ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЗАВЬЯЛОВА АНТОНИНА ВЛАДИМИРОВНА

ВКЛЮЧЕНИЯ С СЮРЪЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Гельман Б.Д.

Воронеж – 2013

Содержание

Основные обозначения

Будем использовать следующие обозначения:

E, E_0, E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства;

$\mathbb{R}^n$ – множество вещественных чисел;

$C_{[a,b]}$ – пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве E.

Пусть Y подмножество банахова пространства E, тогда:

$P(Y)$ – множество всех непустых подмножеств в Y;

$C(Y)$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств в Y;

$K(Y)$ – множество всех непустых компактных подмножеств в Y;

$K_v(Y)$ – множество непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y;

$C_v(Y)$ – множество непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства Y.

Если $x_0 \in E$ – некоторая точка, то $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, а $U_R[x_0]$ – открытый шар радиуса R с центром в x_0.

Многозначные отображения в диссертации обозначаются заглавными буквами F, G, P, Q, Ψ, Φ, а прописными буквами $f, g, q, j, v, w, \psi, \varphi$ однозначные отображения.

Будем обозначать:

$F_+^{-1}(Y)$ – малый прообраз множества Y;

$\Gamma_X(F) = \{(x, z) \mid z \in F(x),\ x \in X\} \subset X \times Y$ – график многозначного отображения $F : X \to P(Y)$.

$FixF$ – множество неподвижных точек многозначного отображения F;

Если Ω – подмножество нормированного пространства E, то :

$co(\Omega)$ – выпуклая оболочка множества Ω;

$\overline{\Omega}$ – замыкание множества Ω;

$\overline{co}(\Omega)$ – замыкание выпуклой оболочки множества Ω.

Заглавными буквами A, B в работе обычно обозначаются линейные операторы.

Также будем обозначать:

$D(A)$ – область определения линейного оператора A;

$Ker(A) = \{x \in D(A) \mid A(x) = 0\}$ – ядро оператора A.

Если X – метрическое пространство, множества $A, B \subset X$, то:

$\rho_*(A, B) = \sup\limits_{a \in A} \rho(a, B)$ - полуотклонение множества A от множества B;

$h(A, B) = max\{\rho_*(A, B);\ \rho_*(B, A)\}$ – метрика Хаусдорфа.

Будем также использовать следующие обозначения:

$dim(A)$ – топологическая размерность множества A;

$\psi(\Omega)$ – монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности;

$\chi(\Omega)$ – мера некомпактности Хаусдорфа;

$\alpha(\Omega)$ – мера некомпактности Куратовского.

Введение

Актуальность темы. В конце XX века многозначный анализ и теория дифференциальных включений начали бурно развиваться в связи с развитием теории оптимального управления, теории игр, негладкого анализа и других разделов современной математики.

Исследование различных классов нелинейных задач, построение и изучение разрешимости адекватных им классов операторных уравнений и включений традиционно включается в нелинейный функциональный анализ. При изучении вопросов, связанных с разрешимостью нелинейных уравнений и включений, важную роль играют качественные методы, в частности, теоремы о неподвижной точке.

Современная теория неподвижных точек вполне непрерывных многозначных отображений была построена на работах С. Какутани [38], С. Эйленберга и Д. Монтгормери [32], А. Гранаса [36], Л. Гурневича [37], А.Д. Мышкиса, Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, В.В. Обуховского [5] и многих других.

Обобщением понятия неподвижной точки является решение операторного включения вида $f(x) \in F(x)$, где $f(x)$ - однозначное отображение, $F(x)$ - многозначное отображение.

В 1997 году появилась работа B. Ricceri [41], посвященная изучению уравнений вида $A(x) = f(x)$, где A - линейный непрерывный сюръективный оператор, f - компактное однозначное отображение. В этой работе не только была доказана разрешимость таких уравнений, но и изучена топологическая размерность множества решений.

Результаты работы B. Ricceri были обобщены Б.Д. Гельманом в работе [10]. В дальнейшем Б.Д. Гельман изучал уравнения и включения в случае, когда A является замкнутым линейным оператором. В своих работах Б.Д. Гельман рассматривал липшицевы и вполне непрерывные возмущения замкнутых линейных операторов и приложения полученных теорем к проблеме разрешимости операторных уравнений и включений (см., например [13], [15], [17], [14] и др.)

Настоящая работа посвящена изучению операторных включений вида $A(x) \in F(x)$, где A - линейный сюръективный оператор, F - многозначное отображение с выпуклыми компактными образами, действующими в банаховых пространствах.

В первой части изучаются операторные включения в случае, когда многозначное отображение F является вполне непрерывным. Полученные результаты применяются к изучению вырожденных дифференциальных включений вида $A(x') \in F(t,x)$, где A - линейный сюръективный оператор, F - многозначное компактное отображение. В настоящее время существует много статей и монографий, посвященных вырожденным дифференциальным уравнениям. Появились работы, изучающие задачу Коши для вырожденных дифференциальных включений (см., например [31], [40], [17] и др.) Изучение данного класса дифференциальных включений требует совершенно новый подход к изучению разрешимости и свойств множества решений операторных включений вида $A(x) \in F(x)$, где A - замкнутый линейный оператор, F - многозначное отображение, отличных от тех, которые рассматривались в работах Б.Д. Гельмана (см., например, [17]).

Вторая часть работы посвящена вопросам разрешимости операторных включений вида $A(x) \in F(x)$ в случае, когда многозначное отображение F является уплотняющим относительно оператора A,

Теория уплотняющих отображений (как однозначных [2], так и многозначных [39]) находит многочисленные приложения в различных задачах современной математики. Уплотняющие отображения – это такие отображения, свойства которых можно охарактеризовать как промежуточные между свойствами сжимающих и вполне непрерывных отображений.

Рассмотрению этих вопросов и посвящена данная работа.

Цель работы.

Целью данной работы является изучение разрешимости и свойств множества решений операторных включений, у которых главная часть является линейным сюръективным оператором и приложение полученных результатов к изучению разрешимости новых классов вырожденных дифференциальных включений и управляемых систем.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Отметим основные результаты:

1. Доказаны теоремы о разрешимости и размерности множества решений операторных включений, у которых главная часть является замкнутым линейным сюръективным оператором, а многозначное возмущение вполне непрерывно относительно этой главной части.

2. Рассмотрены приложения доказанных теорем к разрешимости вырожденных дифференциальных включений в банаховых пространствах, у которых вырождение задается замкнутым линейным сюръективным оператором.

3. Изучена проблема существования решений управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями.

4. Доказаны теоремы о разрешимости и размерности множества решений операторных включений, у которых главная часть является непрерывным линейным сюръективным оператором, а многозначное возмуще-

ние является уплотняющим относительно главной части. Рассмотрены приложения полученных теорем для изучения одного класса вырожденных дифференциальных включений.

Методы исследования.

В работе использованы методы функционального анализа, теории многозначных отображений и дифференциальных включений.

Теоретическая и практическая ценность.

Данная работа носит теоретический характер. Представленные в ней результаты могут быть использованы при изучении новых классов операторных и дифференциальных включений, задач управления.

Апробация работы.

Материалы диссертации докладывались на международных научных конференциях "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (Воронеж, ПМТУММ-2012)"; "Воронежская зимняя школа С.Г. Крейна - 2012"; на Воронежских зимних математических школах (ВЗМШ-2011, ВЗМШ-2013)"; на XXIII Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач"(Воронеж, 2012г.); на Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – VI. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2013); на научных конференциях в Воронежском государственном педагогическом университете. Результаты диссертации докладывались на семинаре проф. Обуховского В.В. (ВГПУ, 2013).

Публикации по теме диссертации.

Результаты диссертации опубликованы в 8 работах [19], [20], [21], [24] - [28]. Работы [19], [20], [21] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных опубликованных работ [19], [20], [21] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на пункты и подпункты, и списка литературы, содержащего 41 наименование. Объем работы составляет 84 страницы текста.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дается краткий обзор литературы по теме диссертации и излагаются основные результаты.

Первая глава является вспомогательной, она содержит сведения из теории многозначных отображений, необходимые в дальнейшем.

В **пункте 1.1** приводятся определения полунепрерывности сверху и снизу многозначных отображений и рассматриваются некоторые их свойства. Приводится так же определение непрерывного многозначного отображения.

В **пункте 1.2** даются определения полуотклонения множеств, метрики Хаусдорфа и сжимающего отображения.

В **пункте 1.3.** приводятся определение непрерывного сечения многозначного отображения и приводится теорема Майкла о непрерывном сечении.

В **пункте 1.4.** дается определение вполне непрерывного многозначного отображения и коротко сформулированы основные теоремы о неподвижной точке: теорема Какутани и некоторые следствия из нее.

В **пункте 1.5** излагаются необходимые сведения из теории многозначных измеримых отображений. В нем даются определения измеримого и сильно измеримого сечения многозначного отображения, представления Кастена, многозначного оператора суперпозиции, интегрального многозначного оператора и др. Приводятся теоремы об измеримости многозначного отображения, о суперпозиционной селектируемости многозначного отображения, о замкнутости интегрального многозначного оператора. В этом же пункте дается формулировка теоремы Скорца-Драгони.

1.5.10 Теорема (Скорца-Драгони). *Пусть E_0, E – сепарабельные банаховы пространства и многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда для любого $\delta > 0$ существует замкнутое подмножество $I_\delta \subset I$, такое, что $\mu(I \backslash I_\delta) \leq \delta$, и сужение F на $I_\delta \times E_0$ непрерывно.*

В **пункте 1.6** этой главы рассматривается задача Коши для дифференциального включения.

Рассмотрим задачу Коши:

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

где $F : I \times B_R[0] \to K_v(E)$ - вполне непрерывное многозначное отображение, $I = [t_0, T]$ - некоторый интервал вещественной прямой, снабженный мерой Лебега.

1.6.1 Определение. Решением задачи Коши (1.1)-(1.2) *на некотором промежутке $[t_0, \tau], t_0 < \tau \leq T$ называется абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, \tau] \to B_R[0]$, удовлетворяющая начальному условию (1.2) и включению (1.1) почти в каждой точке промежутка $[t_0, \tau]$.*

Приводятся теоремы о существовании локального решения задачи Коши.

1.6.2 Теорема. *Функция $x : [t_0, \tau] \to E$, является решением задачи (1.1)-(1.2) тогда и только тогда, когда она является неподвижной* *точкой многозначного оператора*

$$\mathcal{J}_F : C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n) \to P(C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{J}_F = x_0 + j \circ \mathcal{P}_F.$$

1.6.3 Теорема. *Пусть $F : [t_0, T] \times B_R[x_0] \to K_v(E)$ - вполне непрерывное многозначное отображение, тогда существует число $0 < l_0 \leq T - t_0$ такое, что задача (1.1)-(1.2) имеет решение на промежутке $[t_0, t_0 + l_0]$.*

Вторая глава диссертации посвящена вопросам существования и свойствам множества решений операторных включений вида

$$A(x) \in F(x), \tag{2.1}$$

где A – замкнутый линейный сюръективный оператор, F – многозначное компактное относительно оператора A возмущение. Рассматриваются приложения полученных теорем для изучения вырожденных дифференциальных включений и одного класса управляемых систем.

Результаты этой главы опубликованы в статьях [19], [24], [25], [26], [27].

В **пункте 2.1** изучается разрешимость операторных включений и свойств множества решений включений вида $A(x) \in F(x)$, где $A(x)$ – замкнутый линейный оператор, $F(x)$ – многозначное отображение.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $D(A)$ – область определения оператора A. Тогда определено многозначное отображение

$$A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1),$$

где $Cv(E_1)$ – множество непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства E_1.

2.1.1 Определение. *Число*

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} \left(\frac{inf\{||x|| \ | \ x \in E_1, A(x) = y\}}{||y||} \right)$$

называется **нормой** *многозначного отображения* A^{-1}.

Известно, что при сделанных предположениях $||A^{-1}|| < \infty$.

Пусть X – подмножество пространства E_1, $F : X \to Kv(E_2)$ – многозначное отображение.

Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x). \tag{2.1}$$

Обозначим $N(A, F)$ множество решений включения (2.1).

Пусть $x_0 \in D(A) \subset E_1$ некоторая точка, $B_R[x_0]$ замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to Kv(E_2)$ — вполне непрерывное многозначное отображение.

2.1.5 Теорема. *Если существует такое число $k > ||A^{-1}||$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leq \frac{R}{k},$$

то множество $N(A, F) \neq \emptyset$.

2.1.6 Следствие. *Пусть вполне непрерывное многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующему условию: существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство:*

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leq c||x|| + d.$$

Если $c < \frac{1}{||A^{-1}||}$, *то множество* $N(A, F) \neq \emptyset$.

2.1.8 Следствие. *Пусть вполне непрерывное многозначное отображение* $F : E_1 \to Kv(E_2)$ *удовлетворяет следующему условию: существуют неотрицательные числа* c *и* d *такие, что для любого* $x \in E_1$ *справедливо неравенство:*

$$\max_{u \in F(x)} ||u|| \leq c||x|| + d.$$

Пусть размерность $dim(Ker(A)) \geq 1$.

Если

$$c < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то множество $N(A, F) \neq \emptyset$ *и неограничено.*

2.1.9 Следствие. *Пусть отображения* A *и* F *удовлетворяют условиям следствия 2.1.6, тогда многозначное отображение* $\Psi = A + F$ *является сюръективным, т.е для любой точки* $y \in E_2$ *множество*

$$\Psi^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid \Psi(x) \ni y\} \neq \emptyset.$$

В **пункте 2.2** доказанные теоремы применяются к исследованию вопросов существования локальных решений задачи Коши для одного класса вырожденных дифференциальных включений.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – линейный замкнутый сюръективный оператор с областью определения $D(A)$.

Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0. Пусть многозначное отображение $F : [0, T] \times B_R[x_0] \longrightarrow Kv(E_2)$ вполне непрерывно по совокупности переменных.

Рассмотрим следующую задачу:

$$A(x') \in F(t, x), \tag{2.4}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{2.5}$$

2.2.1 Определение. Решением задачи (2.4), (2.5) *на промежутке* $[0, l]$, *где* $0 < l \leq T$, *называется абсолютно непрерывная функция* $x(t)$ *такая, что* $A(x'(t)) \in F(t, x(t))$ *для почти всех* $t \in [0, l]$, *и* $A(x(0)) = A(x_0)$.

Обозначим $\sum(x_0, [0, l])$ - множество решений задачи $(2.4), (2.5)$ на промежутке $[0, l]$. Имеет место следующая теорема.

2.2.2 Теорема. *При сделанных предположениях найдется такое число* $l_0 > 0$, *что* $\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset$.

В **пункте 2.3** теоремы, полученные в пунктах 2.1 и 2.2, применяются к изучению топологической размерности множества локальных решений вырожденных дифференциальных включений.

Пусть банахово пространство E представляется в виде прямого произведения банаховых пространств E_1 и E_2, то есть $E = E_1 \times E_2$. Пусть

$$U = U_{R_1}(x_0) \times U_{R_2}(y_0)$$

прямое произведение открытого шара $U_{R_1}(x_0) \subset E_1$ с центром в точке x_0 и радиуса R_1 и открытого шара $U_{R_2}(y_0) \subset E_2$ с центром в точке y_0 и радиуса R_2. Тогда замыканием множества U будет

$$\overline{U} = B_{R_1}[x_0] \times B_{R_2}[y_0].$$

Пусть $F_1 : \overline{U} \to Kv(E_1),\ F_2 : \overline{U} \to Kv(E_2)$ - многозначные отображения. Рассмотрим

$$F = F_1 \times F_2 : \overline{U} \to Kv(E_1 \times E_2).$$

Пусть $\Phi = i - F$ - многозначное векторное поле, порожденное отображением F. Обозначим $N(\Phi, \overline{U})$ множество неподвижных точек F, то есть

$$N(\Phi, \overline{U}) = \{x \in \overline{U} \mid x \in F(x)\} = \{x \in \overline{U} \mid 0 \in \Phi(x)\}$$

Имеет место следующая теорема (см. [14], [17]).

2.3.6 Теорема. *Если:*

(a) многозначное отображение F_1 - вполне непрерывно;

(b) многозначное отображение F_2 - непрерывно, компактно и для любой точки $(x, y) \in U$ выполнено неравенство

$$dim(F_2(x, y)) \geq n;$$

(c) топологическая степень $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$.

Тогда топологическая размерность $dim(N(\Phi, \overline{U})) \geq n$.

Справедливо следующее следствие из этой теоремы.

Пусть $F_1 : \overline{U} \to Kv(E_1)$ вполне непрерывное многозначное отображение.

Рассмотрим включение

$$x \in F_1(x, y).$$

Решением этого включения назовем пару (x_*, y_*) такую, что $x_* \in F_1(x_*, y_*)$. Обозначим множество решений этого уравнения $Fix(F_1, \overline{U})$.

2.3.7 Следствие. *Пусть $dim(E_2) \geq n$. Если $F_1(x, y) \subset U_{R_1}[x_0]$ для любых $x \in B_{R_1}[x_0]$, $y \in B_{R_2}[y_0]$, то $dim(Fix(F_1, \overline{U})) \geq n$.*

Применяя следствие 2.3.2 к изучению $dim(\sum(x_0, [0, l]))$ получим следующую теорему.

2.3.9 Теорема. *Пусть подпространство $KerA$ является дополняемым в пространстве E_1. Если $dim(KerA) \geq 1$, то существует такое число $l_0 > 0$, что*

$$\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset \ \ и \ \ dim(\sum(x_0, [0, l_0])) = \infty.$$

Пункт 2.4 посвящен изучению управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями. В нем проблема существования решений таких систем, сводится к задаче существования решений у операторных включений, содержащих замкнутые сюръективные операторы.

В работе изучается сначала абстрактная модель управляемой системы.

Пусть E_1, E_2, E_3 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \times E_3 \to E_2$ нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(f_1) f является вполне непрерывным отображением;

(f_2) существуют положительные числа c_1 и d_1 такие, что для любой точки $(x, u) \in E_1 \times E_3$ справедливо неравенство:

$$||f(x, u)|| \leq c_1(||x|| + ||u||) + d_1;$$

(f_3) при каждом фиксированном $x \in E_1$ отображение

$$f_x = f(x, \cdot) : E_3 \to E_2$$

является аффинным отображением.

Пусть $U : E_1 \to K_v(E_3)$ - полунепрерывное сверху многозначное отображение, удовлетворяющее следующему условию:
существуют положительные числа c_2 и d_2 такие, что

$$\max_{u \in U(x)} ||u|| \leq c_2||x|| + d_2 \tag{2.11}$$

для любого $x \in E_1$.

Изучается следующая задача:

$$A(x) = f(x, u), \tag{2.12}$$

$$u \in U(x). \tag{2.13}$$

Задачу (2.12)-(2.13) будем называть задачей управления с обратной связью, а множество $U(x)$ - множеством допустимых управлений для точки $x \in E_1$.

Решением управляемой системы (2.12)-(2.13) будем называть пару (x_*, u_*) такую, что

$$A(x_*) = f(x_*, u_*), \tag{2.14}$$

$$u_* \in U(x_*). \tag{2.15}$$

Точку $x_* \in E_1$ назовем *траекторией управляемой системы*, а $u_* \in E_3$ - соответствующим управлением.

В силу сделанных предположений множество

$$F(x) = f(x, U(x))$$

является выпуклым компактом для любого $x \in E_1$, а отображение $F : E_1 \to K_v(E_2)$ является полунепрерывным сверху.

Очевидно, что каждому решению включения

$$A(x) \in F(x). \tag{2.16}$$

отвечает некоторое решение задачи управления (2.14) - (2.15).

2.4.1 Теорема. *Пусть отображение f удовлетворяет условиям (f_1)–(f_3), многозначное отображение U - полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию (2.11). Тогда если*

$$c_1(1 + c_2) < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то множество решений управляемой системы (2.14) - (2.15) непусто.

Применим следствие 2.1.6 к изучению одного класса управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями.

Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $g : [0,T] \times E_1 \times E_3 \to E_2$ – нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(g_1) g является вполне непрерывным;

(g_2) существуют непрерывные функции α и β, определенные на промежутке $[0,T]$ такие, что для любой точки $(t,x,u) \in [0,T] \times E_1 \times E_3$ справедливо неравенство

$$||g(t,x,u)|| \leq \alpha(t)(||x|| + ||u||) + \beta(t). \tag{2.17}$$

(g_3) при любых фиксированных $t \in [0,T]$ и $x \in E_1$ отображение g аффинно по u.

Пусть многозначное отображение $U : C_{([0,T],\, E_1)} \to K_v(C_{([0,T],\, E_3)})$ - полунепрерывно сверху и существуют числа c_2 и d_2 такие, что справедливо неравенство:

$$\max_{u \in U} ||u|| \leq c_2||z|| + d_2 \tag{2.18}$$

для любого $z \in C_{([0,T],\, E_1)}$.

Пусть $x_0 \in D(A)$ - некоторая точка.

Рассматривается следующая задача:

$$(Ax)'(t) = g(t, x(t), u(t)), \tag{2.19}$$

где

$$u(t) \in U(x)(t), \tag{2.20}$$

для любого $t \in [0,\ T]$,

$$A(x_0) = Ax_0. \tag{2.21}$$

2.4.2 Теорема. *Пусть отображение g удовлетворяет условиям (g_1)–(g_3), многозначное отображение U - полунепрерывно сверху и удовле-*

творяет оценке (2.18). Тогда если

$$(1 + c_2) \int\limits_0^T \alpha(s)ds < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то задача (2.19)-(2.21) имеет решение.

Третья глава диссертации посвящена изучению многозначных уплотняющих возмущений линейных непрерывных сюръективных операторов. В ней доказываются теоремы о существовании решений включений вида $A(x) \in F(x)$, где A – непрерывный линейный сюръективный оператор, а F – уплотняющее многозначное возмущение A. Полученные теоремы применяются для доказательства существования локальных решений одного класса вырожденных включений в банаховом пространстве. Результаты этой главы опубликованы в [20], [21], [28].

В **пункте 3.1** приведены некоторые свойства многозначных уплотняющих отображений. Даны определение ψ-уплотняющего многозначного отображения и теорема о неподвижной точки для ψ-уплотняющего многозначного отображения.

В **пункте 3.2** этой главы изучены свойства меры некомпактности индуцированной линейным непрерывным сюръективным оператором. Даны определение (A, ψ)-уплотняющего многозначного отображения и определение A-подчиненного оператора.

Пусть E, E_0 - банаховы пространства, $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Рассматривается отображение $\psi_A : P(E) \to \mathbb{R} \cup \infty$, определенное следующим образом:

$$\psi_A(\Omega) = \psi(A(\Omega)).$$

Это отображение ψ_A называется *мерой некомпатности индуцированной оператором* A.

Пусть $D(F)$ ограниченное подмножество в E, $A : E \to E_0$ – линейный непрерывный сюръективный оператор, $F : D(F) \to K_v(E_0)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение.

3.2.1 Определение. *Отображение* F *называется* (A, ψ)*-уплотняющим, если для любого множества* $Q \subset D(F)$ *из неравенства*

$$\psi(F(Q)) \geq \psi_A(Q)$$

вытекает равенство

$$\psi_A(Q) = 0.$$

3.2.3 Определение. *Будем говорить, что* **оператор** B **подчинен оператору** A*, если для любого* $x \in E$ *справедливо равенство*

$$||A(x)|| \geq ||B(x)||.$$

В работе рассматриваются примеры (A, ψ)-уплотняющих многозначных отображений.

Пусть $A : E \to E_0$ - непрерывный сюръективный линейный оператор, оператор $B : E \to E_1$ подчинен оператору A. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Куратовского α. Пусть множество X является ограниченным подмножеством в E. Предположим, что отображение $f_1 : X \subset E \to E_0$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию:

существует такое число $k \in (0, 1)$*, что для любых точек* $x_1, x_2 \in X$

справедливо неравенство

$$||f_1(x_1) - f_1(x_2))|| \leq k||B(x_1) - B(x_2)||, \tag{3.1}$$

т.е. f_1 является B-сжимающим отображением.

Пусть $F_2 : X \to K_v(E_0)$ – вполне непрерывное многозначное отображение. Пусть отображение $F = f_1 + F_2$. В пространстве E_0 задана мера некомпактности Куратовского α.

3.2.5 Предложение. *При сделанных предположениях многозначное отображение F является (A, α)-уплотняющим отображением.*

Пусть оператор $B : E \to E_1$ подчинен оператору A, множество X – ограниченное подмножество в E. Пусть $G : X \times E_1 \to K_v(E_0)$ – многозначное полунепрерывное сверху отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in X$ и любых $y_1, y_2 \in E_1$ справедливо неравенство

$$h(G(x, y_1), G(x, y_2)) \leq k||y_1 - y_2||;$$

2) для любого $y \in E_1$ многозначное отображение $G(\cdot, y) : X \to K_v(E_0)$ является вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $F : X \to K_v(E_0)$, $F(x) = G(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ.

3.2.7 Предложение. *При сделанных предположениях многозначное отображение F является (A, χ)-уплотняющим отображением.*

В **пункте 3.3** изучается разрешимость включений с (A, ψ)-уплотняющими многозначными отображениями.

Пусть E, E_0 - банаховы пространства. Пусть $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный сюръективный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ. Пусть $x_0 \in E$ - некоторая точка, $B_R[x_0]$-замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to K_v(E_0)$ – многозначное полунепрерывное сверху (A, ψ)-уплотняющее отображение.

Рассмотрим включение

$$A(x) \in F(x), \tag{3.5}$$

$N(A, F)$ - множество решений этого включения. Имеет место следующая теорема.

3.3.1 Теорема. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leq \frac{R}{k},$$

то $N(A, F) \neq \emptyset$.

3.3.2 Следствие. *Пусть многозначное отображение $F : E \to K_v(E_0)$ и удовлетворяет следующим условиям:*

(i) существуют такие $c > 0$ и $d > 0$ что для любой точки $x \in E$ справедливо неравенство $\min\limits_{u \in F(x)} ||u|| \leq c||x|| + d$;

(ii) $c||A^{-1}|| < 1$.

Тогда включение (3.5) имеет решение.

В **пункте 3.4** рассматривается теорема о существовании локальных решений у одного класса вырожденных включений в банаховом пространстве

Пусть E_1, E_2, E_3 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - непрерывный линейный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ - непрерывный линейный оператор, подчиненный оператору A. Пусть точка $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0] \subset E_1$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x_0.

Пусть многозначное отображение $F_1 : [0,T] \times B_R[x_0] \to K_v(E_2)$ является вполне непрерывным, а многозначное отображение $F_2 : [0,T] \times E_3 \to K_v(E_2)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) F_2 - непрерывно по совокупности переменных;

2) существует такое α, что для любого $t \in [0,T]$ и для любых $y_1, y_2 \in E_1$ справедливо неравенство:

$$h(F(t,y_1), F(t,y_2)) \leq \alpha ||y_1 - y_2||.$$

Рассматривается следующая задача:

$$(Ax(t))' \in F_1(t, x(t)) + F_2(t, B(x(t))), \tag{3.6}$$

$$A(x(0)) = Ax_0. \tag{3.7}$$

Решением задачи (3.6), (3.7) на промежутке $[0,l]$, $0 < l \leq T$, будем называть непрерывную функцию x_*, определенную на $[0,l]$ такую, что

$$(Ax_*(t))' \in F_1(t, x_*(t)) + F_2(t, Bx_*(t)),$$

$$A(x_*(0)) = Ax_0.$$

Обозначим $\sum(x_0, [0,l])$ - множество решений задачи (3.6), (3.7) на промежутке $[0,l]$.

Имеет место следующая теорема.

3.4.5 Теорема. *При сделанных предположениях найдется такое число $l_0 > 0$, что $\sum(x_0, [0,l_0]) \neq \emptyset$.*

1 Основные понятия теории многозначных отображений

1.1 Основные обозначения и определения

Пусть X, Y – метрические пространства.

Многозначное отображение пространства X в Y - это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x.

Пусть Y - подмножество банахова пространства E, обозначим тогда:
$P(Y)$ – множество всех непустых подмножеств в Y;
$C(Y)$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств в Y;
$Cv(Y)$ – множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств в Y;
$K(Y)$ – множество всех непустых компактных подмножеств в Y;
$K_v(Y)$ – множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y.

Если многозначное отображение $F : X \to Y$ и имеет выпуклые компактные образы, то будем это записывать следующим образом $F : X \to K_v(Y)$.

Если образы многозначного отображения F являются замкнутыми, то будем записывать это следующим образом, $F : X \to C(Y)$. Аналогично, обозначение $F : X \to C_v(Y)$ означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми замкнутыми множествами.

Если $Q \subset X$, то образом этого множества является множество

$$F(Q) = \bigcup_{x \in Q} F(x).$$

Графиком многозначного отображения $F : X \to P(Y)$ называется множество

$$\Gamma_X(F) = \{(x, z) | z \in F(x), x \in X\} \subset X \times Y.$$

1.1.1 Определение. *Многозначное отображение* $F : X \to P(Y)$ *называется* **полунепрерывным снизу в точке** $x_0 \in X$**,** *если для любого открытого множества* $V \subset Y$ *такого, что* $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ *найдется открытая окрестность* U *точки* x_0 *такая, что* $F(x) \cap V \neq \varnothing$ *для любого* $x \in U$.

Если F *– полунепрерывно снизу в каждой точке* $x \in X$*, то оно называется* **полунепрерывным снизу.**

1.1.2 Предложение. *(i) Для того чтобы отображение* $F : X \to P(Y)$ *было полунепрерывно снизу в точке* x_0*, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта* $K \subset F(x_0)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существовало* $\delta = \delta(x_0, K, \varepsilon) > 0$ *такое, что как только* $\rho(x_0, x) < \delta$*, то* $K \subset U_\varepsilon(F(x))$.

(ii) Следующие условия эквивалентны:

1) F *– полунепрерывно снизу;*

2) для любого открытого множества $V \subset Y$ *полный прообраз этого множества*

$$F_-^{-1}(V) = \{x \in X | F(x) \cap V \neq \varnothing\}$$

является открытым множеством в X.

Доказательство см., например в [11].

1.1.3 Определение. *Многозначное отображение* $F : X \to P(Y)$ *называется* **полунепрерывным сверху в точке** $x_0 \in X$**,** *если для любого открытого множества* $V \subset Y$*,* $V \supset F(x_0)$*, существует открытая окрестность* U *точки* x_0 *такая, что* $F(U) \subset V$*. Если* F *-*

полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$, то F называется полунепрерывным сверху многозначным отображением.

1.1.4 Предложение. *Следующие условия эквивалентны:*

1) F - полунепрерывно сверху;

2) для любого открытого множества $V \subset Y$ малый прообраз этого множества

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in X | F(x) \subset V\}$$

является открытым множеством в X.

1.1.5 Предложение. *Если многозначное отображение $F : X \to C(Y)$ полунепрерывно сверху, то его график $\Gamma_X(F)$ является замкнутым множеством в пространстве $X \times Y$.*

1.1.6 Предложение. *Пусть Y компактное метрическое пространство, $F : X \to C(Y)$ – многозначное отображение. Если график $\Gamma_X(F)$ является замкнутым множеством в $X \times Y$, то отображение является полунепрерывным сверху.*

1.1.7 Определение. *Многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ называется* **замкнутым,** *если его график Γ_F есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.*

1.1.8 Определение. *Многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ называется* **непрерывным,** *если оно одновременно является полунепрерывным и сверху и снизу.*

Доказательства этих свойств см., например, в [6].

1.2 Метрика Хаусдорфа. Липшицевы отображения

Пусть X – метрическое пространство, $C(X)$ – множество непустых замкнутых подмножеств в X, множества A, B – замкнутые подмножества в X.

Величину $\rho_*(A, B) = \sup\limits_{a \in A} \rho(a, B)$ называют *полуотклонением множества A от множества B.*

Рассмотрим функцию

$$h(A, B) = max\{\rho_*(A, B); \rho_*(B, A)\}, \text{ где } h(A, B) \subset \mathbb{R} \cup \infty$$

Эта функция называется *метрикой Хаусдорфа* и удовлетворяет следующим условиям:

1) $h(A, B) \geq 0$.

2) Если $h(A, B) = 0$, то $A = B$.

3) $h(A, B) = h(B, A)$.

4) $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ для любых A, B, C из $C(X)$.

5) Если $A = x_0, B = y_0$, то $h(A, B) = \rho(x_0, y_0)$.

Доказательства перечисленных свойств вытекает из определения функции $h(A, B)$ и свойств $\rho_*(A, B)$, см., например, в [6].

Пусть $F : X \to C(X)$ многозначное отображение.

1.2.1 Определение. *Будем говорить, что отображение F является* **липшицевым**, *если существует такое число $c > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнятся неравенство*

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq c\rho(x_1, x_2).$$

Если отображение F является липшицевым и число $c \in (0, 1)$, то многозначное отображение F называется *сжимающим.*

1.3 Непрерывные сечения и аппроксимации

Пусть X и Y - метрические пространства.

1.3.1 Определение. *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется* **непрерывным сечением** *многозначного отображения F, если для любой точки $x \in X$ выполнено включение $f(x) \in F(x)$.*

Имеет место следующая важная теорема (см. например [6]).

1.3.2 Теорема о непрерывном сечении (Майкл). *Пусть X - паракомпактное топологическое пространство; Y - банахово пространство. Тогда каждое полунепрерывное снизу многозначное отображение $F : X \to C_v(Y)$ имеет непрерывное сечение.*

1.4 Теоремы о неподвижных точках многозначных отображений

Пусть $X \subseteq Y$ – некоторые множества, $F : X \to P(Y)$ –многозначное отображение. Точка $x_* \in X$ называется неподвижной точкой многозначного отображения F, если $x_* \in F(x_*)$.

Множество всех неподвижных точек F обозначают $FixF$.

Пусть E_1, E_2 – нормированные пространства, X – подмножество в E_1. Пусть многозначное отображение $F : X \to K_v(E_2)$.

1.4.1 Определение. *Будем говорить, что многозначное отображение F* **вполне непрерывно,** *если выполнены следующие условия:*
1) F - полунепрерывно сверху;
2) для любого ограниченного множества $A \subset X$, $\overline{F(A)}$ является компактом в E_2.

1.4.2 Теорема (Боненбласт-Карлин-Какутани). *Если M - ограниченное выпуклое замкнутое подмножество E и многозначное отображение $F : M \to K_v(M)$ вполне непрерывно, то*

$$FixF \neq \varnothing.$$

1.4.3 Следствие. *Если M - выпуклое замкнутое ограниченное подмножество E, многозначное отображение $F : M \to K_v(E)$ вполне непрерывно и для любого $x \in M$ выполняется неравенство*

$$F(x) \cap M \neq \varnothing,$$

то многозначное отображение F имеет неподвижную точку.

1.5 Измеримые многозначные функции. Многозначный оператор суперпозиции

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ - компактный интервал, снабженный мерой Лебега μ и E, E_0 - банаховы пространства.

1.5.1 Определение. *Многозначная функция $F : I \to K(E)$ называется* **измеримой,** *если для любого открытого множества $V \subset E$ множество $F_+^{-1}(V)$ измеримо.*

1.5.2 Определение. *Функция $f : I \to E$ называется* **измеримым сечением** *многозначной функции $F : I \to K(E)$, если отображение f измеримо и*

$$f(t) \in F(t)$$

для μ - почти всех $t \in I$.

Множество всех измеримых сечений F обозначим S_F.

Изучим основные свойства многозначного оператора суперпозиции. Нам понадобятся следующие определения и теоремы (см. например [6]).

1.5.3 Определение. *Счетное семейство $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_F$ называется* **представлением Кастена** *для F, если*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f(t)} = F(t)$$

для μ - п.в. $t \in I$.

1.5.4 Определение. *Функция $f : I \to E$ называется* **сильно измеримым сечением** *многозначной функции $F : I \to K(E)$, если она сильно измерима и для μ-почти всех $t \in I$ выполняется включение*

$$f(t) \in F(t).$$

1.5.5 Теорема. *Пусть E - сепарабельное банахово пространство. Для многозначной функции $F : I \to K(E)$ следующие условия эквивалентны:*

(a) F измерима;

(в) F обладает представлением Кастена;

(e) F обладает свойством Лузина: для каждого $\delta > 0$ существует замкнутое подмножество $I_\delta \subset I$ такое, что $\mu(I \backslash I_\delta) \leq \delta$ и сужение F на I_δ непрерывно.

1.5.6 Определение. *Многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K(E)$* **удовлетворяет верхним (нижним) условиям Каратеодори,** *если:*
а) для всех фиксированных $x \in E_0$ многозначная функция

$$F(\cdot, x) : I \to K(E)$$

измерима;
б) почти для любого фиксированного $t \in I$ многозначное отображение

$$F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$$

полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу).

Если многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ одновременнно удовлетворяет верхним и нижним условиям Каратеодори, то говорят, что многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори.*

1.5.7 Теорема. *Пусть E_0, E - банаховы пространства и многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ таково, что*

F1) для каждого $x \in E_0$ многозначная функция $F(\cdot, x) : I \to K(E)$ имеет сильно измеримое сечение;

F2) для μ-почти всех $t \in I$ многозначное отображение $F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$ полунепрерывно сверху.

Тогда многозначное отображение F суперпозиционно селектируемо, то есть для любой сильно измеримой функции $q : I \to E_0$ существует сильно измеримое сечение $f : I \to E$ многозначной функции

$$\Phi(t) = F(t, q(t)).$$

Пусть E_0, E – банаховы пространства; многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ суперпозиционно селектируемо и удовлетворяет следующему условию:

F3) для любого непустого ограниченного подмножества $\Omega \subset E_0$ существует такая функция $\nu_\Omega \in L^1_+(I)$, что

$$||F(t, x)|| \leq \nu_\Omega(t)$$

для всех $x \in \Omega$ и п.в. $t \in I$.

Тогда многозначное отображение

$$\mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to P(L^1(I; E)),$$

сопоставляющее каждой непрерывной функции $q \in C(I; E_0)$ множество всех суммируемых по Бохнеру сечений многозначной функции $\Phi, \Phi(t) = F(t, q(t))$, называется **многозначным оператором суперпозиции,** порожденным F.

Пусть $I = [t_0, T]$ и $j : L_1(I; E) \to C(I; E)$ - оператор интегрирования

$$j(f)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

1.5.8 Определение. *Композицию*

$$j \circ \mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to C_v(C(I; E))$$

назовем **интегральным многозначным оператором,** *порожденным многозначным отображением F.*

1.5.9 Следствие. *Пусть многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K_v(E)$ удовлетворяет условиям (F1)-(F3). Тогда интегральный многозначный оператор*

$$j \circ \mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to C_v(C(I; E))$$

замкнут.

Если многозначное отображение F - вполне непрерывно, то интегральный многозначный оператор полунепрерывен сверху (см, например, 1.1.6).

1.5.10 Теорема (Скорца-Драгони). *Пусть E_0, E – сепарабельные банаховы пространства и многозначное отображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда для любого $\delta > 0$ существует замкнутое подмножество $I_\delta \subset I$, такое, что $\mu(I \backslash I_\delta) \leq \delta$, и сужение F на $I_\delta \times E_0$ непрерывно.*

1.6 Дифференциальные включения

Пусть E - банахово пространство, $x_0 \in E$, $B_R[x_0] \in E$ - замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0.

Рассмотрим задачу Коши:

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

где $F : I \times B_R[0] \to K_v(E)$ - вполне непрерывное многозначное отображение, $I = [t_0, T]$ - некоторый интервал вещественной прямой, снабженный мерой Лебега.

1.6.1 Определение. Решением задачи Коши (1.1)-(1.2) *на некотором промежутке* $[t_0, \tau], t_0 < \tau \leq T$ *называется абсолютно непрерывная функция* $x : [t_0, \tau] \to B_R[0]$, *удовлетворяющая начальному условию (1.2) и включению (1.1) почти в каждой точке промежутка* $[t_0, \tau]$.

Пусть многозначное отображение F суперпозиционно селектируемо и удовлетворяет условию интегральной ограниченности. Тогда опеределен интегральный многозначный оператор (см. 1.5.8 Определение):

$$j \circ \mathcal{P}_F : C([t_0, \tau]; E) \to P(C([t_0, \tau]; E).$$

1.6.2 Теорема. *Функция* $x : [t_0, \tau] \to E$, *является решением задачи (1.1)-(1.2) тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой многозначного оператора*

$$\mathcal{J}_F : C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n) \to P(C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{J}_F = x_0 + j \circ \mathcal{P}_F.$$

1.6.3 Теорема. *Пусть* $F : [t_0, T] \times B_R[x_0] \to K_v(E)$ *- вполне непрерывное многозначное отображение, тогда существует число* $0 < l_0 \leq T - t_0$ *такое, что задача (1.1)-(1.2) имеет решение на промежутке* $[t_0, t_0 + l_0]$.

2 Вполне непрерывные многозначные возмущения линейных сюръективных операторов

2.1 Включения с сюръективными операторами

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $D(A)$ – область определения оператора A. Тогда для любой точки $y \in E_2$ множество

$$A^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid A(x) = y\} \neq \varnothing$$

является замкнутым и выпуклым, то есть определено многозначное отображение $A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где $Cv(E_1)$ – множество непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства E_1.

2.1.1 Определение. *Число*

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} \left(\frac{inf\{||x|| \ \mid \ x \in E_1, A(x) = y\}}{||y||}\right)$$

называется **нормой** *многозначного отображения* A^{-1}.

Известно (см., например, [6]), что при сделанных предположениях $||A^{-1}|| < \infty$. Рассмотрим пример вычисления $||A^{-1}||$.

2.1.2 Пример. Пусть $C_{[a,b]}$ – пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве E. Пусть $A : D(A) \subset C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ – оператор дифференцирования, $D(A)$ – множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Очевидно, что A является замкнутым сюръективным оператором. В работе [16] показано, что

$$||A^{-1}|| = \frac{b-a}{2}.$$

Если подпространство $Ker(A)$ не является дополняемым в пространстве E_1, то не существует линейного непрерывного оператора, правого обратного к оператору A. Однако имеет место следующее утверждение (см. [14]).

2.1.3 Лемма. *(i) Пусть y_0 - произвольная точка пространства E_2, x_0 – произвольная точка из множества $A^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*

1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $||x_0 - q(y)|| \leq k||y_0 - y||$ для любого $y \in E_2$.

(ii) Для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное отображение $\widetilde{q} : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:

1) $A(\widetilde{q}(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $||\widetilde{q}(y)|| \leq k||y||$ для любого $y \in E_2$.

Пусть $F : E_1 \to Kv(E_2)$ – многозначное отображение. Если Y - подмножество банахова пространства E_2, обозначим $Kv(Y)$ - множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y.

Пусть X – подмножество пространства E_1, $F : X \to Kv(E_2)$ – многозначное отображение.

Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x). \tag{2.1}$$

Обозначим $N(A, F)$ множество решений включения (2.1).

Нам будут необходимы следующие леммы.

Пусть q - отображение, правое обратное к отображению A. Рассмотрим многозначное отображение $F_1 : E_2 \times Ker(A) \to Cv(E_2)$ определенное условием:

$$F_1(x, u) = \overline{co}(q(F(x))) + u.$$

Тогда можно рассмотреть включение:

$$x \in \overline{co}(q(F(x))) + u. \tag{2.2}$$

2.1.4 Лемма. *Включения (2.1) и (2.2) эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что каждое решение включения (2.2) определяет решение включения (2.1). Действительно, пусть x_0 - решение включения (2.1), т.е. $A(x_0) \in F(x_0)$. Тогда

$$u_0 = x_0 - q(A(x_0)) \in Ker(A).$$

Следовательно,

$$F_1(x_0, u_0) = \overline{co}(q(F(x_0))) + u_0 \supset q(A(x_0)) + u_0 = x_0,$$

т.е. пара (x_0, u_0) является решением включения (2.2).

Пусть (x_0, u_0) решение включения (2.2), то есть

$$x_0 \in \overline{co}(q(F(x_0))) + u_0.$$

Тогда существует последовательность

$$\{x_n\} \subset co(q(F(x_0)))$$

такая, что $\{x_n\} \to x_0 - u_0$. Каждую точку x_n можно представить в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i,$$

где $0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ и $y_i \in q(F(x_0))$. Тогда существуют точки $z_i \in F(x_0)$ такие, что $q(z_i) = y_i$.

Имеем:

$$A(x_n) = A(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q(z_i)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i.$$

Тогда в силу выпуклости множества $F(x_0)$ точка $A(x_n) \in F(x_0)$.

Так как множество $F(x_0)$ компактно, то без ограничения общности можно считать, что $\{A(x_n)\} \to u_* \in F(x_0)$.

Тогда $\{x_n\} \to x_0 - u_0$ и $\{A(x_n)\} \to u_*$. В силу замкнутости оператора A имеем:

$$A(x_0 - u_0) = u_* \in F(x_0),$$

но $A(x_0 - u_0) = A(x_0)$. Тогда $A(x_0) \in F(x_0)$, то есть x_0 является решением включения (2.1). Лемма доказана.

Изучим разрешимость включения (2.1) на шаре в пространстве E_1.

Пусть $x_0 \in D(A) \subset E_1$ некоторая точка, $B_R[x_0]$ замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to Kv(E_2)$ — вполне непрерывное многозначное отображение.

2.1.5 Теорема. *Если существует такое число $k > ||A^{-1}||$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leq \frac{R}{k},$$

то множество $N(A, F) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $y_0 = A(x_0)$. Пусть $q : E_2 \to E_1$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $||x_0 - q(y)|| \leq k||y_0 - y||$ для любого $y \in E_2$.

Такое отображение всегда существует в силу леммы 2.1.3. Рассмотрим многозначное отображение $F_1(x) = \overline{co}(q(F(x)))$, $F_1 : B_R[x_0] \to Kv(E_2)$. Очевидно, что многозначное отображение F_1 является вполне непрерывным, так как F имеет компактные образы и является вполне непрерывным.

Оценим $\min\limits_{v\in F_1(x)} ||v-x_0||$ для произвольной точки $x\in B_R[x_0]$.

Имеем:

$$\min_{v\in F_1(x)} ||v-x_0|| \le \min_{v\in q(F(x))} ||v-x_0|| \le$$
$$\le \min_{u\in F(x)} ||q(u)-x_0|| \le k \min_{u\in F(x)} ||u-y_0|| \le R.$$

Тогда для любой точки $x\in B_R[x_0]$ пересечение

$$F_1(x)\cap B_R[x_0] \ne \emptyset.$$

Следовательно, в силу теоремы Какутани (см. теорему 1.4.2) отображение F_1 имеет неподвижную точку, которая и будет решением нашего включения.

2.1.6 Следствие. *Пусть вполне непрерывное многозначное отображение $F: E_1 \to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующему условию: существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x\in E_1$ справедливо неравенство:*

$$\min_{u\in F(x)} ||u|| \le c||x|| + d.$$

Если $c < \frac{1}{||A^{-1}||}$, то множество $N(A,F)\ne\emptyset$.

Доказательство. Пусть k – произвольное число такое, что

$$||A^{-1}|| < k < \frac{1}{c}.$$

Применим для доказательства этого утверждения результаты теоремы 2.1.5.

Пусть $B_R[0]$ – шар радиуса R с центром в нуле пространства E_1, где

$$R > \frac{dk}{1-kc}.$$

Тогда для любой точки $x\in B_R[0]$ справедливо неравенство,

$$\min_{u\in F(x)} ||u|| \le c||x|| + d \le cR + d = \frac{kcR+dk}{k} < \frac{R}{k},$$

т. е. отображение F на шаре $B_R[0]$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1.5. Следствие доказано.

Для доказательства второго следствия из теоремы 2.1.5 нам понадобится следующая лемма.

Пусть E - банахово пространство, E_0 равно $E \times R^1$. Норму в E_0 определим по правилу: $||(x,t)|| = ||x|| + |t|$. Пусть S_r - сфера радиуса r с центром в нуле банахова пространства E_0, а $F : S_r \to Kv(E)$ - вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим включение

$$F(x,t) \ni x. \tag{2.3}$$

2.1.7 Лемма. *Если*

$$\min_{u \in F(x,t)} ||u|| \leq r$$

для любой точки $(x,t) \in S_r$, то включение (2.3) имеет решение на S_r.

Доказательство. Пусть B - замкнутый шар радиуса r в пространстве E, $\tilde{S}_r$ - граница этого шара. Рассмотрим многозначное отображение $G : B \to Kv(E)$ определенное условием: $G(x) = F(x, r - ||x||)$. Это отображение является вполне непрерывным, т.к. отображение F было вполне непрерывным и для любой точки $x \in B$ пересечение $G(x) \cap B \neq \emptyset$. Следовательно, по теореме Какутани (см. теорему 1.4.2) отображение G имеет неподвижную точку. Пусть точка x_0 является неподвижной точкой отображения G, тогда точка $(x_0, t_0) \in S_r$, где $t_0 = r - ||x_0||$, является решением включения (2.3). Лемма доказана.

2.1.8 Следствие. *Пусть вполне непрерывное многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующему условию: существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство:*

$$\max_{u \in F(x)} ||u|| \leq c||x|| + d.$$

Пусть размерность $dim(Ker(A)) \geq 1$.

Если

$$c < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то множество $N(A,F) \neq \emptyset$ *и неограничено.*

Доказательство. Непустота множества $N(A,F)$ вытекает из следствия 2.1.6. Докажем неограниченность этого множества. Предположим противное, тогда существует такое число $M > 0$, что для любого $x \in N(A,F)$ справедливо неравенство: $||x|| \leq M$. Так как $dim(Ker(A)) \geq 1$, то существует единичный вектор $e \in Ker(A)$. Пусть $E_0 = E_1 \times R^1$. Пусть k – произвольное число такое, что

$$||A^{-1}|| < k < \frac{1}{c}.$$

Пусть $q : E_2 \to E_1$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $||q(y)|| \leq k||y||$ для любого $y \in E_2$.

Рассмотрим многозначное отображение $\hat{Q} : E_0 \to E_2$,

$$\hat{Q}(x,t) = \overline{co}(q(F(x)) + kcte.$$

Для любой точки $(x,t) \in E_0$ справедливо неравенство:

$$\min_{u \in \hat{Q}(x,t)} ||u|| \leq \min_{v \in F(x)} ||q(v)|| + kc|t| \leq k(c||x|| + d) + kc|t| \leq$$

$$\leq kc(||x|| + |t|) + kd \leq kc||(x,t)|| + kd.$$

Следовательно, если

$$R > \frac{kd}{1 - kc},$$

то для любой точки $(x,t) \in E_0$ такой, что $||(x,t)|| = R$, справедливо неравенство

$$\min_{u \in \hat{Q}(x,t)} ||u|| < R.$$

Следовательно, на любой сфере $S_R \subset E_0$, где

$$R > \frac{kd}{1-kc},$$

существует решение (x_R, t_R) включения $x \in \hat{Q}(x,t)$, т.е. $x_R \in \hat{Q}(x_R, t_R)$. Тогда

$$||x_R|| \geq \min_{u \in \hat{Q}(x_R,t_R)} ||u|| \geq kc|t_R| - \max_{v \in F(x_R)} ||q(v)|| \geq kc|t_R| - k(c||x_R|| + d).$$

Имеем

$$|t_R| \leq \frac{(1+kc)||x_R|| + kd}{kc}.$$

Так как в силу леммы 2.1.3 любое $x_R \in N(A,F)$, то

$$|t_R| \leq \frac{(1+kc)M + kd}{kc} = \delta.$$

Тогда

$$||(x_R, t_R)|| \leq \sqrt{M^2 + \delta^2}$$

для любого R, а это противоречит тому что $||(x_R, t_R)|| = R$, где R сколь угодно большое число. Теорема доказана.

2.1.9 Следствие. *Пусть отображения A и F удовлетворяют условиям следствия 2.1.6, тогда многозначное отображение $\Psi = A + F$ является сюръективным, т.е для любой точки $y \in E_2$ множество*

$$\Psi^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid \Psi(x) \ni y\} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Рассмотрим включение

$$A(x) \in y - F(x),$$

где y - произвольный вектор из E_2. Очевидно, что отображение $F_1 = y - F$ удовлетворяет условиям следствия 2.1.6. Следовательно, множество

$$N(A, F_1) = \Psi^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

Следствие доказано.

Рассмотрим некоторые приложения доказанных теорем.

2.2 Существование локальных решений задачи Коши для одного класса вырожденных дифференциальных включений

Вырожденные (сингулярные) дифференциальные уравнения имеют много конкретных интерпретаций (см., например, [33] и библиографию в ней). В настоящий момент имеется много монографий и статей, посвященным таким уравнениям. В последнее время появились работы, в которых изучается задача Коши для вырожденных дифференциальных включений (см., например, [40], [31]).

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – линейный замкнутый сюръективный оператор с областью определения $D(A)$.

Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0. Пусть многозначное отображение $F : [0, T] \times B_R[x_0] \longrightarrow Kv(E_2)$ вполне непрерывно по совокупности переменных.

Рассмотрим следующую задачу:

$$A(x') \in F(t, x), \tag{2.4}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{2.5}$$

2.2.1 Определение. Решением задачи (2.4), (2.5) *на промежутке $[0; l]$, где $0 < l \leq T$, называется абсолютно непрерывная функ-*

ция $x(t)$ такая, что $A(x'(t)) \in F(t, x(t))$ для почти всех $t \in [0, l]$, и $A(x(0)) = A(x_0)$.

Обозначим $\sum(x_0, [0, l])$ - множество решений задачи $(2.4), (2.5)$ на промежутке $[0, l]$. Имеет место следующая теорема.

2.2.2 Теорема. *При сделанных предположениях найдется такое число $l_0 > 0$, что $\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$ удовлетворяет условиям леммы 2.1.3. И пусть

$$\overline{co}(q(F(t, x))) = Q(t, x).$$

Тогда отображение Q является вполне непрерывным и имеет выпуклые компактные образы. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $u(t) \in Ker(A)$ при любом $t \in [0, T]$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$x' \in Q(t, x) + u(t), \tag{2.6}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.7}$$

В силу сделанных предположений существует число $l_0 \in (0, T]$ такое, что задача (2.6), (2.7) имеет решение на промежутке $[0, l_0]$ (даже для более общей задачи см., например, [30]). Пусть $x_* = x_*(t)$ - решение этой задачи, тогда на промежутке $[0, l_0]$ существует суммируемая функция y такая, что $y(s) \in Q(s, x_*(s))$ для почти всех $s \in [0, l_0]$ и выполняется равенство

$$x_*(t) = x_0 + \int\limits_0^t y(s)ds + \int\limits_0^t u(s)ds. \tag{2.8}$$

Покажем, что x_* является решением задачи (2.4), (2.5).

Так как $Q(t,x) = \overline{co}(q(F(t,x)))$, то для почти всех $t_1 \in [0, l_0]$ справедливо представление $y(t_1) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, где точки $z_n = \sum\limits_{i=1}^{k} q(y_i)$, числа $\lambda_i \in [0,1]$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, а точки $y_i \in F(t_1, x_*(t_1))$.

Продифференцировав равенство (2.8) в точке t_1, получим $x'_*(t_1) = y(t_1) + u(t_1)$. Применив к полученному равенству оператор A, имеем

$$A(x'_*(t_1)) = A(y(t_1) + u(t_1)) = A(y(t_1)).$$

Заметим, что

$$A(z_n) = A(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q(y_i)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i \in F(t_1, x_*(t_1)).$$

Так как множество $F(t_1, x_*(t_1))$ компактно, то без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{A(z_n)\}$ сходится к некоторой точке $w \in F(t_1, x_*(t_1))$.

Таким образом, последовательность $\{z_n\} \to y(t_1)$, а последовательность

$$\{A(z_n)\} \to w \in F(t_1, x_*(t_1)),$$

тогда в силу замкнутости оператора A получаем, что

$$A(x'_*(t_1)) = A(y(t_1)) \in F(t_1, x_*(t_1)).$$

Так как это доказательство можно провести для почти всех $t \in [0, l_0]$, то x_* - является решением включения (2.4).

Равенство (2.5) очевидно, так как $x_*(0) = x_0$ и $A(x_*(0)) = A(x_0)$, то $A(x(0)) = A(x_0)$. Теорема доказана.

2.3 Топологическая размерность множества решений задачи Коши для вырожденных дифференциальных включений

2.3.1 Топологическая размерность dim

Изучим топологическую размерность dim множества $\sum(x_0,[0,l])$.

Пусть X - произвольное множество, $\sigma = \{\mathrm{M}_\alpha\}_{\alpha\in J}$ - произвольная система подмножества X. Объединение всех $\mathrm{M}_\alpha \in \sigma$ называем телом системы σ и обозначим через $\widetilde{\sigma} \subseteq X$.

Система σ называется покрытием множества $X_0 \subseteq X$, если $X_0 \subseteq \widetilde{\sigma}$.

2.3.1 Определение. Кратностью системы множеств σ *в точке* $x \in X$ *- коротко* $kp_x\sigma$ *- называется мощность множества* σ_x *всех элементов системы* σ*, содержащих точку* x*. Во всех точках* $x \in \widetilde{\sigma}$ *имеет место неравенство* $kp_x\sigma \geq 1$.

Кратностью конечного покрытия пространства X называется наибольшее такое целое число k, что существует точка пространства X, содержащаяся в k элементах данного покрытия.

В случае произвольного топологического пространства можно дать следующее определение.

2.3.2 Определение. *Для любого топологического пространства* X *будем считать* $dim(X) \leq n$*, если в любое конечное открытое покрытие* Ω *пространства* X *можно вписать конечное открытое покрытие* ω *кратности меньше или равной* $n+1$.

Если для некоторого конечного открытого покрытия Ω пространства X всякое вписанное в него открытое покрытие ω имеет кратность большую или равную $n+1$, то $dim(X) \geq n+1$.

Свойства размерности dim

Пусть X - топологическое пространство, тогда для него справедливы следующие свойства:

1. (Монотонность размерности $dim(X)$ по замкнутым множествам). Если $dim(X) = n$ и X_0 замкнуто в X, то и $dim(X) \leq n$.

2. Всякий компакт Φ, лежащий в $n-$мерном евклидовом пространстве R^n, имеет размерность $dim(\Phi) \leq n$.

Пусть X - нормальное пространство, $\overline{T}^n$ - замкнутый $n-$мерный симплекс или любое гомеоморфоное ему множество, лежащее в R^n (чаще всего шар или куб).

2.3.3 Определение. *Непрерывное отображение $f : X \to \overline{T}^n$ называется* **существенным**, *если всякое непрерывное отображение $f_1 : X \to T^n$, совпадающее с f во всех точках множества*

$$\Phi = f^{-1}(S^{n-1}),$$

есть отображение на все $\overline{T}^n$.

Согласно этому определению всякое существенное отображение $f :\to \overline{T}^n$ есть отображение на $\overline{T}^n$.

2.3.4 Теорема (о существенных отображениях). *Пусть X - компакт. Если $dim(X) = n$, то пространство X можно существенно отобразить на $n-$мерный замкнутый симплекс, в то же время при $m > n$ всякое отображение $n-$мерного пространства X на $m-$мерный симплекс несущественно.*

2.3.5 Замечание. *Другими словами, неравенство $dim(X) \geq n$ эквивалентно возможности существенного отображения пространства X на замкнутый $n-$мерный симплекс; равенство $dim(X) = \infty$ эквивалентно возможности существенного отображения на симплекс любого числа измерений.*

2.3.2 Топологическая размерность множества решений операторных включений

Нам понадобятся некоторые сведения о размерности множества решений операторных включений, доказанные в работах [17], [14] и [8].

Пусть банахово пространство E представляется в виде прямого произведения банаховых пространств E_1 и E_2, то есть $E = E_1 \times E_2$. Пусть

$$U = U_{R_1}(x_0) \times U_{R_2}(y_0)$$

прямое произведение открытого шара $U_{R_1}(x_0) \subset E_1$ с центром в точке x_0 и радиуса R_1 и открытого шара $U_{R_2}(y_0) \subset E_2$ с центром в точке y_0 и радиуса R_2. Тогда замыканием множества U будет

$$\overline{U} = B_{R_1}[x_0] \times B_{R_2}[y_0].$$

Пусть $F_1 : \overline{U} \to Kv(E_1),\ F_2 : \overline{U} \to Kv(E_2)$ - многозначные отображения. Рассмотрим

$$F = F_1 \times F_2 : \overline{U} \to Kv(E_1 \times E_2).$$

Пусть $\Phi = i - F$ - многозначное векторное поле, порожденное отображением F. Обозначим $N(\Phi, \overline{U})$ множество неподвижных точек F, то есть

$$N(\Phi, \overline{U}) = \{x \in \overline{U} \,|\, x \in F(x)\} = \{x \in \overline{U} \mid 0 \in \Phi(x)\}$$

Имеет место следующая теорема (см. [17], [14]).

2.3.6 Теорема. *Если:*

(a) многозначное отображение F_1 - вполне непрерывно;

(b) многозначное отображение F_2 - непрерывно, компактно и для любой точки $(x, y) \in U$ выполнено неравенство

$$dim(F_2(x, y)) \geq n;$$

(c) топологическая степень $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$.

Тогда топологическая размерность $dim(N(\Phi, \overline{U})) \geq n$.

Рассмотрим одно следствие из этой теоремы.

Пусть $F_1 : \overline{U} \to Kv(E_1)$ вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим включение

$$x \in F_1(x, y).$$

Решением этого включения назовем пару (x_*, y_*) такую, что $x_* \in F_1(x_*, y_*)$. Обозначим множество решений этого уравнения $Fix(F_1, \overline{U})$.

2.3.7 Следствие. *Пусть* $dim(E_2) \geq n$.

Если $F_1(x, y) \subset U_{R_1}[x_0]$ *для любых* $x \in B_{R_1}[x_0]$, $y \in B_{R_2}[y_0]$, *то*

$$dim(Fix(F_1, \overline{U})) \geq n.$$

Доказательство. Пусть E^n — n-мерное подпространство пространства E_2. Обозначим $B \subset E^n$ замкнутый шар с центром в нуле радиуса $\frac{R_2}{2}$. Рассмотрим многозначное отображение

$$F_2 : \overline{U} \to Kv(E_2), \quad F_2(x, y) = y_0 + B$$

для любой точки $(x, y) \in \overline{U}$. Очевидно, что это отображение является непрерывным, компактным и для любой точки $(x, y) \in U$ выполнено неравенство $dim(F_2(x, y)) \geq n$.

Пусть $F = F_1 \times F_2 : \overline{U} \to Kv(E_1 \times E_2)$. В силу сделанных предположений многозначное отображение $F(x, y) \in U_{R_1}(x_0) \times U_{R_2}(y_0)$ для любой точки $(x, y) \in B_{R_1}(x_0) \times B_{R_2}(y_0)$. Следовательно, оно не имеет неподвижных точек на границе. Так как множество $\overline{U}$ - выпукло и ограничено, то $\gamma(\Phi, \partial U) = 1$. (см. [6]). Тогда выполнены условия теоремы 2.3.6, следовательно, топологическая размерность $dim(N(\Phi, \overline{U})) \geq n$. Очевидно, что множество $N(\Phi, \overline{U}) \subset Fix(F_1, \overline{U})$, тогда из монотонности размерности получаем утверждение следствия.

2.3.3 Топологическая размерность множества $\sum(x_0, [0, l])$

Применим следствие 2.3.7 к изучению $dim(\sum(x_0, [0, l]))$. Пусть как и раньше $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0, многозначное отображение $F : [0, T] \times B_R[x_0] \longrightarrow Kv(E_2)$ вполне непрерывно по совокупности переменных.

Рассмотрим задачу (2.4), (2.5):

$$A(x') \in F(t, x), \tag{2.4}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{2.5}$$

Будем предполагать дополнительно, что подпространство $KerA$ является дополняемым в пространстве E_1, т.е. существует замкнутое подпространство $E' \subset E_1$ такое, что $KerA \cap E' = 0$ и $KerA + E' = E_1$. Очевидно, что сужение оператора A на подпространство E',

$$\hat{A} : (D(A) \cap E') \subset E' \to E_2, \quad \hat{A}(x) = A(x),$$

является замкнутым сюръективным оператором с нулевым ядром. Следовательно, существует линейный непрерывный оператор

$$C : E_2 \to E' \subset E_1$$

обратный к оператору $\hat{A}$, т.е. правый обратный к оператору A.

2.3.8 Замечание. *Легко видеть, что* $KerA \cap C(E_2) = KerA \cap E' = 0$.

Имеет место следующая теорема.

2.3.9 Теорема. *Пусть подпространство* $KerA$ *является дополняемым в пространстве* E_1. *Если* $dim(KerA) \geq 1$, *то существует такое* *число* $l_0 > 0$, *что*

$$\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset$$

и

$$dim(\sum(x_0, [0, l_0])) = \infty.$$

Доказательство. Очевидно, что множество $\sum(x_0, [0, l]) \neq \emptyset$ при малых l, это следует из теоремы 2.3.6. Докажем, что существует $l_0 > 0$ такое, что

$$dim(\sum(x_0, [0, l_0])) = \infty.$$

Если $dim(KerA) \geq 1$, то пространство $C_{([0,l],KerA)}$ (пространство непрерывных функций, определенных на промежутке $[0, l]$ со значениями в $KerA$) является бесконечномерным пространством.

Пусть n - произвольное натуральное число, $e_1, e_2, ..., e_n$ линейно независимые функции из пространства $C_{([0,l],KerA)}$ и

$$||e_1|| = ... = ||e_n|| = 1.$$

Пусть

$$E^n = L(e_1, e_2, ..., e_n) \subset C_{([0,l],KerA)}$$

– линейная оболочка векторов $e_1, e_2, ..., e_n$.

Рассмотрим множество $D \subset C_{[0,l]}$, где

$$D = \{x \in C_{[0,l]} \mid ||x_0 - x(t)|| \leq R \text{ для любого } t \in [0, l]\}.$$

Это множество является замкнутым шаром $B_R[\bar{x}_0]$ радиуса R с центром в точке $\bar{x}_0$, где $\bar{x}_0(t) = x_0$ для любого $t \in [0, l]$. Рассмотрим $U_R[\bar{x}_0]$ открытый шар радиуса R с центром в точке $\bar{x}_0$, то есть

$$U_R[\bar{x}_0] = \{x \in C_{[0,l]} \mid ||x_0 - x(t)|| < R, \ \forall t \in [0, l]\}.$$

В силу того, что ядро $KerA$ является дополняемым в пространстве E_1, то существует линейный непрерывный оператор $M : E_2 \to E_1$, правый обратный к оператору A, т.е. $A(M(y)) = y$ для любого $y \in E_2$.

Пусть $B_1[0]$ – единичный шар в пространстве E^n. Рассмотрим интегральный оператор $K : T \times B_1[0] \longrightarrow Kv(C_{[0,l]})$,

$$K(x,u)(t) = \{y(t) = x_0 + \int\limits_0^t z(s)ds + \int\limits_0^t u(s)ds \;\mid\; z(s) \in M(F(s,x(s)))\}$$

$$\text{для почти всех } \; s \in [0,l] \; \text{ и } \; u \in B_1[0].$$

Легко проверить, что отображение K является вполне непрерывным и имеет выпуклые компактные образы. Рассмотрим $N > 0$ такое, что $||F(t,x)|| \leq N$ для любых $t \in [0,T]$, и $x \in B_R[x_0]$. Проверим, что для малого $h > 0$, многозначное отображение

$$K : D \times B_1[0] \longrightarrow Kv(U_R[\bar{x_0}]).$$

Действительно,

$$||x_0 - y(t)|| \leq \int\limits_0^t ||z(s)||ds + \int\limits_0^t ||u(s)||ds \leq ||M||\, Nt + t =$$

$$= (||M||\, N + 1)t \leq (||M||\, N + 1)l.$$

Если

$$0 < l_0 < \frac{R}{||M||\, N + 1},$$

то для любого $t \in [0, l_0]$ выполняется неравенство $||x_0 - y(t)|| < R$. Отсюда следует, что $K(x,u) \in U_R[\bar{x_0}]$.

Итак, отображение K удовлетворяет условиям следствия 2.3.7, следовательно $dim(Fix(K, \overline{U})) \geq n$. Так как для любой пары $(x_*, u_*) \in$

$Fix(K, \overline{U})$ функция x_* является решением задачи (2.4), (2.5) (см. теорему 2.3.6), то возникает отображение

$$\omega : Fix(K, \overline{U}) \to \sum(x_0, [0, l_0]),$$

$\omega(x, u) = x$.

Проверим, что это отображение является гомеоморфизмом на свою область значений. Так как множество $Fix(K, \overline{U})$ является компактным, то для этого достаточно доказать, что если точки (x, u_1) и (x, u_2) принадлежат $Fix(K, \overline{U})$, то $u_1 = u_2$.

Имеем:

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t z_1(s)ds + \int\limits_0^t u_1(s)ds \tag{2.9}$$

и

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t z_2(s)ds + \int\limits_0^t u_2(s)ds, \tag{2.10}$$

где

$$z_1(s),\ z_2(s) \in M(F(s, x(s))) \text{ для почти всех } s \in [0, l_0].$$

Тогда $z_1(s) - z_2(s) = u_2(s) - u_1(s)$ для почти всех $s \in [0, l_0]$. Следовательно, точка $z_1(s) - z_2(s) \in M(E_2) \cap KerA$. В силу сделанного замечания получаем, что $z_1(s) - z_2(s) = 0$ для почти всех $s \in [0, l_0]$. Тогда $u_1(s) = u_2(s)$ для почти всех $s \in [0, l_0]$. Так как функции u_1 и u_2 непрерывны, то они равны на всем отрезке $[0, l_0]$. Таким образом, отображение ω является гомеоморфизмом на свою область значений.

Теперь в силу монотонности топологической размерности dim имеем:

$$dim(\sum(x_0, [0, l_0])) \geq dim(\omega(Fix(K, \overline{U}))) = dim(Fix(K, \overline{U})) \geq n.$$

Так как число n мы выбирали произвольно, то $dim(\sum(x_0, [0, h_0])) \geq \infty$. Теорема доказана.

2.4 Об одном классе управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями

2.4.1 Об одной абстрактной управляемой системе

Рассмотрим сначала абстрактную модель управляемой системы.

Пусть E_1, E_2, E_3 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \times E_3 \to E_2$ нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(f_1) f является вполне непрерывным отображением;

(f_2) существуют положительные числа c_1 и d_1 такие, что для любой точки $(x, u) \in E_1 \times E_3$ справедливо неравенство:

$$||f(x, u)|| \leq c_1(||x|| + ||u||) + d_1;$$

(f_3) при каждом фиксированном $x \in E_1$ отображение

$$f_x = f(x, \cdot) : E_3 \to E_2$$

является аффинным отображением.

Пусть $U : E_1 \to K_v(E_3)$ - полунепрерывное сверху многозначное отображение, удовлетворяющее следующему условию: существуют положительные числа c_2 и d_2 такие, что

$$\max_{u \in U(x)} ||u|| \leq c_2||x|| + d_2 \tag{2.11}$$

для любого $x \in E_1$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$A(x) = f(x, u), \tag{2.12}$$

$$u \in U(x). \tag{2.13}$$

Задачу (2.12)-(2.13) будем называть - задачей управления с обратной связью, а множество $U(x)$ - множеством допустимых управлений для точки $x \in E_1$.

Решением управляемой системы (2.12)-(2.13) будем называть пару (x_*, u_*) такую, что

$$A(x_*) = f(x_*, u_*), \tag{2.14}$$

$$u_* \in U(x_*). \tag{2.15}$$

Точку $x_* \in E_1$ назовем *траекторией управляемой системы*, а $u_* \in E_3$ - соответствующим управлением.

Рассмотрим многозначное отображение $F : E_1 \to K_v(E_2)$,

$$F(x) = f(x, U(x)).$$

В силу сделанных предположений множество $F(x)$ является выпуклым компактом для любого $x \in E_1$ и отображение F является полунепрерывным сверху (см., например, [6]).

Рассмотрим включение

$$A(x) \in F(x). \tag{2.16}$$

Очевидно, что каждому решению включения (2.16) отвечает некоторое решение задачи управления (2.14) - (2.15).

Докажем теорему существования решения задачи (2.14)-(2.15).

2.4.1 Теорема. *Пусть отображение f удовлетворяет условиям (f_1)–(f_3), многозначное отображение U - полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию (2.11). Тогда если*

$$c_1(1 + c_2) < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то множество решений управляемой системы (2.14) - (2.15) непусто.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что включение (2.16) имеет решение. Для этого воспользуемся следствием 2.1.6.

Сначала покажем, что отображение F - вполне непрерывно.

Пусть $A \subset E_1$ - ограниченное множество. Тогда существует такое число $R > 0$, что для любой точки $x \in A$ выполняется неравенство $||x|| \leq R$.

Обозначим $U(A) = \bigcup\limits_{x \in A} U(x)$.

Следовательно для любого $y \in U(A)$ существует такая точка $x \in A$, что $y \in U(x)$.

Имеем

$$||y|| \leq c_2||x|| + d_2 \leq c_2R + d_2.$$

Получаем, что $U(A)$ является ограниченным множеством. Таким образом множество $A \times U(A)$ также является ограниченным в $E_1 \times E_3$. Так как отображение f является вполне непрерывным, то множество $\overline{f(A \times U(A))}$ является компактным. Следовательно, множество $\overline{F(A)} \subset \overline{f(A \times U(A))}$ и является компактным множеством, то есть F - вполне непрерывное многозначное отображение.

Проверим теперь выполнение условия следствия 2.1.6.

Пусть $y \in F(x) = f(x, U(x))$, следовательно существует $v \in U(x)$ такое, что $y = f(x, v)$.

Тогда,

$$||y|| \leq c_1(||x|| + ||v||) + d_1 \leq c_1(||x|| + c_2||x|| + d_2) + d_1 =$$

$$= ||x||(c_1 + c_1c_2) + d_1 + c_1d_2.$$

Если

$$c_1 + c_1c_2 \leq \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то включение (2.16) имеет решение (см. следствие 2.1.6). Следовательно, решение имеет и задача (2.12)-(2.13).

Теорема доказана.

2.4.2 Об управляемой системе, заданной вырожденным дифференциальным уравнением

Применим следствие 2.1.6 к изучению одного класса управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями.

Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $g : [0,T] \times E_1 \times E_3 \to E_2$ – нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(g_1) g является вполне непрерывным;

(g_2) существуют непрерывные функции α и β, определенные на промежутке $[0,T]$ такие, что для любой точки $(t,x,u) \in [0,T] \times E_1 \times E_3$ справедливо неравенство

$$||g(t,x,u)|| \leq \alpha(t)(||x|| + ||u||) + \beta(t). \tag{2.17}$$

(g_3) при любых фиксированных $t \in [0,T]$ и $x \in E_1$ отображение g аффинно по u.

Пусть многозначное отображение $U : C_{([0,T],\, E_1)} \to K_v(C_{([0,T],\, E_3)})$ - полунепрерывно сверху и существуют числа c_2 и d_2 такие, что справедливо неравенство:

$$\max_{u \in U} ||u|| \leq c_2||z|| + d_2 \tag{2.18}$$

для любого $z \in C_{([0,T],\, E_1)}$.

Пусть $x_0 \in D(A)$ - некоторая точка.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(Ax)'(t) = g(t, x(t), u(t)), \tag{2.19}$$

где

$$u(t) \in U(x)(t), \tag{2.20}$$

для любого $t \in [0,\ T]$,

$$A(x_0) = Ax_0. \tag{2.21}$$

2.4.2 Теорема. *Пусть отображение g удовлетворяет условиям (g_1)–(g_3), многозначное отображение U - полунепрерывно сверху и удовлетворяет оценке (2.18). Тогда если*

$$(1 + c_2)\int\limits_0^T \alpha(s)ds < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то задача (2.19)-(2.21) имеет решение.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.4.1.

Нетрудно видеть, что задача (2.19)-(2.21) эквивалентна следующей задаче

$$A(x) = \int\limits_0^t g(s, x(s), u(s))ds + Ax_0, \tag{2.22}$$

$$u \in U(x). \tag{2.23}$$

Рассмотрим отображение

$$f : C_{([0,T],\ E_1)} \times C_{([0,T],\ E_3)} \to C_{([0,T],\ E_2)}$$

определенное по следующему правилу:

$$f(x, u)(t) = \int\limits_0^t g(s, x(s), u(s))ds + Ax_0.$$

Тогда уравнение (2.22) можно переписать в виде $A(x) = f(x, u)$. Оценим норму $f(x, u)$.

Имеем:

$$||f(x,u)|| = \max_{0\le t\le T} || \int\limits_0^t g(s,x(s),u(s))ds + A(x_0)|| \le$$

$$\le \max_{0\le t\le T} (\int\limits_0^t [\alpha(s)(||x(s)|| + ||u(s)||) + \beta(s)]ds) + ||A(x_0)|| =$$

$$= (||x|| + ||u||) \int\limits_0^T \alpha(s)ds + \int\limits_0^T \beta(s)ds + ||A(x_0)||$$

Обозначим $c_1 = \int\limits_0^T \alpha(s)ds$, $d_1 = \int\limits_0^T \beta(s)ds + ||A(x_0)||$.

Тогда

$$||f(x,u)|| \le c_1(||x|| + ||u||) + d_1.$$

В силу теоремы 2.4.1 задача (2.22) - (2.23) будет иметь решение, если

$$c_1(1 + c_2) < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то есть

$$(1 + c_2) \int\limits_0^T \alpha(s)ds < \frac{1}{||A^{-1}||}.$$

В силу условий теоремы это неравенство выполнено, тогда задача (2.22) - (2.23), а следовательно задача (2.19) - (2.21) имеет решение.

Теорема доказана.

3 Уплотняющие многозначные возмущения линейных сюръективных операторов

3.1 Некоторые свойства многозначных уплотняющих отображений

Пусть E - банахово пространство, $P(E)$ - множество всех непустых подмножеств в E. Следуя [2] и [39] дадим определение меры некомпактности.

Отображение $\psi : P(E) \to \Xi$, где Ξ – частично упорядоченное множество, называется *мерой некомпактности* в E, если $\psi(\overline{co}(\Omega)) = \psi(\Omega)$ для любого $\Omega \in P(E)$.
Мера некомпактности называется *монотонной*, если из $\Omega_0, \Omega_1 \in 2^E, \Omega_0 \subset \Omega_1$ следует $\psi(\Omega_0) \leq \psi(\Omega_1)$.
Мера некомпактности называется *несингулярной*, если $\psi(a \cup \Omega) = \psi(\Omega)$ для любых $a \in E, \Omega \in P(E)$.
Мера некомпактности называется *алгебраически полуаддитивной*, если

$$\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$$

для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$.
Мера некомпактности называется *вещественной*, если $\Xi = [0, \infty) \cup \infty$ и принимает конечные значения на ограниченных множествах.
Вещественная мера некомпактности называется *правильной*, если равенство

$$\psi(\Omega) = 0$$

равносильно относительной компактности множества Ω.

Распространенными примерами мер некомпактности, обладающими указанными выше свойствами, являются:

мера некомпактности Хаусдорфа,

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon \mid \varepsilon > 0, \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon - \text{сеть}\},$$

и мера некомпактности Куратовского,

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d \mid \ d > 0, \ \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i, \ diam(\Omega_i) < d, \, n \in N\}.$$

Пусть X – ограниченное подмножество в E.

3.1.1 Определение. *Полунепрерывное сверху многозначное отображение $F : X \to K(E)$ называется* **уплотняющим относительно меры некомпактности ψ (или ψ-уплотняющим)**, *если*

$$\psi(F(\Omega)) \ngeq \psi(\Omega),$$

для любого множества $\Omega \subset X$, не являющегося относительно компактным.

3.1.2 Теорема. *Пусть $U \subset E$ - ограниченное открытое выпуклое множество, $F : \overline{U} \to K_v(E)$ многозначное ψ-уплотняющее отображение и $F(x) \cap \overline{U} \neq \varnothing$ для всех $x \in \partial U$. Тогда многозначное отображение F имеет неподвижную точку.*

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 1.20.70 статьи [5].

3.2 Мера некомпактности индуцированная непрерывным линейным оператором и многозначные уплотняющие возмущения

Приведем, следуя [22], определение меры некомпактности множества, индуцированной линейным непрерывным оператором.

Пусть E, E_0 - банаховы пространства, $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Рассмотрим отображение $\psi_A : P(E) \to \mathbb{R} \cup \infty$, определенное следующим образом:

$$\psi_A(\Omega) = \psi(A(\Omega)).$$

В работе [22] были доказаны следующие свойства отображения $\psi_A(\Omega)$.

1. *Это отображение является монотонным, т.е. если* $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$ *и* $\Omega_1 \subset \Omega_2$, *то* $\psi_A(\Omega_1) \leq \psi_A(\Omega_2)$

2. *Это отображение инвариантно относительно взятия выпуклой оболочки, т.е.* $\psi_A(\Omega) = \psi_A(co(\Omega))$

3. $\psi_A(\overline{\Omega}) = \psi_A(\Omega)$ *для любого* $\Omega \in P(E)$.

4. $\psi_A(a \cup \Omega) = \psi_A(\Omega)$ *для любых* $a \in E$, $\Omega \in P(E)$.

5. *Отображение* ψ_A *является алгебраически полуаддитивным, т.е.* $\psi_A(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi_A(\Omega_1) + \psi_A(\Omega_2)$ *для любых* $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$.

6. *Если оператор* A *является сюрьективным, то* $\psi_A(\Omega) = 0$, *тогда и только тогда, когда существует такой компакт* $K \subset E$, *что*

$$\Omega \subset K + Ker(A).$$

Таким образом отображение ψ_A является монотонной, несингулярной, алгебраически полуаддитивной мерой некомпактности, однако эта мера некомпактности не является правильной. Эта мера некомпактности ψ_A называется *мерой некомпатности индуцированной оператором* A.

Пусть $D(F)$ ограниченное подмножество в E, $A : E \to E_0$ – линейный непрерывный сюръективный оператор, $F : D(F) \to K_v(E_0)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение.

3.2.1 Определение. *Отображение* F *называется* (A, ψ)*-уплотняющим,* *если для любого множества $Q \subset D(F)$ из неравенства*

$$\psi(F(Q)) \geq \psi_A(Q)$$

вытекает равенство

$$\psi_A(Q) = 0.$$

Пусть отображение $F : D(F) \subset E \to K_v(E_0)$ является (A, ψ)-уплотняющим, $q : E_0 \to E$ - непрерывное отображение, правое обратное к отображению A. Пусть множество $Y = q^{-1}(A(D(F))) \cap D(F)$ непусто, $X = A(Y)$. Рассмотрим многозначное отображение $G : X \to K_v(E_0)$, $G(x) = F(q(x))$.

3.2.2 Предложение. *Если F является (A, ψ) - уплотняющим отображением, то G - уплотняющее отображение.*

Доказательство. Полунепрерывность сверху отображения G вытекает из полунепрерывности сверху отображения F и непрерывности q. Проверим выполнение условия из определения 3.2.1.

Пусть множество $\Omega \subset X$ и $\psi(G(\Omega)) \geq \psi(\Omega)$. Тогда

$$\psi(G(\Omega)) = \psi(F(\Omega_1)) \geq \psi(\Omega),$$

где $\Omega_1 = q(\Omega)$.

Так как q является правым обратным к отображению A, то

$$\psi(G(\Omega)) = \psi(F(\Omega_1)) \geq \psi(\Omega) = \psi(A(\Omega_1)) = \psi_A(\Omega_1),$$

т.е. $\psi(F(\Omega_1)) \geq \psi_A(\Omega_1)$.

Так как F является (A, ψ)-уплотняющим отображением, то $\psi_A(\Omega_1) = 0$. Тогда

$$\psi(\Omega) = \psi_A(\Omega_1) = 0.$$

Следовательно, отображение G является уплотняющим.

Рассмотрим некоторые примеры (A, ψ)-уплотняющих отображений.

Пусть E, E_0, E_1 – банаховы пространства, $A : E \to E_0$ – непрерывный сюръективный линейный оператор, $B : E \to E_1$ – линейный оператор.

3.2.3 Определение. *Будем говорить, что* **оператор** B **подчинен оператору** A, *если для любого* $x \in E$ *справедливо равенство* $||A(x)|| \geq ||B(x)||$.

Очевидно, что если оператор B подчинен оператору A, то он также является непрерывным.

3.2.4 Пример. Пусть $A : E \to E_0$ - непрерывный сюръективный линейный оператор, оператор $B : E \to E_1$ подчинен оператору A. Пусть множество X является ограниченным подмножеством в E. Предположим, что отображение $f_1 : X \subset E \to E_0$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию:
существует такое число $k \in (0, 1)$, *что для любых точек* $x_1, x_2 \in X$ *справедливо неравенство*

$$||f_1(x_1) - f_1(x_2))|| \leq k||B(x_1) - B(x_2)||, \tag{3.1}$$

т.е. f_1 является B-сжимающим отображением.

Пусть $F_2 : X \to K_v(E_0)$ – вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим отображение $F = f_1 + F_2$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Куратовского α.

3.2.5 Предложение. *При сделанных предположениях многозначное отображение* F *является* (A, α)*-уплотняющим отображением.*

Доказательство. Пусть множество $Q \subset X$ и

$$\alpha(F(Q)) \geq \alpha_A(Q). \tag{3.2}$$

Пусть ε – произвольное число большее $\alpha_A(Q)$. Тогда существует конечное число множеств $\{N_i\}_{i=1}^n$, $N_i \subset A(Q)$, таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} N_i = A(Q)$$

и $diam(N_i) < \varepsilon$ для любого $i = 1, 2, ..., n$.
Пусть $Q_i = A^{-1}(N_i) \bigcap Q$. Обозначим $M_i = f_1(Q_i)$. Вычислим диаметр множества M_i.

$$diam(M_i) = \sup_{u,v \in M_i} ||u - v|| = \sup_{x,y \in Q_i} ||f_1(x) - f_1(y)|| \leq$$
$$\leq \sup_{x,y \in Q_i} k||B(x) - B(y)|| \leq \sup_{x,y \in Q_i} k||A(x) - A(y)|| \leq$$
$$\leq k \sup_{a,b \in N_i} ||a - b|| = kdiam(N_i) < k\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > \alpha_A(Q)$ существует конечное число множеств $M_i, i - 1, 2, ...n$, таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = f_1(Q)$$

и $diam(M_i) < k\varepsilon$.

Следовательно,

$$k\alpha_A(Q) \geq \alpha(f_1(Q)). \tag{3.3}$$

Так как множества X и $A(X)$ ограничены, а отображение F_2 является вполне непрерывным, то $\alpha(F_2(Q)) = 0$. Так как

$$F(Q) \subset f_1(Q) + F_2((Q),$$

то

$$\alpha(f_1(Q)) = \alpha(f_1(Q)) + \alpha(F_2(Q)) \geq \alpha(F(Q)) \geq \alpha(A(Q)). \tag{3.4}$$

Сравнивая неравенства (3.3) и (3.4) получаем, что $\alpha(A(Q)) = 0$ и условие из определения 3.2.3 доказано.

3.2.6 Пример. Пусть, как и раньше, оператор $B : E \to E_1$ подчинен оператору A, множество X – ограниченное подмножество в E. Пусть $G : X \times E_1 \to K_v(E_0)$ –многозначное полунепрерывное сверху отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in X$ и любых $y_1, y_2 \in E_1$ справедливо неравенство

$$h(G(x, y_1), G(x, y_2)) \leq k||y_1 - y_2||;$$

(2) для любого $y \in E_1$ многозначное отображение $G(\cdot, y) : X \to K_v(E_0)$ является вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $F : X \to K_v(E_0)$, $F(x) = G(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ.

3.2.7 Предложение. *При сделанных предположениях многозначное отображение F является (A, χ)-уплотняющим отображением.*

Доказательство. Докажем, что для любого множества $Q \subset X$ такого, что $\chi(A(Q)) \leq \infty$, справедливо неравенство $\chi(F(Q)) \leq k\chi(A(Q))$, откуда и следует условие из определения 3.2.3.

Пусть $S = \{s_1, ..., s_n\}$ - конечная $(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$-сеть множества $A(Q)$. Так как $S \subset A(Q)$, то существуют точки $\{x_1, ..., x_n\} \subset Q$ такие, что $s_i = A(x_i)$, где $i = 1, 2, ..., n$. Обозначим $B(x_i) = z_i, i = 1, 2, ..., n$. Тогда точки $\{z_i\}$ также образуют $(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$-сеть в множестве $B(Q)$. Действительно, если $z \in B(Q)$, то существует точка $x \in Q$ такая, что $B(x) = z$. Тогда для некоторого i_0 имеем

$||z - z_{i_0}|| = ||B(x) - B(x_{i_0})|| \leq ||A(x) - A(x_{i_0})|| \leq \chi(A(Q)) + \varepsilon.$

Пусть $S_1 = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$.

Рассмотрим множество $G(Q, z_i)$, где $i = 1, ...n$.

Обозначим

$$L = G(Q \times S_1) = \bigcup_{i=1}^{n} G(Q, z_i).$$

Так как отображение G является вполне непрерывным по первому аргументу, то это множество является относительно компактным. Покажем, что L является вполне непрерывной $k(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$-сетью в множестве $F(Q)$.

Пусть z - произвольная точка из $F(Q)$, тогда существует такая точка $x \in Q$, что $z \in G(x, B(x))$. Пусть точка $z_{i_0} \in S_1$ такая, что $z_{i_0} = B(x_{i_0})$ и

$$||A(x) - A(x_{i_0})|| < \chi(A(Q)) + \varepsilon.$$

Тогда точка $G(x, z_i) \in G(Q, z_i) \subset L$. Оценим

$$\rho(z; G(x, z_i)) \leq h(G(x, B(x)), G(x, B(x_{i_0}))) \leq$$

$$\leq k||B(x) - B(x_i)|| \leq k||A(x) - A(x_i)|| < k(\chi(A(Q)) + \varepsilon).$$

Следовательно, $\chi(F(Q)) < k(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\chi(F(Q)) \leq k(\chi(A(x)))$$

и условие из определения 3.2.3 доказано.

3.3 Включения с (A, ψ)-уплотняющими отображениями

Пусть E, E_0 - банаховы пространства. Пусть $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный сюръктивный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ. Пусть $x_0 \in E$ - некоторая точка, $B_R[x_0]$-замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to K_v(E_0)$ – многозначное полунепрерывное сверху (A, ψ)-уплотняющее отображение.

Рассмотрим включение

$$A(x) \in F(x), \tag{3.5}$$

$N(A, F)$ - множество решений этого уравнения.

3.3.1 Теорема. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leq \frac{R}{k},$$

то $N(A, F) \neq \emptyset$.

Доказательство. Обозначим $y_0 = A(x_0)$. Пусть $q : E_0 \to E$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям: $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_0$;

$$\|x_0 - q(y)\| \leq k\|A(x_0) - y\|$$

для любого $y \in E_0$. Такое отображение всегда существует в силу леммы 2.1.3. Очевидно, что для любой точки $y \in B_{\frac{R}{k}}[y_0] \subset E_0$ точка $q(y) \in B_R[x_0]$, так как

$$||x_0 - q(y)|| \leq k||y_0 - y|| \leq k\frac{R}{k} = R.$$

Рассмотрим отображение $G = F \circ q : B_{\frac{R}{k}}[y_0] \to K_v(E_0)$. Это уплотняющее отображение в силу предложения 3.2.2.

Проверим, что для любой точки $y \in B_{\frac{R}{k}}[y_0]$ пересечение

$$G(y) \cap B_{\frac{R}{k}}[y_0] \neq \emptyset.$$

Это вытекает из того, что

$$\min_{z \in G(y)} ||y_0 - z|| = \min_{z \in F(q(y))} ||y_0 - z|| \leq \frac{R}{k},$$

так как $q(y) \in B_R[x_0]$. Тогда в силу теоремы 3.1.2 это отображение имеет неподвижную точку x_*, которая определяет решение включения (3.5).

Действительно, если $x_* \in G(x_*) = F(q(x_*))$, то $A(q(x_*)) \in F(q(x_*))$. Следовательно точка $y_* = q(x_*)$ является решением включения (3.5). Теорема доказана.

3.3.2 Следствие. *Пусть многозначное отображение* $F : E \to K_v(E_0)$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

(i) существуют такие $c > 0$ *и* $d > 0$ *что для любой точки* $x \in E$ *справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leq c||x|| + d;$$

(ii) $c||A^{-1}|| < 1$.

Тогда включение (3.5) имеет решение.

Доказательство. Для доказательства найдем шар $B_R[0]$ и число $k > ||A^{-1}||$ такие, чтобы для любой точки $x \in B_R[0]$ было выполнено неравенство

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leq \frac{R}{k}.$$

Пусть k произвольное число удовлетворяющее неравенству

$$||A^{-1}|| < k < \frac{1}{c}.$$

Очевидно, что $c\,k < 1$. Рассмотрим число R удовлетворяющее неравенству

$$\frac{d\,k}{1 - c\,k} \leq R.$$

Проверим,что для любой точки $x \in B_R[0]$ было выполнено неравенство

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leq \frac{R}{k}.$$

Действительно

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leq c||x|| + d \leq cR + d \leq cR + \frac{R(1 - ck)}{k} = \frac{R}{k}.$$

Таким образом многозначное отображение F на шаре $B_R[0]$ удовлетворяет условиям теоремы 3.3.1, что и доказывает утверждение.

3.4 Об одном классе вырожденных дифференциальных включений

Пусть E_1, E_2, E_3 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - непрерывный линейный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ - непрерывный линейный оператор, подчиненный оператору A. Пусть точка $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0] \subset E_1$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x_0.

Пусть многозначное отображение $F_1 : [0,T] \times B_R[x_0] \to K_v(E_2)$ является вполне непрерывным, а многозначное отображение

$$F_2 : [0,T] \times E_3 \to K_v(E_2)$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) F_2 - непрерывно по совокупности переменных;

2) существует такое α, что для любого $t \in [0,T]$ и для любых $y_1, y_2 \in E_1$ справедливо неравенство:

$$h(F(t,y_1), F(t,y_2)) \leq \alpha ||y_1 - y_2||.$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$(Ax(t))' \in F_1(t, x(t)) + F_2(t, B(x(t))), \tag{3.6}$$

$$A(x(0)) = Ax_0. \tag{3.7}$$

Решением задачи (3.6), (3.7) на промежутке $[0,l]$, $0 < l \leq T$, будем называть непрерывную функцию x_*, определенную на $[0,l]$ такую, что

$$(Ax_*(t))' \in F_1(t, x_*(t)) + F_2(t, Bx_*(t)),$$

$$A(x_*(0)) = Ax_0.$$

Обозначим $\sum(x_0, [0,l])$ - множество решений задачи (3.6), (3.7) на промежутке $[0,l]$.

Нам понадобятся следующие леммы.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $A : E_1 \to E_2$ – линейный непрерывный сюръективный оператор. Обозначим $C_{([0,l],E_1)}$ – пространство непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,l]$ со значениями в E_1. Аналогичный смысл имеет обозначение $C_{([0,l],E_2)}$. Тогда естественно определяется отображение $\hat{A} : C_{([0,l],E_1)} \to C_{([0,l],E_2)}$ по следующему правилу:

$$\hat{A}(x)(t) = A(x(t)).$$

3.4.1 Лемма. *Если отображение A непрерывно и сюръективно , то:*
1) отображение $\hat{A}$ непрерывно и сюръективно;
2) $||\hat{A}^{-1}|| = ||A^{-1}||$.

Для замкнутого сюръективного оператора доказательство этой леммы содержится в [15].

Дадим операторную трактовку задачи (3.6), (3.7).

Пусть число $l \in (0,T]$, $u \in C_{([0,l],KerA)}$. Нетрудно заметить, что задача (3.6), (3.7) эквивалентна интегральному включению

$$A(x)(t) \in \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + \int\limits_0^t u(s)ds + A(x_0), \quad (3.8)$$

где

$$\mathcal{P}_{F_1}(x) = \{v \in L^1_{([0,l],E_2)} \,|\, v(s) \in F_1(s, x(s)) \text{ для п. в. } s \in [0,l]\}, \qquad (3.9)$$

а отображение

$$\mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x)) = \{w \in L^1_{([0,l],E_2)} |\ w(s) \in F_2(s, B(x(s))) \text{ для п. в. } s \in [0,l]\}. \qquad (3.10)$$

Рассмотрим многозначное отображение $V : C_{([0,l],E_1)} \to K_v(C_{([0,h],E_2)})$,

$$V(x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + A(x_0)$$

Очевидно, что любое решение операторного включения

$$\hat{A}(x) \in V(x). \tag{3.11}$$

является решением задачи (3.6), (3.7) Изучим свойства отображения V.

3.4.2 Лемма. *Если отображение F_1 вполне непрерывно, то многозначное отображение $\Phi_1 : C_{([0,l],E_1)} \to K_v(C_{([0,l],E_2)})$, где*

$$\Phi_1(x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds,$$

является вполне непрерывным многозначным отображением.

Доказательство этого факта содержится в [6].

3.4.3 Лемма. *Пусть отображение F_2 удовлетворяет условиям (1) и (2) леммы 3.4.1, тогда многозначное отображение $\Phi_2 : C_{([0,l],E_3)} \to K_v(C_{([0,l],E_2)})$,*

$$\Phi_2(z)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(z)(s)ds,$$

имеет компактные выпуклые образы и является липшицевым.

Доказательство. Компактность и выпуклость множества $\Phi_2(z)$ вытекает из компактности и выпуклости множества $\int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(z)(s)ds$ (см. [6]). Проверим липшицевость отображения Φ_2.

Пусть z_1 и z_2 – произвольные функции из $C_{([0,l],E_3)}$, и $z_1 \neq z_2$. По определению метрики Хаусдорфа имеем

$$h(\Phi_2(z_1), \Phi_2(z_2)) = inf\{\varepsilon : \Phi_2(z_1) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_2)),\ \Phi_2(z_2) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_1))\},$$

где $U_\varepsilon(A)$ – $\varepsilon-$окрестность множества A.

Пусть $\alpha \in \Phi_2(z_1)$, тогда

$$\alpha(t) = \int\limits_0^t w(s)ds, \text{где } w(s) \in F_2(s, z_1(s))$$

при почти всех $s \in [0, l]$.

В силу липшицевости по второму переменному многозначного отображения F_2 имеет место следующее неравенство

$$\rho(w(s), F_2(s, z_2(s))) \leq h(F_2(s, z_1(s)), F_2(s, z_2(s))) \leq$$

$$\leq \alpha||z_1(s) - z_2(s)|| \leq \alpha||z_1 - z_2||,$$

для почти всех $s \in [0, l]$. То есть для почти всех $s \in [0, l]$ справедливо включение:

$$w(s) \in U_\beta(F_2(s, z_2(s)))$$

для любого $\beta > \alpha||z_1 - z_2||$. Будем считать, что

$$(\alpha + 1)||z_1 - z_2|| > \beta > \alpha||z_1 - z_2||.$$

Рассмотрим непрерывное многозначное отображение

$$Q_2(s) = F_2(s, z_2(s)), \;\; s \in [0, l],$$

это отображение ограничено. Отображение $w(s)$ является измеримым сечением непрерывного многозначного отображения

$$Q_1(s) = F_2(s, z_1(s)), \;\; s \in [0, l],$$

следовательно $w(s)$ ограничена при почти всех $s \in [0, l]$. Тогда существует число $k > 0$ такое, что

$$\max_{q \in Q(s)} ||q - w(s)|| \leq k$$

для почти всех $s \in [0, l]$.

В силу теоремы Скорца-Драгони для любого $\delta > 0$ существует компакт $\triangle \subset [0, l]$ такой, что сужение w на $\triangle$ является непрерывной функцией, $\mu([0, l] \backslash \triangle) < \delta$, и $w(s) \in U_\beta(F_2(s, z_2(s)))$ для любой точки $s \in \triangle$.

Так как

$$F_2(s, z_2(s)) \cap U_\beta(w(s)) \neq \varnothing$$

для любого $s \in \triangle$, то существует непрерывная функция $P_\triangle : \triangle \to E_2$ такая, что

$$P_\triangle(s) \in F_2(s, z_2(s)) \cap U_\beta(w(s)),$$

(см., например, [12]).

Пусть $P : [0, l] \to E_2$ измеримая функция, определенная условием

$$P(s) = \begin{cases} P_\triangle(s), & \text{если } s \in \triangle, \\ u(s), & \text{если } s \in [0, l] \backslash \triangle, \end{cases}$$

где $u(s)$ – произвольное измеримое сечение многозначного отображения $F_2(s, z_2(s))$ на множестве $[0, l] \backslash \triangle$. Тогда

$$\int\limits_0^l |P(s) - w(s)|ds = \int\limits_\triangle |P_\triangle(s) - w(s)|ds + \int\limits_{[0,l]\backslash\triangle} |u(s) - w(s)|ds < \beta l + k\delta.$$

Если $0 < \delta < \frac{l||z_1 - z_2||}{k}$, то

$$\int\limits_0^l |P(s) - w(s)|ds < l\,(\alpha + 1)||z_1 - z_2|| + l||z_1 - z_2|| = l(\alpha + 2)||z_1 - z_2||.$$

Тогда, если $v_\beta(t) = \int\limits_0^t P(s)ds$, то

$$||z - v_\beta|| = \max_{0 \le t \le l} || \int\limits_0^t P(s)ds - \int\limits_0^t w(s)ds|| \le$$

$$\le \max_{0 \le t \le l} \int\limits_0^t ||P(s) - w(s)||ds \le l(\alpha + 2)||z_1 - z_2||.$$

Если выполнено неравенство $l\,(\alpha + 2)||z_1 - z_2|| < \varepsilon$, то $||z - v_\beta|| < \varepsilon$. Тогда $\Phi_2(z_1) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_2))$.

В силу равноправности функций z_1 и z_2 аналогично можно доказать, что $\Phi_2(z_2) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_1))$.

Тогда $h(\Phi_2(z_1), \Phi_2(z_2)) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > l(\alpha+2)||z_1 - z_2||$. Следовательно,

$$h(\Phi_2(z_1), \Phi_2(z_2)) \leq l(\alpha+2)||z_1 - z_2||.$$

Это и доказывает липшицевость отображения Φ_2. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию $\hat{x}_0 \in C_{([0,l],E_1)}$, где $\hat{x}_0(t) = x_0$ при всех $t \in [0,l]$. Пусть $D_R[\hat{x}_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в $\hat{x}_0$ в пространстве $C_{([0,l],E_1)}$.

3.4.4 Лемма. *Если число $l > 0$ достаточно мало, то многозначное отображение $V : D_R[\hat{x}_0] \to K_v(C_{([0,l],E_2)})$,*

$$V(x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + A(x_0), \;\; 0 \leq t \leq l,$$

является $(\hat{A}, \chi)$ – уплотняющим, где χ – мера некомпактности Хаусдорфа.

Доказательство. Для доказательства этой леммы воспользуемся предложением 3.2.7. Рассмотрим многозначное отображение

$$G : D_R[\hat{x}_0] \times C_{([0,l],E_3)} \to K_v(C_{([0,l],E_2)}),$$

где

$$G(x,y)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + A(x_0) + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(y)(s)ds.$$

Очевидно, что $V(x) = G(x, \hat{B}(x))$, где оператор $\hat{B}$ подчинен оператору $\hat{A}$.

Если зафиксировать $y \in C_{([0,l],E_3)}$, то

$$G(\cdot, y) : D_R[\hat{x}_0] \subset K_v(C_{([0,l],E_2)})$$

является вполне непрерывным отображением (см. лемму 3.4.2).

Зафиксируем $x \in D_R[\hat{x}_0]$, тогда

$$G(x, \cdot) : C_{([0,l],E_3)} \subset K_v(C_{([0,l],E_2)})$$

является липшицевым отображением и константа Липшица равна $l(\alpha+2)$ (см. лемму 3.4.3). Если $0 < l < \frac{1}{\alpha+2}$, то отображение $G(x, \cdot)$ является сжимающим.

Таким образом выполнены все условия предложения 3.2.7, то есть при $l < \frac{1}{\alpha+2}$ отображение V является $(\hat{A}, \chi)$ – уплотняющим. Лемма доказана.

3.4.5 Теорема. *При сделанных предположениях найдется такое число* $l_0 > 0$, *что* $\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\hat{x}_0 \in C_{([0,l],E_1)}$, где $\hat{x}_0(t) = x_0$ при всех $t \in [0, l]$, $D_R[\hat{x}_0] \subset C_{([0,l],E_1)}$ – замкнутый шар радиуса R с центром в $\hat{x}_0$, $k > ||A^{-1}||$ произвольное число. Пусть точка $x \in D_R[\hat{x}_0]$. Оценим

$$\rho(\hat{A}(\hat{x}_0)(t), \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + A(x_0)) =$$

$$\rho(A(x_0), \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + A(x_0)) =$$

$$= \rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds) \leq \rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds) +$$

$$+\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds). \qquad (3.12)$$

Оценим первое слагаемое $\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds)$ выражения (3.12). Так как F_1 является вполне непрерывным многозначным отображением, то существует такое число N_1, что $||u|| \leq N_1$ для любого $u \in F_1(t, s)$, где $t \in [0, l], s \in B_R[x_0]$.

Тогда

$$\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds) \leq \int\limits_0^l N_1 ds = N_1 l.$$

Пусть $0 < l \leq \frac{R}{2kN_1}$, тогда

$$\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds) \leq \frac{R}{2k}.$$

Оценим второе слагаемое $\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds)$ выражения (3.12). Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \rho(0, F_2(t, B(x_0)))$. В силу свойств многозначного отображения F_2 функция φ является ограниченной на отрезке $[0, l]$. Следовательно существует число $N_2 > 0$ такое, что $N_2 \geq \varphi(t)$ для любого $t \in [0, l]$. Пусть $\hat{B}(x)(t) = B(x(t))$.

Оценим

$$\rho(0, F_2(t, \hat{B}(x)(t)) \leq \rho(0, F_2(t, B(x_0))) + h(F_2(t, B(x(t))); F_2(t, B(x_0))) \leq$$

$$\leq \varphi(t) + \alpha||B||\,||x(t) - x_0|| \leq N_2 + \alpha||B|| \max_{0 \leq t \leq l} ||x(t) - x_0|| \leq$$

$$\leq N_2 + \alpha||B||(R + ||x_0||) = N_3.$$

Тогда

$$\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(s, B(x)(s))ds) \leq \int\limits_0^t \rho(0, \mathcal{P}_{F_2}(B(x))(s))ds \leq N_3\, l.$$

Пусть $0 < l \leq \frac{R}{2kN_3}$, тогда

$$\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds) \leq \frac{R}{2k}.$$

Таким образом, если

$$l_0 \leq \min\{\frac{R}{2kN_1}, \frac{R}{2kN_3}\},$$

то для любой точки $x \in D_R[\hat{x}_0]$ справедливо неравенство:

$$\rho(\hat{A}(\hat{x}_0),\ V(x)) = \rho(\hat{A}(\hat{x}_0), \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + A(x_0)) \leq \frac{R}{k}. \tag{3.13}$$

Так как V является $(\hat{A}, \chi)$-уплотняющим отображением и справедливо неравенство (3.13), то выполнены все условия теоремы 3.3.1, т.е. включение (3.11) имеет решение. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Александров П.С.,Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности/ П.С. Александров, Б.А. Пасынков. – М: Наука. – 1973.

[2] Ахмеров Р.Р. Меры некомпактности и уплотняющие отображения/ Р.Р. Ахмеров и др. – Новосибирск: Наука. – 1986.

[3] Борисович Ю.Г. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. I/Ю.Г. Борисович// Геом. и теория особенностей в нелинейных уравнениях. – Воронеж: ВорГУ. – 1987. – С.24–46.

[4] Борисович Ю.Г. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. II/Ю.Г. Борисович//Глобал. анал. и нелинейн. уравнения. – Воронеж: ВорГУ. – 1988. – С.22–43.

[5] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений/ Ю.Г. Борисович, Б.Д Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский// Успехи математических наук. – 1980. – Т.34. – № 1. – С.59–126.

[6] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений/ Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. – М: КомКнига (URSS). – 2005.

[7] Борисович Ю.Г., Сапронов Ю.И. К топологической теории компактно сужаемых отображений/ Ю.Г. Борисович, Ю.И. Сапронов// Труды сем. по функциональному анализу. – 1969. - Вып.12. – С. 43-68.

[8] Гельман Б.Д. Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений/ Б.Д. Гельман // Математический сборник. – 1997. – № 12. – С.33-56.

[9] Гельман Б.Д. О топологической размерности множества решений операторных включений, содержащих сюръективные операторы/ Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2001. – №1. – С.75-80.

[10] Гельман Б.Д. Об одном классе операторных уравнений/ Б.Д. Гельман // Математические заметки. – 2001. – №2. - С.86-91.

[11] Гельман Б.Д. Введение в теорию многозначных отображений (однозначные апроксимации и сечения) Часть 1/ Б.Д. Гельман. Воронеж: Изд. ВГУ. – 2003.

[12] Гельман Б.Д. Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки// Математические заметки. – 2005. – № 78(2). – С. 212-222.

[13] Гельман Б.Д. Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных дифференциальных уравнений/ Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2006. – №1. - С.119-127.

[14] Гельман Б.Д. Об операторных включениях с сюръективными операторами./ Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. – 2007, Т.70, В.4. - С.544-552.

[15] Гельман Б.Д. Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных включений/ Б.Д. Гельман// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2007. – № 2. – С.86–91.

[16] Гельман Б.Д. Многозначные сжимающие отображения и их приложения/ Б.Д. Гельман// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 1. – С.74–86.

[17] Гельман Б.Д. О локальных решениях вырожденных дифференциальных включений./ Б.Д. Гельман // Функциональный анализ и его приложения. – 2012. – №1. – С.79-83.

[18] Гельман Б.Д., Афонина С.Н. Уплотняющие возмущения сюръективных операторов. Некоторые приложения/Б.Д. Гельман, С.Н. Афонина// Вестник Тамбовского Университета, Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 5 – С.2479-2481.

[19] Гельман Б.Д., Завьялова А.В. Об одном классе вырожденных дифференциальных включений/Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1 – С.136-145.

[20] Гельман Б.Д., Завьялова А.В. Об уплотняющих многозначных возмущениях линейных сюръективных операторов /Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2 – С.148-161.

[21] Гельман Б.Д., Завьялова А.В. Об одном классе вырожденных дифференциальных включений/Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова// Вестник Тамбовского Университета, Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 5 – С.2481-2483.

[22] Гельман Б.Д., Калабухова С.Н. Об уплотняющих возмущениях линейных сюрьективных операторов/ Б.Д. Гельман, С.Н. Калабухова// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С.120–127.

[23] Гольдштейн Л.С., Гохберг И.Ц., Маркус А.С. Исследование некоторых свойств линейных операторов в связи с их $q-$нормой/ Л.С. Гольдштейн, И.Ц. Гохберг, А.С. Маркус// Уч. зап. Кишиневского ун-та. – 1957. – Т.29. – С. 29-36.

[24] Завьялова А.В. Об одной теореме о неподвижной точке для многозначных отображений с некомпактными образами/А.В. Завьялова// Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2011. – С.139-140.

[25] Завьялова А.В. О локальных решениях одного класса вырожденных дифференциальных включений/А.В. Завьялова// Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2012: материалы международной конференции/ под ред. В.А. Костина. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2012. – С.67-68.

[26] Завьялова А.В. О задаче Коши для одного класса вырожденных дифференциальных включений/А.В. Завьялова// Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения-XXIII". – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2012. – С.68-69.

[27] Завьялова А.В. Вырожденные дифференциальные включения с сюръективными операторами/А.В. Завьялова// Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): материалы V Международной конференции Воронеж, 11-16 сентября 2012г. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2012. – С.130-132.

[28] Завьялова А.В. Об уравнениях с $(A, \psi)-$уплотняющими отображениями /А.В. Завьялова// Современные методы теории функций и

смежные проблемы: материалы ВЗМШ 2013. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2013. – С.92-93.

[29] Калабухова С.Н. Об отображениях, уплотняющих относительно замкнутого оператора/ С.Н. Калабухова// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2011. – Т.16., Вып.4. – С. 1092-1094.

[30] Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве/А.А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука. – 1986.

[31] Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces//A. Baskakov, V. Obukhovskii, P. Zecca / Math. Differ. Incl. Control Optim. – 2003. – № 23. – P. 53-74.

[32] Eilenberg S. Fixed point theorems for multivalued transformations/ S. Eilenberg, D. Montgomery// Amer. J. Math. v. 68. - P. 214-222.

[33] Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces/A. Favini, A. Yagi. – N.Y.: Marcel Dekker. – 1999.

[34] Furi M., Vignoli A. On a Property of the Unit Sphere in a Linear Normed Space/ M. Furi, A. Vignoli// Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astron. et Phy. – 1970. – № 18: 6. – P. 333-334.

[35] Gel'man B.D., Kalabukhova S.N. On Condensing Perturbations of Closed Linear Surjective Operators/ B.D. Gel'man, S.N. Kalabukhova// Global and Stochastic Analysis. – 2012. – Vol.2, №1, ISSN 2248-9444.

[36] Granas A. Sur la notion du degre topologique pour une certaine clesse de transformations multivalentes dans les espaces de Banach/ A. Granas//

Bull. Acad. Polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. 1959. – V. 7, № 4. – P 191-194.

[37] Gorniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings/ L. Gorniewicz. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht-Boston-London. – 1999.

[38] Kakutani S. A generalization of fixed point theorem/ S. Kakutani // Duke Math. J. 1941. – № 8. – P. 457-459.

[39] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces/M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001.

[40] Obukhovskii V., Zecca P. On boundari value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces / V. Obukhovskii, P. Zecca // Abstr. Appl. Anal. – 2003. – № 13. – P. 769-784.

[41] Ricceri B. On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations/B. Ricceri // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 1997. – V. 325, no. 1. – P.65–70.