x) \geq m_k$ вытекает $f(x, v_k(x)) \geq f(x, m_k)$. Поэтому $f(x, r) \leq \frac{1}{m_k} f(x, v_k(x))$ для всех $x \in [0; \ell]$. Тогда в силу положительности оператора \tilde{G} имеем

$\frac{1}{m_k}(Av_k)(x) - (Av_0)(x) = \tilde{G}\left(\frac{1}{m_k}f(x, v_k)(x) - f(x, r)\right) \geq 0$. Отсюда и из (5.6.2) вытекает неравенство $v_k(x) \geq \frac{rm_k}{\mathfrak{a}_k}(Av_0)(x)$, справедливое для всех $x \in [0; \ell]$. Поэтому $m_k \geq \frac{rm_k}{\mathfrak{a}_k}(Av_0)(x)$, следовательно, $\mathfrak{a}_k \geq r(Av_0)(x)$, что вместе с предположением $\inf_k \{\mathfrak{a}_k\} = 0$, означает $\min_x (Av_0)(x) = 0$, чего заведомо не может быть. Таким образом, $\inf_k \{\mathfrak{a}_k\} > 0$.

Как отмечалось ранее, последовательности $\{\mathfrak{a}_k v_k\}$ и $\{\mathfrak{a}_k\}$ компактны. Так как $\inf_k \{\mathfrak{a}_k\} > 0$, то последовательность $\{v_k\}$ также компактна. Выделяя из $\{v_k\}$ сходящуюся подпоследовательность, из $\{\mathfrak{a}_k\}$ — последовательность $\{\mathfrak{a}_{k_m}\}$, которая сходится к \mathfrak{a}_0 , из (5.6.2) будем иметь

$$rAv_{k_m} + \frac{r}{k_m} = \mathfrak{a}_{k_m}v_{k_m}, \quad (5.6.3)$$

при этом $v_{k_m}(x) \xrightarrow{[0; \ell]} w_0(x)$. Переходя в (5.6.3) к пределу $m \rightarrow \infty$, получим $Aw_0 = \frac{\mathfrak{a}_0}{r}w_0$, и непустота Λ доказана.

Так как $\|v_k\|_C = r$, то и норма $\|w_0\|_C = r$. А так как r — произвольное положительное число, то этим доказано, что при некотором λ уравнение $u = \lambda A$ имеет в K решение с нормой r , т. е. множество значений $\|u(\cdot, \lambda)\|_C$ на Λ заполняет $(0, \infty)$.

Покажем теперь, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ задача (5.6.1) имеет в K ровно одно неотрицательное решение. Пусть $v(x)$ и $w(x)$ — различные решения из K модели (5.6.1), отвечающие некоторому $\lambda \in \Lambda$. Очевидно $\lambda > 0$. (Ниже будет показано, что $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_\infty)$). Так как всякое решение $u(x)$ дифференциальной модели (5.6.1), в силу условий теоремы, принадлежит внутренности конуса K_{u_0} , то при некоторых положительных и конечных α и β справедливы неравенства $\alpha \leq \frac{u(x)}{u_0(x)} \leq \beta$ для всех $x \in (0, \ell)$. Поэтому функция $\frac{v(x)}{w(x)}$ строго положительна на $(0, \ell)$. Без ограничения общности, мы можем считать, что неравенства $\frac{v(x)}{w(x)} > 1$ при некоторых $x \in (0, \ell)$ нарушается, так как в противном случае поменяем $v(x)$ и $w(x)$ местами. Тогда для величины $\mathfrak{a} = \inf_{x \in (0, \ell)} \frac{v(x)}{w(x)}$ справедливо двойное неравенство $0 < \mathfrak{a} < 1$. Функции $\tilde{v}(x) = \frac{v(x)}{u_0(x)}$ и $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{u_0(x)}$ удовлетворяют нелинейному интегральному

уравнению

$$\tilde{u}(x) = \lambda \int_0^\ell \tilde{G}(x, s) f(s, u_0(s) \tilde{u}(s)) d\sigma(s),$$

где $\tilde{u}(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$ и $\tilde{G}(x, s) = \frac{G(x, s)}{u_0(x)}$. Более того, $\tilde{v}(x)$ и $\tilde{w}(x)$ положительны на $(0, \ell)$. Так как функция $\frac{f(x, u)}{u}$ убывает по u , то $\frac{1}{\tilde{w}(x)} f(x, \tilde{w}(x)) \geq f(x, \tilde{w}(x))$ для всех $x \in [0, \ell]$; ввиду положительности $\tilde{w}(x)$ на $(0, \ell)$ последнее неравенство является строгим почти всюду (в смысле меры σ). Из определения \tilde{w} следует $\tilde{v}(x) \geq \tilde{w}(x)$, что вместе с неубыванием $f(x, u)$ по u нам дает $f(x, \tilde{v}(x)) \geq f(x, \tilde{w}(x))$ для всех x , принадлежащих $[0, \ell]$. Тогда функция $w(x) = f(x, \tilde{v}(x)) - f(x, \tilde{w}(x))$ положительна на множестве полной σ -меры из $[0; \ell]_\sigma$. Отсюда, в сочетании с сильной положительностью интегрального оператора $\tilde{G}(x, s)$, с ядром $\tilde{G}(x, s) = \frac{G(x, s)}{u_0(x)}$, следует неравенство $(\tilde{G}w)(x) > 0$ на $[0, \ell]$, т. е. $(\tilde{G}w)(x) \geq \tilde{w}_0$ при некотором положительном \tilde{w}_0 . Последнее означает, что $\tilde{v}(x) - \tilde{w}(x) = (\tilde{G}w)(x) \geq \lambda \tilde{w}_0$ для всех $x \in [0, \ell]$. Значит, $\frac{\tilde{v}(x)}{\tilde{w}(x)} = \frac{v(x)}{w(x)} \geq \tilde{w}_0 + \frac{\lambda \tilde{w}_0}{\|\tilde{w}\|_C}$ что противоречит определению числа \tilde{w} .

Покажем монотонность $u(x, \lambda)$ на Λ . Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $\lambda_1 < \lambda_2$. Положим $u_1(x) = \frac{u(x, \lambda_1)}{u_0(x)}$ и $u_2(x) = \frac{u(x, \lambda_2)}{u_0(x)}$. Докажем, что величина $m_0 = \inf_{0 < x < \ell} \frac{u_2(x)}{u_1(x)}$ не меньше единицы. Предположим противное: $m_0 < 1$. Тогда из неравенства $u_2(x) \geq m_0 u_1(x)$ следует $\frac{1}{m_0} f(x, u_0(x) u_2(x)) \geq \frac{1}{m_0} f(x, m_0 u_0(x) u_1(x)) \geq f(x, u_0(x) u_1(x))$. Следовательно, $\frac{1}{m_0} u_2(x) = \frac{\lambda_2}{m_0} (Au_2)(x) \geq \lambda_2 (Au_1)(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_1(x)$. Отсюда вытекает неравенство $\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} m_0$ справедливое для всех $x \in (0, \ell)$. Откуда, по определению m_0 , следует неравенство $\lambda_2 \leq \lambda_1$, что противоречит предположению.

Покажем теперь связность Λ . Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 < \lambda_2$, $u(x, \lambda_1)$ и $u(x, \lambda_2)$ — решения дифференциальной модели (5.6.1) при λ_1, λ_2 соответственно. Покажем включение $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \Lambda$. Пусть $v_1(x) = \frac{u(x, \lambda_1)}{u_0(x)}$, $v_2(x) = \frac{u(x, \lambda_2)}{u_0(x)}$ и $v(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$. Монотонный оператор $A_\lambda v = \lambda Av$ оставляет инвариантным ограниченное замкнутое и выпуклое множество функций $\mathfrak{M} = \{v(x) \in C[0; \ell] | v_1(x) \leq v(x) \leq v_2(x)\}$, действуя в $C[0; \ell]$. Из полной непре-

рывности A вытекает существование в \mathfrak{M} у оператора A_λ неподвижной точки $v_\lambda : v_\lambda = A_\lambda v_\lambda$. Последнее равенство означает что $v_\lambda = \lambda A v_\lambda$, т. е. Λ — связное подмножество из \mathbb{R}^+ .

Положив $\lambda_0 = \inf \Lambda$ и $\lambda_\infty = \sup \Lambda$, будем иметь $\Lambda \subset [\lambda_0; \lambda_\infty]$. Покажем, что $\lambda_0 \notin \Lambda$. Если это не так, то для λ_0 существует решение $u(x, \lambda_0)$ модели (5.6.1). Как установлено ранее, для любого другого решения $u(x, \lambda)$ математической модели (5.6.1) при $\lambda \in \Lambda$ должно быть $u(x, \lambda) \geq u(x, \lambda_0)$ для всех $x \in [0; \ell]$, т. е. $\|u(\cdot, \lambda)\|_C \geq \|u(\cdot, \lambda_0)\|_C > 0$ и функция $\|u(\cdot, \lambda)\|_C$ не может принимать как угодно малых значений. Аналогично доказывается, что $\lambda_\infty \notin \Lambda$.

Как показано ранее, функция $\|u(\cdot, \lambda)\|_C$ заполняет своими значениями промежуток $(0; +\infty)$, поэтому, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0+0} \|u(\cdot, \lambda)\|_C = 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_\infty-0} \|u(\cdot, \lambda)\|_C = +\infty$. Здесь мы использовали доказанные ранее пункты (i), (iii) и монотонность нормы в $C[0; \ell]$.

Докажем последний пункт. Пусть $\lambda^* \in \Lambda$ и $u(x, \lambda^*)$ — соответствующее решение (5.6.1). Положим $v^*(x) = \frac{u(x, \lambda^*)}{u_0(x)}$. Функция $v^*(x)$ удовлетворяет уравнению $v = \lambda^* A v$, т. е. справедливо тождество $v^* = \lambda^* A v^*$. Пусть $v_0(x)$ — произвольная неотрицательная непрерывная на $[0; \ell]$ функция. Покажем, что последовательность $\{v_n(x)\}$, где $v_n(x) = \lambda^*(A v_{n-1})(x)$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к $v^*(x)$.

Так как функции $v_1(x)$ и $v^*(x)$ положительны на $[0; \ell]$, то при некоторых α и β , удовлетворяющих неравенствам $\alpha < 1 < \beta$, имеет место ($x \in [0; \ell]$)

$$\underline{u}_1(x) = \alpha v^*(x) \leq v_1(x) = \lambda^*(A v_0)(x) \leq \beta v^*(x) = \bar{u}_1(x). \quad (5.6.4)$$

Из неубывания $f(x, u)$ и убывания $\frac{1}{u} f(x, u)$ по u следует $(A \underline{u}_1)(x) \geq \alpha \lambda^*(A v^*)(x) = \alpha v^*(x) = \underline{u}_1(x)$ и $\bar{u}_1(x) = \beta v^*(x) = \beta \lambda^*(A v^*)(x) \geq \lambda^*(A \bar{u}_1)(x)$. Поэтому из монотонности A и из (5.6.4) вытекают неравенства $\underline{u}_1(x) \leq \lambda^*(A \underline{u}_1)(x) \leq \lambda^*(A \bar{u}_1)(x) = \underline{u}_2(x) \leq \lambda^*(A \bar{u}_1)(x) \leq \bar{u}_1(x)$. Для последовательностей $\underline{u}_{n+1}(x) = \lambda^*(A \underline{u}_n)(x)$ и $\bar{u}_{n+1}(x) = \lambda^*(A \bar{u}_n)(x)$ имеем $\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq v_n \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Тогда каждая последовательность, являясь монотонной и ограниченной, вследствие компактности оператора A , сходится к неподвижной точке оператора $\lambda^* A$. Так как $v^*(x)$ — единственная неподвижная точка, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = v^*$. Тогда последовательность v_n , заключенная между \underline{u}_n и \bar{u}_n , также обязана сходиться к v^* . Теорема доказана. \square

Для случая, когда $f(x, u)$ непрерывно дифференцируема в окрестности нуля (по переменной u) и в окрестности бесконечности (в смысле определения, приведенного ниже), интервал Λ может быть эффективно указан.

Определение 5.6.1. Будем говорить, что функция $f(x, u)$ непрерывно дифференцируема в окрестности бесконечности, если существует функция $f'_\infty(x)$ такая, что $\frac{f(x, u)}{u} \xrightarrow{[0; \ell]} f'_\infty(x)$ при $u \rightarrow +\infty$.

Теорема 5.6.2. Числа λ_0 и λ_∞ являются минимальными собственными значениями спектральных задач

$$\begin{cases} Lu = \lambda f'_u(x, 0)u, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad u \quad \begin{cases} Lu = \lambda f'_\infty(x)u, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

соответственно.

Доказательство. Возьмем последовательность $\lambda_k \in \Lambda$, стремящуюся к λ_0 . Тогда последовательность решений $u(x, \lambda_n)$ задачи (5.6.1) соответствующих λ_n , равномерно сходится к нулю. Функции $v_n(x) = \frac{u(x, \lambda_n)}{u_0(x)}$ также сходятся к нулю; последовательность $w_n(x) = \frac{v_n(x)}{\|v_n\|_C}$ компактна, следовательно, из нее

можно выделить сходящуюся подпоследовательность $w_{n_k}(x): w_{n_k}(x) \xrightarrow{[0; \ell]} w_0(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда функция $w_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_0(x) = \lambda_0 \int_0^\ell \tilde{G}(x, s) f'_u(s, 0) w_0(s) d\sigma(s),$$

причем для фигурирующего здесь интегрального оператора число $\frac{1}{\lambda_0}$ является максимальным собственным значением

Рассуждения для λ_∞ аналогичны. □

5.7 О вторых решениях математической модели четвертого порядка с производными по мере

В этом параграфе основное внимание уделяется случаю, когда модель

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + Q'_{\sigma}u = f(x, u) & (x \in \overline{[0; \ell]}_{\sigma}), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.7.1)$$

заведомо имеет одно известное решение и стоит вопрос о существовании другого. Известное решение, без ограничения общности, мы будем считать нулевым, так как можно сделать функциональную замену, осуществляющую сдвиг этого решения в нуль.

Теорема 5.7.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u)$, непрерывно действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$;
- 2) $f(x, u) \geq 0$ для всех $x \in [0; \ell]$ и $u \geq 0$;
- 3) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$;
- 4) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0; 1)$ дифференциальная модель

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.7.2)$$

не имеет решений $u(x)$ таких, что

$$\sup_{x \in (0; \ell)} \frac{u(x)}{u_0(x)} \geq R, \quad (5.7.3)$$

$$\text{где } u_0(x) = \int_0^x (x - \tau) d\mu(\tau) \cdot \int_x^{\ell} (\tau - x) d\mu(\tau).$$

Тогда задача (5.7.1) имеет хотя бы одно решение в K .

Доказательство. Так как $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_{\sigma}$, то интегральный оператор

$$(Au)(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) f(s, u(s)) d\sigma(s) \quad (5.7.4)$$

преобразует конус K в более узкое множество

$$K(\hat{u}_0) = \{u(x) \in C[0; \ell] \mid u(x) \geq \hat{u}_0(x)\|u\|_C, x \in [0; \ell]\},$$

где $\hat{u}_0(x) = M \int_0^x (x - \tau) d\mu(\tau) \cdot \int_x^\ell (\tau - x) d\mu(\tau)$ (см. лемму 4.4.3); причем действует и вполне непрерывен в $C[0; \ell]$. Более того, всякая неподвижная точка (5.7.4) является решением дифференциальной модели (5.6.1). Таким образом, вопрос о существовании неподвижной точки в K у оператора A сужается на $K(\hat{u}_0)$.

Разрешимость (5.7.2) эквивалентна разрешимости уравнения $\lambda Au = u$ с оператором (5.7.4). Если вдобавок окажется, что последнее уравнение имеет решение $u_1 \in K(\hat{u}_0)$, удовлетворяющее при некотором $R_0 > 0$ неравенству $\|u_1\|_C \geq R_0$, то согласно определению $K(\hat{u}_0)$ $u_1(x) \geq R_0 \hat{u}_0(x)$ для всех $x \in [0; \ell]$; решение $u_1(x)$ задачи (5.7.3) при $R = M \cdot R_0$. Поэтому условие теоремы об отсутствии таких решений означает, что уравнение $\lambda Au = u$ при $\lambda \in (0, 1)$ не имеет в $K(\hat{u}_0)$ решений $u_1(x)$ таких, что $\|u_1\| \geq \hat{R} = \frac{R}{M}$. Рассмотрим на $K(\hat{u}_0)$ оператора \hat{A} :

$$\hat{A}u = \begin{cases} Au & \text{если } \|u\|_C \leq \hat{R}, \\ A \left(\hat{R} \frac{u}{\|u\|_C} \right) & \text{если } \|u\|_C > \hat{R} \end{cases}$$

Оператор \hat{A} вполне непрерывен на $K(\hat{u}_0)$ и преобразует $K(\hat{u}_0)$ в ограниченную часть, т. е. \hat{A} оставляет инвариантным пересечение $K(\hat{u}_0)$ с шаром некоторого радиуса с центром в нуле. А так как это пересечение выпукло, ограничено и замкнуто, то в силу принципа Шаудера \hat{A} имеет в $K(\hat{u}_0)$ неподвижную точку \hat{u} : $\hat{u} = \hat{A}\hat{u}$.

Если предположить, что $\|\hat{u}\|_C > \hat{R}$, то $\hat{u} = \hat{A}\hat{u} = A \left(\hat{R} \frac{u}{\|u\|_C} \right)$. Отсюда, полагая $\hat{v} = \hat{R} \frac{u}{\|u\|_C} \hat{u}$, будем иметь $\frac{\hat{R}}{\|\hat{u}\|_C} A\hat{v} = \hat{v}$. Другими словами, задача (5.7.2) при $\lambda = \frac{\hat{R}}{\|\hat{u}\|_C} < 1$ имеет решение \hat{v} , удовлетворяющее неравенству $\|\hat{v}\|_C > \hat{R}$. Таким образом, неравенство $\|\hat{u}\|_C > \hat{R}$ невозможно, следовательно, $\|\hat{v}\|_C \leq \hat{R}$. Но тогда, в силу определения \hat{A} , $A\hat{u} = \hat{u}$.

Теорема доказана. □

Условия теоремы естественно проверять при достаточно больших R . Поэтому конкретизация её условий мы можем проводить в терминах асимптотических свойств функции $f(x, u)$.

Функцию $f(x, u)$, которая порождает оператор суперпозиции, действующий из $C[0, \ell]$ в какое-то $L_{p, \sigma} \overline{[0; \ell]_\sigma}$ ($p \in (1, \infty)$), назовём асимптотически нулевой, если $\lim_{u \rightarrow \infty} \|\widehat{f}(\cdot, u)\|_p^p = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^\ell |\widehat{f}(x, u)|^p d\sigma(x) = 0$, $\widehat{f}(x, u) = \sup_{v \geq u} \left| \frac{f(x, v)}{v} \right|$; $f(x, u)$ назовём асимптотически линейной, если для некоторой $q(x) \in L_{p, \sigma} \overline{[0; \ell]_\sigma}$ функция $f(x, u)$ — асимптотически нулевая. При этом будем писать $q(x) = f'_\infty(x)$.

Самый простой пример асимптотически нулевой функции — это функция ограниченная на всей плоскости. Менее тривиальный: $f(x, u)$ не ограничена, но имеет медленный, например, логарифмический, рост на бесконечности.

Теорема 5.7.2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) существует мажоранта $f^\oplus(x, u)$ такая, что $0 \leq f(x, u) \leq f^\oplus(x, u)$ для всех $x \in [0, \ell]$ и $u \geq 0$; $f^\oplus(x, u)$ асимптотически линейна;
- 2) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$;
- 3) при $q(x) = f'^\oplus_\infty(x)$ спектральная задача

$$\begin{cases} Lu = \lambda q(x)u, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

не имеет точек спектра в единичном круге.

Тогда модель (5.7.1) разрешима в K .

Доказательство. Покажем, что для достаточно большого R и любого $\lambda \in (0, 1)$ дифференциальная модель

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.7.5)$$

не имеет решений удовлетворяющих неравенству $u(x) \geq R\tilde{u}_0(x)$. Предположим противное: для любого $R_n \rightarrow \infty$ существует последовательность функций $u_n(x) \in K$ и чисел $\lambda_n \in (0, 1)$ таких, что $u_n(x)$ является решением дифференциальной модели (5.7.5) и удовлетворяет неравенству $u_n(x) \geq R_n\tilde{u}_0(x)$. Из последнего неравенства следует $\|u_n\|_C \rightarrow \infty$. Функция $u_n(x)$ удовлетворяет уравнению $u_n = \lambda_n Au_n$, где $A = GF$, G и F определяются равенствами $(Gf)(x) = \int_0^\ell G(x, s)f(s) d\sigma(s)$ и $(Fu)(x) = f(x, u(x))$. Тогда, в силу первого условия теоремы

$$u_k(x) = \lambda_k Au_k(x) \leq \int_0^\ell G(x, s)f_0^\oplus[s, u_k(s)] d\sigma(s), \quad (5.7.6)$$

причем функции $f_0^\oplus(x, v_k(x))$ принадлежат $L_{p,\sigma}[\overline{0; \ell}]_\sigma$.

Неравенство (5.7.6) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_C} &\leq \lambda_n \int_0^\ell G(x, s)q(s) \frac{u_n(s)}{\|u_n\|_C} d\sigma(s) + \\ &+ \lambda_n \int_0^\ell G(x, s) \frac{f^\oplus(s, u_n(s)) - q(s)u_n(s)}{\|u_n\|_C} d\sigma(s). \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

Покажем, что супремум на $(0, \ell)$ последнего слагаемого в правой части (5.7.7) стремится к нулю. В самом деле, из асимптотической линейности функции $f^\oplus(x, u)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$\left\| \frac{f^\oplus(x, \tilde{u}_0(x)v(x)) - q(x)\tilde{u}_0(x)v(x)}{\tilde{u}_0(x)N} \right\|_p < \varepsilon \quad (5.7.8)$$

справедливо для всякой $v(x)$, удовлетворяющей неравенству $v(x) \geq N(\varepsilon)$.

Так как $u_n \in K(\tilde{u}_0)$ и $\|u_n\|_C \rightarrow \infty$, то $u_n(x) \geq \|u_n\|_C \tilde{u}_0(x)$ и при $\|u_n\|_C \geq N$ будем иметь $\|u_n\|_C \geq N\tilde{u}_0(x)$. Подставляя в (5.7.8) вместо $v(x)$ функции $\frac{u_n(x)}{\tilde{u}_0(x)}$, будем иметь $\|f^\oplus(x, u_n(x)) - q(x)u_n(x)\|_p < \varepsilon \|u_n\|_C$. Так как интегральный оператор с ядром $G(x, s)$, непрерывен (на самом деле вполне непрерывен) при действии из $L_{p,\sigma}[\overline{0; \ell}]_\sigma$ в $C[0, \ell]$, то

$\sup_{0 \leq x \leq \ell} \left| \int_0^\ell G(x, s) \frac{f^\oplus(s, u_n(s)) - q(s)u_n(s)}{\|u_n\|_C} d\sigma(s) \right| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Интегральный оператор $(G_q f)(x) = \int_0^\ell G(x, s)q(s)f(s) d\sigma(s)$, действующий из $L_{p,\sigma}[0, \ell]$ в $C[0, \ell]$, вполне непрерывен, поэтому, последовательность $w_n = G_q \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_C} \right)$ компактна; последовательность $\{\lambda_n\} \subset [0, 1]$ также компактна. Пусть $\{w_{n_k}(x)\}$ и $\{\lambda_{n_k}\}$ — сходящиеся последовательности последовательностей $\{w_n(x)\}$ и $\{\lambda_n\}$ соответственно. Обозначим $w_0(x)$ равномерный предел $\{w_{n_k}(x)\}$ и λ_0 — предел числовой последовательности $\{\lambda_{n_k}\}$. Из (5.7.7) следует, что $\|w_0\|_C \neq 0$ и $\lambda_0 > 0$.

В силу условия теоремы интегральный оператор G_q монотонен. Тогда (применим к обеим частям (5.7.7) оператор G_q)

$$w_{n_k}(x) = G_q \left(\frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|_C} \right) \leq \lambda_{n_k} (G_q w_{n_k})(x) + \Omega_k(x), \quad (5.7.9)$$

где

$$\Omega_k(x) = \frac{\lambda_k}{\|u_{n_k}\|_C} G_q \left(\int_0^\ell G(\cdot, s) (f^\oplus(s, u_{n_k}(s)) - g(s)u_{n_k}(s)) d\sigma(s) \right),$$

причем $\Omega_k \Rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенстве (5.7.9) будем иметь $w_0(x) \leq \lambda_0 (G_q w_0)(x)$, при этом $w_0(x) \geq 0$ и $\neq 0$. Отсюда следует, что у вполне непрерывного оператора G_q есть собственное значение $\lambda^* \in [0; \lambda_0) \subset [0; 1]$, которому соответствует собственная функция, а это противоречит условию теоремы. Теорема доказана. \square

Если в дополнение к условиям теоремы потребовать $f(x, 0) \equiv 0$, то задача (5.6.1) заведомо имеет тривиальное решение, и применение теоремы никакой дополнительной информации не дает.

Теорема 5.7.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$;
- 2) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u)$, непрерывно действует из $C[0, \ell]$ в некоторое $L_{p,\sigma}[0; \ell]$;

- 3) $f(x, u) \geq 0$ для всех $x \in [0, \ell]$ и $u \geq 0$;
- 4) $f(x, 0) \equiv 0$;
- 5) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0, 1)$ дифференциальная модель (5.7.2) не имеет решений $u(x)$ таких, что справедливо (5.7.3);
- 6) для некоторого $r_0 > 0$ и некоторой функции $h(x) \geq 0$, отличной от тождественно нулю, такой, что $h(x) \in L_\infty[0, \ell]$, при достаточно малом $\lambda > 0$ модель

$$\begin{cases} Lu = f(x, u) + \lambda h(x), \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \quad (5.7.10)$$

не имеет решений, для которых неравенство

$$\tilde{u}_0(x) \|u\|_C \leq u(x) \leq r_0 \tilde{u}_0(x) \quad (5.7.11)$$

справедливо для всех x принадлежащих $[0; \ell]$.

Тогда математическая модель (5.7.1) имеет в K нетривиальное решение.

Доказательство. В условиях теоремы оператор A , определенный равенством (5.7.4), преобразует K в $K(\tilde{u}_0)$ и $A\theta = \theta$. На $K(\tilde{u}_0)$ рассмотрим семейство вполне непрерывных (вместе с A) на $K(\tilde{u}_0)$ операторов

$$A_r u = \begin{cases} Au + (r - \|u\|_C)h_0, & \text{если } \|u\|_C \leq r, \\ Au, & \text{если } \|u\|_C > r, \end{cases} \quad (5.7.12)$$

здесь $r > 0$ и $h_0(x) = \int_0^\ell G(x, s)h(s) d\sigma(s)$. Рассуждениями, аналогичными проведенным в теореме 5.7.1, показывается, что если положительное число r достаточно мало, то при $\lambda > 1$ равенство $A_r u = \lambda u$ не может выполняться на элементах большой нормы $K(\tilde{u}_0)$. Поэтому, каждый оператор A_r при малых $r > 0$ имеет в $K(\tilde{u}_0)$ неподвижную точку $u_r : A_r u_r = u_r$.

Если выполняется неравенство $\|u_r\|_C < r$, то в силу определения A_r для u_r справедливо равенство $u_r = Au_r + \lambda h$ при $\lambda = r - \|u_r\|_C > 0$. Тогда функция $u_r(x)$ является решением математической модели (5.7.10) при $\lambda > 0$, и при достаточно малых λ удовлетворяет вдобавок и неравенствам (5.7.11), что в силу условия теоремы невозможно. Полученное противоречие показывает,

что неравенство $\|u_r\|_C < r$ не может выполняться при всех $r > 0$. Таким образом, при некотором $r > 0$ справедливо неравенство $\|u_r\|_C \geq r$. Тогда, в силу (5.7.12) эта точка будет неподвижной и для оператора A , являясь решением модели (5.6.1). Теорема доказана. \square

Следующая теорема показывает, как могут быть проверены условия теоремы 5.7.3 в окрестности нуля.

Теорема 5.7.4. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$;
- 2) $f(x; 0) \equiv 0$;
- 3) существует функция $f^\ominus(x, u)$, такая что при некотором $r > 0$ неравенство

$$0 \leq f^\ominus(x, u) \leq f(x, u)$$

справедливо при всех $x \in [0; \ell]$ и $u \in [0; r]$, причем $f^\ominus(x, u)$ монотонна по u при $u \in [0; r]$;

- 4) существует функция $u_0(x) \in K \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условиям $u(0) = u'_x(0) = 0$ и $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$ и при достаточно малом $\lambda > 0$ следующему неравенству

$$\lambda(Lu_0)(x) \leq f^\ominus(x, \lambda u_0(x)), \quad (x \in \overline{[0; \ell]_\sigma})$$

Тогда задача (5.7.1) имеет в K нетривиальное решение.

Доказательство. Покажем, что при $h(x) = \frac{u_0(x)}{\tilde{u}_0(x)}$ выполняются все условия теоремы 5.7.3. Предположим, что это не так. Тогда существуют функции $u_n \in K$ и числа $\lambda_n > 0$ такие, что $\|u_n\|_C \rightarrow 0$ и каждая функция является решением модели

$$\begin{cases} Lu = f(x, u) + \lambda_n h, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

Отсюда следует, что функции $v_n(x) = \frac{u_n(x)}{\tilde{u}_0(x)}$ удовлетворяют равенствам $v_n = Av_n + \lambda_n h$. Отсюда вытекает, что $v_n(x) \geq \lambda_n h(x)$ для всех $x \in [0; \ell]$. Пусть

$\alpha_n = \inf_{0 < x < \ell} \frac{v_n(x)}{h(x)}$. Имеем $\alpha_n \geq \lambda_n > 0$ и $v_n(x) \geq \alpha_n h(x)$. Поэтому $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из четвертого условия теоремы (вместе с равенством $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$) мы находим, что неравенство $(A(\alpha_n h))(x) \geq \alpha_n h(x)$ справедливо для всех $x \in [0; \ell]$ при достаточно больших n .

Интегральный оператор

$$(A^\ominus v)(x) = \int_0^\ell G(x, s) f^\ominus(s, v(s)) d\sigma(s)$$

действует в $C[0; \ell]$ и монотонен на $K(\tilde{u}_0)$ в окрестности нуля. Из третьего условия теоремы и равномерной сходимости $u_n(x)$ к нулю следует, что при достаточно больших n справедливо неравенство $Au_n \geq A^\ominus u_n$. Далее, в силу монотонности A^\ominus из неравенства $u_n(x) \geq \alpha_n h(x)$ вытекает $A^\ominus u_n \geq A^\ominus(\alpha_n h)$. Отсюда из равенства $v_n = Au_n + \lambda_n h$ и неравенства $(A(\alpha_n h))(x) \geq \alpha_n h(x)$ получаем цепочку неравенств

$$u_n = Au_n + \lambda_n h \geq A^\ominus u_n + \lambda_n h \geq A^\ominus(\alpha_n h) + \lambda_n h \geq (\alpha_n + \lambda_n)h.$$

Таким образом, $u_n(x) \geq (\alpha_n + \lambda_n)h(x)$, что противоречит определению чисел α_n (так как $\lambda_n > 0$). Полученное противоречие доказывает теорему. \square

5.8 Математическая модель четвертого порядка с сильной нелинейностью

В предыдущем параграфе функция $f(x, u)$ имела на бесконечности не слишком быстрый рост. Нелинейности, сильно растущие на бесконечности ($f(x, u) = |u|^\alpha$, $\alpha > 1$), условиями предыдущих теорем не охватываются.

Теорема 5.8.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $f(x, 0) \equiv 0$;
- 2) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$;
- 3) $f(x, u) \geq 0$ для всех $x \in [0; \ell]$ и $u \geq 0$;
- 4) оператор суперпозиции, порожденный функцией $f(x, u)$, непрерывно действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma} \overline{[0; \ell]_\sigma}$ при некотором $p \in (1; +\infty]$;

5) при некоторых $0 < r < R < \infty$ дифференциальная модель

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

при любых $\lambda \in (0; 1)$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам

$$\tilde{u}_0(x) \cdot \|u\|_C \leq u(x) \leq r,$$

и для некоторой неотрицательной нетривиальной функции $h(x) \in L_{1,\sigma}[0; \ell]_\sigma$ и для любого $\lambda > 0$ дифференциальная модель

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x, u) + \lambda h, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

не имеет решений, удовлетворяющих неравенству $u(x) \geq R\tilde{u}_0(x)$.

Тогда модель

$$\begin{cases} Lu = f(x, u), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение в K .

Доказательство. С помощью оператора A на $K \setminus \{\Theta\}$ введём оператор $Bu = \|u\|_C^2 A \left(\frac{u}{\|u\|_C^2} \right)$. Если оператор B имеет неподвижную точку u^* , то элемент $v^* = \frac{u^*}{\|u^*\|_C^2}$ даёт неподвижную точку оператора A . Поэтому, достаточно показать наличие в K у оператора B неподвижной точки.

Оператор B переводит $K \setminus \{\Theta\}$ в $K(\tilde{u}_0)$, причем B вполне непрерывен в K вне шара любого радиуса. Рассуждениями, аналогичными проведёнными в теоремах 5.7.1 и 5.7.3, убеждаемся, что для оператора B на множестве элементов $K(\tilde{u}_0)$ с большой нормой не может выполняться $\lambda Bu = u$ при $\lambda \in (0, 1)$, и на элементах малой нормы из $K(\tilde{u}_0)$ при любом $\lambda > 0$ не может выполняться $u = Bu + \lambda h_0$, где $h_0(x) = \int_0^\ell G(x, s)h(s) d\sigma(s)$. Поэтому, оператор B имеет в $K(\tilde{u}_0)$ неподвижную точку. Теорема доказана. \square

Замечание 5.8.1. Доказательство теоремы сохраняет силу, если оператор A вполне непрерывен $K(\tilde{y}_0)$ вне любого шара положительного радиуса.

Выводы

В главе изучены нелинейные математические модели с различным типом нелинейности, которые возникают, например, если внешняя сила нелинейна и/или внешняя среда реагирует на смещение типа «мягкого» трения. Ключевым моментом во всех рассмотренных случаях является применение оценок функции влияния, которые помимо всего прочего имеют и самостоятельное значение. Основные результаты главы.

1. Получены достаточные условия при которых нелинейные математические модели второго и четвертого порядков имеет несколько различных положений, в зависимости от количества смены зон быстрого и медленного роста нелинейной правой части.
2. Рассмотрены модели, которые могут принимать два различных положения, причем одно из них известно и является, как правило, нулевым.
3. Изучены нелинейные дифференциальные модели второго и четвертого порядков с сильной нелинейностью.

Глава 6

Адаптация метода конечных элементов к изучаемым моделям

6.1 Метод конечных элементов для математической модели сингулярно нагруженной струны

Далее для простоты мы полагаем $\ell = 1$.

Рассматривается математическая модель с неизвестной функцией

$$\begin{cases} -(pu')'_\sigma(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x), \\ u(0) = u'_x(1) = 0, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

где p , Q и F — функции ограниченной вариации, причем $\inf_{[0,1]} p > 0$.

6.1.1 Построение алгоритма

Для приближенного решения (6.1.1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого разобьем промежуток $[0, 1]$ на части (вообще, неравные) (узловыми) точками $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$. Кусочно-линейную базисную функцию при $k = 1, \dots, n - 1$ зададим формулой

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & \text{для } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & \text{для } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad (6.1.2)$$

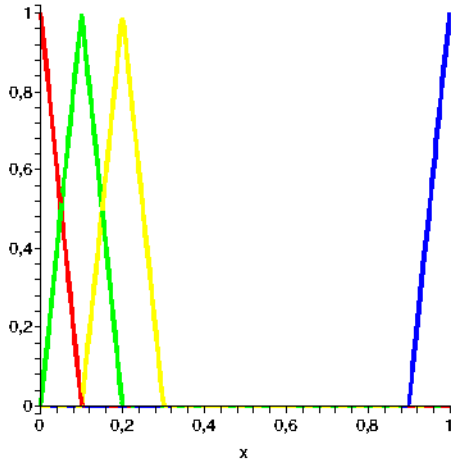


Рисунок 6.1. Графики функций $\varphi_k(x)$ при $k = 0, 1, 2, n$ ($n = 10$)

Она имеет нулевое значение везде, кроме промежутка (x_{k-1}, x_{k+1}) , в точке x_k она равна 1, график ее имеет вид треугольника (см. рис. 6.1). Для $k = 0$ и для $k = n$ базисные функции задаются второй или первой формулами из (6.1.2), т. е.

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1} & \text{для } x \in [0, x_1], \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases}$$

и

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{1 - x_{n-1}} & \text{для } x \in [x_{n-1}; 1], \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Таким образом, при $k = 1, 2, \dots, n-1$ базисные функции не равны нулю лишь на двух интервалах, соприкасающихся в точке x_k , а базисные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_n(x)$ не равны нулю лишь на первом и последнем интервалах. Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в узловых точках и в связи с этим будем использовать в уравнениях вместо $u(x)$ кусочно-линейную функцию

$$v(x) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x), \quad (6.1.3)$$

где v_i — ее значение в узловой точке x_i , так как все базисные функции $\varphi_k(x)$ должны удовлетворять главному условию $u(0) = 0$. Уравнение в (6.1.1) умножим на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$ по мере σ :

$$\begin{aligned} - \int_0^1 (pu')'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma(x) + \int_0^1 u(x) Q'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma(x) = \\ = \int_0^1 \varphi_k(x) F'_\sigma(x) d\sigma(x). \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Первый интеграл в левой части проинтегрируем по частям:

$$\int_0^1 (pu')'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma(x) = pu'_x \varphi_k \Big|_0^1 - \int_0^1 pu'_x(x) \varphi'_k(x) dx. \quad (6.1.5)$$

Тогда, равенство (6.1.4), с учетом (6.1.5), принимает вид

$$-pu'_x\varphi_k\Big|_0^1 + \int_0^1 pu'_x(x)\varphi'_k(x) dx + \int_0^1 \varphi_k(s)u(s) dQ(s) = \int_0^1 \varphi_k(s) dF(s).$$

Окончательно, равенство (6.1.4) принимает вид

$$-pu'(1)\varphi_k(1) + \int_0^1 pu'(x)\varphi'_k(x) dx + \int_0^1 u(s)\varphi_k(s) dQ(s) = \int_0^1 \varphi_k(s) dF(s),$$

или, с учетом граничного условия $u'(1) = 0$,

$$\int_0^1 pu'(x)\varphi'_k(x) dx + \int_0^1 u(s)\varphi_k(s) dQ(s) = \int_0^1 \varphi_k(s) dF(s).$$

Подставим сюда вместо $u(x)$ функцию (6.1.3). Тогда, для $k = 1, 2, \dots, n$ получим замкнутую систему из n уравнений относительно n неизвестных $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$$v_1 \left(\int_0^{x_2} p(\varphi'_1)^2 dx + \int_0^{x_2} \varphi_1^2 dQ \right) + v_2 \left(\int_{x_1}^{x_2} p\varphi'_1\varphi'_2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1\varphi_2 dQ \right) = \int_0^{x_2} \varphi_1 dF; \quad (6.1.6a)$$

$$v_{k-1} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} p\varphi'_{k-1}\varphi'_k dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_{k-1}\varphi_k dQ \right) + v_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} p(\varphi'_k)^2 dx + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi_k^2 dQ \right) + v_{k+1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} p\varphi'_{k+1}\varphi'_k dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}\varphi_k dQ \right) = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi_k dF$$

($k = 2, 3, \dots, n-1$);

$$v_{n-1} \left(\int_{x_{n-1}}^1 p\varphi'_{n-1}\varphi'_n dx + \int_{x_{n-1}}^1 \varphi_{n-1}\varphi_n dQ \right) + v_n \left(\int_{x_{n-1}}^1 p(\varphi'_n)^2 dx + \int_{x_{n-1}}^1 (\varphi_n)^2 dQ \right) = \int_{x_{n-1}}^1 \varphi_n dF. \quad (6.1.6b)$$

Таким образом, для определения v_k мы получаем линейную систему $AV = \bar{F}$ с трехдиагональной матрицей A , где $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ — вектор-столбец, составленный из неизвестных v_k , $k = 1, 2, \dots, n$; \bar{F} — вектор, из правых частей уравнений.

Введем следующее обозначение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 p\varphi'\psi' dx + \int_0^1 \varphi\psi dQ.$$

Очевидно, что это билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций, имеющих производную, суммируемую с квадратом, и удовлетворяющих условию $u(0) = 0$. Благодаря положительности функции $p(x)$ и неубывания $Q(x)$ он еще и невырожденный:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi \rangle &= \int_0^1 p\varphi'\varphi' dx + \int_0^1 \varphi\varphi dQ > 0, \\ \langle \varphi, \varphi \rangle &= 0 \iff \varphi = 0. \end{aligned}$$

Поэтому может служить скалярным произведением функций. Тогда коэффициенты уравнений (6.1.6a)–(6.1.6b)

$$A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$$

образуют матрицу Грамма системы линейно независимых векторов φ_k . Поэтому определитель матрицы A отличен от нуля, следовательно, система (6.1.6a)–(6.1.6b) имеет единственное решение.

6.1.2 Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов для моделей второго порядка

Здесь производится оценка близости приближенного решения к точному.

Теорема 6.1.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (6.1.1); $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда

$$\langle u - v, u - v \rangle \leq \tilde{C} \cdot h,$$

где константа \tilde{C} не зависит от $h = 1/N$ (N — количество интервалов на которые производится разбиение отрезка $[0; 1]$, причем сетка предполагается равномерной).

Покажем, что задача решения математической модели (6.1.1) эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала на множестве $H^{2,\sigma}$ абсолютно непрерывных на $[0; 1]$ функций, первая производная которых σ -абсолютно непрерывна на $[0; 1]$, причём $u''_{x\sigma}$ σ -суммируема с квадратом на $\overline{[0; 1]}_\sigma$.

В самом деле, решение $u(x)$ математической модели (6.1.1), как показал анализ модели в первой главе, принадлежит $H^{2,\sigma}$.

Составим функционал $I(v) = (Lv, v) - 2(F'_\sigma, v)$, где $Lu \equiv u''_{x\sigma} + uQ'_\sigma$ и $(u, v) = \int_0^1 uv \, d\sigma$.

Выражение (Lv, v) проинтегрируем по частям:

$$(Lv, v) = -v'_x v \Big|_0^1 + \int_0^1 v_x'^2 dx + \int_0^1 v^2 dQ. \quad (6.1.7)$$

Таким образом, функционал, который необходимо минимизировать, принимает вид

$$I(v) = \int_0^1 v_x'^2 dx + \int_0^1 v^2 dQ - 2 \int_0^1 v dF, \quad (6.1.8)$$

так как внеинтегральные слагаемые в (6.1.7) пропадут в силу граничных условий $u(0) = u'(1) = 0$.

Решение математической модели (6.1.1) и дает минимум функционалу (6.1.8) на $H_0^{2,\sigma}$, где $H_0^{2,\sigma}$ — подпространство $H^{2,\sigma}$ функций, удовлетворяющих условию $u(0) = 0$.

Так как функционал (6.1.8) не содержит вторых производных, то его можно определить на функциях, у которых первая производная суммируема с квадратом, т. е. на \hat{H}_0^1 — пополнении $H_0^{2,\sigma}$ по норме

$$\|u\|_{\hat{H}_0^1}^2 = \int_0^1 u_x'^2 dx + \int_0^1 u^2 dQ$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимума: каждое новое значение $I(v)$ есть предел $I(v_n)$, где $v_n \in H_0^{2,\sigma}$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{H}_0^1} \rightarrow 0$, если u — функция из \widehat{H}_0^1 на которой функционал $I(v)$ принимает наименьшее значение, и если $u \in H_0^{2,\sigma}$ доставлял минимум $I(v)$, то она становится минимизирующей на \widehat{H}_0^1 .

В обратную сторону: минимизация $I(v)$ на \widehat{H}_0^1 приводит к математической модели (6.1.1). В самом деле, в первой главе при минимизации $\Phi(u)$ на E мы получили равенство

$$\int_0^1 \left(u'_x(x) - \int_0^x u dQ + F(x) \right) dh = 0$$

для любой $h \in E$. В нашем случае мы получим аналогичное равенство

$$u'(1)h(1) + \int_0^1 \left(u'_x(x) - \int_0^x u dQ + F(x) \right) dh = 0$$

с одной лишь оговоркой $h \in \widehat{H}_0^1$. Отсюда мы получим почти всюду

$$u'_x(x) - \int_0^x u dQ + F(x) = \text{const}$$

при некоторой постоянной.

Но функции $Q(x)$ и $F(x)$, по условию имеют конечное на $[0; 1]$ изменение, поэтому, как нетрудно понять, и $u'(x)$ имеет конечное изменение, т. е. u принадлежит E . Далее мы получим, что $u(x)$ удовлетворяет граничному условию $u'(1) = 0$. И это замыкает круг: минимизация $I(v)$ на $h \in \widehat{H}_0^1$ эквивалентна решению математической модели (6.1.1).

Таким образом, $I(v)$ мы можем минимизировать на \widehat{H}_0^1 . Другими словами, в качестве базисных функций мы можем действительно брать кусочно линейные функции.

После решения линейной системы $AV = \overline{F}$ мы получим приближенное решение $v(x)$, которое в тоже время будет аппроксимацией Рунта.

Оценим разность между точным решением $u(x)$ и полученным приближенным решением $v(x)$. Отметим, что производные $F'_\sigma(x)$ и $Q'_\sigma(x)$ ограничены на всем множестве $\overline{[0; 1]_\sigma}$: при доказательстве существования функ-

ции $\sigma(x)$ была построена такая функция, что отношения $\frac{F(x) - F(x_0)}{\sigma(x) - \sigma(x_0)}$ и $\frac{Q(x) - Q(x_0)}{\sigma(x) - \sigma(x_0)}$ ограничены единицей.

Сначала оценим разность между точным решением и ее интерполянт в энергетической норме; модуль разности между $u(x)$ и $v(x)$ будет еще меньше.

Разность $u(x) - u_I(x)$ обозначим через $w(x)$: $w(x) = u(x) - u_I(x)$, где $u_I(x)$ интерполянт решения дифференциальной модели

$$\begin{cases} -u''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

(Здесь мы для упрощения выкладок положили $p(x) \equiv 1$; при произвольной $p(x)$, отделенной от нуля, проведенные ниже рассуждения необходимо незначительно изменить.)

Очевидно, что $u_I(x)$ может быть представлена в виде

$$u_I(x) = \sum_{i=1}^N u(x_i)\varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ — базисные функции «треугольники».

Далее мы рассмотрим равномерную сетку: $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$).

Оценим максимум $|w(x)|$ на $[x_i; x_{i+1}]$. Для всякого $x \in (x_i; x_{i+1})$ имеем

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_{x_i}^x w'_x(s) ds = \int_{x_i}^x \left(w'_x(x_i + 0) + \int_{x_i+0}^s w''_{x\sigma}(t) d\sigma(t) \right) ds = \\ &= w'_x(x_i + 0)(x - x_i) + \int_{x_i}^x \int_{x_i+0}^s u''_{x\sigma}(t) d\sigma(t) ds, \quad (6.1.9) \end{aligned}$$

так как $w''_{x\sigma} = u''_{x\sigma}$; во внутреннем интеграле переменная s «пробегаёт» множество $\overline{[x_i + 0; x_{i+1} - 0]}_\sigma = \{x \in \overline{[0; 1]}_\sigma | x_i < x < x_{i+1}\}$. Из (6.1.9) мы находим

$$|w(x)| \leq |w'_x(x_i + 0)| \cdot h + \sup_{x_i < t < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(t)| \cdot h \cdot (\sigma(x_{i+1} - 0) - \sigma(x_i + 0)), \quad (6.1.10)$$

если величина $\sup_{x_i < t < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(t)|$ конечна. Покажем, что это действительно так.

Из равенства $u''_{x\sigma} = uQ'_\sigma - F'_\sigma$ имеем

$$|u''_{x\sigma}(x)| \leq |u(x)| \cdot |Q'_\sigma(x)| + |F'_\sigma(x)| \leq$$

$$\leq \|u\|_C \cdot C_1 + C_2 \leq C_3 \bigvee_0^1 (F) C_1 + C_2 (= \widehat{C}),$$

при некоторых постоянных C_i , так как из интегрального представления решения дифференциальной модели, полученного в § 1.5, вытекает

$$|u(x)| \leq \left| \int_0^1 |G(x, s)| dF(s) \right| \leq \max_{x, s} |G(x, s)| \cdot \bigvee_0^1 (F).$$

Оценим $|w'_x(x_i + 0)|$:

$$\begin{aligned} |w'_x(x_i + 0)| &= \left| u'_x(x_i + 0) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} |u'_x(x_i + 0) - u'_x(s)| ds \leq \bigvee_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} (u'_x). \end{aligned}$$

Далее, так как

$$u'_x(x) = u'_x(x_i + 0) + \int_{x_i+0}^x u''_{x\sigma}(s) ds,$$

то

$$\bigvee_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} (u'_x) \leq \sup_{x_i < t < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(t)| \cdot (\sigma(x_{i+1} - 0) - \sigma(x_i + 0)).$$

Поэтому

$$|w'_x(x_i + 0)| \leq \sup_{x_i < t < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(t)| \cdot (\sigma(x_{i+1} - 0) - \sigma(x_i + 0)).$$

С учетом последнего неравенства, оценка (6.1.10) допускает переписку

$$|w(x)| \leq 2h \sup_{x_i < t < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(t)| \cdot (\sigma(x_{i+1} - 0) - \sigma(x_i + 0)). \quad (6.1.11)$$

Из равенства

$$w'_x(x) = w'_x(x_i + 0) + \int_{x_i+0}^x w''_{x\sigma}(s) d\sigma(s) = w'_x(x_i + 0) + \int_{x_i+0}^x u''_{x\sigma}(s) d\sigma(s)$$

($x \in \overline{[x_i; x_{i+1}]_\sigma}$) мы получаем оценку

$$\bigvee_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} (w'_x) \leq \sup_{x_i < t < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(t)| \cdot (\sigma(x_{i+1} - 0) - \sigma(x_i + 0)). \quad (6.1.12)$$

Теперь мы готовы оценить разность $w(x) = u(x) - u_I(x)$ в энергетической норме, т. е. оценить величину

$$\langle u - u_I, u - u_I \rangle = \langle w, w \rangle = \int_0^1 w_x^2 dx + \int_0^1 w^2 dQ. \quad (6.1.13)$$

Первый интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int_0^1 w_x^2 dx = w'_x \cdot w \Big|_0^1 - \int_0^1 w d(w'_x) = - \int_0^1 w d(w'_x),$$

так как $w(0) = w(1) = 0$. Для интеграла в правой части последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 w d(w'_x) &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} w d(w'_x) + \sum_{i=1}^{N-1} w(x_i) \Delta w'_x(x_i) + \\ &+ w(0) \Delta^+ w'_x(0) + w(1) \Delta^- w'_x(1) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} w d(w'_x), \end{aligned}$$

так как $w(x_i) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, N$). Поэтому

$$\left| \int_0^1 w dw'_x \right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left| \int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} w d(w'_x) \right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \sup_{x_i < x < x_{i+1}} |w(x)| \cdot \bigvee_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} (w'_x),$$

и, с учетом оценок (6.1.11) и (6.1.12), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_x^2 dx &\leq \sum_{i=0}^{N-1} 2h \left[\sup_{x_i < x < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(x)| \cdot (\sigma(x_{i+1} - 0) - \sigma(x_i + 0)) \right]^2 \leq \\ &\leq 2h \left(\sup_{0 < x < 1} |u''_{x\sigma}(x)| \right)^2 \cdot (\sigma(1) - \sigma(0))^2. \end{aligned}$$

Для второго интеграла в (6.1.13) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_0^1 w^2 dQ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} w^2 dQ + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} w^2(x_i) \Delta Q(x_i) + w^2(0) \Delta^+ Q(0) + w^2(1) \Delta^- Q(1) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=0}^{N-1} 4h^2 \left(\sup_{x_i < s < x_{i+1}} |u''_{x\sigma}(s)| \cdot (\sigma(x_{i+1} - 0) - \sigma(x_i + 0)) \cdot \bigvee_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} (Q) \right)^2 \leq \\ &\leq 4h^2 \cdot \left(\bigvee_0^{\ell} (Q) \right)^2 \left(\sup_{0 < s < 1} |u''_{x\sigma}(s)| \cdot (\sigma(1) - \sigma(0)) \right)^2. \end{aligned}$$

Окончательно, мы получаем

$$\langle u - u_I, u - u_I \rangle \leq 4\widehat{C} \cdot h.$$

Остается показать, что интерполянт дает приближение не лучше, чем $v(x)$. Это утверждение основано на аналоге классическому результату теории конечным элементов, в именно

Предположим, что $u_0(x)$ минимизирует $I(u)$ на множестве \widehat{H}_0^1 , H_N — конечномерное его подпространство. Тогда

- 1) минимум $I(v_h)$ и минимум $\langle u - v_h, u - v_h \rangle$, v_h пробегает подпространство H_N , достигается на одной и той же функции u_h .
- 2) по отношению к энергетическому скалярному произведению u_h есть проекция u на H_N , или, что то же самое, ошибка $u - u_h$ ортогональна H_N :

$$\langle u - u_h, v_h \rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in H_N. \quad (6.1.14)$$

- 3) функция u_h , на которой достигается минимум, удовлетворяет условию

$$\langle u_h, v_h \rangle = (F'_\sigma, v_h) \text{ для всех } v_h \in \widehat{H}_0^1. \quad (6.1.15)$$

и

$$\langle u, v \rangle = (F'_\sigma, v) \text{ для всех } v \in H_N. \quad (6.1.16)$$

Как и в классической теории, для нас эта теорема ключевая. Более того, все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве со скалярным произведением функция из подпространства H_N , ближайшая к заданной функции u , всегда является ее проекцией на H_N . Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle = \langle u - u_h, u - u_h \rangle - 2\langle u - u_h, v_h \rangle + \langle v_h, v_h \rangle.$$

Если справедливо равенство (6.1.14), то

$$\langle u - u_h, u - u_h \rangle \leq \langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle.$$

Равенство возможно, только когда $\langle v_h, v_h \rangle = 0$, т. е. когда $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция на которой $\langle u - u_h, u - u_h \rangle$ достигает минимум, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (6.1.16) справедливо для всех $v \in \widehat{H}_0^1$, то оно справедливо и для $v_h \in H_N$; вычитая из него (6.1.15), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3) — из него вытекает 2), и из него следует 1). Если u_h минимизирует $I(u)$ на H_N , то

$$I(u_h) \leq I(u_h + \varepsilon v_h)$$

для всех ε и v_h , или, вспоминая выражение $I(u)$ через $\langle u, u \rangle$ и (F'_σ, u) :

$$\begin{aligned} \langle u_h, u_h \rangle - 2(F'_\sigma, u_h) &\leq \\ &\leq \langle u_h, u_h \rangle - 2(F'_\sigma, u_h) + 2\varepsilon \left[\langle u_h, v_h \rangle - (F'_\sigma, v_h) \right] + \varepsilon^2 \langle v_h, v_h \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$0 \leq 2\varepsilon \left[\langle u_h, v_h \rangle - (F'_\sigma, v_h) \right] + \varepsilon^2 \langle v_h, v_h \rangle.$$

Так как это верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h \rangle = (F'_\sigma, v_h)$. Последнее уравнение выражает равенство нулю первой вариации функционала $I(u)$ в точке u_h в направлении v_h . Таким образом, утверждение 3) доказано.

6.2 Адаптация метода конечных элементов для математической модели с разрывными решениями

В этом параграфе приводятся численные эксперименты для математической модели с разрывными решениями.

Далее для простоты мы полагаем $\ell = 1$.

Рассматривается математическая модель с разрывной неизвестной функцией

$$\begin{cases} - (pu'_\mu)(x) + \int_0^x u(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0) - (pu'_\mu)(0), \\ u(0) = u'_\mu(1) = 0, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

где $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf_{[0,1]} p > 0$. Здесь мы для удобства перешли к интегро-дифференциальной форме модели.

6.2.1 Построение алгоритма

Для приближенного решения уравнения (6.2.1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. В качестве базисных функций возьмем, как и в предыдущем параграфе, кусочно-линейные функции, добавив к ним функции Хевисайда, у каждой из которых точка разрыва совпадает с одной из точек разрыва функции $\mu(x)$, если $S(\mu)$ конечно; если же $S(\mu)$ счётно, то возьмем только те точки в которых скачок $\mu(x)$ больше $\varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ точность, с которой необходимо найти приближенное решение. Обозначим их через $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$, где $N = n + m$, n — количество интервалов на которые разбивается отрезок, m — количество функций типа Хевисайда, которые мы добавили.

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в узловых точках и в связи с этим будем использовать в уравнениях вместо $u(x)$ кусочно-линейную функцию

$$v(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x), \quad (6.2.2)$$

где v_i — ее значение в узловой точке x_i , так как все базисные функции должны удовлетворять главному граничному условию $u(0) = 0$. Интегро-дифференциальное уравнение (6.2.1) проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$ по функции $\varphi_k(x)$:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 p u'_\mu(x) d\varphi_k(x) + \int_0^1 \left(\int_0^x u(s) d[Q(s)] \right) d\varphi_k(x) = \\ = \int_0^1 F(x) d\varphi_k(x) + (-F(0) - (p u'_\mu)(0)) \int_0^1 d\varphi_k(x). \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Второй интеграл в левой части и первый интеграл в правой проинтегрируем

ПО ЧАСТЯМ:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left(\int_0^x u(s) d[Q(s)] \right) d\varphi_k(x) &= \\
 &= \varphi_k(x) \cdot \int_0^x u(s) d[Q(s)] \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi_k(x) u(x) d[Q(x)] = \\
 &= \varphi_k(1) \cdot \int_0^1 u(s) d[Q(s)] - \int_0^1 \varphi_k(s) u(s) d[Q(s)], \quad (6.2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 F(x) d\varphi_k(x) &= F(x) \varphi_k(x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi_k(s) d[F(s)] = \\
 &= F(1) \cdot \varphi_k(1) - F(0) \cdot \varphi_k(0) - \int_0^1 \varphi_k(s) d[F(s)]. \quad (6.2.5)
 \end{aligned}$$

Тогда, равенство (6.2.3), с учетом (6.2.4) и (6.2.5), принимает вид

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 p u'_\mu(x) d\varphi_k(x) + \varphi_k(1) \cdot \int_0^1 u(s) d[Q(s)] - \int_0^1 \varphi_k(s) u(s) d[Q(s)] &= \\
 &= F(1) \cdot \varphi_k(1) - F(0) \cdot \varphi_k(0) - \int_0^1 \varphi_k(s) d[F(s)] + \\
 &\quad + (-F(0) - (p u'_\mu)(0)) (\varphi_k(1) - \varphi_k(0))
 \end{aligned}$$

Окончательно, равенство (6.2.3) принимает вид

$$-p u'_\mu(1) \varphi_k(1) + \int_0^1 p u'_\mu(x) d\varphi_k(x) + \int_0^1 u(s) \varphi_k(s) d[Q(s)] = \int_0^1 \varphi_k(s) d[F(s)],$$

или, с учетом граничного условия $u'_\mu(1) = 0$,

$$\int_0^1 p u'_\mu(x) \varphi_{k\mu}'(x) d\mu + \int_0^1 u(s) \varphi_k(s) d[Q(s)] = \int_0^1 \varphi_k(s) d[F(s)].$$

Подставим сюда вместо $u(x)$ функцию (6.2.2). Тогда, для $k = 1, 2, \dots, N$ получим систему из N уравнений относительно N неизвестных $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$

$$\sum_{m=0}^N v_m \left(\int_0^1 p \varphi_{m\mu}' \varphi_{k\mu}' d\mu + \int_0^1 \varphi_m \varphi_k d[Q] \right) = \int_0^1 \varphi_k d[F] \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (6.2.6)$$

Покажем, что система имеет единственное решение. Заметим, что система имеет почти трехдиагональную матрицу коэффициентов A (функции Хевисайда, которые мы добавили и портят трехдиагональность матрицы A). Для этого введем обозначение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 p \varphi_{\mu}' \psi_{\mu}' d\mu + \int_0^1 \varphi \psi d[Q].$$

Очевидно, что это билинейный симметричный функционал в пространстве μ -непрерывных на $[0, 1]$ функций, имеющих μ -производную, суммируемую с квадратом, и удовлетворяющих условию $u(0) = 0$. Благодаря положительности функции $p(x)$ и неубывания $Q(x)$ он еще и невырожденный:

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 p \varphi_{\mu}' \varphi_{\mu}' d\mu + \int_0^1 \varphi \varphi d[Q] > 0,$$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \iff \varphi = 0.$$

Поэтому, может служить скалярным произведением. Тогда, коэффициенты системы (6.2.6)

$$A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$$

образуют матрицу Грамма системы линейно независимых векторов φ_k , следовательно, определитель матрицы A отличен от нуля, и система (6.2.6) имеет единственное решение.

6.2.2 Оценка погрешности

Пусть $\{x_i\}$ точки, которыми мы разбиваем отрезок $[0; 1]$ на N равных частей. Дополним это множество точками так, чтобы $\mu(x_{i+1} - 0) - \mu(x_i + 0) < h/2$. Сетка которая при этом получится вообще говоря, неравномерная. Преобразуем полученное множество следующим образом: добавим к этому множеству элементы \bar{x}_j^- и \bar{x}_j^+ , где $\bar{x} \in \bar{S}(\mu)$, при этом, если $\bar{x}_j = x_i$ при некоторых i и j , то точку x_i мы удаляем из этого множества. ($\bar{S}(\mu)$ — множество $S(\mu)$, если последнее конечно, и множество точек из $S(\mu)$ в которых скачок $\Delta\mu(x)$ функции $\mu(x)$ больше $\varepsilon/2$.) Полученное множество обозначим через \widehat{S} . Как и раньше через $u_I(x)$ обозначим интерполянт $u(x)$ по этому множеству, но напомним, что $u(x)$, следовательно, и $u_I(x)$, неопределена в точках из $S(\mu)$. Оценим модуль разности $|w(x)| = |u(x) - u_I(x)|$. Отметим, что $w(x)$ равна нулю во всех точках множества \widehat{S} ; $u_I(x)$ на $[x_i^*, x_{i+1}^*]$ определена следующим образом

$$u_I(x) = u(x_i^*) + \frac{u(x_{i+1}^*) - u(x_i^*)}{\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)}(\mu(x) - \mu(x_i^*)).$$

Рассмотрим множество $[x_i^*, x_{i+1}^*]$, где $x_i^*, x_{i+1}^* \in \widehat{S}$, причем x_i^* не может совпасть ни с одним из элементов вида \bar{x}_j^- , а $x_{i+1}^* = \bar{x}_j^+$. Имеем

$$w(x) = \int_{x_i^*}^x w'_\mu d\mu = \int_{x_i^*}^x \left(w'_\mu(x_i^*) + \int_{x_i^*}^s u''_{\mu\sigma} d[\sigma] \right) d\mu,$$

так как $w''_{\mu\sigma} = u''_{\mu\sigma}$, или

$$w(x) = w'_\mu(x_i^*)(\mu(x) - \mu(x_i^*)) + \int_{x_i^*}^x \int_{x_i^*}^s u''_{\mu\sigma} d[\sigma] d\mu. \quad (6.2.7)$$

Из (6.2.7) мы получаем оценку

$$|w(x)| \leq |w'_\mu(x_i^*)|(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)) + \sup_{[x_i^*, x_{i+1}^*]_\sigma} |u''_{\mu\sigma}| \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(\sigma)(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)). \quad (6.2.8)$$

Оценим $|w'_\mu(x_i^*)|$. Имеем

$$|w'_\mu(x_i^*)| = \left| u'_\mu(x_i^*) - \frac{u(x_{i+1}^*) - u(x_i^*)}{\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)} \right| =$$

$$= \left| \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (u'_\mu(x_i^*) - u'_\mu(s)) d\mu(s) \right| \leq \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (u'_\mu) (\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)). \quad (6.2.9)$$

Из равенства $u'_\mu(x) = \int_0^x u d[Q] + u'_\mu(0) - F(x) + F(0)$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (u'_\mu) &\leq \max_{[x_i^*; x_{i+1}^*]_{S(\mu)}} |u| \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (Q) + \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (F) \leq \\ &\leq \max_{x, s \in [0; 1]_{S(\mu)}} |G(x, s)| \cdot \bigvee_0^1 (F) \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (Q) + \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (F). \quad (6.2.10) \end{aligned}$$

Далее, из равенства ($x \in [x_i^*; x_{i+1}^*]_{S(\mu)}$) $w'_\mu(x) = w'_\mu(x_i^*) + \int_{x_i^*}^x u''_{\mu\sigma} d[\sigma]$ следует

оценка

$$\bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (w'_\mu) \leq \sup_{[x_i^*; x_{i+1}^*]_\sigma} |u''_{\mu\sigma}| \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (\sigma). \quad (6.2.11)$$

Оценку (6.2.8), с учетом (6.2.9) и (6.2.10), можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (u'_\mu) \cdot (\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*))^2 + \\ &\quad + \sup_{[x_i^*; x_{i+1}^*]_{S(\mu)}} |u''_{\mu\sigma}| \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (\sigma) (\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)) \leq \\ &\leq \left(\max_{x, s \in [0; 1]_{S(\mu)}} |G(x, s)| \cdot \bigvee_0^1 (F) \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (Q) + \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (F) \right) (\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*))^2 + \\ &\quad + \sup_{[x_i^*; x_{i+1}^*]_{S(\mu)}} |u''_{\mu\sigma}| \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (\sigma) (\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)). \quad (6.2.12) \end{aligned}$$

Так как $u''_{\mu\sigma} = uQ'_\sigma - F'_\sigma$, то

$$\sup_{[x_i^*; x_{i+1}^*]_\sigma} |u''_{\mu\sigma}| \leq \sup_{[x_i^*; x_{i+1}^*]_{S(\mu)}} |u| + 1 \leq$$

$$\leq \max_{x,s \in \overline{[0;1]}_{S(\mu)}} |G(x,s)| \cdot \bigvee_0^1(F) + 1 = C \quad (6.2.13)$$

(ввиду того, что меру σ можно выбрать таким образом, чтобы производные Q'_σ и F'_σ были ограничены единицей, например, функция, определенная в каждой точке отрезка $[0;1]$, следующим образом $\sigma(x) = \frac{\mu(x-0) + \mu(x+0)}{2} + Q_1(x) + Q_2(x) + F_1(x) + F_2(x)$, обеспечивает требуемое свойство; $\mu(0-0) = \mu(0)$, $\mu(1+0) = \mu(1)$ и $Q_i(x)$, $F_i(x)$ — неубывающие функции участвующие в жордановом разложении $Q(x)$ и $F(x)$ соответственно), и (6.2.12) принимает вид

$$|w(x)| \leq C(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*))^2 + C \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(\sigma)(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)). \quad (6.2.14)$$

Оценим теперь $w(x)$ в энергетической норме. Имеем

$$\int_0^1 w_\mu^2 d\mu = w'_\mu w \Big|_0^1 - \int_0^1 w d[w'_\mu] = - \int_0^1 w d[w'_\mu] = - \sum_i \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} w d[w'_\mu], \quad (6.2.15)$$

внеинтегральные слагаемые типа $w(x_i^*)\Delta^+w(\bar{x}_j)$ и $w(x_{i+1}^*)\Delta^-w(\bar{x}_j)$, где \bar{x}_j — точка, которую мы ранее заменили на \bar{x}_j^- и \bar{x}_j^+ , равны нулю. Из (6.2.15), с учетом (6.2.14), (6.2.11) и (6.2.13), вытекает оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 w_\mu^2 d\mu \right| &\leq \sum_i \left| \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} w d[w'_\mu] \right| \leq \\ &\leq \sum_i C^2(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*)) \left(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) + \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(\sigma) \right) \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(\sigma) \leq \\ &\leq C^2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \cdot \sum_i \left(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) + \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(\sigma) \right) \leq \\ &\leq h \cdot \frac{C^2}{2} \bigvee_0^1(\sigma) \cdot (\mu(1) - \mu(0) + \sigma(1) - \sigma(0)) = C_1 \cdot h. \end{aligned}$$

Для слагаемого $\int_0^1 w^2 d[Q]$ в энергетической норме последовательно нахо-

ДИМ

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 w^2 d[Q] \right| &= \\
 &= \left| \sum_i \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} w^2 d[Q] + \sum_i w^2(x_i^{*-}) \Delta^- Q(x_i^*) + w^2(x_i^{*+}) \Delta^+ Q(x_i^*) + \right. \\
 &\quad \left. + w^2(0) \Delta^+ Q(0) + w^2(1) \Delta^- Q(1) \right| \leq \\
 &\leq \sum_i C^2 (\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*))^2 \left(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) + \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(\sigma) \right)^2 \cdot \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(Q) \leq \\
 &\leq C^2 \cdot \frac{h^2}{4} \cdot \bigvee_0^1(Q) \sum_i \left(\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) + \bigvee_{x_i^*}^{x_{i+1}^*}(\sigma) \right)^2 \leq \\
 &\leq C^2 \cdot \frac{h^2}{4} \cdot \bigvee_0^1(Q) (\mu(1) - \mu(0) + \sigma(1) - \sigma(0))^2 \leq C_2 \cdot h,
 \end{aligned}$$

так как h — малое положительное число; константы C_1 и C_2 не зависят от h .

Таким образом,

$$a(w, w) = \int_0^1 w_\mu^2 d\mu + \int_0^1 w^2 d[Q] \leq (C_1 + C_2) \cdot h,$$

причем константы C_1 и C_2 не зависят от h .

6.3 О методе конечных элементов для математической модели стержневых систем

В этом параграфе метод конечных элементов адаптируется для математической модели четвертого порядка

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x), \quad (6.3.1)$$

где $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $p(x) > 0$. Среди всех решений (6.3.1) будем искать то, которое удовлетворяет условиям

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad (6.3.2)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(1) = 0, \quad \frac{d^3u}{dx^3}(1) = 0. \quad (6.3.3)$$

6.3.1 Построение алгоритма

Для приближенного решения уравнения (6.3.1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого разобьем промежуток $[0; 1]$ на равные части (узловыми) точками $\{x_k\}_{k=0}^{k=n+1}$, положив $x_k = kh$, где $h = \frac{1}{n}$. Базисные функции зададим следующим образом

$$\varphi_{2k-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^3, & \text{для } x \in [x_k - h, x_k] \\ 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^3, & \text{для } x \in [x_k, x_k + h] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2k}(x) = \begin{cases} (x-x_k)\left(1 + \frac{x-x_k}{h}\right)^2, & \text{для } x \in [x_k - h, x_k] \\ (x-x_k)\left(1 - \frac{x-x_k}{h}\right)^2, & \text{для } x \in [x_k, x_k + h] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения и значения ее производной в узловых точках, и, в связи с этим, будем использовать в уравнениях вместо $u(x)$ функцию

$$v(x) = \sum_{i=-1}^{2n} v_i \varphi_i(x), \quad (6.3.4)$$

где v_{2i-1} и v_{2i} — значения функции и ее производной в узловой точке x_i . В силу граничных условий (6.3.2) имеем

$$v_{-1} = v_0 = 0.$$

Тогда, равенство (6.3.4) принимает вид

$$v(x) = \sum_{i=1}^{2n} v_i \varphi_i(x), \quad (6.3.5)$$

Уравнение (6.3.1) умножим на $\varphi_k(x)$, и проинтегрируем по мере σ по всему отрезку $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (pu'')''_{x\sigma}(x) \varphi_k(x) d\sigma + \\ & + \int_0^1 u(x) Q'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma = \\ & = \int_0^1 F'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma. \quad (6.3.6) \end{aligned}$$

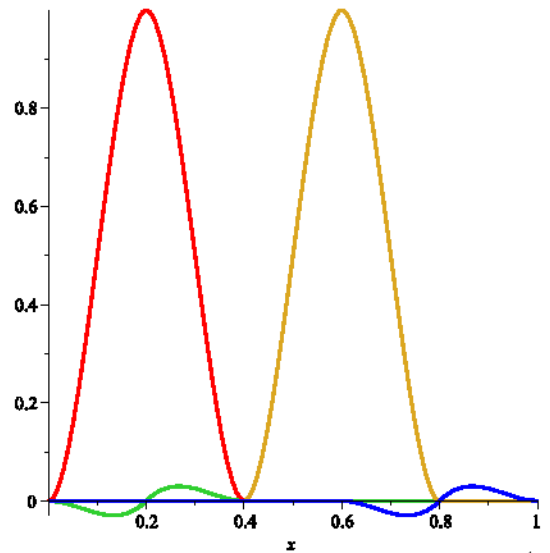


Рисунок 6.2. Графики функций $\varphi_k(x)$ при $k = 1, 2, 5, 8$ (при разбиении на $n = 5$ равных частей)

Первый интеграл в левой части дважды проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (pu'')''_{x\sigma}(x) \varphi_k(x) d\sigma = \\ & = (pu'')'_x(x) \varphi_k(x) \Big|_0^1 - (pu'')(x) \varphi'_k(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 (pu'')(x) \varphi''_k(x) dx. \quad (6.3.7) \end{aligned}$$

Тогда равенство (6.3.6), с учетом (6.3.7), принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (pu'')(x) \varphi''_k(x) dx + (pu'')'_x(1) \varphi_k(1) - (pu'')(1) \varphi'_k(1) + \\ & + \int_0^1 \varphi_k(x) u(x) Q'_\sigma(x) d\sigma = \int_0^1 \varphi_k(x) F'_\sigma(x) d\sigma, \quad (6.3.8) \end{aligned}$$

или, с учетом граничных условий $u''(1) = u'''(1) = 0$, равенство (6.3.8) равносильно

$$\int_0^1 (pu'')(x) \varphi''_k(x) dx + \int_0^1 \varphi_k(x) u(x) Q'_\sigma(x) d\sigma(x) = \int_0^1 \varphi_k(x) F'_\sigma(x) d\sigma(x),$$

Подставим сюда вместо $u(x)$ функцию (6.3.5). Получим систему из $2n$ уравнений относительно $2n$ неизвестных $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} v_i \int_0^1 p \varphi_i''(x) \varphi_k''(x) dx + \sum_{i=1}^{2n} v_i \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_k(x) Q'_\sigma(x) d\sigma = \\ = \int_0^1 \varphi_k(x) F'_\sigma(x) d\sigma \quad (k = 1, 2, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Введем обозначение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 p \varphi'' \psi'' dx + \int_0^1 \varphi \psi Q'_\sigma d\sigma.$$

Очевидно, что это билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций, имеющих вторую производную, суммируемую с квадратом, и удовлетворяющих условиям $u(0) = u'(0) = 0$. Благодаря положительности функции $p(x)$ и неубывания $Q(x)$ он еще и невырожденный:

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 p \varphi'' \varphi'' dx + \int_0^1 \varphi \varphi dQ \geq 0, \quad \langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \iff \varphi = 0.$$

Поэтому, может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты $A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$ уравнений (6.3.9) образуют матрицу Грама системы линейно независимых векторов φ_k . Поэтому, определитель матрицы A отличен от нуля, следовательно, система (6.3.9) имеет единственное решение.

Замечание 6.3.1. Алгоритм был построен для случая $r(x) \equiv 0$. Если $r(x) \not\equiv 0$, то коэффициент в i -м уравнении при j -ой переменной заменяется на

$$\int_0^1 \varphi_{i''xx} \varphi_{j''xx} dx + \int_0^1 r \varphi_{i'x} \varphi_{j'x} dx + \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dQ.$$

6.3.2 Оценка погрешности

Здесь доказывается следующая теорема.

Теорема 6.3.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (6.3.1), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей отрезка $[0; 1]$. Тогда справедлива оценка

$$a(u - v, u - v) \leq C \cdot h^2,$$

где $h = 1/N$, C не зависит от h , и $a(u, u)$ — энергетическая норма:

$$a(u, u) = \int_0^1 u''^2 dx + \int_0^1 ru'^2 dx + \int_0^1 u^2 dQ.$$

Доказательство. Интерполянт $u_I(x)$ точного решения $u(x)$ математической модели (6.3.1) можно выразить через базисные следующим образом

$$u_I(x) = \sum_{k=1}^n u(x_k) \varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^n u'_x(x_k) \varphi_{2k}(x).$$

Через $w(x)$ обозначим разность $u(x) - u_I(x)$. Оценим $|w(x)|$ в энергетической норме

$$a(u, u) = \int_0^1 u''^2 dx + \int_0^1 ru'^2 dx + \int_0^1 u^2 dQ;$$

приближенное решение $v(x)$ дифференциальной модели (6.3.1), полученное с помощью адаптированного метода конечных элементов, в силу ключевой теоремы (на стр. 252), будет еще ближе. Справедливость аналогичного результата очевидно: следует заменить $H^{2,\sigma}$ на $H^{4,\sigma}$; \widehat{H}_0^1 на \widehat{H}_0^2 — пополнение $H^{4,\sigma}$ множества дважды непрерывно дифференцируемых функций, вторая производная которых абсолютно непрерывна на $[0; 1]$, третья — σ -абсолютно непрерывна на $[0; 1]$, четвертая (по σ) σ -суммируема с квадратом, по норме $a(u, u)$.

Для оценки $|w(x)|$ и $|w'(x)|$ нам понадобятся оценки $|w'''_{xxx}(x+0)|$ и $|w''_{xx}(x_k)|$.

Для $|w'''(x_k+0)|$ имеем

$$w'''(x_k+0) = u'''(x_k+0) + u(x_{k+1}) \frac{12}{h^3} - u'(x_{k+1}) \frac{6}{h^2} - u(x_k) \frac{12}{h^3} - u'(x_k) \frac{6}{h^2},$$

или, после несложных преобразований,

$$w'''(x_k+0) = \frac{6}{h^3} u'''(x_k+0) \frac{h^3}{6} + \frac{6}{h^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s u''(t) dt ds -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{6}{h^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_k} u''(t) dt ds = \frac{6}{h^3} u'''(x_k + 0) \left(-\frac{h^3}{6} \right) + \\
& + \frac{6}{h^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s \int_{x_k+0}^t u'''(\tau) d\tau dt ds + \frac{6}{h^3} u'''(x_k + 0) \frac{h^3}{3} - \\
& - \frac{6}{h^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} \int_{x_k+0}^t u'''(\tau) d\tau dt ds = \\
& = \frac{6}{h^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s \int_{x_k+0}^t (u'''(\tau) - u'''(x_k + 0)) d\tau dt ds + \\
& + \frac{6}{h^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} \int_{x_k+0}^t (u'''(x_k + 0) - u'''(\tau)) d\tau dt ds.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства находим

$$|w'''(x_k + 0)| \leq \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3. \quad (6.3.10)$$

Далее, оценим $|w''(x_k)|$. Из равенства

$$w''_{xx}(x_k) = u''(x_k) - \frac{6}{h^2} u(x_{k+1}) + \frac{2}{h} u'(x_{k+1}) + \frac{6}{h^2} u(x_k) + \frac{4}{h} u'(x_k)$$

последовательно находим

$$\begin{aligned}
w''_{xx}(x_k) &= u''(x_k) - \frac{2}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (2u'(s) - 2u'(x_k) + u'(s) - u'(x_{k+1})) ds = \\
&= u''(x_k) - \frac{2}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(2 \int_{x_k}^s u''(t) dt - \int_s^{x_{k+1}} u''(t) dt \right) ds = \\
&= \frac{2}{h^2} u''(x_k) h^2 - \frac{2}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2 \int_{x_k}^s u''(t) dt ds - \\
&- \frac{2}{h^2} u''(x_k) \frac{h^2}{2} + \frac{2}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} u''(t) dt ds =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{h^2} \cdot 2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s (u''(x_k) - u''(t)) dt ds + \frac{2}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} (u''(t) - u''(x_k)) dt ds.$$

Отсюда вытекают оценки

$$|w''_{xx}(x_k)| \leq \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} (u'') \cdot 3 \quad \text{и} \quad |w''_{xx}(x_k)| \leq \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''| \cdot 6. \quad (6.3.11)$$

Оценим теперь $|w(x)|$, когда $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Так как $w(x_k) = w'_x(x_k) = 0$, то

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_{x_k}^x \int_{x_k}^s \left(w''_{xx}(x_k) + \int_{x_k+0}^t w'''_{xxx}(x_k+0) + \int_{x_k+0}^{\tau} u''''_{xxxx\sigma} d\sigma \right) d\tau dt ds = \\ &= w''_{xx}(x_k) \frac{(x-x_k)^2}{2} + w'''_{xxx}(x_k+0) \frac{(x-x_k)^3}{6} + \\ &\quad + \int_{x_k}^x \int_{x_k}^s \int_{x_k+0}^t \int_{x_k+0}^{\tau} u''''_{xxxx\sigma} d\sigma d\tau dt ds. \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом полученных ранее оценок для $|w''_{xx}(x_k)|$ и $|w'''_{xxx}(x_k+0)|$,

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq |w''_{xx}(x_k)| \cdot \frac{h^2}{2} + \\ &\quad + |w'''_{xxx}(x_k+0)| \cdot \frac{h^3}{6} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6} \leq \\ &\leq 6 \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h^3}{6} + \\ &\quad + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6}. \end{aligned}$$

А так как h — малая величина, то можно записать

$$|w(x)| \leq C_{k,1} \cdot \frac{h^2}{2},$$

где

$$C_{k,1} = 6 \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Так как

$$w'(x) = w''_{xx}(x_k)(x - x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0) \frac{(x - x_k)^2}{2} + \int_{x_k}^x \int_{x_k+0}^s \int_{x_k+0}^t u'''_{xxx\sigma} d\sigma dt ds,$$

то

$$|w'(x)| \leq |w''_{xx}(x_k)| \cdot h + |w'''_{xxx}(x_k + 0)| \frac{h^2}{2} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u'''_{xxx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma),$$

или, с учётом оценок (6.3.11), (6.3.10),

$$|w'(x)| \leq 6 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''(x)| \cdot h + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u''') \cdot 3 \cdot \frac{h^2}{2} + \\ + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u'''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \cdot \frac{h^2}{2} \leq C_{k,1} \cdot h.$$

Далее, из равенства

$$w''_{xx}(x) = w''_{xx}(x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0)(x - x_k) + \int_{x_k+0}^x \int_{x_k+0}^s u'''_{xxx\sigma} d\sigma ds$$

вытекает оценка для вариации

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_k-0}(w''_{xx}) \leq |w'''_{xxx}(x_k + 0)| \cdot h + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u'''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \cdot h \leq C_{k,2} \cdot h,$$

где

$$C_{k,2} = \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u''') \cdot 3 + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u'''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma).$$

Оценим теперь близость $u_I(x)$ к $u(x)$ по энергетической норме, т. е. оценим $a(w, w)$:

$$a(w, w) = \int_0^1 w''_{xx}{}^2 dx + \int_0^1 r w_x'^2 dx + \int_0^1 w^2 dQ.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям:

$$\int_0^1 w''_{xx}{}^2 dx = w''_{xx} w_x' \Big|_0^1 - \int_0^1 w_x' dw''_{xx} = - \int_0^1 w' dw'',$$

так как $w'_x(0) = w'_x(1) = 0$. Далее,

$$\int_0^1 w'_x dw''_{xx} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w'_x dw''_{xx} + \\ + w'_x(0)\Delta^+ w''_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{N-1} w'_x(x_k)\Delta w''_{xx}(x_k) + w'_x(1)\Delta^- w''_{xx}(1).$$

Все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $w'_x(x_k) = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, N$. На основании оценок, полученных ранее, получаем

$$\left| \int_0^1 w'_x dw''_{xx} \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |w'_x(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (w''_{xx}) \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1} \cdot h \cdot C_{k,2} \cdot h = h^2 \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1} \cdot C_{k,2},$$

или, вспоминая определения $C_{k,1}$ и $C_{k,2}$, будем иметь

$$\left| \int_0^1 w'_x dw''_{xx} \right| \leq h^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \right. \\ \left. + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \right) \times \\ \times \left(\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \right).$$

Так как

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \leq \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma)$$

(вытекает из равенства $u'''_{xxx} = u'''_{xxx}(x_k + 0) + \int_{x_k+0}^x u''''_{xxx\sigma} d\sigma$), то последнее неравенство принимает вид

$$\left| \int_0^1 w'_x dw''_{xx} \right| \leq h^2 \left(6 \cdot \sup_{0 < x < 1} |u''_{xx}(x)| + 2 \cdot \sup_{0 < x < 1} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_0^1 (\sigma) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=0}^{N-1} 4 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u_{xxxx\sigma}''''(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \leq \\
& \leq h^2 \cdot 8 \cdot \left(3 \cdot \sup_{0 < x < 1} |u_{xx}''(x)| + \sup_{0 < x < 1} |u_{xxxx\sigma}''''(x)| \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \right) \times \\
& \quad \times \sup_{0 < x < 1} |u_{xxxx\sigma}''''(x)| \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \leq h^2 \cdot \widehat{C}_1, \quad (6.3.12)
\end{aligned}$$

где \widehat{C}_1 зависит только от коэффициентов уравнения $u_{xxxx\sigma}'''' = (ru_x')'_\sigma - uQ'_\sigma + F'_\sigma$.

Для слагаемого $\int_0^1 rw_x'^2 dx$ имеем

$$\int_0^1 rw_x'^2 dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w_x'^2 dR,$$

где $R(x) = \int_0^x r(s) ds$. Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 rw_x'^2 dx \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k < x < x_{k+1}} w_x'^2(x) \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leq \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}^2 \cdot h^2 \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leq \\
& \leq \bigvee_0^1(R) \cdot h^2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \cdot \sup_{(x_k, x_{k+1})} |u_{xx}''| \cdot h + 2h^2 \sup_{(x_k, x_{k+1})} |u_{xxxx\sigma}''''| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right)^2 \leq \\
& \leq \bigvee_0^1(R) h^2 \cdot 4 \left(3 \sup_{[0;1]} |u_{xx}''| \cdot h + h^2 \sup_{[0;1]} |u_{xxxx\sigma}''''| \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \right) \times \\
& \times \sum_{k=0}^{N-1} \left(3 \sup_{(x_k; x_{k+1})} |u_{xx}''| \cdot h + h^2 \sup_{(x_k; x_{k+1})} |u_{xxxx\sigma}''''| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right) \leq \\
& \leq \bigvee_0^1(R) 4h^3 \left(3 \sup_{[0;1]} |u_{xx}''| + h \sup_{[0;1]} |u_{xxxx\sigma}''''| \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \right) \times \\
& \times \left(\sum_{k=0}^{N-1} 3 \sup_{[0;1]} |u_{xx}''| \cdot h + h^2 \cdot \sup_{[0;1]} |u_{xxxx\sigma}''''| \sum_{k=0}^{N-1} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right) \leq \\
& \leq \bigvee_0^1(R) 4h^3 \left(3 \sup_{[0;1]} |u_{xx}''| + \sup_{[0;1]} |u_{xxxx\sigma}''''| \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \right) \leq h^3 \cdot \widehat{C}_2, \quad (6.3.13)
\end{aligned}$$

так как $h \leq 1$ и $\sum_{k=0}^{N-1} h = h \cdot N = 1$; \widehat{C}_2 не зависит от h .

Аналогично для слагаемого $\int_0^1 w^2 dQ$ последовательно находим

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 w^2 dQ = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2 dQ + \sum_{k=1}^{N-1} w^2(x_k) \Delta Q(x_k) + w^2(0) \Delta^+ Q(0) + w^2(1) \Delta^- Q(1) = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2 dQ \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h^3}{6} + \right. \\
& \quad \left. + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6} \right)^2 \leq \\
& \leq h^3 \left(\sup_{0 < x < 1} |u''_{xx}| + \bigvee_0^1 (u'''_{xxx}) \cdot \frac{h}{2} + \sup_{0 < x < 1} |u''''_{xxxx\sigma}| \bigvee_0^1 (\sigma) \frac{h}{2} \right) \times \\
& \quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot h + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \frac{h^2}{2} + \right. \\
& \quad \left. + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \frac{h^2}{6} \right) \leq \\
& \leq h^3 \left(\sup_{0 < x < 1} |u''_{xx}| + \bigvee_0^1 (u'''_{xxx}) + \sup_{0 < x < 1} |u''''_{xxxx\sigma}| \bigvee_0^1 (\sigma) \right)^2 \times \\
& \quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{6} \right) \leq h^3 \cdot \widehat{C}_3, \quad (6.3.14)
\end{aligned}$$

так как $\sum_{k=0}^{N-1} \left(h + \frac{2h^2}{3} \right) = h \cdot N + 2h^2 \cdot N = 1 + 2h \leq 3$ (h мало и изначально может быть взято меньшим единице); константа \widehat{C}_3 от h не зависит.

Соединяя теперь неравенства (6.3.12), (6.3.13) и (6.3.14) мы получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

6.4 Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели

В этом параграфе дается описание алгоритма адаптированного метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели.

Далее для простоты мы полагаем $\ell = 1$.

Рассматривается математическая модель с неизвестной функцией

$$\begin{cases} (pu''_{xx})'_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (6.4.1)$$

где $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf_{[0, \xi]} p > 0$, $p(x) \equiv 0$ на $[\xi; 1]$, $r(x) \geq 0$ и $r(x) > 0$ на $[\xi; 1]$.

6.4.1 Построение алгоритма

Для приближенного решения уравнения (6.2.1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. В качестве базисных функций $\varphi_i(x)$ возьмем следующие функции. Каждый из отрезков $[0; \xi]$ и $[\xi; 1]$ мы разобьем на N равных частей; точки разбиения мы обозначим через $\bar{x}_i \in [0; \xi]$ и $\bar{x}_i \in [\xi; 1]$. Тогда

$$\varphi_{2i-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3 \left(\frac{x - \bar{x}_i}{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{x - \bar{x}_i}{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}} \right)^3, & \text{для } x \in [\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i] \\ 1 - 3 \left(\frac{x - \bar{x}_i}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i} \right)^2 + 2 \left(\frac{x - \bar{x}_i}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i} \right)^3, & \text{для } x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} (x - \bar{x}_i) \left(1 + \frac{x - \bar{x}_i}{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}} \right)^2, & \text{для } x \in [\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i] \\ (x - \bar{x}_i) \left(1 - \frac{x - \bar{x}_i}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i} \right)^2, & \text{для } x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \dots, N - 1);$

$$\varphi_{2N-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3 \left(\frac{x - \xi}{\xi - \bar{x}_{N-1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{x - \xi}{\xi - \bar{x}_{N-1}} \right)^3, & \text{для } x \in [\bar{x}_{N-1}, \xi] \\ \frac{x - \bar{x}_1}{\xi - \bar{x}_1} & \text{для } x \in [\xi, \bar{x}_1] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2N}(x) = \begin{cases} (x - \xi) \left(1 + \frac{x - \xi}{\xi - \bar{x}_{N-1}} \right)^2, & \text{для } x \in [\bar{x}_{N-1}, \xi] \\ 0, & \text{для остальных } x, \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - \bar{x}_{i-1}}{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}}, & \text{для } x \in [\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i] \\ \frac{x - \bar{x}_{i+1}}{\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1}}, & \text{для } x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в узловых точках и в связи с этим будем использовать в уравнениях вместо $u(x)$ функцию

$$v(x) = \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \varphi_i(x), \quad (6.4.2)$$

где v_i — ее значение в узловой точке x_i , если $i = 1, 3, \dots, 2N - 1, 2N + 1, 2N + 2, \dots, 3N - 2, 3N - 1$, и значение ее производной, если $i = 2, 4, \dots, 2N - 2, 2N$.

Уравнение $(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}$ умножим на базисную функцию $\varphi_j(x)$ и проинтегрируем по мере σ по всему $[0; 1]$:

$$\int_0^1 \left((pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} \right) \varphi_j d\sigma = \int_0^1 \varphi_j F'_{\sigma} d\sigma.$$

Разбивая интеграл в левой части последнего равенства на три, и проинтегрировав первый интеграл дважды по частям, второй — один раз, будем иметь

$$(pu''_{xx})'_x \varphi_j \Big|_0^1 - pu''_{xx} \varphi_{jx}' \Big|_0^1 + \int_0^1 pu''_{xx} \varphi_{jxx}'' dx -$$

$$-ru'_x\varphi_j\Big|_0^1 + \int_0^1 ru'_x\varphi'_{j_x} dx + \int_0^1 u\varphi_j dQ = \int_0^1 \varphi_j dF$$

или, так как $u(x)$ и $\varphi_j(x)$ удовлетворяют граничным условиям и $p(x) \equiv 0$ при $x \geq \xi$,

$$\int_0^\xi pu''_{xx}\varphi''_{j_{xx}} dx + \int_0^1 ru'_x\varphi'_{j_x} dx + \int_0^1 u\varphi_j dQ = \int_0^1 \varphi_j dF,$$

$j = 1, 2, \dots, 3N - 1$. Поставив сюда вместо $u(x)$ функцию (6.4.2), мы получим систему из $3N - 1$ уравнений с $3N - 1$ неизвестной

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^\xi p\varphi''_{i_{xx}}\varphi''_{j_{xx}} dx + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^1 r\varphi'_{i_x}\varphi'_{j_x} dx + \\ + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^1 \varphi_i\varphi_j dQ = \int_0^1 \varphi_j dF, \quad (6.4.3) \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, 3N - 1$.

Следующая величина

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^\xi p\varphi''_{xx}\psi''_{xx} dx + \int_0^1 r\varphi'_x\psi'_x dx + \int_0^1 \varphi\psi dQ$$

является билинейным симметричным функционалом в пространстве E абсолютно непрерывных на $[0; 1]$ функций, первая производная которых суммируема с квадратом на $[0; 1]$ и абсолютно непрерывна на $[0; \xi]$, вторая производная (определенная только на $[0; \xi]$) суммируема с квадратом на $[0; \xi]$, удовлетворяющих условиям $u(0) = u'_x(0) = u(1) = 0$.

Очевидно, что из положительности $p(x)$ на $[0; \xi]$, неотрицательности $r(x)$, положительности $r(x)$ на $(\xi; 1]$, неубывания $Q(x)$, $\langle \varphi, \varphi \rangle$ является неотрицательным и невырожденным:

$$\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0 \text{ для всякой } \varphi,$$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \iff \varphi = 0.$$

Поэтому $\langle \varphi, \psi \rangle$ может служить скалярным произведением; коэффициенты матрицы системы (6.4.3) образуют матрицу Грамма системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$. Поэтому определитель системы отличен от нуля. Отсюда следует, что (6.4.3) имеет единственное решение.

6.4.2 Об оценке погрешности

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теорем 6.1.1 и 6.3.1, можно утверждать, что справедлива оценка

$$\langle u - v, u - v \rangle \leq \tilde{C} \cdot h,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — точное и приближенное (найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов) решения математической модели (6.4.1); константа \tilde{C} не зависит от h ; $h = \max \left\{ \left(\frac{\xi}{N} \right)^2; \frac{1 - \xi}{N} \right\}$.

Замечание 6.4.1. Следует отметить, что расположение точки ξ накладывает определенные ограничения на N — количество интервалов на которые мы разбиваем каждый из отрезков $[0; \xi]$ и $[\xi; 1]$: $N > \{1/\xi; 1/(1-\xi)\}$. Но слишком большое N приводит как к увеличению времени вычисления, так и влиянию погрешности вычисления.

Замечание 6.4.2. Для увеличения точности можно (а в ряде случаев и нужно) отрезок $[\xi; 1]$ разбить на большее число интервалов, т. е. использовать большее количество базисных функций.

Так разбиение отрезка $[\xi; 1]$ на N^2 равных частей дает оценку погрешности

$$\langle u - v, u - v \rangle \leq \tilde{C}_1 \cdot h_1,$$

где $h_1 = \max \left\{ \frac{\xi^2}{N^2}; \frac{1 - \xi}{N^2} \right\}$. Однако, как отмечалось уже выше, это приводит к увеличению размерности системы, которая при этом получается.

Выводы

В этой главе метод конечных элементов адаптирован для изученных в предыдущих главах математических моделей. Несмотря на то, что в качестве

базисных функций берутся классические функции, приближенное решение сходится к точному при измельчении сетки. Это вызвано тем обстоятельством, что при построении алгоритма интегрирование производится по мере, которая содержит все (локализованные) особенности, порожденные как внутренней структурой изучаемого объекта, так и внешними факторами (среда и сила). Основные результаты главы.

- 1) Построен алгоритм получения приближенного решения изученных дифференциальных моделей.
- 2) Произведена оценка погрешности полученного приближенного решения для каждой математической модели.

Глава 7

Численные эксперименты

7.1 Численные эксперименты для математической модели

Здесь приводятся точные решения некоторых математических моделей и приближенные решения, полученные с помощью адаптированного метода конечных элементов. Для простоты вычислений будем считать $p(x) \equiv 1$.

Внешняя сила состоит из сосредоточенных усилий

Пусть $Q(x) \equiv \text{const}$ и внешняя сила $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/3; \\ -2, & 1/3 < x < 1/2; \\ -3, & 1/2 < x < 2/3; \\ -5/2, & 2/3 < x < 3/4; \\ -17/6, & 3/4 < x < 4/5; \\ -7/6, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases} \quad (7.1.1)$$

Непосредственный подсчет показывает, что функция влияния $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} x, & x < s; \\ s, & x \geq s. \end{cases}$$

Тогда точное решение математической модели для $F(x)$, определяемой равенством (7.1.1), имеет вид

$$u(x) = -2G(x, 1/3) - G(x, 1/2) + \frac{1}{2}G(x, 2/3) - \frac{1}{3}G(x, 3/4) + \frac{5}{3}G(x, 4/5),$$

график которой представлен на рис. 7.1.

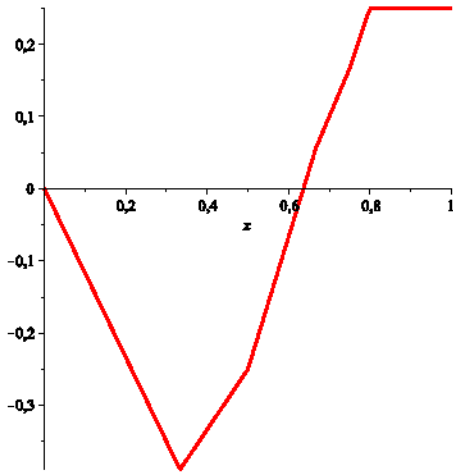


Рисунок 7.1. Точное решение

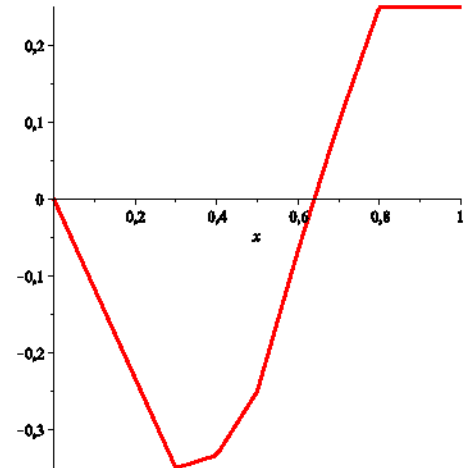


Рисунок 7.2. Приближенное решение при $n = 10$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на десять равных отрезков, и применим описанную выше схему метода конечных элементов. Полученное приближенное решение имеет вид (с точностью до тысячных)

$$v(x) = \begin{cases} -1,167x, & 0 \leq x \leq 0,3; \\ -0,400 + 0,667x, & 0,3 < x \leq 0,4; \\ -0,667 + 0,833x, & 0,4 < x \leq 0,5; \\ -1,167 + 1,833x, & 0,5 < x \leq 0,6; \\ -1,067 + 1,667x, & 0,6 < x \leq 0,7; \\ -0,950 + 1,500x, & 0,7 < x \leq 0,8; \\ 0,250, & 0,8 < x \leq 1. \end{cases}$$

График $v(x)$ представлен на рис. 7.2. Точное и приближенное решения вместе изображены на рис. 7.3 (тонкой линией изображено приближенное решение).

График погрешности представлен на рисунке 7.4.

На рисунках 7.5 и 7.6 представлены погрешности для $n = 100$ и $n = 1000$ соответственно.

Приближенные решения и погрешность, найденная при различных N и представленная на рисунках 7.2, 7.4, 7.5, и 7.6, получены с помощью программы, написанной в пакете символьной математики Maple.

На рисунках 7.7, 7.8, 7.9 и 7.10 представлены графики приближенного решения и погрешности, найденной при различных N с помощью программы, написанной на языке высокого уровня Python.

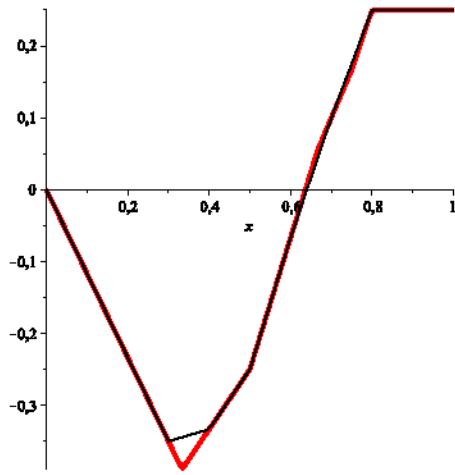


Рисунок 7.3. Точное и приближенное решения при разбиении на 10 равных частей

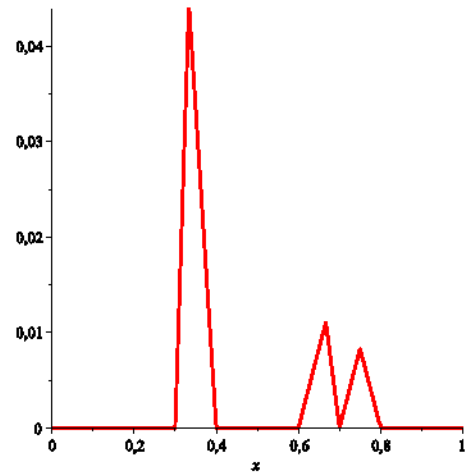


Рисунок 7.4. График погрешности при разбиении на 10 равных частей

В таблицах В.1 и В.2 для сравнения представлены значения точного решения, приближенных решений и соответствующие погрешности, найденных в пакете *Maple* и с помощью программы на *Python*'е.

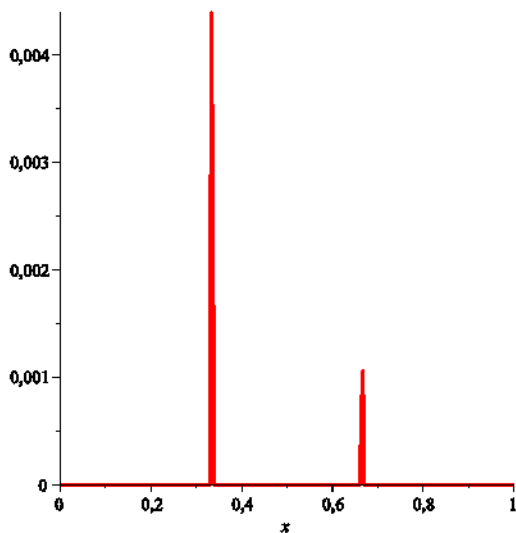


Рисунок 7.5. График погрешности при разбиении на 100 равных частей

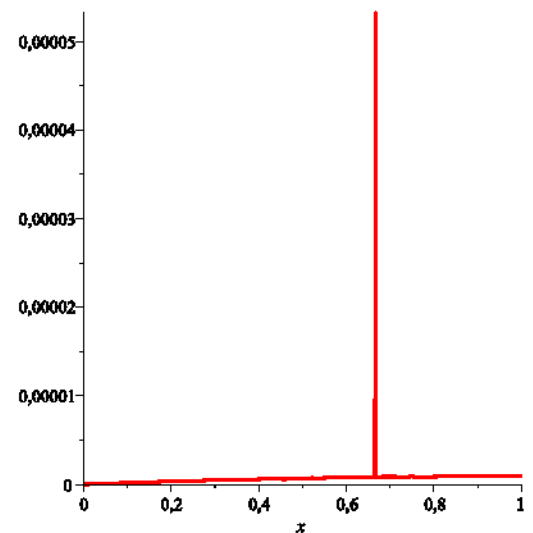


Рисунок 7.6. График погрешности при разбиении на 1000 равных частей

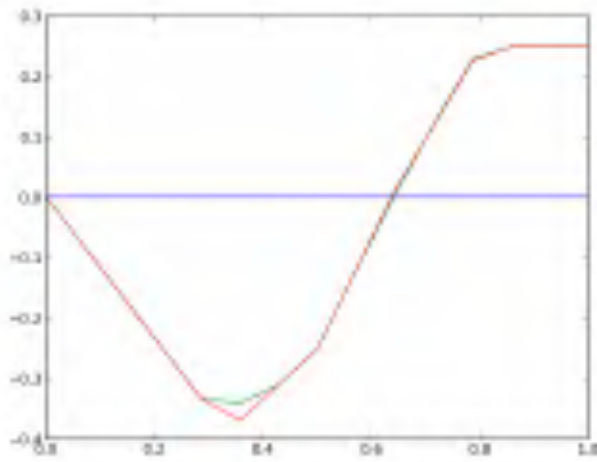


Рисунок 7.7. Графики точного и приближенного решений при $N = 10$ (Python)

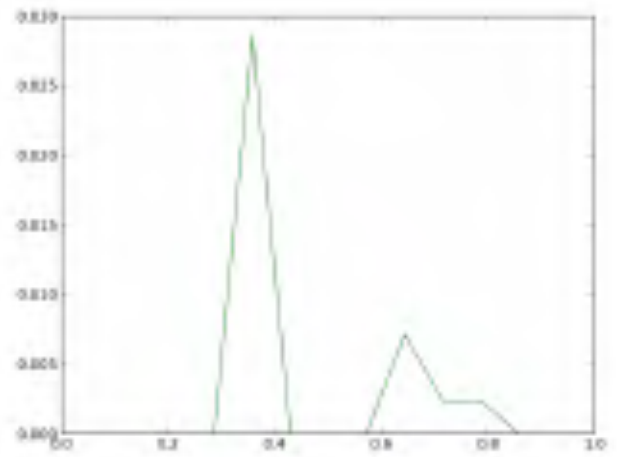


Рисунок 7.8. График погрешности при $N = 10$ (Python)

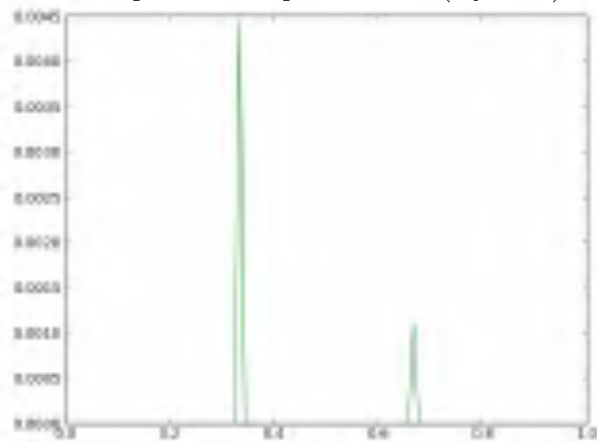


Рисунок 7.9. График погрешности при $N = 100$ (Python)

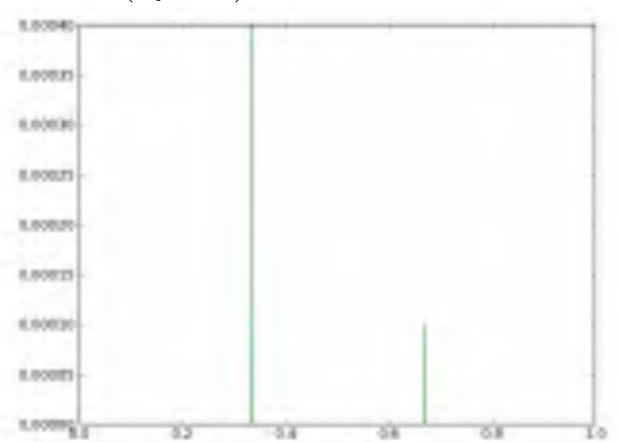


Рисунок 7.10. График погрешности при $N = 1000$ (Python)

Внешняя сила имеет непрерывную составляющую

Пусть теперь внешняя сила $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 2x + \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/3; \\ -2, & 1/3 < x < 1/2; \\ -3, & 1/2 < x < 2/3; \\ -5/2, & 2/3 < x < 3/4; \\ -17/6, & 3/4 < x < 4/5; \\ -7/6, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Точное решение $u(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(x) = & \int_0^1 G(x, s)(s^3 + 2s - 2) ds - 2G(x, 1/3) - G(x, 1/2) + \\
 & + \frac{1}{2}G(x, 2/3) - \frac{1}{3}G(x, 3/4) + \frac{5}{3}G(x, 4/5) = -\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{3}{4}x - \\
 & - 2G(x, 1/3) - G(x, 1/2) - \frac{1}{2}G(x, 2/3) + \frac{1}{3}G(x, 3/4) + \frac{1}{3}G(x, 4/5),
 \end{aligned}$$

график которого изображен на рис. 7.11.

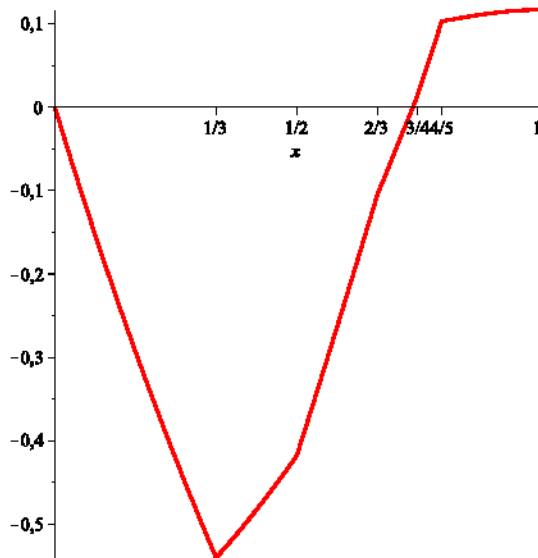


Рисунок 7.11. Точное решение

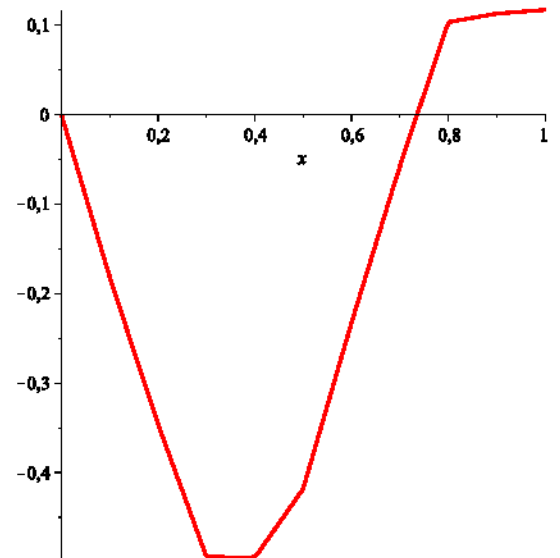


Рисунок 7.12. Приближенное решение

При разбиении отрезка на 10 равных частей получим приближенное решение $v(x)$ (с точностью до тысячных)

$$v(x) = \begin{cases} -0,870x, & 0 \leq x \leq 0,1; \\ -0,008 - 0,790x, & 0,1 < x \leq 0,2; \\ -0,020 - 0,731x, & 0,2 < x \leq 0,3; \\ -0,431 + 0,639x, & 0,3 < x \leq 0,4; \\ -0,703 + 1,319x, & 0,4 < x \leq 0,5; \\ -1,197 + 2,307x, & 0,5 < x \leq 0,6; \\ -1,071 + 2,098x, & 0,6 < x \leq 0,7; \\ -0,903 + 1,857x, & 0,7 < x \leq 0,8; \\ 0,387 + 0,245x, & 0,8 < x \leq 0,9; \\ 0,525 + 0,092x, & 0,9 < x \leq 1. \end{cases}$$

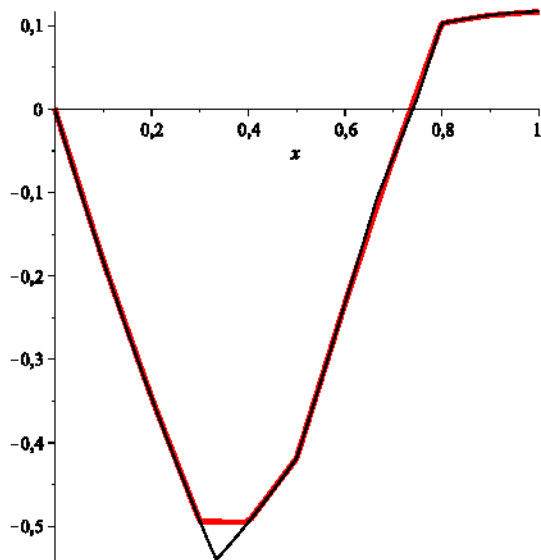


Рисунок 7.13. Точное и приближенное решения при разбиении на 10 равных частей

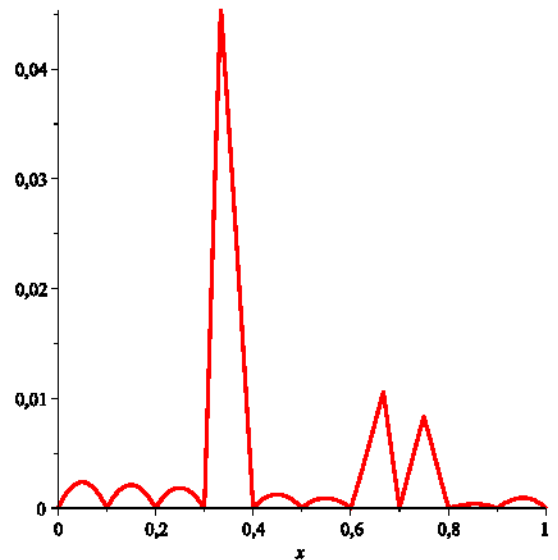


Рисунок 7.14. Погрешность при разбиении на 10 равных частей

Ее график изображен на рис. 7.12. Точное и приближенное решения вместе изображены на рис. 7.13 (тонкой линией изображено точное решение); график погрешности (при разбиении на 10 равных частей) — на рисунке 7.14.

Графики погрешностей, полученные при разбиении отрезка на 100 и 1000 равных частей, представлены на рисунках 7.15 и 7.16 соответственно.

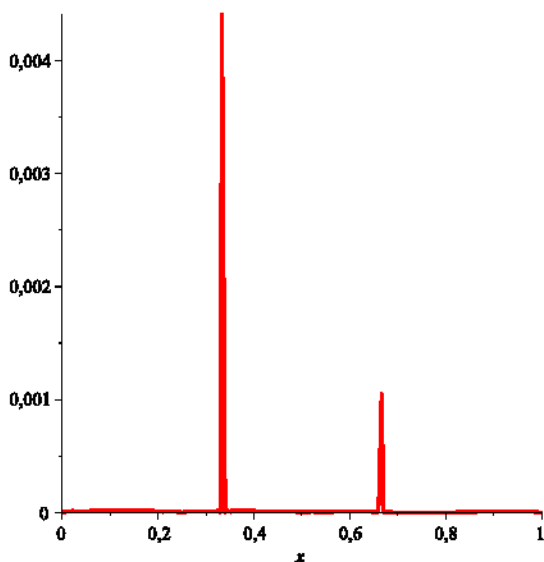


Рисунок 7.15. Погрешность при разбиении на 100 равных частей

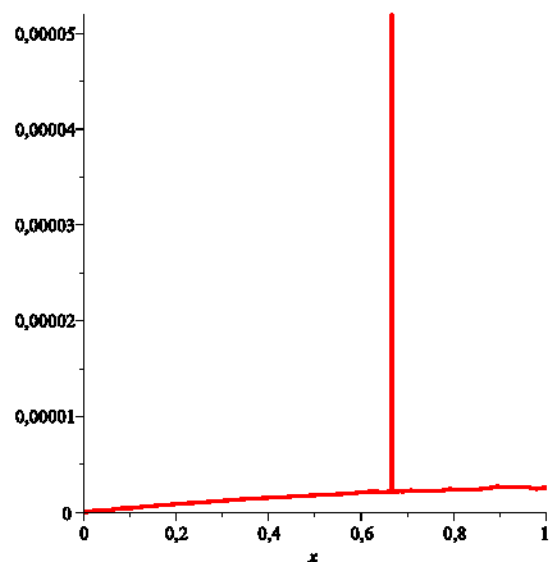


Рисунок 7.16. Погрешность при разбиении на 1000 равных частей

На рисунках 7.17, 7.18, 7.19 и 7.20 представлены графики точного и приближенного решений, найденных при разбиении на 10 равных частей, погрешностей, которые получаются при нахождении приближенного решения с помощью программы написанной на Python'e (при разбиении на 10, 100 и 1000 равных частей соответственно).

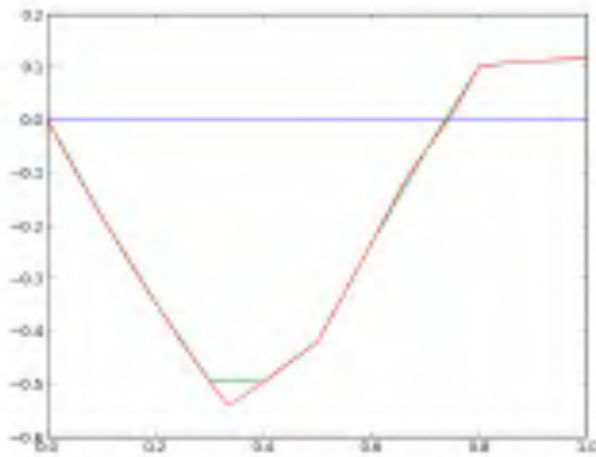


Рисунок 7.17. Графики точного и приближенного решений при $N = 10$ (Python)

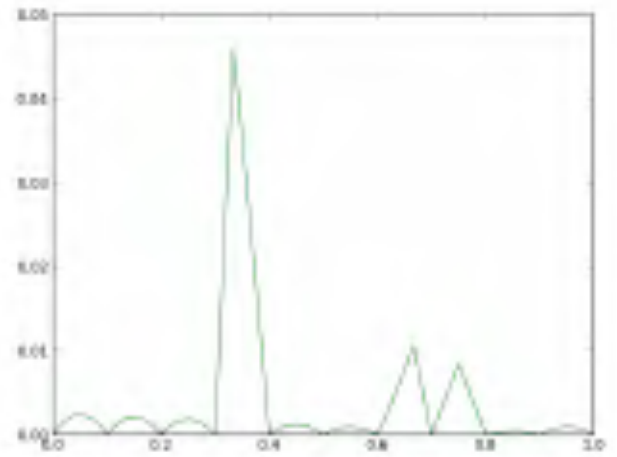


Рисунок 7.18. График погрешности при $N = 10$ (Python)

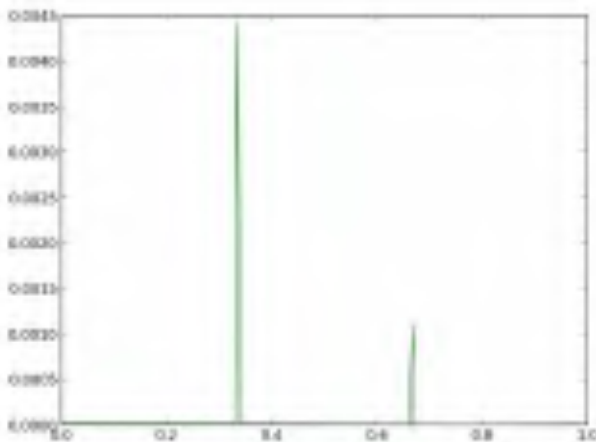


Рисунок 7.19. График погрешности при $N = 100$ (Python)

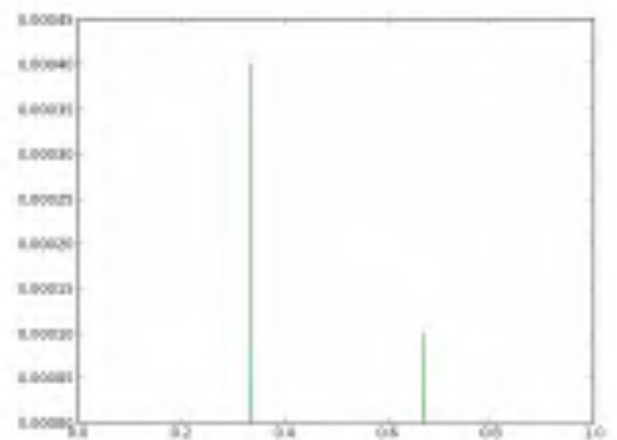


Рисунок 7.20. График погрешности при $N = 1000$ (Python)

Численный эксперимент в случае наличия внешней среды

В предыдущих пунктах мы рассмотрели случаи отсутствия внешней среды, так как в этом случае точное решение легко предъявляется. Рассмотрим случай, когда коэффициенты модели имеют вид $p(x) = 1 + x^2 + x$,

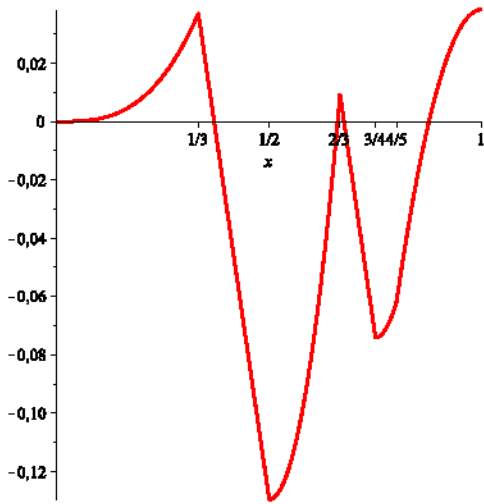


Рисунок 7.21. Точное решение

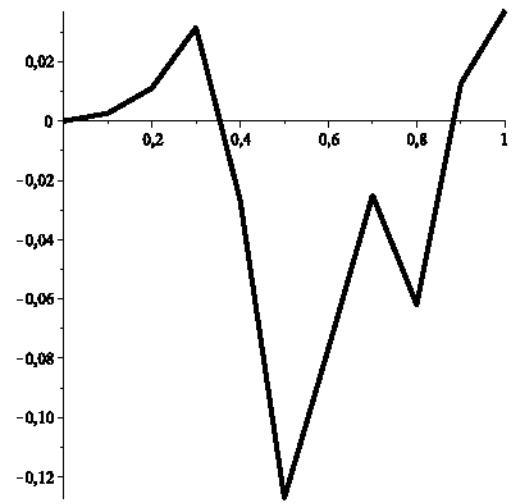


Рисунок 7.22. Приближенное решение при разбиении на 10 равных частей

$q(x) = x \cdot (1 - x) + \Theta'_\sigma(x - 1/3) + \Theta'_\sigma(x - 2/3) + 2\Theta'_\sigma(x - 3/4) + 4\Theta'_\sigma(x - 4/5)$ и

$$F'_\sigma(x) = \begin{cases} -12x^3 - 9x^2 - 6x + x^4 - x^5, & 0 \leq x < 1/3, \\ 1,962962962, & x = 1/3, \\ 64/27 \cdot x + 1 - 37/27 \cdot x^2 + x^3, & 1/3 < x < 1/2, \\ -1.75, & x = 1/2, \\ -959/108 \cdot x - 3901/108 \cdot x^2 - 5 + \\ \quad + 10x^3 - 5x^4, & 1/2 < x < 2/3, \\ 5,638888889, & x = 2/3, \\ 289/108 \cdot x + 1 - 181/108 \cdot x^2 + x^3, & 2/3 < x < 3/4, \\ -2,460648148, & x = 3/4, \\ -977/432 \cdot x - 17383/432 \cdot x^2 - \\ \quad - 5/2 + 25/2 \cdot x^3 - 5x^4, & 3/4 < x < 4/5, \\ -1,466296296, & x = 4/5, \\ -5317/2160 \cdot x + 48517/2160 \cdot x^2 - \\ \quad - 15/2 \cdot x^3 + 5/2 \cdot x^4, & 4/5 < x \leq 1 \end{cases}$$

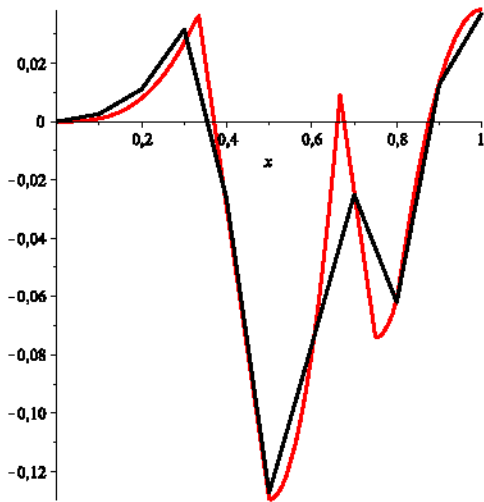


Рисунок 7.23. Точное и приближенное решения при разбиении на 10 равных частей

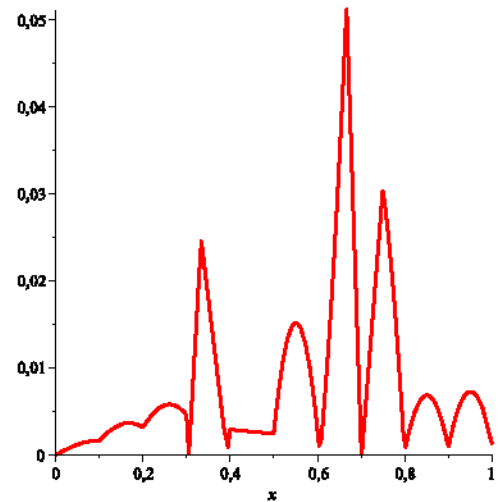


Рисунок 7.24. Погрешность при разбиении на 10 равных частей

Точное решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x < 1/3, \\ 10/27 - x, & 1/3 \leq x < 1/2, \\ 121/108 - 5x + 5x^2, & 1/2 \leq x < 2/3, \\ 73/108 - x, & 2/3 \leq x < 3/4, \\ 1183/432 - 15/2 \cdot x + 5x^2, & 3/4 \leq x < 4/5, \\ -5317/2160 + 5x - 5/2 \cdot x^2, & 4/5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

график которого представлен на рисунке 7.21. График приближенного решения, получаемого при разбиении на 10 равных частей отрезка $[0; 1]$ представлен на рисунке 7.22; вместе — точное и приближенное решения — на рисунке 7.23; погрешность — 7.24. На рисунках 7.25 и 7.26 представлены соответственно точное и приближенное решения и погрешность при разбиении отрезка на 100 равных частей.

Точное и приближенное, полученное с помощью программы на Python'e ($N = 10$), решения, показаны на рисунке 7.27. График погрешности, полученной при разбиении отрезка на 10 равных частей, представлены на рисунке 7.28. Аналогично на рисунках 7.29 и 7.30 изображены графики точного и приближенного решений и погрешность для $N = 100$ соответственно. Рисунок 7.31 иллюстрирует погрешность, получаемую для $N = 1000$.

Таблицы В.3 и В.4 содержат значения как точного решения, так и приближенного решений и погрешности, полученных при разбиении на 10 равных

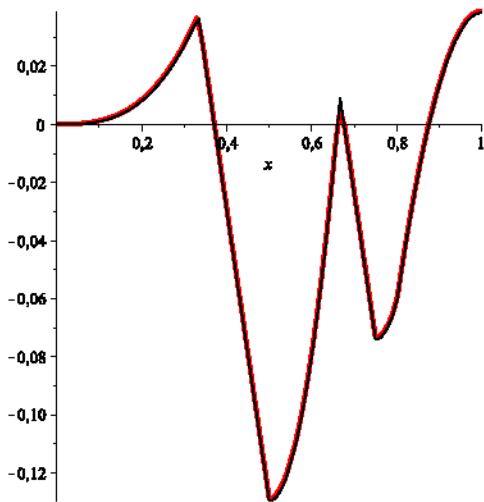


Рисунок 7.25. Точное и приближенное решения при разбиении на 100 равных частей

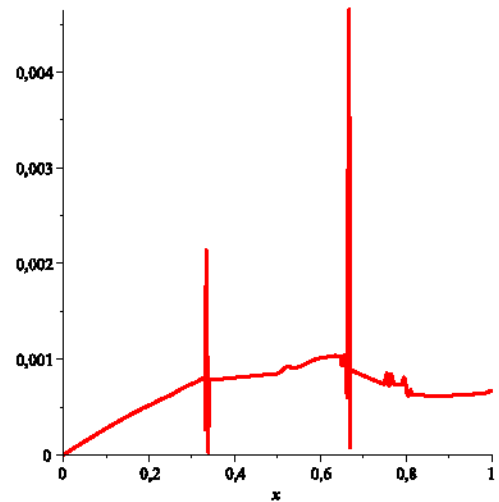


Рисунок 7.26. Погрешность при разбиении на 100 равных частей

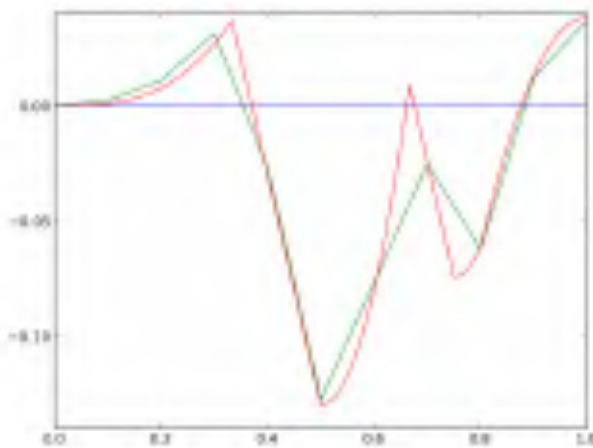


Рисунок 7.27. Графики точного и приближенного решений при $N = 10$ (Python)

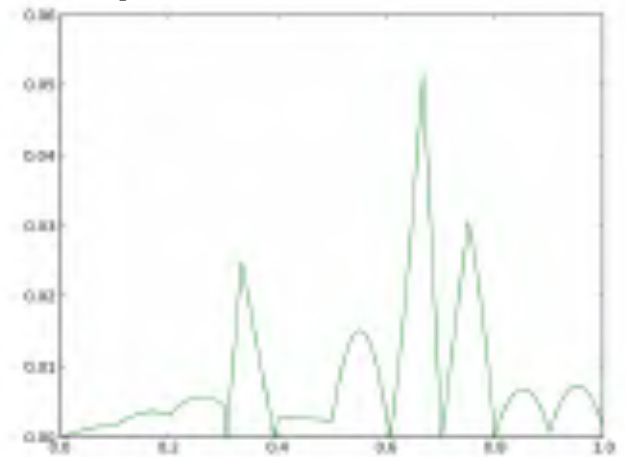


Рисунок 7.28. Погрешность при $N = 10$ (Python)

частей в двух различных программах (Maple и Python).

Численный эксперимент с закрепленными концами

Приведем результат еще одного численного эксперимента. Программа написана на языке Python. Приближенное решение ищется для математической модели

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

при $p(x) = 1 + x + x^3$, $Q'_\sigma(x) = x \cdot (1 - x) + \delta(x - 1/3) + 5\delta(x - 2/3) + 2\delta(x - 3/4) + 4\delta(x - 4/5)$ и

$$F'_\sigma(x) = \begin{cases} -7x^3 - 4x - 2 - x^4 & x < 1/3, \\ 6,277777778 & x = 1/3, \\ 221/6x^2 - 309/2x^3 - 59/2 - 575/6x - 25x^4 & x < 1/2, \\ 10,56250000 & x = 1/2, \\ 17/6x^2 + 2 + 7/6x + 2x^3 & x < 2/3, \\ -19,80864198 & x = 2/3, \\ -1127/6x^2 + 1337/3x^3 + 137/3 + 1675/6x + 80x^4 & x < 3/4, \\ -16,13899740 & x = 3/4, \\ -14x^4 - 1631/192x^2 - 1249/192x - x^5 & x < 4/5, \\ 5,469518333 & x = 4/5, \\ 335203/4800x^2 - 432797/4800x^3 + & \\ + 55x^4 - 72797/4800 - 120797/4800x + 5x^5 & 4/5 < x \end{cases}$$

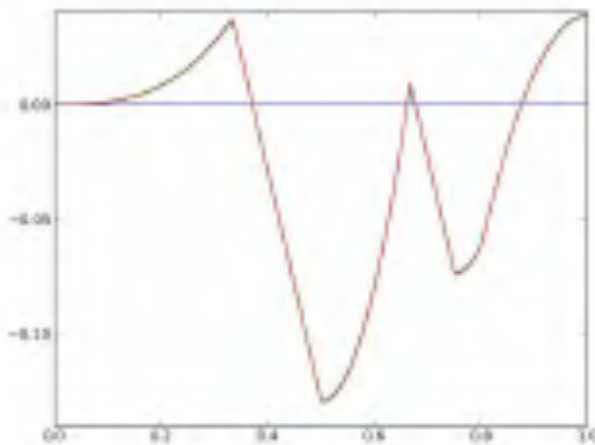


Рисунок 7.29. Графики точного и приближенного решений при $N = 100$ (Python)

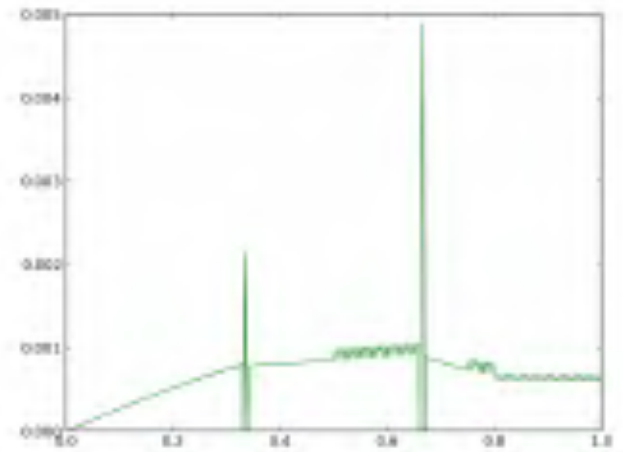


Рисунок 7.30. Погрешность при $N = 100$ (Python)

Точное решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1/3, \\ -41/2 \cdot x + 25/6 + 25 \cdot x^2 & x < 1/2, \\ 7/6 - 2 \cdot x & x < 2/3, \\ -245/6 + 343/3 \cdot x - 80 \cdot x^2 & x < 3/4, \\ -97/192 + x^3 & x < 4/5, \\ -1/4800 \cdot (23203 - 48000 \cdot x + 24000 \cdot x^2) \cdot (-1 + x) & 4/5 < x \end{cases}$$

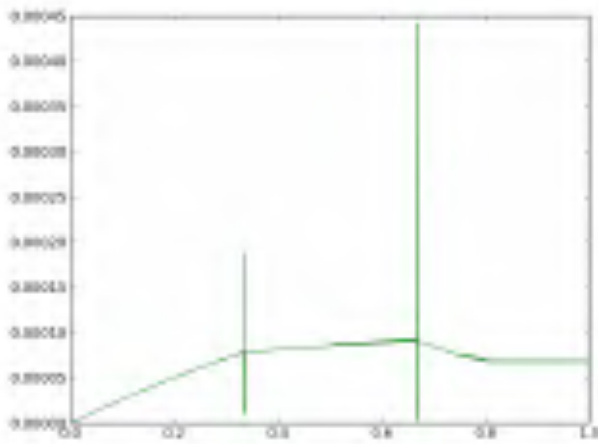


Рисунок 7.31. Погрешность при $N = 1000$ (Python)

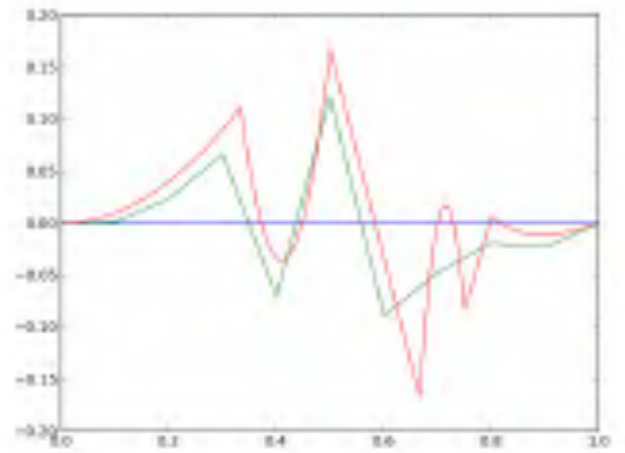


Рисунок 7.32. Графики точного и приближенного решения при $N = 10$ (Python)

Графики точного и приближенного решения, найденного при разбиении на 10 равных частей, представлены на рисунке 7.32; на 7.34 — при разбиении на 100 частей. Все графики получены с помощью программы написанной на языке Python.

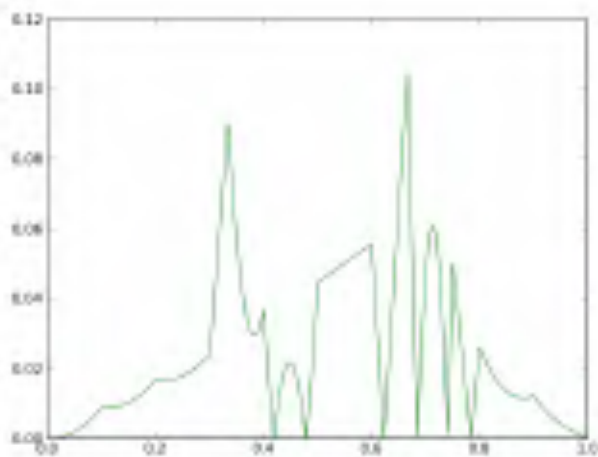


Рисунок 7.33. Погрешность при $N = 10$ (Python)

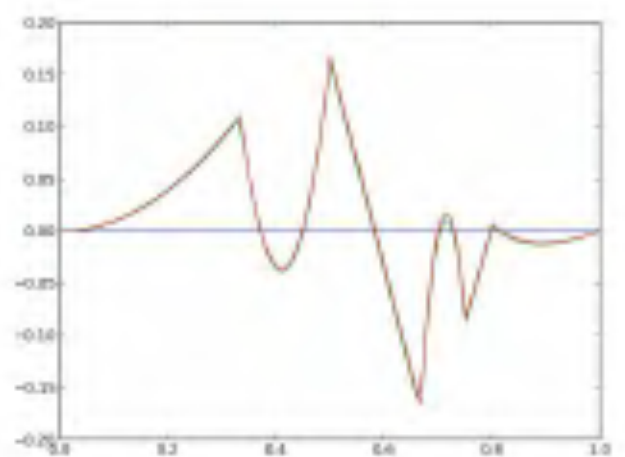


Рисунок 7.34. Графики точного и приближенного решения при $N = 100$ (Python)

Описанный выше алгоритм необходимо видоизменить следующим образом: надо исключить последнюю базисную функцию, так как в этом случае оба граничных условия являются главными, и им должны удовлетворять все базисные функции.

Получаемые при разбиении отрезка $[0; 1]$ на 10, 100 и 1000 равных частей погрешности представлены на рисунках 7.33, 7.35 и 7.36 соответственно.

Для сравнения на рисунках 7.37 и 7.38, представлены графики точного и приближенного решения при $N = 10$ и $N = 100$ соответственно (программа

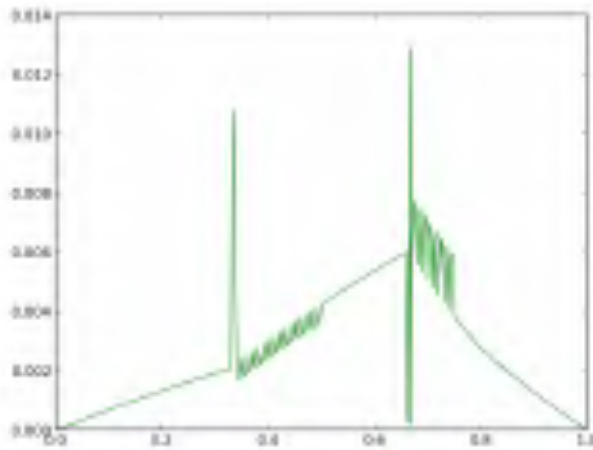


Рисунок 7.35. Погрешность при $N = 100$ (Python)

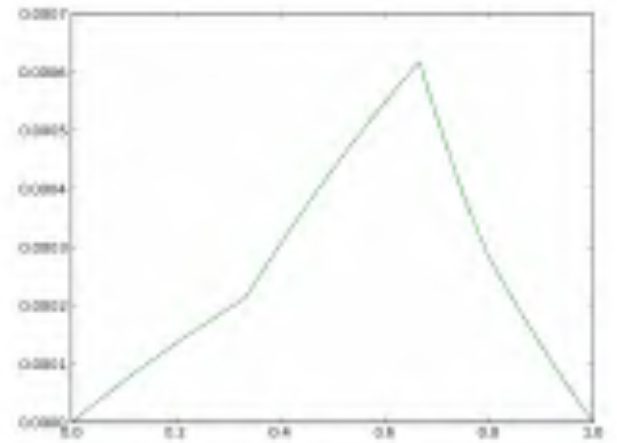


Рисунок 7.36. Погрешность при $N = 1000$ (Python)

на Maple). Полученные погрешности — на рисунках 7.39 и 7.40.

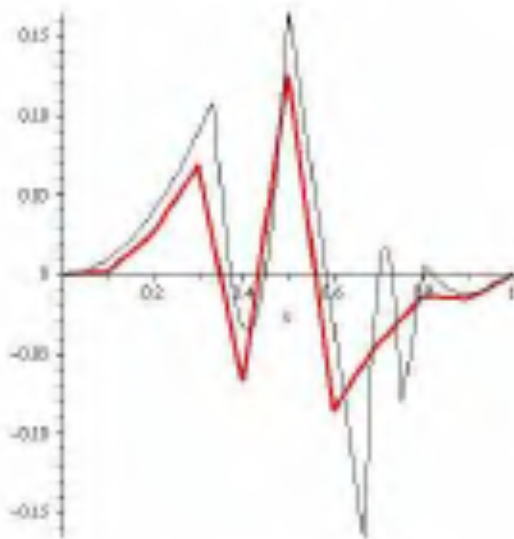


Рисунок 7.37. Точное и приближенное решения при разбиении на 10 равных частей (Maple)

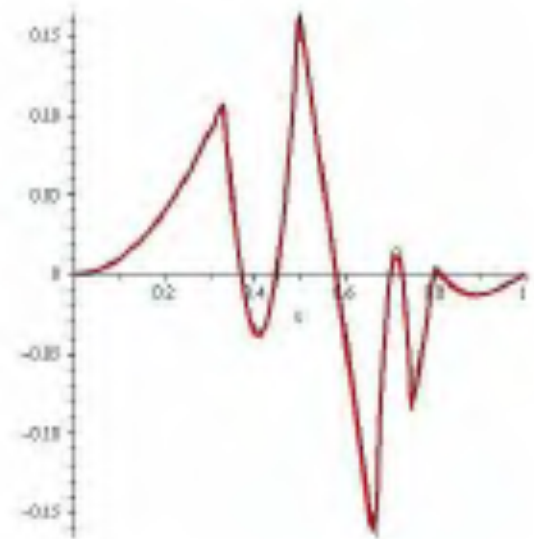


Рисунок 7.38. Точное и приближенное решения при разбиении на 100 равных частей (Maple)

7.2 Численные эксперименты для модели с разрывными решениями

Здесь приводятся приближенные решения, найденные с помощью адаптированного метода конечных элементов, математической модели (6.2.1) для различных коэффициентов.

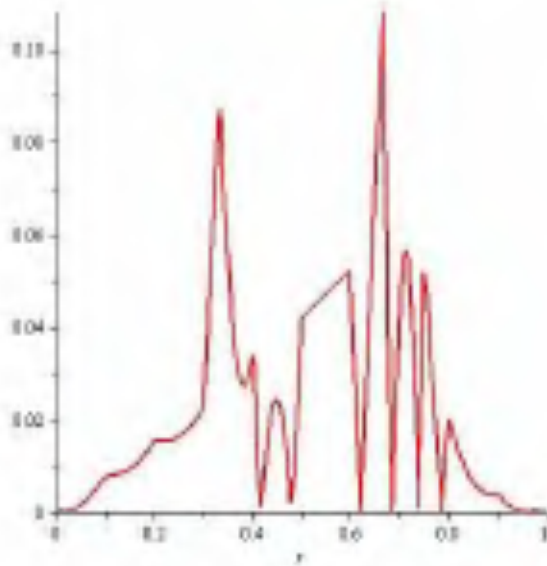


Рисунок 7.39. Погрешность при разбиении на 10 равных частей (Maple)

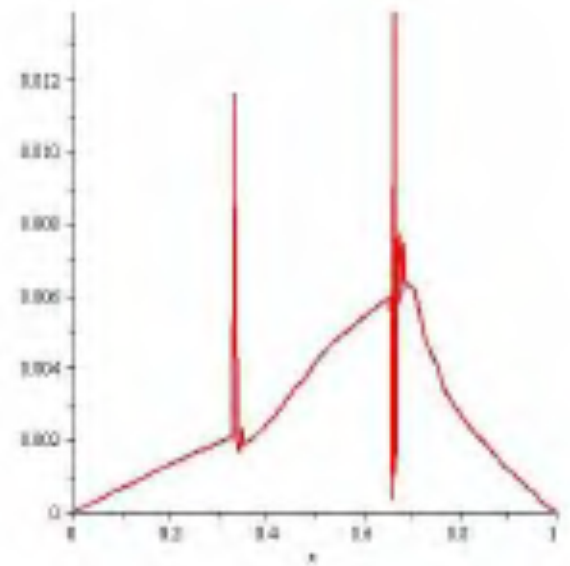


Рисунок 7.40. Погрешность при разбиении на 100 равных частей (Maple)

Внешняя сила состоит из сосредоточенных усилий

Здесь и далее в этом параграфе приводятся точные решения некоторых математических моделей и приближенные решения, полученных с помощью адаптированного метода конечных элементов. Для простоты вычислений будем считать $p(x) \equiv 1$. Также мы считаем, что $\mu(x)$ имеет вид

$$\mu(x) = x + \sum_{i=1}^5 \theta(x - \xi_i),$$

где $\xi_1 = 1/3$, $\xi_2 = 1/2$, $\xi_3 = 2/3$, $\xi_4 = 3/4$ и $\xi_5 = 4/5$.

Пусть $Q(x) \equiv \text{const}$ и внешняя сила $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/3, \\ 4/3, & x = 1/3, \\ 1, & 1/3 < x < 1/2, \\ 3/2, & x = 1/2, \\ 2, & 1/2 < x < 2/3, \\ -1/3, & x = 2/3, \\ 0, & 2/3 < x < 3/4, \\ 1/4, & x = 3/4, \\ -1, & 3/4 < x < 4/5, \\ 13/5, & x = 4/5, \\ 1, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

Непосредственный подсчет показывает, что функция влияния $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \mu(\min\{x, s\}) - \mu(0).$$

Тогда точное решение математической модели $-u'_\mu(x) = F(x) - F(0) - u'_\mu(0)$, $u(0) = u'_\mu(1) = 0$ для $F(x)$, определяемой равенством (7.2.1), имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/3, \\ 0, & 1/3 < x < 1/2, \\ -x, & 1/2 < x < 2/3, \\ x, & 2/3 < x < 3/4, \\ 2x, & 3/4 < x < 4/5, \\ 0, & 4/5 < x \leq 1, \end{cases}$$

график которой представлен на рис. 7.41. При разбиении на 10 равных частей (при этом количество базисных функций равно 15) график приближенного решения представлен на рисунке 7.42; графики точного и приближенного решений изображены на рисунке 7.43; погрешность — рис. 7.44.

На рисунках 7.45 и 7.47 представлены графики точного и приближенного решений при разбиении на 100 и 500 равных частей соответственно; на рисунках 7.46 и 7.48 соответствующие погрешности. Графики 7.41–7.48 получены с помощью программы, написанной в Maple.

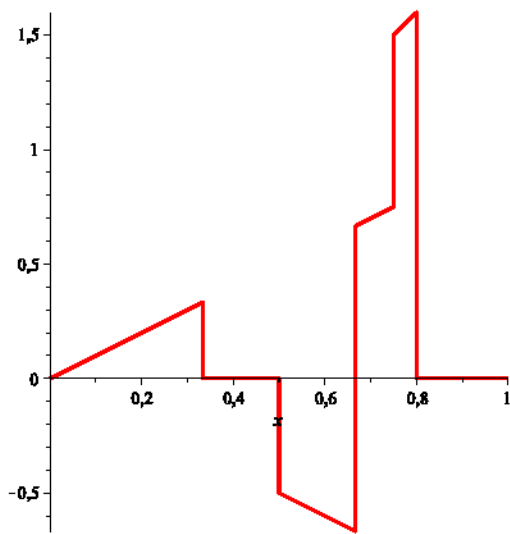


Рисунок 7.41. Точное решение

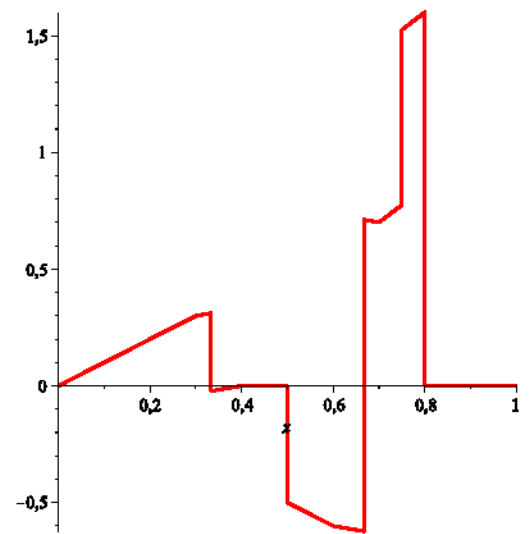


Рисунок 7.42. Приближенное решение при разбиении на 10 равных частей

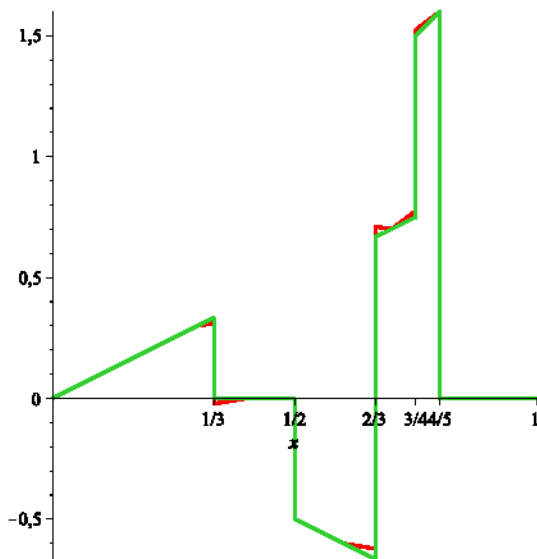


Рисунок 7.43. Точное и приближенное решения при $n = 10$

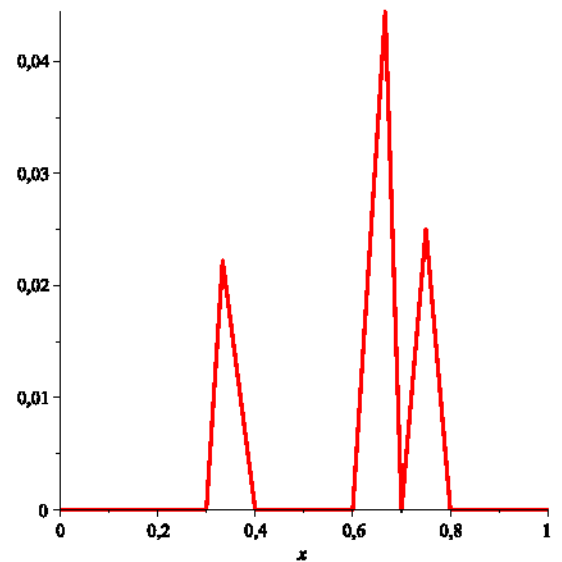


Рисунок 7.44. Погрешность при $n = 10$

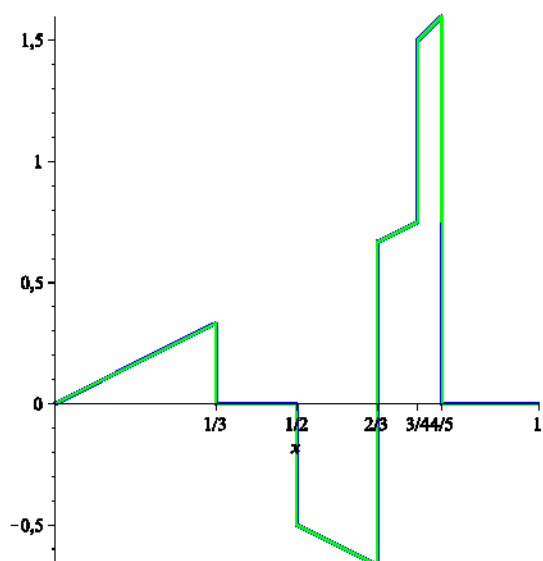


Рисунок 7.45. Точное и приближенное решения при $n = 100$

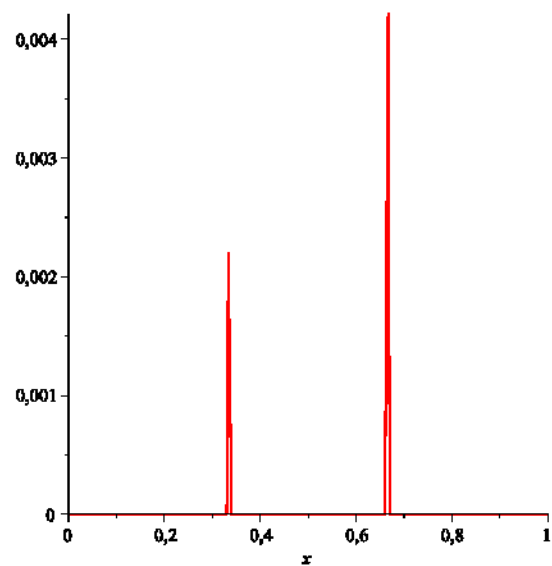


Рисунок 7.46. Погрешность при $n = 100$

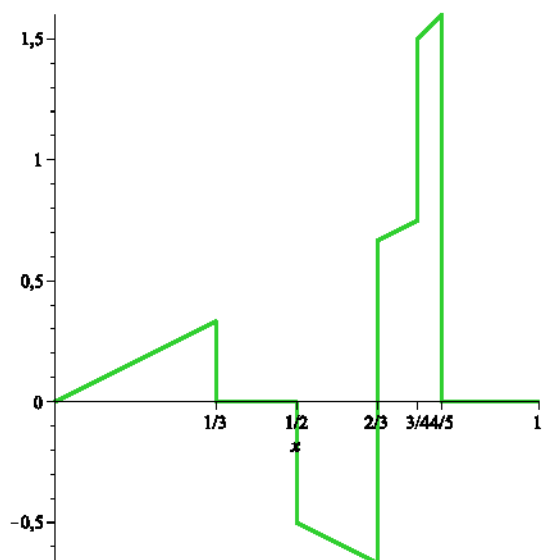


Рисунок 7.47. Точное и приближенное решения при $n = 500$

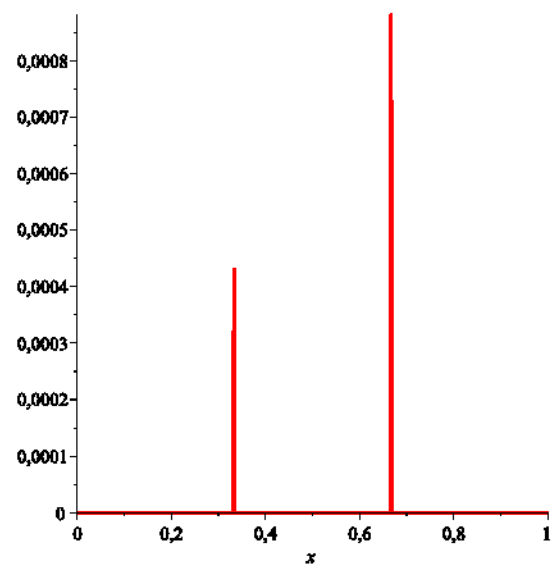


Рисунок 7.48. Погрешность при $n = 500$

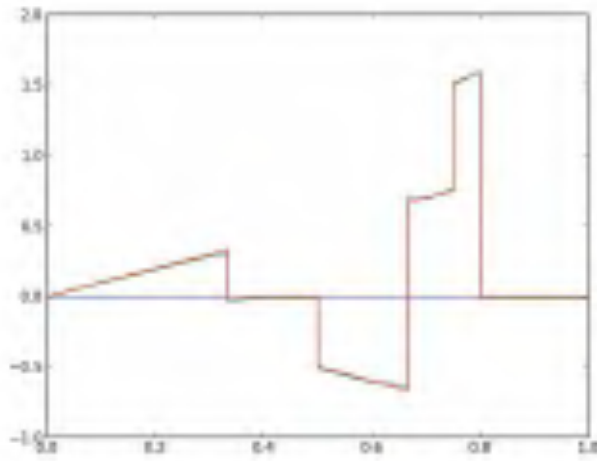


Рисунок 7.49. Графики точного и приближенного решения при $n = 10$ (Python)

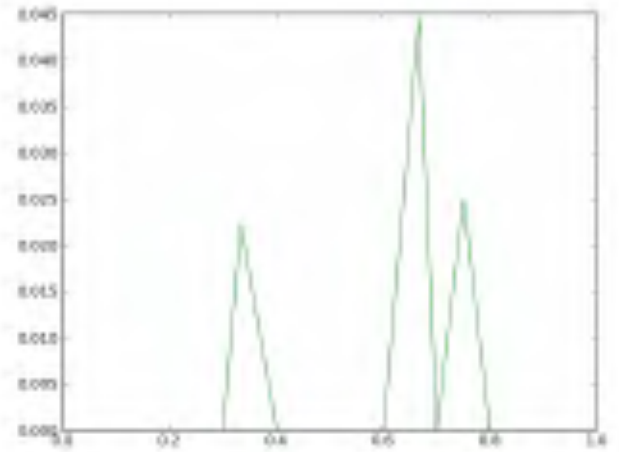


Рисунок 7.50. График погрешности при $n = 10$ (Python)

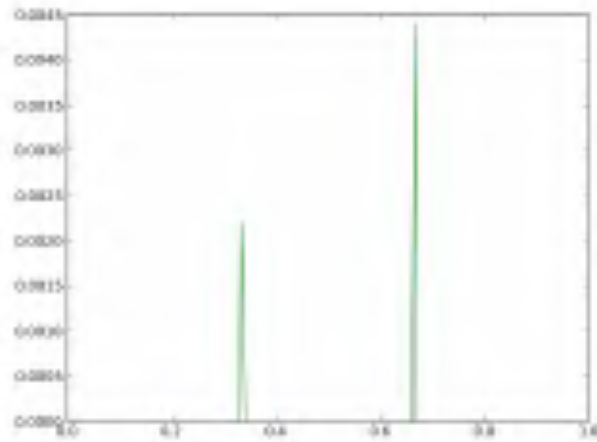


Рисунок 7.51. График погрешности при $n = 100$ (Python)

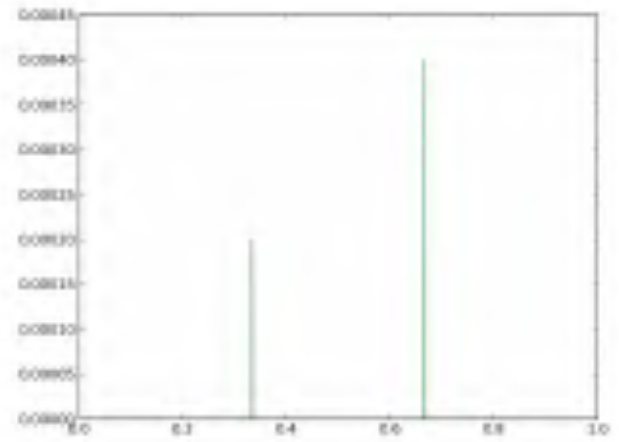


Рисунок 7.52. График погрешности при $n = 1000$ (Python)

Графики 7.49–7.52 изображают аналогичные графики, получаемые с помощью программы, написанной на Python'e.

Случай наличия «упругой подушки»

Здесь рассматривается случай, когда коэффициенты уравнения имеют вид

$$Q(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 1/3, \\ 2/3 & \text{при } x = 1/3, \\ x + 1 & \text{при } 1/3 \leq x < 1/2, \\ 3 & \text{при } x \geq 1/2, \end{cases}$$

$$F(x) = 1 + \begin{cases} -1 + x^2/2 & \text{при } 0 \leq x < 1/3, \\ 11/18 & \text{при } x = 1/3, \\ 2x - x^3/3 + 17/162 & \text{при } 1/3 < x < 1/2, \\ -253/162 & \text{при } x = 1/2, \\ -749/324 & \text{при } 1/2 < x < 2/3, \\ -317/324 & \text{при } x = 2/3, \\ -1073/324 & \text{при } 2/3 < x < 3/4, \\ 12235/5184 & \text{при } x = 3/4, \\ 3x^2 - 101/324 & \text{при } 3/4 < x < 4/5, \\ -52801/40500 & \text{при } x = 4/5, \\ x - 425/324 & \text{при } 4/5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Точное решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 1/3, \\ -x^2 & \text{при } 1/3 < x < 1/2, \\ 2x & \text{при } 1/2 < x < 2/3, \\ 3x & \text{при } 2/3 < x < 3/4, \\ -x^3 & \text{при } 3/4 < x < 4/5, \\ x - x^2/2 & \text{при } 4/5 < x \leq 1, \end{cases}$$

график которого представлен на рисунке 7.53. Приближенное решение

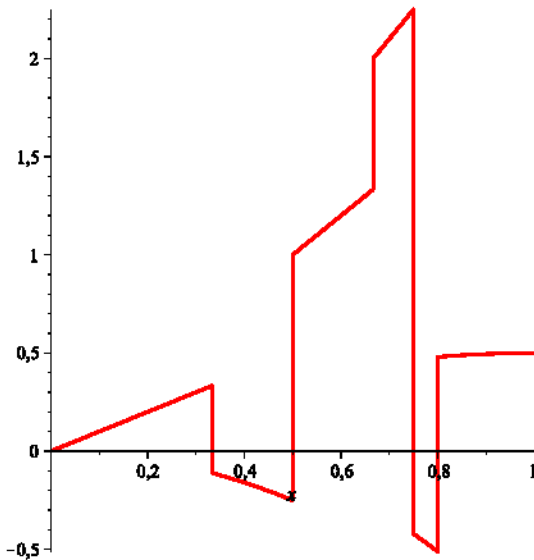


Рисунок 7.53. Точное решение

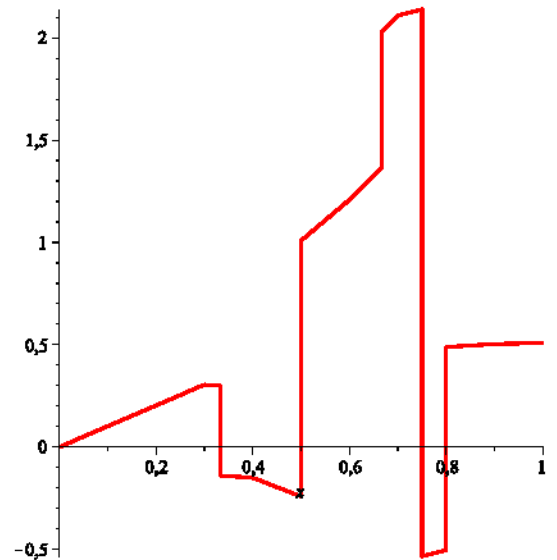


Рисунок 7.54. Приближенное решение при $n = 10$

$$v(x) = \begin{cases} 1,0164x & \text{при } 0 \leq x \leq 0,1, \\ 1,0166x & \text{при } 0,1 < x \leq 0,2, \\ 1,0169x & \text{при } 0,2 < x \leq 0,3, \\ 0,3527 - 0,1591x & \text{при } 0,3 < x < 1/3, \\ -0,0862 - 0,1591x & \text{при } 1/3 < x \leq 0,4, \\ 0,2155 - 0,9135x & \text{при } 0,4 < x < 1/2, \\ 0,0088 + 2,0000x & \text{при } 1/2 < x \leq 0,6, \\ -0,1912 + 2,3333x & \text{при } 0,6 < x < 2/3, \\ 0,4754 + 2,3333x & \text{при } 2/3 < x \leq 0,7, \\ 1,6896 + 0,5988x & \text{при } 0,7 < x < 3/4, \\ -0,9822 + 0,5988x & \text{при } 3/4 < x < 4/5, \\ 0,3688 + 0,1500x & \text{при } 4/5 < x \leq 0,9, \\ 0,4588 + 0,0500x & \text{при } 0,9 < x \leq 1, \end{cases}$$

полученное с помощью адаптированного метода конечных элементов, изображен на рисунке 7.54 (вместе приближенное и точное решения, при разбиении на 10 частей, — на рисунке 7.55); погрешность — на рисунке 7.56; на рисунках 7.57 и 7.58 изображены погрешности, получаемые при разбиении на 100 и 500 частей соответственно.

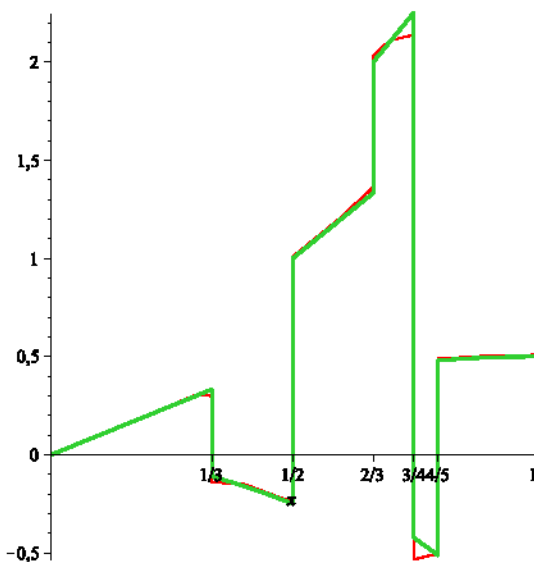


Рисунок 7.55. Точное и приближенное решения при $n = 10$

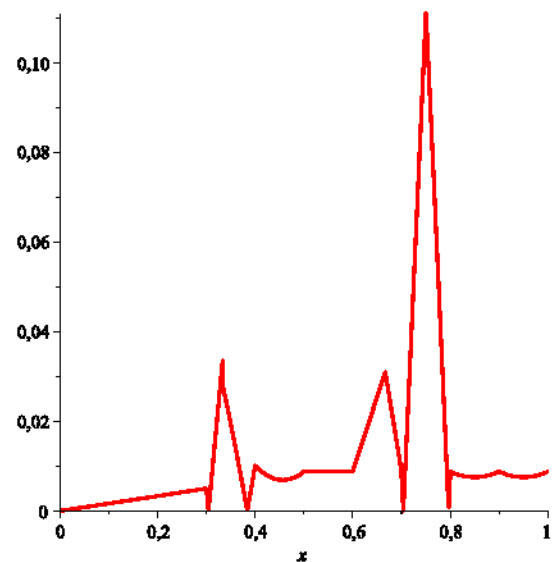


Рисунок 7.56. Погрешность при $n = 10$

Рисунки 7.59, 7.60 и 7.61 изображают погрешности, получаемые с помощью программы, написанной на языке Python.

В таблицах В.5 и В.6 представлены значения точных и приближенных решений, полученных с помощью программ, написанных в пакете символьной математики Maple и на языке программирования Python.

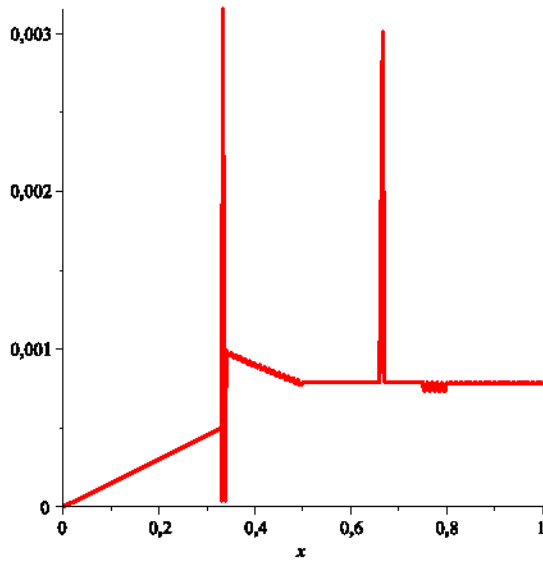


Рисунок 7.57. Погрешность при $n = 100$

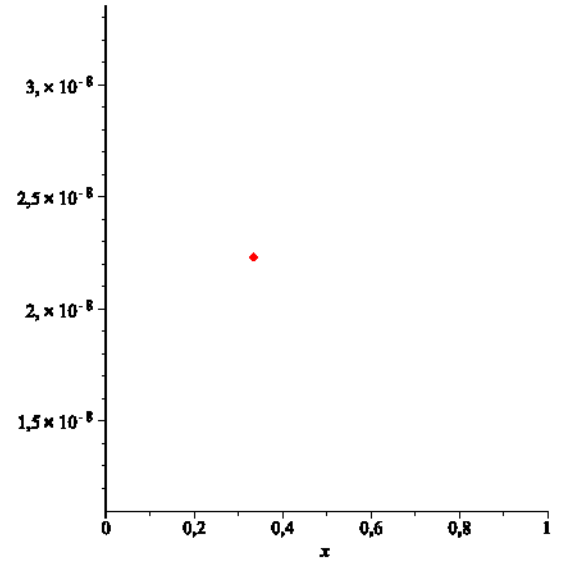


Рисунок 7.58. Погрешность при $n = 500$

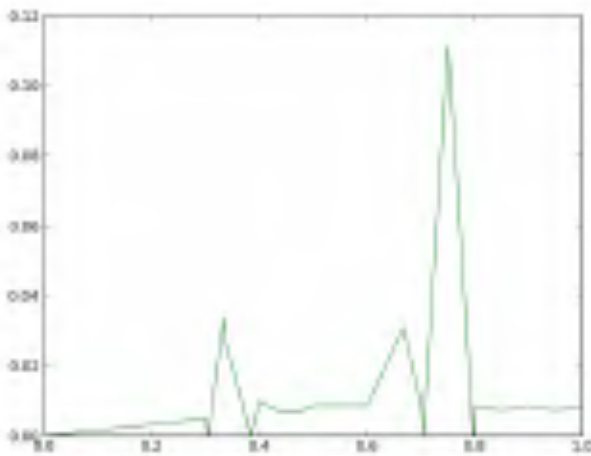


Рисунок 7.59. График погрешности при $n = 10$ (Python)

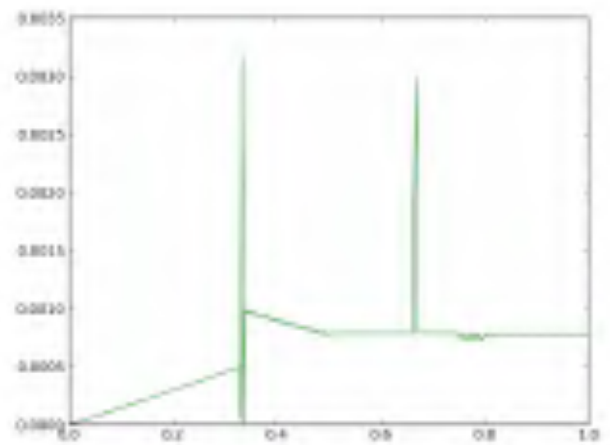


Рисунок 7.60. График погрешности при $n = 100$ (Python)

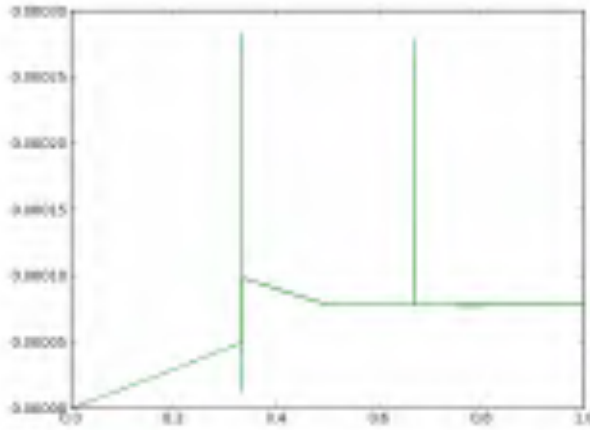


Рисунок 7.61. График погрешности при $n = 1000$ (Python)

7.3 Численные эксперименты для модели четвертого порядка

Внешняя сила состоит из сосредоточенных усилий

Пусть $p(x) \equiv 1$, $Q(x) \equiv \text{const}$ и внешняя сила $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/3; \\ -3, & 1/3 < x < 1/2; \\ -1, & 1/2 < x < 2/3; \\ -1,9, & 2/3 < x < 3/4; \\ -1,8, & 3/4 < x < 4/5; \\ -1,4, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Непосредственный подсчет показывает, что функция влияния $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{3 \cdot x^2 \cdot s - x^3}{6}, & x < s; \\ \frac{3 \cdot x \cdot s^2 - s^3}{6}, & x \geq s. \end{cases}$$

Тогда точное решение математической модели (6.3.1)–(6.3.3) для $F(x)$, определяемой равенством (7.3.1), имеет вид

$$u(x) = -3G(x, 1/3) + 2G(x, 1/2) - 0,9G(x, 2/3) + 0,1G(x, 3/4) + 0,4G(x, 4/5),$$

график которой представлен на рис. 7.62.

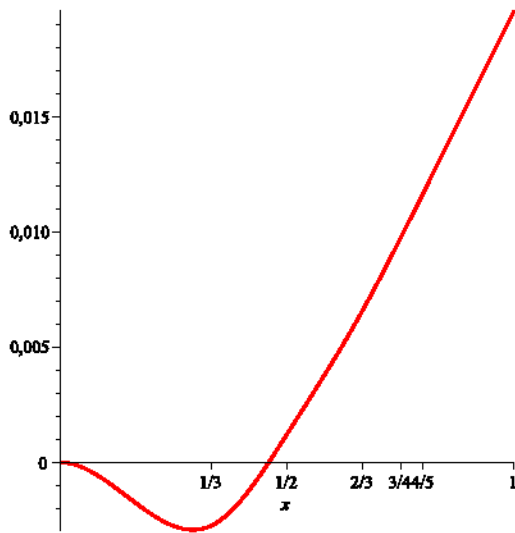


Рисунок 7.62. Точное решение

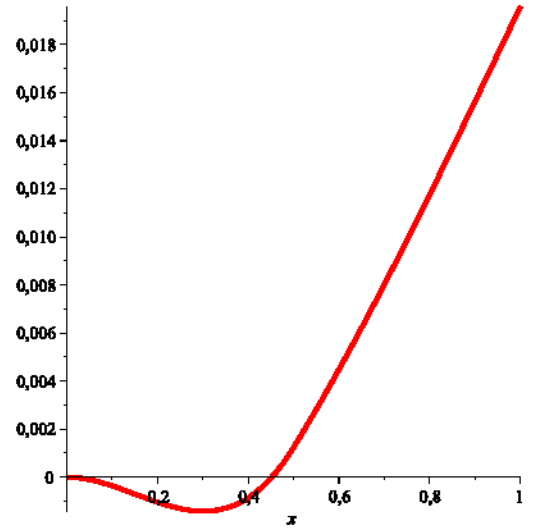


Рисунок 7.63. Приближенное решение при $N = 2$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на два равных отрезков, и применим описанную выше схему адаптированного метода конечных элементов. Полученное приближенное решение имеет вид (с точностью до тысячных)

$$v(x) = \begin{cases} -0,047x^2 + 0,104x^3, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ -0,008 + 0,003x + 0,037x^2 - 0,013x^3, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}$$

График $v(x)$ представлен на рис. 7.63. Точное и приближенное решения вместе изображены на рис. 7.64 (тонкой линией изображено точное решение). Погрешность $(|u(x) - v(x)|)$ изображена на рис. 7.65.

При разбиении отрезка $[0, 1]$ на 10 и 100 равных отрезков графики погрешностей представлены на рисунках 7.66 и 7.67.

Для сравнения на рисунках 7.68–7.71 представлены графики точного и приближенного решений и погрешностей при различных N , найденных с помощью программы, написанной на языке Python.

Численный эксперимент в случае наличия внешней среды

Пусть теперь коэффициенты уравнения имеют вид $p(x) = 1 + x + x^2$, $q(x) = x \cdot (1 - x) + \Theta'_\sigma(x - 1/3) + \Theta'_\sigma(x - 1/2) + 5\Theta'_\sigma(x - 2/3) + 2\Theta'_\sigma(x - 3/4) + 4\Theta'_\sigma(x - 4/5)$, $f(x) = 63,835 - 191,506x + 359,013x^2 - 278,177x^3 - 3,993x^4 + 5,486x^5 - 3,191x^6 + 0,698x^7 + 0,028\Theta'_\sigma(x - 1/3) - 0,209\Theta'_\sigma(x - 2/3) - 0,154\Theta'_\sigma(x - 3/4) - 0,4\Theta'_\sigma(x - 4/5)$, $\sigma(x) = x + \Theta(x - 1/3) + \Theta(x - 1/2) + \Theta(x - 2/3) + \Theta(x - 3/4) + \Theta(x - 4/5)$; точное

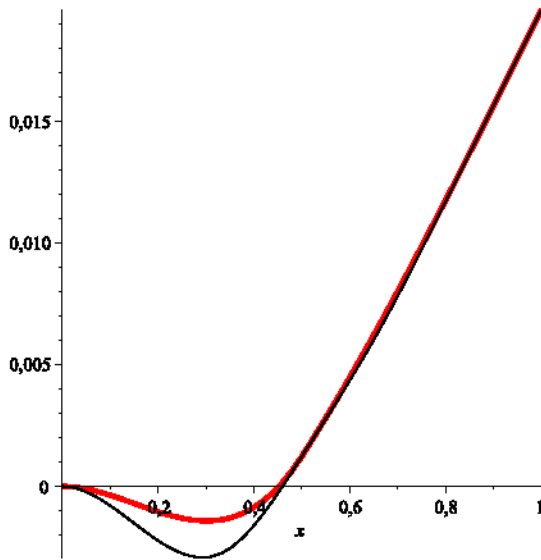


Рисунок 7.64. Точное и приближенное решения при $n = 2$

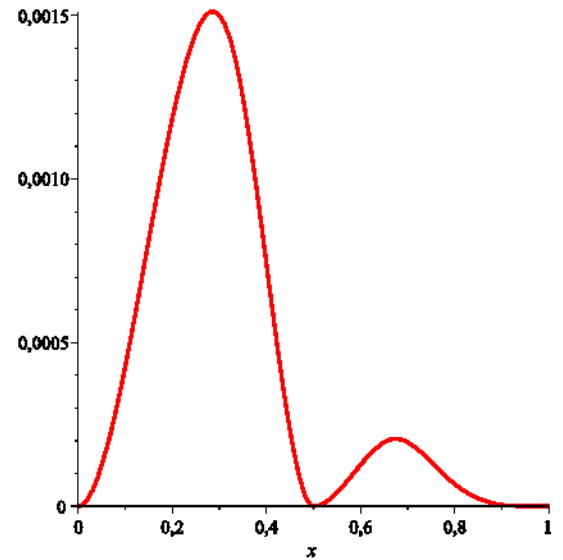


Рисунок 7.65. Погрешность при $n = 2$

решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0,5x^2 - 2x^4, & 0 \leq x < 1/3, \\ 1,3148 - 20,2407x + 128,3333x^2 + \\ \quad + 300x^6 - 750x^5 + 775x^4 - 423,6111x^3, & 1/3 \leq x < 1/2, \\ -7,8565 + 91,7315x - 460,8889x^2 + 1295,5926x^3 + \\ \quad + 300x^7 - 1250x^6 + 2225x^5 - 2193,0556x^4, & 1/2 \leq x < 2/3, \\ 21,53 - 236,70x + 1150,86x^2 + 300x^8 - 1725x^7 + \\ \quad + 4337,5x^6 - 6229,51x^5 + 5589,19x^4 - 3207,91x^3, & 2/3 \leq x < 3/4, \\ 0,0179 + 0,5301x - 1,5833x^2 + x^3, & 3/4 \leq x < 4/5, \\ 3,32 - 13,59x + 20,47x^2 - 13,61x^3 + 3,40x^4, & 4/5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

график которого изображен на рис. 7.72.

При разбиении отрезка на 2 равные части получим приближенное решение $v(x)$, график которого изображен на рис. 7.73. Точное и приближенное решения вместе изображены на рис. 7.74 (тонкой линией изображено точное решение), погрешность изображена на рис. 7.75.

Точное и приближенное (при разбиении отрезка на 10 и 100 равных частей) решения вместе изображены на рисунках 7.76 и 7.78 соответственно, погрешности — на рисунках 7.77 и 7.79.

Рисунки 7.80, 7.81, 7.82 и 7.83 изображают графики точного и приближенного решений (при $n = 2$) и погрешностей при $n = 2$, $n = 10$ и $n = 100$ соответственно, полученные при помощи программы на Python'e.

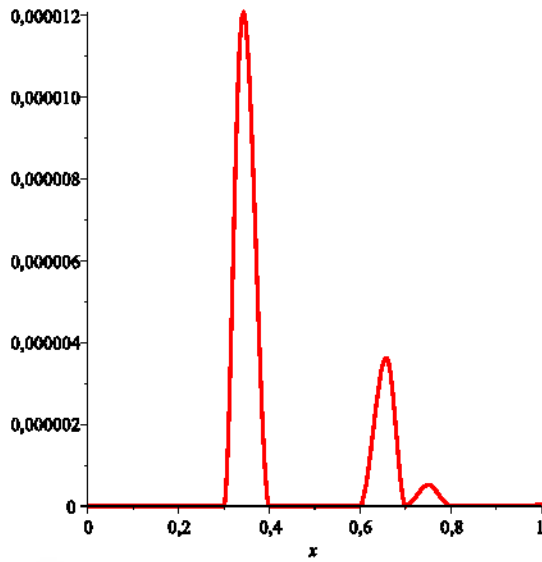


Рисунок 7.66. Погрешность при $n = 10$

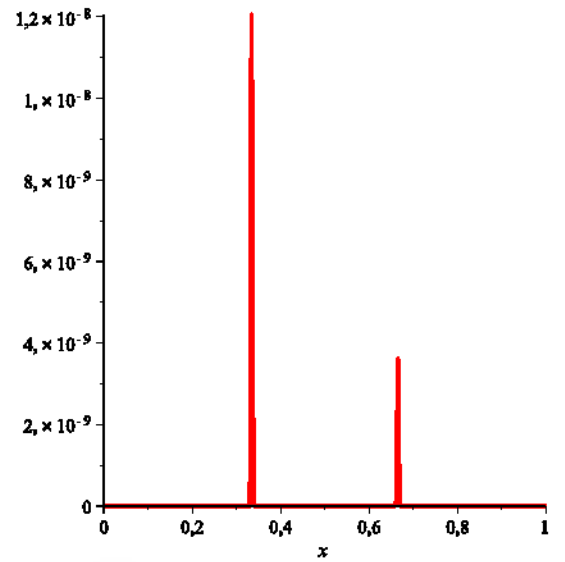


Рисунок 7.67. Погрешность при $n = 100$

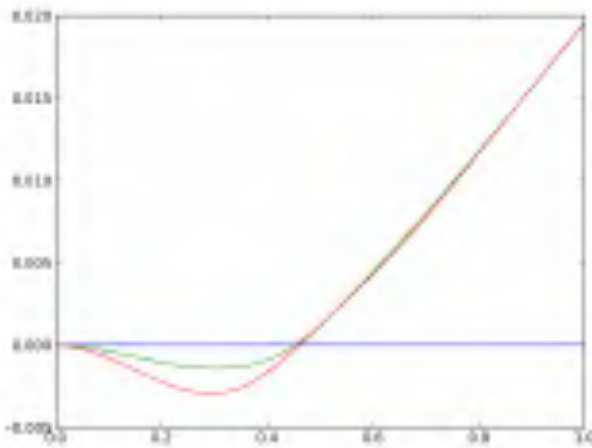


Рисунок 7.68. Графики точного и приближенного решений при $n = 2$ (Python)

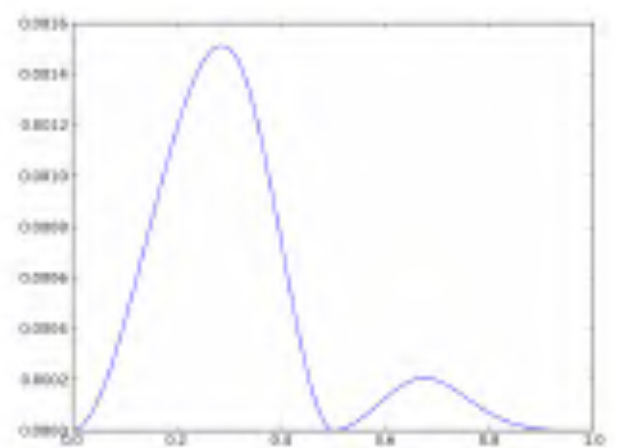


Рисунок 7.69. График погрешности при $n = 2$ (Python)

7.4 Вычислительные эксперименты для разнопорядковой модели

Здесь приводятся результаты численных экспериментов для случая $\xi = 0,6$ и при различных коэффициентах математической модели (6.4.1).

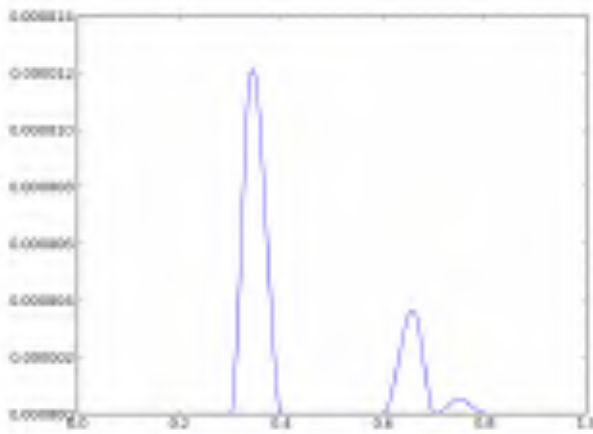


Рисунок 7.70. График погрешности при $n = 10$ (Python)

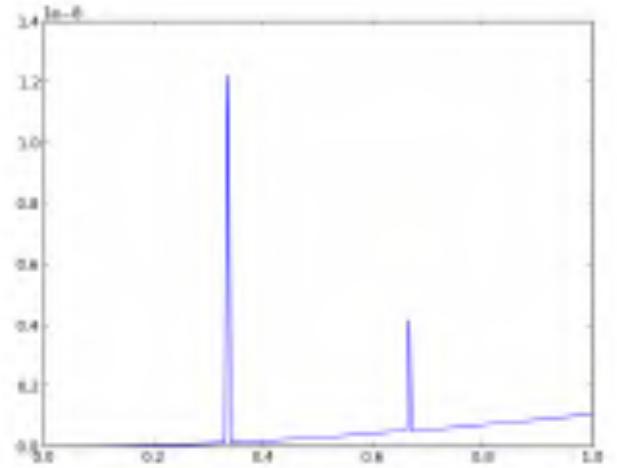


Рисунок 7.71. График погрешности при $n = 100$ (Python)

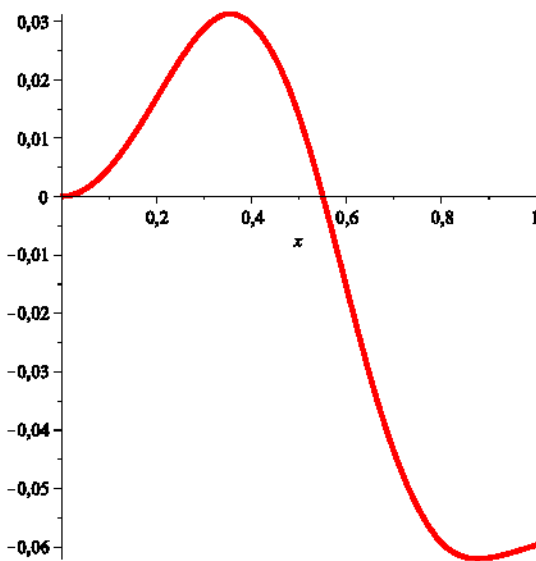


Рисунок 7.72. Точное решение

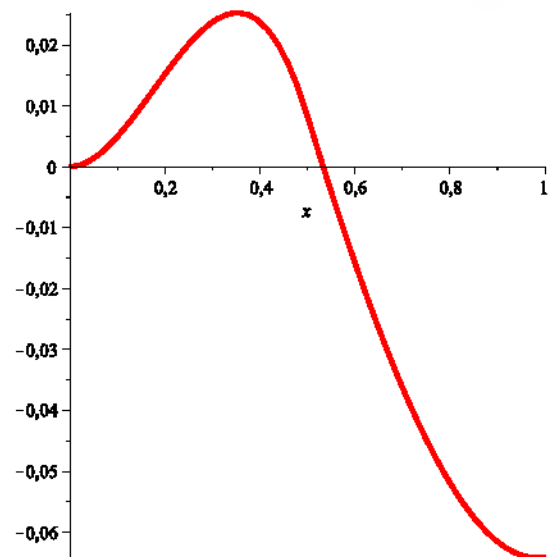


Рисунок 7.73. Приближенное решение при $n = 2$

Первый численный эксперимент

Пусть коэффициенты модели имеют вид $p(x) \equiv 1$ на $[0; \xi)$, и равна нулю при $x \geq \xi$; $q(x) = x(1 - x)$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{9}x^4 + \frac{5}{18}x^5 & 0 \leq x < \xi, \\ 9\frac{5}{6} - 2,65x + 10\frac{13}{60}x^2 - 12\frac{29}{60}x^3 + 4\frac{11}{12}x^4 & \xi < x \leq 1. \end{cases}$$

Точное решение математической модели при этих коэффициентах

$$u(x) = \begin{cases} x^2/2 - 25 \cdot x^3/90 & 0 \leq x < 0,6, \\ -2,65 + 227 \cdot x/30 - 59 \cdot x^2/12 & 0,6 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

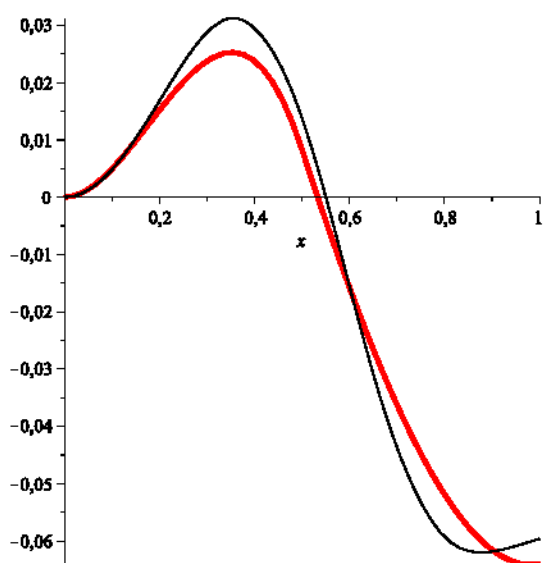


Рисунок 7.74. Точное и приближенное решения при $n = 2$

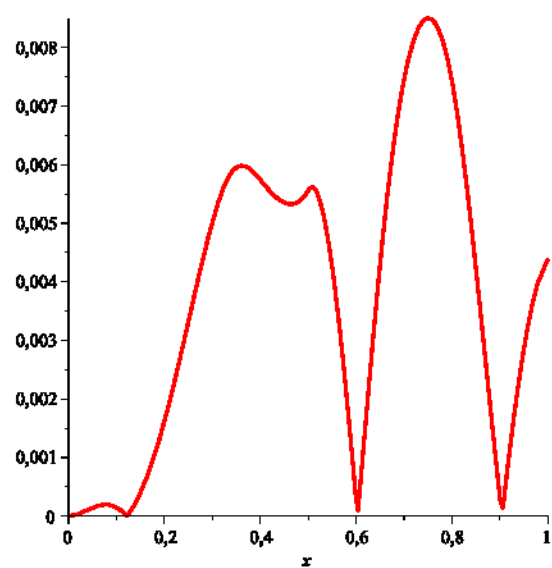


Рисунок 7.75. Погрешность при $n = 2$

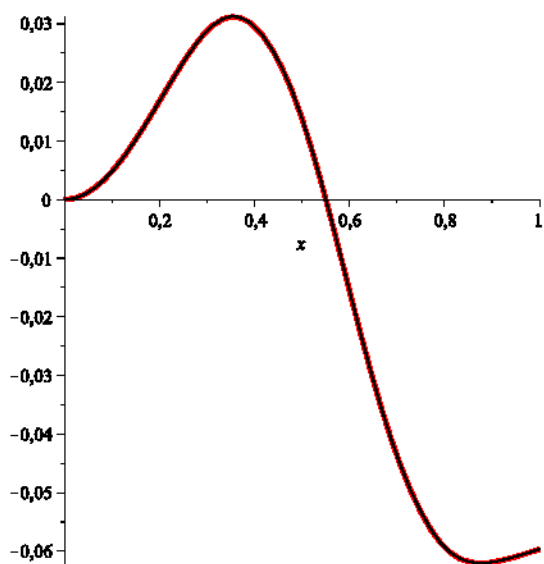


Рисунок 7.76. Точное и приближенное решения при $n = 10$

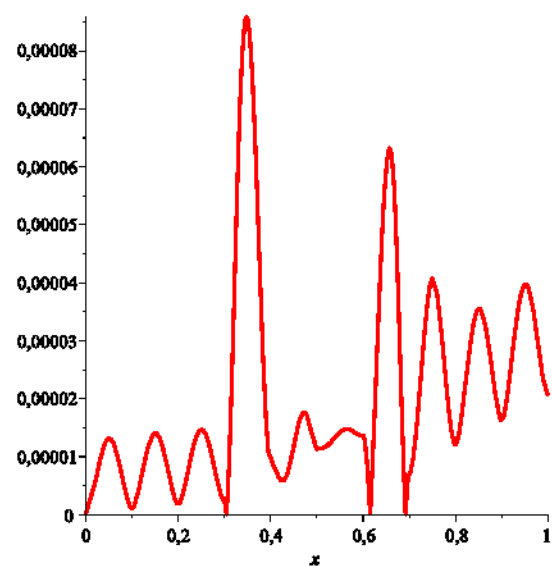


Рисунок 7.77. Погрешность при $n = 10$

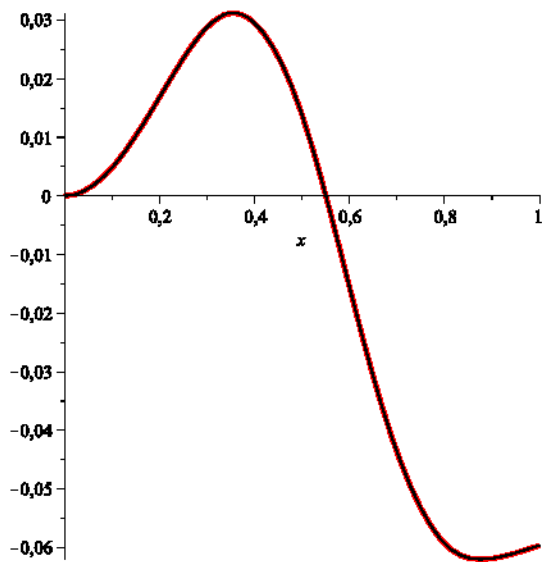


Рисунок 7.78. Точное и приближенное решения при $n = 100$

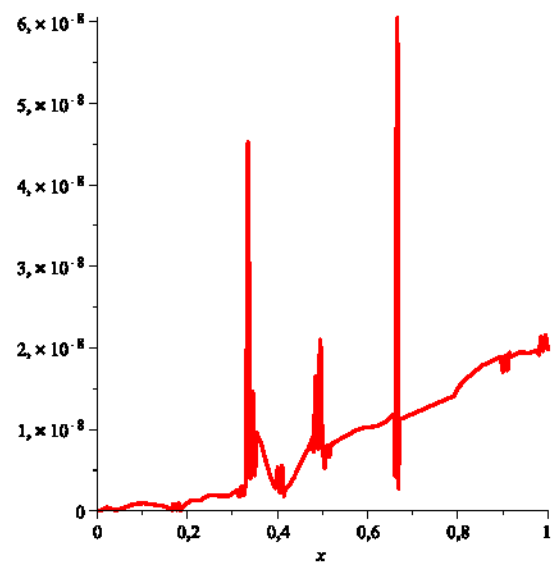


Рисунок 7.79. Погрешность при $n = 100$

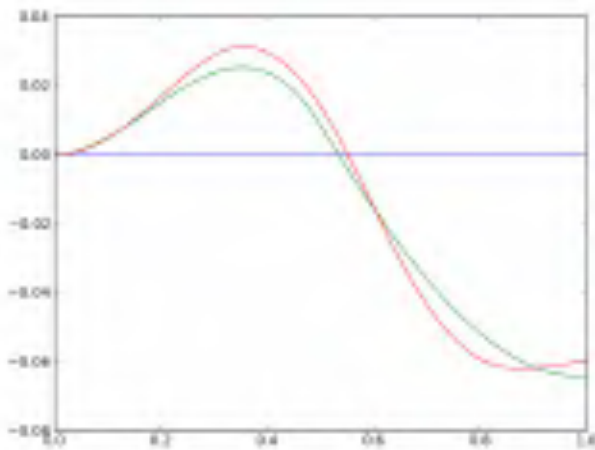


Рисунок 7.80. Графики точного и приближенного решений при $n = 2$ (Python)

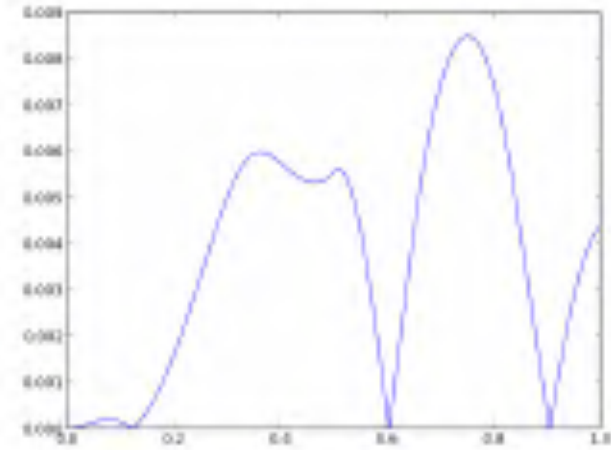


Рисунок 7.81. График погрешности при $n = 2$ (Python)

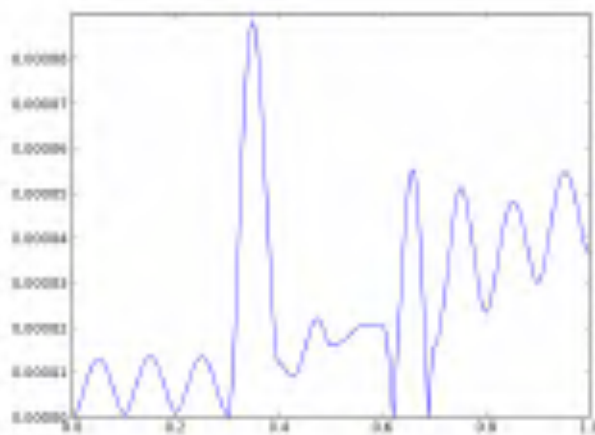


Рисунок 7.82. График погрешности при $n = 10$ (Python)

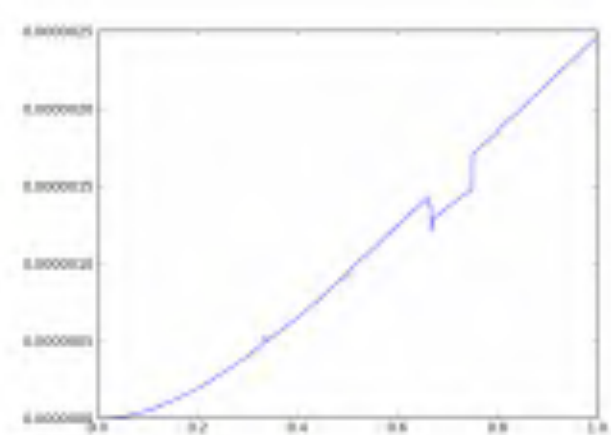


Рисунок 7.83. График погрешности при $n = 100$ (Python)

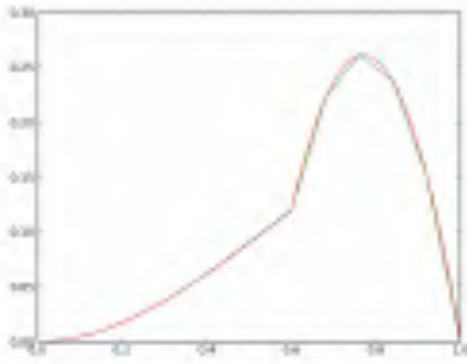


Рисунок 7.84. Точное решение и приближенное решение при $N = 5$ (Python)

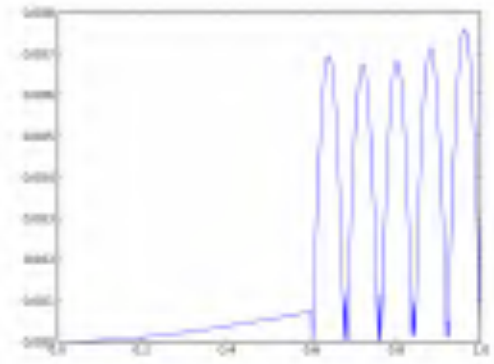


Рисунок 7.85. Погрешность при $N = 5$ (Python)

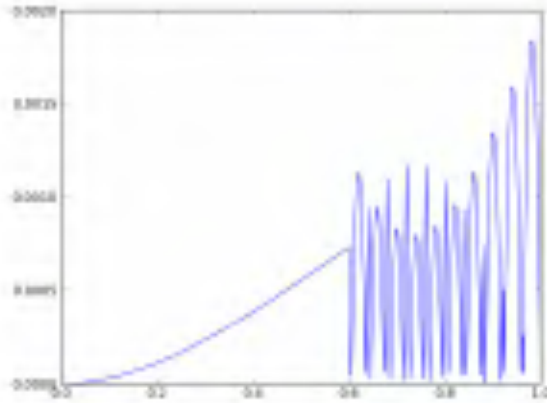


Рисунок 7.86. Погрешность при $N = 10$ (Python)

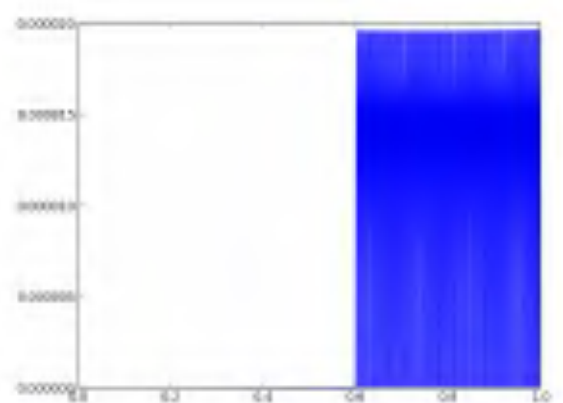


Рисунок 7.87. Погрешность при $N = 100$ (Python)

график которого представлен на рисунке 7.84 (вместе с приближенным решением при $N = 5$). Погрешность — 7.85.

На рисунках 7.86 и 7.87 изображены графики погрешностей при $N = 10$ и $N = 100$ соответственно.

Второй численный эксперимент

Пусть коэффициенты модели имеют вид $p(x) \equiv 1$ на $[0; \xi)$, и равна нулю при $x \geq \xi$; $q(x) = x(1 - x)$;

$$F'_\sigma(x) = \begin{cases} -134,4 - 1,8x^3 + 8,6x^4 - 12,4x^5 + 5,6x^6, & 0 \leq x < 0,5, \\ 26,4 & x = 0,5, \\ -0,2x + 0,7x^2 - 0,5x^3, & 0,5 < x < 0,6, \\ 0,1x - 0,1x^2, & 0,6 < x < 2/3, \\ 2,4, & x = 2/3, \\ 1,7x - 4,1x^2 + 2,4x^3, & 2/3 < x < 0,75, \\ -2,4, & x = 0,75, \\ -2 + 0,4625x - 1,9625x^2 + 2,5x^3 - x^4, & 0,75 < x < 0,8, \\ -0,3875, & x = 0,8, \\ -0,4875x + 0,975x^2 - 0,4875x^3, & 0,8 < x \leq 1 \end{cases}$$

Точное решение математической модели при этих коэффициентах

$$u(x) = \begin{cases} -1,8x^2 + 6,8x^3 - 5,6x^4, & 0 \leq x < 0,5, \\ -0,2 + 0,5x, & 0,5 \leq x < 0,6, \\ 0,1, & 0,6 \leq x < 2/3, \\ 1,7 - 2,4x, & 2/3 \leq x < 0,75, \\ 0,4625 - 1,5x + x^2, & 0,75 \leq x < 0,8, \\ -0,4875 + 0,4875x, & 0,8 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

график которого (вместе с приближенным при $N = 2$) представлен на рисунке 7.88. На рисунке 7.89 – график погрешности для $N = 2$.

Рисунки 7.90 и 7.91 изображают точное и приближенное решения и погрешность при $N = 10$ соответственно. Аналогично, на рисунках 7.92 и 7.93 изображены графики точного и приближенного решений при $N = 100$ и полученная погрешность.

Выводы

В этой главе проведены численные эксперименты для изученных в предыдущих главах моделей с помощью адаптированного метода конечных элементов. Проведенные эксперименты подтверждают теоретические оценки погрешностей, которые были доказаны в предыдущей главе.

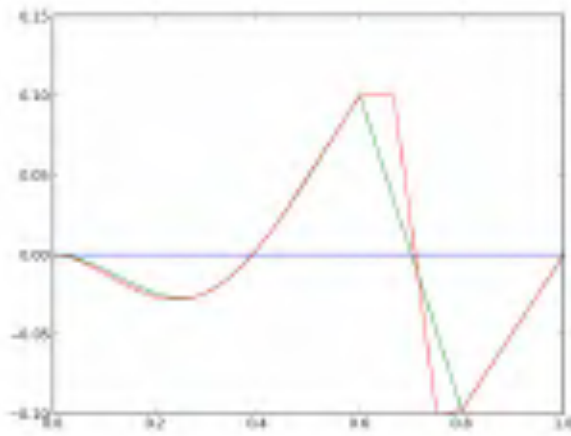


Рисунок 7.88. Точное и приближенное решения при $N = 2$

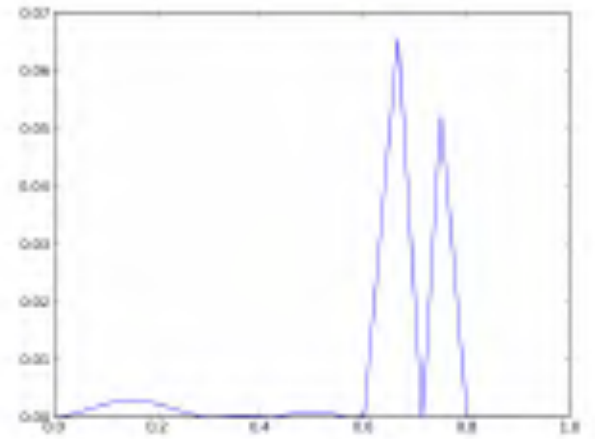


Рисунок 7.89. Погрешность при $N = 2$

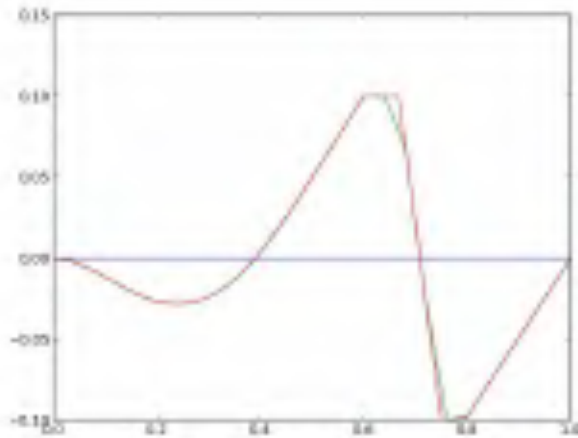


Рисунок 7.90. Точное и приближенное решения при разбиении на $N = 10$

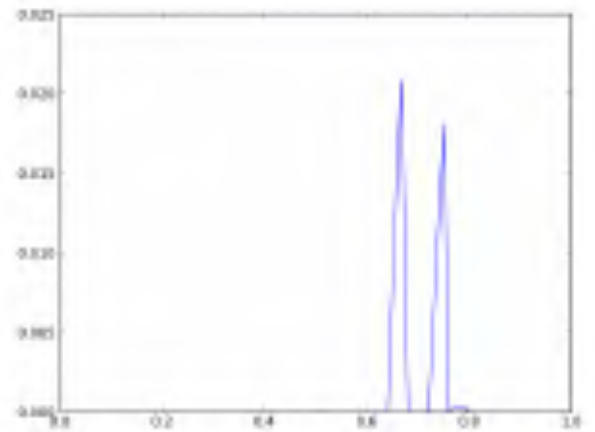


Рисунок 7.91. Погрешность при $N = 10$

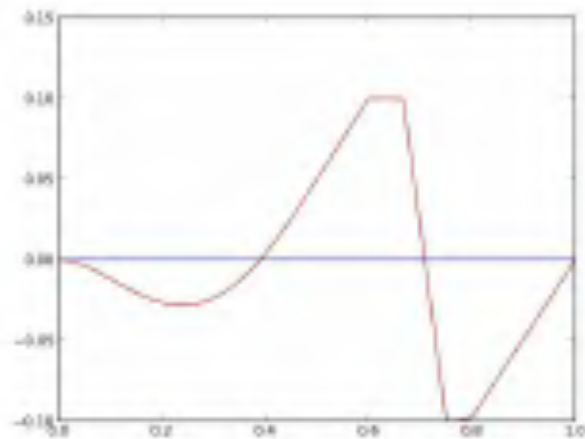


Рисунок 7.92. Точное и приближенное решения при разбиении на $N = 100$

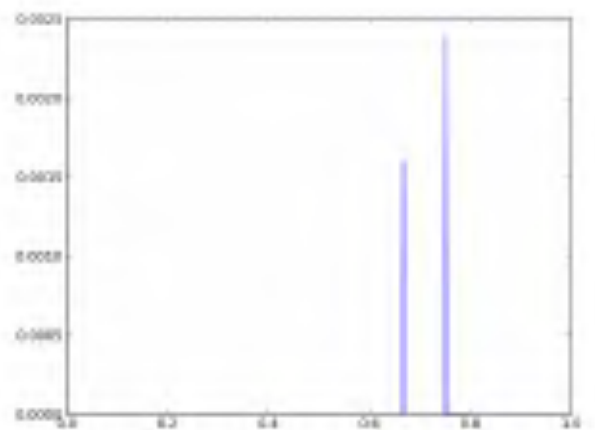


Рисунок 7.93. Погрешность при $N = 100$

Заключение

В диссертационной работе представлены новые качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, описывающие малые деформации струнных, стержневых и струнно-стержневых систем. Современный аналитический аппарат изучения таких моделей находится в начальной стадии формирования. Полученные качественные аналитические методы исследования основываются на эффективных результатах анализа граничных задач с производными Радона–Никодима. В настоящее время численные методы для уравнений с производными по мере, их обоснование также находятся в стадии формирования. В работе получены новые результаты, относящиеся к области приближенного решения граничных задач с производными Радона–Никодима, а также дана оценка погрешности. Представлены комплексы проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем.

1. Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде граничных задач с производными по мере.

2. Изучены нелинейные математические модели второго и четвертого порядков; рассмотрены различные типы нелинейностей, не содержащих производных, которые встречаются в прикладных задачах с «мягким» трением.

3. Рассмотрены некоторые вопросы теории математических моделей с разрывными решениями. Показана корректность моделей с решениями, имеющими не только разрывы, но и самостоятельное значение в точке разрыва, которое приходится учитывать для адекватности модели соответствующему процессу.

4. Изучена структура спектра, а именно, доказано, что спектр математической модели, как второго, так и четвертого порядков, обладает свойством осцилляционности.

5. Получены достаточные условия при которых математические модели сингулярной и сильно сингулярной консоли обладают свойством податливости; показано, что если внешняя среда имеет малую суммарную упругость, то обе модели податливы.

6. Разработаны и реализованы численные методы и алгоритмы приближенного решения изученных математических моделей, комплексы программ, выполненные в пакете символьной математики Maple и на языке высокого уровня Python. Представлены результаты численных экспериментов тестовых задач и листинги программ.

Литература

- [1] Albeverio S. Bounds on variation of spectral subspaces under J -self-adjoint perturbations / S. Albeverio, A.K. Motovilov, A.A. Shkalikov // Integral Equations and Operator Theory. — 2009. — V. 64, iss. 4. — P. 455–486.
- [2] Astashova I.V. On Asymptotic Classification Of Solutions To Fourth-Order Differential Equations With Singular Power Nonlinearity / I.V. Astashova // Mathematical Modelling and Analysis. — 2016. — V. 21, № 4. — С. 1–21.
- [3] Aubin J.P. Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods / J.P. Aubin // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. — 1967. — V. 21. — P. 599–637.
- [4] Badanin A. Spectral asymptotics for periodic fourth-order operators / A. Badanin, E. Korotyaev // Int. Math. Res. Not. — 2005. — 2005:45. — P. 2775–2814.
- [5] Cai Guolan. On a class of second-order impulsive boundary value problem at resonance / Cai Guolan, Du Zengji, Ge Weigao // Int. J. Math. and Math. Sci. — 2006. — No 2. — P. 1–11.
- [6] Colombeau J.-F. Elementary introduction to new generalized functions / J.-F. Colombeau. — North-Holland Publishing Co.: Amsterdam, 1985. — 281 p.
- [7] Conti Monica. Infinitely many solutions to fourth order superlinear periodic problems / Conti Monica, Terracini Susanna, Verzini Gianmaria // Trans. Amer. Math. Soc. — 2004. — V. 356, No. 8. — P. 3283–3300.
- [8] Cooke C. H. The existence of periodic solutions to certain impulsive differential equations / C. H. Cooke, J. Kroll // Comput. and Math. Appl. — 2002. — V. 44, No 5–6. — P. 667–676.

- [9] Coppel W. A. Disconjugacy. Lecture Notes in Math. / W. A. Coppel. — Berlin. Heidelberg. New York: Springer-Verlag. 1971. — Vol. 220. — 170 p.
- [10] Djakov P. Asymptotics of instability zones of Hill operators with a two term potential / P. Djakov, B. Mityagin // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2004. — V. 339:5. — P. 351–354.
- [11] Djakov P. Instability zones of a periodic 1D Dirac operator and smoothness of its potential / P. Djakov, B. Mityagin // Comm. Math. Phys. — 2005. — V. 259:1. — P. 139–183.
- [12] Yao Qing-liu Existence of n positive solutions to a class of semilinear fourth-order two-point boundary value problems / Yao Qing-liu // Xiangtan daxue ziran kexue xuebao = Natur. Sci. J. Xiangtan Univ. — 2005. — V. 27, No 3. — P. 1–4.
- [13] Sun Yan Existence of positive solutions for fourth-order singular nonlinear boundary value problems / Sun Yan, Liu Lishan, Cho Yeol Je. Dyn // Syst. and Appl. — 2005. — V. 14, No 3–4. — P. 463–480.
- [14] Haar A. Minkowskische Geometric und Annäherung an Stetige Funktionen / A. Haar // Math. Ann. 1917. — Bd. 78, no. 1. — S. 294–311.
- [15] Hartman P. Principal solutions of disconjugate n -th order linear differential equations / P. Hartman // Amer. J. Math. — 1969. — V. 91, № 2. — P. 306–362.
- [16] Hryniv R.O. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in Sobolev space scale / R.O. Hryniv, Ya.V. Mykytyuk // Proc. Edinb. Math. Soc. — 2006. — V. 49:2. — P. 309–329.
- [17] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations / J. Kurzweil // Czech. Math. J. — 1958. — V. 8. — P. 360–388.
- [18] Keller A.V. The Existence Of A Unique Solution To A Mixed Control Problem For Sobolev-Type Equations / A.V. Keller, A.A. Ebel // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 3. — С. 121–127.

- [19] Kellogg O. Interpolation properties of orthogonal sets of solutions of differential equations / O. Kellogg // Amer. J. Math. — 1918. — № 40. — P. 220–234.
- [20] Kellogg O. Orthogonal Functions Sets Arising from Integral Equation / O. Kellogg // Amer. J. Math. — 1918. — V. 40. — P. 145–154.
- [21] Kellogg O. The Oscillation of Functions of an Orthogonal Set / O. Kellogg // Amer. J. Math. — 1916. — V. 38. — P. 1–5.
- [22] Korotyaev E. Characterization of the spectrum of Schrödinger operator with periodic distributions / E. Korotyaev // Int. Math. Res. Not. — 2003. — No 37. — P. 2019–2031.
- [23] Kowalewski G. Einführung in die Determinantentheorie / G. Kowalewski. — Leipzig, Viet & Co, 1909.
- [24] Lagnese J.E. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams / J.E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt // Math. Meth. Appl. Sci. — 1993. — V. 16. — P. 327–358.
- [25] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network / G. Lumer // Lect. Notes Math. V. 787. — Berlin: Springer, 1980. — P. 219–234.
- [26] Mammana G. Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari / G. Mammana // Math. L. — 1931. — No 33. — P. 186–231.
- [27] Muldowney J.S. Comparison theorems for linear boundary problems / J.S. Muldowney // SIAM J. Math. Anal. — 1978. — V. 9, No 9. — P. 943–955.
- [28] Nehari Z. Disconjugacy criteria for linear differential equations / Z. Nehari // J. Diff. Equations. — 1968. — V. 4. — P. 604–611.
- [29] Nehari Z. Disconjugate linear differential operators / Z. Nehari // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1969. — V. 129. — P. 500–516.

- [30] Ni Jian-cheng. Positive solution for fourth order singular boundry value problem / Ni Jian-cheng, Dai Yu, Du Xin-sheng // Qufu shifan daxue xuebao. Ziran kexue ban = J. Qufu Norm. Univ. Natur. Sci. — 2005. — V. 31, No 2. — P. 1–5.
- [31] Nicaise S. Approche spectrale des problemes de diffusion sur les reseaux / S. Nicaise. — Lecture Notes in Math. V. 1235. — Berlin: Springer, 1987. — P. 120–140.
- [32] Nicolson L. S. Disconjugate systems of linear differential equations / L. S. Nicolson // J. of Different. Equat. — 1970. — No 7. — P. 570–583.
- [33] Nitsche J.A. Ein Kriterium fur die quasi-optimalitat des Ritzchen Verfahrens / J.A. Nitsche // J. Numer. Math. — 1968. — V. 11. — P. 346–348.
- [34] Pokornyi Yu.V. On extension of the Sturm-Liouville oscillation theory to problems with pulse parameters / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — T. 60, № 1. — C. 108–113.
- [35] Pokornyi, Yu.V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.
- [36] Polia G. On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation / G. Polia // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1922. — V. 24. — P. 312–324.
- [37] Ridenhour J. R. On the zeros of solutions of Nth order linear differential equations / J. R. Ridenhour // J. of Differential equations. — 1974. — V. 6. — P. 45–71.
- [38] Shturm C. Sur une class d'equations a differences partielle / C. Shturm // J. Math. Pures Appl. — 1836. — V. 1. — P. 373–444.
- [39] The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.V. Keller, A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Yu.V. Khudyakov // Semigroups of Operators — Theory and Applications / [International Conference], Bedlewo, Poland, Oktober 2013. — Heidelberg;

New York; Dordrecht; London: Springer International Publishing Switzerland, 2015. — P. 183–195.

- [40] Three solutions for a class of boundary value problems of second-order ordinary differential equations / Shu Xiao-bao, Zhu Quan-xin. Zhongshan daxue xuebao. Ziran kexue ban // Acta sci. natur. univ. Sutyatseni. Natur. Sci. — 2005. — V. 44, No 6. — P. 5–7.
- [41] Wintner A. On the non-existence of conjugate points / A. Wintner // Amer. J. Math. — 1951. — No 73. — P. 368–380.
- [42] Xi Li-jing. Multiplicity and nonexistence of positive solutions for singular boundary value problem of fourth order system / Xi Li-jing // Yingyong fanhan fenxi xuebao = Acta anal. funct. appl. — 2005. — V. 7, No 1. — P. 46–50.
- [43] Multiple positive solutions of fourth-order boundary value problems / Xu Xiaojie, Jiang Daqing, O'Regan Donal, R. P. Agarwal // Math. Inequal. and Appl. — 2005. — V. 8, No 1. — P. 79–88.
- [44] Yang Yun-rui. Positive solutions of singular boundary value problem of fourth order differential equations / Yang Yun-rui // Xibei shifan daxue xuebao. Ziran kexue ban = J. Northw. Norm. Univ. Natur. Sci. — 2005. — V. 41, No 6. P. 7–10.
- [45] Yao Qing-liu. Solution and positive solution to a class of nonlinear fourth-order boundary value problems / Yao Qing-liu, Ren Li-shun // Xiamen daxue xuebao. Ziran kexue ban = J. Xiamen Univ. Natur. Sci. — 2004. — V. 43, No 6. — P. 765–768.
- [46] Yu Jian-hui. Positive solutions of fourth-order boundary value problems / Yu Jian-hui // Fuzhou daxue xuebao. Ziran kexue ban = J. Fuzhou Univ. Natur. Sci. Ed. — 2004. — V. 32, No 4. — P. 420–422.
- [47] Zhang Fu-wei. Multiple positive solutions of fourth order boundary value problem / Zhang Fu-wei, Liu Jin-sheng // Huabei gongxueyuan xuebao = J. N. China Inst. Technol. — 2004. — V. 25, No 6. — P. 410–412.
- [48] Zhang Guo-wei A necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions of a class of singular boundary value problems of higher

- order differential equations / Zhang Guo-wei, Sun Jing-xian // Yingyong fanhan fenxi xuebao = Acta Anal. Funct. Appl. — 2004. — V. 6, No 3. — P. 250–255.
- [49] Zhang Xing-qiu. The existence of nontrivial solutions for singular nonlinear second order three-point boundary value problems / Zhang Xing-qiu, Zhong Qiu-yan // Qufu shifan daxue xuebao. Ziran kexue ban J. Qufu Norm. Univ. Natur. Sci. — 2006. — V. 32, No 2. — P. 25–30.
- [50] Zhang Yan-hong. The existence of positive solution for a four-order three-point boundary value problem / Zhang Yan-hong, Zeng You-dong // Fuzhou daxue xuebao. Ziran kexue ban = J. Fuzhou Univ. Natur. Sci. Ed. — 2005. — V. 33, No 1. — P. 1–3.
- [51] Zhu Xiao-jie. Positive solution to a nonlinear fourth-order periodic boundary value problem / Zhu Xiao-jie, Qiao Xing-hao, Zhao Yu-rong // Daqing shiyou xueyuan xuebao J. Daqing Petrol. Inst. — 2006. — V. 30, No 3. — P. 108–110.
- [52] Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден. — М.: Мир, 1991. — 566 с.
- [53] Антосик П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Минусинский, Р. Сикорский. — М.: Мир, 1976. — 449 с.
- [54] Асташова И.В. Об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью / И.В. Асташова // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. — 2015. — № 2 (59). — С. 3–25.
- [55] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 749 с.
- [56] Баданин А.В. Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка / А.В. Баданин, Е.Л. Коротяев // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 5. — С. 1–48.
- [57] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. — 632с.

- [58] Белоглазова Т.В. О положительной обратимости разнорядковых задач на графах: дисс. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.В. Белоглазова. — Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 2003.
- [59] Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
- [60] Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной / С.Н. Бернштейн. — М.—Л.: Гл. ред. общетехн. лит., 1937. — 203 с.
- [61] Боровских А.В. Условия знакорегулярности разрывных краевых задач / А.В. Боровских // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 5. — С. 643–655.
- [62] Боровских А.В. Системы Чебышева-Хааря в теории разрывных ядер Келлога / А.В. Боровских, Ю.В. Покорный // Успехи математических наук. — 1994. — Т. 49, вып. 3 (297). — С. 3–42.
- [63] Брук В.М. О линейных отношениях, порожденных интегральным уравнением с неванлинновской мерой / В.М. Брук // Изв. вузов. Матем. — 2012. — № 10. — С. 3–19.
- [64] Винокуров В.А. Собственное значение и след оператора Штурма–Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала / В.А. Винокуров, В.А. Садовничий // Докл. РАН. — 1999. — Т. 365, № 3. — С. 295–297.
- [65] Владимиров А.А. К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами / А.А. Владимиров // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609–1621.
- [66] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 280 с.
- [67] Владимиров В.С. Обобщенные функции и их применения / В.С. Владимиров. — М.: Знание, 1990. — 41 с.

- [68] Владыкина В.Е. Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами / В.Е. Владыкина, А.А. Шкаликов // Математические заметки. — 2015. — Т. 98, № 6. — С. 832–841.
- [69] Воеводин А.Ф. Метод сопряженных операторов для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / А.Ф. Воеводин // Сиб. журн. вычисл. математики РАН. Сиб. отд-ние. — 2012. — Т. 15, № 3. — С. 251–260.
- [70] Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М.: МИР, 1984. — 428 с.
- [71] Гантмахер Ф.Р. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн. — М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1950. — 359 с.
- [72] Гасымов М.Г. Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка / М.Г. Гасымов // Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, № 1. — С. 14–19.
- [73] Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. — М.: Добросвет, 2000. — 412 с.
- [74] Гливенко В.И. Интеграл Стильтьеса / В.И. Гливенко. — ОНТИ НКТП СССР, 1936. — 217 с.
- [75] Голованева Ф. В. Непрерывная спектральная ветвь нелинейной математической модели четвертого порядка с производными по Радона–Никодима / Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIV». — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 53–55.
- [76] Голованева Ф. В. О непрерывной спектральной ветви нелинейной математической модели четвертого порядка с производными по мере / Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 274–275

- [77] Голованёва Ф.В. Анализ дифференциальной модели, описывающую малые деформации сильно сингулярной консоли / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Взаимодействие математики и физики: новые перспективы. Материалы Всероссийской молодежной научной школы в рамках фестиваля науки (31 августа 2012 г.). — С. 8–9.
- [78] Голованёва Ф.В. Достаточные условия податливости сильно сингулярной математической модели / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Материалы Международной молодежной научной школы (22–23 июня 2012 г.), Воронеж. — С. 29–30.
- [79] Голованёва Ф.В. О достаточных условиях осцилляционности спектра одной краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2010. — № 2. — С. 112–121.
- [80] Голованёва Ф.В. О достаточных условиях податливости одной сильно сингулярной математической модели / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII». — Воронеж, 2012. — С. 51–52.
- [81] Голованёва Ф.В. О достаточных условиях положительной обратимости одной сильно сингулярной математической модели / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // V Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012) Воронеж, 11 – 16 сентября 2012 г. — С. 90–91.
- [82] Голованёва Ф.В. О положительной обратимости краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. — 2009. — Воронеж. — С. 46–47.

- [83] Голованёва Ф.В. Осцилляционность спектра спектральной задачи четвертого порядка / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». — 2011. — С. 79–81.
- [84] О методе конечных элементов для разнопорядковой модели / Н. И. Головки, Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIV». — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 55–57.
- [85] Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А.С. Городецкий, В.И. Зоворицкий, А.И. Лантух-Лященко, А.О. Расказов. — М.: Транспорт, 1981. — 143 с.
- [86] Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
- [87] Давыдова М. Б. О нелинейной математической модели с сильной нелинейностью и производными Радона–Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 68–69.
- [88] Давыдова М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона–Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.
- [89] Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными по мере / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII». 2012. — С. 57–59.
- [90] Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений с производными по мере / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров

// Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Материалы Международной молодежной научной школы (22-23 июня 2012 г.), Воронеж. — С. 39-41.

- [91] Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стильтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, вып. 4. — С. 13–17.
- [92] Давыдова М.Б. Об одной нелинейной математической модели с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // V Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012). — Воронеж, 11–16 сентября 2012 г. — С. 103–105.
- [93] Давыдова М.Б. О краевых задачах с негладкими и разрывными решениями / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров. — LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. — 91 p.
- [94] Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 368с.
- [95] Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В. Я. Дерр // Известия Института математики и информатики УдГУ. — 1999. — Вып. 1 (16). — С. 3–105.
- [96] Дерр В.Я. Динамические обобщенные функции и проблема умножения / В.Я. Дерр, Д.М. Кинзебулатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 5 (540). — С. 33–45.
- [97] Дерр В.Я. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями, допускающими умножение на разрывные функции / В.Я. Дерр, Д.М. Кинзебулатов // Вестник Удмуртского Университета. — 2005. — № 1. — С. 35–58.
- [98] Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений / В.Я. Дерр // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2009. — Вып. 1. — С. 56–99.

- [99] Джаков П. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П. Джаков, Б.С. Митягин // УМН. — 2006. — Т. 61, № 4. — С. 77–182.
- [100] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.
- [101] Дыхта В.А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В.А. Дыхта, О.Н. Самсонюк. — М.: Физматлит, 2003. — 255 с.
- [102] Дьяченко, М. И. Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. — М.: Факториал, 1998. — 158 с.
- [103] Егоров Ю.В. Об обобщенных функциях и линейных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Егоров // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. — 1990. — № 2. — С. 96–99.
- [104] Завалицин С.Т. Специальные нелинейные дифференциальные уравнения в обобщенных функциях / С.Т. Завалицин // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26, № 8. — С. 1316.
- [105] Завалицин С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалицин, А.Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — 256 с.
- [106] Поля Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2 / Г. Поля, Г. Сеге. — М.: Наука, 1978. — 431 с.
- [107] Зверева М.Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стильтеса: дисс. . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.Б. Зверева. — Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 2005. — 120с.
- [108] Зверева М.Б. Свойства функции влияния задачи на графе / М.Б. Зверева, Д.И. Гоговский // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII». 2012. — С. 73–74.

- [109] Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтъяеса на геометрическом графе / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.
- [110] Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Ж.О. Залукаева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 4. — С. 112–121.
- [111] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: МИР, 1975. — 542 с.
- [112] Злотник А.А. Метод конечных элементов с дискретными прозрачными граничными условиями для одномерного нестационарного уравнения Шрёдингера / А.А. Злотник, И.А. Злотник // Доклады академии наук. — 2012. — Т. 447, № 2. — С. 130–135.
- [113] Иванникова Т. А. О методе конечных элементов для одной разнорядковой математической модели / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 99–101.
- [114] Иванникова Т.А. Анализ математической модели струнно-стержневой системы с упругими опорами на концах / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // V Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012) Воронеж, 11–16 сентября 2012 г. — С. 103–105.
- [115] Иванникова Т.А. О математической модели одной струнно-стержневой системы / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII». 2012. — С. 78–79.
- [116] Иванникова Т.А. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтъяеса и нулевым коэффициентом при

- старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 2, ч. 1. — С. 3–8.
- [117] Иванникова Т.А. Об одной математической модели струнно-стержневой системы / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Материалы Международной молодежной научной школы (22-23 июня 2012 г.), Воронеж. — С. 36.
- [118] Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
- [119] Кац И.С. Критерий дискретности спектра сингулярной струны / И.С. Кац, М.Г. Крейн // Изв. вузов. Матем. — 1958. — № 2(3). — С. 136–153.
- [120] Кац И.С. Дополнение II к книге Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / И.С. Кац, М.Г. Крейн. — М.: Мир, 1968. — 749 с. — С. 648–733.
- [121] Келлер А.В. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей соболевского типа / А.В. Келлер, С.А. Загребина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2015. — Т. 8, № 2. — С. 5–23.
- [122] Клоков Ю.А. О верхних и нижних функциях для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. I. / Ю.А. Клоков // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1074–1083.
- [123] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц. — М.: Наука, 1968. — 504 с.
- [124] Кондратьев В. А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка / В. А. Кондратьев // Труды Моск. Матем. о-ва. — 1959. — Т. 8. — С. 259–281.
- [125] Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности / В.Г. Корнеев. — Л.: Изд-во Ленинградского Университета, 1977. — 205 с.

- [126] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. — М.: Физматгиз, 1962. — 394 с.
- [127] Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М.: Наука, 1975. — 512с.
- [128] Крейн М.Г. О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны / М.Г. Крейн // Сб. памяти академика Граве. — 1940. — С. 88–103.
- [129] Крейн М.Г. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха / М.Г. Крейн, М.А. Рутман // УМН. — 1948. — Т. 3, № 4. С. 3–95.
- [130] Крейн М. Г. О несимметричных осцилляционных функциях Грина / М. Г. Крейн // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 25, № 6. — С. 643–646.
- [131] Лазарев К.П. Разрешимость краевой задачи для разнопорядкового дифференциального уравнения на геометрическом графе / К.П. Лазарев, Т.В. Белоглазова // Математические заметки. — 2006. — Т. 80, № 1. — С. 60–68.
- [132] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ / А.Ю. Левин // УМН. — 1969. — Т. 24, № 2(146). — С. 43–96.
- [133] Левитан Б.М. Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. — М.: Наука, 1970. — 672 с.
- [134] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит-ры, 1956. — 632 с.
- [135] Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит-ры, 1957. — 267 с.
- [136] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев: Наукова думка, 1977. — 329 с.
- [137] Маслов В.П. δ -образные обобщенные по Соболеву решения квазилинейных уравнений / В.П. Маслов, В.А. Цупин // УМН. — 1979. — Т. 34, вып. 1. — С. 235–236.

- [138] Мирзоев К.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями / К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Математические заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.
- [139] Митрохин С.И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами / С.И. Митрохин // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 2010. — Т. 270. — С. 188–197.
- [140] Митягин Б.С. Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака / Б.С. Митягин // Докл. РАН. — 2003. — Т. 393, № 4. — С. 456–459.
- [141] Михайлец В.А. Критерий дискретности спектра одномерного оператора Шрёдингера с δ -взаимодействиями / В.А. Михайлец // Функц. анализ и его прил. — 1994. — Т. 28, № 4. — С. 85–87.
- [142] Мышкис А.Д. О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенным коэффициентом / А.Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.
- [143] Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей / А.Д. Мышкис. — М.: КомКнига. — 2007. — 192 с.
- [144] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — СПб.: Лань, 1999. — 560 с.
- [145] Нейман-заде М.И. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов / М.И. Нейман-заде, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 723–733.
- [146] О некоторых вопросах из качественной теории уравнений с разрывными решениями. Зверева М. Б.; Воронеж. гос. ун-т. Воронеж, 2005, 12 с. Библ. 7. Рус. Деп. в ВИНТИ 02.06.2005, No 797-B2005.
- [147] Перловская Т.В. О позитивной обратимости одной разнопорядковой краевой задачи на графе: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.В. Перловская. — Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 2004.

- [148] Покорный Ю. В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167–169.
- [149] Дифференциал Стильтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров, М.Б. Давыдова // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.
- [150] Покорный Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами / Ю.В. Покорный, С.А. Шабров // Труды математического факультета ВГУ (новая серия). — 1999. — вып. 4. — С. 84–96.
- [151] Покорный Ю.В. О дефектах аксиоматики функции Грина / Ю.В. Покорный, А.В. Боровских // Доклады РАН. — 2002. — Т. 384, № 4. — С. 460–464.
- [152] Покорный Ю.В. О задаче Штурма–Лиувилля с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Труды математического факультета. — 2006. — вып. 10. — Воронеж. — С. 119–130.
- [153] Покорный Ю.В. О неосцилляции интегро-дифференциального уравнения с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // «Понтрягинские чтения — XV» на Воронежской весенней математической школе “Современные методы в теории краевых задач”: Тез. докл. — Воронеж, 2004. — С. 173.
- [154] Покорный Ю.В. О непрерывной зависимости от параметра решения краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ю.В. Покорный, Ф.В. Голованева, С.А. Шабров // Вестник физико-математического факультета Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина. — 2006. — вып. 1. — С. 70–72.
- [155] Покорный Ю.В. О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе / Ю.В. Покорный, Р. Мустафокулов // Изв. вузов. Матем. — 1999. — № 2. — С. 75–82.
- [156] Покорный Ю.В. О разрешимости полулинейной краевой задачи с квазипроизводной / Ю.В. Покорный, С.А. Шабров // «Понтрягинские чтения

- X» на Воронежской весенней математической школе “Современные методы в теории краевых задач”: Тез. докл. Воронеж, 1999. — С. 290.
- [157] Покорный Ю.В. Об интегральном представлении систем Маркова / Ю.В. Покорный // Доклады Академии Наук. — 1994. — Т. 335, № 1. — С. 18–20.
- [158] Покорный Ю.В. Об одном классе обобщенных задач Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского. 2004. — С. 166–167.
- [159] Покорный Ю.В. Об одном классе разнопорядковых обыкновенных дифференциальных уравнений на графе / Ю.В. Покорный, Т.В. Белоглазова, К.П. Лазарев // Матем. заметки. — 2003. — Т. 73, № 3. — С. 469–470.
- [160] Покорный Ю.В. Об особенностях упругих одномерных задач / Ю.В. Покорный, А.В. Копытин, С.А. Шабров // «Понтрягинские чтения – VIII» на Воронежской весенней математической школе «Современные методы в теории краевых задач»: Тез. докл. — Воронеж, 1997. — С. 184.
- [161] Покорный Ю.В. Спектральные свойства Штурма для одной необычной задачи: Докл. [Международная конференция “Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики” (“ОПУ-2003”), Тамбов, 11–16 мая, 2003]. Покорный Ю. В., Бурлуцкая М. Ш. Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. н. 2003. 8, No 3, с. 433–434. Рус.
- [162] О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка / Ю.В. Покорный, Т.В. Белоглазова, Е.В. Дикарева, Т.В. Перловская // Матем. Заметки. — 2003. — Т. 74, № 1. — С. 146–148.
- [163] Покорный, Ю.В. О дифференциалах Стилтеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 1–4.

- [164] Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.
- [165] Покорный Ю. В. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.
- [166] Покорный Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141.
- [167] Покорный Ю. В. Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач / Ю. В. Покорный, К. П. Лазарев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 658–670.
- [168] Покорный Ю.В. О знакоопределённых решениях краевой задачи четвёртого порядка с производными по мере / Ю.В. Покорный, Ф.В. Голованева, С.А. Шабров // Труды математического факультета. — 2007. — Воронеж — вып. 11. — С. 155–159.
- [169] О неосцилляции интегро-дифференциального уравнения из задачи о стилтьесовской струне / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 136–138.
- [170] О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.
- [171] О разностных методах в вариационных моделях некоторых упругих систем / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования. — 2007. — С. 157.
- [172] Рид М. Методы современной математической физики. II: Гармонический анализ. Самосопряженность / М. Рид, Б. Саймон. — М.: Мир, 1978.

- [173] Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 588 с.
- [174] Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов / Л.А. Розин. — Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1975. — 237 с.
- [175] Рукавишников В.А. Об оценке погрешности метода конечных элементов для третьей краевой задачи с сингулярностью в пространстве $L_{2,\nu+\gamma}^*$ / В.А. Рукавишников, Е.И. Рукавишников // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ие. — Новосибирск, 2004. — Т. 7, № 2. — С. 177–185.
- [176] Савчук А.М. О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом / А.М. Савчук // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 2. — С. 277–285.
- [177] Савчук А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, Вып. 6. — С. 897–911.
- [178] Савчук А.М. О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 6. — С. 864–884.
- [179] Савчук А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Тр. ММО. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.
- [180] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 3. — С. 427–442.
- [181] Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
- [182] Самарский А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.
- [183] Сакс, С. Теория интеграла / С. Сакс. — М., 1949. — 494 с.

- [184] Степанов Г.Д. Многоточечные краевые задачи с функциями Грина, приводимыми к знакорегулярному виду. — Деп. В ВИНТИ 20.04.88 3044-B89. Ярославль: Яросл. ун., 1988.
- [185] Степанов Г.Д. Эффективные критерии сильной знакорегулярности и осцилляционное свойство функций Грина двухточечных краевых задач / Г.Д. Степанов // Матем. сб. — 1997. — Т. 188, № 11. — С. 121–159.
- [186] Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М.: Мир, 1977. — 351 с.
- [187] Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — М.: Наука, 1980. — 464 с.
- [188] Ткаченко А.А. О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с δ' -взаимодействием / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // «Понтрягинские чтения – XII» на Воронежской весенней математической школе “Современные методы в теории краевых задач”: Тез. докл. Воронеж, 2001. — С. 196–197.
- [189] Ткаченко А.А. О неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с производными по дробным мерам / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской математической школы “Понтрягинские чтения – XVII”. (доп. выпуск). — 2006. Воронеж. — С. 18.
- [190] Ткаченко А.А. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стильтьеса / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, вып. 2. — С. 36–39.
- [191] Ткаченко А.А. Об одной краевой задаче с коэффициентами содержащими диполи второго порядка / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». — 2005. — Воронеж. Доп. вып. — С. 268–269.
- [192] Трусков П.В. Введение в математическое моделирование / П.В. Трусков. — М.: Логос, 2005. — 440 с.

- [193] Трынин А.Ю. Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля / А.Ю. Трынин // Уфимск. матем. Журн. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 133–143.
- [194] Трынин А.Ю. Об асимптотике решений и узловых точек дифференциальных выражений Штурма–Лиувилля / А.Ю. Трынин // Сиб. матем. Журн. — 2010. — Т. 51, № 3. — С. 662–675.
- [195] Трынин А.Ю. Об асимптотике решений и узловых точек дифференциальных выражений Штурма–Лиувилля / А.Ю. Трынин // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, № 3. — С. 662–675.
- [196] Турыгина Е.А. О вполне непрерывности интегрального оператора, обращающего краевую задачу с производными по мере, в специальных пространствах / Е.А. Турыгина, С.А. Шабров // Труды математического факультета. — 2007. — вып. 11. — С. 203–214.
- [197] Филиновский А.В. Об асимптотическом поведении собственных значений краевой задачи с параметром / А.В. Филиновский // Вестник Самарского государственного университета. — 2015. — № 6 (128). — С. 135–140.
- [198] Форсайт Дж. Математические методы машинных вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моулер. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
- [199] Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях / А.П. Хромов // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 115–142.
- [200] Шабров С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.
- [201] Шабров С.А. О μ -регуляризации функции с конечным изменением / С. А. Шабров // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — 1999. — С. 166–169.
- [202] Шабров С.А. О математической модели сложно-сочлененной стержневой системы / С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2010, № 2. — С. 137–146.

- [203] Шабров С.А. О нелинейной спектральной задаче с производными по мере / С.А. Шабров // Дифференциальные уравнения. — Т. 43, № 6. — 2007. — С. 856.
- [204] Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса / С.А. Шабров // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, вып. 1. — С. 52–55.
- [205] Шабров С.А. О непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения с производными по мере от параметра / С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2008, № 2. — С. 57–69.
- [206] Шабров С.А. О разрешимости нелинейных квазидифференциальных уравнений второго порядка / С.А. Шабров // Воронежская зимняя математическая школа “Современные проблемы теории функций и их приложения”: Тез. Докл. Воронеж, 1999. — С. 230.
- [207] Шабров С.А. О разрешимости нелинейных краевых задач второго порядка с производными по мере / С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2008, № 3. — С. 57–69.
- [208] Шабров С.А. О функции Грина некоторых негладких задач / С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва. — Saarbrucrtm, Germany. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 92 с.
- [209] Шабров С.А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка / С.А. Шабров. — Saarbrücken, 2015. — 162 с.
- [210] Баев А.Д. Дифференциал Стильтьеса в импульсных нелинейных задачах / А.Д. Баев, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.
- [211] Шабров С.А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

- [212] Шабров С.А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.
- [213] Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной разнорядковой спектральной задачи с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Головкин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.
- [214] Шаров Г.С. Спектр состояний замкнутой струны, нагруженной массивными точками / Г.С. Шаров // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2007. — С. 21–27.
- [215] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 207 с.
- [216] Ширяев Е.А. Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы / Е.А. Ширяев, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, № 4. — С. 636–640.
- [217] Шкаликов А.А. Осцилляционные теоремы для задач Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями / А.А. Шкаликов, Бен Амарра Ж. // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2009. — № 3. — С. 43–49.
- [218] Шкаликов А.А. Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями / А.А. Шкаликов, Д.-Г. Бак // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 5. — С. 643–651.
- [219] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Шабров С.А. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2012660327. 14.11.2012.
- [220] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Шабров С.А. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2012660330. 14.11.2012.

Приложение А

Комплекс программ для реализации численных экспериментов

Здесь приводятся комплекс программ для численных экспериментов написанных на Python и в пакете символьной математики Maple.

Программа работает по следующему алгоритму. Задаются коэффициенты модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение. Строится либо график (Maple и Python), либо таблица значений, которая может быть записана для построения графика с помощью программы, написанной в языке Python3.2.

А.1 Программы для реализации численных экспериментов для математической модели второго порядка

А.1.1 Программа, написанная в пакете Maple

Описание.

Общие сведения о программе. Программа называется String_Finish.mw.

Для работы программы необходим пакет символьной математики Maple.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 2 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 49890 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения при-

ближенного решения модели малых деформаций струны по заданным параметрам модели.

Структура программы. В начале задаются параметры модели и количество интервалов на которые разбивается отрезок. Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Строится график приближенного решения.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. Для начала работы необходимо запустить Maple, открыть файл с именем String_Finish.mw. Затем задаем параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На рисунке А.1 представлена рабочая область файла (после открытия файла и задания коэффициентов модели).

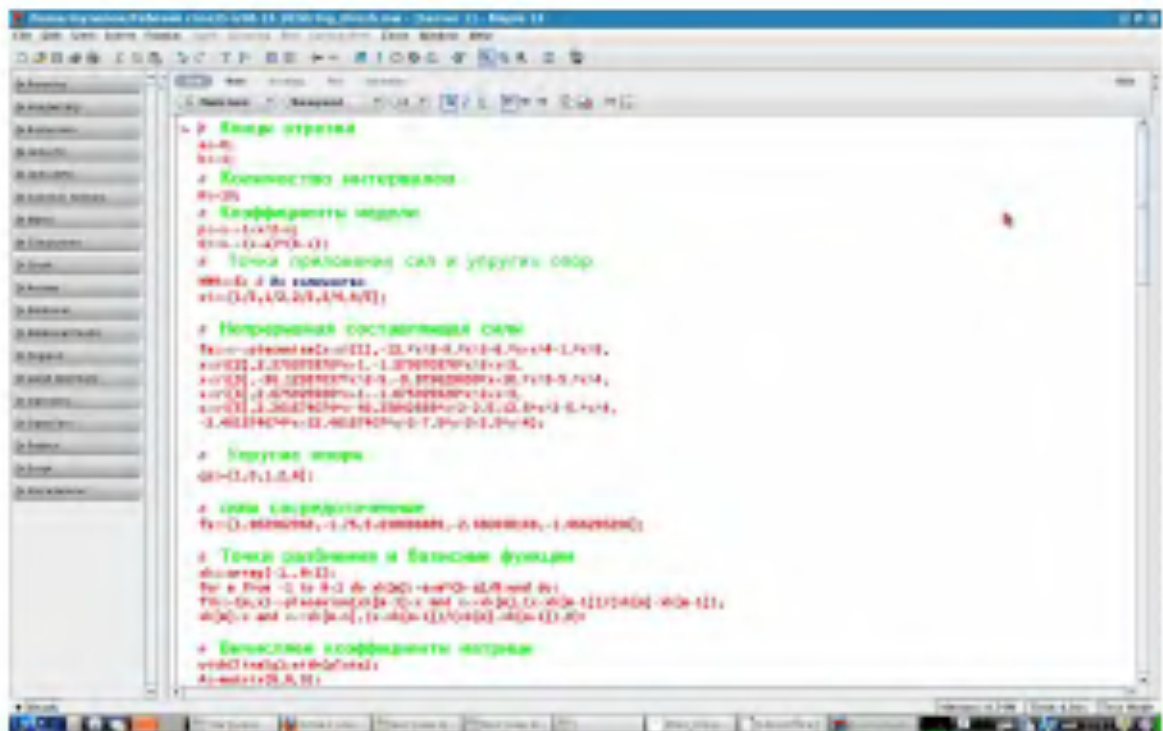


Рисунок А.1. Вид программы на Maple до запуска

На выходе будет получен график приближенного решения модели. После задания параметров достаточно нажать $\langle \text{Enter} \rangle$. Результат работы программы представлен (для заданной модели при разбиении на $n = 10$ равных частей) на рисунке А.2.

Текст программы.

```
# Концы отрезка
```

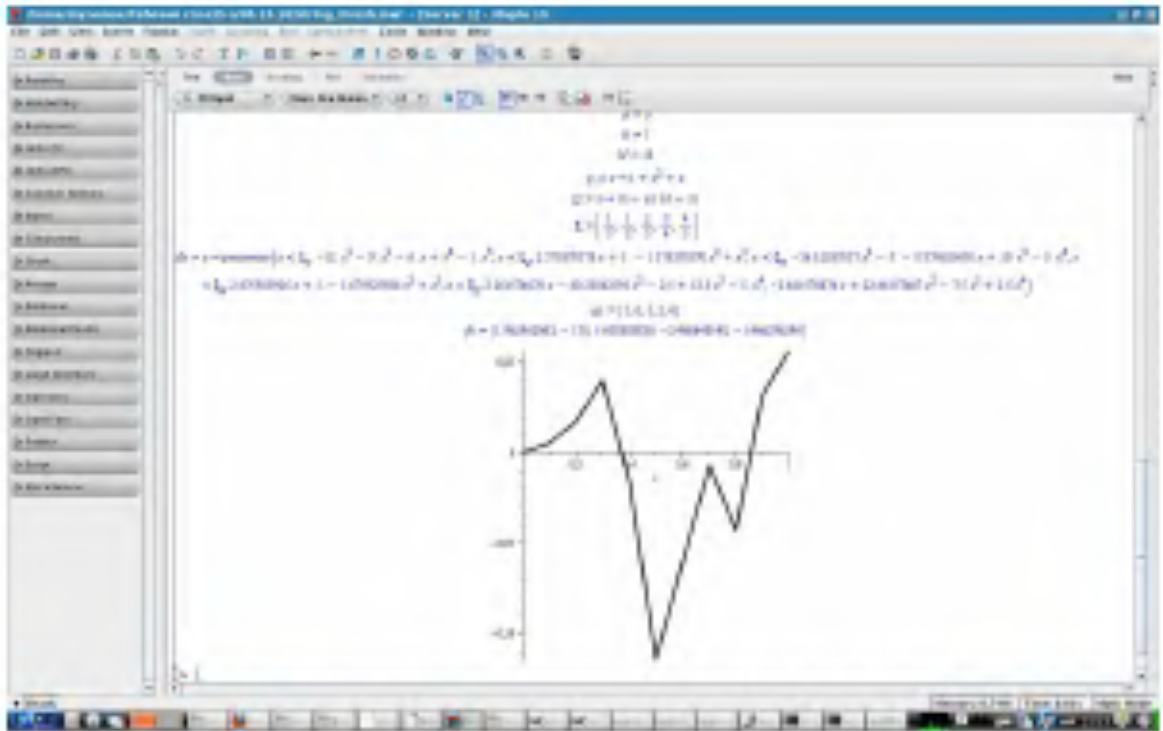


Рисунок А.2. Вид программы на Maple после запуска

```

a:=0;
b:=1;
# Количество интервалов
N:=10;
# Коэффициенты модели
p:=x-1+x^2+x;
Q:=x-(x-a)*(b-x);
# Точки приложения сил и упругих опор
MMM:=5: # Их количество
xi:=[1/3,1/2,2/3,3/4,4/5];

# Непрерывная составляющая силы
fa:=x-pieceswise(x<xi[1],-12.*x^3-9.*x^2-6.*x+x^4-1.*x^5,
x<xi[2],2.370370370*x+1.-1.370370370*x^2+x^3,
x<xi[3],-36.12037037*x^2-5.-8.879629630*x+10.*x^3-5.*x^4,
x<xi[4],2.675925926*x+1.-1.675925926*x^2+x^3,
x<xi[5],2.261574074*x-40.23842593*x^2-2.5+12.5*x^3-5.*x^4,
-2.461574074*x+22.46157407*x^2-7.5*x^3+2.5*x^4);

```

```

# Упругие опоры
qs:=[1,0,1,2,4];

# Силы сосредоточенные
fs:=[1.962962963,-1.75,5.638888889,-2.460648148,-1.466296296];

# Точки разбиения и базисные функции
xk:=array[-1..N+1]:
for m from -1 to N+1 do xk[m]:=a+m*(b-a)/N:end do:
fik:=(m,x)-piecewise(xk[m-1]<x and x<=xk[m],
(x-xk[m-1])/(xk[m]-xk[m-1]),
xk[m]<x and x<=xk[m+1],(x-xk[m+1])/(xk[m]-xk[m+1]),0):

# Вычисляем коэффициенты матрицы
with(linalg):with(plots):
A:=matrix(N,N,0):
ff:=vector(N):
for m from 1 to (N-1) do
SS:=0:
for i from 1 to MMM do SS:=SS+fs[i]*fik(m,xi[i]): end do:
ff[m]:=evalf(int(fa(x)*fik(m,x),x=xk[m-1]..xk[m+1]))+SS:
end do:
SS:=0:
for i from 1 to MMM do SS:=SS+fs[i]*fik(N,xi[i]): end do:
ff[N]:=evalf(int(fa(x)*fik(m,x),x=xk[N-1]..xk[N]))+SS:

for m from 1 to N do ff[m];end do:
for m from 1 to (N-1) do
dfk1:=diff(fik(m,x),x):dfk2:=diff(fik(m+1,x),x):
SS:=0:
for i from 1 to MMM do SS:=SS+
qs[i]*fik(m,xi[i])*fik(m,xi[i]): end do:
A[m,m]:=int(p(x)*dfk1*dfk1,x=a..b)+
int(Q(x)*fik(m,x)*fik(m,x),x=a..b)+SS:

```

```

SS:=0:
for i from 1 to MMM do SS:=SS+
qs[i]*fik(m,xi[i])*fik(m+1,xi[i]): end do:
  A[m,m+1]:=evalf(int(p(x)*dfk1*dfk2,x=a..b))+
  int(Q(x)*fik(m,x)*fik(m+1,x),x=a..b)+SS:
  A[m+1,m]:=A[m,m+1]:
end do:
A[N,N]:=int(p(x)*diff(fik(N,x),x)*diff(fik(N,x),x),x=a..b)+
  int(Q(x)*fik(N,x)*fik(N,x),x=a..b):
evalm(A):evalm(ff):uu:=linsolve(A,ff):matrix(A):
pic2:=listplot([[a,0],seq([xk[k],uu[k]],k=1..N)]):
display(pic2,thickness=3):
z:=x-sum(uu[k]*fik(k,x),k=1..N):

```

A.1.2 Программа написанная на Python

Описание.

Общие сведения о программе. Программа называется String.Final.2.1.1.py.

Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 7352 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций струны по заданным параметрам модели.

Структура программы. В модуле, с названием DANNIE2.py, задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт String.Final.2.1.1.py, который спрашивает количество интервалов на которые разбивается отрезок и необходимое действие (построить график приближенного решения, вывести таблицу значений, записать значения в tex-файл, со структурой L^AT_EX, вычислить значение приближенного решения в конкретной точке, записать значения приближенного решения в текстовый файл). Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Осуществляется выбранное действие.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. До запуска программы необходимо задать параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i , которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE2.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график приближенного решения модели, либо таблица приближенного решения, которая может быть выведена на монитор или записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем String.Final.2.1.1.py.

На рисунках А.3 и А.4 представлена работающая программа на Python'e до задания n и выбора вывода результата соответственно.

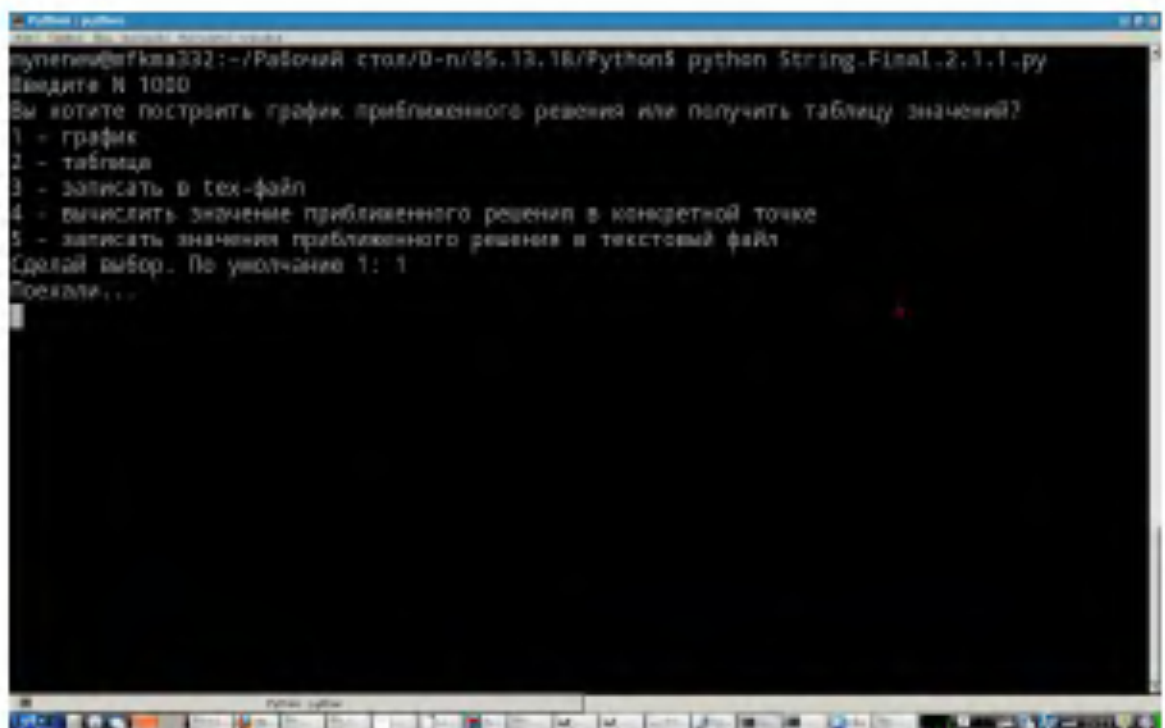


Рисунок А.3. Запущенная программа на Python'e

Текст программы.

Основной код.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

import math
import scipy.integrate as spint
```

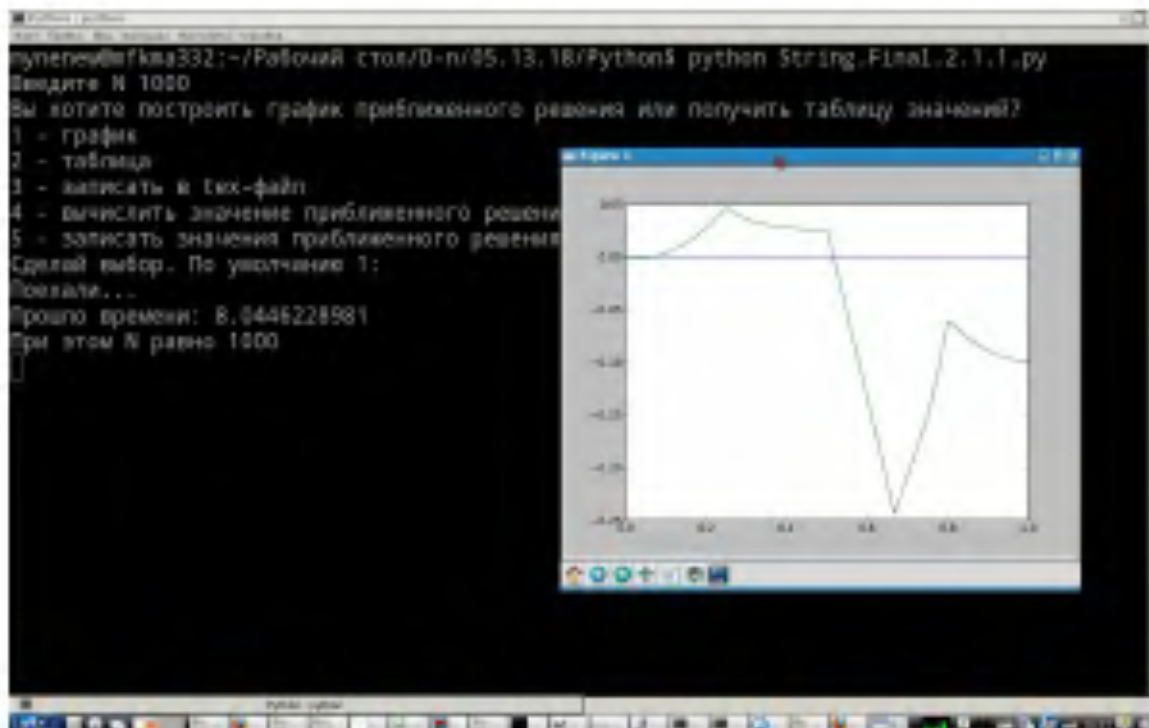


Рисунок А.4. Запущенная программа на Python'e после задания n

```

import copy, time
import pylab
from matplotlib import mlab
import DANNIE2
a = 0.0
aa=0.0
b = 1.0
N = 100
VV=True
while VV:
    try:
        N=input("Введите N ")
        if (not(N>0)) or N!=int(N):
            print "Число должно быть натуральным"
        else:
            VV=not (N>0)
    except:
        print "Некорректное число"
M = 5

```

```

print "Вы хотите построить график приближенного\
решения или получить таблицу значений?"
print "1 - график"
print "2 - таблица"
print "3 - записать в tex-файл"
print "4 - вычислить значение приближенного\
решения в конкретной точке"
print "5 - записать значения приближенного\
решения в текстовый файл"
Vibor=1
VV=True
while VV:
    try:
        Vibor=input("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
    except:
        Vibor=1
    VV=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3\
           or Vibor==4 or Vibor==5)
if Vibor==5:
    Vv=True
    while Vv:
        print "Введите имя файла"
        print "По умолчанию имя файла - RESULT.txt"
        print "Если такой файл существует, он будет заменен"
        try:
            NAME=raw_input()
            if NAME=='':
                NAME='RESULT.txt'
            Vv=False
        except:
            NAME='RESULT.txt'
if Vibor==3:
    Vv=True
    while Vv:

```



```

print "Введите имя файла"
print "По умолчанию имя файла - RESULT.tex"
print "Если такой файл существует, он будет заменен"
try:
    NAME=raw_input()
    if NAME=='':
        NAME='RESULT.tex'
    Vv=False
except:
    NAME='RESULT.tex'

print "Поехали..."
tt1=time.time()
# Особые точки
xii=[1.0/3, 1.0/2, 2.0/3, 3.0/4, 4.0/5]
# Сосредоточенные силы
fs=DANNIE2.fs
# Упругие опоры
qs=DANNIE2.qs
# Коэффициенты уравнения
Q=DANNIE2.Q
p=DANNIE2.p
# Задаем правую часть
fa=DANNIE2.fa
xk=[]
i = 0
while i<=N+1:
    xk += [a+i*(b-a)/N]
    i+=1
def fik(m,x):
    if (xk[m-1]<x) and (x<= xk[m]):
        return (x-xk[m-1])/(xk[m]-xk[m-1])
    elif (xk[m]<x) and (x<=xk[m+1]):
        return (x-xk[m+1])/(xk[m]-xk[m+1])
    else:

```

```

        return 0
# Интервал изменения переменной по оси X
xmin = 0.0
xmax = 1.0
# Шаг между точками
if N>=1000:
    dx = 1.0/N
elif N>=100:
    dx = 1.0/(N**2)
else:
    dx = 1.0/(N**4)
def f(x):
    return fik(m,x)*fik(n,x)*Q(x)
def ff(x):
    if abs(m-n)>1:
        return 0
    elif abs(m-n)==1:
        return p(x)/((xk[m]-xk[m-1])*(xk[m]-xk[m+1]))
    else:
        return p(x)/((xk[m+1]-xk[m])*(xk[m+1]-xk[m]))
x=[]
A=[]
B=[]
for m in range(1,N):
    n=m
    a=float(xk[m-1])
    b=float(xk[m+1])
    c,d=spint.quad(f,a,b)
    cc,dd=spint.quad(ff,a,b)
    ccc=0
    for ix in xrange(0,M):
        ccc+=float(qs[ix])*\  

            fik(m,float(xii[ix]))*\  

            fik(n,float(xii[ix]))

```

```

c = c+cc+ccc
A+=[copy.deepcopy(c)]
n = m+1
a=float(xk[m])
b=float(xk[m+1])
c,d=spint.quad(f,a,b)
cc,dd=spint.quad(ff,a,b)
ccc=0
for ix in xrange(0,M):
    ccc+=float(qs[ix])*\  

        fik(m,float(xii[ix]))*\  

        fik(n,float(xii[ix]))
c = c+cc+ccc
B+=[copy.deepcopy(c)]
n=m=N
a=float(xk[m-1])
b=float(xk[m])
c,d=spint.quad(f,a,b)
cc,dd=spint.quad(ff,a,b)
ccc=0
for ix in xrange(0,M):
    ccc+=float(qs[ix])*\  

        fik(m,float(xii[ix]))*\  

        fik(n,float(xii[ix]))
c+=cc+ccc
A+=[copy.deepcopy(c)]
# правая часть
ffff=[]
for i in xrange(1,N+1):
    dfd=0.0
    cdf=0.0
    for ii in range(0,5):
        dfd+=float(fs[ii])*fik(i,float(xii[ii]))
    if i<N:

```

```

        cfd,dfhd=spint.quad(lambda x:\
            fa(x)*fik(i,x),xk[i-1],xk[i+1])
    else:
        cfd,dfhd=spint.quad(lambda x:\
            fa(x)*fik(i,x),xk[i-1],xk[i])
    ffff+=[cfd+dfd]
# Прямой ход
for i in xrange(1,N):
    ffff[i]-=ffff[i-1]*B[i-1]/A[i-1]
    A[i]-=B[i-1]*B[i-1]/A[i-1]
xx=[]
xx+=[0.0 for i in xrange(0,N)]
xx[N-1]=ffff[N-1]/A[N-1]
# Обратный...
for i in xrange(N-2,-1,-1):
    xx[i]=(ffff[i]-B[i]*xx[i+1])/A[i]
def Approx(x):
    qaql=0.0
    for m in xrange(0,N):
        ggg=xx[m]
        qaql+=float(ggg)*fik(m+1,x)
    return qaql
if Vibor==1:
    xlist = mlab.frange (0, 1, dx)
    ylist2 = [Approx(x) for x in xlist]
    ylist1 = [0 for x in xlist]
    pylab.plot (xlist, ylist1)
    pylab.plot (xlist, ylist2)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом N равно", N
    pylab.show()
elif Vibor==2:
    for lk in xrange(N):

```

```

        print "x=", aa+lk*1.0/N, "u=", Approx(aa+lk*1.0/N)
print "x=", b, "u=", Approx(b)
tt2=time.time()
print "Прошло времени:", tt2-tt1
print "При этом N равно", N
elif Vibor==3:
    tex=open(NAME, 'w')
    tex.write('\documentclass[a4paper,10pt]\
{article}\r\\usepackage[utf8]{inputenc}\r')
    tex.write('\usepackage[russian]{babel}\r\
\\usepackage{longtable}\r\\begin{document}\r')
    tex.write('\begin{longtable}{|l|l|}\r')
    tex.write('\hline\r')
    for lk in xrange(N):
        tex.write('$')
        tex.write(str(aa+lk*1.0/N))
        tex.write('$')
        tex.write(' & ')
        tex.write('$')
        tex.write(str(Approx(aa+lk*1.0/N)))
        tex.write('$')
        tex.write('\\\\ \\hline\r')
    tex.write('\end{longtable}\r\\end{document}')
    tex.close
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
elif Vibor==4:
    print "Введите число между", aa, " и ", b
    print "Выход ENTER"
    try:
        Vibor=True
        while Vibor:
            klkkk=input()
            if klkkk>=aa and klkkk<=b:

```

```

        print "u(",klkkk,")=",Approx(klkkk)
    else:
        print "Число должно быть между ",aa, " и ", b
        print " Хотите еще?"
        print "ENTER - выход"
except:
    print "До свидания"
elif Vibor==5:
    if N<=10:
        МК=1000
    elif N<=1000:
        МК=2500
    else:
        МК=10000
tex=open(NAME,'w')
tex.write(str(МК)+'\r')
MAX=Approx(0.0)
MIN=Approx(0.0)
for lk in xrange(МК+1):
    tex.write(str(lk*1.0/МК)+'\r')
    tex.write(str(Approx(lk*1.0/МК))+'\r')
    if Approx(lk*1.0/МК)>MAX:
        MAX=Approx(lk*1.0/МК)
    if Approx(lk*1.0/МК)<MIN:
        MIN=Approx(lk*1.0/МК)
tex.write(str(MAX)+'\r')
tex.write(str(MIN))
tex.close
tt2=time.time()
print "Прошло времени:", tt2-tt1
print "Имя файла",NAME

```

Файл данных «DANNIE2.py».

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

```

```

fs=[0.5679012346, 3.791666667, -6.722222222,\
    -1.659830729, 5.391006667]
qs=[1.0,0.0,5.0,2.0,4.0]
def Q(x):
    return 1.0*x*(1.0-x)
def p(x):
    return 1.0+x**3+x
def fa(x):
    if x<1.0/3:
        return -7.0*x**3-4.0*x-2.0-1.0*x**4
    if x<1.0/2:
        return -.6666666666*x**2-.3333333333-.3333333333*x**3
    if x<2.0/3:
        return 2.833333333*x**2+2.+1.166666667*x+2.*x**3
    if x<3.0/4:
        return -1.166666667*x**2-1.-.8333333333*x-1.*x**3
    if x<4.0/5:
        return -14.*x**4-8.494791667*x**2-6.505208333*x-1.*x**5
    else:
        return 3.033208333*x**2-5.*x**3-3.033208333*x-1.*x**4

```

A.2 Программа для реализации численных экспериментов для математической модели второго порядка с разрывным решением

A.2.1 Программа написанная в пакете Maple

Общие сведения о программе. Программа называется Rasriv_Final.mw.

Для работы программы необходим пакет символьной математики Maple.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 2 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 44744 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения при-

ближенного решения модели малых деформаций струны по заданным параметрам модели.

Структура программы. В начале задаются параметры модели и количество интервалов на которые разбивается отрезок. Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Строится график приближенного решения.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. Для начала работы необходимо запустить Maple, открыть файл с именем Rasriv_Final.mw. Затем задаем параметры модели: $\mu(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На рисунке А.5 представлена рабочая область файла (после открытия файла и задания коэффициентов модели).

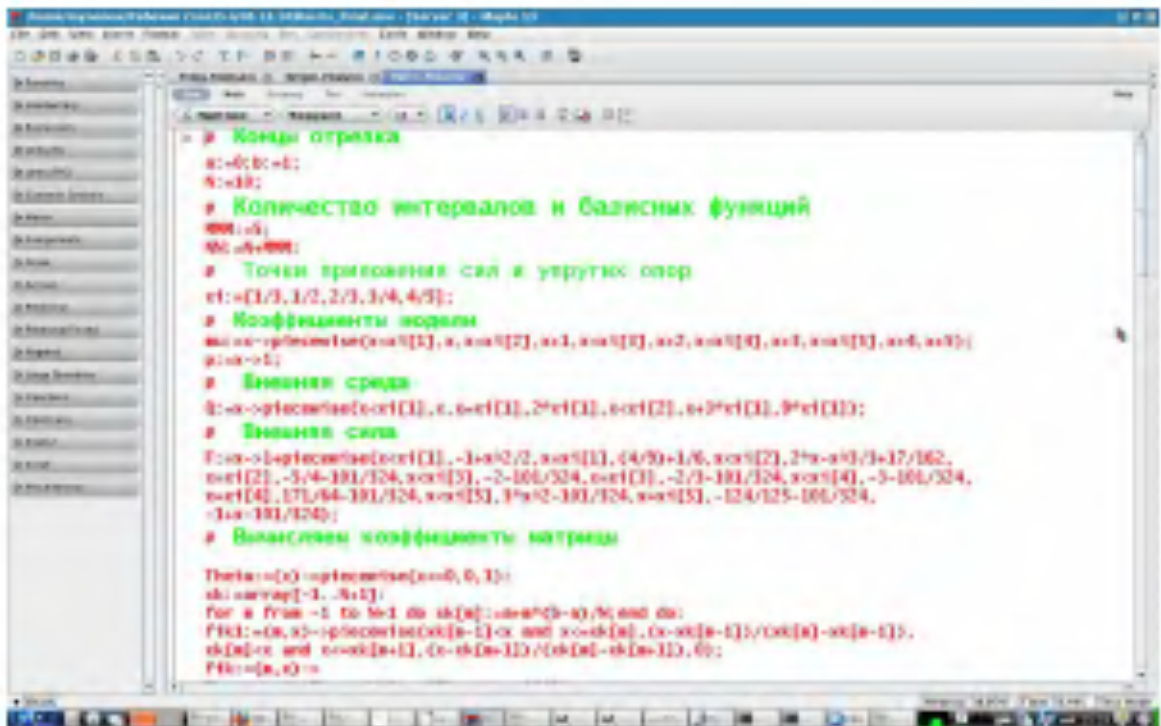


Рисунок А.5. Вид программы на Maple до запуска

На выходе будет получен график приближенного решения модели. После задания параметров достаточно нажать <Enter>. Результат работы программы представлен (для заданной модели при разбиении на $n = 10$ равных частей) на рисунке А.6.

Концы отрезка

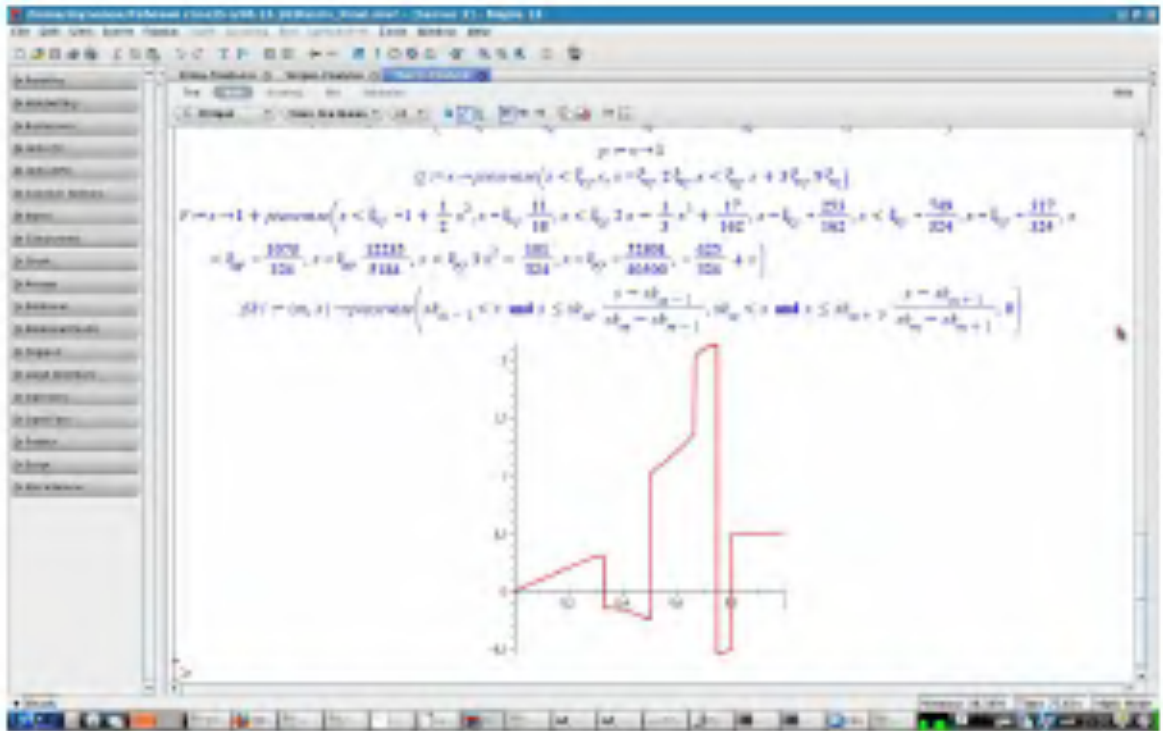


Рисунок А.6. Вид программы на Maple после запуска

```

a:=0;b:=1;
N:=10;
# Количество интервалов и базисных функций
MMM:=5;
NN:=N+MMM;
# Точки приложения сил и упругих опор
xi:=[1/3,1/2,2/3,3/4,4/5];
# Коэффициенты модели
mu:=x->piecewise(x<xi[1],x,x<xi[2],x+1,x<xi[3],
x+2,x<xi[4],x+3,x<xi[5],x+4,x+5);
p:=x->1;
# Внешняя среда
Q:=x->piecewise(x<xi[1],x,x=xi[1],2*xi[1],
x<xi[2],x+3*xi[1],9*xi[1]);
# Внешняя сила
F:=x->1+piecewise(x<xi[1],-1+x^2/2,x=xi[1],(4/9)+1/6,
x<xi[2],2*x-x^3/3+17/162,
x=xi[2],-5/4-101/324,x<xi[3],-2-101/324,x=xi[3],
-2/3-101/324,x<xi[4],-3-101/324,

```

```

x=xi[4],171/64-101/324,x<xi[5],3*x^2-101/324,
x=xi[5],-124/125-101/324,
-1+x-101/324);
# Вычисляем коэффициенты матрицы

Theta:=(x)->piecewise(x<=0,0,1):
xk:=array[-1..N+1]:
for m from -1 to N+1 do xk[m]:=a+m*(b-a)/N;end do:
fik1:=(m,x)->piecewise(xk[m-1]<x and x<=xk[m],
(x-xk[m-1])/(xk[m]-xk[m-1]),
xk[m]<x and x<=xk[m+1],(x-xk[m+1])/(xk[m]-xk[m+1]),0);
fik:=(m,x)->
Theta(m-N)*Theta(N+2-m)*Theta(x-xi[1])+
Theta(m-N-1)*Theta(N+3-m)*Theta(x-xi[2])+
Theta(m-N-2)*Theta(N+4-m)*Theta(x-xi[3])+
Theta(m-N-3)*Theta(N+5-m)*Theta(x-xi[4])+
Theta(m-N-4)*Theta(N+6-m)*Theta(x-xi[5])+
Theta(N+1-m)*fik1(m,x):

A:=matrix(NN,NN,0):
ff:=vector(NN):
with(linalg):with(plots):

for m from 1 to NN do
dfk1:=diff(fik(m,x),x):
for nm from m to NN do
dfk2:=diff(fik(nm,x),x):
A[m,nm]:=int(p(x)*dfk1*dfk2,x=a..b)+
int(fik(m,x)*fik(nm,x)*diff(Q(x),x),x=a..b):
SS:=0:
for i from 1 to MMM do
SS:=SS+p(xi[i])*(limit(fik(m,x),x=xi[i],right)-
limit(fik(m,x),x=xi[i],left))*
(limit(fik(nm,x),x=xi[i],right)-

```

```

limit(fik(nm,x),x=xi[i],left))/
      (limit(mu(x),x=xi[i],right)-
limit(mu(x),x=xi[i],left)))+
      limit(fik(m,x),x=xi[i],left)*
limit(fik(nm,x),x=xi[i],left)*
      (Q(xi[i])-limit(Q(x),x=xi[i],left))+
      limit(fik(m,x),x=xi[i],right)*
limit(fik(nm,x),x=xi[i],right)*
      (limit(Q(x),x=xi[i],right)-Q(xi[i]))):
end do:
  A[m,nm]:=A[m,nm]+SS:
  if m<>nm then A[nm,m]:=A[m,nm]: end if:
end do:
end do:

for m from 1 to NN do
  ff[m]:=int(diff(F(x),x)*fik(m,x),x=a..b):
  for i from 1 to MMM do
    ff[m]:=ff[m]+limit(fik(m,x),x=xi[i],left)*
(F(xi[i])-limit(F(x),x=xi[i],left))+
      limit(fik(m,x),x=xi[i],right)*
(limit(F(x),x=xi[i],right)-F(xi[i]))):
  end do:
end do:

# Решаем систему

evalm(A):
evalm(ff):
uu:=linsolve(A,ff):

# Приближенное решение
z:=x->sum(uu[kk]*fik(kk,x),kk=1..NN):

```

```
plot(z(x), x = a .. b, thickness = 2, numpoints = 100);
```

A.2.2 Программа, написанная на Python

Общие сведения о программе. Программа называется Razriv.Final.in.Disser.py.

Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 10823 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций струны по заданным параметрам модели.

Структура программы. В модуле, с названием DANNIE2R.py, задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт Razriv.Final.in.Disser.py, который спрашивает количество интервалов на которые разбивается отрезок и необходимое действие (построить график приближенного решения, вывести таблицу значений, записать значения в tex-файл, со структурой L^AT_EX, вычислить значение приближенного решения в конкретной точке, записать значения приближенного решения в текстовый файл). Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Осуществляется выбранное действие.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. До запуска программы необходимо задать параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i , которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE2R.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график приближенного решения модели, либо таблица приближенного решения, которая может быть выведена на монитор или записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем Razriv.Final.in.Disser.py.

На рисунках A.7 и A.8 представлена работающая программа на Python'e до задания n и выбора вывода результата соответственно.

«Основная программа».

```
#!/usr/bin/env python
```

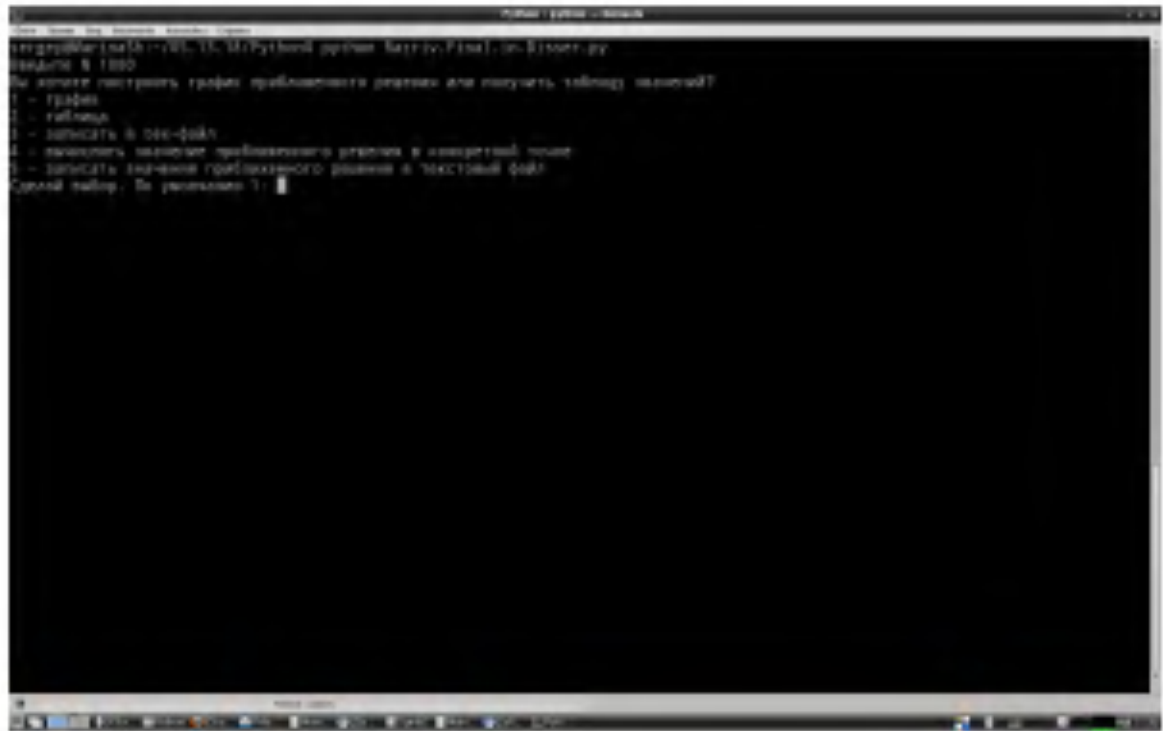


Рисунок А.7. Запущенная программа на Python'e

```
# -*- coding: UTF-8 -*-

import math
import copy
import time
import pylab
from matplotlib import mlab
import DANNIE2R
from decimal import *
getcontext().prec=100
a=aa = 0.0
b = 1.0
VV=True
while VV:
    try:
        NN=input("Введите N ")
        if (not(NN>0)) or NN!=int(NN):
            print "Число должно быть натуральным"
        else:
```

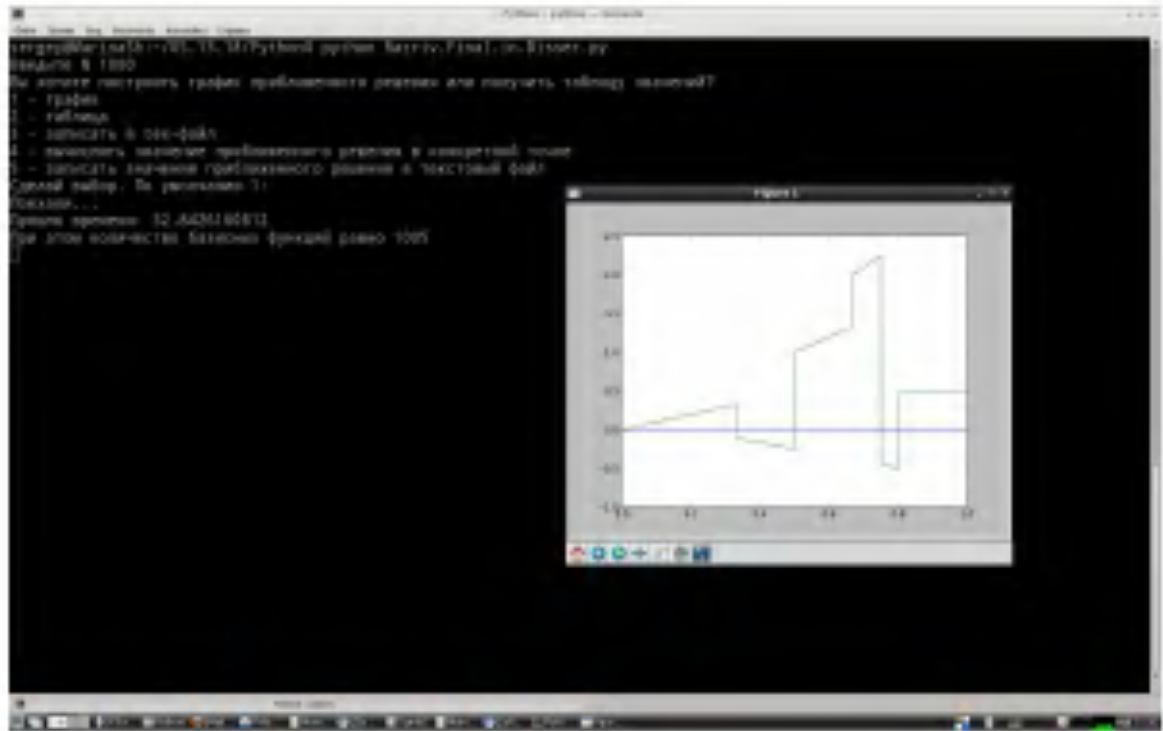


Рисунок А.8. Запущенная программа на Python'e после задания n

```

VV=not (NN>0)
except:
    print "Некорректное число"
M=5
print "Вы хотите построить график \
приближенного решения или получить таблицу значений?"
print "1 - график"
print "2 - таблица"
print "3 - записать в тек-файл"
print "4 - вычислить значение \
приближенного решения в конкретной точке"
print "5 - записать значения приближенного \
решения в текстовый файл"
Vibor=1
VV=True
while VV:
    try:
        Vibor=input("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
    except:

```

```

    Vibor=1
    VV=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3\
        or Vibor==4 or Vibor==5)
if Vibor==5:
    Vv=True
    while Vv:
        print "Введите имя файла"
        print "По умолчанию имя файла - RESULT.txt"
        print "Если такой файл существует, он будет заменен"
        try:
            NAME=raw_input()
            if NAME=='':
                NAME='RESULT.txt'
            Vv=False
        except:
            NAME='RESULT.txt'
if Vibor==3:
    Vv=True
    while Vv:
        print "Введите имя файла"
        print "По умолчанию имя файла - RESULT.tex"
        print "Если такой файл существует, он будет заменен"
        try:
            NAME=raw_input()
            if NAME=='':
                NAME='RESULT.tex'
            Vv=False
        except:
            NAME='RESULT.tex'
print "Поехали..."
tt1=time.time()
N = NN+M
xk=[a+i*(b-a)/NN for i in xrange(0,NN+2)]
xii=[1.0/3, 1.0/2, 2.0/3, 3.0/4, 4.0/5]

```

```

# Сосредоточенные силы
fs=DANNIE2R.fs
# Упругие опоры
qs=DANNIE2R.qs
# Коэффициенты уравнения
Q=DANNIE2R.Q
p=DANNIE2R.p
# Задаем правую часть
fa=DANNIE2R.fa
pxi=DANNIE2R.pxi
xk=[a+i*(b-a)/NN for i in xrange(0,NN+2)]
Hj=1
def fik(m,x):
    if (xk[m-1]<x) and (x<= xk[m]):
        return 1.0*(x-xk[m-1])/(Hj)
    elif (xk[m]<x) and (x<=xk[m+1]):
        return 1.0*(x-xk[m+1])/(-1.0*Hj)
    else:
        return 0.0
def fikk(m,x):
    if m<=NN:
        return 1.0*fik(m,x)*NN
    else:
        return 1.0*theta(x-xii[m-NN-1])
def theta(x):
    if x<=0:
        return 0.0
    else:
        return 1.0
def thetaa(x):
    if x<0:
        return 0.0
    else:
        return 1.0

```



```

# Интервал изменения переменной по оси X
xmin = -0.5
xmax = 1.0
# Шаг между точками
if N>=1000:
    dx = 1.0/(10*NN)
elif N>=100:
    dx = 1.0/(NN**2)
else:
    dx = 1.0/(NN**4)
x=[]
A=[]
for j in xrange(0,N):
    A+=[[0 for i in xrange(0,N)]]
# Вычисляем коэффициенты матрицы A
for m in range(1,N+1):
    for n in range(1,m+2):
        if m<NN and m==n-1:
            b = xk[m+1]
            a = xk[m]
            c,d=scipy.integrate.quad(lambda x:-1.0*p(x),a,b)
            cc,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(x-xk[m])*(xk[m+1]-x),a,b)
            ccc=0
            for ix in xrange(0,5):
                ccc+=float(qs[ix][0]+qs[ix][1])*\
fik(m,float(xii[ix]))*fik(n,float(xii[ix]))
            c = c+cc+ccc
            A[m][m-1]=c*NN**2
            A[m-1][m]=c*NN**2
        elif m<NN and m==n:
            c,d=scipy.integrate.quad(lambda x:\
p(x),xk[m-1],xk[m+1]) # Производные
            cc,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\

```

```

Q(x)*(x-xk[m-1])**2,xk[m-1],xk[m])
    cc1,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(x-xk[m+1])**2,xk[m],xk[m+1])
    ccc=0
    for ix in xrange(0,5):
        ccc+=float(qs[ix][0]+qs[ix][1])*\
fik(m,float(xii[ix]))*fik(n,float(xii[ix]))
    c = c+cc+cc1+ccc
    A[m-1][m-1]=c*NN**2
elif m==NN and n==NN:
    c,d=scipy.integrate.quad(lambda x:p(x),xk[m-1],1)
    cc,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(x-xk[m-1])**2,xk[m-1],1)
    ccc=0
    for ix in xrange(0,5):
        ccc+=float(qs[ix][0]+qs[ix][1])*\
fik(m,float(xii[ix]))*fik(n,float(xii[ix]))
    c = c+cc+ccc
    A[m-1][m-1]=c*NN**2
elif m>NN and n<=NN:
    a=0.0
    b=1.0
    c=0.0
    if xk[n+1]<=xii[m-NN-1]:
        cc=0
        cc1=0
    elif xk[n]<=xii[m-NN-1] and xii[m-NN-1]<xk[n+1]:
        cc,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(xk[n+1]-x),xii[m-NN-1],xk[n+1])
    elif xk[n-1]<=xii[m-NN-1] and xii[m-NN-1]<xk[n]:
        cc,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(x-xk[n-1]),xii[m-NN-1],xk[n])
        cc1,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(xk[n+1]-x),xk[n],xk[n+1])

```

```

else:
    cc,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(x-xk[n-1]),xk[n-1],xk[n])
    cc1,dd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
Q(x)*(xk[n+1]-x),xk[n],xk[n+1])
    ccc=0
    for ix in xrange(0,5):
        ccc+=qs[ix][0]*fik(n,xii[ix])*\
theta(xii[ix]-xii[m-NN-1])\
        +qs[ix][1]*fik(n,xii[ix])*\
thetaa(xii[ix]-xii[m-NN-1])
        A[m-1][n-1]=(c+cc+cc1+ccc)*NN
        A[n-1][m-1]=A[m-1][n-1]
    elif m>NN and n>NN and n<=N:
        a=0.0
        b=1.0
        c=pxi[m-NN-1] if m==n else 0.0
        a=max(xii[n-NN-1],xii[m-NN-1])
        cc,dd=scipy.integrate.quad(lambda x: Q(x),a,1.0)
        ccc=0
        for ix in xrange(0,5):
            ccc+=qs[ix][0]*theta(xii[ix]-xii[m-NN-1])*\
theta(xii[ix]-xii[n-NN-1])+\
qs[ix][1]*thetaa(xii[ix]-xii[m-NN-1])*\
thetaa(xii[ix]-xii[n-NN-1])
            A[m-1][n-1]= c+cc+ccc
            A[n-1][m-1]=A[m-1][n-1]
# правая часть
ffff=[]
ffff+=[0.0 for i in xrange(0,N)]
for i in xrange(1,N+1):
    dfd=0.0
    cdf=0.0
    if i<NN:

```

```

dfd=0.0
cdf=0.0
for ii in range(0,5):
    dfd+=(fs[ii][0]+fs[ii][1])*fik(i,xii[ii])
    az=xk[i-1]
    bz=xk[i+1]
    cfd,dfhd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
fa(x)*(x-xk[i-1]),xk[i-1],xk[i])
    cfd1,fhd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
fa(x)*(xk[i+1]-x),xk[i],xk[i+1])
    ffff[i-1]=(cfd+cfd1+dfd)*NN
elif i==NN:
    for ii in range(0,5):
        dfd+=(fs[ii][0]+fs[ii][1])*fik(i,xii[ii])
        cfd,dfhd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
fa(x)*(x-xk[i-1]),xk[i-1],xk[i])
        ffff[i-1]=(cfd+dfd)*NN
else:
    cfd=0.0
    a=0.0
    b=1.0
    cfd,dfhd=scipy.integrate.quad(lambda x:\
fa(x),xii[i-NN-1],b)
    for ix in xrange(0,5):
        cfd+=fs[ix][0]*theta(xii[ix]-xii[i-NN-1])+
fs[ix][1]*thetaa(xii[ix]-xii[i-NN-1])*
thetaa(xii[ix]-xii[i-NN-1])
    ffff[i-1]=cfd
B=A
gf=ffff
xx=[0 for i in xrange(N)]
for k in xrange(N):
    #Прямой ход
    gf[k]=gf[k]/B[k][k]

```

```

for j in xrange(N-1,k-1,-1):
    B[k][j]=B[k][j]/B[k][k]
for j in xrange(k+1,N):
    if B[j][k]!=0:
        r=B[j][k]
        for i in xrange(k,N):
            B[j][i]=B[j][i]-r*B[k][i]
        gf[j]=gf[j]-r*gf[k];
for k in xrange(N-1,-1,-1):
    #обратный ход
    r=0
    for j in xrange(k+1,N):
        g=B[k][j]*xx[j]
        r=r+g
    xx[k]=(gf[k]-r)/B[k][k]
# Конец алгоритма
def pr(x):
    qaql=0.0
    for m in xrange(1,N+1):
        qaql+=float(str(xx[m-1]))*fikk(m,x)
    return qaql
if Vibor==1:
    xlist = mlab.frange (0, 1, dx)
    ylist2 = [pr(x) for x in xlist]
    ylist1 = [0 for x in xlist]
    pylab.plot (xlist, ylist1)
    pylab.plot (xlist, ylist2)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом количество базисных функций равно", N
    pylab.show()
elif Vibor==2:
    for lk in xrange(NN):
        print "x=", aa+lk*1.0/NN, "u=", pr(aa+lk*1.0/NN)

```

```

print "x=", b, "u=", pr(b)
tt2=time.time()
print "Прошло времени:", tt2-tt1
print "При этом количество базисных функций равно", N
elif Vibor==3:
    tex=open(NAME,'w')
    tex.write('\documentclass[a4paper,10pt]{article}\r\
\\usepackage[utf8]{inputenc}\r')
    tex.write('\usepackage[russian]{babel}\r\
\\usepackage{longtable}\r\\begin{document}\r')
    tex.write('\begin{longtable}{|l|l|}\r')
    tex.write('\hline\r')
    for lk in xrange(N):
        tex.write('$')
        tex.write(str(aa+lk*1.0/N))
        tex.write('$')
        tex.write(' & ')
        tex.write('$')
        tex.write(str(pr(aa+lk*1.0/N)))
        tex.write('$')
        tex.write('\\\\ \\hline\r')
    tex.write('\end{longtable}\r\\end{document}')
    tex.close
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
elif Vibor==4:
    print "Введите число между", a, " и ", b
    print "Выход ENTER"
    try:
        Vibor=True
        while Vibor:
            klkkk=input()
            if klkkk>=a and klkkk<=b:
                print "u(",klkkk,")=",pr(klkkk)

```

```

        else:
            print "Число должно быть между ",a, " и ", b
            print " Хотите еще?"
            print "ENTER - выход"
    except:
        print "До свидания"
elif Vibor==5:
    if N<=10:
        МК=1000
    elif N<=1000:
        МК=2500
    else:
        МК=10000
    tex=open(NAME,'w')
    tex.write(str(МК)+'\r')
    МАХ=pr(0.0)
    МИН=pr(0.0)
    for lk in xrange(МК+1):
        tex.write(str(lk*1.0/МК)+'\r')
        tex.write(str(pr(lk*1.0/МК))+'\r')
        if pr(lk*1.0/МК)>МАХ:
            МАХ=pr(lk*1.0/МК)
        if pr(lk*1.0/МК)<МИН:
            МИН=pr(lk*1.0/МК)
    tex.write(str(МАХ)+'\r')
    tex.write(str(МИН))
    tex.close
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "Имя файла",NAME

```

Файл данных «DANNIE2R.py».

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

```

```

fs=[[14.0/9,4.0/27], [-21.0/8,-3/4.0], [4/3.0,-7/3.0],\
    [363/64.0,-63/64.0], [-364/125.0,99/125.0]]
qs=[[1/3.0,2/3.0], [3/2.0,0.0], [0.0,0.0], [0.0,0.0], [0.0,0.0]]
def fa(x):
    if x<=1.0/3:
        return 1.0*x
    if x<=1.0/2:
        return (2.0-1.0*x**2)
    if x<=2.0/3:
        return 0
    if x<=3.0/4:
        return 0
    if x<=4.0/5:
        return 6.0*x
    else:
        return 1.0
def Q(x):
    if x<0.5:
        return 1.0
    else:
        return 0.0
def p(x):
    return 1.0
pxi=[1.0,1.0,1.0,1.0,1.0]

```

А.3 Программа для реализации численных экспериментов для математической модели четвертого порядка

Общие сведения о программе. Программа называется Stergen_Finish.mw.

Для работы программы необходим пакет символьной математики Maple.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 2 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 49806 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций струны по заданным параметрам модели.

Структура программы. В начале задаются параметры модели и количество интервалов на которые разбивается отрезок. Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Строится график приближенного решения.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. Для начала работы необходимо запустить Maple, открыть файл с именем Stergen_Finish.mw. Затем задаем параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На рисунке А.9 представлена рабочая область файла (после открытия файла и задания коэффициентов модели).

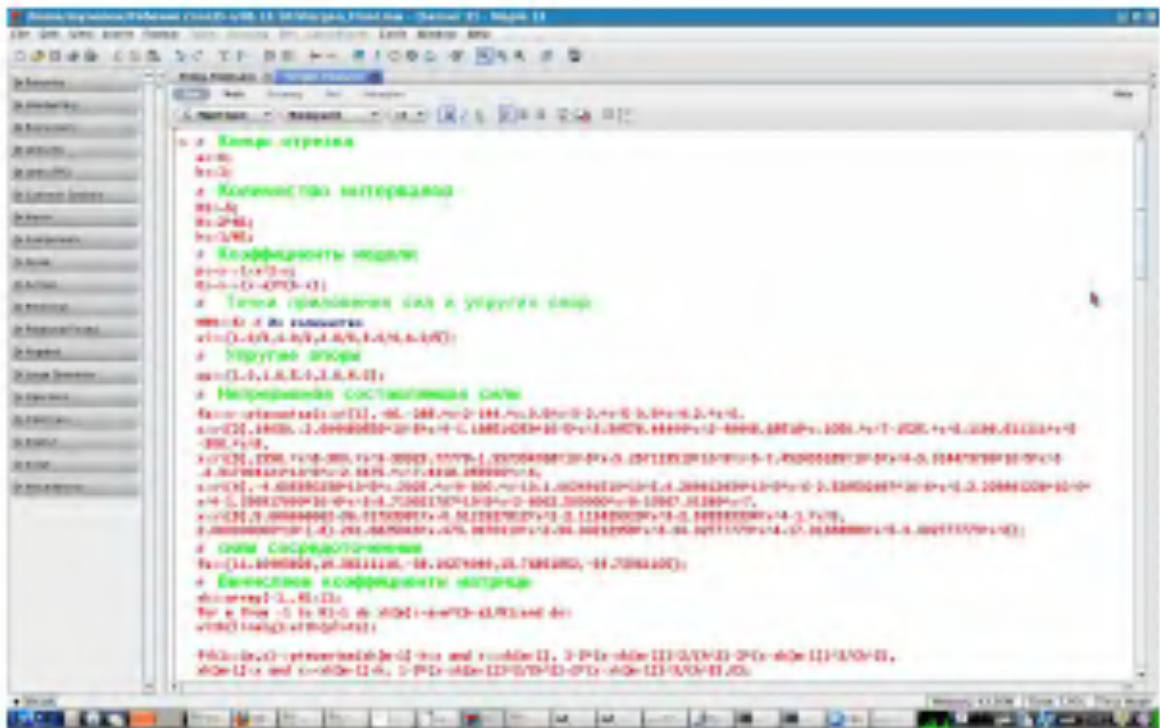


Рисунок А.9. Вид программы на Maple до запуска

На выходе будет получен график приближенного решения модели. После задания параметров достаточно нажать <Enter>. Результат работы программы представлен (для заданной модели при разбиении на $n = 10$ равных частей) на рисунке А.10.

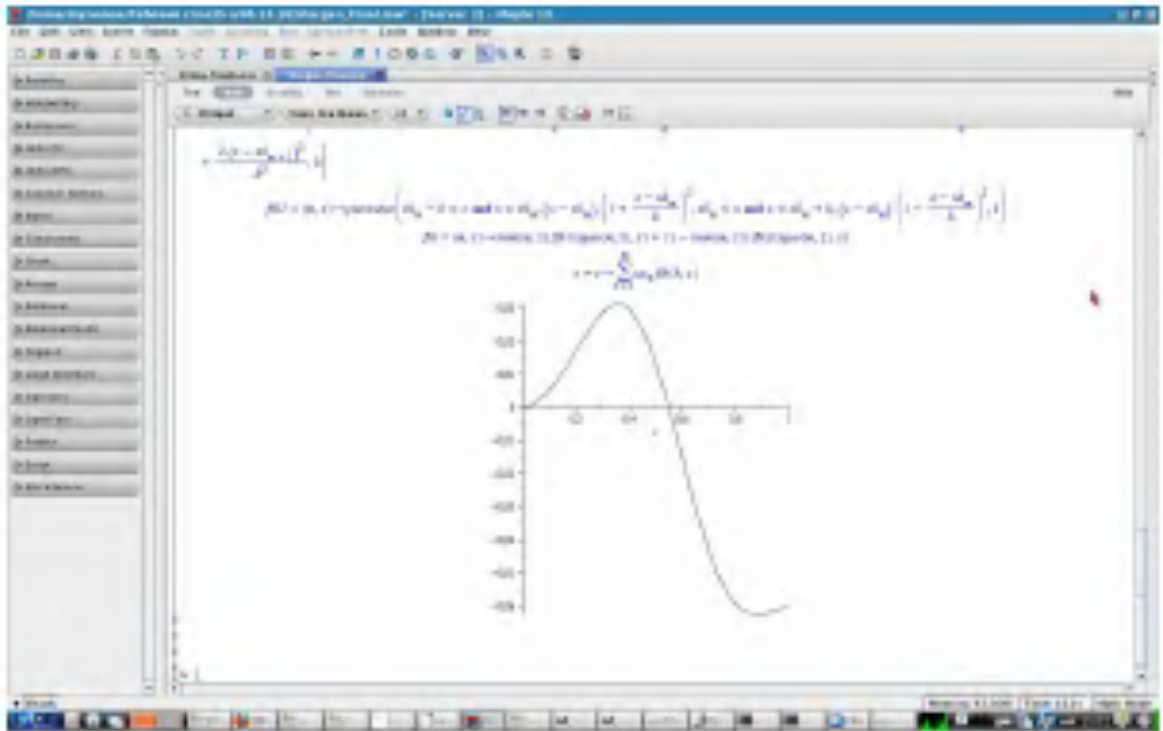


Рисунок А.10. Вид программы на Maple после запуска

А.3.1 Программа написанная в пакете Maple

```

# Концы отрезка
a:=0;
b:=1;
# Количество интервалов
N1:=5;
N:=2*N1;
h:=1/N1;
# Коэффициенты модели
p:=x->1+x^2+x;
Q:=x->(x-a)*(b-x);
# Точки приложения сил и упругих опор
MMM:=5: # Их количество
xi:=[1.0/3,1.0/2,2.0/3,3.0/4,4.0/5];
# Упругие опоры
qs:=[1.0,1.0,5.0,2.0,4.0];
# Непрерывная составляющая силы
fa:=x->piecewise(x<xi[1],-46.-288.*x^2-144.*x+

```

```

0.5*x^3-2.*x^5-0.5*x^4+2.*x^6,
x<xi [2],14030.+2.694480556*10^5*x^4
-1.198514259*10^5*x^3+39578.44444*x^2-49448.68518*x+
1050.*x^7-1525.*x^6+1198.611111*x^5-300.*x^8,
x<xi [3],1550.*x^8-300.*x^9-38929.77778+
1.557334768*10^5*x+5.257113519*10^5*x^5-
7.452435185*10^5*x^4+3.914473796*10^5*x^3-
2.317004121*10^5*x^2-3475.*x^7+4418.055556*x^6,
x<xi [4],-4.605830238*10^5*x+2025.*x^9-300.*x^10+
1.002491510*10^5+9.289812934*10^5*x^6-
2.328502897*10^6*x^5+2.229891228*10^6*x^4-
1.336917990*10^6*x^3+8.710021787*10^5*x^2-
6062.500000*x^8+10567.01389*x^7,
x<xi [5],5.666666662+36.01793981*x+0.5121527812*x^2-
2.113425929*x^3+2.583333334*x^4-1.*x^5,
2.000000000*10^(-8)-241.6825043*x+473.0970410*x^2+
34.00212958*x^3-34.02777773*x^4+17.01388886*x^5-
3.40277773*x^6);
# Силы сосредоточенные
fs:=[11.10493826,19.36111110,-38.19274049,
13.76851852,-54.73061105];
# Вычисляем коэффициенты матрицы
xk:=array[-1..N1+1]:
for m from -1 to N1+1 do xk[m]:=a+m*(b-a)/N1;end do:
with(linalg):with(plots):

fik1:=(m,x)->piecewise(xk[m+1]-h<x and x<=xk[m+1],
1-3*(x-xk[m+1])^2/(h^2)-2*(x-xk[m+1])^3/(h^3),
xk[m+1]<x and x<=xk[m+1]+h,
1-3*(x-xk[m+1])^2/(h^2)+2*(x-xk[m+1])^3/(h^3),0);

fik2:=(m,x)->piecewise(xk[m]-h<x and x<xk[m],
(x-xk[m])*(1+(x-xk[m])/h)^2,
xk[m]<x and x<xk[m]+h, (x-xk[m])*(1-(x-xk[m])/h)^2,0);

```

```

fik:=(m,x)->irem(m,2)*fik1(iquo(m,2),x)+
(1-irem(m,2))*fik2(iquo(m,2),x);

A:=matrix(N,N,0):
ff:=vector(N):
for m from 1 to N do
SS:=0:
for i from 1 to MMM do SS:=SS+fs[i]*fik(m,xi[i]): end do:
ff[m]:=evalf(int(fa(x)*fik(m,x),x=a..b))+SS:
end do:

for m from 1 to N do ff[m];end do:

for m from 1 to N do

for nm from 1 to N do
dfk1:=diff(fik(m,x),x$2);dfk2:=diff(fik(nm,x),x$2):
SS:=0;
for i from 1 to MMM do
SS:=SS+qs[i]*fik(m,xi[i])*fik(nm,xi[i]):
end do;
A[m,nm]:=int(Q(x)*fik(m,x)*fik(nm,x),x=a..b)+SS;
A[m,nm]:=A[m,nm]+int(p(x)*dfk1*dfk2, x = a .. b);

# A[nm,m]:=A[m,nm]:
end do;
end do;
evalm(A):evalm(ff):uu:=linsolve(A,ff):matrix(A):
z:=x->sum(uu[k]*fik(k,x),k=1..N);
plot(z(x),x=a..b,thickness=1,color=black);

```

А.3.2 Программа написанная на Python

Общие сведения о программе. Программа называется Stergen.Final.in.Disser.py.

Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 Гб оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 13185 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций струны по заданным параметрам модели.

Структура программы. В модуле, с названием DANNIE4d.py, задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт Stergen.Final.in.Disser.py, который спрашивает количество интервалов на которые разбивается отрезок и необходимое действие (построить график приближенного решения, вывести таблицу значений, записать значения в tex-файл, со структурой L^AT_EX, вычислить значение приближенного решения в конкретной точке, записать значения приближенного решения в текстовый файл). Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Осуществляется выбранное действие.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. До запуска программы необходимо задать параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i , которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE4d.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график приближенного решения модели, либо таблица приближенного решения, которая может быть выведена на монитор или записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем Stergen.Final.in.Disser.py.

На рисунках А.11 и А.12 представлена работающая программа на Python'е до задания n и выбора вывода результата соответственно.

«Основная программа».

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
```

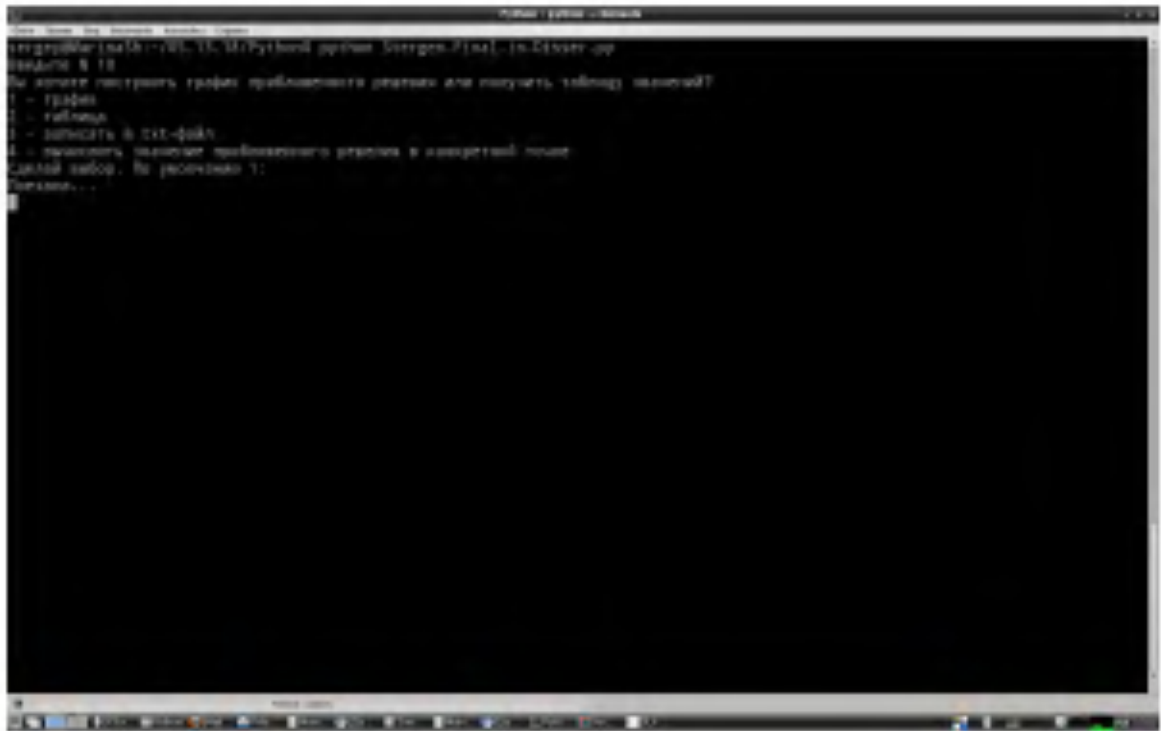


Рисунок А.11. Запущенная программа на Python'e

```
import math
import scipy.special
import copy
import INTMYNE3
import DANNIE4d as DANNIE4f
import time
import pylab
from matplotlib import mlab
import Nn
import INT

from decimal import *
setcontext(ExtendedContext)
a = 0.0
b = 1.0
N=5
VV=True
hile VV:
    try:
```

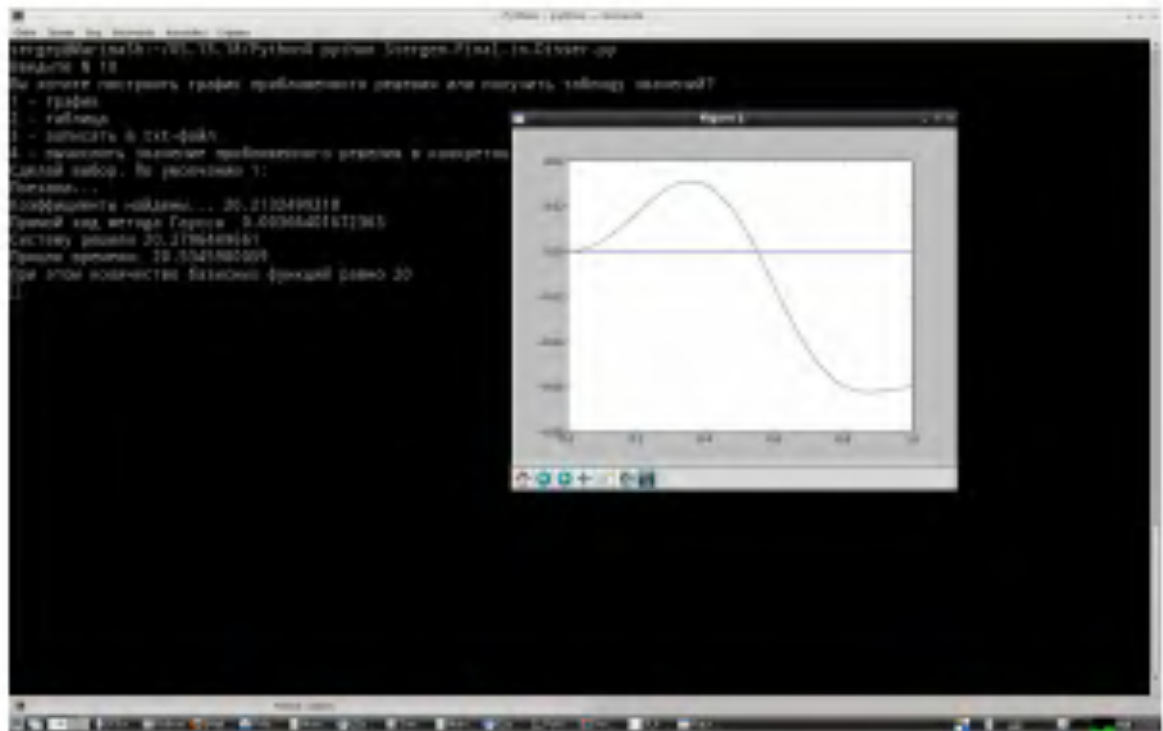


Рисунок А.12. Запущенная программа на Python'e после задания n

```

N=input("Введите N ")
if (not(N>0)) or N!=int(N):
    print "Число должно быть натуральным"
else:
    VV=not (N>0)
except:
    print "Некорректное число"
NN=2*N
N,NN=NN,N
Ss=' '* (100*N)
M = 5
print "Вы хотите построить график приближенного\
    решения или получить таблицу значений?"
print "1 - график"
print "2 - таблица"
print "3 - записать в txt-файл"
print "4 - вычислить значение приближенного \
    решения в конкретной точке"
Vibor=3

```

```

VW=True
while VW:
    try:
        Vibor=input("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
    except:
        Vibor=1
    VW=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3 or Vibor==4)
VW=1
tt1=time.time()
Vv=True
while Vv:
    if Vibor==3:
        print "Введите имя файла"
        print "По умолчанию имя файла - RESULT.txt"
        print "Если такой файл существует, он будет заменен"
        try:
            NAME=raw_input()
            if NAME=='':
                NAME='RESULT.txt'
            Vv=False
        except:
            NAME='RESULT.txt'
    else:
        Vv=0
print "Поехали..."
xii=[Decimal(1.0)/3, Decimal(1.0)/2, Decimal(2.0)/3,\
Decimal(3.0)/4, cdDecimal(4.0)/5]
xk=[]
h = (b-a)/NN
xk=[a+i*h for i in xrange(NN+1)]
q=DANNIE4f.q
p=DANNIE4f.p
f=DANNIE4f.f
fs=DANNIE4f.fs

```



```

qs=DANNIE4f.qs
# Базисная функция
def fik(m,x):
    m1 = (m-1)//2 +1
    if m % 2 == 1 and xk[m1]-h<=x and x<=xk[m1]:
        return 1-3*((x-xk[m1])/h)**2-2*((x-xk[m1])/h)**3
    elif m % 2 == 1 and xk[m1]<=x and x<=xk[m1]+h:
        return 1-3*((x-xk[m1])/h)**2+2*((x-xk[m1])/h)**3
    elif m % 2 == 0 and xk[m1]-h<=x and x<=xk[m1]:
        return (x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2
    elif m % 2 == 0 and xk[m1]<=x and x<=xk[m1]+h:
        return (x-xk[m1])*(1-(x-xk[m1])/h)**2
    else:
        return 0
# Конец ввода базисных функций
# Интервал изменения переменной по оси X
xmin = 0.0
xmax = 1.0
# Шаг между точками
if N>=1000:
    dx = 1.0/(10*N)
elif N>=100:
    dx = 1.0/(N**2)
elif N<=5:
    dx=0.001
else:
    dx = 1.0/(NN**3)
x=[]
A=[]
for j in xrange(0,N):
    A+=[[0 for i in xrange(0,N)]]
xii=[Decimal(str(1.0)+Ss)/3, Decimal(str(1.0)+Ss)/2,\
    Decimal(str(2.0)+Ss)/3, Decimal(str(3.0)+Ss)/4, \
    Decimal(str(4.0)+Ss)/5]

```

```

fss=[]
for i in xrange (M):
    fss+=[Nn.RESULT(fs[i])]
qss=[]
for i in xrange (M):
    qss+=[Nn.RESULT(qs[i])]
def Skach(m,n):
    global Ss
    S=0
    for ix in xrange(M):
        S+=Decimal(Nn.RESULT(fik(m,float(xii[ix]))*\
            fik(n,float(xii[ix]))))*qss[ix]
    return S
def Ska(x):
    return Decimal(Nn.RESULT(x))
H=Decimal(Nn.RESULT(h))
ffff=[0 for m in xrange(N)]
for m in xrange(1,N+1):
    m1=(m-1)//2+1
    if m % 2 == 1 and m<=2*NN-2:
        A[m-1][m-1]=(36/(H**2))*INTMYNE3.INT(NN,\
            lambda t:p(xk[m1]+t*h)/h,\
            lambda t:1+2*t,\
            lambda t:1+2*t,-1,0)
        A[m-1][m-1]+=(36/(H**4))*INTMYNE3.INT(NN,\
            lambda x:p(x),lambda x:(1-2*(x-xk[m1])/h),\
            lambda x:(1-2*(x-xk[m1])/h),xk[m1],xk[m1]+h)
        A[m-1][m-1]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
            lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
                2*((x-xk[m1])/h)**3),\
            lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
                2*((x-xk[m1])/h)**3),xk[m1]-h,xk[m1])
        A[m-1][m-1]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
            lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2+\

```

```

                2*((x-xk[m1])/h)**3), \
lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2+\
                2*((x-xk[m1])/h)**3), xk[m1], xk[m1]+h)
A[m-1][m-1]+=Skach(m,m)
A[m-1][m]=(-12/(H**3))*INTMYNE3.INT(NN, lambda x:p(x), \
lambda x:(1+2*(x-xk[m1])/h), \
lambda x:(3*(x-xk[m1])/h+2), xk[m1]-h, xk[m1])
A[m-1][m]+=(-12/(H**3))*INTMYNE3.INT(NN, lambda x:p(x), \
lambda x:(1-2*(x-xk[m1])/h), \
lambda x:(3*(x-xk[m1])/h-2), xk[m1], xk[m1]+h)
A[m-1][m]+=INTMYNE3.INT(NN, lambda x:q(x), \
lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
2*((x-xk[m1])/h)**3), \
lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2, \
xk[m1]-h, xk[m1])
A[m-1][m]+=INTMYNE3.INT(NN, lambda x:q(x), \
lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2+\
2*((x-xk[m1])/h)**3), \
lambda x:(x-xk[m1])*(1-(x-xk[m1])/h)**2, \
xk[m1], xk[m1]+h)
A[m-1][m]+=Skach(m,m+1)
A[m][m-1]=A[m-1][m]
A[m-1][m+1]=(-36/(H**4))*INTMYNE3.INT(NN, lambda x:p(x), \
lambda x:(1-2*(x-xk[m1])/h), \
lambda x:(1-2*(x-xk[m1])/h), xk[m1], xk[m1]+h)
A[m-1][m+1]+=INTMYNE3.INT(NN, lambda x:q(x), \
lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2+\
2*((x-xk[m1])/h)**3), \
lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h-1)**2-\
2*((x-xk[m1])/h-1)**3), xk[m1], xk[m1]+h)
A[m-1][m+1]+=Skach(m,m+2)
A[m+1][m-1]=A[m-1][m+1]
A[m-1][m+2]=(-12/(H**3))*INTMYNE3.INT(NN, lambda x:p(x), \
lambda x:(1-2*(x-xk[m1])/h), \

```

```

        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h-1),xk[m1],xk[m1]+h)
A[m-1][m+2]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2+\
        2*((x-xk[m1])/h)**3),\
        lambda x:(x-xk[m1]-h)*((x-xk[m1])/h)**2,\
        xk[m1],xk[m1]+h)
A[m-1][m+2]+=Skach(m,m+3)
A[m+2][m-1]=A[m-1][m+2]
if m % 2 == 0 and m<=2*NN-2:
    A[m-1][m-1]=(4/(H**2))*INTMYNE3.INT(NN,lambda x:p(x),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h+2),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h+2),xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m-1]+=(4/(H**2))*INTMYNE3.INT(NN,lambda x:p(x),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h-2),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h-2),xk[m1],xk[m1]+h)
    A[m-1][m-1]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2,\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2,\
        xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m-1]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1-(x-xk[m1])/h)**2,\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1-(x-xk[m1])/h)**2,\
        xk[m1],xk[m1]+h)
    A[m-1][m-1]+=Skach(m,m)
    A[m-1][m]=(12/(H**3))*INTMYNE3.INT(NN,lambda x:p(x),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h-2),\
        lambda x:(1-2*(x-xk[m1])/h),xk[m1],xk[m1]+h)
    A[m-1][m]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1-(x-xk[m1])/h)**2,\
        lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h-1)**2-\
        2*((x-xk[m1])/h-1)**3),xk[m1],xk[m1]+h)
    A[m-1][m]+=Skach(m,m+1)
    A[m][m-1]=A[m-1][m]
    A[m-1][m+1]=(4/(H**2))*INTMYNE3.INT(NN,lambda x:p(x),\

```

```

        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h-2),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h-1),xk[m1],xk[m1]+h)
A[m-1][m+1]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1-(x-xk[m1])/h)**2,\
        lambda x:(x-xk[m1]-h)*((x-xk[m1])/h)**2,\
        xk[m1],xk[m1]+h)
A[m-1][m+1]+=Skach(m,m+2)
A[m+1][m-1]=A[m-1][m+1]
if m ==N-1:
    A[m-1][m-1]=(36/(H**4))*INTMYNE3.INT(NN,lambda x:p(x),\
        lambda x:(1+2*(x-xk[m1])/h),\
        lambda x:(1+2*(x-xk[m1])/h),xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m-1]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
        2*((x-xk[m1])/h)**3),\
        lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
        2*((x-xk[m1])/h)**3),xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m-1]+=Skach(m,m)
    A[m-1][m]=(-12/(H**3))*INTMYNE3.INT(NN,lambda x:p(x),\
        lambda x:(1+2*(x-xk[m1])/h),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h+2),xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
        2*((x-xk[m1])/h)**3),\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2,\
        xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m]+=Skach(m,m+1)
    A[m][m-1]=A[m-1][m]
if m ==N:
    A[m-1][m-1]=(4/(H**2))*INTMYNE3.INT(NN,lambda x:p(x),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h+2),\
        lambda x:(3*(x-xk[m1])/h+2),xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m-1]+=INTMYNE3.INT(NN,lambda x:q(x),\
        lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2,\

```

```

        lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2,\
        xk[m1]-h,xk[m1])
    A[m-1][m-1]+=Skach(m,m)
for m in xrange(1,N+1):
    m1=(m-1)//2 +1
    if m % 2 ==1 and m<=2*NN-2:
        ffff[m-1]=INTMYNE3.INTF(NN,lambda x:f(x),
            lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
            2*((x-xk[m1])/h)**3),\
            xk[m1]-h,xk[m1])
        ffff[m-1]+=INTMYNE3.INTF(NN,lambda x:f(x),
            lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2+\
            2*((x-xk[m1])/h)**3),\
            xk[m1],xk[m1]+h)
        for ix in xrange(M):
            ffff[m-1]+=Ska(fik(m,float(xii[ix]))) *fss[ix]
    if m % 2 ==0 and m<=2*NN-2:
        ffff[m-1]=INTMYNE3.INTF(NN,lambda x:f(x),
            lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2,\
            xk[m1]-h,xk[m1])
        ffff[m-1]+=INTMYNE3.INTF(NN,lambda x:f(x),
            lambda x:(x-xk[m1])*(1-(x-xk[m1])/h)**2,\
            xk[m1],xk[m1]+h)
        for ix in xrange(M):
            ffff[m-1]+=Ska(fik(m,float(xii[ix]))) *fss[ix]
    if m == 2*NN-1:
        ffff[m-1]=INTMYNE3.INTF(NN,lambda x:f(x),
            lambda x:(1-3*((x-xk[m1])/h)**2-\
            2*((x-xk[m1])/h)**3),\
            xk[m1]-h,xk[m1])
        for ix in xrange(M):
            ffff[m-1]+=Ska(fik(m,float(xii[ix]))) *fss[ix]
    if m == 2*NN:
        ffff[m-1]=INTMYNE3.INTF(NN,lambda x:f(x),

```

```

        lambda x:(x-xk[m1])*(1+(x-xk[m1])/h)**2,\
        xk[m1]-h,xk[m1])
    for ix in xrange(M):
        ffff[m-1]+=Ska(fik(m,float(xii[ix]))) *fss[ix]
t2=time.time()
print "Коэффициенты найдены...",t2-tt1
B=copy.deepcopy(A)
gf=copy.deepcopy(ffff)
gf1=copy.deepcopy(ffff)
for i in xrange(N):
    B+=[[Decimal(0) for j in xrange(N)]]
    gf+=[Decimal(0)]
for i in xrange(N):
    for j in xrange(N):
        cc=A[i][j]
        B[i][j]=Decimal(str(cc))
    gf[i]=ffff[i]
xx=[Decimal(0) for i in xrange(N)]
ty2=time.time()
print "Прямой ход метода Гаусса ",ty2-t2
for k in xrange(N):
    #Прямой ход
    gf[k]=gf[k]/A[k][k]
    for j in xrange(N-1,k-1,-1):
        A[k][j]=A[k][j]/A[k][k]
    for j in xrange(k+1,N):
        r=A[j][k]
        for i in xrange(k,N):
            A[j][i]=A[j][i]-r*A[k][i]
        gf[j]=gf[j]-r*gf[k];
for k in xrange(N-1,-1,-1):
    #обратный ход
    r=0
    for j in xrange(k+1,N):

```

```

        g=A[k] [j] *xx [j]
        r=r+g
        xx[k]=(gf [k]-r)/A [k] [k]
# Конец алгоритма
t3=time.time()
print "Систему решили",t3-tt1
def Approx(x):
    qaql=0.0
    for m in xrange(0,N):
        ggg=xx [m]
        qaql+=float(str(ggg))*fik(m+1,x)
    return qaql
if Vibor==1:
    xlist = mlab.frange (0, 1, dx)
    ylist2 = [Approx(x) for x in xlist]
    ylist1 = [0 for x in xlist]
    pylab.plot (xlist, ylist1)
    pylab.plot (xlist, ylist2)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом количество базисных функций равно", N
    pylab.show()
elif Vibor==2:
    for lk in xrange(N):
        print "x=", a+lk*1.0/N, "u=", Approx(a+lk*1.0/N)
    print "x=", b, "u=", Approx(b)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом N равно", N
elif Vibor==3:
    if N<=10:
        NMN=1000
    elif N<=100:
        NMN=10000

```



```

else:
    NMN=N*10
tex=open(NAME,'w')
tex.write(str(NMN)+'\r')
MAX=Approx(0.0)
MIN=Approx(0.0)
for lk in xrange(NMN+1):
    tex.write(str(a+lk*1.0/NMN)+'\r')
    tex.write(str(Approx(a+lk*1.0/NMN))+'\r')
    if Approx(a+lk*1.0/(NMN))>MAX:
        MAX=Approx(a+lk*1.0/NMN)
    if Approx(a+lk*1.0/(NMN))<MIN:
        MIN=Approx(a+lk*1.0/NMN)
tex.write(str(MAX))
tex.write(str(MIN))
tex.close
tt2=time.time()
print "Прошло времени:", tt2-tt1
elif Vibor==4:
    print "Введите число между", a, " и ", b
    print "Выход ENTER"
    try:
        Vibor=True
        while Vibor:
            klkkk=input()
            if klkkk>=a and klkkk<=b:
                print "u(",klkkk,")=",Approx(klkkk)
            else:
                print "Число должно быть между ",a, " и ", b
                print " Хотите еще?"
                print "ENTER - выход"
    except:
        print "До свидания"
print "При этом количество базисных функций ", N

```

```
ttt=time.time()
print "времени прошло",ttt-tt1
```

Файл данных DANNIE4d.py.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

# Данные для СТЕРЖНЯ
def q(x):
    return 1.0*x*(1.0-1.0*x)
def p(x):
    return 1.0+1.0*x**2+1.0*x
def f(x):
    if x<float(1.0/3):
        return 2.0*x**6-2.0*x**5-0.5*x**4+\
            0.5*x**3-288.0*x**2-144.0*x-46.0
    elif x<float(1.0/2):
        return (-300.0*x**7+1050.0*x**6-1525.0*x**5+\
            1198.611111*x**4+2.694480556*10**5*x**3-1.1
            98514259*10**5*x**2+39578.44444*x-\
            49448.68518)*x+14030.0
    elif x<float(2.0/3):
        return (-300.0*x**8+1550.0*x**7-\
            3475.0*x**6+4418.055556*x**5+\
            5.257113519*10** 5*x**4-\
            7.452435185*10**5*x**3+\
            3.914473796*10**5*x**2-\
            2.317004121*10**5*x+\
            1.557334768*10**5)*x-38929.77778
    elif x<float(3.0/4):
        return (-300.0*x**9+2025.0*x**8-\
            6062.5*x**7+10567.01389*x**6+\
            9.289812934*10**5*x**5-2. 3 28502897*10**6*x**4+\
            2.229891228*10**6 *x**3-\
            1.336917990*10**6*x**2+8.710021787*10**5*x-\
```

```

        4.605830238*10**5)*x+1.002491510*10**5
elif x<float(4.0/5):
    return 5.666666662+36.01793981*x+\
           0.5121527812*x**2-2.113425929*x**3+\
           2.583333334*x**4-1.0*x**5
else:
    return -241.6825043*x+473.0970410*x**2+\
           34.00212958*x**3-34.02777773*x**4+\
           17.01388886*x**5-3.402777773*x**6 +2.0*10**(-8)
xii=[1.0/3, 1.0/2, 2.0/3, 3.0/4, 4.0/5]
fs=[11.10493826, 19.36111110, -38.19274049,\
    13.76851852, -54.73061105]
qs=[1.0,1.0,5.0,2.0,4.0]

```

Модуль INTMYNE3.py .

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
# Версия 2.0.1

import scipy.integrate
from decimal import *
import Nn

Ss='0'*10000
def INT(m,f,f1,f2,a,b,S=Ss):
    if m<=10000:
        c,d=scipy.integrate.quad(lambda x: f(x)*f1(x)*f2(x),a,b)
        c=Nn.RESULT(c)
        return c
    elif m<=100000:
        c,d=scipy.integrate.quad(lambda x: f1(x)*f2(x),a,b)
        c*=(f(a)+f(b))/2
        c=str(c)+S
        c=Decimal(c[:len(c)])
        return c

```

```

def INTF(m,f,f1,a,b):
    S='0'*10000
    c,d=scipy.integrate.quad(lambda x: f(x)*f1(x),a,b)
    c=Nn.RESULT(c)
    c=str(c)+S
    c=Decimal(c)
    return c

```

Модуль Nn.py .

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
# Версия 1.1.3

import scipy.integrate
from decimal import *
getcontext().prec = 25000
Ss='0'*10000
def RESULT(a):
    b=str(a)
    if ('e' in b) or ('E' in b):
        for i in xrange(len(b)):
            if ('e'==b[i]) or ('E'==b[i]):
                r=b[:i]
                if not ( '.' in r):
                    r+='.'
                r+=Ss
                rr=b[i+1:]
                rrr=Decimal(r)*(Decimal(10)**(Decimal(rr)))
    else:
        if not( '.' in b):
            b+='.'
        rrr=Decimal(b+Ss)
    return rrr

```

А.4 Программа для реализации численных экспериментов для разнопорядковой математической модели

Общие сведения о программе. Программа называется Sterg-String.Final.3.0.4a_In_D.py.

Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 10157 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций струны по заданным параметрам модели.

Структура программы. В модуле, с названием DANNIE42a.py, задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт Sterg-String.Final.3.0.4a_In_D.py, который спрашивает количество интервалов на которые разбивается отрезок и необходимое действие (построить график приближенного решения, вывести таблицу значений, вычислить значение приближенного решения в конкретной точке, записать значения приближенного решения в текстовый файл). Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Осуществляется выбранное действие.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. До запуска программы необходимо задать параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i , которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE42a.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график приближенного решения модели, либо таблица приближенного решения, которая может быть выведена на монитор или записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем Sterg-String.Final.3.0.4a_In_D.py.

На рисунках А.13 и А.14 представлена работающая программа на Python'е до задания n и выбора вывода результата соответственно.

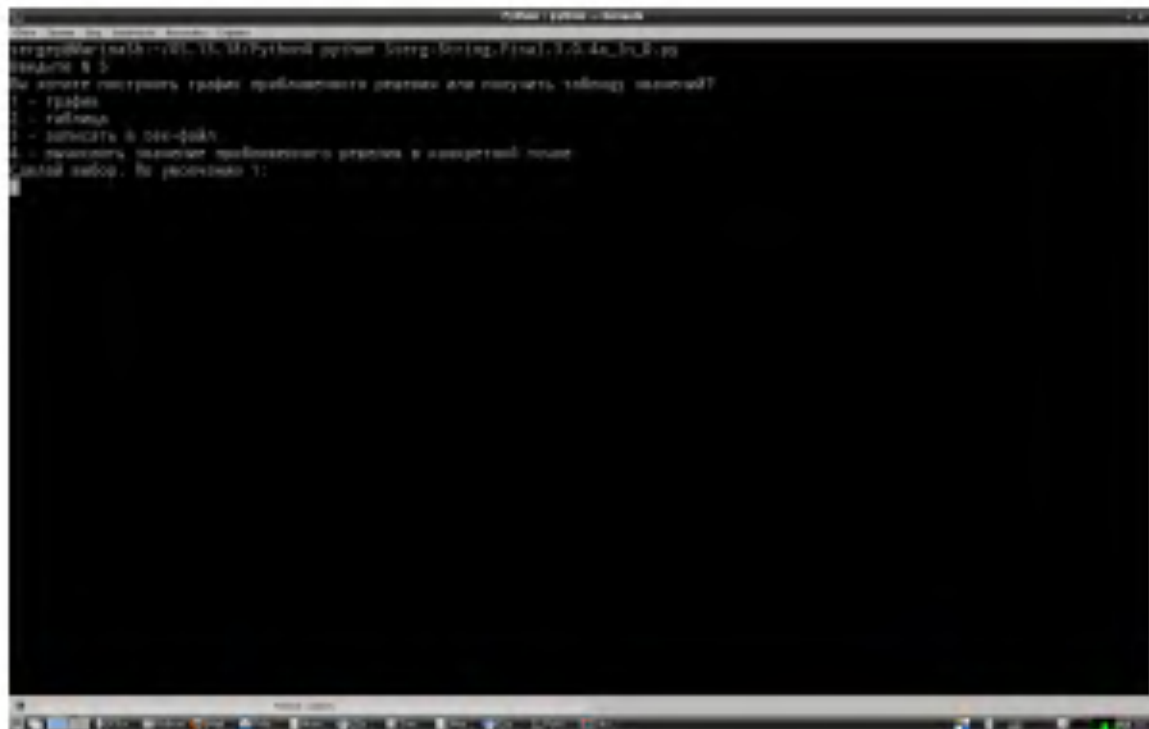


Рисунок А.13. Запущенная программа на Python'e

А.4.1 Программа написанная на Python

«Основная» программа.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

import math
import scipy.special
import Nn
import copy
import time
import INT2
import pylab
from matplotlib import mlab
import DANNIE42a as DANNIE42b

from decimal import *
setcontext(ExtendedContext)
a = 0.0
```

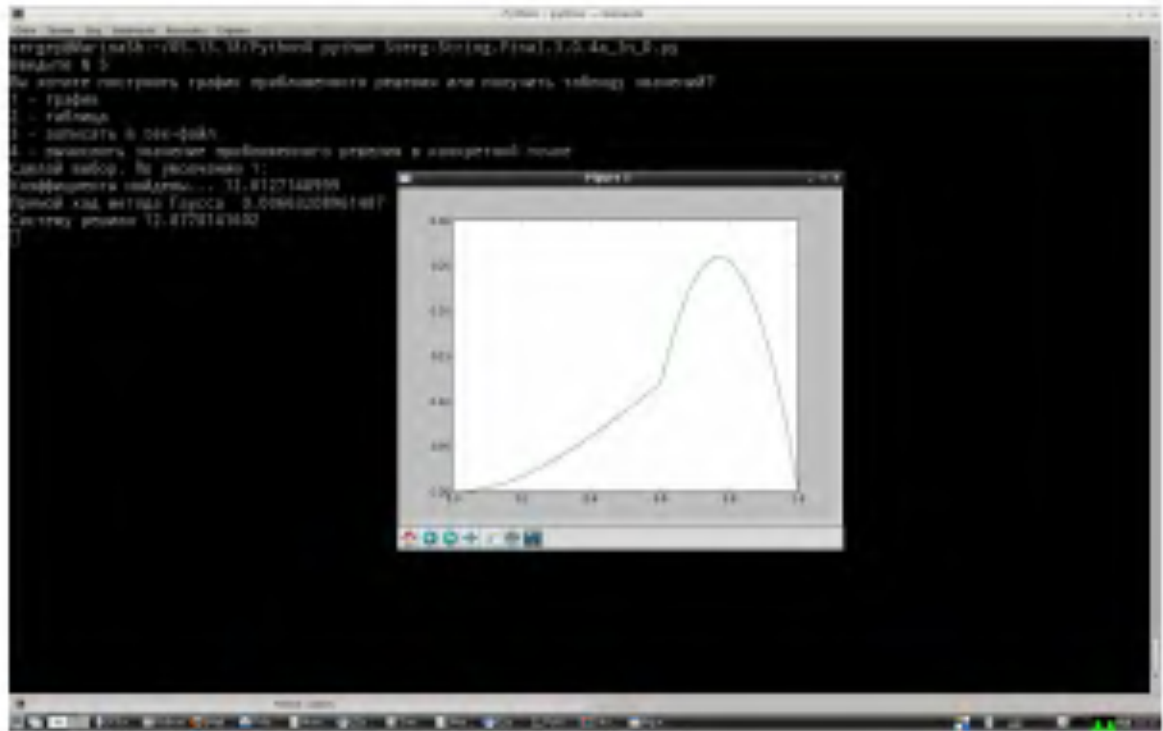


Рисунок А.14. Запущенная программа на Python'е после задания n

```

b = 1.0
N=5
VV=True
while VV:
    try:
        N1=input("Введите N ")
        if (not(N1>0)) or N1!=int(N1):
            print "Число должно быть натуральным"
        else:
            VV=not (N1>0)
    except:
        print "Некорректное число"
NN=N1
N2=N1
N=2*N1+N2-1
Ss='0'*N
if N<=100:
    getcontext().prec = 100
elif N<=1000:

```

```

    getcontext().prec = 2500
else:
    getcontext().prec = 10000
M = 5
print "Вы хотите построить график приближенного\
решения или получить таблицу значений?"
print "1 - график"
print "2 - таблица"
print "3 - записать в txt-файл"
print "4 - вычислить значение приближенного \
решения в конкретной точке"
Vibor=3
VV=True
while VV:
    try:
        Vibor=input("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
    except:
        Vibor=1
    VV=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3 or Vibor==4)
VV=1
Vv=1
if Vibor==3:
    Vv=True
    while Vv:
        print "Введите имя файла"
        print "По умолчанию имя файла - RESULT.txt"
        print "Если такой файл существует, он будет заменен"
        try:
            NAME=raw_input()
            if NAME=='':
                NAME='RESULT.txt'
            Vv=False
        except:
            NAME='RESULT.txt'

```



```

tt1=time.time()
xii=[Decimal(1.0)/3, Decimal(1.0)/2, Decimal(2.0)/3,\
Decimal(3.0)/4, Decimal(4.0)/5]
xk=[]
h = (b-a)/NN
xk=[a+i*h for i in xrange(NN+1)]
xiii=DANNIE42b.xiii
q=DANNIE42b.q
p=DANNIE42b.p
r=DANNIE42b.r
f=DANNIE42b.f
fs=DANNIE42b.fs
qs=DANNIE42b.qs
xk=[a+m*(xiii-a)/N1 for m in xrange(N1+2)]
xk1=[a+m*(xiii-a)/N1 for m in xrange(N1+2)]
xk2=[]
for m in xrange(N2+1):
    xk2+=[xiii+m*(b-xiii)/N2]
hh=xk[1]-xk[0]
hh1=xk2[1]-xk2[0]
# Базисная функция
def fik(m,x):
    if m<N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return 1.0-3.0*((x-xk[m])/hh)**2-2.0*((x-xk[m])/hh)**3
    elif m<N1 and xk[m]<x and x<=xk[m+1]:
        return 1.0-3.0*((x-xk[m])/hh)**2+2.0*((x-xk[m])/hh)**3
    elif m==N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return 1.0-3.0*((x-xk[m])/hh)**2-2.0*((x-xk[m])/hh)**3
    elif m==N1 and xk[m]<x and x<=xk2[m-N1+1]:
        return (x-xk2[m-N1+1])/(xk2[m-N1]-xk2[m-N1+1])
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1-1]<=x and x<xk1[m-N1]:
        return (x-xk1[m-N1])*(1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)**2
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1]<x and x<=xk1[m-N1+1]:
        return (x-xk1[m-N1])*(1.0-(x-xk1[m-N1])/hh)**2

```

```

elif m==2*N1 and xk1[m-N1-1]<x and x<=xk1[m-N1]:
    return (1.0*x-xk1[m-N1])*(1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)**2
elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1-1]<x and x<=xk2[m-2*N1]:
    return (1.0*x-xk2[m-2*N1-1])/(xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1-1])
elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1]<x and x<=xk2[m-2*N1+1]:
    return (1.0*x-xk2[m-2*N1+1])/(xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1+1])
else:
    return 0
def fik1(m,x):
    if m<N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return -6.0*(x-xk[m])/(hh**2)-6.0*((x-xk[m])/hh)**2 /hh
    elif m<N1 and xk[m]<x and x<=xk[m+1]:
        return -6.0*(x-xk[m])/(hh**2)+6.0*((x-xk[m])/hh)**2/hh
    elif m==N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return -6.0*(x-xk[m])/(hh**2)-6.0*((x-xk[m])/hh)**2 /hh
    elif m==N1 and xk[m]<x and x<=xk2[m-N1+1]:
        return 1.0/(xk2[m-N1]-xk2[m-N1+1])
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1-1]<=x and x<xk1[m-N1]:
        return (1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)**2+\
2.0*(x-xk1[m-N1])*(1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1]<x and x<=xk1[m-N1+1]:
        return (1.0-(1.0*x-xk1[m-N1])/hh)**2-\
2.0*(x-xk1[m-N1])*(1.0-(x-xk1[m-N1])/hh)/hh
    elif m==2*N1 and xk1[m-N1-1]<x and x<=xk1[m-N1]:
        return (1.0+(1.0*x-xk1[m-N1])/hh)**2+\
2.0*(x-xk1[m-N1])*(1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1-1]<x and x<=xk2[m-2*N1]:
        return 1.0/(xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1-1])
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1]<x and x<=xk2[m-2*N1+1]:
        return 1.0/(xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1+1])
    else:
        return 0
def fik2(m,x):
    if m<N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:

```

```

        return -6.0/(hh**2)-12.0*(1.0*x-xk[m])/(hh**3)
elif m<N1 and xk[m]<x and x<=xk[m+1]:
        return -6.0/(hh**2)+12.0*(1.0*x-xk[m])/(hh**3)
elif m==N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return -6.0/(hh**2)-12.0*(1.0*x-xk[m])/(hh**3)
elif m==N1 and xk[m]<x and x<=xk2[m-N1+1]:
        return 0
elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1-1]<=x and x<xk1[m-N1]:
        return 4*(1+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh+2*(x-xk1[m-N1])/(hh**2)
elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1]<x and x<=xk1[m-N1+1]:
        return -4*(1-(x-xk1[m-N1])/hh)/hh+2*(x-xk1[m-N1])/(hh**2)
elif m==2*N1 and xk1[m-N1-1]<x and x<=xk1[m-N1]:
        return 4*(1+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh+2*(x-xk1[m-N1])/(hh**2)
elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1-1]<x and x<=xk2[m-2*N1]:
        return 0
elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1]<x and x<=xk2[m-2*N1+1]:
        return 0
else:
        return 0
# Конец ввода базисных функций
# Интервал изменения переменной по оси X
xmin = 0.0
xmax = 1.0
# Шаг между точками
if N>=1000:
        dx = 1.0/(10*N)
elif N>=100:
        dx = 1.0/(N**2)
elif N<=5:
        dx=0.001
else:
        dx = 1.0/(N**4)
x=[]
A=[]

```

```

for j in xrange(0,N):
    A+=[[0 for i in xrange(0,N)]]
xii=[Decimal(str(1.0)+Ss)/3, Decimal(str(1.0)+Ss)/2,\
    Decimal(str(2.0)+Ss)/3, Decimal(str(3.0)+Ss)/4, \
    Decimal(str(4.0)+Ss)/5]
fss=[]
for i in xrange (M):
    fss+=[Nn.RESULT(fs[i])]
qss=[]
for i in xrange (M):
    qss+=[Nn.RESULT(qs[i])]
def Skach(m,n):
    global Ss
    S=0
    for ix in xrange(M):
        S+=Decimal(Nn.RESULT(fik(m,float(xii[ix])))*\
        fik(n,float(xii[ix]))))*qss[ix]
    return S
def Ska(x):
    return Decimal(Nn.RESULT(x))
H=Decimal(Nn.RESULT(h))
ffff=[0 for m in xrange(N)]
for m in xrange(1,N+1):
    for n in xrange(m,N+1):
        A[m-1][n-1]= INT2.INT(NN,lambda x:\
        p(x)*fik2(m,x)*fik2(n,x),0,xiii)
        A[m-1][n-1]+=INT2.INT(NN,lambda x:\
        r(x)*fik1(m,x)*fik1(n,x),xiii,1)
        A[m-1][n-1]+=INT2.INT(NN,lambda x:\
        q(x)*fik(m,x)*fik(n,x),0,1)
        A[n-1][m-1]=A[m-1][n-1]
for m in xrange(1,N+1):
    ffff[m-1]= INT2.INT(NN,lambda x:f(x)*fik(m,x),0,xiii)
    ffff[m-1]+=INT2.INT(NN,lambda x:f(x)*fik(m,x),xiii,1)

```

```

    for ix in xrange(M):
        ffff[m-1]+=Ska(fik(m,float(xii[ix]))) *fss[ix]
t2=time.time()
print "Коэффициенты найдены...",t2-tt1
B=copy.deepcopy(A)
gf=copy.deepcopy(ffff)
for i in xrange(N):
    B+=[[Decimal(0) for j in xrange(N)]]
    gf+=[Decimal(0)]
for i in xrange(N):
    for j in xrange(N):
        cc=A[i][j]
        B[i][j]=Decimal(str(cc))
    gf[i]=ffff[i]
xx=[Decimal(0) for i in xrange(N)]
ty2=time.time()
print "Прямой ход метода Гаусса ",ty2-t2
for k in xrange(N):
    #Прямой ход
    gf[k]=gf[k]/A[k][k]
    for j in xrange(N-1,k-1,-1):
        A[k][j]=A[k][j]/A[k][k]
    for j in xrange(k+1,N):
        r=A[j][k]
        for i in xrange(k,N):
            A[j][i]=A[j][i]-r*A[k][i]
        gf[j]=gf[j]-r*gf[k];
for k in xrange(N-1,-1,-1):
    #обратный ход
    r=0
    for j in xrange(k+1,N):
        g=A[k][j]*xx[j]
        r=r+g
    xx[k]=(gf[k]-r)/A[k][k]

```

```

# Конец алгоритма
t3=time.time()
print "Систему решили",t3-tt1
def Approx(x):
    qaql=0.0
    for m in xrange(0,N):
        ggg=xx[m]
        qaql+=float(str(ggg))*fik(m+1,x)
    return qaql
if Vibor==1:
    xlist = mlab.frange (0, 1, dx)
    ylist2 = [Approx(x) for x in xlist]
    ylist1 = [0 for x in xlist]
    pylab.plot (xlist, ylist1)
    pylab.plot (xlist, ylist2)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом количество базисных функций равно", N
    pylab.show()
elif Vibor==2:
    for lk in xrange(N):
        print "x=", a+lk*1.0/N, "u=", Approx(a+lk*1.0/N)
    print "x=", b, "u=", Approx(b)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом N равно", N
elif Vibor==3:
    if N<=10:
        МК=1000
    elif N<=25:
        МК=2500
    else:
        МК=10000
    tex=open(NAME,'w')

```

```

tex.write(str(MK)+'\r')
MAX=Approx(0.0)
MIN=Approx(0.0)
for lk in xrange(MK+1):
    tex.write(str(a+lk*1.0/MK)+'\r')
    tex.write(str(Approx(a+lk*1.0/MK))+'\r')
    if Approx(a+lk*1.0/MK)>MAX:
        MAX=Approx(a+lk*1.0/MK)
    if Approx(a+lk*1.0/MK)<MIN:
        MIN=Approx(a+lk*1.0/MK)
tex.write(str(MAX)+'\r')
tex.write(str(MIN))
tex.close
tt2=time.time()
print "Прошло времени:", tt2-tt1
print NAME
elif Vibor==4:
    print "Введите число между", a, " и ", b
    print "Выход ENTER"
    try:
        Vibor=True
        while Vibor:
            klkkk=input()
            if klkkk>=a and klkkk<=b:
                print "u(",klkkk,")=",Approx(klkkk)
            else:
                print "Число должно быть между ",a, " и ", b
                print " Хотите еще?"
                print "ENTER - выход"
    except:
        print "До свидания"

```

Модуль DANNIE42a.py .

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

```

```

# Данные для СТРУННО-СТЕРЖНЕВОЙ

xiii=0.6
def q(x):
    return 1.0*x*(1.0-1.0*x)
def p(x):
    if x<=xiii:
        return 1.0
    else:
        return 0
def r(x):
    if x<=xiii:
        return 0
    else:
        return 1.0
def f(x):
    if x<xiii:
        return 0.5*x**3-0.8333333333*x**4+0.3333333333*x**5
    else:
        return 8.666666667-2.0*x+8.333333333*x**2-\
10.666666667*x**3+4.333333333*x**4
xii=[1.0/3, 1.0/2, 2.0/3, 3.0/4, 4.0/5]
fs=[0.0, 0.0, 0, 0, 0]
qs=[0,0,0,0,0]

```

Модуль INT2.py .

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
# Версия 1.4.0

import scipy.integrate
from decimal import *
import Nn
Ss='0'*10000

```



```

def INT(m,f,a,b,S=5):
    if m<=10:
        c=0
        k=m
        h=(b-a)/k
        for i in xrange(k):
            c1,d=scipy.integrate.quad(lambda x:\
f(x),a+i*h,a+(i+1)*h)
            c+=Nn.RESULT(c1)
        c=Nn.RESULT(c)
        return c
    else:
        k=10*(m//10)
        h=(b-a)/float(k)
        c=0
        for i in xrange(k):
            c1,d=scipy.integrate.quad(lambda x:\
f(x),a+i*h,a+(i+1)*h)
            c+=Nn.RESULT(c1)
        c=Nn.RESULT(c)
        return c

```

Программа для прорисовки графика приближенного решения.

```

#!/usr/bin/python3.2
from PyQt4 import QtCore, QtGui
import sys

app = QtGui.QApplication(sys.argv)
window = QtGui.QWidget()
window.setWindowTitle("График погрешности")
window.resize(1000, 700)
scene = QtGui.QGraphicsScene(0.0, 0.0, 1000.0, 700.0)
scene.setBackgroundBrush(QtCore.Qt.white)
try:

```

```

print('Введите имя файла ')
print('По умолчанию будет использоваться файл с')
print('именем RESULT.txt (если он существует)')
NAME=input()
if NAME=='':
    NAME='RESULT.txt'
except:
    print('')
    NAME='RESULT.txt'
print('Пытаемся открыть файл с именем',NAME)
try:
    tex=open(NAME,'r')
    print('Удачно!')
    Vv=True
except:
    print('Такого файла нет!')
    print('До новых встреч')
    Vv=0
if Vv:
    N=tex.readline()
    N=int(N)
    MAX=0
    MIN=0
    for i in range(N+1):
        m=tex.readline()
        m=tex.readline()
        m=m[:len(m)-1]
        m=float(str(m))
        if m>MAX:
            MAX=m
        if m<MIN:
            MIN=m
    m=tex.readline()
    window.setWindowTitle("График приближенного решения")

```

```

MM=1/(MAX-MIN)
tex.close()
x=[0.0, 600.0+MIN*500/(MAX-MIN), 1020.0,\
600.0+MIN*500/(MAX-MIN)]
xs=[0.0,600.0,0.0,0.0]
yy=[0,1000]
df=MIN*500/(MAX-MIN)
tex=open(NAME,'r')
N=tex.readline()
print(N)
N=int(N)
yy=[float(str(tex.readline())),\
600-float(str(tex.readline()))+df]
NN=1000
NNN=500/(MAX-MIN)
print(NNN,N)
for m in range(N-1):
    z1=str(tex.readline())
    z1=z1[:len(z1)-1]
    z2=str(tex.readline())
    z2=z2[:len(z2)-1]
    yy2=[NN*float(z1),600-NNN*float(z2)+df]
    y=yy+yy2
    yy=yy2
    scene.addLine(*x, pen=QtGui.QPen(QtCore.Qt.red, 1))
    xmin=[0.0, 600-NNN*MAX+df,1020.0,600-NNN*MAX+df]
    xmax=[0.0, 600-NNN*MIN+df,1020.0,600-NNN*MIN+df]
    scene.addLine(*xs, pen=QtGui.QPen(QtCore.Qt.red, 1))
    scene.addLine(*xmax,\
pen=QtGui.QPen(QtCore.Qt.green, 1.1))
    scene.addLine(*xmin,\
pen=QtGui.QPen(QtCore.Qt.green, 1.1))
    scene.addLine(QtCore.QLineF(*y),
pen=QtGui.QPen(QtCore.Qt.blue, 2))

```

```

view = QtGui.QGraphicsView(scene)
box = QtGui.QVBoxLayout()
box.addWidget(view)
window.setLayout(box)
item = QtGui.QGraphicsSimpleTextItem()
item.setText("0,5")
item.setPen(QtGui.QPen(QtGui.Qt.darkBlue, 1))
item.setFont(QtGui.QFont("Arial", 25))
item.setPos(QtGui.QPointF(500.0, 600.0+df))
item.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsMovable)
item.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsSelectable)
item.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsFocusable)
scene.addItem(item)
item1 = QtGui.QGraphicsSimpleTextItem()
item1.setText(str(MAX))
item1.setPen(QtGui.QPen(QtGui.Qt.darkBlue, 1))
item1.setFont(QtGui.QFont("Arial", 25))
item1.setPos(QtGui.QPointF(5.0, 555-NNN*MAX+df))
item1.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsMovable)
item1.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsSelectable)
item1.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsFocusable)
scene.addItem(item1)
item2 = QtGui.QGraphicsSimpleTextItem()
item2.setText(str(MIN))
item2.setPen(QtGui.QPen(QtGui.Qt.darkBlue, 1))
item2.setFont(QtGui.QFont("Arial", 25))
item2.setPos(QtGui.QPointF(5.0, 555-NNN*MIN+df))
item2.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsMovable)
item2.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsSelectable)
item2.setFlag(QtGui.QGraphicsItem.ItemIsFocusable)
scene.addItem(item2)
def on_clicked():
    sys.exit(app.exec_())
button = QtGui.QPushButton("Exit")

```

```
button.clicked.connect(on_clicked)
button.setAutoRepeat(True)
box.addWidget(button)
window.show()
sys.exit(app.exec_())
tex.close()
```

Приложение В

Таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, полученные при проведении численных экспериментов

В.1 Модель второго порядка

Таблица В.1: Значения точного решения, приближенного и погрешности (Maple)

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0	0	0	0
0,05	-0,05833333333	-0,05833333334	$7,99999996803358 \cdot 10^{-11}$
0,1	-0,11666666666	-0,11666666668	$1,99999988792499 \cdot 10^{-10}$
0,15	-0,17499999999	-0,17500000002	$2,99999997066536 \cdot 10^{-10}$
0,2	-0,23333333333	-0,23333333335	$2,00000016548074 \cdot 10^{-10}$
0,25	-0,29166666666	-0,29166666667	$3,99999977584997 \cdot 10^{-10}$
0,3	-0,34999999999	-0,35000000003	$3,99999977584997 \cdot 10^{-10}$
0,35	-0,37499999998	-0,37499999999	0,03333333328
0,4	-0,33333333331	-0,33333333336	$4,99999985859034 \cdot 10^{-10}$
0,45	-0,29166666664	-0,29166666669	$5,00000041370186 \cdot 10^{-10}$
0,5	-0,24999999998	-0,25000000002	$4,00000005340573 \cdot 10^{-10}$
0,55	-0,15833333331	-0,15833333335	$4,00000005340573 \cdot 10^{-10}$
0,6	-0,06666666664	-0,06666666669	$5,0000001361461 \cdot 10^{-10}$

0,65	0,0250000003	0,0166666665	0,00833333338
0,7	0,1000000003	0,0999999998	$4,99999999736822 \cdot 10^{-10}$
0,75	0,1666666667	0,1749999998	0,00833333328
0,8	0,2500000004	0,2499999998	$6,00000021888647 \cdot 10^{-10}$
0,85	0,2500000004	0,2499999998	$6,00000021888647 \cdot 10^{-10}$
0,9	0,2500000004	0,2499999998	$6,00000021888647 \cdot 10^{-10}$
0,95	0,2500000004	0,2499999998	$6,00000021888647 \cdot 10^{-10}$
1,0	0,2500000004	0,2499999998	$6,00000021888647 \cdot 10^{-10}$

Таблица В.2: Значения точного решения, приближенного и погрешности (Python)

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0	0	0	0
0,05	-0,05833333333	-0,05833333333	$1,32999999902239 \cdot 10^{-11}$
0,1	-0,11666666666	-0,11666666667	$6,69999888902595 \cdot 10^{-11}$
0,15	-0,17499999999	-0,175	$1,00000008274037 \cdot 10^{-10}$
0,2	-0,23333333333	-0,23333333333	$3,2999991628202 \cdot 10^{-11}$
0,25	-0,29166666666	-0,29166666667	$6,69999611346839 \cdot 10^{-11}$
0,3	-0,34999999999	-0,35	$1,00000008274037 \cdot 10^{-10}$
0,35	-0,37499999998	-0,34166666667	0,03333333331
0,4	-0,33333333331	-0,33333333333	$2,32999952665125 \cdot 10^{-10}$
0,45	-0,29166666664	-0,29166666667	$2,66999977682758 \cdot 10^{-10}$
0,5	-0,24999999998	-0,25	$1,99999988792499 \cdot 10^{-10}$
0,55	-0,15833333331	-0,15833333333	$2,33000008176276 \cdot 10^{-10}$
0,6	-0,06666666664	-0,06666666667	$2,867000109541 \cdot 10^{-10}$
0,65	0,02500000003	0,01666666667	0,00833333336
0,7	0,10000000003	0,1	$2,99999997066536 \cdot 10^{-10}$
0,75	0,16666666667	0,175	0,00833333333
0,8	0,25000000004	0,25	$4,00000033096148 \cdot 10^{-10}$
0,85	0,25000000004	0,25	$4,00000033096148 \cdot 10^{-10}$
0,9	0,25000000004	0,25	$4,00000033096148 \cdot 10^{-10}$
0,95	0,25000000004	0,25	$4,00000033096148 \cdot 10^{-10}$

1,0	0,2500000004	0,25	$4,00000033096148 \cdot 10^{-10}$
-----	--------------	------	-----------------------------------

В.2 Таблица значений для еще одной модели второго порядка

Таблица В.3: Таблица значений точного, приближенного решений и погрешности (Maple)

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0	0	0	0
0,05	0,0001250000000	0,0002623637720	0,0001373637720
0,1	0,001000000000	0,001267895876	0,000267895876
0,15	0,003375000000	0,003766773070	0,000391773070
0,2	0,008000000000	0,008509246073	0,000509246073
0,25	0,01562500000	0,01624561412	0,00062061412
0,3	0,02700000000	0,02772620422	0,00072620422
0,35	0,02037037037	0,02115443151	0,00078406114
0,4	-0,02962962963	-0,02882336686	0,00080626277
0,45	-0,07962962963	-0,07880210906	0,00082752057
0,5	-0,1296296296	-0,1287817390	0,0008478906
0,55	-0,1171296296	-0,1162574496	0,0008721800
0,6	-0,07962962963	-0,07873397107	0,00089565856
0,65	-0,01712962963	-0,01621127665	0,00091835298
0,7	-0,02407407407	-0,02324648975	0,00082758432
0,75	-0,07407407407	-0,07334009706	0,00073397701
0,8	-0,06157407407	-0,06089325234	0,00068082173
0,85	-0,01782407407	-0,01714562856	0,00067844551
0,9	0,01342592593	0,01410211440	0,00067618847
0,95	0,03217592593	0,03284994732	0,00067402139
1	0,03842592593	0,03909784212	0,00067191619

Таблица В.4: Таблица значений точного, приближенного решений и погрешности (Python)

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0	0	0	0
0,05	0,000125	0,00130787933887	0,00118287933887
0,1	0,001	0,00261575867774	0,00161575867774
0,15	0,003375	0,00687175577933	0,00349675577933
0,2	0,008	0,0111277528809	0,00312775288092
0,25	0,015625	0,0213399823446	0,00571498234465
0,3	0,027	0,0315522118084	0,00455221180837
0,35	0,0203703703704	0,0024169398173	0,0179534305531
0,4	-0,0296296296296	-0,0267183321738	0,00291129745585
0,45	-0,0796296296296	-0,07696727612	0,00266235350959
0,5	-0,12962962963	-0,127216220066	0,00241340956334
0,55	-0,11712962963	-0,101961660749	0,0151679688806
0,6	-0,0796296296296	-0,0767071014319	0,00292252819777
0,65	-0,0171296296296	-0,0508493642498	0,0337197346201
0,7	-0,0240740740741	-0,0249916270677	0,000917552993621
0,75	-0,0740740740741	-0,0434704091549	0,0306036649192
0,8	-0,0615740740741	-0,061949191242	0,000375117167952
0,85	-0,0178240740741	-0,0246667539559	0,00684267988179
0,9	0,0134259259259	0,0126156833303	0,000810242595633
0,95	0,0321759259259	0,0249041098151	0,00727181611079
1	0,0384259259259	0,0371925363	0,00123338962595

В.3 Модель второго порядка с разрывными решениями

Таблица В.5: Значения точного и приближенного решений и погрешности (Maple)

x	Точное	Приближенное	Погрешность
0	0	0	0
0,05	0,05	0,0508225711	0,0008225711

0,1	0,1	0,1016451422	0,0016451422
0,15	0,15	0,1524759528	0,0024759528
0,2	0,2	0,2033067633	0,0033067633
0,25	0,25	0,2541541353	0,0041541353
0,3	0,3	0,3050015073	0,0050015073
0,31	0,31	0,303410564	0,006589436
0,32	0,32	0,3018196207	0,0181803793
0,33	0,33	0,3002286774	0,0297713226
0,34	-0,1156	-0,1403263223	0,0247263223
0,35	-0,1225	-0,1419172656	0,0194172656
0,4	-0,16	-0,149871982	0,010128018
0,45	-0,2025	-0,1955489369	0,0069510631
0,49	-0,2401	-0,2320905009	0,0080094991
0,499	-0,249001	-0,2403123528	0,0086886472
0,501	1,002	1,010774108	0,008774108
0,51	1,02	1,028774108	0,008774108
0,55	1,10	1,108774108	0,008774108
0,6	1,2	1,208774108	0,008774108
0,65	1,30	1,325440775	0,025440775
0,66	1,32	1,348774108	0,028774108
0,67	2,01	2,038774108	0,028774108
0,7	2,1	2,108774108	0,008774108
0,74	2,22	2,132724108	0,087275892
0,76	-0,438976	-0,5271758919	0,0881998919
0,79	-0,493039	-0,5092133919	0,0161743919
0,81	0,48195	0,4915407748	0,0095907748
0,85	0,48875	0,5026074414	0,0138574414
0,9	0,495	0,5164407748	0,0214407748
0,95	0,49875	0,5212741081	0,0225241081
1,0	0,5	0,5261074414	0,0261074414

Таблица В.6: Значения точного и приближенного решений и погрешности (программа на Python)

x	Точное	Приближенное	Погрешность
0	0	0	0
0,05	0,05	0,0527171719389	0,00271717193889
0,1	0,1	0,105434343878	0,00543434387777
0,15	0,15	0,158178732898	0,00817873289806
0,2	0,2	0,210923121918	0,0109231219183
0,25	0,25	0,263722217727	0,0137222177266
0,3	0,3	0,316521313535	0,0165213135349
0,31	0,31	0,315253625618	0,00525362561821
0,32	0,32	0,313985937702	0,00601406229848
0,33	0,33	0,312718249785	0,0172817502152
0,34	-0,1156	-0,162330542216	0,0467305422163
0,35	-0,1225	-0,163598230133	0,041098230133
0,4	-0,16	-0,169936669716	0,0099366697165
0,45	-0,2025	-0,214265347257	0,011765347257
0,49	-0,2401	-0,249728289289	0,00962828928933
0,499	-0,249001	-0,257707451247	0,00870645124661
0,501	1,002	0,993405975203	0,00859402479742
0,51	1,02	1,0114059752	0,00859402479742
0,55	1,1	1,0914059752	0,00859402479742
0,6	1,2	1,1914059752	0,00859402479742
0,65	1,3	1,30807264187	0,00807264186925
0,66	1,32	1,3314059752	0,0114059752026
0,67	2,01	2,0214059752	0,0114059752026
0,7	2,1	2,0914059752	0,00859402479742
0,74	2,22	2,1153559752	0,104644024797
0,76	-0,438976	-0,544544024797	0,105568024797
0,79	-0,493039	-0,526581524797	0,0335425247974
0,81	0,48195	0,472905975203	0,00904402479742

0,85	0,48875	0,478905975203	0,00984402479742
0,9	0,495	0,486405975203	0,00859402479742
0,95	0,49875	0,488905975203	0,00984402479742
1,0	0,5	0,491405975203	0,00859402479742

В.4 Модель четвертого порядка

Таблица В.7: Таблица значений точного, приближенного решений и погрешности (Maple)

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0,0	0,0	0,0	0,0
0,05	0,001237500000	0,001357607708	0,000120107708
0,1	0,004800000000	0,005024613405	0,000224613405
0,15	0,01023750000	0,01039229095	0,00015479095
0,2	0,016800000000	0,01685191419	0,00005191419
0,25	0,02343750000	0,02336314169	0,00007435831
0,3	0,028800000000	0,02846739969	0,00033260031
0,35	0,03124531250	0,03092861362	0,00031669888
0,4	0,02954074074	0,02951070890	0,00003003184
0,45	0,02378304398	0,02329847875	0,00048456523
0,5	0,01388888890	0,01294347448	0,00094541442
0,55	0,0001504658760	-0,000440241373	0,0005907072490
0,6	-0,01551259256	-0,01573860627	0,00022601371
0,65	-0,03084714405	-0,03072454520	0,00012259885
0,7	-0,04370370712	-0,04346033729	0,00024336983
0,75	-0,05324074063	-0,05326595122	0,00002521059
0,8	-0,05931944431	-0,05946135565	0,00014191134
0,85	-0,06175882508	-0,06210576526	0,00034694018
0,9	-0,06185879612	-0,06238292806	0,00052413194
0,95	-0,06089539910	-0,06129961282	0,00040421372
1,0	-0,05963425903	-0,05986258826	0,00022832923

Таблица В.8: Таблица значений точного, приближенного решений и погрешности (Python)

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0,0	0,0	0,0	0,0
0,05	0,0012375	0,00135759395043	0,000120093950425
0,1	0,0048	0,00502456049404	0,00022456049404
0,15	0,0102375	0,0103921766694	0,000154676669353
0,2	0,0168	0,0168517195149	$5,1719514872 \cdot 10^{-5}$
0,25	0,0234375	0,0233628505964	$7,46494035942 \cdot 10^{-5}$
0,3	0,0288	0,0284669985677	0,000333001432327
0,35	0,0312453068369	0,030928091099	0,000317215737835
0,4	0,02954073304	0,0295100558609	$3,06771791029 \cdot 10^{-5}$
0,45	0,0237830336619	0,0232976882204	0,000485345441509
0,5	0,013888892	0,0129425411401	0,000946350859917
0,55	0,000150468025055	-0,000441321316148	0,000591789341203
0,6	-0,0155125926	-0,0157398350848	0,000227242484744
0,65	-0,030847147975	-0,0307259236825	0,000121224292459
0,7	-0,0437038943296	-0,043461865608	0,00024202872162
0,75	-0,053240740315	-0,0532676292705	$2,68889555315 \cdot 10^{-5}$
0,8	-0,0593194396592	-0,0594631830794	0,000143743420183
0,85	-0,0617588198792	-0,0621077417831	0,000348921903941
0,9	-0,0618587903447	-0,0623850536824	0,000526263337708
0,95	-0,0608953927192	-0,0613018875147	0,00040649479555
1,0	-0,059634252	-0,0598650120175	0,000230760017486

В.5 Разнопорядковая модель ($N = 5$)

Таблица В.9: Таблица значений точного, приближенного решений и погрешности (Python)

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0,0	0,0	0,0	0,0
0,05	-0,003685	-0,00361492027314	$7,00797268551 \cdot 10^{-5}$

x	$u(x)$	$v(x)$	Погрешность
0,1	-0,01176	-0,0117318212038	$2,81787962103 \cdot 10^{-5}$
0,15	-0,020385	-0,0203314885006	$5,35114994356 \cdot 10^{-5}$
0,2	-0,02656	-0,0264806699221	$7,93300779108 \cdot 10^{-5}$
0,25	-0,028125	-0,0280847856406	$4,02143593609 \cdot 10^{-5}$
0,3	-0,02376	-0,0236406346678	0,00011936533217
0,35	-0,012985	-0,0129164855956	$6,85144043505 \cdot 10^{-5}$
0,4	0,00384	0,0039753137824	0,000135313782398
0,45	0,025515	0,0256509697246	0,000135969724642
0,5	0,05	0,0500738510452	$7,38510451618 \cdot 10^{-5}$
0,55	0,075	0,0750819515429	$8,19515429289 \cdot 10^{-5}$
0,6	0,1	0,10014926571	0,000149265710366
0,65	0,1	0,100131564089	0,000131564088922
0,7	0,02	0,0200608616721	$6,0861672074 \cdot 10^{-5}$
0,75	-0,1	-0,0909830330629	0,00901696693712
0,8	-0,0975	-0,0959838810999	0,00151611890013
0,85	-0,073125	-0,0731986834761	$7,3683476067 \cdot 10^{-5}$
0,9	-0,04875	-0,0488078593258	$5,78593257811 \cdot 10^{-5}$
0,95	-0,024375	-0,0244056292272	$3,06292272108 \cdot 10^{-5}$
1,0	0,0	0,0	0,0

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2012660327
«String.Final.1.2.20.py»

Правообладатель(и): **Шабров Сергей Александрович (RU)**

Автор(ы): **Шабров Сергей Александрович (RU)**

Заявка № **2012618542**
Дата поступления **10 октября 2012 г.**
Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
14 ноября 2012 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



Б.Н. Самонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2012660330

«Rod.Final.1.2.2.py»

Правообладатель(ли): *Шабров Сергей Александрович (RU)*

Автор(ы): *Шабров Сергей Александрович (RU)*

Заявка № 2012618543

Дата поступления 10 октября 2012 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
14 ноября 2012 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Б.П. Сивокон