

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Южный федеральный университет»

*На правах рукописи*

Скороходов Владимир Александрович

**Графы с нестандартной достижимостью:  
маршрутизация, случайные процессы и потоковые задачи**

05.13.17 — Теоретические основы информатики

диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант – д.т.н.,  
профессор Я.М. Ерусалимский

Ростов-на-Дону — 2017

# Содержание

Введение .....	6
<b>Глава 1.</b> Нестандартная достижимость на ориентированных графах	25
1.1. Основные понятия и определения .....	25
1.2. Достижимость на графах с условиями магнитности .....	27
1.2.1. Графы с накоплением неубывающей магнитности .....	27
1.2.2. Графы с накоплением-исчезанием магнитности .....	36
1.2.3. Графы с возрастанием-убыванием магнитности .....	41
1.3. Оценка вычислительной трудоёмкости алгоритмов нахождения кратчайшего пути .....	45
1.4. Графы с условием механической достижимости .....	47
1.5. Графы с условием вентиляющей достижимости .....	50
1.5.1. Условие вентиляюще-накопительной достижимости .....	51
1.5.2. Условие вентиляющей достижимости с возрастанием-убыванием доступа на пути .....	54
1.5.3. Условие вентиляющей достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути .....	56
1.6. Достижимость на графах с условиями затухания и усиления .	60
1.7. Графы с нестандартной достижимостью (общий подход) .....	64
1.7.1. Общий подход к нестандартной достижимости .....	64
1.7.2. Частные случаи графов с нестандартной достижимостью	69
1.8. Задача о перераспределении ресурсов .....	71
1.8.1. Задача о перераспределении ресурсов .....	71
1.8.2. Условие разделения .....	77
<b>Глава 2.</b> Случайные процессы и нестандартная достижимость .....	80
2.1. Случайные процессы, классическая постановка .....	80
2.2. Случайные процессы на графах с магнитными достижимостями	84
2.2.1. Случайные процессы на графах с магнитно-накопительной достижимостью .....	84

2.2.2. Случайные процессы на орграфах с накоплением двух типов магнитности разной полярности . . . . .	87
2.3. Туннельная проводимость твердокристаллической решетки . .	90
2.4. Случайные процессы на графах с механической достижимостью	92
2.5. Случайные процессы на графах с условием вентиляющей достижимости . . . . .	95
2.5.1. Случайные процессы на графах с условием вентиляющей накопительной достижимости . . . . .	95
2.5.2. Случайные процессы на графах с условием вентиляющей достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути	98
<b>Глава 3. Стационарное распределение на графах . . . . .</b>	<b>100</b>
3.1. Основные понятия и определения . . . . .	100
3.2. Устойчивость и стационарное распределение на графах . . . . .	101
3.3. Приложения условия механической достижимости . . . . .	112
<b>Глава 4. Потоки в сетях с нестандартной достижимостью . . . . .</b>	<b>115</b>
4.1. Основные понятия, определения и утверждения . . . . .	115
4.2. Потоки в сетях с ограничениями на достижимость . . . . .	116
4.3. Потоки в сетях с вентиляющими достижимостями . . . . .	125
4.4. Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами . . . . .	128
4.4.1. Основные понятия и определения . . . . .	128
4.4.2. Верхняя оценка величины максимального потока . . . . .	131
4.4.3. Нижняя оценка величины максимального потока . . . . .	135
4.4.4. Алгоритм нахождения максимального потока . . . . .	136
4.5. Задача о прибыли сети при заданной величине допустимого потока . . . . .	144
4.5.1. Максимальная прибыль сети от прохождения по ней потока заданной величины . . . . .	144
4.5.2. Случай сети с $k$ источниками и $m$ стоками . . . . .	147
4.5.3. Прибыль от потоков с обратной связью в орсетях с ограничениями на достижимость . . . . .	148

4.5.4. О влиянии ограничения на достижимость на максимальную прибыль сети . . . . .	155
4.6. Задача о максимальном потоке в сетях с условиями распределения потока . . . . .	159
4.6.1. Максимальный поток в сети с условием жёсткого распределения потока . . . . .	160
4.6.2. Нетривиальная разрешимость задачи нахождения максимального жёстко распределённого потока . . . . .	162
4.6.3. Задача о максимальном жёстко распределённом потоке .	163
4.6.4. Максимальный поток на графе с условием нежёсткого распределения потока . . . . .	176
<b>Глава 5.</b> Зависимость ограничений достижимости от времени . . . . .	180
5.1. Графы с условием на прохождение и временными весами . . . .	180
5.1.1. Достижимость на графах с временными весами . . . . .	180
5.1.2. Задача о кратчайшем пути на графе с нестандартной достижимостью . . . . .	186
5.1.3. Периодическая зависимость от времени весов дуг графа	188
5.2. Зависимость от времени нестандартной достижимости . . . . .	192
5.2.1. Задача о кратчайших путях . . . . .	193
5.2.2. Случайные блуждания частицы на графах с меняющейся нестандартной достижимостью . . . . .	196
5.3. Графы с меняющейся длительностью прохождения по дугам .	201
5.4. Максимальный поток в сети с меняющейся длительностью прохождения . . . . .	206
5.5. Потоки в сетях с циклически меняющимися длительностями .	214
5.5.1. Оценка величины максимального суммарного потока . . .	216
5.6. Случайные блуждания на графах с меняющимися длительностями . . . . .	219
<b>Глава 6.</b> Оператор Лапласа и задача Дирихле на графах с нестандартной достижимостью . . . . .	225
6.1. Оператор Лапласа на графах с нестандартной достижимостью	225

6.2. Принцип максимума. Формулы Грина . . . . .	231
6.3. Задача Дирихле . . . . .	234
Заключение . . . . .	238
Литература . . . . .	240

## Введение

**Актуальность работы.** Ориентированные графы стали хорошим средством математического моделирования большого количества дискретных процессов и явлений. Родившись при решении головоломок, теория графов свои первые применения нашла в химии (работы А. Келли по перечислению помеченных деревьев) и в электротехнике (законы Г. Кирхгоффа – теория электрических цепей). В самой математике развитие теории графов было связано с топологией (критерий планарности графа Л.С. Понтрягина и К. Куратовского) и многолетними попытками доказательства гипотезы четырех красок. Бурное развитие теории графов и её применения связано с началом компьютерной эры и появлением новой отрасли современной математики, которую называют компьютерными науками или информатикой. Маршрутизация в телекоммуникационных и компьютерных сетях, навигация в системах GPS, составление оптимальных расписаний движения транспорта и планирование перевозок в логистике лишь малая часть примеров применения теории графов в этом направлении.

Отметим, что большинство графовых моделей связано с некоторым передвижением по путям соответствующего графа, а основную роль в каждой конкретной модели обычно играет одна из трех задач: задача о достижимости (или ее модификация – задача о кратчайших путях), задача о случайном блуждании и потоковая задача, поскольку поток перемещается по путям графа. Заметим, что каждая из перечисленных задач (не только первая) связана с понятием достижимости на графе. Перечисленные задачи (в классической постановке, т.е. когда все пути являются допустимыми) хорошо изучены в работах Г. Данцига, Е. Диница, Д. Эдмондса, Р. Карпа, А. Голдберга, А.А. Зыкова, О. Оре, Л.Р. Форда, Д.Р. Фалкерсона, Ф. Харари, Р. Тарьяна и др. (см. [13], [44]-[45], [55], [122]-[123], [124]-[139]).

Среди важнейших результатов особо выделим алгоритм Е. Дейкстры нахождения кратчайших путей на графах [48] и теорию потоков в сетях, созданную Л.Р. Фордом и Д.Р. Фалкерсоном [95], [115], [116]. Следует отметить, что основные методы теории потоков в сетях не слишком изменились

с дней своего создания. Основными направлениями ее развития стали разработка и модификация алгоритмов решения потоковых задач в сетях (см. [1], [3], [43], [48], [56], [64], [102]-[121]).

Сегодняшний интерес к теории потоков в сетях связан с интенсивным развитием инфокоммуникационных сетей, в том числе WWW, мобильных сетей, глобальных компьютерных сетей, теории нейронных сетей, логистики. О роли этой теории в информатике хорошо сказано в работе М. Ньюмана<sup>1</sup>: «Современная теория сетей стала прототипом междисциплинарных исследований: социология, компьютерные науки, химия, экономика, энергетика, транспорт, управление бизнесом и, сравнительно недавно, социальные сети и биоинформатика. Целям и задачам все этих наук служит эта теория».

Укажем на ещё одну важную область применения методов теории графов – теоретическое программирование, в том числе такое важное и современное её направление – автоматическое распараллеливание компьютерных программ, в основе которого лежит построение и анализ информационного или управляющего графа программы. В этом направлении отметим работы В.В. Воеводина, В.А. Евстигнеева, В.Н. Касьянова, С.В. Огородова, Б.Я. Штейнберга, Л. Лампорта, Р. Аллена, К. Кэннеди, М. Вольфа.

Настоящая работа посвящена нестандартной достижимости на ориентированных графах и методам решения классических задач на графах с нестандартной достижимостью. Нестандартная достижимость понимается нами как некоторое ограничение на множество путей графа. Это означает, что дуги могут не являться равноправными в формировании путей, вследствие чего некоторые пути становятся недопустимыми. Вместе с тем, обыкновенные ориентированные графы можно считать графами с нестандартной достижимостью (тривиальной). Переход от рассмотрения всего множества путей графа к рассмотрению выделенного подмножества путей существенно меняет характер задач связанных с достижимостью. Перечисленные выше известные алгоритмы «перестают работать», поскольку они не учитывают сужение множества рассматриваемых путей. Это относится

---

<sup>1</sup>Newman M. Networks: an Introduction// Oxford University Press, Inc., New York, NY, 2010. - 720 p.

и к задаче о кратчайших путях, и к задаче о случайных блужданиях по графу, и к задаче о максимальном потоке в сети. Кроме того, мультиграфовость (наличие кратных дуг) на графах с нестандартной достижимостью в отличие от графов без ограничений на достижимость является неустрашимой. Если кратные дуги являются дугами разного типа, то в задаче о кратчайших путях нельзя оставлять из кратных только кратчающую дугу, а в потоковых задачах заменять кратные дуги одной дугой с суммарной пропускной способностью.

Отметим, что ограничения на достижимость естественным образом проявляются во многих прикладных задачах. Приведём в качестве примера одну из них.

Рассмотрим компьютерную сеть, в которой для некоторых подсетей установлены определённые правила для приёма и передачи пакетов данных. Например, запрет на трансляцию широковещательных сообщений из внешних узлов или приоритет в передаче пакетов данных из доверенных источников, или для пакетов из источников, не являющихся доверенными, обязательна отправка их на проверку на одном из локальных узлов подсети. Подобные правила фактически являются ограничениями на множество путей, по которым «перемещаются» пакеты данных и, как следствие, могут существенно усложнять задачу маршрутизации пакетов в сети.

Заметим, что введение таких ограничений является в некотором смысле реконфигурированием сети, причём не аппаратными средствами, но программными средствами на некоторых узлах (серверах, шлюзах и пр.) сети. Следует отметить, что в данном случае реконфигурирование сети является гибким и по времени, и относительно топологии компьютерной сети.

Приведём пример, иллюстрирующий сказанное. Рассмотрим сеть, изображённую на рис. 0.1.

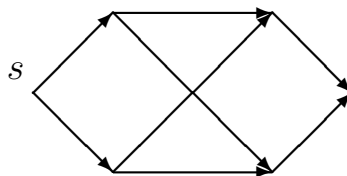


Рисунок 0.1 — Исходная конфигурация сети.



После введения ограничения на достижимость называемого смешанной достижимостью (см. [4]-[7]) и назначения дуг, выходящих из источника (вершина  $s$ ) и горизонтальных дуг «запрещенными», сеть реконфигурируется относительно источника в сеть, показанную на рис.0.2а. Если «запрещенными» дугами назначить дуги, выходящие из источника и перекрещивающиеся дуги, сеть реконфигурируется относительно источника в сеть, показанную на рис.0.2б.

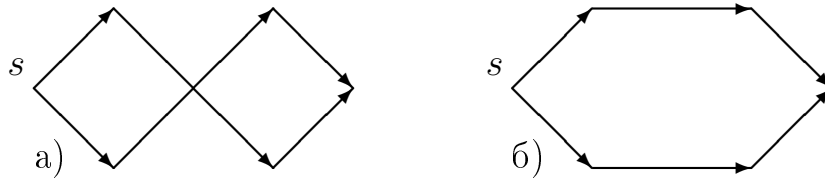


Рисунок 0.2 — Реконфигурированные сети.

Сеть в рассмотренном примере является достаточно простой, поэтому задача о маршрутизации приведённой сети с ограничением на достижимость легко сводится к аналогичной задаче в сети, получаемой из исходной сети путём удаления некоторых дуг. Однако, в общем случае новая конфигурация сети получается не настолько простой, поскольку в сети могут быть дуги, которые входят как в допустимые пути, так и в недопустимые. Последнее означает, что такие дуги не могут быть просто удалены из сети и требуются другие методы решения задачи маршрутизации в сети с ограничениями на достижимость.

**Степень разработанности проблемы.** Впервые графы с нестандартной достижимостью рассмотрены в работах Я.М. Ерусалимского и Е.О. Басанговой [4]-[7]. В них рассматривались частично-ориентированные графы, т.е. такие графы на которых представлены как ориентированные дуги, так и неориентированные ребра. Основной особенностью этих работ стало то, что для частично-ориентированных графов рассмотрено два вида ограничений на достижимость. Для первого вида допустимыми путями являлись такие последовательность дуг и ребер, в которых две дуги не шли подряд, т.е. после прохождения по дуге необходимо продолжать движение только по ребру. Для второго вида ограничений, наоборот, допустимыми путями являлись такие последовательность дуг и ребер, в которых два

ребра не шли подряд. Такие ограничения на достижимость существенно усложнили задачу нахождения кратчайшего пути, поскольку оказалось, что классические алгоритмы неприменимы и кратчайший путь, в общем случае, может быть найден только при помощи перебора всех возможных путей на графе. Авторами был предложен подход, основанный на построении вспомогательного графа, который позволил свести задачу нахождения кратчайшего пути на графе с ограничениями на достижимость к задаче о нахождении кратчайшего пути на вспомогательном графе без ограничений на достижимость. Перенос задачи о кратчайшем пути с ограничениями на достижимость на вспомогательный граф оказался эффективным с алгоритмической точки зрения. Задача о кратчайшем пути на вспомогательном графе не содержит ограничений на достижимость и может быть решена с помощью алгоритма Дейкстры, это означает что задача о кратчайших путях на графах со смешанной достижимостью решается за полиномиальное время. Следует отметить, что полученные результаты нашли приложение в теории базисов пространств Кёте (см. Басангова Е.О., Драгилев М.М. О пространствах Кёте с кратно-правильными базисами// Математические заметки. — 1986. — Т. 39, вып. 5, — С. 727-735).

Отметим, что в упомянутых работах сформировался достаточно удобный на наш взгляд термин «ориентированный граф со смешанной достижимостью». Смешанная достижимость на ориентированном графе заключается в том, что множество дуг графа состоит из объединения двух непересекающихся множеств  $U_N$  и  $U_Z$ . Смешанным путем на таком графе называется путь, при формировании которого никакие две дуги множества  $U_Z$  не идут подряд. Граф со смешанной достижимостью — это граф, на котором рассматриваются в качестве допустимых только смешанные пути. Для графов со смешанной достижимостью рассмотрены задача о кратчайшем пути и задача о случайных блужданиях. Основным методом решения рассмотренных задач на графах со смешанной достижимостью стало построение вспомогательного графа большего размера, но на котором все пути являются допустимыми, и сведение предложенных задач на графах со смешанной достижимостью к аналогичным задачам на вспомогательных

графах.

Дальнейшие исследования (работы Я.М. Ерусалимского, В.А. Скороходова, А.Г. Петросяна, М.В. Кузьминовой и Н.Н. Водолазова) посвящены изучению различных видов ограничений достижимости и решению классических задач, таких как задача о кратчайшем пути, задача о максимальном потоке и задача о случайных блужданиях частицы по вершинам, для каждого из рассмотренных ограничений. Среди рассмотренных ограничений выделим магнитные достижимости, барьерную достижимость, монотонную достижимость, вентильную и шлюзовую достижимости (см. [17]-[27], [52], [57]-[59], [65]-[68]). Во всех перечисленных достижимостях есть свои, уникальные особенности, однако, оказалось, что с некоторыми дополнениями построение вспомогательного графа в каждом случае позволяет сводить классические задачи на графах с рассмотренными ограничениями к их аналогам на вспомогательных графах. В этих работах сформировался еще один термин: «граф с нестандартной достижимостью», т.е. ориентированный граф с некоторым, заранее заданным ограничением достижимости.

Следует отметить ещё одну особенность графов с нестандартной достижимостью — процесс случайного блуждания частицы по вершинам графа в этом случае не является марковским (см. [21], [22], [27], [65]-[67], [74]). Переход к рассмотрению соответствующего процесса на вспомогательном графе, позволил свести этот немарковский процесс к марковскому на вспомогательном графе.

Задачи о потоках в сетях с нестандартной достижимостью (см. [10]-[12], [20], [22]-[24], [27], [57]-[59], [65], [65], [74]) оказались значительно сложнее задачи о кратчайших путях и о случайных блужданиях. При построении вспомогательного графа каждой дуге исходной сети на вспомогательной сети соответствует несколько дуг, т.е. при нахождении максимального потока для вспомогательной сети может получиться, что по таким дугам будет определен поток большей суммарной величины, чем соответствующая им дуга исходной сети. Таким образом, при переносе решения на исходную сеть, получим поток, который не является допустимым для исходной сети.

Первые итоги исследований по графам с нестандартной достижимо-

стью были подведены в нашей монографии «Графы и сети с нестандартной достижимостью: задачи, приложения» (см. [27]) и диссертационной работе Я.М. Ерусалимского (см. Ерусалимский, Я.М. Разработка и исследование методов решения экстремальных задач на ориентированных графах и сетях с ограничениями на достижимость: дисс. . . . д-ра тех. наук: 05.13.17 / — Ростов-на-Дону, 2015. — 258 с.). В последней предложен общий подход к решению классических задач, основанных на понятии достижимости, на графах с нестандартной достижимостью, основанный на построении «развертки» (вспомогательного графа) и сведения задачи на исходном графе с нестандартной достижимостью к соответствующей задаче на развертке без ограничений на достижимость. Одной из частей настоящей работы является обобщение и строгое обоснование такого подхода и исследование его алгоритмических аспектов.

Следующим этапом стали исследования динамической нестандартной достижимости, которая означает, что в каждый момент дискретного времени на графе с заданным ограничением на достижимость разбиение множества дуг формируется по определенному закону (см. [27], [74], [76]). Дальнейшая работа в этом направлении выявила существенную аналогию с нестандартной достижимостью на графах. В качестве таких аналогов нами рассмотрены графы с зависимостями весов дуг от времени и графы с зависимостями от времени длительностей прохождения по дугам (см. [68], [70], [74]-[76]). В каждом из случаев мы рассматриваем дискретное время. Классические задачи на таких графах оказались схожими с аналогичными задачами на графах с нестандартной достижимостью, однако, для каждой задачи были выявлены уникальные особенности, существенно влияющие на ее решение. Одной из таких особенностей стал вопрос в задаче о кратчайших путях на графе с меняющимися весами: что считать кратчайшим путём? Путь как таковой — это некоторая последовательность дуг. Прохождение этой последовательности дуг можно начинать в разные моменты времени. Динамическая нестандартная достижимость делает некоторые пути на графе реализуемыми (возможными) только в определенные временные промежутки начала движения по таким путям. Следова-

но, существенным становится время начала движения по заданному пути. Таким образом, требуется найти не только сам кратчайший путь как последовательность дуг, но и время начала движения по нему.

Немного в стороне от задач, основанных на понятии достижимости стоят исследования дискретного аналога оператора Лапласа на графах и краевых задач, порождаемых им. Зачастую при таких исследованиях рассматривают некоторые топологические сети, которые имеют только некоторые сходства с графами (см. [60]-[63]). Однако, имеются работы, посвященные изучению краевых задач именно на ориентированных графах (см., например, [94]). Так в работах Д.В. Степового рассмотрены дискретные аналоги оператора Лапласа на ориентированных графах, предложены оценки спектра лапласиана, предложены методы решения некоторых краевых задач, порождаемых оператором Лапласа, на ориентированных графах. Однако, при возникновении ограничений на достижимость метод декомпозиции, предложенный в работах Д.В. Степового становятся неприменим. Более того, некоторые классические понятия такие как, например, граница и внутренность ориентированного графа, на графе с нестандартной достижимостью не являются применимыми в классическом их определении. Нами предложен метод, позволяющий ставить краевые задачи на графах с нестандартной достижимостью и находить их решения. Все сказанное выше позволяет утверждать, что в данной работе представлены оригинальные задачи и методы их решения.

**Цель исследования** состоит в развитии и обосновании общих методов решения классических задач о кратчайших путях, о случайных блужданиях и потоковых задач на графах и сетях с нестандартной достижимостью (статической и динамической). В связи с этим ставится задача разработать методы в рамках общей теории графов с нестандартной достижимостью, позволяющие решать классические графовые задачи, такие как задача о кратчайшем пути или о максимальном потоке в сети, в тех случаях, когда неприменимы классические подходы, методы и алгоритмы теории графов.

**Объект исследования** — нестандартная достижимость и ее аналоги

на ориентированных графах.

**Предмет исследования** — задачи о достижимости, о случайных блужданиях и потоковые задачи на графах с нестандартной достижимостью и ее аналогами.

**Методы исследования.** В работе использованы методы теории графов, комбинаторного анализа, теории вероятностей, теории случайных процессов и теории чисел, а также методы алгебры и математического анализа.

**Достоверность и обоснованность** полученных в диссертационном исследовании результатов обеспечена корректным применением математического аппарата и строгим математическим обоснованием предложенных методов и алгоритмов.

**Научная новизна** диссертационной работы определяется следующими научными результатами:

1. Введено общее понятие графа с нестандартной достижимостью. Для решения задач на графах с нестандартной достижимостью и их аналогах (динамические графы с зависимостью весов дуг от времени) обобщён и обоснован (теоремы 1.2, 1.7, 1.12, 1.13, 1.14) метод развёрток Басанговой-Ерусалимского.
2. Получены точные оценки сверху для количества дуг кратчайшего пути на графах с нестандартной достижимостью и на графах с зависимостью дуг от времени (теоремы 1.3, 1.8, 5.3).
3. Проведено исследование процессов случайного блуждания частицы по вершинам графа с нестандартной достижимостью. Проанализировано возникновение-исчезновение устойчивых режимов для процесса случайного блуждания на графах с нестандартной достижимостью. Сформулирован и доказан критерий существования стационарного распределения в терминах графовой структуры цепи Маркова (теорема 3.5).
4. Введены и изучены новые объекты — обобщённые сети со связанными дугами. Разработаны методы нахождения максимального потока в обобщённой сети со связанными дугами, получены точные верхняя и нижняя оценки его величины (теоремы 4.4, 4.5). Рассмотрение развер-

ток сетей с нестандартной достижимостью как обобщённых сетей со связанными дугами корректно переносит потоковую задачу с сети с нестандартной достижимостью на её развертку.

5. Разработаны алгоритмы решения задач о кратчайшем пути и о максимальном потоке на графе с нестандартной достижимостью. Получена оценка вычислительной трудоёмкости алгоритма нахождения кратчайшего пути на графе с нестандартной достижимостью, учитывающая размер исходного графа и тип достижимости.
6. Предложены общие правила построения временной развёртки для произвольного графа с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени и доказана сводимость задач о достижимости и о максимальном потоке на графе с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени к аналогичным задачам на временной развёртке (теорема 5.7).
7. Доказаны существование и единственность решения задачи Дирихле на графе с нестандартной достижимостью (теорема 6.11).

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация имеет теоретический характер. Значимость результатов диссертации заключается в том, что полученные результаты существенно расширяют возможности использования аппарата теории графов к исследованию дискретных процессов и явлений, в которых имеют место реальные ограничения, в том числе к задачам навигации и потоковым задачам в информационных сетях. Использование методов, разработанных для графов с нестандартной достижимостью, позволяет учитывать такие особенности моделей и процессов, которые не могут быть учтены при использовании методов классической теории графов.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Обобщены и обоснованы методы решения классических задач о кратчайших путях и случайных блужданиях на графах с нестандартной достижимостью (статической и динамической).

2. Введены и изучены новые объекты — графы и сети с зависимостью весов дуг от времени, в том числе с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени.
3. Разработаны и обоснованы методы решения задач о максимальном потоке в сети в различных постановках, а также задач о кратчайших путях и о случайных блужданиях на графах с зависимостью весов дуг от времени.
4. Исследованы дискретные случайные процессы на графах с нестандартной достижимостью и их аналогах. Доказана сводимость в общем случае немарковского процесса случайного блуждания по вершинам графа с нестандартной достижимостью или её аналогом к марковскому процессу на вспомогательном графе.
5. Введены и изучены новые объекты — обобщенные сети со связанными дугами как средство моделирования потока в сети с нестандартной достижимостью.
6. Для задачи о максимальном потоке в обобщенной сети со связанными дугами получены точные оценки его величины. Разработаны методы нахождения максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами.
7. Для дискретного аналога оператора Лапласа разработаны и обоснованы методы решения краевых задач на его основе на графах с нестандартной достижимостью.

#### **Аппробация работы.**

Основные результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- IV Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011)». Воронеж, 2011.
- V Международная научная конференция «Современные проблемы при-



кладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012)». Воронеж, 2012.

- Международная конференции «Воронежская весенняя школа «Понтрягинские чтения — XXIV»». Воронеж, 2013 года.
- VI Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013)». Воронеж, 2013.
- IV Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — IV». Ростов-на-Дону, 2014.
- V Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — V». Ростов-на-Дону, 2015.
- Международная конференции «Воронежская весенняя школа «Понтрягинские чтения — XXVI»». Воронеж, 2015.
- VIII Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015)». Воронеж, 2015.
- VI Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — VI». Ростов-на-Дону, 2016.
- Международная конференция «Воронежская весенняя школа «Понтрягинские чтения — XXVII»». Воронеж, 2016.
- IX Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016)». Воронеж, 2016.
- Семинар в ИПУ РАН (Москва, 2015, рук. проф. Кузнецов О. П.).

- Семинар кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета (Ростов-на-Дону, 2008–2016, рук. проф. Ерусалимский Я. М.).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 41 научной работе, в том числе 15 — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и в рецензируемых зарубежных журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus ([22], [67]-[72], [75], [76], [85]-[89], [138]), и в двух монографиях ([27], [74]). В диссертацию включены результаты, полученные либо соискателем лично, либо при его непосредственном участии. В работах [22], [25], [26], выполненных совместно с научным консультантом, Я.М. Ерусалимскому принадлежит постановка задачи и определение общего подхода, автору диссертации принадлежат формулировки и подробные доказательства ключевых теорем, а также разработка алгоритмов. В работах [75], [76], [85], [138], выполненных в соавторстве с А.С. Чеботаревой, в работе [86], выполненной в соавторстве с М.В. Шевелевым и в работах [87] и [89], выполненных в соавторстве с Х. Абдулрахманом, вклад автора диссертации заключается в постановке задачи, ключевых идеях доказательств и непосредственном руководстве работой. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

**Содержание работы.** Диссертация состоит из введения и шести глав. Общий объём работы составляет 255 стр., библиографический список содержит 139 наименования.

**В главе 1** «Нестандартная достижимость на ориентированных графах» рассмотрены различные виды нестандартной достижимости: магнитная достижимость нескольких видов, вентильная достижимость нескольких видов, механическая достижимость. Дано общее определение понятия графа с нестандартной достижимостью. Введены понятия допустимых и недопустимых путей на графах с нестандартной достижимостью.

Множество допустимых путей на графах с нестандартной достижимостью является подмножеством множества всех путей графа. Переход от рассмотрения всего множества путей к подмножеству приводит к утрате основных свойств, на использовании которых основаны известные алгоритмы нахождения кратчайших путей. Так, для большинства видов нестан-

дартной достижимости множество допустимых путей не обладает транзитивным свойством. Другими словами, если вершина  $y$  достижима из  $x$ , а вершина  $z$  достижима из  $y$  при заданном ограничении, то из этого не следует достижимость вершины  $z$  из вершины  $x$  при заданном ограничении на прохождение по дугам.

Кратчайшие пути, в этом случае, не обладают и экстремальным свойством, состоящим в том, что любой отрезок кратчайшего пути является кратчайшим путем между своими граничными вершинами, а именно на нем основана большая часть алгоритмов нахождения кратчайших путей. Это означает, что классические алгоритмы нахождения кратчайших путей на графах с нестандартной достижимостью неприменимы.

Для решения задач о достижимости вершин и кратчайших путях в такой ситуации автором настоящей работы совместно с Я.М. Ерусалимским и др. (см. [27], [74]) предложен подход, согласно которому строится вспомогательный граф большего размера, но на котором все пути являются допустимыми.

Установлено однозначное соответствие множества путей вспомогательного графа и множества допустимых путей исходного графа (теоремы 1.1, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.9, 1.10, 1.11, 1.14), а также кратчайших путей вспомогательного и исходного графов (теоремы 1.2, 1.8, 1.12, 1.13).

Кроме этого, разработаны алгоритмы нахождения кратчайших путей на графе с нестандартной достижимостью и приведена их оценка сложности. Показано, что без построения вспомогательного графа задача о кратчайшем пути может быть решена только при помощи алгоритмов экспоненциальной сложности, тогда как алгоритмы нахождения кратчайших путей, использующие построение вспомогательного графа, имеют полиномиальную сложность.

**Глава 2** «Случайные процессы и нестандартная достижимость» посвящена изучению задачи о случайном блуждании частицы по вершинам графа с нестандартной достижимостью. Особенностью такой задачи является то, что процесс случайного блуждания на графе с нестандартной достижимостью не является марковским, поскольку у частицы появляется

некоторая «память» о проделанном ею пути.

Показано, что такой немарковский процесс случайного блуждания сводится к марковскому процессу на вспомогательном графе. Разработаны методы нахождения вероятностей перехода из вершины в вершину графа с нестандартной достижимостью за некоторое конечное число шагов (теоремы 2.1, 2.2, 2.3).

В качестве приложений графов с нестандартной достижимостью рассмотрен «туннельный эффект», возникающий при бомбардировании твердокристаллической решетки частицами. Показано, что внутренняя структура связей такой решетки может существенно влиять на прохождение частиц через нее. Рассмотрен вид структур «ускоряющих» решеток и «абсолютно непр пропускающих» решеток.

**Третья глава** «Стационарное распределение на графах» посвящена вопросам устойчивости и стационарного распределения на графах, в том числе на графах с нестандартной достижимостью. Введены понятия устойчивых, полустойчивых и неустойчивых режимов (циклов) графа. Разработаны алгоритмы нахождения устойчивых и неустойчивых циклов. Показано, что на графе с ограничением на достижимость устойчивыми циклами могут стать неустойчивые циклы на этом же графе без ограничения на достижимость, а устойчивые циклы (в этом случае) могут исчезнуть.

Так же, введено понятие периодического устойчивого цикла: *устойчивый режим называется периодическим, если при возведении матрицы переходных вероятностей в некоторую степень, все строки, соответствующие этому режиму вычисленной матрицы получают некоторой перестановкой эти же строк исходной матрицы.* Такая ситуация возникает лишь в том случае, когда устойчивый режим является компонентой сильной связности и из каждой вершины этой компоненты выходит ровно одна дуга, ведущая в вершину данного режима с вероятностью перехода, по ней равной единице. Показано, что для цепи Маркова, в которой присутствует хотя бы один периодический режим не существует стационарного распределения.

Сформулирована и доказана теорема о виде (графовой структуре)

марковской цепи для которой существует стационарное распределение. Отметим, что для существования стационарного распределения необходимо и достаточно, чтобы цепь была сжимающей [46].

**Теорема 3.5** *Для того чтобы конечная цепь Маркова  $G$  являлась сжимающей необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1.  $G$  не содержит периодических устойчивых режимов;
2. на  $G$  существует единственная компонента сильной связности  $H$ ;
3. в компоненте сильной связности  $H$  существует по крайней мере два цикла, длины которых — простые числа.

В качестве приложения устойчивых и неустойчивых режимов рассмотрена задача нахождения областей локального экстремума ограниченных функций, заданных на сетке.

**В главе 4** «Потоки в сетях с нестандартной достижимостью» изучается задача о максимальном потоке в сети с нестандартной достижимостью. Рассмотрение данной задачи для сетей с нестандартной достижимостью потребовало обобщения самого понятия ориентированной сети и допустимого потока в ней. В этой главе дано определение ориентированной сети со связанными дугами, т.е. такой сети, у которой выделены попарно непересекающиеся подмножества дуг. Для каждого из таких подмножеств определена не пропускная способность каждой из дуг, а только суммарная пропускная способность дуг этого подмножества. Ясно, что это потребовало корректировки и определения допустимого потока в такой сети. Предложен алгоритм нахождения максимального потока в сетях со связанными дугами.

Показано, что потоковая задача на исходном графе с нестандартной достижимостью сводится к потоковой задаче в сети со связанными дугами, которой является вспомогательный граф.

Однако, как показали дальнейшие исследования аналогов нестандартной достижимости на графах, такого определения сети со связанными дугами недостаточно. Поэтому было введено понятие обобщенной сети со

связанными дугами: *обобщенной сетью со связанными дугами* называется ориентированная сеть с введенным на множестве ее дуг отношением связности. Отношение связности вносит следующие коррективы в задачу нахождения максимального потока: если по некоторой дуге  $u$  сети  $G$  пропущен поток величины  $F$ , то пропускная способность каждой дуги  $v$ , связанной с дугой  $u$  отношением влияния, становится равной  $\max\{0, c(v) - F\}$ .

Показано, что для сетей с нестандартной достижимостью и обобщенных сетей со связанными дугами нарушается справедливость теоремы Форда и Фалкерсона о том, что величина максимального потока в сети равна пропускной способности минимального разреза. Получены точные оценки величины максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами (теоремы 4.5 и 4.6). Предложены эвристические алгоритмы, которые в большинстве случаев находят максимальный поток в обобщенной сети со связанными дугами, а значит, и в сети с нестандартной достижимостью.

Так же рассмотрены и решены потоковые оптимизационные задачи по двум критериям:

1. Задача о максимальной прибыли в сети от прохождения по ней потока заданной величины, которая заключается в том, что для каждой дуги указаны пропускная способность, вероятность перехода по данной дуге (которая играет роль распределения потока) и величина прибыли от прохождения по ней единичного потока. Необходимо при заданной величине потока назначить вероятности перехода по дугам сети таким образом, чтобы прибыль от потока была максимальной.

2. Задача о максимальной прибыли от потоков с обратной связью в сетях с ограничениями на достижимость, которая состоит в том, что пропускная способность каждой дуги задана как в прямом направлении, так и в обратном. В результате возникает пара потоков, которая образует поток с обратной связью. Ясно, что потоковая задача такого вида имеет смысл только в орсетях с ограничением на достижимость. Рассмотрена задача максимизации прибыли от потоков такого вида при условии связи и ограничениях на достижимость по дугам выделенных подмножеств.

**Глава 5** «Зависимость ограничений достижимости от времени» посвящена изучению графов с зависимостью некоторых характеристик от времени. В качестве меняющихся характеристик рассмотрены: зависимость весов дуг от времени, зависимость от времени длительности прохождения по дугам, а также зависимость самих условий нестандартной достижимости. Показано, что графы с такими зависимостями характеристик от времени являются аналогами графов с нестандартной достижимостью и для решения классических задач на таких графах можно использовать методы, разработанные для графов с нестандартной достижимостью. Однако, есть некоторые уточнения. Так для задачи о кратчайшем пути на графе с меняющейся длительностью прохождения по дугам возникает вопрос о нахождении не только кратчайшего пути, но и времени начала движения по нему, что существенно усложняет переборные алгоритмы поиска. Показано, что методы, разработанные для графов с нестандартной достижимостью, позволяют одновременно находить как сам кратчайший путь, так и время начала движения по нему.

Также показано, что потоковые задачи в сетях с зависимостью рассмотренных характеристик от времени сводятся к соответствующим потоковым задачам в обобщенных сетях со связанными дугами.

Что касается процессов случайного блуждания по вершинам рассматриваемых графов, то отметим, что такие процессы являются марковскими, в отличие от процессов случайного блуждания по вершинам графов с нестандартной достижимостью. Однако, можно утверждать, что методы, разработанные для графов с нестандартной достижимостью, позволяют более удобно осуществлять нахождение вероятностей перехода из вершины в вершину. Более того, показано, что классические методы неприменимы для процессов случайного блуждания по вершинам графов с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени. Длительность прохождения по одной и той-же дуге может принимать различные значения в различные моменты времени, следовательно, нахождение вероятностей перехода из вершины в вершину возможно лишь при помощи перебора всех возможных путей, а затем выбора из них подходящих и нахождения веро-

ятностей перехода.

Разработан подход, согласно которому вначале производится построение вспомогательного графа, затем матрица переходных вероятностей вспомогательного графа разбивается в сумму матриц  $P = \sum_i P_i$ , где матрица  $P_i$  — это матрица переходных вероятностей только по дугам длительности  $i$ . Нахождение вероятностей перехода из вершины в вершину сводится к определенному порядку действий над матрицами  $P_i$  (теорема 5.14).

**Шестая глава** «Оператор Лапласа и задача Дирихле на графах с нестандартной достижимостью» посвящена изучению дискретного аналога оператора Лапласа, а также задачи Дирихле, порождаемой лапласианом на графах с нестандартной достижимостью. Введено понятие границы графа с нестандартной достижимостью, изучены некоторые свойства гармонических и субгармонических функций, заданных в вершинах графа с нестандартной достижимостью. Получены дискретные аналоги первой и второй формул Грина. Сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения задачи Дирихле на графе с нестандартной достижимостью (теорема 6.11).

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Автор выражает сердечную благодарность своему научному консультанту и Учителю профессору Ерусалимскому Я.М. за поддержку и отеческое благожелательное отношение к научной и педагогической работе автора.



# Глава 1

## Нестандартная достижимость на ориентированных графах

### 1.1 Основные понятия и определения

Приведём основные понятия и определения, необходимые для дальнейшего изложения ([3], [16], [44], [45], [48], [56], [64], [97]-[99], [101]).

**Определение 1.1.** *Ориентированным графом (орграфом) будем называть тройку  $G(X, U, f)$ , где  $X (\neq \emptyset)$  — множество, называемое множеством вершин графа,  $U$  — множество (возможно и пустое), называемое множеством дуг,  $f$  — отображение, действующее из  $U$  в  $X \times X$ , называемое отображением инцидентности.*

**Определение 1.2.** *Вершины  $x$  и  $y$  графа  $G$  называются смежными, если найдётся такая дуга  $u$ , что либо  $f(u) = (x, y)$ , либо  $f(u) = (y, x)$ . В таком случае также говорят, что дуга  $u$  инцидентна вершинам  $x$  и  $y$ .*

Введём в рассмотрение стандартные отображения  $p_1 : X \times X \rightarrow X$  и  $p_2 : X \times X \rightarrow X$  по следующим правилам:  $p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y$ . Тогда вершину  $x = (p_1 \circ f)(u)$  будем называть начальной вершиной дуги  $u$ , а вершину  $y = (p_2 \circ f)(u)$  — концевой вершиной дуги  $u$ .

В том случае, когда  $(p_1 \circ f)(u) = (p_2 \circ f)(u)$ , дуга  $u$  называется петлёй.

**Определение 1.3.** *Путем длины  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) на графе  $G$  будем называть отображение  $\mu : [1; n]_N \rightarrow U$  (где  $[1; n]_N = \{1, 2, \dots, n\}$ ), такое, что  $(p_2 \circ f \circ \mu)(i) = (p_1 \circ f \circ \mu)(i + 1)$ ,  $i \in [1; n - 1]_N$*

В случае, когда  $(p_2 \circ f \circ \mu)(n) = (p_1 \circ f \circ \mu)(1)$  (т.е. начальная вершина пути совпадает с концевой вершиной этого пути), такой путь называется контуром.

Если отображение  $\mu$  инъективно, то путь (контур) называется простым.

**Определение 1.4.** *Говорят, что вершина  $y$  является достижимой из вершины  $x$ , если существует путь  $\mu$ , начальной вершиной которого является вершина  $x$ , а конечной — вершина  $y$ .*

**Определение 1.5.** *Цепью длины  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) на графе  $G$  будем называть отображение  $\eta : [1; n]_N \rightarrow U$ , такое, что у любой дуги  $\eta(i)$   $i \in [2; n-1]_N$  одна инцидентная ей вершина — общая с дугой  $\eta(i-1)$ , а другая — общая с дугой  $\eta(i+1)$ .*

Вершина дуги  $\eta(1)$ , не являющаяся общей с дугой  $\eta(2)$ , называется началом цепи, а вершина дуги  $\eta(n)$ , не являющаяся общей с дугой  $\eta(n-1)$ , называется концом цепи.

В случае, когда начальная вершина цепи совпадает с конечной вершиной этой цепи, такая цепь называется циклом.

Если отображение  $\eta$  инъективно, то цепь (цикл) называется простой (простым).

**Определение 1.6.** *Ориентированный граф  $G(X, U, f)$  называется связным, если для каждой пары вершин  $x, y \in X$  существует цепь, ведущая из  $x$  в  $y$ .*

**Определение 1.7.** *Граф  $G(X, U, f)$  называется сильно связным, если любые две вершины  $x, y \in X$  — взаимно достижимы.*

Здесь и далее ориентированный граф будем называть просто графом, при этом всегда если не оговорено иное, полагаем, что граф является связным.

Введем следующие обозначения:

$\Gamma^+(x) = \{y \in X \mid \exists u \in U : f(u) = (x, y)\}$  — множество вершин, достижимых из  $x$  за один шаг (т.е. существует путь из  $x$ , содержащий одну дугу).

$[x]^+ = \{u \in U \mid (p_1 \circ f)(u) = x\}$  — множество дуг, начальной вершиной которых является вершина  $x$ .

Аналогично вводятся  $\Gamma^-(x)$  как множество вершин, из которых вершина  $x$  достижима за один шаг и  $[x]^-$  как множество дуг, конечной верши-

ной которых является вершина  $x$ .

**Определение 1.8.** Пусть  $G(X, U, f)$  – граф,  $X' (\neq \emptyset) \subset X$ . Подграфом графа  $G$ , порождённым множеством  $X'$ , называется граф

$$G \left( X', U_{X'}, f|_{U_{X'}} \right), \text{ где } U_{X'} = f^{-1}(X' \times X').$$

**Определение 1.9.** Пусть  $G(X, U, f)$  – граф,  $U' \subset U$ . Частичным графом графа  $G$ , порождённым множеством  $U'$ , называется граф  $G(X, U', f|_{U'})$ . Здесь  $f|_{U'}$  – ограничение отображения  $f : U \rightarrow X \times X$  на множество  $U'$ , т.е.  $f|_{U'} : U' \rightarrow X \times X$  по правилу

$$(f|_{U'})(u) = f(u) \quad \forall u \in U'.$$

Пусть  $x$  – некоторая вершина графа  $G(X, U, f)$ . Рассмотрим следующее подмножество его вершин:  $sC_x = \{y \in X \mid (y = x) \vee (\text{существует путь из } x \text{ в } y) \wedge (\text{существует путь из } x \text{ в } y)\}$ .

**Определение 1.10.** Компонентой сильной связности вершины  $x$  графа  $G$  называется его подграф, порождённый множеством  $sC_x$ .

## 1.2 Достижимость на графах с условиями магнитности

### 1.2.1 Графы с накоплением неубывающей магнитности

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$  такой, что его множество дуг  $U$  разбито на два подмножества  $U = U_M \cup U_H$ ,  $U_M \cap U_H = \emptyset$ . Множество  $U_M$  будем называть множеством магнитных дуг, а  $U_H$  – множеством немагнитных дуг.

Пусть  $\mu$  – путь длины  $n$  на графе  $G$ . С каждым отрезком  $[i; j]_N$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) пути  $\mu$  свяжем числовую характеристику

$$\lambda_\mu(i, j) = \sum_{m=i}^j |\mu(m) \cap U_M| \quad (1.1)$$

равную количеству магнитных дуг этого отрезка. При этом каждая дуга считается столько раз, сколько раз она встречается в пути.

В случае простого пути равенство (1.1) примет следующий вид:

$$\lambda_\mu(i, j) = |\mu([i; j]_N) \cap U_M|.$$

Характеристику  $\lambda_\mu(i, j)$  будем называть величиной накопленной неубывающей магнитности отрезка  $[i; j]_N$  пути  $\mu$ .

Обозначим через  $\lambda_\mu(i) = \lambda_\mu(0) + \lambda_\mu(1, i)$  величину накопленной неубывающей магнитности на пути  $\mu$  через  $i$  шагов от начала пути, где величина  $\lambda_\mu(0)$  определяет начальную величину неубывающей магнитности для пути  $\mu$ . Положим величину  $\lambda_\mu(0) = 0$  (далее будет рассмотрен случай, когда  $\lambda_\mu(0) \neq 0$ ).

Для характеристик  $\lambda_\mu(i, j)$  и  $\lambda_\mu(i)$ , очевидно, имеют место следующие аддитивные свойства:

1.  $\forall \delta_1, \delta_2 \in Z_+ \lambda_\mu(i, i + \delta_1 + \delta_2) = \lambda_\mu(i, i + \delta_1) + \lambda_\mu(i + \delta_1 + 1, i + \delta_1 + \delta_2)$ ,
2.  $\forall \delta \in Z_+ \lambda_\mu(i, i + \delta) = \lambda_\mu(i + \delta) - \lambda_\mu(i - 1)$ .

**Определение 1.11.** Пусть  $\mu$  – путь на графе  $G$ . Будем называть его магнитно-накопительным путем порядка  $k$  ( $\geq 1$ ) длины  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) с неубывающей магнитностью, если выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned} \forall t (\lambda_\mu(t) \geq k) \wedge ([p_2 \circ f \circ \mu](t))^+ \cap U_M \neq \emptyset &\Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mu(t + 1) \in U_M). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Другими словами, для каждого номера  $t$ , если путь  $\mu$  к  $t$ -тому шагу от своего начала накопил магнитность величины  $\lambda_\mu(i)$ , не меньшей заданного значения  $k$ , и среди дуг, выходящих из концевой вершины  $t$ -той дуги, есть хотя бы одна магнитная, то следующая ( $t + 1$ -я) дуга пути  $\mu$  должна быть только дугой из множества  $U_M$ . В противном случае, путь  $\mu$  не является магнитно-накопительным путём порядка  $k$ .

Условие (1.2) будем называть условием магнитной достижимости с накоплением неубывающей магнитности порядка  $k$ .

### Пример 1.1.

Рассмотрим граф на рис.1.1 при  $k = 2$ , дуги  $\{u_1, \dots, u_{10}\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (1, 4)$ ,  $f(u_3) = (2, 3)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,

$f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (3, 6)$ ,  $f(u_7) = (3, 7)$ ,  $f(u_8) = (4, 2)$ ,  $f(u_9) = (5, 7)$ ,  
 $f(u_{10}) = (6, 7)$ .

Положим  $U_M = \{u_1, u_2, u_5, u_8, u_9\}$  и  $U_H = \{u_3, u_4, u_6, u_7, u_{10}\}$ .

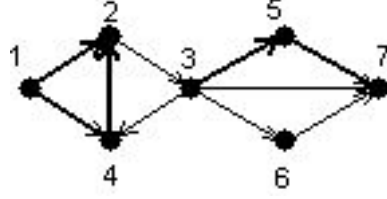


Рисунок 1.1 — Граф  $G$  с магнитной достижимостью.

Рассмотрим путь  $\mu = \{u_1, u_3, u_4, u_8, u_3, u_5, u_9\}$ . Для некоторых отрезков этого пути вычислим характеристики  $\lambda_\mu$ :

- $\lambda_\mu(2, 5) = 1$ , поскольку  $\mu([2; 5]_N) = \{u_3, u_4, u_8, u_3\}$  и только  $u_8 \in U_M$ .
- $\lambda_\mu(6, 7) = 2$ , так как  $\mu([6; 7]_N) = \{u_5, u_9\}$  и обе дуги этого отрезка пути принадлежат множеству  $U_M$ .
- $\lambda_\mu(1) = 1$ , поскольку данный отрезок пути состоит из одной дуги  $u_1$ , которая принадлежит множеству  $U_M$ .
- $\lambda_\mu(5) = 2$ , так как данный отрезок пути  $\mu([1; 5]_N) = \{u_1, u_3, u_4, u_8, u_3\}$  и только  $u_1, u_8 \in U_M$ .

Рассматриваемый путь  $\mu$  является магнитно-накопительным путем порядка 2, поскольку удовлетворяет условию (1.2).

Рассмотрим путь  $\eta = \{u_2, u_4, u_3, u_9\}$ . Он не является магнитно-накопительным путем порядка 2, так как не удовлетворяет условию (1.2): величина  $\lambda_\eta(3)$  ( $= 2$ ) не меньше значения  $k$  ( $= 2$ ), однако, следующая дуга пути  $\eta$  (дуга  $u_9$ ) является немагнитной.

**Определение 1.12.** Граф  $G(X, U, f)$ , на котором рассматриваются только магнитно-накопительные пути порядка  $k$  будем называть графом с накоплением неубывающей магнитности порядка  $k$ .

Таким образом, граф с накоплением неубывающей магнитности — это граф, на котором не все пути могут являться допустимыми. Отсюда следует, что на графе с магнитной достижимостью вообще говоря теряются два

свойства, на которых основаны все классические алгоритмы нахождения кратчайших путей:

1. свойство транзитивности пути: если на графе  $G$  существует путь из вершины  $x$  в вершину  $y$  и существует путь из вершины  $y$  в вершину  $z$ , то существует путь из вершины  $x$  в вершину  $z$ .

2. свойство экстремальности пути: любая часть кратчайшего пути является кратчайшим путём между своими начальной и конечной вершинами.

Таким образом, применение напрямую классических алгоритмов становится невозможным.

Подход к решению задачи о кратчайшем пути на графе  $G$  с накоплением неубывающей магнитности порядка  $k$  состоит в построении вспомогательного графа  $G'(X', U', f')$ , количество вершин которого больше, чем у исходного, но на котором нет ограничений на прохождение по дугам. Последнее означает, что все пути на вспомогательном графе являются допустимыми. При этом любому пути на вспомогательном графе  $G'$  будет соответствовать допустимый (магнитно-накопительный) путь на исходном графе  $G$ .

### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $k + 1$  вершина  $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу:

Каждой дуге  $u \in U_M$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует (см. рис.1.2а)  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j+1)}) \forall j \in [0; k - 1]_Z$  и  $f'(u^{(k)}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$ .

Каждой дуге  $u \in U_H$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует (см. рис.1.2б):

А) если  $U_M \cap [x]^+ \neq \emptyset$ , то  $k$  дуг  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  таких, что  $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j)}) \forall j \in [0; k - 1]_Z$ ;

Б) если  $U_M \cap [x]^+ = \emptyset$ , то  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что

$$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j)}) \forall j \in [0; k]_Z.$$

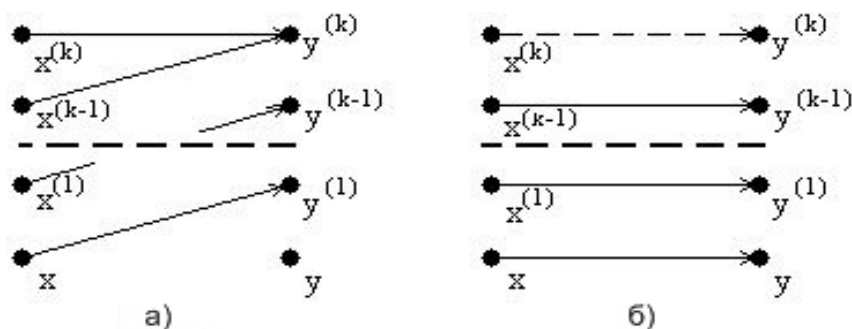


Рисунок 1.2 — Правила построения дуг вспомогательного графа.

Если исходный граф с накоплением неубывающей магнитности является взвешенным, т.е. для каждой его дуги задано некоторая величина (вес дуги) — длина, затраты, пропускная способность и др., — то с соответствующими дугами вспомогательного графа связываем вес дуги исходного графа.

**Определение 1.13.** *Зададим множества:  $X^{(0)} = \{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$ ,  $X^{(1)} = \{x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\}$ , ...,  $X^{(k)} = \{x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}$ . Очевидно,  $X' = X^{(0)} \cup X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(k)}$  или другими словами, множество вершин вспомогательного графа разбивается на множества уровней магнитности. Каждое множество  $X^{(i)}$  будем называть  $i$ -тым уровнем магнитности.*

**Теорема 1.1.** *Любому пути  $\mu'$  с началом на нулевом уровне магнитности  $X^{(0)}$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует магнитно-накопительный путь  $\mu$  на исходном графе  $G$  и для того, чтобы вершина  $y$  была магнитно-достижима при условии (1.2) неубывающей магнитности из вершины  $x$  на графе  $G$  необходимо и достаточно, чтобы на  $G'$  была достижима из  $x^{(0)}$ , по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ .*

∇ *Доказательство.*

Доказательство достаточности проведем методом математической индукции. В качестве параметра индукции возьмём количество дуг в пути.

1. Пусть путь  $\mu'$  состоит из одной дуги  $u$ . Тогда

а) либо  $f'(u) = (x^{(0)}, y^{(0)})$  и ей соответствует немагнитная дуга  $u$  на  $G$  такая, что  $f(u) = (x, y)$ ,

б) либо  $f'(u) = (x^{(0)}, y^{(1)})$  и ей соответствует магнитная дуга  $u$  на  $G$  такая, что  $f(u) = (x, y)$ .

В любом из перечисленных случаев вершина  $y$  достижима из вершины  $x$  на исходном графе  $G$ .

2. Пусть для некоторого  $s \geq k$  утверждение справедливо, докажем его справедливость для  $s + 1$ . Отметим также, что условие  $s \geq k$  является существенным, поскольку на исходном графе  $G$  любой путь  $\mu$  длины, не превосходящей величины  $k$  является допустимым. Последнее означает, что в таком случае справедливость утверждения очевидна.

Пусть путь  $\mu' = \{u_{i_0}, \dots, u_{i_s}\}$  такой, что  $(p_1 \circ f')(u_{i_0}) = x^{(0)}$  и  $(p_2 \circ f')(u_{i_s}) \cap V_y \neq \emptyset$ . Выделим из него последнюю дугу  $u_{i_s}$  и начальный отрезок пути  $\mu'' = \mu' \setminus \{u_{i_s}\}$ . Тогда

а) если путь  $\mu''$  содержит  $j$  ( $j < k$ ) дуг  $v'$  вида  $f'(v') = (x_0^{(i)}, y_0^{(i+1)})$  тогда дуга  $u_{i_s}$  может быть такой, что

i. либо  $f'(u_{i_s}) = (x_1^{(j)}, y_1^{(j)})$  и ей соответствует немагнитная дуга  $v$ ,

ii. либо  $f'(u_{i_s}) = (x_1^{(j)}, y_1^{(j+1)})$  и ей соответствует магнитная дуга  $v$ ;

б) если путь  $\mu''$  содержит  $j$  ( $j \geq k$ ) дуг  $v'$  вида  $f'(v') = (x_0^{(i)}, y_0^{(i+1)})$  тогда дуга  $u_{i_s}$  может быть только вида  $f'(u_{i_s}) = (x_1^{(k)}, y_1^{(k)})$  и ей соответствует магнитная дуга  $v$  или немагнитная дуга  $v$ , но тогда  $[x]^+ \cap U_M = \emptyset$ .

Для пути  $\mu''$ , состоящего из  $s$  дуг, выполняется предположение индукции. Последнее означает, что пути  $\mu''$  на исходном графе  $G$  соответствует магнитно-накопительный путь  $\mu_1$ . Тогда

– если путь  $\mu_1$  содержит  $j$  ( $j < k$ ) магнитных дуг (пункт а), то любая следующая дуга удовлетворяет условию магнитности (1.2). Это значит, что путь  $\mu = \mu_1 \cup \{v\}$  является магнитно-накопительным путем;

– если путь  $\mu_1$  содержит  $j$  ( $j \geq k$ ) магнитных дуг (пункт б), тогда  $\mu_1 \cup \{v\}$  является магнитно-накопительным путем поскольку выполняется условие магнитности (1.2): либо дуга  $v \in U_M$ , либо  $v \in U_H$  и  $[(p_1 \circ f)(v)]^+ \cap U_M = \emptyset$ .



В любом из перечисленных случаев вершина  $y$  магнитно достижима из вершины  $x$  на исходном графе  $G$ .

Таким образом, достаточность доказана.

Докажем необходимость.

Если вершина  $y$  магнитно-достижима из вершины  $x$  на исходном графе  $G$ , то существует магнитно-накопительный путь  $\mu = \{u_1, \dots, u_s\}$  такой, что  $(p_1 \circ f)(u_1) = x$  и  $(p_2 \circ f)(u_s) = y$ .

Построим отображение  $\alpha_\mu : U \rightarrow U'$  следующим образом: каждой дуге  $u_i \in \mu$  поставим в соответствие дугу  $\alpha_\mu(u_i)$  таким образом, чтобы  $(p_2 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_i) = (p_2 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_{i-1})$ , при этом, если  $f(u_i) = (a, b)$ , то  $(p_1 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_i) \in V_a$ , а  $(p_2 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_i) \in V_b$ . Кроме этого, положим дугу  $\alpha_\mu(u_1)$  такой, что  $(f' \circ \alpha_\mu)(u_1) = (x^{(0)}, z^{(0)})$ , если  $u_1 \in U_H$ , и  $(f' \circ \alpha_\mu)(u_1) = (x^{(0)}, z^{(1)})$ , если  $u_1 \in U_M$ .

Отображение  $\alpha_\mu$  можно построить для любого магнитно-накопительного пути  $\mu$ . Это следует из правил построения вспомогательного графа.

В итоге получили, что набор дуг  $\mu' = \{\alpha_\mu(u_1), \dots, \alpha_\mu(u_s)\}$  является путем на графе  $G'$  и выполняются два условия:

1.  $p_1(\mu') = x^{(0)}$ ,
2.  $p_2(\mu') \in V_y$ .

Следовательно, на вспомогательном графе  $G'$  из вершины  $x^{(0)}$  достижима по крайней мере одна из вершин множества  $V_y$ .

△

**Замечание 1.1.** *Определим начальную величину магнитности  $\lambda_\mu(0)$ , равной значению  $M \in \mathbb{Z}_+$  (т.е. считаем, что до начала прохождения по пути магнитность уже накоплена до величины  $M$ ). Эта начальная характеристика вносит некоторые изменения в рассмотренную задачу: на вспомогательном графе рассматриваются только те пути, которые начинаются на  $M$ -том уровне магнитности.*

*Если  $M < k$ , то данная задача сводится к рассмотренной задаче при  $\lambda_\mu(0) = 0$ , если положить  $k := k - M$ .*

*Если  $M \geq k$ , то условие магнитной достижимости (1.2) начинает действовать сразу, поскольку для пути  $\mu$  выполняется  $\forall i \lambda_\mu(i) \geq M$  и,*

значит, вспомогательный граф можно представить в виде подграфа  $G'$ , порождённого множеством  $X^{(k)}$ .

**Теорема 1.2.** *Кратчайшему пути с началом на нулевом уровне магнитности на вспомогательном графе  $G'$  соответствует кратчайший магнитно-накопительный путь на исходном графе  $G$ .*

Доказательство напрямую следует из доказательства теоремы 1.1 и правил построения вспомогательного графа.

Таким образом, для нахождения кратчайшего магнитно-накопительного пути на графе  $G$  с накоплением неубывающей магнитности из одной вершины в другую можно применять классические алгоритмы нахождения кратчайших путей на вспомогательном графе  $G'$ .

Известно (см. [3], [16], [43]-[45], [48], [56], [64]), что поскольку кратчайший путь является простым и количество дуг любого простого пути не превосходит  $|X| - 1$ , значит, максимальное количество дуг кратчайшего пути из вершины в вершину не превышает величины  $|X| - 1$ . Таким образом, для вспомогательного графа максимальное количество дуг кратчайшего пути из вершины в вершину не превышает величины  $n \cdot (k + 1) - 1$ , где  $n = |X|$ ,  $k$  — порядок магнитности исходного графа.

**Теорема 1.3.** *На вспомогательном графе для графа с накоплением неубывающей магнитности порядка  $k$  ( $k \geq 1$ ) длина произвольного кратчайшего пути ограничена сверху величиной  $n - 1$ , где  $n = |X|$ .*

Доказательство напрямую следует из доказательства теоремы 1.1 и правил построения вспомогательного графа.

### Пример 1.2.

Рассмотрим граф  $G$  на рис.1.3а при  $k = 2$ , дуги которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (4, 1)$ . Положим  $U_M = \{u_1, u_3, u_4, u_5\}$  и  $U_M = \{u_2\}$ .

На рис.1.3б показан соответствующий ему вспомогательный граф  $G'$ .

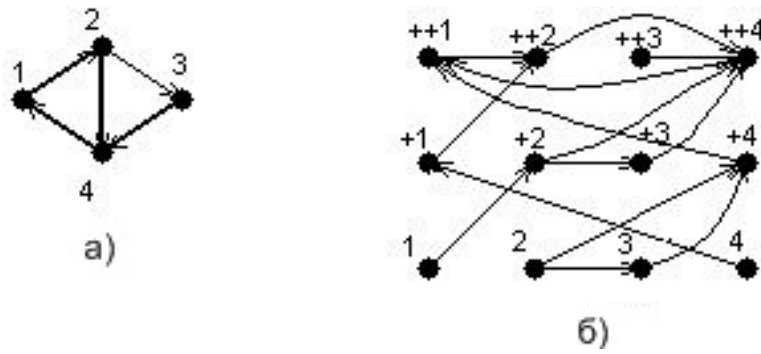


Рисунок 1.3 — На рисунке а) исходный граф  $G$ , на рисунке б) — соответствующий ему вспомогательный граф  $G'$ .

На рис.1.3а-б видно, что на графе  $G$  при отсутствии ограничений достижимости существует цикл  $\{u_4, u_5, u_1, u_2\}$ , который при наличии условия магнитности исчезает. Это следует и из того, что на вспомогательном графе  $G'$  соответствующего цикла нет.

Пример 1.2 показывает, что вершины, достижимые из некоторых вершин на графе без ограничений достижимости, могут перестать быть таковыми при наличии условия магнитной достижимости. Действительно, вершина 3, достижимая из вершины 4 без ограничений достижимости, при наличии условия неубывающей магнитности не является магнитно-достижимой из вершины 4.

**Пример 1.3.**

Рассмотрим граф из примера 1.1.

На рис.1.4 показан вспомогательный граф.

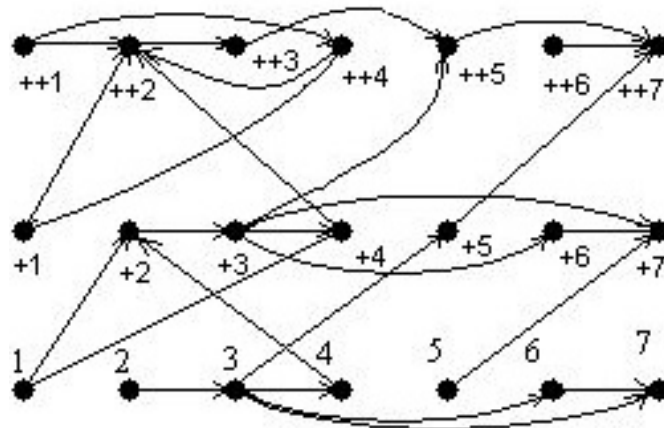


Рисунок 1.4 — Вспомогательный граф для графа на рис. 1.1.

Рассмотрим путь  $\eta = \{u_2, u_4, u_3, u_9\}$ . Поскольку нет кратных дуг, для простоты его можно записать в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7$ . При рассмотрении примера 1.1 мы показали, что путь  $\eta$  не является магнитно-накопительным путем порядка 2, поскольку он не удовлетворяет условию (1.2). И действительно, на вспомогательном графе ему не соответствует ни одного пути.

Путь  $\eta_1 = \{u_2, u_4, u_3, u_5, u_8\}$  (в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ ) является магнитно-накопительным путем порядка 2. На вспомогательном графе ему соответствует путь  $\eta'_1 : 1^{(0)} \rightarrow 4^{(1)} \rightarrow 2^{(2)} \rightarrow 3^{(2)} \rightarrow 5^{(2)} \rightarrow 7^{(2)}$ .

### 1.2.2 Графы с накоплением-исчезанием магнитности

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$ , у которого, также как и в предыдущем разделе, множество дуг разбито на два подмножества:  $U = U_M \cup U_H$ ,  $U_M \cap U_H \neq \emptyset$ .

Пусть  $\mu$  — путь длины  $n$  на графе  $G$ . С каждым отрезком  $[i; i + \delta]_N$  ( $\delta \in \mathbb{N}$ ) пути  $\mu$  свяжем числовую характеристику

$$\bar{\lambda}_\mu(i, i + \delta) = \max \left\{ 0, \max_{l=i, \dots, i+\delta} \left\{ \min \left( k, \sum_{j=l}^{i+\delta} |\mu(j) \cap U_M| \right) - k \cdot \sum_{j=l}^{i+\delta} |\mu(j) \cap U_H| \right\} \right\}, \quad (1.3)$$

которую будем называть величиной накопления магнитности с возможностью исчезания для отрезка  $[i; i + \delta]_N$  пути  $\mu$ . При этом каждая дуга считается столько раз, сколько раз она встречается в пути.

В случае простого пути равенство (1.3) примет следующий вид:

$$\bar{\lambda}_\mu(i, i + \delta) = \max \left\{ 0, \max_{l=i, \dots, i+\delta} \left\{ \min (k, |\mu([l, i + \delta) \cap U_M|) - k \cdot |\mu([l, i + \delta) \cap U_H|) \right\} \right\}.$$

Обозначим через  $\bar{\lambda}_\mu(i) = \bar{\lambda}_\mu(0) + \bar{\lambda}_\mu(1, i)$  величину накопления магнитности с возможностью исчезания на пути  $\mu$  через  $i$  шагов от начала пути, где величина  $\bar{\lambda}_\mu(0)$  определяет начальную величину накопления магнитности с возможностью исчезания для пути  $\mu$ . Определим величину  $\bar{\lambda}_\mu(0) = 0$ .

Случай  $\bar{\lambda}_\mu(0) \neq 0$  аналогичен случаю  $\lambda_\mu(0) \neq 0$  для графов с накоплением неубывающей магнитности.

**Определение 1.14.** *Путь  $\mu$  будем называть магнитно-накопительным путем порядка  $k$  ( $\geq 1$ ) длины  $n$  ( $\in N$ ) с накоплением-исчезанием магнитности на графе  $G$ , если выполняется следующее условие:*

$$\begin{aligned} \forall t (\bar{\lambda}_\mu(t) \geq k) \wedge ([p_2 \circ f \circ \mu](t)]^+ \cap U_M \neq \emptyset) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mu(t+1) \in U_M). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Другими словами, для каждого номера  $t$ , если путь  $\mu$  к  $t$ -тому шагу от своего начала накопил магнитность величины  $\lambda_\mu(i)$ , не меньшей заданного значения  $k$ , и среди дуг, выходящих из концевой вершины  $t$ -той дуги, есть хотя бы одна магнитная, то следующая ( $t+1$ -я) дуга пути  $\mu$  должна быть только дугой из множества  $U_M$ . В противном случае, путь  $\mu$  не является магнитно-накопительным путём порядка  $k$  с накоплением-исчезанием магнитности.

Отличие рассмотренного ограничения (1.3)-(1.4) от предыдущего (1.1)-(1.2) — магнитно-накопительного для неубывающей магнитности — состоит в том, что прохождение по любой дуге множества  $U_H$  приводит к исчезновению магнитности. Таким образом, для того, чтобы имел место запрет на прохождение по немагнитным дугам, ее снова нужно накапливать, тогда как для магнитно-накопительного ограничения величина магнитности может только увеличиваться.

Условие (1.4) будем называть условием магнитной достижимости порядка  $k$  с накоплением-исчезанием магнитности.

**Определение 1.15.** *Граф  $G(X, U, f)$  на котором рассматриваются только магнитно-накопительные пути порядка  $k$  с накоплением-исчезанием магнитности будем называть графом с накоплением-исчезанием магнитности порядка  $k$ .*

#### Пример 1.4.

Рассмотрим граф с накоплением-исчезанием магнитности порядка 2 на рис.1.5, дуги  $\{u_1, \dots, u_{10}\}$  которого таковы, что:  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) =$

$(1, 4)$ ,  $f(u_3) = (2, 3)$ ,  $f(u_4) = (4, 2)$ ,  $f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (3, 6)$ ,  $f(u_7) = (3, 4)$ ,  $f(u_8) = (5, 7)$ ,  $f(u_9) = (3, 7)$ ,  $f(u_{10}) = (6, 7)$ .

Положим  $U_M = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_8\}$  и  $U_H = \{u_4, u_6, u_7, u_9, u_{10}\}$ .

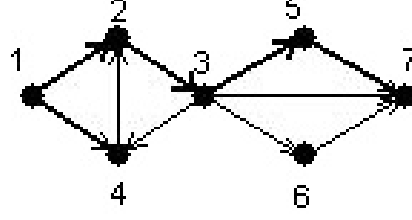


Рисунок 1.5 — Граф с накоплением-исчезанием магнитности.

Рассмотрим путь  $\mu = \{u_2, u_4, u_3, u_7, u_4, u_3, u_5, u_8\}$ . Для некоторых отрезков этого пути вычислим характеристики  $\bar{\lambda}_\mu$ :

- $\bar{\lambda}_\mu(1, 2) = 0$ , так как  $\mu([1; 2]_N) = \{u_2, u_4\}$  и дуга  $u_4 \in U_H$ .
- $\bar{\lambda}_\mu(2, 6) = 1$ , поскольку  $\mu([1; 2]_N) = \{u_4, u_3, u_7, u_4, u_3\}$  и только  $u_3 \in U_M$ , но считается только последняя дуга  $u_3$ , поскольку накопленная магнитность пути «сбрасывается» на дугах  $u_4, u_7$ .
- $\bar{\lambda}_\mu(1) = 1$ , так как данный отрезок пути состоит из одной дуги  $u_2$ , которая принадлежит множеству  $U_M$ .
- $\bar{\lambda}_\mu(7) = 2$ , поскольку данный отрезок пути  $\mu([1; 6]_N) = \{u_2, u_4, u_3, u_7, u_4, u_3, u_5\}$  и только  $u_2, u_3, u_5 \in U_M$ , но считаются только две последних дуги  $u_3$  и  $u_5$ , поскольку накопленная магнитность пути «сбрасывается» на дугах  $u_4, u_7$ .

Рассматриваемый путь  $\mu$  является магнитно-накопительным путем порядка 2 с накоплением-исчезанием магнитности, так как удовлетворяет условию (1.4).

Рассмотрим путь  $\eta = \{u_1, u_3, u_9\}$ . Он не является магнитно-накопительным путем порядка 2 с накоплением-исчезанием магнитности, поскольку не удовлетворяет условию магнитной достижимости (1.4): величина  $\bar{\lambda}_\eta(2) (= 2)$  не меньше значения  $k = 2$ , однако, следующая дуга пути  $\eta$  (дуга  $u_9$ ) является немагнитной.

Идея подхода к решению задачи о достижимости такая же, что и в пункте 1.2.1.

**Построение вспомогательного графа:**

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $k + 1$  вершина  $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу:

Каждой дуге  $u \in U_M$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j+1)}) \forall j \in [0; k - 1]_Z$ ,  $f'(u^{(k)}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$  (см. рис.1.6а).

Каждой дуге  $u \in U_H$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует (см. рис.1.6б):

А) если  $U_M \cap [x]^+ \neq \emptyset$ , то  $k$  дуг  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  таких, что  $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(0)}) \forall j \in [1; k - 1]_Z$ ;

Б) если  $U_M \cap [x]^+ = \emptyset$ , то  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(0)}) \forall j \in [0; k]_Z$ .

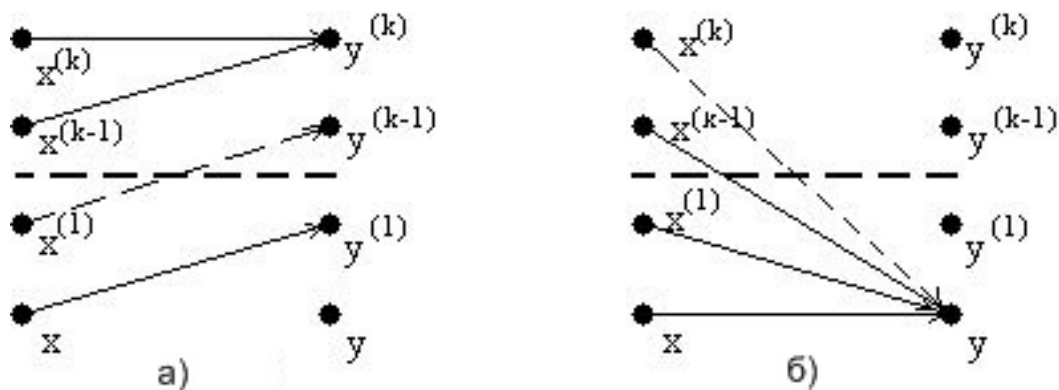


Рисунок 1.6 — Правила построения дуг вспомогательного графа.

Если исходный граф с накоплением-исчезанием магнитности является взвешенным, т.е. для каждой его дуги задан вес, то с соответствующими дугами вспомогательного графа связываем вес дуги  $u$  исходного графа.

**Замечание 1.2.** Аналогично пункту 1.2.1 множество вершин вспомогательного графа разбивается на множества уровней магнитности.

**Теорема 1.4.** Любому пути  $\mu'$  с началом на нулевом уровне маг-

нитности  $X^{(0)}$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует магнитно-накопительный путь с накоплением-исчезанием магнитности на исходном графе  $G$  и вершина  $y$  магнитно-достижима при условии (1.4) магнитной достижимости с накоплением-исчезанием магнитности из вершины  $x$  на графе  $G$  тогда и только тогда, когда на  $G'$  достижима из  $x^{(0)}$ , по крайней мере одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ .

Доказательство последней теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1.

**Замечание 1.3.** Для графов с рассматриваемым ограничением на достижимость справедливы теоремы 1.2 и 1.3.

**Пример 1.5.** (Построение вспомогательного графа  $G'$  для графа с накоплением-исчезанием магнитности)

Рассмотрим граф с накоплением-исчезанием магнитности порядка 1 на рис.1.7а, дуги которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (4, 1)$ ,  $f(u_6) = (1, 3)$ ,  $f(u_7) = (3, 5)$ ,  $f(u_8) = (5, 5)$ .

Положим  $U_M = \{u_1, u_4, u_8\}$  и  $U_H = \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_7\}$ .

На рис.1.7б показан вспомогательный граф.

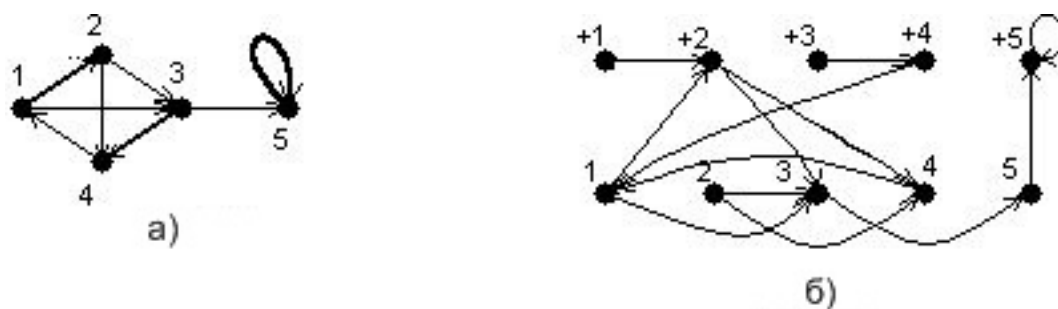


Рисунок 1.7 — На рисунке а) исходный граф  $G$ , на рисунке б) – соответствующий ему вспомогательный граф  $G'$ .

Для графа на рис.1.7а все пути являются допустимыми как при наличии условия магнитной достижимости (1.4), так и при его отсутствии.



### 1.2.3 Графы с возрастанием-убыванием магнитности

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$ , у которого, как и в предыдущих разделах, множество дуг разбито на два подмножества:  $U = U_M \cup U_H$ ,  $U_M \cap U_H \neq \emptyset$ .

Пусть  $\mu$  — путь длины  $n$  на графе  $G$ . С каждым отрезком  $[i; p]_N$  пути  $\mu$  свяжем числовую характеристику

$$\hat{\lambda}_\mu(i, p) = \max_{l=i, \dots, p} \left\{ \sum_{j=l}^p |\mu_0(j) \cap U_M| - \frac{k}{s} \sum_{j=l}^p |\mu_0(j) \cap U_H| \right\}, \quad (1.5)$$

которую будем называть величиной возрастания-убывания магнитности отрезка  $[i; p]_N$  пути  $\mu$ . При этом полагаем, что величина  $\frac{k}{s} \in \mathbb{N}$  и дуга считается столько раз, сколько раз она встречается в пути.

В случае простого пути равенство (1.5) принимает следующий вид:

$$\hat{\lambda}_\mu(i, p) = \max_{l=i, \dots, p} \left\{ |\mu([l, p]) \cap U_M| - \frac{k}{s} |\mu([l, p]) \cap U_H| \right\}.$$

Обозначим через

$$\hat{\lambda}_\mu(m) = \hat{\lambda}_\mu(0) + \max_{l=1, \dots, m} \left\{ \min_{i=l, \dots, m} \{ \hat{\lambda}_\mu(l, i) + \hat{\lambda}_\mu(i+1, m) \} \right\}$$

величину накопления магнитности с возможностью возрастания и убывания на пути  $\mu$  через  $i$  шагов от начала пути, где величина  $\hat{\lambda}_\mu(0)$  определяет начальную величину накопления магнитности с возможностью возрастания и убывания на пути  $\mu$ . Определим величину  $\hat{\lambda}_\mu(0) = 0$ . Случай  $\hat{\lambda}_\mu(0) \neq 0$  аналогичен случаю  $\lambda_\mu(0) \neq 0$  для графов с накоплением неубывающей магнитности.

**Определение 1.16.** *Путь  $\mu$  будем называть магнитно-накопительным путем порядка  $(k, s)$  длины  $n$  ( $\in N$ ) при величине размагничивания  $\frac{k}{s}$  с возрастанием-убыванием магнитности на графе  $G$ , если выполняется следующее условие:*

$$\begin{aligned} \forall m \left( \hat{\lambda}_\mu(m) \geq k \wedge ([p_2 \circ f \circ \mu](m))^+ \cap U_M \neq \emptyset \right) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mu(m+1) \in U_M). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Другими словами, для каждого номера  $m$ , если путь  $\mu$  к  $m$ -тому шагу от своего начала накопил магнитность величины  $\lambda_\mu(i)$ , не меньшей заданного значения  $k$ , и среди дуг, выходящих из концевой вершины  $m$ -той дуги, есть хотя бы одна магнитная, то следующая  $(m + 1)$ -я дуга пути  $\mu$  должна быть только дугой из множества  $U_M$ . В противном случае, путь  $\mu$  не является магнитно-накопительным путём порядка  $(k, s)$  с возрастанием-убыванием магнитности.

Условие (1.6) будем называть условием магнитной достижимости с возрастанием-убыванием магнитности.

**Определение 1.17.** *Граф  $G(X, U, f)$  на котором рассматриваются только магнитно-накопительные пути порядка  $(k, s)$  с возрастанием-убыванием магнитности будем называть графом с возрастанием-убыванием магнитности  $k$ -того уровня при величине размагничивания  $\frac{k}{s}$ .*

**Пример 1.6.**

Рассмотрим граф с возрастанием-убыванием магнитности на рис.1.8 при  $k = 2, s = 2$ , дуги которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (4, 2)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (1, 4)$ ,  $f(u_6) = (3, 7)$ ,  $f(u_7) = (3, 5)$ ,  $f(u_8) = (3, 6)$ ,  $f(u_9) = (5, 7)$ ,  $f(u_{10}) = (6, 7)$ .

Положим  $U_M = \{u_2, u_3, u_5, u_6\}$  и  $U_H = \{u_1, u_4, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ .

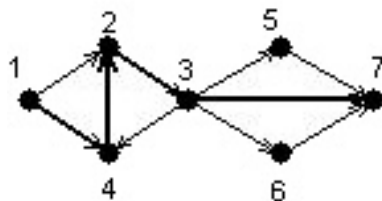


Рисунок 1.8 — Граф с возрастанием-убыванием магнитности.

Рассмотрим путь  $\mu = \{u_1, u_2, u_4, u_3, u_2, u_8, u_{10}\}$ . Для некоторых отрезков этого пути вычислим характеристики  $\hat{\lambda}_\mu$ :

- $\hat{\lambda}_\mu(1, 2) = 1$ , поскольку  $\mu([1; 2]_N) = \{u_1, u_2\}$  и  $u_2 \in U_M, u_1 \in U_H$ .
- $\hat{\lambda}_\mu(2, 5) = 2$ , так как  $\mu([2; 5]_N) = \{u_2, u_4, u_3, u_2\}$  и только  $u_4 \in U_H$ .

- $\hat{\lambda}_\mu(5) = 2$ , поскольку данный отрезок пути  $\mu([1; 5]_N) = \{u_1, u_2, u_4, u_3, u_2\}$  и только  $u_1, u_4 \in U_H$ .

Путь  $\mu$  не является магнитно-накопительным путем порядка  $(2, 2)$  с возрастанием-убыванием магнитности, так как не удовлетворяет условию магнитной достижимости (1.6): величина  $\hat{\lambda}_\mu (= 2)$  не меньше значения  $k = 2$ , однако, следующая дуга пути  $\mu$  (дуга  $u_8$ ) является немагнитной.

Путь  $\eta = \{u_5, u_3, u_2, u_7, u_9\}$  является магнитно-накопительным путем порядка  $(2, 2)$  с возрастанием-убыванием магнитности, поскольку, как и для пути  $\mu$  выполняется  $\eta_\mu(5) = 2 \geq 2$  и следующая дуга пути  $\eta$  (дуга  $u_6$ ) является магнитной.

Идея подхода к решению задачи о достижимости такая же, что и в пункте 1.2.1.

### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $k + 1$  вершина  $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу:

Каждой дуге  $u \in U_M$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j+1)}) \forall j \in [0; k - 1]_Z$ ,  $f'(u^{(k)}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$ .

Каждой дуге  $u \in U_H$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует:

- если  $U_M \cap [x]^+ \neq \emptyset$ , то  $k$  дуг  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  таких, что
  - $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(0)}) \forall j \in [0; \frac{k}{s} - 1]_Z$  и
  - $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j-\frac{k}{s})}) \forall j \in [\frac{k}{s}; k - 1]_Z$ ;
- если  $U_M \cap \Theta^+(x) = \emptyset$ , то  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  такая, что
  - $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(0)}) \forall j \in [0; \frac{k}{s} - 1]_Z$  и
  - $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j-\frac{k}{s})}) \forall j \in [\frac{k}{s}; k]_Z$ .

его дуги задан вес, то с соответствующими дугами вспомогательного графа связываем вес дуги исходного графа.

**Замечание 1.4.** Аналогично пункту 1.2.1 множество вершин вспо-

могательного графа разбивается на множества уровней магнитности.

**Теорема 1.5.** Любому пути  $\mu'$  сначала на нулевом уровне магнитности  $X^{(0)}$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует магнитно-накопительный путь с возрастанием-убыванием магнитности на исходном графе  $G$  и вершина  $y$  магнитно-достижима при условии магнитной достижимости (1.6) из вершины  $x$  на графе  $G$  тогда и только тогда, когда на  $G'$  достижима из  $x^{(0)}$ , по крайней мере одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

**Замечание 1.5.** Для графов с рассматриваемым ограничением на достижимость справедливы теоремы 1.2 и 1.3.

**Пример 1.7.**

Рассмотрим граф с возрастанием-убыванием магнитности на рис.1.9а при  $k = 2, s = 2$ , дуги которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (4, 1)$ .

Положим  $U_M = \{u_1, u_3, u_4\}$  и  $U_H = \{u_2\}$ .

На рис.1.9б показан соответствующий вспомогательный граф.

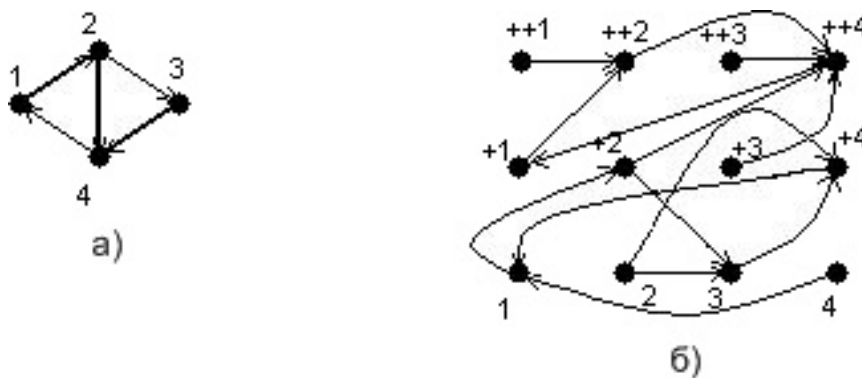


Рисунок 1.9 — На рисунке а) исходный граф  $G$ , на рисунке б) — соответствующий ему вспомогательный граф  $G'$ .

Рассмотрим путь  $\mu = \{u_4, u_5, u_1, u_3, u_5, u_1, u_2\}$  (в виде последовательности вершин  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ). Он не является магнитно-накопительным путем порядка  $(2, 2)$  с возрастанием-убыванием

магнитности, так как не удовлетворяет условию (1.6). И действительно, на вспомогательном графе ему не соответствует ни одного пути.

Путь  $\eta = \{u_4, u_5, u_1, u_3, u_5\}$  является магнитно-накопительным путем порядка (2,2) с возрастанием-убыванием магнитности. На вспомогательном графе ему соответствует путь  $3^{(0)} \rightarrow 4^{(1)} \rightarrow 1^{(0)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 4^{(2)} \rightarrow 1^{(1)}$ .

### 1.3 Оценка вычислительной трудоёмкости алгоритмов нахождения кратчайшего пути

Поскольку мы провели модификацию классических алгоритмов для графов с магнитной достижимостью, следует оценить вычислительную трудоёмкость полученных алгоритмов нахождения кратчайшего пути. Выберем условие магнитной достижимости с накоплением неубывающей магнитности в качестве базового. Для него выполним оценку трудоёмкости, а для остальных условий магнитной достижимости все рассуждения будут аналогичными.

Вначале отметим следующие три особенности для сетей с магнитной достижимостью (которые также имеют место и в общем случае для произвольного графа с нестандартной достижимостью):

Во-первых, как уже было отмечено в разделе 1.2.1, на графе с магнитной достижимостью вообще говоря теряется свойство транзитивности пути, т.е. не всегда выполняется следующее условие: если существует путь из вершины  $x$  в вершину  $y$  и существует путь из вершины  $y$  в вершину  $z$ , то существует путь из вершины  $x$  в вершину  $z$ .

Возвращаясь немного назад, можно видеть данную ситуацию для графа из примера 1.2: на нём существует магнитно-накопительный путь из вершины 4 в вершину 2 ( $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ) и существует магнитно-накопительный путь из вершины 2 в 3 ( $2 \rightarrow 3$ ), но не существует магнитно-накопительного пути из вершины 4 в вершину 3.

Во-вторых, что также было отмечено в разделе 1.2.1, для графов с магнитной достижимостью вообще говоря теряется свойство экстремальности пути, т.е. не всегда выполняется условие: любая часть кратчайшего пути является кратчайшим путём между своими начальной и конечной

вершинами.

Рассмотрим эту ситуацию на следующем примере.

**Пример 1.8.**

Рассмотрим граф с условием неубывающей магнитности при  $k = 2$  на рис.1.10, дуги  $\{u_1, \dots, u_8\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = f(u_2) = (1, 2)$ ,  $f(u_3) = (1, 3)$ ,  $f(u_4) = (2, 5)$ ,  $f(u_5) = (3, 4)$ ,  $f(u_6) = (4, 6)$ ,  $f(u_7) = (5, 4)$ ,  $f(u_8) = (5, 6)$ . Полагаем  $U_M = \{u_1, u_4, u_7\}$  и  $U_H = \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_8\}$ .

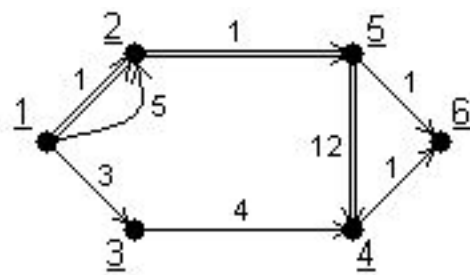


Рисунок 1.10 — Граф с магнитной достижимостью, на котором классический кратчайший путь не является допустимым.

Найдём кратчайший магнитно-накопительный путь из вершины 1 в вершину 6. Им является путь  $\mu = \{u_2, u_4, u_8\}$ . Длина этого пути равна семи. Рассмотрим отрезок этого пути  $\mu_1 = \{u_2, u_4\}$ . Он не является кратчайшим путем магнитно-накопительным путём из вершины 1 в вершину 5, поскольку его длина равна шести и существует магнитно-накопительный путь  $\eta = \{u_1, u_4\}$  из вершины 1 в вершину 5 меньшей длины (равной двум).

Наконец, в-третьих, ограничение магнитной достижимости приводит к обязательному рассмотрению мультиграфов, поскольку кратные дуги могут быть различных типов. Данная ситуация показана предыдущим примером: в классической постановке при решении задачи о достижимости (кратчайшем пути) для из каждого множества кратных дуг можно было оставить только одну дугу (меньшего веса), а остальные удалить, то на графе с магнитной достижимостью такой вариант невозможен.

Поскольку классические алгоритмы, такие как, например, алгоритм Флойда или алгоритм Дейкстры, невозможно применить на графах с магнитной достижимостью из-за того, что они основаны на свойствах транзи-

тивности и экстремальности пути графа. Более того, наличие перечисленных особенностей позволяет утверждать, что задача о кратчайшем пути на графе с магнитной достижимостью без построения вспомогательного графа может быть решена только полным перебором путей графа. В таком случае вычислительная трудоёмкость алгоритма нахождения кратчайшего пути ограничена величиной  $O\left(\left(\max_{x \in X}\{deg_+(x)\}\right)^n\right)$ , где  $n = |X|$ .

Для предложенной модификации алгоритмов нахождения кратчайшего пути, состоящей в построении вспомогательно графа вычислительная трудоёмкость ограничена величиной  $O(n^2)$ , где  $n = |X|$ ,  $m = |U|$ .

## 1.4 Графы с условием механической достижимости

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$  такой, что на множестве его дуг задано отображение  $g : U \rightarrow \mathbb{Z}$ . Т.е. с каждой дугой  $u$  графа  $G$  связана величина  $g(u)$ , которую будем называть «наклоном» дуги  $u$ .

Введем в рассмотрение следующие обозначения:  $U_+ = g^{-1}(\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\})$ ,  $U_- = g^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+)$  и  $U_H = g^{-1}(\{0\})$ .

Отметим, что построенные множества  $U_+$ ,  $U_-$  и  $U_H$  задают разбиение множества дуг, т.е.  $U = U_+ \cup U_H \cup U_-$ ,  $U_+ \cap U_H = \emptyset$ ,  $U_+ \cap U_- = \emptyset$  и  $U_- \cap U_H = \emptyset$ .

Пусть  $\mu$  — путь длины  $n$  на графе  $G$ . С каждым отрезком  $[i; j]_N$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) пути  $\mu$  свяжем числовую характеристику

$$\Omega_\mu(i, j) = \begin{cases} \Omega_\mu(i, j-1) + g(\mu(j)), & i < j; \\ \min\{0, g(\mu(i))\}, & i = j. \end{cases}$$

Обозначим через  $W_\mu(i) = \Omega_\mu(1, i)$  величину спуска пути  $\mu$  после прохождения  $i$  дуг от начала пути.

**Определение 1.18.** *Путь  $\mu$  будем называть возможной траекторией, если выполняется следующее условие:*

$$\begin{aligned} \forall i \in [1; n]_Z \quad (W_\mu(i) + g(\mu(i+1)) < 0) \wedge \\ \wedge ((\mu(i) \in U_+) \vee ((p_2 \circ f \circ \mu)(i))^+ \cap (U_- \cup U_H) = \emptyset)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mu(i+1) \in U \setminus U_+). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Другими словами, следующая дуга пути может быть из  $U_+$  в том и только том случае, если  $W_\mu(i) + g(\mu(i+1)) < 0$  и либо  $i$ -тая дуга была из множества  $U_+$ , либо из концевой вершины  $i$ -той дуги выходят только дуги множества  $U_+$ . В противном случае путь  $\mu$  не является возможной траекторией.

**Определение 1.19.** Условие (1.7) будем называть условием механической достижимости, а граф  $G$ , на котором рассматриваются только те пути, которые являются возможными траекториями, будем называть графом с механической достижимостью.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.9.**

Рассмотрим граф  $G_1$  с механической достижимостью на рис.1.11, дуги  $\{u_1, \dots, u_9\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 5)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (4, 1)$ ,  $f(u_7) = (4, 2)$ ,  $f(u_8) = (4, 5)$ ,  $f(u_9) = (5, 1)$ .

Положим  $g(u_1) = g(u_3) = -1$ ,  $g(u_2) = -2$ ,  $g(u_6) = g(u_8) = 2$ ,  $g(u_9) = 1$ ,  $g(u_7) = 3$ . Таким образом, получили разбиение множества дуг графа  $G_1$ :  $U_+ = \{u_6, u_7, u_8\}$ ,  $U_- = \{u_1, u_2, u_3\}$  и  $U_H = \{u_4, u_5\}$ .

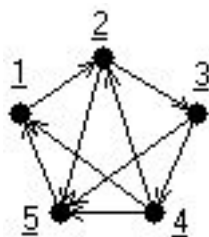


Рисунок 1.11 — Граф  $G_1$  с механической достижимостью.

Рассмотрим путь  $\mu_1 = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$ .

Отметим, что  $W_{\mu_1}(1) = -1$ ,  $W_{\mu_1}(2) = -3$ ,  $W_{\mu_1}(3) = -3$  и  $W_{\mu_1}(4) = 0$ , следовательно, путь  $\mu$  не является возможной траекторией, поскольку не выполняется условие (1.7):  $W_\mu(3) + g(\mu(4)) = -3 + 3 = 0 \geq 0$ , значит следующая дуга (дуга  $\mu(4)$ ) должна принадлежать множеству  $U \setminus U_+$ , однако,  $\mu(4) = u_6 \in U_+$ .



Рассмотрим путь  $\mu_2 = \{u_1, u_3, u_4, u_5\}$ . Он отличается от пути  $\mu_1$  только последней дугой.

Здесь  $W_{\mu_2}(1) = -1$ ,  $W_{\mu_2}(2) = -3$ ,  $W_{\mu_2}(3) = -3$  и  $W_{\mu_2}(4) = -1$ , следовательно, путь  $\mu_2$  является возможной траекторией, поскольку выполняется условие (1.7).

Отметим, что в предыдущем примере 1.9 «отсев» пути  $\mu_1$  как недопустимого произошёл по первому операнду дизъюнкции в (1.7). Покажем работу второго операнда дизъюнкции в (1.7) на следующем примере.

### Пример 1.10.

Рассмотрим граф  $G_2$  с механической достижимостью на рис.1.12, дуги  $\{u_1, \dots, u_6\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 5)$ ,  $f(u_2) = (5, 2)$ ,  $f(u_3) = (5, 3)$ ,  $f(u_4) = (2, 3)$ ,  $f(u_5) = (2, 4)$ ,  $f(u_6) = (3, 4)$ .

Положим  $g(u_1) = g(u_3) = -1$ ,  $g(u_2) = -2$ ,  $g(u_6) = g(u_8) = 2$ ,  $g(u_9) = 1$  и  $g(u_7) = 3$ . Таким образом, получили разбиение множества дуг графа  $G_2$ :  $U_+ = \{u_2, u_3, u_5, u_6\}$ ,  $U_- = \{u_1, u_4\}$  и  $U_H = \emptyset$ .

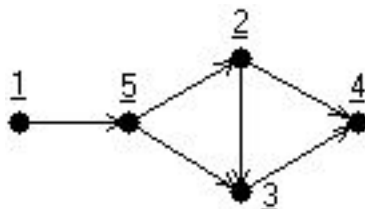


Рисунок 1.12 — Граф  $G_2$  с механической достижимостью.

Рассмотрим путь  $\mu_3 = \{u_1, u_2, u_4, u_6\}$ .

Отметим, что  $W_{\mu_3}(1) = -3$ ,  $W_{\mu_3}(2) = -2$ ,  $W_{\mu_3}(3) = -3$  и  $W_{\mu_3}(4) = -1$ . Характеристика каждого начального отрезка удовлетворяет неравенству  $W_{\mu_3}(i) + g(\mu_3(i+1)) < 0$ , но заметим, что  $\mu_3(2) \in U_+$  и есть дуга  $u_5$ , принадлежащая множеству  $[(p_2 \circ f \circ \mu_3)(2)]^+ \cap U_+$  такая, что  $g(u_5) + W_{\mu_3}(2) = -1$ , однако следующая дуга пути  $\mu_3(3) = u_4 \in U_-$ . Таким образом, условие (1.7) не выполняется, и, значит, путь  $\mu_3$  не является возможной траекторией.

Для решения задачи о достижимости будем применять подход описанный в пункте 1.2.1.

### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $(n_1 + n_2)$  вершин  $\{x^{(-n_1)}, \dots, x^{(n_2-1)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ , где  $n_1 = -\sum_{u \in U_-} g(u)$  и  $n_2 = \min \left\{ n_1, \sum_{u \in U_+} g(u) \right\}$ . Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу:

а) каждой дуге  $u \in U_+$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует  $n_2 - g(u)$  дуг  $\{u^{(g(u))}, \dots, u^{(n_2-1)}\}$  таких, что

$$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j-g(u))}) \quad \forall j \in [g(u); n_2 - 1]_Z;$$

б) каждой дуге  $u \in U_-$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует  $n_1 - g(u) + 1$  дуг  $\{u^{(-n_1-g(u))}, \dots, u^{(0)}\}$  таких, что

$$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j+g(u))}) \quad \forall j \in [-n_1 - g(u); 0]_Z;$$

в) каждой дуге  $u \in U_H$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует  $n_1 + 1$  дуга  $\{u^{(-n_1)}, \dots, u^{(0)}\}$  такая, что

$$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j)}) \quad \forall j \in [-n_1; 0]_Z.$$

Кроме этого, если существует такая вершина вспомогательного графа  $x^{(j)}$ , что  $j \in [-\max\{n_1, n_2\}; n_2 - 1]_Z \setminus \{0\}$  и  $[x^{(j)}]^+ = \emptyset$ , то достраиваем дугу  $u'$  такую, что  $f'(u') = (x^{(j)}, x^{(-j-1)})$ .

**Теорема 1.6.** Любому пути  $\mu'$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует путь  $\mu$  на исходном графе  $G$  и вершина  $y$  механически достижима из вершины  $x$  на графе  $G$ , если на  $G'$  из вершины  $x$  достижима хотя бы одна вершина множества  $V_y = \{y^{(-n_1)}, \dots, y^{(n_2-1)}\}$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

## 1.5 Графы с условием вентильной достижимости

Ещё одним классом ограничений на прохождение по дугам выделенных подмножеств являются условия вентильной достижимости. Рассматриваемые далее ограничения существенно отличаются от условий магнитной и механической достижимостей, однако предложенный подход к реше-

нию задачи о кратчайшем пути может быть применён и в случае ограничений вентиляющей достижимости.

### 1.5.1 Условие вентиляюще-накопительной достижимости

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$  такой, что его множество дуг разбито на несколько подмножеств  $U = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$ , при этом  $U_j \cap U_i = \emptyset$  для всех  $i$  и  $j$  таких, что  $0 \leq i < j \leq k$ .

Пусть  $\mu$  — путь длины  $n$  на графе  $G'$ . С каждым начальным отрезком  $[1; i]_Z$  пути  $\mu$  свяжем числовую характеристику  $\rho_\mu(i) = 1 + d$ , где  $d$  — максимальное число, для которого выполняется соотношение

$$|\mu([1; i]_N) \cap U_d| \neq 0$$

Доопределим характеристику  $\rho_\mu$ , полагая  $\rho_\mu(0) = 0$ .

**Определение 1.20.** *Путь  $\mu$  будем называть вентиляющим путем порядка  $k$  на графе  $G$ , если выполняется следующее условие:*

$$\forall m \in [0; n - 1]_Z (\rho_\mu(m) = j) \Rightarrow (\psi(m + 1) \in \bigcup_{i=0}^j U_i). \quad (1.8)$$

Другими словами, прохождение по дуге множества  $U_i$  «открывает» для прохождения множество  $U_{i+1}$  для всех  $i \in [0; k - 1]_Z$  и до тех пор, пока множество  $U_j$  не открыто для прохождения, его дуги не могут быть использованы для построения следующего отрезка пути.

Условие (1.8) будем называть условием вентиляюще-накопительной достижимости.

**Определение 1.21.** *Граф  $G$ , на котором допустимыми считаются только вентиляющие пути порядка  $k$  будем называть графом с условием вентиляюще-накопительной достижимости порядка  $k$ .*

### Пример 1.11.

Рассмотрим граф с условием вентиляюще-накопительной достижимости порядка 2 на рис.1.13, дуги  $\{u_1, \dots, u_5\}$  таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (1, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 2)$ ,  $f(u_5) = (3, 4)$ .

Положим  $U_0 = \{u_1, u_2, u_4\}$ ,  $U_1 = \{u_3\}$  и  $U_2 = \{u_5\}$ .

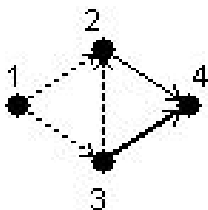


Рисунок 1.13 — Граф с условием вентиляльно-накопительной достижимости.

Рассмотрим два пути  $\mu_1 = \{u_2, u_4, u_3\}$  и  $\mu_2 = \{u_2, u_5\}$ .

Путь  $\mu_1 = \{u_2, u_4, u_3\}$  является вентиляльным путем порядка 2, поскольку удовлетворяет условию вентиляльной достижимости (1.8).

Путь  $\mu_2$  не является вентиляльным путем порядка 2, поскольку не удовлетворяет условию (1.8): характеристика  $\delta_{\mu_2}(1) = 1$  и дуга  $\mu_2(2) = u_5 \in U_2$ .

Идея подхода к решению задачи о достижимости такая же, что и в пункте 1.2.1.

### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $k + 1$  вершина  $\{x^{(0)}, \dots, x^{(k)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу (схема построения показана на рис.1.14):

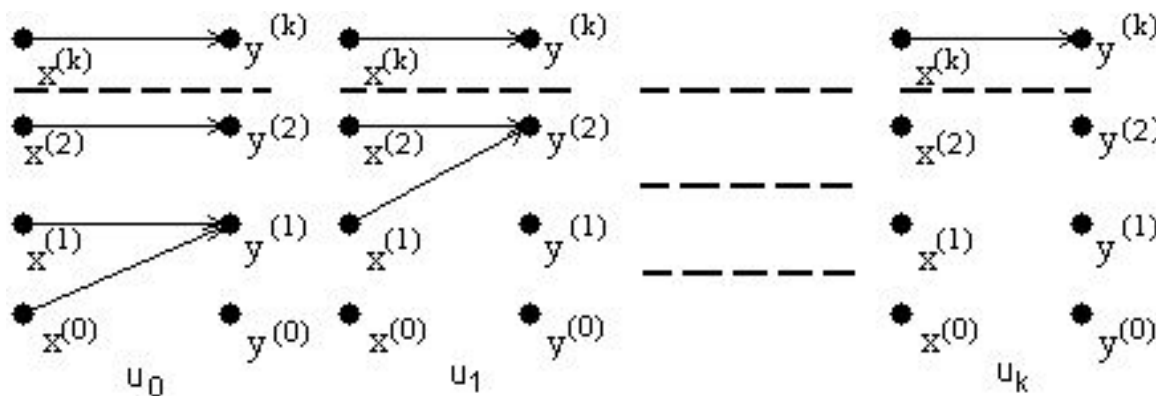


Рисунок 1.14 — Правила построения дуг вспомогательного графа.

а) для каждого номера  $j \in [0; k - 1]_Z$  и каждой дуги  $u \in U_j$  (положим для определённости  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует  $k - l + 1$  дуга  $\{u^{(l)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f(u^{(l)}) = (x^{(l)}, y^{(l+1)})$  и  $f(u^{(l+i)}) = (x^{(l+i)}, y^{(l+i)})$   $\forall i \in [1; k - l]_Z$ ;

б) каждой дуге  $u \in U_k$  (положим для определённости  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует одна дуга  $u^{(k)}$  такая, что  $f(u^{(k)}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$ .

**Теорема 1.7.** Любому пути  $\mu'$  на вспомогательном графе  $G'$ , который начинается в вершине нулевого уровня, соответствует вентиляный путь  $\mu$  на исходном и вершина  $y$  достижима при условии (1.8) из вершины  $x$  на графе  $G$  тогда и только тогда, когда на  $G'$  достижима из  $x^{(0)}$ , по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

Для графов с вентиляльно накопительной достижимостью имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.8.** При указанном построении, на вспомогательном графе кратчайших путей, содержащих больше чем  $n-1$  дугу не существует, где  $n = |X|$ .

Доказательство следует из правил построения вспомогательного графа.

**Пример 1.12.**

Рассмотрим граф с вентиляльно-накопительной достижимостью порядка 2 из примера 1.11. На рис.1.15 показан вспомогательный граф.

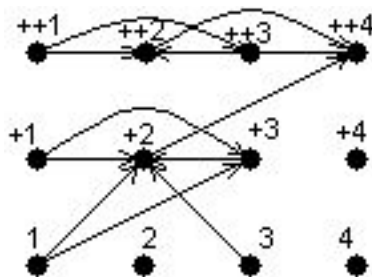


Рисунок 1.15 — Вспомогательный граф для графа на рис. 1.13.

Рассмотрим путь  $\mu_2 = \{u_2, u_5\}$ . Поскольку нет кратных дуг, для простоты его можно записать в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ . При рассмотрении примера 1.11 мы показали, что он не является вентиляльным путем порядка 2, так как не удовлетворяет условию (1.8). И действительно, на вспомогательном графе ему не соответствует ни одного пути.

Путь  $\mu_1 = \{u_2, u_4, u_3\}$  (в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 3 \rightarrow$

$2 \rightarrow 4$ ) является вентиляльным путем порядка 2. На вспомогательном графе ему соответствует путь  $1^{(0)} \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 4^{(2)}$ .

### 1.5.2 Условие вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием доступа на пути

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$  такой, что и множество вершин, и множество дуг разбито на несколько подмножеств:  $X = X_0 \cup \dots \cup X_k$  и  $U = U_0 \cup \dots \cup U_k$ , при этом  $X_j \cap X_i = \emptyset$  и  $U_j \cap U_i = \emptyset$  для всех  $i$  и  $j$  таких, что  $0 \leq i < j \leq k$ .

Пусть  $\mu$  — путь длины  $n$  на графе  $G$ . С каждым начальным отрезком  $[1; i]_Z$  пути  $\mu$  свяжем характеристику  $\bar{\rho}_\mu(i) = j$ , где  $j$  — индекс подмножества в разбиении множества вершин такой, что  $(p_2 \circ f \circ \mu)(i) \in X_j$ . Характеристику  $\bar{\rho}_\mu$  будем называть порядком доступа на пути  $\mu$ .

**Определение 1.22.** *Путь  $\mu$  будем называть вентиляльным путем порядка  $k$  с возрастанием-убыванием доступа на графе  $G$ , если выполняется следующее условие:*

$$\forall m (\bar{\rho}_\mu(m) = j) \Rightarrow (\mu(m+1) \in \bigcup_{i=0}^j U_i) \quad (1.9)$$

Другими словами, если порядок доступа на пути  $\mu$  равен  $j$ , то следующая дуга пути обязана быть дугой множества  $U_0 \cup \dots \cup U_j$ .

Условие (1.9) будем называть условием вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием доступа на пути.

**Определение 1.23.** *Граф  $G$ , на котором допустимыми считаются только вентиляльные пути порядка  $k$  с возрастанием-убыванием доступа будем называть графом с условием вентиляльно-накопительной достижимости порядка  $k$  с возрастанием-убыванием доступа на пути.*

#### Пример 1.13.

Рассмотрим граф  $G$  с вентиляльной достижимостью порядка 2 с возрастанием-убыванием доступа на пути на рис.1.16. Дуги  $\{u_1, \dots, u_5\}$  графа  $G$  таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (1, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 2)$ ,

$f(u_5) = (3, 4)$ . Положим  $U_0 = \{u_1, u_2, u_4\}$ ,  $U_1 = \{u_3\}$ ,  $U_2 = \{u_5\}$ ,  $X_0 = \{1, 2\}$ ,  $X_1 = \{4\}$  и  $X_2 = \{3\}$ .

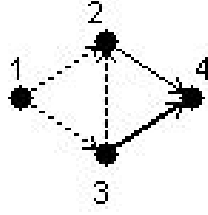


Рисунок 1.16 — Граф с условием вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием доступа на пути.

Рассмотрим путь  $\mu_1 = \{u_1, u_3\}$ . Он не является вентиляльным путем порядка 2 с возрастанием-убыванием доступа, поскольку не удовлетворяет условию (1.9): характеристика  $\bar{\rho}_{\mu_1}(1) = 0$  и дуга  $\mu_1(2) = u_3 \in U_1$ .

Путь  $\mu_2 = \{u_2, u_4, u_3\}$  так же не является вентиляльным путем порядка 2 с возрастанием-убыванием доступа, поскольку не удовлетворяет условию (1.9): характеристика  $\bar{\rho}_{\mu_2}(2) = 0$  и дуга  $\mu_2(3) = u_3 \in U_1$ .

Путь  $\mu_3 = \{u_2, u_5\}$  является вентиляльным путем порядка 2 с возрастанием-убыванием доступа, поскольку удовлетворяет условию (1.9): характеристика  $\bar{\rho}_{\mu_3}(1) = 2$  и дуга  $\mu_3(2) = u_5 \in U_2$ .

Идея подхода к решению задачи о достижимости такая же, что и в пункте 1.2.1.

### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $k + 1$  вершина  $\{x^{(0)}, \dots, x^{(k)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу:

для всех номеров  $l \in [0; k]_{\mathbb{Z}}$ , каждой дуге  $u \in U_l$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  соответствует  $k - l + 1$  дуга  $\{u^{(l)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f(u^{(l+i)}) = (x^{(l+i)}, y^{(j)}) \forall i \in [0; k-l]_{\mathbb{Z}}$ , где  $j$  — это индекс подмножества в разбиении множества вершин такого, что вершина  $y = (p_2 \circ f)(u)$  принадлежит множеству  $X_j$ .

**Теорема 1.9.** Любому пути  $\psi'$  на вспомогательном графе  $G'$ , который начинается в вершине нулевого уровня, на исходном графе соот-

ветствует вентиляльный путь  $\psi$  с возрастанием-убыванием доступа на пути и вершина  $y$  достижима при условии (1.9) из вершины  $x$  на графе  $G$  тогда и только тогда, когда на  $G'$  достижима из  $x^{(0)}$ , по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

### Пример 1.14.

Рассмотрим граф  $G$  из примера 1.13. На рис.1.17 показан вспомогательный граф.

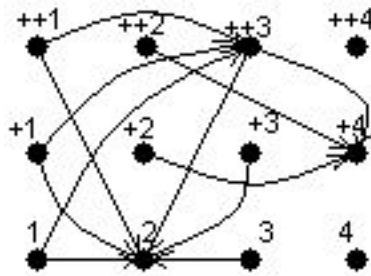


Рисунок 1.17 — Вспомогательный граф  $G'$  для графа на рис. 1.16.

Рассмотрим путь  $\mu_1 = \{u_1, u_3\}$  (в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ). При рассмотрении примера 1.11 показали, что он не является вентиляльным путем порядка (2) с возрастанием-убыванием доступа, так как не удовлетворяет условию. И действительно, на вспомогательном графе  $G'$  ему не соответствует ни одного пути.

Путь  $\mu_3 = \{u_2, u_5\}$  (в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ) является вентиляльным путем порядка (2) с возрастанием-убыванием доступа. На вспомогательном графе ему соответствует путь:  $1^{(0)} \rightarrow 3^{(2)} \rightarrow 4^{(1)}$ .

### 1.5.3 Условие вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$ , множества вершин и дуг разбиты точно так же как и для графов, рассмотренных в предыдущем разделе:  $X = X_0 \cup \dots \cup X_k$ ,  $U = U_0 \cup \dots \cup U_k$  и  $X_i \cap X_j = \emptyset$ ,  $U_i \cap U_j = \emptyset$  для всех  $i$  и  $j$  таких, что  $1 \leq i < j \leq k$ .

С каждым подмножеством  $U_i$  ( $i \in [1, k]_Z$ ) свяжем два натуральных числа:  $\sigma(i)$ , которое будем называть величиной убывания энергии  $i$ -того



типа, и  $\sigma^*(i)$ , которое будем называть максимально возможным количеством энергии  $i$ -того типа.

Пусть  $\mu$  — путь длины  $n$  на графе  $G$ . С каждым отрезком  $[i; j]_N$  пути  $\mu$  свяжем числовые характеристики

$$\zeta_\mu^r(i, j) = \min \left\{ \max_{m=i, \dots, j} \left\{ \sum_{l=m}^j |(p_2 \circ f \circ \mu)(l) \cap X_r| - \sigma(r) \sum_{l=m}^j |\mu(l) \cap U_r| \right\}, \sigma^*(r) \right\}, \quad \forall r \in [1; k]_Z. \quad (1.10)$$

При этом  $\sigma^*(r) = s_r$ ,  $\sigma(r) = s'_r$  ( $s_r, s'_r \in \mathbf{N}$ )  $\forall r = \overline{1, k}$ .

Величину  $\zeta_\mu^r(i, j)$  будем называть величиной накопленной энергии  $r$ -того типа на отрезке  $[i; j]_Z$  пути  $\mu$ .

В случае простого пути соотношение (1.10) принимает следующий вид:

$$\zeta_\mu^r(i, j) = \min \left\{ \max_{m=i, \dots, j} \{ |(p_2 \circ f \circ \mu)([m, j]) \cap X_r| - \sigma(r) |\mu([m, j]) \cap U_r| \}, \sigma^*(r) \right\}, \quad \forall r \in [1; k]_Z.$$

Через  $\zeta_\mu^r(i) = \zeta_\mu^r(0) + \zeta_\mu^r(1, i)$  обозначим величину накопленной энергии  $r$ -того типа на пути  $\mu$  через  $i$  шагов от начала пути. Определим величину  $\zeta_\mu^r(0) = 0$ . Будем называть ее величиной начальной энергии пути  $\mu$ .

**Определение 1.24.** *Путь  $\mu$  будем называть вентиляльным путем с накоплением энергии порядка  $k$  ( $k \geq 1$ ) на графе  $G$ , если выполняется следующее условие:*

$$\forall m (\rho_\mu(m) = r) \Rightarrow (\mu(m+1) \in W_r) \quad \forall r = \overline{1, k}, \quad (1.11)$$

где  $W_r = U_0 \cup \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ \zeta_\mu^j(m) \geq \sigma^*(j)}}^r U_j \right)$ .

Условие (1.11) будем называть условием вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути.

**Определение 1.25.** *Граф  $G$ , на котором допустимыми считаются только вентиляльные пути с накоплением энергии порядка  $k$  будем назы-*

вать графом с условием вентиляльной достижимости порядка  $k$  с накоплением энергии на пути.

**Пример 1.15.**

Рассмотрим граф с условием вентиляльной достижимости порядка 2 с накоплением энергии на пути на рис.1.18. Дуги  $\{u_1, \dots, u_5\}$  графа  $G$  таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (1, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 3)$ ,  $f(u_4) = (2, 4)$ ,  $f(u_5) = (3, 4)$ .

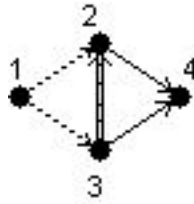


Рисунок 1.18 — Граф с условием вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути.

Положим  $U_0 = \{u_1, u_2\}$ ,  $U_1 = \{u_4, u_5\}$ ,  $U_2 = \{u_3\}$ ,  $X_1 = \{3\}$ ,  $X_2 = \{1, 2, 4\}$  и  $\sigma(1) = \sigma(2) = \sigma^*(1) = \sigma^*(2) = 1$ .

Рассмотрим путь  $\mu_1 = \{u_1, u_4\}$ . Он не является вентиляльным путем с накоплением энергии порядка 2 поскольку не удовлетворяет условию вентиляльной достижимости (1.11): характеристики  $\zeta_{\mu_1}^1(1) = 0$ ,  $\zeta_{\mu_1}^2(1) = 1$  и хотя  $\rho_{\mu_1}(1) = 1$ , т.е. множество  $W = U_0$ , однако, дуга  $\mu_1(2) = u_4 \notin W$ .

Путь  $\mu_2 = \{u_2, u_5\}$  является вентиляльным путем с накоплением энергии порядка 2, поскольку удовлетворяет условию вентиляльной достижимости (1.11): характеристики  $\zeta_{\mu_2}^1(1) = 1$ ,  $\zeta_{\mu_2}^2(1) = 0$ ,  $\rho_{\mu_2}(1) = 1$ , следовательно,  $W = U_0 \cup U_1$  и дуга  $\mu_2(2) = u_5 \in W$ .

Для задачи о достижимости при условии вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути воспользуемся описанным выше подходом.

**Построение вспомогательного графа:**

Если для некоторого  $j \in [1; k]_Z$  выполняется

$$\sigma^*(j) < \sigma(j), \tag{1.12}$$

то это означает, что все пути, содержащие дуги множества  $V = U_j \cup \dots \cup U_k$  не являются допустимыми. Поэтому, вначале преобразуем исходный граф  $G$  следующим образом:

1. на графе  $G$  удалим все дуги множества  $V_0 = \bigcup_{i=j_0}^k U_i$ , где  $j_0$  — наименьшее из таких чисел, для которых выполняется неравенство (1.12).;
2. полагаем новое множество  $X_0 := X_0 \cup X_{j_0} \cup \dots \cup X_k$ ;
3. поскольку новые разбиения множества вершин и множества дуг имеют вид:  $X = X_0 \cup \dots \cup X_{j-1}$  и  $U = U_0 \cup \dots \cup U_{j-1}$ , то положим  $k = j - 1$ .

В результате таких преобразований получим граф  $G_1$ , на котором ни для одного  $j \in [1; k]_Z$  не выполняется неравенство (1.12).

На графе  $G'$  каждой вершине  $x$  полученного графа  $G_1$  ставится в соответствие  $(k+1) \cdot \prod_{i=1}^k (\sigma^*(i) + 1)$  вершин  $\{x(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})\}$ . Дугам графа  $G_1$  ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу:

для всех  $i \in [0; k]_Z$ , каждой дуге  $u \in U_i$  (для определённости будем считать, что  $f(u) = (x, y)$  и  $y \in X_j$ ) графа  $G_1$  ставится в соответствие  $(k+1) \cdot \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^k (\sigma^*(r) + 1)$  дуг, таких, что

1.  $\forall i < i_{k+1} < k$

- $\forall i_j \in [0; \sigma^*(j) - 1]_Z$

$$f(u(i_1, \dots, l, \dots, i_k, i_{k+1})) = (x(i_1, \dots, \sigma(i) + l, \dots, i_j, \dots, i_{k+1}), y(i_1, \dots, l, \dots, i_j + 1, \dots, i_{k+1}))$$

$$\forall l \in [0; \sigma^*(i) - \sigma(i)]_Z, \forall i_\alpha \in [0; \sigma^*(\alpha)]_Z, \text{ где } \alpha \in [1; k]_Z \text{ и } \alpha \neq j, i;$$

- $i_j = \sigma^*(j)$

$$f(u(i_1, \dots, l, \dots, i_k, i_{k+1})) = (x(i_1, \dots, \sigma(i) + l, \dots, i_k, i_{k+1}), y(i_1, \dots, l, \dots, i_k, i_{k+1}))$$

$$\forall l \in [0; \sigma^*(i) - \sigma(i)]_Z, \forall i_\alpha \in [0; \sigma^*(\alpha)]_Z, \text{ где } \alpha \in [1; k]_Z \text{ и } \alpha \neq j, i;$$

2.  $i_{k+1} = i$

- $\forall i_j \in [0; \sigma^*(j) - 1]_Z$

$$f(u(i_1, \dots, l, \dots, i_k, i)) = \\ (x(i_1, \dots, \sigma(i) + l, \dots, i_j, \dots, i_k, i), y(i_1, \dots, l, \dots, i_j + 1, \dots, i_k, i + 1)) \\ \forall l \in [0; \sigma^*(i) - \sigma(i)]_Z, \forall i_\alpha \in [0; \sigma^*(\alpha)]_Z, \text{ где } \alpha \in [1; k]_Z \text{ и } \alpha \neq j, i;$$

- $i_j = \sigma^*(j)$

$$f(u(i_1, \dots, l, \dots, i_k, i)) = \\ (x(i_1, \dots, \sigma(i) + l, \dots, i_k, i), y(i_1, \dots, l, \dots, i_k, i + 1)) \\ \forall l \in [0; \sigma^*(i) - \sigma(i)]_Z, \forall i_\alpha \in [0; \sigma^*(\alpha)]_Z, \text{ где } \alpha \in [1; k]_Z \text{ и } \alpha \neq j, i.$$

**Теорема 1.10.** Любому пути  $\mu'$  на вспомогательном графе  $G'$ , который начинается в вершине нулевого уровня, соответствует вентиляный путь с накоплением энергии  $\mu$  на исходном и вершина  $y$  достижима при условии (1.11) из вершины  $x$  на графе  $G$  тогда и только тогда, когда на  $G'$  достижима из  $x(0, \dots, 0, 0)$ , по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y = \{y(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})\}$ , где  $i_j \in [0; \sigma^*(j)]_Z \forall j \in [1; k]_Z$  и  $i_{k+1} \in [0; k]_Z$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

## 1.6 Достижимость на графах с условиями затухания и усиления

Пусть граф  $G(X, U, f)$  такой, что его множество дуг разбито на три подмножества:  $U = U_H \cup U_+ \cup U_-$ ,  $U_- \cap U_H = \emptyset$ ,  $U_+ \cap U_H = \emptyset$  и  $U_- \cap U_+ = \emptyset$ ,  $U_- \neq \emptyset$ . Дуги множества  $U_+$  будем называть дугами с затуханием, дуги множества  $U_-$  — дугами с усилением, а дуги множества  $U_H$  — нейтральными.

Пусть  $k \in \mathbb{N}$ , это число будем называть порогом затухания.

Пусть  $\mu$  — путь длины  $n$  на графе  $G$ . Величину затухания — числовую характеристику  $z_\mu(i)$  — начального отрезка  $[1; i]_Z$  пути  $\mu$  определим рекуррентно:

1. Величина затухания нулевого начального отрезка пути  $\mu$  равна нулю:  $z_\mu(0) = 0$ .

2.

$$z_\mu(m+1) = \begin{cases} z_\mu(m) + 1, & u_{m+1} \in U_+; \\ z_\mu(m), & u_{m+1} \in U_H; \\ z_\mu(m) - 1, & u_{m+1} \in U_- \text{ и } z_\mu(m) > 0; \\ 0 & u_{m+1} \in U_- \text{ и } z_\mu(m) = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

**Определение 1.26.** Путь  $\mu$  длины  $n$  на графе  $G$  будем называть допустимым, если выполняется следующее условие:

$$\forall m \ z_\mu(m) \leq k. \quad (1.14)$$

**Пример 1.16.**

Рассмотрим граф на рис.1.19 при  $k = 2$ . Дуги  $u_1, \dots, u_6$  - такие, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (1, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 3)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (4, 5)$ . Считаем, что  $U_+ = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ ,  $U_H = \{u_6\}$ ,  $U_- = \{u_4\}$  и веса всех дуг равны единице ( $\rho(u) = 1 \ \forall u \in U$ ).

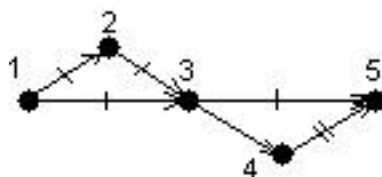


Рисунок 1.19 — Дуги множества  $U_+$  перечеркнуты одной линией, дуги  $U_H$  — двумя линиями, а дуги  $U_-$  — не перечеркнуты.

Рассмотрим путь  $\mu_1 = \{u_1, u_3, u_5\}$ . Он не является допустимым т.к.  $z(\{u_1, u_3, u_5\}) = 3 \geq k$ .

Рассмотрим путь  $\mu_2 = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$ . Этот путь удовлетворяет условию (1.14), а значит является допустимым.

Для решения задачи о достижимости при условии (1.14) будем применять описанный в предыдущих разделах подход.

**Построение вспомогательного графа:**

На графе  $G'$  каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $k + 1$  вершина  $\{x^{(0)}, \dots, x^{(k)}\}$ . Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу (см. рис.1.20):

а) каждой дуге  $u \in U_H$  (положим для определённости  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G$  соответствует  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f'(u^{(i)}) = (x^{(i)}, y^{(i)}) \forall i \in [0; k]_Z$ ;

б) каждой дуге  $u \in U_-$  (положим для определённости  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G$  соответствует  $k + 1$  дуга  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  такая, что  $f'(u^{(0)}) = (x^{(0)}, y^{(0)})$  и  $f'(u^{(i)}) = (x^{(i)}, y^{(i)}) \forall i \in [1; k]_Z$ ;

в) каждой дуге  $u \in U_+$  (положим для определённости  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G$  соответствует  $k$  дуг  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  таких, что  $f'(u^{(i)}) = (x^{(i)}, y^{(i+1)}) \forall i \in [0; k - 1]_Z$ .

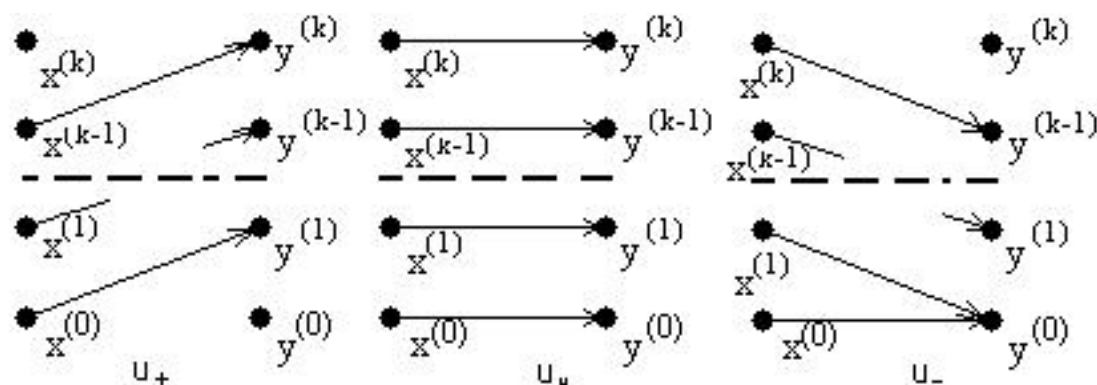


Рисунок 1.20 — Правила построения дуг вспомогательного графа.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.11.** Любому пути  $\mu'$  на вспомогательном графе  $G'$  с началом на нулевом уровне соответствует допустимый путь на исходном и вершина  $y$  достижима из вершины  $x$  при условии (1.14) на графе  $G$  тогда и только тогда, когда на  $G'$  из  $x^{(0)}$  достижима по крайней мере одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ .

Доказательство практически дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы 1.1.

Для нахождения кратчайших путей на исходном графе при условии (1.14) можно применять известные алгоритмы нахождения кратчайших путей на вспомогательном графе.

**Пример 1.17.**

Рассмотрим граф из примера 1.16.

На рис.1.21 показан вспомогательный граф.

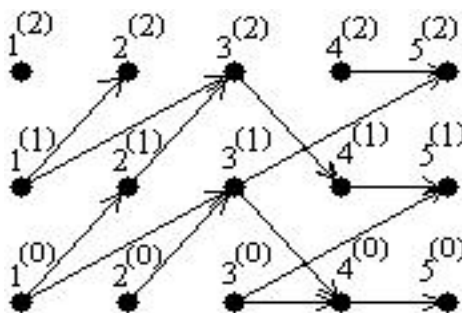


Рисунок 1.21 — Вспомогательный граф для графа на рис. 1.19.

Рассмотрим путь  $\mu_1 = \{u_1, u_3, u_5\}$  на исходном графе  $G$ . Поскольку на графе нет кратных дуг, для простоты путь можно записать в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ . При рассмотрении примера 1 мы показали, что он не является допустимым путем. И действительно, на вспомогательном графе ему не соответствует ни одного пути.

Рассмотрим путь  $\mu_2 = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$  на исходном графе  $G$ . Его также можно записать в виде последовательности вершин -  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ . Этот путь удовлетворяет условию (1.14), а значит является допустимым путем. На вспомогательном графе ему соответствует путь  $1^{(0)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 3^{(2)} \rightarrow 4^{(1)} \rightarrow 5^{(1)}$ .

Кроме этого, на вспомогательном графе (рис.1.21) можно увидеть, что длина кратчайшего пути из вершины 1 в вершину 5 на исходном графе равен двум, но этот путь имеет самое большое затухание, равное двум, тогда, как самый длинный путь из вершины 1 в вершину 5 имеет затухание, равное единице, что меньше, чем затухание кратчайшего пути.

Справедливы следующие теоремы:

**Теорема 1.12.** *Кратчайшему пути из вершины  $x^{(0)}$  в вершину  $y^{(j)}$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует кратчайший допустимый путь с уровнем затухания равным  $j$  на исходном графе  $G$ .*

**Теорема 1.13.** *Кратчайшему пути из вершины  $x^{(i)}$  в вершину  $y^{(j)}$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует кратчайший допустимый путь из вершины  $x$  с уровнем затухания равным  $i$  в вершину  $y$  с уровнем*

затухания равным  $j$  на исходном графе  $G$ .

Доказательство приведенных теорем следует из теоремы 1.11 и правил построения вспомогательного графа.

Классические алгоритмы находят кратчайшие пути из некоторой вершины не в одну (фиксированную), а во все вершины графа. Значит применяя эти алгоритмы на вспомогательном графе мы решаем для исходного графа не задачу о кратчайшем пути, а задачу о нахождении кратчайших путей для всех возможных уровней затухания.

## 1.7 Графы с нестандартной достижимостью (общий подход)

В этом разделе мы введем общие понятия графа с нестандартной достижимостью и допустимого пути в нем (см. [26]), а также покажем, что ранее изученные графы с ограничениями на прохождение по дугам выделенных подмножеств являются частными случаями графов с нестандартной достижимостью.

### 1.7.1 Общий подход к нестандартной достижимости

**Определение 1.27.** *Графом с нестандартной достижимостью будем называть ориентированный граф  $G(X, U, f)$ , для которого заданы:*

1. *Два набора подмножеств дуг  $U_\Delta = \{U_0, \dots, U_m\}$  и  $U^\Delta = \{U^{(0)}, \dots, U^{(k)}\}$ , при этом  $U_i \cap U_j = \emptyset \forall i \neq j$ . ( $k, m \in \mathbb{Z}_+$  – заранее известные, фиксированные числа).*
2. *Отображение  $\varphi_\mu : \mathbb{N} \rightarrow [0; k]_Z$ , которое будем называть числовой характеристикой произвольного пути  $\mu$ .*
3. *Формальное ограничение на достижимость.*

Далее будем считать, что характеристика  $\varphi_\mu$  произвольного пути  $\mu$  определяется рекуррентно следующим образом:

$$\varphi_\mu(i) = F(\varphi_\mu(i-1), a_i), \quad \forall i > 0, \quad \varphi_\mu(0) = 0,$$



где число  $a_i$  зависит от того, к какому множеству из набора  $U_\Delta$  принадлежит дуга  $\mu(i)$ , а  $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow [0; k]_{\mathbb{Z}}$  — некоторая функция, например, определяемая правилом:  $F(x, y) = \min\{k, x + y\}$ .

Формальные ограничения можно разбить на два типа: строгие и нестрогие.

Ограничения строгого типа можно записать в виде:

$$\forall i (\varphi_\mu(i) = j) \Rightarrow (\mu(i+1) \in U^{(j)}).$$

Другими словами, если характеристика  $\varphi$  пути  $\mu$  на шаге  $i$  равна числу  $j$ , то следующая ( $i+1$ -я) дуга пути  $\mu$  обязана быть только из множества  $U^{(j)}$ .

Ограничения нестрогого типа можно записать в виде:

$$\forall i (\varphi_\mu(i) = j) \& ([p_2 \circ f \circ \mu](i)]^+ \cap U^{(j)} \neq \emptyset) \Rightarrow (\mu(i+1) \in U^{(j)}).$$

Другими словами, если характеристика  $\varphi$  пути  $\mu$  на шаге  $i$  равна числу  $j$  и из концевой вершины  $i$ -той дуги выходит хотя бы одна дуга множества  $U^{(j)}$ , то следующая ( $i+1$ -я) дуга пути  $\mu$  обязана быть только из множества  $U^{(j)}$ .

Всюду далее набор  $U_\Delta$  будем называть характеристическим, а  $U^\Delta$  — путевым набором.

**Определение 1.28.** *Путь  $\mu$  будем называть допустимым путем на графе  $G$  с нестандартной достижимостью, если он удовлетворяет формальному ограничению, заданному на  $G$ .*

Таким образом, выбором двух наборов подмножеств, числовой характеристики произвольного пути и заданием формального ограничения, любой граф, на котором не все пути являются допустимыми, можно записать в терминах графов с нестандартной достижимостью. Более того, классические ориентированные графы являются частным случаем графов с нестандартной достижимостью.

**Пример 1.18.**

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$ .

Выберем в качестве характеристического и путевого наборов, наборы, состоящие из одного множества  $U$ . Т.е.  $U_\Delta = \{U_0\}$  и  $U^\Delta = \{U^{(0)}\}$  (т.е.  $m = k = 0$ ). Очевидно,  $U_0 = U^{(0)} = U$ . Характеристику  $\varphi$  выберем таким образом, что  $\varphi_\mu(i) = \varphi_\mu(i-1) + 0 \quad \forall i > 0, \forall \mu$ .

Тогда при формальном ограничении любого типа все дуги графа  $G$  являются равноправными при формировании пути, вследствие чего все пути являются допустимыми.

Поскольку классические алгоритмы для решения задач о достижимости требуют, чтобы все пути на графе являлись допустимыми, то применять их к графам с нестандартной достижимостью нельзя.

Подход к решению задачи о достижимости на графах с нестандартной достижимостью состоит в построении вспомогательного графа большего размера, но на котором все пути являются допустимыми.

Вспомогательный граф  $G'(X', U', f')$  будем строить следующим образом:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставим в соответствие  $k + 1$  вершину  $\{x^{(0)}, \dots, x^{(k)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дуги строятся по правилу:

Пусть  $u$  такая, что  $f(u) = (x, y)$ , тогда

а) для всех  $i \in [0; m]_Z, j \in [0; k]_Z$  и каждой дуги  $u \in U_i \cap U^{(j)}$  строим дугу  $u_i^{(j)}$  такую, что  $f'(u_i^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(F(j, a_i))})$ .

б) если выбрано формальное ограничение нестрогого типа, то, кроме этих дуг, строим дополнительные дуги по правилу:

для всех  $i \in [0; m]_Z, j \in [0; k]_Z$  и каждой дуги  $u_i \in U_i \cap (U \setminus U^{(j)})$  такой, что  $[(p_1 \circ f)(u_i)]^+ \cap U^{(j)} = \emptyset$  строим дугу  $u'_i$  такую, что  $f'(u'_i) = (x^{(j)}, y^{(F(j, a_i))})$ .

**Теорема 1.14.** Любому пути  $\mu'$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует допустимый путь  $\mu$  на исходном графе  $G$  и вершина  $y$  достижима из  $x$  на исходном графе с нестандартной достижимостью  $G$  тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе  $G'$  из вершины  $x^{(0)}$  достижима, по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ .

∇ *Доказательство. Достаточность.*

На  $G'$  из вершины  $x^{(0)}$  достижима, по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$ , т.е. существует путь  $\mu'$  из вершины  $x^{(0)}$  в некоторую  $y^{(j)}$ .

Доказательство проведем индукцией по количеству  $m$  дуг в пути  $\mu'$ .

1. Пусть  $m = 1$

т.е. путь  $\mu'$  состоит из одной дуги  $u'$  такой, что  $f'(u') = (x^{(0)}, y^{(j)})$ . На исходном графе ей соответствует дуга  $u$  такая, что  $f(u) = (x, y)$  и  $u \in U_j \cap U^{(0)}$ . Следовательно, на исходном графе вершина  $y$  достижима из  $x$ , так как существует путь  $\mu$  (состоящий из одной дуги  $u$ ) из вершины  $x$  в  $y$ . При этом, характеристика  $\varphi_\mu$  равна величине  $j$ .

2. Пусть для некоторого  $m = s$  утверждение справедливо, докажем его справедливость для  $m = s + 1$ .

Пусть путь  $\mu' = \{u'_{i_0}, \dots, u'_{i_s}\}$  такой, что  $(p_1 \circ f')(u'_{i_0}) = x^{(0)}$ ,  $(p_2 \circ f')(u'_{i_s}) \cap V_y \neq \emptyset$ . Выделим из него последнюю дугу  $u'_{i_s}$  (считаем, что  $f'(u'_{i_s}) = (y_1^{(q)}, y^{(F(q, a_p))})$  и  $F(q, a_p) = j$ ). Путь  $\mu'_1 = \mu' \setminus u'_{i_s}$  — содержит  $s$  дуг, начинается в вершине  $x^{(0)}$ , заканчивается в вершине  $y_1^{(q)} = (p_1 \circ f')(u'_{i_s})$ . По предположению индукции, на исходном графе ему соответствует допустимый путь  $\mu_1$  из вершины  $x$  в вершину  $y_1$ . При этом, характеристика  $\varphi_{\mu_1}$  в конце пути  $\mu_1$  равна величине  $q$ .

Дуге  $u'_{i_s}$  соответствует дуга  $u \in U_p \cap U^{(q)}$ . Рассмотрим путь  $\mu = \mu_1 \cup \{u\}$ . Он является допустимым, поскольку характеристика  $\varphi_\mu$ , равная  $\varphi_{\mu_1}$ , в конце пути  $\mu_1$  равна величине  $q$  и дуга  $u$  принадлежит множеству  $U^{(q)}$ . А т.к.  $(p_2 \circ f)(u) = y$ , следовательно, вершина  $y$  достижима из вершины  $x$  на исходном графе.

Необходимость.

Вершина  $y$  достижима из вершины  $x$  на исходном графе с нестандартной достижимостью, следовательно, существует допустимый путь  $\mu = \{u_1, \dots, u_s\}$  из  $x$  в  $y$ .

Построим отображение  $\alpha_\mu : U \rightarrow U'$  следующим образом:

Каждой дуге  $u_i \in \mu$  ставится в соответствие дуга  $\alpha_\mu(u_i)$  такая, что  $(p_2 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_{i-1}) = (p_1 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_i)$ , при этом, дуга  $\alpha_\mu(u_1)$  такая, что  $(p_1 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_1) = x^{(0)}$ . Кроме этого, если  $f(u_i) = (a, b)$ , то  $(p_1 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_i) \in V_a$ ,  $(p_2 \circ f' \circ \alpha_\mu)(u_i) \in V_b$ .

Из правил построения вспомогательного графа следует, что отображение  $\alpha_\mu$  можно построить для любого допустимого пути  $\mu$ .

Тогда набор  $\mu' = \{\alpha_\mu(u_1), \dots, \alpha_\mu(u_s)\}$  является путем на вспомогательном графе  $G'$ , при этом,  $(p_1 \circ f')(\mu') = x^{(0)}$ ,  $(p_2 \circ f')(\mu') \in V_y$ . Следовательно, из вершины  $x$  достижима, по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y$ .

△

Рассмотрим случай, когда характеристика произвольного пути  $\mu$  задана нерекуррентно, но, начиная с некоторого  $s$ , периодически с периодом  $l$ , то есть  $\varphi_\mu(s + l + i) = \varphi_\mu(s + i)$   $i = 0, 1, \dots$

Заметим, что в этом случае оказывается лишним характеристический набор  $U_\Delta$ , поскольку характеристика  $\varphi_\mu$  задана независимо от типа дуг пройденных на пути  $\mu$ .

Построение вспомогательного графа, в этом случае, будем проводить следующим образом:

Каждой вершине  $x$  исходного графа ставится в соответствие  $l + s$  вершин на вспомогательном графе. Дуги вспомогательного графа строятся по следующему правилу:

а) для каждой дуги  $u \in U^{(j)}$  исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа  $\{u_i\}_{i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l+s-1]}$  таких, что

$$f'(u_i) = \begin{cases} (x^{(i)}, y^{(i+1)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l + s - 2] \\ (x^{(i)}, y^{(s)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap \{l + s - 1\} \end{cases}$$

б) если выбрано ограничение нестроогого типа, то, кроме указанных дуг, строятся следующие дуги:

рассматриваем все вершины  $x$  исходного графа, такие, что  $[x]^+ \cap U^{(j)} = \emptyset$ , тогда для всех вершин  $z \in \Gamma^+(x)$  строим дуги

$\{u'_i\}_{i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l+s-1]}$  такие, что

$$f'(u_i) = \begin{cases} (x^{(i)}, z^{(i+1)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l+s-2] \\ (x^{(i)}, z^{(s)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap \{l+s-1\} \end{cases}$$

В данном случае также имеет место теорема 1.14. Ее доказательство для случая нерекуррентной, но периодической характеристики аналогично доказательству для рекуррентной характеристики.

Таким образом, для нахождения кратчайшего допустимого пути из одной вершины в другую на графе с нестандартной достижимостью можно использовать классические алгоритмы на вспомогательном графе.

### 1.7.2 Частные случаи графов с нестандартной достижимостью

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть  $G(X, U, f)$  — ориентированный граф и задан характеристический набор  $U_\Delta = \{U_0, \dots, U_m\}$ ,  $U_i \cap U_j = \emptyset \forall i \neq j$ .

1. Выберем  $m = 1$ .

Введем путевой набор таким образом, что  $U^{(i)} = U$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , а  $U^{(k)} = U_1$ .

Построим характеристику  $\varphi_\mu$  следующим образом:

$$\varphi_\mu(i) = \min \{k, \varphi_\mu(i-1) + a_i\}, \quad \forall i > 0, \quad \varphi_\mu(0) = 0,$$

где  $a_i = 0$ , если  $\mu(i) \in U_0$  и  $a_i = 1$ , если  $\mu(i) \in U_1$ .

Выбирая ограничение нестрогого типа, получаем, что  $G(X, U, f)$  — граф с магнитной достижимостью с накоплением неубывающей магнитности ([66]). На графе с магнитной достижимостью множество дуг состоит из объединения непересекающихся множеств  $U_M, U_H$  (магнитных и немагнитных дуг соответственно) и ставится следующее ограничение: если путь от своего начала содержал как минимум  $k$  магнитных дуг, то следующая дуга пути, если есть такая возможность, обязана быть магнитной.

Построение вспомогательного графа, по правилам указанным в первом пункте, представлено на рис.1.22.

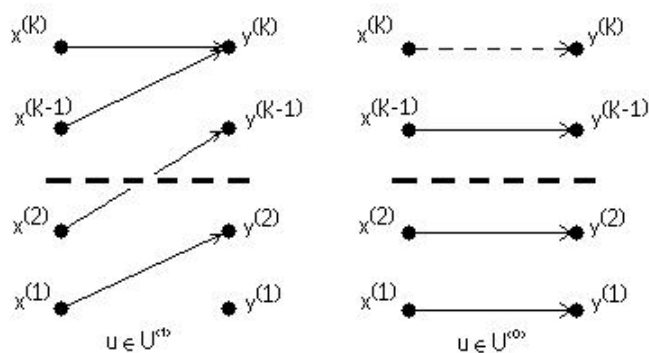


Рисунок 1.22 — Частный случай:  $m = 1$  и выбрано ограничение нестрогого типа.

Видно, что построение вспомогательного графа по правилам, описанным выше, совпадает с рассмотренным в [66] правилом для графов с магнитной достижимостью.

2. Выберем  $m = k$ .

Введем путевой набор таким образом, что  $U^{(j)} = \bigcup_{i=0}^j U_i$ ,  $j = 0, \dots, k$ .

Построим характеристику  $\varphi_\mu$  следующим образом:

$$\varphi_\mu(i) = \min \{k, \max\{\varphi_\mu(i-1), a_i\}\}, \quad \forall i > 0, \quad \varphi_\mu(0) = 0,$$

где  $a_i = j + 1$ , если  $\mu(i) \in U_j$ ,  $j = 0, \dots, k$ .

Выбирая ограничение строгого типа, получаем, что  $G(X, U, f)$  — граф с вентильно-накопительной достижимостью ([22]). На графе с вентильной достижимостью заданы множества  $U_0, \dots, U_k$  и ставится следующее ограничение: прохождение по дуге множества  $U_j$  «открывает» для прохода множество  $U_{(j+1)}$ .

Построение вспомогательного графа, по правилам указанным выше, представлено на рис.1.23.

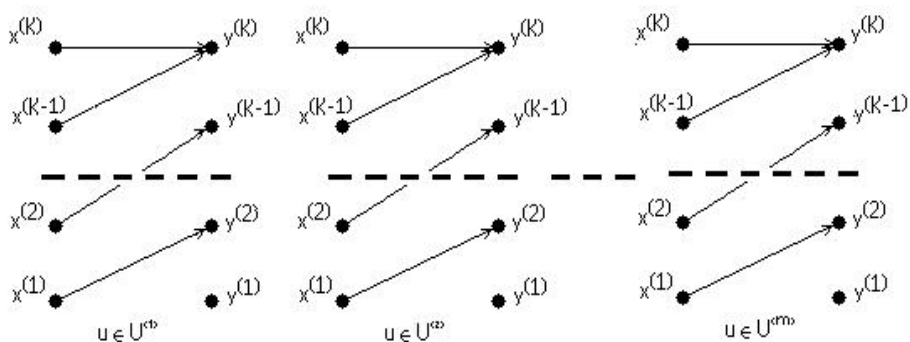


Рисунок 1.23 — Частный случай:  $m = k$  и выбрано ограничение строгого типа.

Видно, что построение вспомогательного графа по правилам, описанным выше совпадает с рассмотренным для графов с вентильной достижимостью.

Таким образом, мы показали, что такие достаточно разные ограничения, как условия вентильной и магнитной достижимости, могут быть записаны в терминах графов с нестандартной достижимостью.

## 1.8 Задача о перераспределении ресурсов

Зачастую, в средних и крупных компаниях, состоящих из нескольких отдельных подразделений, отделений и т.д., которые будем называть элементами (основным признаком элемента является его территориальная отделенность), возникает проблема перераспределения ресурсов состоящая в том, что для одного элемента компании возникает недостаток какого-то ресурса, а для другого элемента наоборот — избыток этого ресурса и необходимо перераспределить ресурсы таким образом, чтобы не было ни избытка, ни недостатка. Обычно, решение этой задачи сводится к решению классической транспортной задачи (см. [48]), однако, часто, отдельные элементы компаний не имеют собственного «транспортного» парка, но последний является отдельным элементом компании.

Такая структура позволяет компании работать эффективнее, но вносит существенную погрешность в решение транспортной задачи. Кроме этого, классическая транспортная задача рассматривает возможность распределения одного ресурса.

### 1.8.1 Задача о перераспределении ресурсов

Сформулируем задачу перераспределения  $m$  ресурсов в компании из  $n$  элементов следующим образом:

Пусть в некоторой компании имеется  $n$  элементов  $(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ , для каждого из  $m$  ресурсов  $(\{q_1, q_2, \dots, q_m\})$  элемент  $x_i$  компании имеет величину избытка  $b(x_i, q_j) (\geq 0)$  и величину недостатка  $a(x_i, t_j) (\geq 0)$  для всех значений  $i \in [1; n]_Z$  и  $j \in [1; m]_Z$ . Кроме этого, отдельным элементом компании является «главный склад» (элемент  $x_0$ ) для которого избыток

каждого ресурса неограничен, а недостаток каждого ресурса равен нулю. Считаем, что «транспортный парк» является составной частью только для главного склада и известны длины кратчайших путей между каждой парой элементов компании. Требуется оптимальным образом (т.е. с наименьшими затратами на перевозку) перераспределить ресурсы между элементами компании таким образом, чтобы для каждого элемента и избыток, и недостаток всех ресурсов был равен нулю.

Таким образом, ресурс берется из элементов, в которых есть его излишки и распределяется между элементами, в которых наблюдается недостаток этого ресурса. И только в том случае, если суммарный недостаток некоторого ресурса больше, чем его суммарные излишки, то ресурс берется с главного склада в количестве, равном разнице между суммарным недостатком и суммарными излишками.

Данную задачу удобно решать, используя методы теории графов, поскольку в этом случае необходимо определить пути для перераспределения заданных ресурсов, т.е. нас интересует последовательность вершин (элементов компании), которые необходимо посетить, чтобы перераспределить ресурсы.

Таким образом, структуру дорожного сообщения элементов компании удобно представить в виде полного ориентированного графа.

### **Пример 1.19.**

Пусть компания состоит из трех элементов и главного склада, и использует два ресурса. На рис.1.24. представлен граф, соответствующий данной структуре компании. Возле каждой вершины указаны величины избытков каждого из двух ресурсов. Если величина отрицательная, то имеется недостаток данного ресурса.



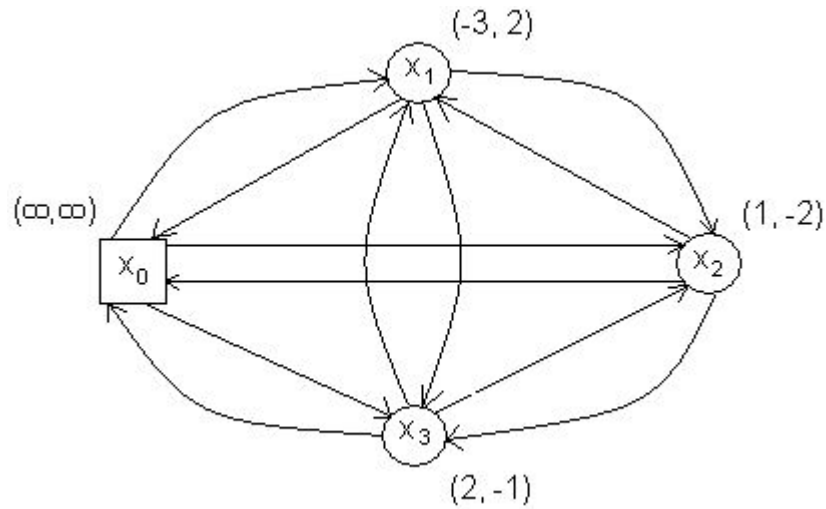


Рисунок 1.24 — Структура компании из трех элементов ( $x_1, x_2, x_3$ ) и главного склада ( $x_0$ ).

Таким образом, необходимо найти такие пути (заметим, что пути будут являться циклами, поскольку после прохождения некоторых вершин обязательно нужно вернуться в вершину  $x_0$ ) на полученном графе, чтобы их суммарная длина была минимальной из возможных и в результате перевозки ресурсов, согласно этим путям, недостатки обращались в ноль.

Для упрощения решения задачи «разделим» вершину  $x_0$  на две:  $s$  (источник) и  $t$  (сток) так, что в вершину  $s$  не заходит ни одной дуги, а из вершины  $t$  не выходит ни одной дуги.

Граф, полученный из графа на рис.1.24. разделением вершины  $x_0$  показан на рис.1.25.

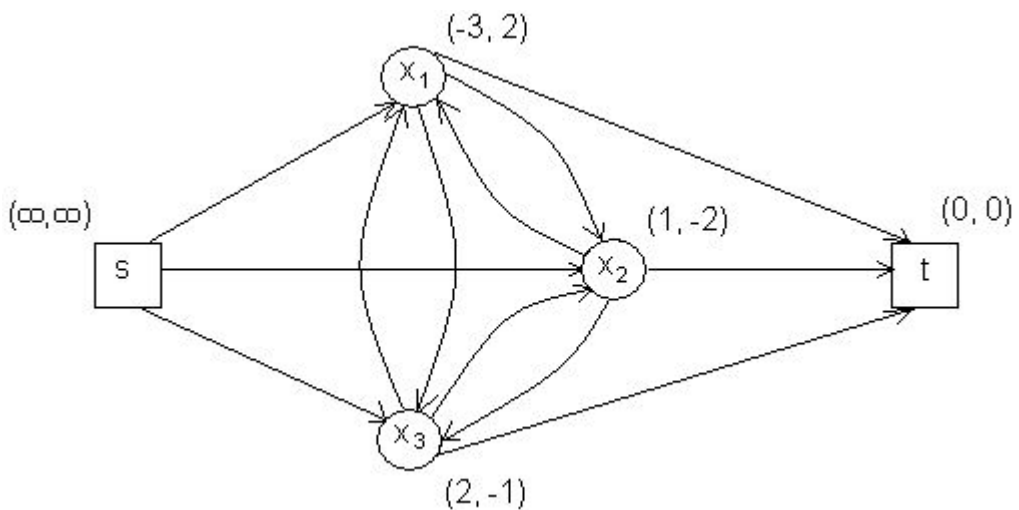


Рисунок 1.25 — Структура с «разделенным» главным складом.

Перейдем от графа с весами на вершинах к графу с весами на дугах следующим образом:

С каждой дугой  $u$  графа  $G$  свяжем величину

$$c(u) = (c_1(u), c_2(u), \dots, c_m(u)) = \\ (b(y, t_1) - a(y, t_1), b(y, t_2) - a(y, t_2), \dots, b(y, t_m) - a(y, t_m)),$$

где  $y = (p_2 \circ f)(u)$ , т.е. конечная вершина дуги  $u$ .

Таким образом, теперь необходимо найти не множество допустимых циклов, а множество допустимых путей из вершины  $s$  в вершину  $t$ . Заметим, что таких путей может быть несколько, в зависимости от «грузоподъемности» машин в парке и распределения длин дуг на графе.

Далее будем считать, что величина грузоподъемности не ограничена и, кроме этого, распределение длин дуг на графе таково, что оптимальное решение задачи о перераспределении ресурсов состоит только из одного пути (в следующем пункте будет рассмотрен случай такого распределения длин дуг на графе, что оптимальное решение состоит из нескольких путей).

Введем условие допустимости для пути перераспределения, которое состоит в следующем:

С каждым начальным отрезком пути  $\mu([1, k]_N)$  свяжем характеристику

$$\chi_\mu^i(k) = \max\{0, \chi_\mu^i(k-1) + \alpha_i(\mu(k))\},$$

где

$$\alpha_i(\mu(k)) = \begin{cases} c_i(\mu(k)), & \text{если } [c_i(\mu(k)) > 0 \text{ и путь } \mu \text{ еще не} \\ & \text{проходил через вершину } (p_2 \circ f \circ \mu)(k)] \\ & \text{или } [c_i(\mu(k)) < 0 \text{ и путь } \mu \text{ уже проходил} \\ & \text{через вершину } (p_2 \circ f \circ \mu)(k)], \text{ но при этом} \\ & \text{проходе характеристика } \chi^i \text{ не менялась}; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Будем считать путь  $\mu$  допустимым только в том случае, если характеристика  $\chi_\mu(|\mu|) = (\chi_\mu^1(|\mu|), \chi_\mu^2(|\mu|), \dots, \chi_\mu^m(|\mu|))$  является ноль-вектором.

При этом,  $\chi_\mu^i(0) = b(x_0, t_i) \forall i \in [1; m]_Z$ .

Таким образом, получили граф с нестандартной достижимостью. На нем будем искать кратчайший допустимый путь распределяющий ресурсы, который проходит хотя бы один раз по каждой вершине графа (поскольку, по предположению сделанному выше, этот путь должен быть один).

Для решения задачи о перераспределении ресурсов на исходном графе будем использовать подход, согласно которому строится вспомогательный граф большего размера, но на котором все пути являются допустимыми. Кроме этого, каждому пути на вспомогательном графе, начинающемуся в вершине  $s$  и заканчивающемся в вершине  $t$ , соответствует допустимый путь на исходном графе.

Построение вспомогательного графа  $G'(X', U', f')$  :

Вспомогательный граф будем строить в  $m$  этапов (для каждого ресурса отдельное построение).

Рассмотрим  $i$ -й этап построения — промежуточный вспомогательный граф  $G'_i(X'_i, U'_i, f'_i)$ :

каждой вершине  $x (\neq s, t)$  промежуточного вспомогательного графа  $G'_{i-1}(X'_{i-1}, U'_{i-1}, f'_{i-1})$  на графе  $G'_i$  ставим в соответствие  $2n(\alpha_i + 1)$  вершин  $\{x_{(l_1, l_2, \dots, l_n)}^{(k)}\}$  ( $k = 1, \dots, \alpha_i, l_p \in \{0, 1\} \forall p \in [1; n]_Z$ ), где  $\alpha_i = \sum_{y \in X} a(y, q_i)$ .

Вершинам  $s$  и  $t$  промежуточного вспомогательного графа  $G'_{i-1}$  на графе  $G'_i$  ставим в соответствие по одной вершине  $s$  и  $t$  соответственно.

Дуги перестраиваем по правилу:

1. каждой дуге  $u (f'_{i-1}(u) = (z, y), y, z \neq s, t)$  промежуточного вспомогательного графа  $G'_{i-1}$  на графе  $G'_i$  ставим в соответствие  $(2n - 2)(\alpha_i - |c_{i-1}^{(i)}(u)|)$  дуг  $\{u_{(l_1, l_2, \dots, l_n)}^{(k)}\}$  таких, что
  - а) если  $c_{i-1}^{(i)}(u) \geq 0$ , то

$$f'_i(u_{(l_1, l_2, \dots, l_n)}^{(k)}) = \left( z_{(l_1, \dots, l_n)}^{(k)}, y_{(l_1, \dots, l_{v-1}, 1, l_{v+1}, \dots, l_n)}^{(k+c_{i-1}^{(i)}(u))} \right),$$

где  $k = 0, \dots, \alpha_i - c_{i-1}^{(i)}(u), l_p \in \{0, 1\} \forall p \in [1; n]_Z$ .

б) если  $c_{i-1}^{(i)}(u) < 0$ , то

$$f'_i(u_{(l_1, \dots, l_n)}^{(k)}) = \left( z_{(l_1, \dots, l_n)}^{(k)}, y_{(l_1, \dots, l_{v-1}, 1, l_{v+1}, \dots, l_n)}^{(k+c_{i-1}^{(i)}(u))} \right),$$

где  $k = |c_{i-1}^{(i)}(u)|, \dots, \alpha_i$ ,  $l_p \in \{0, 1\} \forall p \in [1; n]_Z$ .

При этом, индекс  $v$  является номером вершины на исходном графе  $G$ , для которой ставится в соответствие вершина  $y$ .

2. дугам  $u$  промежуточного вспомогательного графа  $G'_{i-1}$ , инцидентным либо вершине  $s$ , либо вершине  $t$ , на графе  $G'_i$  ставим в соответствие по одной дуге  $u_s$  или  $u_t$  соответственно. При этом,

а) если  $f'_{i-1}(u) = (y, t)$ , то

$$f_i(u_t) = \left( y_{(1, \dots, 1)}^{(0)}, t \right).$$

б) если  $f'_{i-1}(u) = (s, y)$ , то

$$f_i(u_s) = \begin{cases} \left( s, y_{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^{(c_{i-1}^{(i)}(u))} \right), & c_{i-1}^{(i)}(u) > 0; \\ \left( s, y_{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^{(c_{i-1}^{(i)}(u))} \right), & c_{i-1}^{(i)}(u) = 0; \\ \left( s, y_{(0, \dots, 0)}^{(c_{i-1}^{(i)}(u))} \right), & c_{i-1}^{(i)}(u) < 0. \end{cases}$$

единицы в первой и второй строке стоят на позициях под номером  $v$ , который является номером вершины на исходном графе  $G$ , для которой ставится в соответствие вершина  $y$ .

С каждой дугой  $u_{(l_1, l_2, \dots, l_n)}^{(k)}$  промежуточного вспомогательного графа  $G'_i$  свяжем величину

$$c^{(i)}(u_{(l_1, l_2, \dots, l_n)}^{(k)}) = \left( c_1^{(i-1)}(u), \dots, c_{i-1}^{(i-1)}(u), 0, c_{i+1}^{(i-1)}(u), \dots, c_m^{(i-1)}(u) \right).$$

Таким образом, взяв в качестве  $G'_0$  исходный граф  $G$ , в результате применения указанных правил получим граф  $G'_m$ , который и будет вспомогательным графом  $G'$  для нашей задачи о перераспределении ресурсов.

### 1.8.2 Условие разделения

Пусть дан взвешенный ориентированный граф для задачи о перераспределении  $m$  ресурсов. Возможность разделения задачи о перераспределении ресурсов показана на следующем примере:

#### Пример 1.20.

На рис.1.26. представлен граф для задачи о перераспределении двух ресурсов.

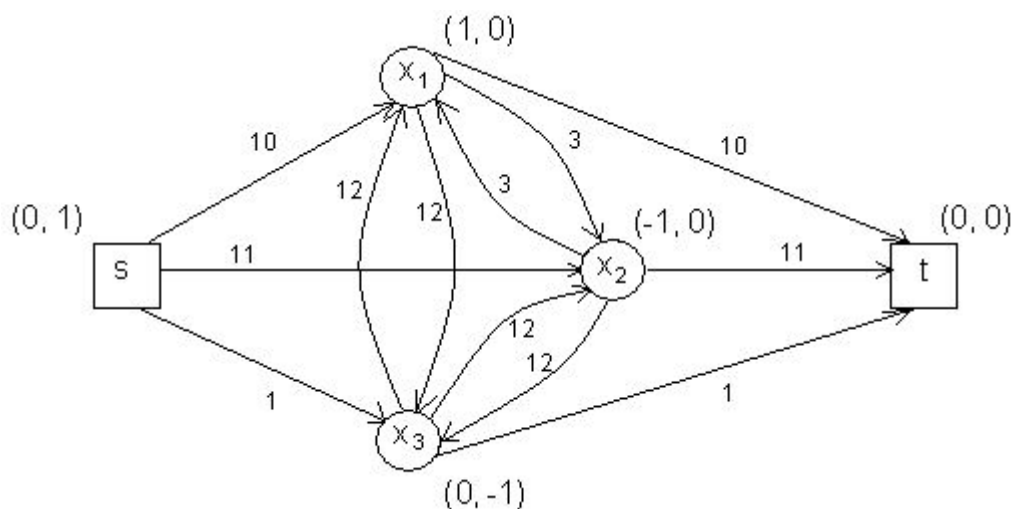


Рисунок 1.26 — Граф, соответствующий задаче с возможностью разделения.

Можно заметить, что задача разделяется на две задачи — для каждого ресурса в отдельности. При этом, оптимальным решением исходной задачи является пара путей, которые являются решениями отдельных задач:

$s \rightarrow 3 \rightarrow t$  длины 2 и  $s \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow t$  длины 24. Общая длина путей решения равна 26.

Однако если мы изменим веса всего одной пары дуг (соединяющих вершины 1 и 3), уменьшив их значения на две единицы, то исходная задача не может быть разделена, поскольку существует путь  $s \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow t$ , длина которого (25 единиц) меньше суммы длин путей  $s \rightarrow 3 \rightarrow t$  и  $s \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow t$ , которая равна 26 единиц.

**Определение 1.29.** Будем говорить, что задача о перераспределении ресурсов допускает возможность разделения, если для графа исходной задачи существует несколько подграфов таких, что совокупность

решений задачи о перераспределении на каждом подграфе является решением исходной задачи.

Рассмотрим всевозможные подмножества  $X'$  множества  $X \setminus \{s, t\}$ , для которых выполняется следующее соотношение:

$$\forall i \in [1; n]_Z \quad 0 \leq \sum_{x \in X'} b(x, q_i) - \sum_{x \in X'} a(x, q_i) \geq 0.$$

Каждое такое подмножество  $X'$  порождает разбиение множества вершин на три подмножества:  $X = \{s, t\} \cup X' \cup X''$ , где  $X'' = X \setminus (X' \cup \{s, t\})$ .

Такое разбиение множества вершин, в свою очередь, порождает разбиение множества дуг на пять подмножеств:  $U = U_1 \cup U_2 \cup U' \cup U'' \cup U_{12}$ , где

$U' = \{u \in U \mid f(u) \in X' \times X'\}$  – дуги внутри компоненты связности, построенной на вершинах множества  $X'$ ,

$U'' = \{u \in U \mid f(u) \in X'' \times X''\}$  – дуги внутри компоненты связности, построенной на вершинах множества  $X''$ ,

$U_{12} = \{u \in U \mid f(u) \in (X' \times X'') \cup (X'' \times X')\}$  – дуги, соединяющие только вершины двух множеств  $X'$  и  $X''$ ,

$U_1 = \{u \in U \mid f(u) \in (\{s\} \times X') \cup (X' \times \{t\})\}$  – дуги, соединяющие вершины  $s$  и  $t$ , с вершинами множества  $X'$ ,

$U_2 = \{u \in U \mid f(u) \in (\{s\} \times X'') \cup (X'' \times \{t\})\}$  – дуги, соединяющие вершины  $s$  и  $t$ , с вершинами множества  $X''$ .

По разбиениям множеств вершин и дуг исходного графа можно построить два подграфа  $G_1 (X' \cup \{s, t\}, U_1 \cup U', f|_{U_1 \cup U'})$  и  $G_2 (X'' \cup \{s, t\}, U_2 \cup U'', f|_{U_2 \cup U''})$ , для которых может быть рассмотрена задача о перераспределении ресурсов. Осталось определить, при каких условиях решение исходной задачи на графе  $G$  может быть представлено в виде совокупности решений задач на подграфах  $G_1$  и  $G_2$ .

Пусть  $A \in U$  – некоторое подмножество множества дуг. Обозначим через  $\bar{p}(A) = \frac{\sum_{u \in A} P(u)}{|A|}$  – средняя длина дуги во множестве  $A$ , а через  $p_{\min}(A) = \min_{u \in A} \{p(u)\}$  – минимальная длина дуги во множестве  $A$ .

Оценим сумму средних длин путей на подграфах  $G_1$  и  $G_2$ :

$$\bar{p}(G_1) = 2\bar{p}(U_1) + \bar{p}(U')A,$$

$$\bar{p}(G_2) = 2\bar{p}(U_2) + \bar{p}(U'')B,$$

где  $A$  и  $B$  – неизвестные, равные количеству дуг в путях перераспределения проходящих соответственно по подмножествам  $U'$  и  $U''$ .

Оценим среднюю длину пути перераспределения на исходном графе  $G$ :

$$\bar{p}(G) = \bar{p}(U_1) + \bar{p}(U')A + \bar{p}(U_{12}) + \bar{p}(U_2) + \bar{p}(U'')B.$$

Для того, чтобы задача о перераспределении ресурсов допускала возможность разделения на несколько задач меньшего размера необходимо выполнение условия:

$$\bar{p}(G_1) + \bar{p}(G_2) \leq \bar{p}(G),$$

Подставим выражения, найденные для левой и правой части

$$\begin{aligned} 2\bar{p}(U_1) + \bar{p}(U')A + 2\bar{p}(U_2) + \bar{p}(U'')B &\leq \\ &\leq \bar{p}(U_1) + \bar{p}(U')A + \bar{p}(U_{12}) + \bar{p}(U_2) + \bar{p}(U'')B \end{aligned}$$

или, что то же самое

$$\bar{p}(U_1) + \bar{p}(U_2) \leq \bar{p}(U_{12}).$$

Таким образом, получили условие для разделения задачи о перераспределении ресурсов.

Каждую из получившихся задач проверяем на делимость и, в конечном итоге, получим множество графов, для которых задача о перераспределении имеет решением только один путь, нахождение которого описано в предыдущем пункте. Множество всех этих путей является решением исходной задачи.

## Глава 2

# Случайные процессы и нестандартная достижимость

### 2.1 Случайные процессы, классическая постановка

Многие реальные системы можно характеризовать, выделяя различные состояния, в которых они могут находиться, и задавая их реакции на поступление произвольных входных воздействий при нахождении систем в любом заданном состоянии. Как правило, реакция системы проявляется в форме перехода из одного состояния в другое и формирования соответствующего выходного сигнала. Формализация данной идеи приводит к понятию математической машины ([3], [46]).

**Определение 2.1.** *Машина - есть математическая система, которая состоит из:*

*конечного множества  $S = s_1, \dots, s_n$  элементов, называемых состояниями;*

*конечного множества  $X = x_1, \dots, x_n$  элементов, называемых входами;*

*конечного множества  $Y = y_1, \dots, y_n$  элементов, называемых выходами;*

*функции перехода  $T'$ , которая отображает  $S \times X$  на  $S$ ;*

*функции выхода  $\Omega$ , которая отображает  $S \times Y$  на  $S$ .*

Если  $s \in S$  и  $x \in X$ , то  $s' = T'(s, x)$  интерпретируется как следующее состояние, в которое попадает машина из текущего состояния  $s$  при воздействии входного сигнала  $x$ . Аналогично,  $y = \Omega(s, x)$  есть выходной сигнал машины, находящейся в состоянии  $s$  при воздействии входного сигнала  $x$ . Множества  $X$  и  $Y$  называются, соответственно, входным и выходным алфавитом.

Машины, соответствующие данному определению, можно классифи-



цировать по нескольким признакам. Во-первых, они являются детерминированными, так как их выходной сигнал и следующее состояние полностью определяется входным сигналом и текущим состоянием. Далее, такие машины являются последовательными, так как переходы осуществляются в дискретные моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ , а не непрерывно. Они являются полными, т.е. каждая комбинация состояния и входного сигнала имеет смысл и дает известный выходной сигнал и новое состояние. Они не имеют памяти в том смысле, что текущий выход и следующее состояние не зависят от прошлых входов, состояний и выходов. Наконец, они стационарны в том смысле, что функция переходов  $T'$  и функция выхода  $\Omega$  не зависят от рассматриваемого момента времени.

Иногда машину удобно изображать ориентированным графом, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги характеризуют  $X, Y, T'$  и  $\Omega$ .

Идея Марковской цепи в некотором смысле является вероятностным аналогом абстрактных детерминированных машин.

Приведем некоторые необходимые определения ([46], [96]).

**Определение 2.2.** *Набор  $\xi = \{\xi(t) | t \in T\}$  случайных величин  $\xi(t)$ , определенных на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, S, T)$ , называется случайной функцией. Если параметр  $t$  играет роль времени, т.е.  $T \subset \mathbf{R}$ , то такую случайную величину называют случайным процессом.*

**Определение 2.3.** *Процесс  $\xi = \{\xi(t) | t \in T\}$  у которого множество  $T$  не более чем счетно, называют процессом с дискретным временем. Как правило, в этом случае множество  $T$  совпадает с множеством целых чисел или частью этого множества.*

Рассмотрим последовательность  $\{\xi_n\}$  случайных величин, представляющую собой случайный процесс с дискретным временем.

Предположим, что каждая случайная величина  $\xi_n$  принимает значения из множества  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ , и рассмотрим следующий простой вид

зависимости случайной величины из последовательности  $\{\xi_n\}$ : распределение случайной величины  $\xi_n$  может зависеть от значения, которое принимает случайная величина  $\xi_{n-1}$ , и не зависит от значений, принимаемых предшествующими случайными величинами. Образно говоря, при фиксированном настоящем, будущее не зависит от прошлого.

Формально это означает следующее:

$$P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n, \dots, \xi_1 = i_1\} = P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n\} \quad (2.1)$$

**Определение 2.4.** Последовательность  $\{\xi_n\}$  случайных величин, удовлетворяющих (2.1) называется цепью Маркова с дискретным временем. Такая цепь называется однородной (относительно времени), если  $\forall i, j \in E$  вероятность  $P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\} = p_{ij}$  не зависит от времени.

Эволюция однородной цепи Маркова  $\{\xi_n\}$  определяется:

а) начальным распределением случайной величины  $\xi_1$ , т.е. набором чисел,

б) матрицей  $\{p_{i,j}\}$  переходных вероятностей за один шаг.

При этом множество  $E$  называется множеством состояний (фазовым пространством) цепи, а вероятность - вероятностью перехода из состояния  $i \in E$  в состояние  $j \in E$  за  $n$  шагов. В частности,  $p'_{ij} = p_{ij}$ . Из (2.1) следует, что выполняется соотношение:

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_k p_{ik}^n p_{kj}^m \quad (2.2)$$

называемое уравнением Колмогорова-Чепмена.

**Замечание 2.1.** В качестве фазового пространства  $E$  берется минимальное множество состояний. Это означает, что для всякого  $i \in E$  существуют  $j \in E$  и «время»  $n \geq 1$  такие, что  $p_{ij} > 0$  (иначе это означало бы, что существует состояние  $j$ , в которое нельзя перейти за любое время  $n$ , стартуя из любого состояния  $i$ ).

Идея однородной Марковской цепи с дискретным временем в некото-

ром смысле является вероятностным аналогом абстрактных детерминированных машин. Здесь снова имеем систему, которая имеет конечное число состояний и изменяет состояния в дискретные моменты времени. Однако при этом переходы не зависят от управляемых входов, а определяются распределениями вероятностей. Выходные переменные в данном случае отсутствуют.

Цепь Маркова формально можно определить как систему, которая состоит из:

конечного множества  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  элементов, называемых состояниями;  $n \times n$  - матрицы переходов  $P = \{p_{ij}\}$ , где  $p_{ij}$  - вероятность того, что в следующий момент наблюдения система будет находиться в состоянии  $s_j$  при условии, что в текущий момент она находится в состоянии  $s_i$ .

Конечно, требуется, чтобы выполнялось соотношение:

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (2.3)$$

Цепи Маркова соответствует ориентированный граф. Вершины графа соответствуют состояниям цепи. Каждой дуге из  $s_i$  в  $s_j$  поставлено в соответствие число  $p_{ij}$  в случае  $p_{ij} > 0$  (т.е. в случае, когда возможен одношаговый переход из  $s_i$  в  $s_j$ ). Далее под цепью Маркова будем понимать граф, соответствующий некоторой цепи Маркова.

Цепь Маркова с пятью состояниями показана на рис.2.1. Если текущее состояние системы  $s_2$ , то она переходит в состояние  $s_3$ ,  $s_5$  или остается в  $s_2$  с вероятностями 0,2, 0,3 и 0,5 соответственно. Другие дуги интерпретируются аналогично.

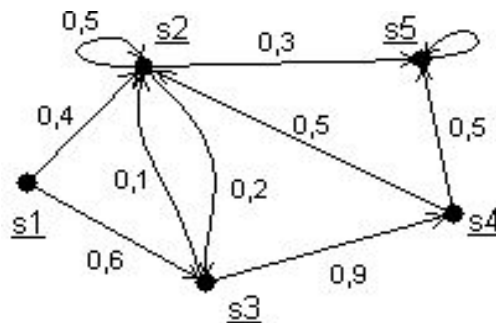


Рисунок 2.1 — Пример цепи Маркова с пятью состояниями.

## 2.2 Случайные процессы на графах с магнитными достижениями

### 2.2.1 Случайные процессы на графах с магнитно-накопительной достижимостью

Рассмотрим процесс случайного блуждания частицы по вершинам графа  $G$  с условием неубывающей магнитности порядка  $k$  такой, что при прохождении по дуге множества  $U_M$  частица увеличивает свой уровень (величину) магнитности и при достижении некоторого порогового значения уровень магнитности частицы больше не увеличивается, но следующий переход частица, в случае, если есть выходящие дуги множества  $U_M$ , делает только по дуге множества  $U_M$ . Будем считать, что увеличение уровня магнитности частицы происходит одинаковыми порциями, равными  $\frac{1}{k}$ , а пороговое значение для уровня магнитности равно единице. Кроме того, будем считать, что чем больше величина накопленной магнитности частицы, тем больше вероятность следующего перехода по дугам множества  $U_M$  и меньше вероятность следующего перехода по дугам множества  $U_H$ .

Отметим, что частица движется на графе  $G$  только по магнитно-накопительным путям порядка  $k$ .

Рассматриваемый процесс не является марковским, поскольку из-за условия магнитности, следующий переход определяется не только вероятностями перехода по дугам, но и некоторой памятью о проделанном частицей пути. Более того, рассматриваемый случайный процесс таков, что вероятности переходов из некоторого состояния меняются в зависимости от уровня магнитности частицы, находящейся в данном состоянии.

#### Пример 2.1.

Рассмотрим граф  $G$  с условием неубывающей магнитности порядка  $k = 2$  на рис.2.2, дуги  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (1, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 1)$ .

Будем считать, что вероятности перехода по дугам равны  $P(u_1) = 0,8$ ,  $P(u_2) = 1$ ,  $P(u_3) = 0,2$  и  $P(u_4) = 1$ .

Также полагаем, что  $U_M = \{u_2, u_3, u_4\}$  и  $U_H = \{u_1\}$ .

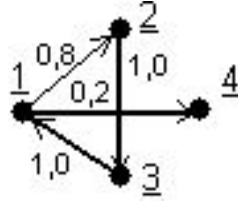


Рисунок 2.2 — Граф  $G$  с условием неубывающей магнитности порядка 2.

Рассмотрим путь  $\mu = \{u_1, u_2, u_4\}$  (в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ) и рассмотрим вероятности перехода из вершины 1 в начале и конце пути. В начале пути (поскольку величина магнитности равна нулю) вероятности переходов из вершины 1 равны:  $P(u_1) = 0,8$  и  $P(u_3) = 0,2$ . В конце пути величина магнитности равна  $k = 2$  и, значит, следующий переход из вершины 1 по дуге  $u_1$  невозможен, поскольку дуга  $u_1 \in U_H$ . Отсюда следует, что вероятность следующего перехода по дуге  $u_1$  равна нулю и, соответственно, вероятность следующего перехода по дуге  $u_3 (\in U_M)$  равна единице.

Применим подход, предложенный для решения задачи о достижимости на графах с условием неубывающей магнитности (1.2) с некоторым дополнением, касающемся вероятностей перехода по дугам  $\{u^{(i)}\}$  вспомогательного графа, соответствующим дуге  $u$  исходного графа  $G$ :

а) Если  $u \in U_M$  (для определённости полагаем  $f(u) = (x, y)$ ), то вероятности соответствующих дуг  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k)}\}$  определяем по следующему правилу:

$$P(u^{(k)}) = \frac{P(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U_M} P(v)},$$

$$P(u^{(i)}) = \begin{cases} P(u), & [x]^+ \cap U_H = \emptyset; \\ g(i) \cdot \frac{P(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U_M} P(v)}, & [x]^+ \cap U_H \neq \emptyset, \quad \forall i \in [0; k-1]_{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

б). Если  $u \in U_H$  (для определённости полагаем  $f(u) = (x, y)$ ), то вероятности соответствующих дуг  $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  определяем по следующему

правилу:

$$P(u^{(i)}) = \begin{cases} P(u), & [x]^+ \cap U_M = \emptyset; \\ h(i) \cdot \frac{P(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v)}, & [x]^+ \cap U_M \neq \emptyset, \quad \forall i \in [0; k-1]_Z, \end{cases}$$

и если  $[x]^+ \cap U_M \neq \emptyset$ , то  $P(u^{(k)}) = P(u)$ . При этом, величины  $g(i)$  и  $h(i)$  вычисляются следующим образом:

$$g(i) = \frac{i}{k} \cdot \sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v) + \sum_{v \in [x]^+ \cap U_M} P(v),$$

$$h(i) = \left(1 - \frac{i}{k}\right) \cdot \sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v).$$

Отметим, что исходный случайный процесс зависел от двух параметров: первый — это вероятности переходов частицы из каждого состояния, второй — это величина накопленной магнитности частицы.

Поскольку от величины накопленной магнитности зависит вероятность перехода по каждой дуге, следовательно, рассматриваемый процесс на графе с условием неубывающей магнитности не является марковским процессом (однородным). При этом, на вспомогательном графе случайный процесс зависит только от одного параметра (вероятностей переходов по дугам), но за счет увеличения количества состояний.

**Теорема 2.1.** *После такого перестроения процесс на вспомогательном графе  $G'$  является марковским и имеет место равенство:*

$$P_M(G, x, y, t) = \sum_{j=0}^k P(G', x^{(0)}, y^{(j)}, t),$$

где  $P_M(G, x, y, t)$  — вероятность перехода из вершины  $x$  в вершину  $y$  за  $t$  шагов на графе  $G$  с условием неубывающей магнитности,  $P(G', x^{(0)}, y^{(j)}, t)$  — вероятность перехода из вершины  $x^{(0)}$  в вершину  $y^{(j)}$  за  $t$  шагов на вспомогательном графе  $G'$ .

Доказательство следует из доказательства теоремы 1.1 и правил определения вероятностей перехода по дугам вспомогательного графа.

**Замечание 2.2.** Все рассуждения при решении задачи о случайном блуждании были проведены для условия неубывающей магнитности. Для других условий магнитной достижимости решение задачи о случайном блуждании аналогично.

### 2.2.2 Случайные процессы на орграфах с накоплением двух типов магнитности разной полярности

В данном разделе будем рассматривать два вида магнитности: положительная и отрицательная, т.е. полагаем, что множество дуг графа  $G(X, U, f)$  разбито на три подмножества:  $U = U_+ \cup U_- \cup U_H$ ,  $U_+ \cap U_- = \emptyset$ ,  $U_+ \cap U_H = \emptyset$  и  $U_- \cap U_H = \emptyset$ .

Рассмотрим случайный процесс блуждания частицы по вершинам такого графа. При этом, будем полагать, что величина магнитности  $\tilde{\lambda}$  частицы принимает значения на отрезке  $[-1; 1]$ . Прохождение по любой дуге множества  $U_+$  увеличивает величину  $\tilde{\lambda}$  на значение  $\frac{1}{k}$ , но максимумом увеличения является значение 1. Прохождение по любой дуге  $U_-$  уменьшает величину  $\tilde{\lambda}$  на значение  $\frac{1}{k}$ , но минимумом уменьшения является значение  $-1$ . Прохождение по любой дуге множества  $U_H$  не меняет величину  $\tilde{\lambda}$ . Таким образом, если частица перемещается вдоль некоторого пути  $\mu$ , то формально изменение величины  $\tilde{\lambda}$  можно записать следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(i) = \begin{cases} \tilde{\lambda}(i-1) + \frac{1}{k}, & \mu(i) \in U_+; \\ \tilde{\lambda}(i-1), & \mu(i) \in U_H; \\ \tilde{\lambda}(i-1) - \frac{1}{k}, & \mu(i) \in U_-. \end{cases} \quad \forall i \in [1; |\mu|]_Z. \quad (2.4)$$

Положим в (2.4) начальное значение величины  $\tilde{\lambda}$  для любого пути перемещения частицы равным  $\tilde{\lambda}(0) = 0$ .

Также будем считать, что чем больше значение  $\tilde{\lambda}$ , тем больше вероятность следующего перехода по дугам множества  $U_-$  и меньше вероятности перехода по дугам множества  $U_+$ ; и наоборот, чем меньше значение  $\tilde{\lambda}$ , тем больше вероятность следующего перехода по дугам множества  $U_+$  и меньше вероятности перехода по дугам множества  $U_-$ . Также чем больше абсолютная величина магнитности  $|\tilde{\lambda}|$ , тем меньше вероятности перехода по дугам множества  $U_H$ . Кроме того,

1. если  $\tilde{\lambda}(i) = 1$  и есть возможность в следующего перехода по дуге множества  $U_-$ , то следующий переход частица делает только по дуге множества  $U_-$ ;

2. если  $\tilde{\lambda}(i) = -1$  и есть возможность в следующего перехода по дуге множества  $U_+$ , то следующий переход частица делает только по дуге множества  $U_+$ ;

Данный случай является некоторым обобщением задачи о случайных блужданиях частицы по вершинам графа с магнитной достижимостью с возрастанием-убыванием магнитности порядка  $(k, k)$ .

Рассматриваемый процесс также не является марковским, поскольку из-за условия магнитности следующий переход определяется не только вероятностями перехода по дугам, но и некоторой памятью о проделанном частицей пути. При поставленном условии магнитности вероятность перехода из некоторого состояния меняется в зависимости от магнитности частицы, находящейся в данном состоянии.

Для сведения его к марковскому процессу предлагаем тот же подход.

### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $2k + 1$  вершина  $\{x^{(-k)}, \dots, x^{(k)}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дугам исходного графа  $G$  ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа  $G'$  по следующему правилу:

1. каждой дуге  $u \cap U_+$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на  $G'$  ставится в соответствие

а)  $2k$  дуг  $\{u^{(-k)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  таких, что  $f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j+1)}) \quad \forall j \in [-k; k-1]_{\mathbb{Z}}$ .

б) если  $[x]^+ \cap (U_H \cup U_-) = \emptyset$ , то к построенному множеству  $\{u^{(-k)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  добавляется ещё одна дуга  $u^{(k)}$  такая, что  $f'(u^{(k)}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$ .

2. каждой дуге  $u \in U_-$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на графе  $G'$  ставится в соответствие

а)  $2k$  дуг  $\{u^{(-k+1)}, \dots, u^{(k)}\}$  на графе  $G'$  таких, что

$$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j-1)}) \quad \forall j \in [-k+1; k]_{\mathbb{Z}}.$$



б) если  $[x]^+(x) \cap (U_H \cup U_+) = \emptyset$ , то к построенному множеству  $\{u^{(-k+1)}, \dots, u^{(k)}\}$  добавляется ещё одна дуга  $u^{(-k)}$  такая, что  $f'(u^{(-k)}) = (x^{(-k)}, y^{(-k)})$ .

3. каждой дуге  $u \in U_H$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) на графе  $G'$  ставится в соответствие

а)  $2k - 1$  дуга  $\{u^{(-k+1)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  на графе  $G'$  такая, что

$$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j)}) \quad \forall j \in [-k + 1; k - 1]_Z.$$

б) если  $[x]^+ \cap U_+ = \emptyset$ , то к построенному множеству  $\{u^{(-k+1)}, \dots, u^{(k-1)}\}$  добавляется ещё одна дуга  $u^{(-k)}$ ,  $f'(u^{(-k)}) = (x^{(-k)}, y^{(-k)})$ .

в) если  $[x]^+ \cap U_- = \emptyset$ , то к построенному в пункте 3.б множеству добавляется ещё одна дуга  $u^{(k)}$  такая, что  $f'(u^{(k)}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$ .

При этом вероятности перехода по дугам вспомогательного графа определяются по следующим правилам:

1. для дуг вспомогательного графа, соответствующих дуге  $u \in U_+$  (положим для определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$ ):

а) если  $[x]^+ \cap (U_H \cup U_-) \neq \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = \left( \frac{1 - 2 \cdot \sum_{v \in [x]^+ \cap U_+} P(v)}{2 \cdot k^2} \cdot j^2 - \frac{j}{2k} + \sum_{v \in [x]^+ \cap U_+} P(v) \right) \times \\ \times \frac{P(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U_+} P(v)}, \quad \forall j \in [-k; k - 1]_Z;$$

б) если  $[x]^+ \cap (U_H \cup U_-) = \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = P(u), \quad \forall j \in [-k; k]_Z.$$

2. для дуг вспомогательного графа, соответствующих дуге  $u \in U_-$  (положим для определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$ ):

а) если  $[x]^+ \cap (U_H \cup U_+) \neq \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = \left( \frac{1 - 2 \cdot \sum_{v \in [x]^+ \cap U_-} P(v)}{2 \cdot k^2} \cdot j^2 + \frac{j}{2k} + \sum_{v \in [x]^+ \cap U_-} P(v) \right) \times \\ \times \frac{P(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U_-} P(v)}, \quad \forall j \in [-k+1; k]_Z;$$

б) если  $[x]^+ \cap (U_H \cup U_+) = \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = P(u), \quad \forall j \in [-k; k]_Z.$$

3. для дуг вспомогательного графа, соответствующих дуге  $u \in U_H$  (положим для определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$ ):

а) если  $[x]^+ \cap U_+ = \emptyset$  и  $[x]^+ \cap U_- = \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = P(u), \quad \forall j \in [-k; k]_Z;$$

б) если  $[x]^+ \cap U_+ \neq \emptyset$  и  $[x]^+ \cap U_- = \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = \left( \frac{1 - 2 \cdot \sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v)}{2 \cdot k^2} \cdot j^2 - \frac{j}{2k} + \sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v) \right) \times \\ \times \frac{P(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v)}, \quad \forall j \in [-k+1; k]_Z;$$

в) если  $[x]^+ \cap U_+ = \emptyset$  и  $[x]^+ \cap U_- \neq \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = \left( \frac{1 - 2 \cdot \sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v)}{2 \cdot k^2} \cdot j^2 + \frac{j}{2k} + \sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v) \right) \times \\ \times \frac{P(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U_H} P(v)}, \quad \forall j \in [-k; k+1]_Z;$$

г) если  $[x]^+ \cap U_+ \neq \emptyset$  и  $[x]^+ \cap U_- \neq \emptyset$ , то

$$P(u^{(j)}) = \left( 1 - \frac{j^2}{2 \cdot k^2} \right) \cdot P(u), \quad \forall j \in [-k+1; k-1]_Z.$$

## 2.3 Туннельная проводимость твердокристаллической решетки

Пусть некоторая кристаллическая решётка бомбардируется частицами. Вследствие такой бомбардировки возникают случайные блуждания частиц между узлами решётки. Рассмотрим задачу нахождения вероятности прохождения частицы сквозь решетку.

Отметим, что при движении внутри кристаллической решетки частица с каждым переходом теряет некоторую часть кинетической энергии и при достаточно большой толщине пластинки «застревает» внутри неё. Для удобства будем считать, что некоторая часть  $V(g)$  структуры кристаллической решетки повторяется с некоторым периодом. В таком случае процесс случайного блуждания частицы между узлами решётки можно рассматривать на некотором цилиндре. Последнее означает, что вместо бесконечных графов будем рассматривать только конечные.

Для примера рассмотрим граф  $G$  на рис.2.3, соответствующий некоторой кристаллической решётке. Будем считать, что рассматриваемый граф  $G$  является графом с условием неубывающей магнитности порядка  $k = 2$ , при этом, на рис.2.3 тонкие линии — это дуги множества  $U_H$ , остальные — дуги множества  $U_M$ .

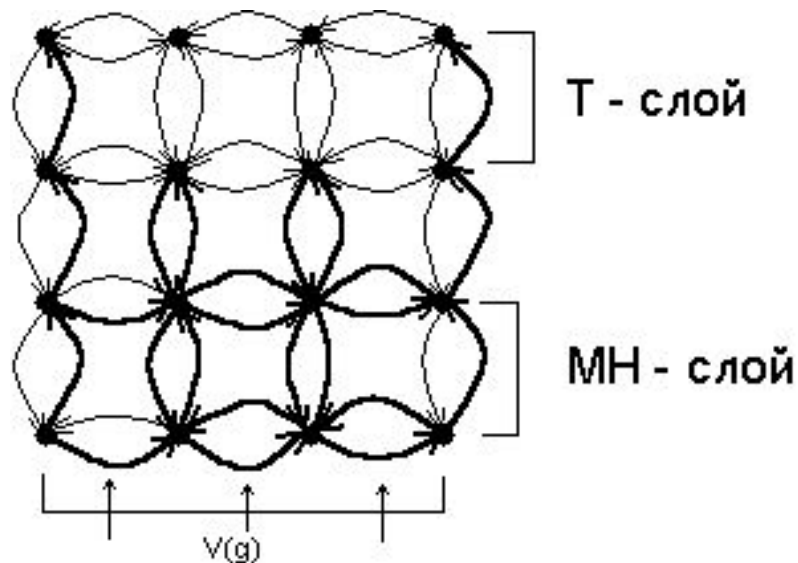


Рисунок 2.3 — Граф, соответствующий кристаллической решетке.

Отметим, что граф  $G$  условно разбит на две части: магнитно-накопи-

тельный (МН) слой, в котором преобладают дуги множества  $U_M$ , и туннельный (Т) слой, в котором дуги множества  $U_M$  расположены только таким образом, чтобы образовывать кратчайшие пути (туннели) от первого уровня Т-слоя (расположен внутри решётки) до последнего уровня Т-слоя (верхний уровень решётки). Также будем считать, что количество уровней МН-слоя не меньше чем порядок магнитности  $k$ .

Полагая переходы по всем дугам графа  $G$  равновероятными, найдём процентное соотношение частиц прошедших решётку насквозь при условии неубывающей магнитности и без ограничений на достижимость. Последнее означает, что нам нужно найти вероятности движения по путям, содержащим не более заданного числа дуг, начальные вершины которых принадлежат нижнему уровню решётки (первому уровню МН-слоя), а конечные вершины — верхнему уровню решётки (последнему уровню Т-слоя).

Для рассматриваемого графа  $G$  при максимальном количестве дуг пути равном трем вероятность равна 0,039525 — без ограничений на достижимость и 0,095149 — при условии неубывающей магнитности порядка  $k = 2$ . При максимальном количестве дуг пути равном десяти вероятность равна 0,178480 — без ограничений на достижимость и 0,424959 — при условии неубывающей магнитности порядка  $k = 2$ .

Таким образом, проведённый вычислительный эксперимент для графа  $G$  показывает, что заданием разбиения множества дуг графа на магнитное и немагнитное подмножества, можно как увеличивать, так и уменьшать итоговую вероятность прохождения частицы сквозь решётку. Такие решётки мы называем соответственно «ускоряющими» и «замедляющими».

Отметим, что для ускоряющих решёток все входящие в начальные вершины туннелей дуги являются дугами множества  $U_M$ .

Кроме того, можно построить такую ситуацию, что решётка станет «абсолютно непронускающей», когда все частицы в ней застревают. Такая ситуация возможна в случае, если нет ни одного магнитно-накопительного пути от первого уровня МН-слоя до первого уровня Т-слоя. Эта ситуация может возникнуть только в том случае, если в начальные вершины туннелей не входит ни одной магнитной дуги.

## 2.4 Случайные процессы на графах с механической достижимостью

Рассмотрим случайный процесс блуждания частицы по вершинам графа с механической достижимостью такой, что при прохождении по дуге множества  $U_-$  частица увеличивает свой уровень (величину) «энергии», равную модулю величины наклона дуги  $u$ . Частица получает право проходить по некоторой дуге множества  $U_+$  только в том случае, если накопленная величина энергии больше чем величина наклона данной дуги. При прохождении по дуге  $u \in U_+$  частица теряет энергию равную величине наклона дуги  $u$ . При этом, если частица сделала последний переход по дуге множества  $U_+$ , то следующий переход она обязана сделать только по дуге множества  $U_+$ . Однако, в тех случаях, если из конечной вершины последней пройденной дуги  $u$  не выходят дуги множества  $U_+$  или энергия частицы меньше величин наклона каждой дуги множества  $U_+$ , выходящих из конечной вершины дуги  $u$ , то частица получает право сделать следующий переход по дуге множества  $U_- \cup U_H$ . Таким образом, можно заметить, что частица движется только по возможным траекториям.

Рассматриваемый процесс также не является марковским, поскольку из-за условия механической достижимости, следующий переход определяется не только вероятностями перехода по дугам, но и некоторой памятью о проделанном частицей пути.

### Пример 2.2.

Рассмотрим граф с условием механической достижимости на рис.2.4, дуги  $\{u_0, \dots, u_4\}$  которого таковы, что  $f(u_0) = (0, 1)$ ,  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (1, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 1)$ .

Вероятности перехода по дугам задаём следующим образом:  $P(u_0) = 1$ ,  $P(u_1) = 0,8$ ,  $P(u_2) = 1$ ,  $P(u_3) = 0,2$  и  $P(u_4) = 1$ .

Полагаем  $U_- = \{u_0, u_1\}$ ,  $U_H = \{u_2\}$  и  $U_+ = \{u_3, u_4\}$ . При этом, считаем, что наклоны дуг заданы следующим образом:  $g(u_0) = -4$ ,  $g(u_1) = 1$ ,  $g(u_2) = 0$ ,  $g(u_3) = -3$  и  $g(u_4) = 1$ .

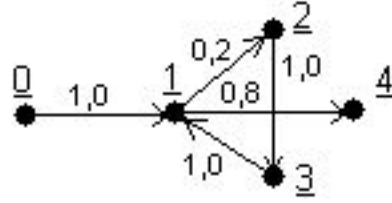


Рисунок 2.4 — Граф с условием механической достижимости.

Рассмотрим путь  $\mu = \{u_0, u_1, u_2, u_4\}$  (в виде последовательности вершин -  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ) и найдём вероятности перехода из вершины 1 в начале и конце пути. В начале пути вероятности перехода из вершины 1 равны:  $P(u_1) = 1$  и  $P(u_3) = 0$ , поскольку после прохождения дуги  $u_0 \in U_-$ , дуга  $u_3 \in U_-$  не удовлетворяет условию (1.7). В конце пути  $\mu$  переход из вершины 1 по дуге  $u_1$  невозможен, поскольку теперь она не удовлетворяет условию (1.7), следовательно, вероятность перехода по ней (в данный момент) равна нулю и соответственно вероятность перехода по оставшейся дуге  $u_3 (\in U_+)$  равна единице.

Для сведения рассматриваемого случайного процесса блуждания частицы к марковскому процессу на вспомогательном графе применим подход, описанный для задачи о достижимости, с некоторым дополнением, касающемся вероятностей перехода по дугам, выходящим из вершин множеств  $X^{(j)}$ ,  $-n_1 \leq j \leq n_2 - 1$ .

Вероятности перехода по дугам вспомогательного графа определяются по следующим правилам:

1. для дуг вспомогательного графа, соответствующих дуге  $u \in U_+$  (положим для определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$ ):

$$P(u^{(j)}) = \frac{P(u)}{\sum_{v \in W_+(j)} P(v)} \quad \forall j \in [g(u); n_2 - 1]_Z,$$

где  $W_+(j) = \{u \in U_+ \mid g(u) \geq j\}$ ;

2. для дуг вспомогательного графа, соответствующих дуге  $u \in U_-$  (положим для определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$ ):

$$P(u^{(j)}) = \frac{P(u)}{\sum_{v \in U_H \cup W_-(j)} P(v)} \quad \forall j \in [-n_1 - g(u); 0]_Z,$$

где  $W_-(j) = \{u \in U_- \mid g(u) \leq j\}$

3. для дуг вспомогательного графа, соответствующих дуге  $u \in U_H$  (положим для определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$ ):

$$P(u^{(j)}) = \frac{P(u)}{\sum_{v \in U_H \cup W_-(j)} P(v)} \quad \forall j \in [-n_1 - g(u); 0]_Z.$$

Кроме этого, считаем вероятность перехода по всем дополнительно построенным дугам равной единице.

**Теорема 2.2.** *После такого построения процесс на вспомогательном графе  $G'$  является Марковским и имеет место равенство:*

$$P_{Me}(G, x, y, t) = \sum_{j=0}^k P(G', x^{(0)}, y^{(j)}, t).$$

## 2.5 Случайные процессы на графах с условием вентиляльной достижимости

### 2.5.1 Случайные процессы на графах с условием вентиляльно-накопительной достижимости

Рассмотрим случайный процесс блуждания частицы по вершинам графа с условием вентиляльной достижимости такой, что следующий свой переход по дугам множества  $U_1$  частица может совершить только в том случае, если ранее был совершён переход по дуге множества  $U_0$ , по дугам множества  $U_2$  возможен переход, только если ранее был переход по дуге множества  $U_1$  и т.д. Таким образом, можно заметить, что частица движется только по вентиляльно-накопительным путям.

Рассматриваемый процесс и в этом случае не является марковским, поскольку из-за условия вентиляльной достижимости (1.8) следующий переход определяется не только вероятностями перехода по дугам, но и некоторой памятью о проделанном частицей пути. При условии (1.8) вероятность перехода из некоторого состояния меняется в зависимости от величины  $\rho_\mu$ , где  $\mu$  — путь проделанный частицей, находящейся в данном состоянии.

### Пример 2.3.

Рассмотрим граф с условием вентильно-накопительной достижимости порядка  $k = 1$  на рис.2.5, дуги  $\{u_1, \dots, u_4\}$  таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 3)$ ,  $f(u_3) = (1, 4)$  и  $f(u_4) = (3, 1)$ .

Будем считать, что вероятности перехода по дугам заданы следующим образом:  $P(u_1) = 0, 2$ ,  $P(u_2) = 1$ ,  $P(u_3) = 0, 8$ ,  $P(u_4) = 1$ .

Положим  $U_0 = \{u_1\}$  и  $U_1 = \{u_2, u_3, u_4\}$ .

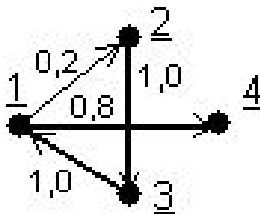


Рисунок 2.5 — Граф с условием вентильно-накопительной достижимости.

Рассмотрим путь  $\mu = \{u_1, u_2, u_4\}$  (в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ) и рассмотрим вероятности перехода из вершины 1 в начале и конце пути. В начале пути величина  $\delta_\mu(0) = 0$ , что запрещает переход по дуге  $u_3$ , поскольку дуга  $u_3 \in U_1$ . Отсюда следует, что вероятность перехода по дуге  $u_3$  (в начале пути  $\mu$ ) равна нулю и, значит, вероятность перехода по дуге  $u_1 \in U_0$  равна единице. В конце пути величина  $\delta_\mu(3) = 2$ , следовательно, следующий переход из вершины 1 возможен по любой выходящей из нее дуге, т.е. вероятности перехода из вершины 1 (в конце пути  $\mu$ ) равны:  $P(u_1) = 0, 2$  и  $P(u_3) = 0, 8$ .

Для сведения рассматриваемого случайного процесса блуждания частицы к марковскому процессу на вспомогательном графе применим подход, описанный для задачи о кратчайших путях на графах с вентильной достижимостью, с некоторым дополнением, касающемся вероятностей перехода по дугам вспомогательного графа.

Вероятности перехода по дугам вспомогательного графа определяются по следующему правилу:

для каждого номера  $i \in [0; k]_Z$  и каждой дуги  $u \in U_i$  (положим для



определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$

$$P(u^{(j)}) = \frac{P(u)}{\sum_{v \in (\bigcup_{l=i}^k U_l) \cap [x]^+} P(v)} \quad \forall j \in [i; k]_Z.$$

**Теорема 2.3.** *После такого построения процесс на вспомогательном графе  $G'$  является Марковским и имеет место равенство, аналогичное рассмотренному равенству для графов с магнитной достижимостью:*

$$P_B(G, x, y, t) = \sum_{j=0}^k P(G', x^{(0)}, y^{(j)}, t).$$

**Замечание 2.3.** *Все рассуждения при решении задачи о случайном блуждании были проведены для условия вентиляльно-накопительной достижимости. Для условия вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием доступа решение задачи о случайном блуждании аналогично.*

**Замечание 2.4.** *Аналогично туннельной проводимости кристаллической решётки при условии магнитной достижимости (2.3) существует туннельная проводимость кристаллической решётки для условия вентиляльной достижимости. Отличие состоит в том, что в данном случае решётка может быть однослойной, состоящей только из туннельного слоя. При этом, дуги множества  $U_0$  образуют кратчайшие пути (туннели) от начала кристаллической решётки до ее конца.*

#### **Пример 2.4.**

Рассмотрим граф  $G$ , соответствующий кристаллической решётке, которая имеет структуру, показанную на рис.2.6. Будем считать, что граф  $G$  является графом с условием вентиляльно-накопительной достижимости порядка  $k = 2$ . При этом, на рис.2.6 штриховые линии — дуги множества  $U_0$ , двойные — дуги множества  $U_2$ , остальные — дуги множества  $U_1$ .

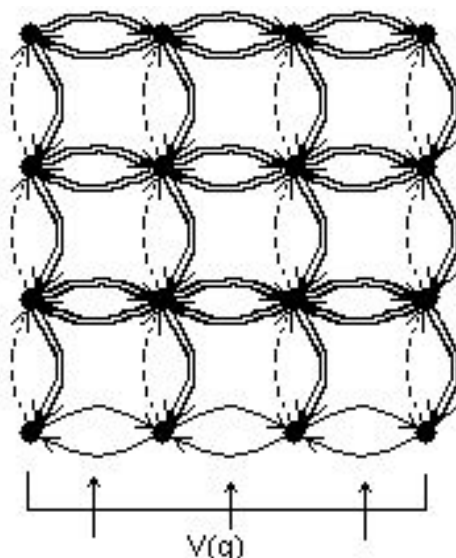


Рисунок 2.6 — Граф, соответствующий кристаллической решетке.

Данная кристаллическая решетка является «ускоряющей» и вероятность прохождения частицы через нее за  $t (\geq 3)$  шагов равна единице.

Изменяя структуру (наборы множеств  $U_0, U_1, U_2$ ) можем также получить и «абсолютно не пропускающие» кристаллические решетки, например, положив все дуги выходящие из начальных вершин решетки принадлежащими множеству  $U_2$ .

### 2.5.2 Случайные процессы на графах с условием вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути

Рассмотрим случайный процесс блуждания частицы по вершинам графа с условием вентиляльной достижимости с возрастанием-убыванием энергии на пути (1.11) такой, что при прохождении через вершину  $x \in X_i$  частица увеличивает свой уровень энергии  $i$ -того типа, необходимой для прохождения по дугам множества  $U_i$ . Будем считать, что максимальный уровень энергии  $i$ -того типа равен  $\sigma^*(i) \in \mathbf{N}$ . Также, при прохождении по дуге множества  $U_i$  частица теряет часть энергии  $i$ -того типа. Полагаем величину потери равной  $\sigma(i) \in \mathbf{N}$ . Кроме того, частица может совершить следующий переход по дуге множества  $U_1$  только в том случае, если ранее был совершён переход по дуге множества  $U_0$  и уровень накопленной энергии первого типа не меньше величины  $\sigma(1)$ . Для перехода по дуге множества  $U_2$  необходимо, чтобы ранее был совершён переход по дуге множества

$U_1$  и уровень накопленной энергии второго типа не меньше чем величина  $\sigma(2)$ ; и т.д. Таким образом, можно отметить, что частица движется только по вентиляльным путям с накоплением энергии.

Рассматриваемый процесс и в данном случае не является марковским, поскольку вероятность следующего перехода меняется в зависимости от величин  $\rho_\mu$  и  $\zeta_\mu^r$ , где  $\mu$  — начальный путь проделанный частицей до текущего состояния.

Для сведения рассматриваемого случайного процесса блуждания частицы к марковскому процессу на вспомогательном графе применим тот же самый подход с дополнением, касающемся вероятностей перехода по дугам.

Вероятности перехода по дугам вспомогательного графа определяются по следующему правилу:

для каждой пары номеров  $i, j \in [0; k]_Z$ , каждой дуги  $u \in U_i$  (положим для определённости  $x = (p_1 \circ f)(u)$ ) и каждого номера  $\alpha \in [0; k]_Z \setminus \{j\}$

$$P(u(i_1, \dots, i_j, \dots, i_k, l)) = \frac{P(u)}{\sum_{v \in U^j \cap [x]^+} P(v)}$$

$$\forall l \in [i; k]_Z, \forall i_\alpha \in [0; \sigma^*(\alpha)]_Z, \forall i_j \in [0; \sigma^*(j) - \sigma(j)]_Z,$$

где  $U^j = \left( \bigcup_{\substack{p=1 \\ i_p \geq \sigma(p)}}^j U_p \right) \cup U_0$ .

После такого построения вспомогательного графа  $G'$  имеет место теорема 2.3.

## Глава 3

# Стационарное распределение на графах

### 3.1 Основные понятия и определения

Приведем некоторые понятия и определения, требующиеся для дальнейшего изложения (см. [9], [46], [96]).

**Определение 3.1.** *Цепь Маркова будем называть сжимающей, если для любой пары состояний  $i_1, i_2 \in E$  существуют время  $t \in T$  и состояние  $j \in E$  такие, что  $p_{i_1 j}^t > 0$  и  $p_{i_2 j}^t > 0$  (т.е. система может перейти из любой пары состояний в некоторое за одно и то же время).*

**Определение 3.2.** *Распределение  $\pi = \{\pi_i\}$  на  $E$  (т.е. набор чисел  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$  такой, что  $\pi \geq 0$  и  $\sum \pi_i = 1$ ) называется стационарным, если выполняется следующее соотношение*

$$\sum_{i \in E} \pi_i \cdot p_{ij} = \pi_j, \quad \forall t \in T, \forall j \in E.$$

**Теорема 3.1.** *Если однородная цепь Маркова принимает конечное число состояний, то следующие утверждения равносильны:*

1. *существует единственное стационарное распределение  $\pi = \{\pi_i\}$  и  $p_{i,j} \rightarrow \pi_j$  при  $t \rightarrow \infty \quad \forall i, j \in E$ ;*
2. *цепь является сжимающей.*

**Теорема 3.2.** *Пусть однородная цепь Маркова является сжимающей. Тогда для любых состояний  $i, j \in E$  существует предел  $p_{i,j}$ ; при этом*

1. *если не существует стационарного распределения, то  $p_{i,j} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для любой пары состояний  $i, j \in E$ ;*
2. *если существует стационарное распределение  $\pi = \pi_i$ , то оно единственное и  $p_{i,j} \rightarrow \lambda_j \cdot \pi_j$  при  $t \rightarrow \infty$  для любой пары состояний  $i, j \in E$ , где  $\lambda_j$ , возможно, зависит от  $i$  и  $0 < \lambda_i \leq 1$ .*

**Теорема 3.3.** Пусть существует стационарное распределение  $\pi = \{\pi_i\}$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

1. Для всех состояний  $j \in E$   $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}^t = \pi_j$ .
2. Цепь является сжимающей, и всякое ограниченное решение системы уравнений  $\sum_{j \in E} p_{ij} \cdot x_j = x_i \quad \forall i \in E$  имеет вид  $x = (x_1, x_2, \dots) = c(1, 1, \dots)$ .

## 3.2 Устойчивость и стационарное распределение на графах

Далее будем рассматривать только связные графы.

**Определение 3.3.** Устойчивым режимом (устойчивым контуром) будем называть контур  $\eta \subset U$ , каждая дуга  $u$  которого обладает следующим свойством:

$$\forall v \in [(p_1 \circ f)(u)]^+ \setminus \{u\} \quad p(v) < p(u).$$

Другими словами, любая дуга  $u$  устойчивого режима  $\eta$ , имеет строго наибольшую вероятность среди дуг, выходящих из вершины  $(p_1 \circ f)(u)$ .

**Определение 3.4.** Полуустойчивым режимом (полуустойчивым контуром) будем называть контур  $\eta$ , обладающий следующим свойством:

$$\left( \forall u \in \eta \quad p(u) = \max_{w \in [(p_1 \circ f)(u)]^+} \{p(w)\} \right) \& \\ \& (\exists u \in \Omega \exists v \in [(p_1 \circ f)(u)]^+ \setminus \{u\} \quad p(v) = p(u)).$$

Или, что то же самое, каждая дуга  $u$  полуустойчивого режима  $\eta$  имеет наибольшую вероятность перехода среди дуг, выходящих из вершины  $(p_1 \circ f)(u)$ , и существует такая дуга  $v$  («уводящая» с контура  $\eta$ ) для которой вероятность перехода по ней такая же, что и для дуги данного контура, выходящей из той же вершины.

**Определение 3.5.** Неустойчивыми режимами (неустойчивыми контурами) будем называть все контуры орграфа не являющиеся устойчивыми или полуустойчивыми (т.е. те, с которых «уводит» хотя бы одна дуга, с большей вероятностью, чем соответствующая дуга контура).

Приведём классификацию неустойчивых режимов по степени сложности их нахождения:

1. Устойчивые режимы на частичных графах, полученных удалением некоторых дуг, входящих в устойчивые режимы, будем называть *неустойчивыми режимами 1-го рода*.

2. Устойчивые режимы на частичных графах, полученных удалением некоторых дуг, входящих в устойчивые режимы и в неустойчивые режимы 1-го рода, будем называть *неустойчивыми режимами 2-го рода*.

И т.д.

Аналогичным образом определим неустойчивые режимы рода 1, 5; 2, 5; ...:

3. Полуустойчивые режимы на частичных графах, полученных удалением некоторых дуг, входящих в устойчивые режимы, будем называть *неустойчивыми режимами рода 1, 5*.

И т.д.

4. Контур графа, которые являются «склейкой» нескольких режимов будем называть *неустойчивыми режимами рода  $\infty$* .

### Пример 3.1.

Рассмотрим граф  $G_1$  на рис.3.1, дуги  $\{u_1, \dots, u_7\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 4)$ ,  $f(u_3) = (4, 3)$ ,  $f(u_4) = (3, 1)$ ,  $f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (5, 6)$ ,  $f(u_7) = (6, 4)$ .

Полагаем вероятности перехода по дугам равными  $p(u_1) = 1$ ,  $p(u_2) = 1$ ,  $p(u_3) = 1$ ,  $p(u_4) = 0,8$ ,  $p(u_5) = 0,2$ ,  $p(u_6) = 1$ ,  $p(u_7) = 1$ .

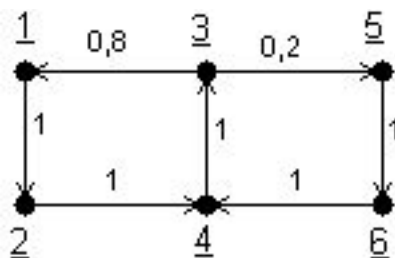


Рисунок 3.1 — Граф  $G_1$ .

Граф  $G_1$  имеет один устойчивый режим (контур  $\mu_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ),

один неустойчивый контур 1-го рода: (контур  $\mu_2 = \{u_5, u_6, u_7, u_3\}$ ) и один контур рода  $\infty$ : (контур  $\mu_3 = \{u_4, u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_3\}$ ).

### Пример 3.2.

Рассмотрим граф  $G_2$  на рис.3.2, дуги  $\{u_1, \dots, u_7\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (2, 4)$ ,  $f(u_3) = (4, 3)$ ,  $f(u_4) = (3, 1)$ ,  $f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (5, 6)$ ,  $f(u_7) = (6, 4)$ .

Отличие графа  $G_2$  от графа  $G_1$  состоит только в вероятностях перехода по дугам:  $p(u_1) = 1$ ,  $p(u_2) = 1$ ,  $p(u_3) = 1$ ,  $p(u_4) = 0,5$ ,  $p(u_5) = 0,5$ ,  $p(u_6) = 1$ ,  $p(u_7) = 1$ .

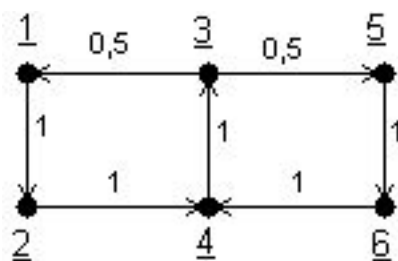


Рисунок 3.2 — Граф  $G_2$ .

Граф  $G_2$  имеет два полуустойчивых режима (контур  $\mu_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  и  $\mu_2 = \{u_5, u_6, u_7, u_3\}$ ) и один контур рода  $\infty$  (контур  $\mu_3 = \{u_4, u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_3\}$ ).

Рассмотрим вопрос о нахождении устойчивых режимов.

#### Алгоритм 3.1 (Нахождения устойчивых режимов).

1. В качестве начальной вершины выбираем любую вершину графа. В том случае, если выполняем поиск устойчивых режимов на вспомогательном графе, то в качестве начальной вершины выбираем произвольную вершину нулевого уровня.

2. Выходим из текущей вершины по дуге с наибольшей вероятностью в некоторую вершину графа, запоминая вершину из которой вышли, и полагаем текущей вершину, в которую пришли.

Выполняем инструкции шага 2 до тех пор, пока не одна из следующих ситуаций:

а) Пришли в вершину, в которой уже были. В этом случае путь

между повторяющимися вершинами является устойчивым режимом. Запоминаем его и переходим на шаг 3.

б) Пришли в вершину, из которой не выходит ни одной дуги. В этом случае запоминаем текущую вершину и переходим на шаг 3.

3. Удаляем все запомненные на шаге 2 вершины. Если на графе ещё остались вершины, то возврат на шаг 1. Иначе алгоритм заканчивает работу.

Рассмотрим вопрос о стационарном распределении.

**Определение 3.6.** Устойчивый режим будем называть периодическим, если при возведении матрицы переходных вероятностей в произвольную степень, все строки, соответствующие этому режиму вычисленной матрицы получают некоторой перестановкой этих же строк исходной матрицы.

Такая ситуация возникает лишь в том случае, когда устойчивый режим является изолированной компонентой сильной связности и из каждой вершины есть только одна дуга, ведущая в вершину данного режима с вероятностью перехода, по ней равной единице.

**Определение 3.7.** Компоненту сильной связности  $H$  графа  $G$  будем называть изолированной, если выполняется следующее условие:

$$\forall x \in X_H \quad \Gamma^+(x) \subset X_H$$

т.е. из вершин компоненты  $H$  достижимы только вершины этой же компоненты.

**Теорема 3.4.** Конечная цепь Маркова содержит хотя бы одну изолированную компоненту сильной связности.

∇ Доказательство.

Для доказательства будем использовать метод математической индукции, взяв в качестве ее параметра количество компонент сильной связности.

1. Пусть конечная цепь Маркова содержит одну компоненту сильной связности. Ясно, что эта компонента является изолированной.



2. Предположим, что конечная цепь Маркова, содержащая не более, чем  $s$  компонент сильной связности, содержит изолированную компоненту. Докажем утверждение для цепи с  $s + 1$  компонентой сильной связности.

Поскольку конденсацией графа (см., например, [8], [45]) является бесконтурный граф, следовательно можно рассмотреть компоненту сильной связности, в которую не ведут дуги из других компонент.

Если она изолированная, то утверждение доказано.

Если нет, то удалим ее из цепи. Получилась цепь Маркова, содержащая  $s$  компонент сильной связности. По предположению индукции она содержит изолированную компоненту.

△

Для конечных цепей Маркова, которые не содержат петель справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.5.** *Для того, чтобы конечная цепь Маркова  $G$  являлась сжимающей необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *Цепь  $G$  не содержит периодических устойчивых режимов,*
2. *На  $G$  существует единственная изолированная компонента сильной связности  $H$ ,*
3. *в компоненте сильной связности  $H$  существуют по крайней мере два контура  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , длины которых ( $|\eta_1|$  и  $|\eta_2|$ ) — взаимно простые числа.*

▽ *Доказательство.*

Докажем необходимость.

Доказательство будем проводить отдельно для каждого условия.

1. Цепь  $G$  — сжимающая  $\Rightarrow G$  не содержит периодических устойчивых режимов.

Допустим противное —  $G$  содержит периодический устойчивый режим  $\eta$ . Рассмотрим две произвольные вершины  $x, y \in (p_2 \circ f)(\eta)$ . Ясно, что для любой вершины данного контура  $z \in (p_2 \circ f)(\eta)$  для любых путей  $\mu_1$  (из вершины  $x$  в вершину  $z$ ) и  $\mu_2$  (из вершины  $y$  в вершину  $z$ ) выполняется  $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ . Или, что то же самое,  $\forall z \in X$  (поскольку из  $x$  и  $y$  достижимы только вершины контура  $\eta$ )  $\forall t \in T$  ( $p_{xz}^t = 0$ )  $\vee$  ( $p_{yz}^t = 0$ ).

Отсюда следует, что цепь  $G$  не является сжимающей.

2.  $G$  — сжимающая  $\Rightarrow$  на  $G$  существует единственная изолированная компонента сильной связности  $H$ .

Поскольку цепь Маркова обязательно содержит изолированную компоненту сильной связности (Теорема 3.4) осталось доказать ее единственность.

Допустим противное, что существует две изолированные компоненты сильной связности  $H_1, H_2$ . Рассмотрим пару вершин  $x$  и  $y$  таких, что вершина  $x$  находится в компоненте  $H_1$ , а вершина  $y$  — в компоненте  $H_2$ . Для этой пары вершин имеет место соотношение

$$\forall z \in X \quad \forall t \in T \quad (p_{xz}^t = 0) \vee (p_{yz}^t = 0)$$

поскольку произвольная вершина графа, в силу изолированности компонент  $H_1$  и  $H_2$ , недостижима или из вершины  $x$ , или из вершины  $y$ . Следовательно, цепь  $G$  — не является сжимающей.

3. Так как цепь  $G$  — сжимающая, то подграф  $H'$  порожденный вершинами компоненты  $H$  является сжимающей цепью Маркова. Т.е. осталось доказать утверждение: если цепь  $H'$  — сжимающая, то на ней существуют по крайней мере два контура, длины которых — простые числа.

Рассмотрим две вершины  $x, y \in X_{H'}$ , соединенные дугой  $u_{xy}$  (для определенности будем считать  $f(u_{xy}) = (x, y)$ ). Поскольку цепь  $H'$  — сжимающая, тогда для вершин  $x$  и  $y$  существует вершина  $z \in X_{H'}$  и существует два пути  $\mu_1$  (из вершины  $x$  в вершину  $z$ ) и  $\mu_2$  (из вершины  $y$  в вершину  $z$ ) такие, что  $|\mu_1| = |\mu_2|$ . Ясно, что  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

Поскольку  $H'$  является компонентой сильной связности, то существует путь  $\mu(z, x)$ , соединяющий вершину  $z$  с вершиной  $x$ .

Тогда  $\eta_1 = \mu_1 \cup \mu$  является контуром длины  $k = |\mu_1| + |\mu|$ , а  $\eta_2 = \{u_{xy}\} \cup \mu_2 \cup \mu$  является контуром длины  $k + 1$ , так как  $|\mu_1| = |\mu_2|$ .

Поскольку любое натуральное число  $k$  является взаимно простым с  $k + 1$ , следовательно, построили два контура  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , длины которых — взаимно простые числа.

Докажем достаточность.

Поскольку по условию 2 существует единственная изолированная компонента сильной связности  $H$  и цепь  $G$  является связной, значит, вершины  $H$  достижимы из любой вершины графа  $G$ . Следовательно, осталось доказать, что подграф  $H'$ , порожденный множеством вершин компоненты  $H$  является сжимающей цепью Маркова.

По условию 3 существуют хотя бы два контура  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , длины которых ( $|\eta_1| = n_1$  и  $|\eta_2| = n_2$ ) — взаимно простые числа.

Возможны два варианта: когда контуры  $\eta_1$  и  $\eta_2$  имеют общие вершины и когда контуры  $\eta_1$  и  $\eta_2$  общих вершин не имеют. Рассмотрим оба этих варианта.

а) Пусть  $(p_2 \circ f)(\eta_1) \cap (p_2 \circ f)(\eta_2) \neq \emptyset$ , т.е. у контуров  $\eta_1$  и  $\eta_2$  есть общие вершины.

Рассмотрим некоторые произвольные вершины  $x$  и  $y$  цепи  $H'$ . Поскольку  $H'$  является сильно связным графом, значит, вершина  $z \in (p_2 \circ f)(\eta_1) \cap (p_2 \circ f)(\eta_2)$  достижима из  $x$  и  $y$ . Покажем, что существуют пути  $\mu_1$  (соединяющий вершину  $x$  с вершиной  $z$ ) и  $\mu_2$  (соединяющий вершину  $y$  с вершиной  $z$ ) такие, что  $|\mu_1| = |\mu_2| = t$ .

Пути  $\mu_1$  и  $\mu_2$  будем строить следующим образом. Концевой вершиной начальных отрезков путей  $\mu_1([1; q]_Z)$  и  $\mu_2([1; s]_Z)$  является вершина  $z$ . Ясно, что  $|\mu_1([1; q]_Z)| = q$  и  $|\mu_2([1; s]_Z)| = s$ .

Если  $q = s$ , то искомые пути построены. Если  $q \neq s$ , то следующие отрезки путей  $\mu_1$  и  $\mu_2$  строим таким образом, чтобы

- i.  $\mu_1([q + i \cdot n_1 + 1; q + (i + 1) \cdot n_1]_Z) = \eta_1$ , для всех  $i \in \mathbb{N}$ ;
- ii.  $\mu_2([s + j \cdot n_2 + 1; s + (j + 1) \cdot n_2]_Z) = \eta_2$ , для всех  $j \in \mathbb{N}$ .

Пути  $\mu_1$  и  $\mu_2$  необходимо построить таким образом, чтобы выполнялось равенство  $|\mu_1| = |\mu_2|$ . Т.е. должна существовать пара таких чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ , что выполняется равенство  $q + \alpha \cdot n_1 = s + \beta \cdot n_2$ . Или, что то же самое, равенство

$$q - s = \alpha \cdot n_1 - \beta \cdot n_2. \quad (3.1)$$

Поскольку  $n_1$  и  $n_2$  — взаимно простые числа, то любое целое число  $g$  можно представить в виде целочисленной линейной комбинации чисел  $n_1$  и  $n_2$  (см., например, [54]). Следовательно, натуральные решения (3.1) всегда существуют.

Таким образом, можно построить пути  $\mu_1$  и  $\mu_2$  такие, что  $|\mu_1| = |\mu_2|$ , значит,  $p_{x,z}^{q+\alpha \cdot n_1} \neq 0$  и  $p_{x,z}^{s+\beta \cdot n_2} \neq 0$ . Т.е. цепь  $H'$ , а значит и вся цепь  $G$  — сжимающая.

б) Пусть  $(p_2 \circ f)(\eta_1) \cap (p_2 \circ f)(\eta) = \emptyset$ , т.е. у контуров  $\eta_1$  и  $\eta_2$  нет общих вершин.

Возьмем вершины  $x, y \in (p_2 \circ f)(\eta_1)$  таким образом, чтобы  $u_{xy} = f^{-1}(x, y) \in \eta_1$ , т.е. чтобы существовала дуга  $u_{xy}$  контура  $\eta_1$ , с началом в вершине  $x$  и концом в вершине  $y$ .

Аналогичным образом выберем вершины  $x', y'$  на контуре  $\eta_2$ : чтобы  $u_{x'y'} = f^{-1}(x', y') \in \eta_2$ .

Поскольку  $H'$  является сильно связным графом, значит, существует путь  $\mu_1$ , соединяющий вершины  $x$  и  $y'$  и существует путь  $\mu_2$ , соединяющий вершины  $x'$  и  $y$ . Построим контур  $\eta_3$  следующим образом:

$$\eta_3 = \mu_1 \cup (\eta_2 \setminus \{u_{x'y'}\}) \cup \mu_2 \cup (\eta_1 \setminus \{u_{xy}\}),$$

т.е. обход контура  $\eta_3$  осуществляется следующим образом: из вершины  $x$  проходим в  $y'$  по пути  $\mu_1$ , из  $y'$  по отрезку контура  $\eta_2$  проходим в  $x'$ , из  $x'$  проходим в  $y$  по пути  $\mu_2$  и из  $y$  по отрезку контура  $\eta_1$  проходим в  $x$ .

Длина контура  $\eta_3$  равна

$$|\eta_3| = |\mu_1| + |\eta_2| - 1 + |\mu_2| + |\eta_1| - 1 = n_3.$$

і. Если  $n_3$  взаимно просто с  $n_1$  ( $n_2$ ), то переобозначим  $\eta_2 ::= \eta_3$  ( $\eta_1 ::= \eta_3$ ) и по пункту а) следует, что цепь  $G$  — сжимающая.

ii. Если  $n_3$  не является взаимно простым с  $n_1$  и  $n_2$ , то начинаем «наращивать» контур  $\eta_3$  следующим образом:

$$\eta_3 = \mu_1 \cup (\eta_2 \setminus \{u_{x'y'}\}) \cup \beta\eta_2 \cup \mu_2 \cup (\eta_1 \setminus \{u_{xy}\}) \cup \alpha\eta_1,$$

где  $\beta\eta_2 = \underbrace{\eta_2 \cup \dots \cup \eta_2}_{\beta\text{-раз}}$ , а  $\alpha\eta_1 = \underbrace{\eta_1 \cup \dots \cup \eta_1}_{\alpha\text{-раз}}$ .

Новая длина контура  $\eta_3$  равна

$$|\eta_3| = n_3 + \alpha \cdot n_1 + \beta \cdot n_2 = n_4. \quad (3.2)$$

Поскольку  $n_1$  и  $n_2$  — взаимно простые, значит, существуют  $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+$  и существует  $n_4 \in \mathbf{N}$ , такие, что выполняется (3.2) и  $n_4$  — взаимно просто с  $n_1$  или с  $n_2$  (см. [54]).

Тогда если  $n_4$  взаимно просто с  $n_1$  ( $n_2$ ), то обозначим  $\eta_2 ::= \eta_3$  ( $\eta_1 ::= \eta_3$ ) и по пункту а) цепь  $G$  — сжимающая.

△

**Замечание 3.1.** Если конечная цепь Маркова  $G$  содержит петли, то для того, чтобы она являлась сжимающей необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условия 1 и 2 предыдущего утверждения, а так же следующее условие:

или компонента сильной связности  $H$  содержит хотя бы одну петлю, или  $H$  содержит по крайней мере два контура  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , длины которых ( $|\eta_1|$  и  $|\eta_2|$ ) — взаимно простые числа.

### Пример 3.3.

Рассмотрим граф  $G_1$  на рис.3.3, дуги  $\{u_1, \dots, u_7\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 3)$ ,  $f(u_2) = (2, 1)$ ,  $f(u_3) = (4, 2)$ ,  $f(u_4) = (4, 3)$ ,  $f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (5, 6)$ ,  $f(u_7) = (6, 4)$ .

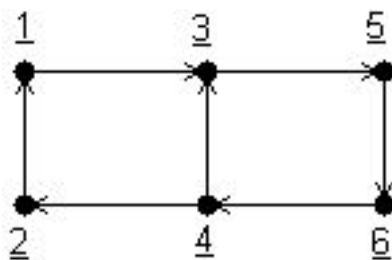


Рисунок 3.3 — Граф  $G_1$ .

Граф  $G_1$  не содержит периодических устойчивых контуров и сам является компонентой сильной связности, но длины всех его контуров кратны двум (не являются взаимно простыми числами):

$$|\{u_4, u_5, u_6, u_7\}| = 4,$$

$$|\{u_3, u_2, u_1, u_5, u_6, u_7\}| = 6,$$

$$|\{u_3, u_2, u_1, u_5, u_6, u_7, u_4, u_5, u_6, u_7\}| = 10 \text{ и т.д.}$$

Заметим, что для любой пары вершин графа  $G_1$ , соединенных дугой, не существует вершины, которая достижима из них за одинаковое количество шагов, следовательно,  $G_1$  не является сжимающей цепью.

### Пример 3.4.

Рассмотрим граф  $G_2$  на рис.3.4, дуги  $\{u_1, \dots, u_6\}$  которого таковы, что  $f(u_1) = (1, 3)$ ,  $f(u_2) = (2, 1)$ ,  $f(u_3) = (4, 2)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (4, 5)$ ,  $f(u_6) = (5, 3)$ .

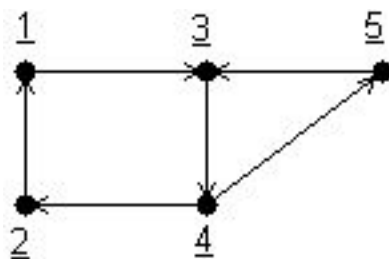


Рисунок 3.4 — Граф  $G_2$ .

Граф  $G_2$  не содержит периодических устойчивых контуров, сам является компонентой сильной связности и содержит два контура, длины которых являются взаимно простыми числами):

$$|\{u_1, u_4, u_3, u_2\}| = 4,$$

$$|\{u_4, u_5, u_6\}| = 3.$$

В данном случае для любой пары вершин графа  $G_2$  существует вершина которая достижима из них за одно и то же количество шагов, следовательно,  $G_2$  — сжимающая цепь.

Рассмотрим несколько примеров для графов с нестандартной достижимостью:

**Пример 3.5.**

Рассмотрим граф  $G_3$  из примера 3.1 при условии неубывающей магнитности порядка 2. Полагаем  $U_M = \{u_1, u_2, u_5, u_6\}$  и  $U_H = \{u_3, u_4, u_7\}$ .

Вспомогательный граф  $G'_3$  показан на рис.3.5.

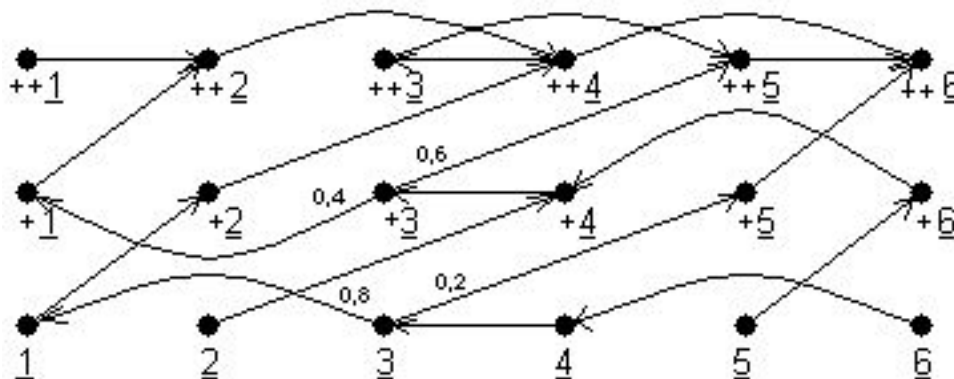


Рисунок 3.5 — Вспомогательный граф для графа на рис. 3.1, условие неубывающей магнитности.

Вероятности перехода по дугам вспомогательного графа  $G'_3$  равны единице для всех дуг, кроме четырех, отмеченных на рисунке.

Без условия магнитности граф на рис. 3.1 имеет один устойчивый контур:  $\eta_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ , однако при условии магнитности этот контур пропадает совсем и устойчивым контуром на исходном графе при условии неубывающей магнитности становится контур  $\eta_2 = \{u_5, u_6, u_7, u_3\}$ , который без условия магнитности был неустойчивым контуром 1-го рода.

**Пример 3.6.**

Рассмотрим граф  $G_4$  из примера 3.1 при условии вентильно-накопительной достижимости порядка 2. Полагаем  $U_0 = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7\}$ ,  $U_1 = \emptyset$  и  $U_2 = \{u_4\}$ .

Вспомогательный граф  $G'_4$  показан на рис.3.6.

Вероятности перехода по дугам вспомогательного графа  $G'_4$  равны единице для всех дуг, кроме двух, отмеченных на рисунке.

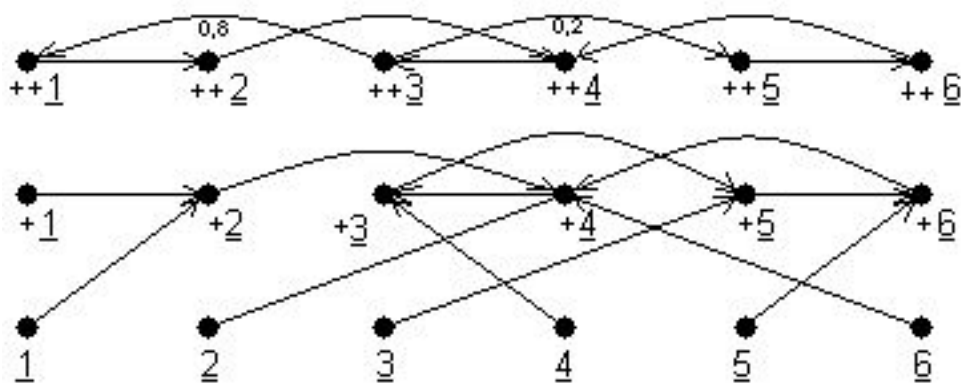


Рисунок 3.6 — Вспомогательный граф для графа на рис. 3.1, условие вентильно-накопительной достижимости.

Без условия магнитности граф на рис.3.1 имеет один устойчивый контур:  $\mu_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ , однако при условии вентильно-накопительной достижимости этот контур пропадает совсем и устойчивым контуром на исходном графе при условии неубывающей магнитности становится контур  $\mu_2 = \{u_5, u_6, u_7, u_3\}$ , который без условия магнитности был неустойчивым контуром 1-го рода.

### 3.3 Приложения условия механической достижимости

Случайные процессы на графах с механической достижимостью имеют достаточно интересные приложения. В качестве таких приложений рассмотрим следующие задачи:

1. Задача нахождения областей локального минимума функции, заданной своими значениями в узлах сетки произвольной конфигурации.

Для решения данной задачи воспользуемся следующим подходом:

По сетке строим граф  $G$ , вершины, которого соответствуют узлам сетки, а дуги соединяют некоторую пару вершин в том и только в том случае, если соответствующие им узлы являются соседними относительно сетки. При этом,

а) если в рассматриваемых узлах функция имеет различные значения, то на графе строится одна дуга  $u$ , которая ориентируется от вершины, соответствующей узлу с большим значением функции к вершине, соответствующей узлу с меньшим значением функции. Полагаем  $g(u) = -1$ .



б) если в рассматриваемых узлах функция имеет равные значения, то на графе строятся две противоположно направленные дуги  $u$  и  $v$ . Полагаем  $g(u) = g(v) = 0$ .

Построим разбиение множества дуг графа  $G$  следующим образом:  $U_- = \{u \in U \mid g(u) < 0\}$ ,  $U_H = \{u \in U \mid g(u) = 0\}$  и  $U_+ = \{u \in U \mid g(u) > 0\}$ . Заметим, что при таком построении  $U_+ = \emptyset$ .

Для каждой дуги задаем вероятность перехода по ней, соблюдая следующее условие:  $p(u) \gg p(v) \quad \forall u, v \in U$  таких, что  $u \in U_-$ ,  $v \in U_H$  и  $(p_1 \circ f)(u) = (p_1 \circ f)(v)$ . Другими словами, для каждой пары дуг разных множеств, выходящих из одной вершины, вероятность перехода по дуге множества  $U_H$  существенно меньше, чем вероятность перехода по дуге множества  $U_-$ .

После такого построения графа  $G$  устойчивые и полуустойчивые циклы на нем будут соответствовать областям локального минимума заданной функции.

2. Пусть на графе  $G(X, U, f)$  заданы отображения  $g : U \rightarrow \mathbb{Z}$  и  $M : X \rightarrow \{0, 1\}$  такие, что отображение  $g$  задает «наклон» дуги, а отображение  $M$  определяет области магнитности таким образом, что если  $M(x) = 1$ , то  $[x]^- \subset U_M \quad \forall x \in X$ .

Рассмотрим случайный процесс блуждания некоторого «объекта» произвольной природы по вершинам графа  $G$ . При этом, объект может двигаться только по возможным траекториям с соблюдением условия неубывающей магнитности.

Задача состоит в нахождении возможных точек прекращения движения данного объекта, а в случае, когда это не происходит, то в нахождении возможных траекторий его циклического движения.

Данная задача равносильна первой задаче при условии некоторой «неоднородности» поверхности, задаваемой функцией.

Для решения задачи 2 применим построение вспомогательного графа в два этапа. Сначала построим вспомогательный граф  $H$  по правилам, описанным для условия неубывающей магнитности. Затем —  $G'$  по правилам для механической достижимости. На графе  $G'$  находим устойчивые и

полуустойчивые циклы. Им соответствуют траектории циклического движения, а в случае, когда устойчивый цикл является петлёй, то и точки прекращения движения.

## Глава 4

# Потоки в сетях с нестандартной достижимостью

### 4.1 Основные понятия, определения и утверждения

Напомним некоторые понятия и определения, требующиеся для дальнейшего изложения ([3], [48], [56], [95]).

**Определение 4.1.** *Сетью будем называть связный ориентированный граф с двумя выделенными вершинами: источником  $s$  и стоком  $t$ .*

Рассмотрим сеть  $G(X, U, f)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , для любой дуги  $u$  которой задан вес  $c(u)$  — пропускная способность дуги  $u$ .

**Определение 4.2.** *Пусть  $X = Y \cup Y', Y \cap Y' \neq \emptyset, s \in Y, t \in Y'$ . Разрезом  $(Y, Y')$  будем называть множество дуг  $u \in U$ , обладающих свойствами  $(p_1 \circ f)(u) \in Y, (p_2 \circ f)(u) \in Y'$  такое, что для любого пути  $\mu(s, t)$  выполняется  $\mu(s, t) \cap (Y, Y') \neq \emptyset$ .*

Другими словами разрезом будем называть множество дуг (начальные вершины которых принадлежат множеству  $Y$ , а конечные — множеству  $Y'$ ) таких, что любой путь от источника до стока обязательно содержит дугу этого множества.

Рассмотрим отображение  $F : U \rightarrow \mathbb{R}_+$  и пусть  $x$  — произвольная вершина сети  $G$ . Введём следующие обозначения:

$$F(x, X) = \sum_{u \in [x]^+} F(u), \quad F(X, x) = \sum_{u \in [x]^-} F(u).$$

Свяжем с вершиной  $x$  разность  $F(x, X) - F(X, x)$  — чистый поток из вершины  $x$ .

**Определение 4.3.** *Стационарным потоком в сети  $G$  из  $s$  в  $t$  называется функция  $F : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая условию:*

$$\begin{cases} F(x, X) - F(X, x) = 0, & \forall x \in X \setminus \{s, t\}; \\ 0 \leq F(u) \leq c(u), & \forall u \in U. \end{cases}$$

**Определение 4.4.** *Величиной стационарного потока  $F$  называется число*

$$v = F(s, X) - F(X, s).$$

**Теорема 4.1** (Форда-Фалкерсона).

*Для любой ориентированной сети с источником  $s$  и стоком  $t$  величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.*

## 4.2 Потоки в сетях с ограничениями на достижимость

В классической постановке потоковая задача рассматривается в сети без кратных дуг, поскольку если существует набор кратных дуг  $\{u_1, \dots, u_s\}$  такой, что  $f(u_i) = (x, y) \forall i \in [1; s]_Z$ , то заменив их одной дугой  $u$  сумарной пропускной способности, получим сеть без кратных дуг, соответствующую исходной. Если рассматривать сеть  $G$  с нестандартной достижимостью, то кратные дуги в этой сети могут принадлежать к различным характеристическим подмножествам множества  $U$ , поэтому заменой кратных дуг соответствующей одной дугой нельзя свести задачу к задаче в сети без кратных дуг. Однако, если оставить кратные дуги только из различных характеристических подмножеств, то, построив вспомогательную сеть  $G'$ , получим, что  $G'$  — сеть без кратных дуг. Данная ситуация для условия неубывающей магнитности порядка  $k$  показана на рис.4.1а-б.

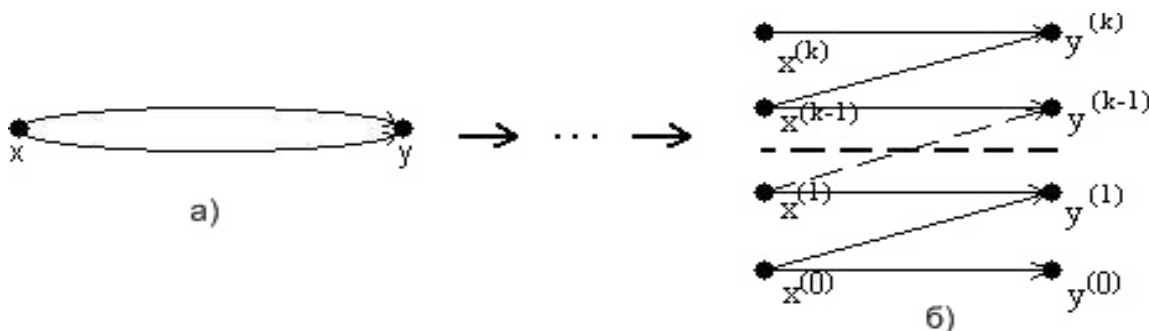


Рисунок 4.1 — Дуги графа на рисунке а) разных типов, на рисунке б) кратных дуг нет.

Если на исходном графе  $G$  присутствуют кратные дуги одного из под-

множеств характеристического набора, то на вспомогательном графе обязательно будут кратные дуги. На вспомогательном графе  $G'$  нет ограничений на достижимость, следовательно, можно заменить все получившиеся кратные дуги  $u_1, \dots, u_l$  одной дугой с суммарной пропускной способностью. А это то же самое, что замена кратных дуг внутри соответствующих подмножеств характеристического набора на исходном графе  $G$ .

Таким образом, если на исходном графе с нестандартной достижимостью существуют дуги  $\{u_1^0, \dots, u_{i_0}^0\} \subset U_0, \dots, \{u_1^m, \dots, u_{i_m}^m\} \subset U_m$  (где  $U_j \forall j \in [0; m]_Z$  — множества характеристического набора) такие, что все эти дуги являются кратными в классическом понимании, то для каждого значения  $j \in [0; m]_Z$  заменим все дуги  $u_1^j, \dots, u_{i_j}^j$  одной дугой  $u^j \in U_j$ . При этом, положим пропускную способность дуги  $u^j$  равной

$$c(u^j) = \sum_{l=1}^{i_j} c(u_l^j) \quad \forall j \in [0; m]_Z.$$

Далее под сетью с нестандартной достижимостью будем понимать связный ориентированный граф  $G$  с нестандартной достижимостью без петель и кратных дуг, принадлежащих одному и тому же подмножеству характеристического набора. Т.е. кратные дуги вообще говоря допускаются, но все они должны принадлежать различным подмножествам характеристического набора для множества дуг сети  $G$ .

**Определение 4.5.** *Рассмотрим всевозможные подмножества дуг разреза  $(Y, Y')$  обладающие следующим свойством: для любой дуги  $u$  подмножества разреза существует допустимый путь  $\mu'(s, t)$  при некотором ограничении на достижимость  $\varphi$  содержащий эту дугу. Подмножество такого вида наибольшей мощности будем называть ограниченным  $\varphi$  разрезом  $(Y, Y')_\varphi$ .*

**Лемма 4.1.** *Пусть  $F$  — некоторый стационарный поток в сети  $G$  из  $s$  в  $t$  величины  $v$ , и пусть  $(Y, Y')_\varphi$  — некоторый ограниченный  $\varphi$  разрез. Тогда имеет место следующее соотношение  $v = F(Y, X)_\varphi - F(X, Y)_\varphi \leq c(Y, Y')_\varphi$*

∇ *Доказательство.* Рассмотрим вершины  $i \in Y$ . Поскольку

$$F(Y, X)_\varphi - F(X, Y)_\varphi = \sum_{i \in Y} (F(i, X) - F(X, i)) = v,$$

значит,

$$\begin{aligned} v &= F(Y, Y)_\varphi + F(Y, Y')_\varphi - F(Y, Y)_\varphi - F(Y', Y)_\varphi = \\ &= F(Y, Y')_\varphi - F(Y', Y)_\varphi \leq \\ &\text{т.к. } F(Y, Y')_\varphi \leq c(Y, Y')_\varphi \text{ и } F(Y', Y)_\varphi \leq 0, \text{ то} \\ &\leq c(Y, Y')_\varphi \end{aligned}$$

△

**Теорема 4.2** (*Аналог теоремы Форда-Фалкерсона*).

Для любой ориентированной сети  $G$  с магнитной достижимостью с источником  $s$  и стоком  $t$  величина максимального потока равна пропускной способности минимального магнитного разреза.

∇ *Доказательство.*

Пусть  $F$  — максимальный поток в сети  $G$  с магнитной достижимостью.

$$\forall (Y, Y')_\varphi \Rightarrow v \leq c(Y, Y')_\varphi.$$

Построим  $Y$  по правилу:

1.  $s \in Y$
2. если  $i \in Y$  и найдётся дуга  $u \in [i]^+$  такая, что  $F(u) \leq c(u)$  и существует М-цепь  $\mu'(s, t)$ , содержащая  $u$ , то  $(p_2 \circ f)(u) \in Y$ .
3. если  $j \in Y$  и найдётся дуга  $u \in [j]^-$  такая, что  $f(u) > 0$  и существует М-цепь<sup>2</sup>  $\mu'(s, t)$ , содержащая  $u$ , то  $(p_1 \circ f)(u) \in Y$ .

В результате получим разрез  $(Y, Y')_\varphi$ . Покажем, что  $t \notin Y$ .

Допустим  $t \in Y$ , значит

- либо по 2. существует  $\mu'(s, t)$  — М-цепь, что  $i \xrightarrow{F < c} t$ ,  
либо по 3. существует  $\mu'(s, t)$  — М-цепь, что  $i \xleftarrow{f > 0} t$ .

<sup>2</sup>М-цепь — цепь в сети с магнитной достижимостью — строится по соответствующей цепи на вспомогательном графе  $G'$ .

Т.е.  $\mu'$  — увеличивающая М-цепь. Следовательно  $F$  — не максимальный поток.

Значит  $t \notin Y$ .

Рассмотрим построенный разрез  $(Y, Y')_\varphi$ .

$$v = F(Y, Y')_\varphi - F(Y', Y)_\varphi = c(Y, Y')_\varphi,$$

$$\text{т.к. } F(Y, Y')_\varphi = c(Y, Y')_\varphi, \text{ а } F(Y', Y)_\varphi = 0.$$

△

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в сети  $G$  с нестандартной достижимостью. Так как при наличии ограничения на достижимость некоторые пути на графе становятся недопустимыми, то применять стандартные алгоритмы не представляется возможным.

Подход к решению поставленной задачи аналогичен подходу к решению задачи о достижимости и состоит в том, что строится вспомогательный граф  $G'$  по правилам указанным для графов с нестандартной достижимостью. На построенном вспомогательном графе решается задача о максимальном потоке, затем, результат переносится на исходный граф.

Однако, для потоковой задачи в сетях с нестандартной достижимостью имеются существенные отличия от задач нахождения кратчайшего пути и случайного блуждания частицы, которые не позволяют использовать напрямую классические алгоритмы на вспомогательной сети  $G'$ .

Покажем, что одного построения вспомогательной сети недостаточно, а необходимо кроме этого модернизировать метод Форда-Фалкерсона.

Вначале, построим вспомогательную сеть  $G'$ . Для удобства зафиксируем некоторую нумерацию дуг исходной сети  $G$ , т.е.  $U = \{u_1, \dots, u_{|U|}\}$ . Обозначим через  $U'_i$  — множество всех дуг сети  $G'$ , соответствующих дуге  $u_i$   $i \in [1; |U|]_Z$  исходной сети  $G$ . Полагаем пропускную способность всех дуг множества  $U'_i$  равными пропускной способности дуги  $u_i$ .

Затем, на  $G'$  находим максимальный поток и переносим его на сеть  $G$  следующим образом: суммарный поток, пропущенный по дугам множества  $U'_i$  считаем пропущенным по дуге  $u_i$   $\forall i \in [1; |U|]_Z$ . Однако, если будем

искать поток на  $G'$  стандартными алгоритмами, то может оказаться, что при переносе результата величина потока, проходящего по какой-то дуге  $u$  графа  $G$ , больше пропускной способности дуги  $u$ . Проиллюстрируем эту ситуацию на следующем примере.

### Пример 4.1.

Рассмотрим сеть  $G$  с условием неубывающей магнитности порядка  $k = 2$  на рис.4.2. Дуги  $\{u_1, \dots, u_{12}\}$  сети  $G$  такие, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (1, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 4)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (3, 5)$ ,  $f(u_6) = (5, 6)$ ,  $f(u_7) = (4, 6)$ ,  $f(u_8) = (4, 7)$ ,  $f(u_9) = (2, 3)$ ,  $f(u_{10}) = (6, 7)$ ,  $f(u_{11}) = (6, 8)$ ,  $f(u_{12}) = (7, 8)$ .

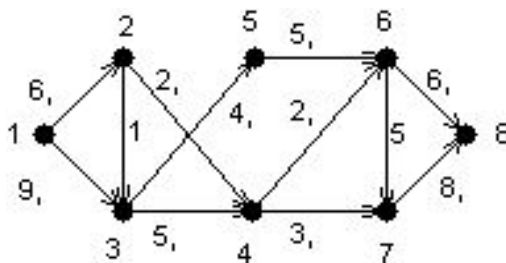


Рисунок 4.2 — Сеть  $G$  с магнитной достижимостью.

Положим  $U_M = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{10}\}$  и  $U_H = \{u_3, u_4, u_7, u_{11}, u_{12}\}$ .

Вспомогательная сеть  $G'(X', U', f)$  показана на рис.4.3.

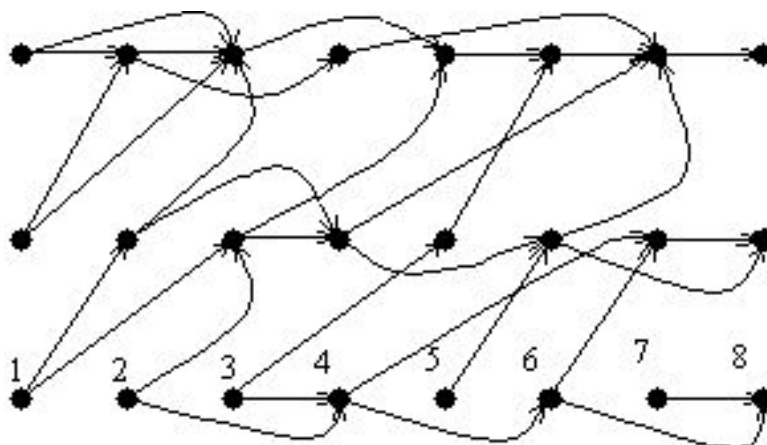


Рисунок 4.3 — Вспомогательная сеть  $G'$ .

Поскольку стоку  $t$  исходного графа  $G$  соответствует несколько вершин на вспомогательном, тогда добавляем одну вершину  $t'$ , которая будем счи-



тать новым стоком на вспомогательном графе и для каждой вершины  $t^{(i)}$ , соответствующей вершине  $t$ , построим дугу  $u_t^i$  такую, что  $f'(u_t^i) = (t^{(i)}, t')$ . Положим пропускную способность каждой дуги  $u_t^i$  равной

$$c(u_t^i) = \sum_{v \in [t^{(i)}]^-} c(v) \quad \forall i \in [0; k]_Z.$$

Также, поскольку «настоящие» источник (вершина  $s^{(0)}$ ) и сток (вершина  $t'$ ) известен, то удалим все вершины-«псевдоисточники» и все вершины-«псевдостоки», которые возникнут на  $G'$ , ведь поток от них не зависит. Таким образом, уменьшаем размер вспомогательной сети.

В результате получим вспомогательную сеть  $G''(X'', U'', f'')$ .

Вспомогательная сеть  $G''$  для исходной сети  $G$  показана на рис.4.4. Возле каждой дуги через запятую указаны пропускная способность и величина потока, проходящего по соответствующей дуге, найденная при помощи классического алгоритма.

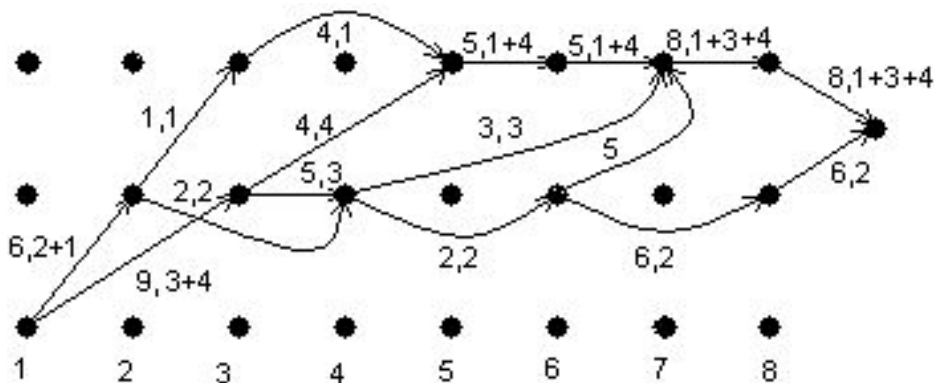


Рисунок 4.4 — Максимальный поток во вспомогательной сети  $G''$ .

Для нахождения максимального потока в сети  $G''$  применили алгоритм Эдмондса-Карпа (см. [2], [3], [48]).

Декомпозиция потока (набор путей, по которым проходит поток от источника к стоку) имеет следующий вид. Для удобства — поскольку нет кратных дуг — используем запись пути как последовательности вершин:

$\mu_1: 1^{(0)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 3^{(2)} \rightarrow 5^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)} \rightarrow t$  — поток величины 1,

$\mu_2: 1 \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 4^{(1)} \rightarrow 6^{(1)} \rightarrow 8^{(1)} \rightarrow t$  — поток величины 2,

$\mu_3: 1 \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 4^{(1)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)} \rightarrow t$  — поток величины 3,

$\mu_4: 1 \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 5^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)} \rightarrow t$  — поток величины 4.

«Соберём» полученный поток на исходном графе (результат показан на рис.4.5).

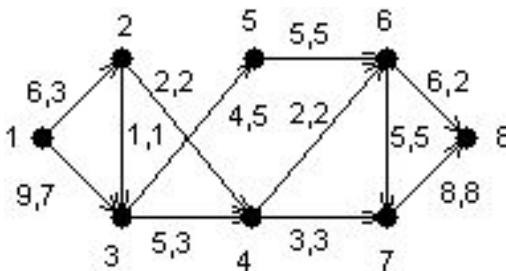


Рисунок 4.5 — Неверное решение: величина потока по дуге  $3 \rightarrow 5$  больше пропускной способности.

Приведенный пример показывает, что действительно, построения вспомогательного графа без модернизации метода Форда-Фалкерсона не достаточно, поскольку применяя классический алгоритм на вспомогательном графе получили, что по дуге  $u_5$  исходного графа проходит поток величины 5, хотя пропускная способность этой дуги равна 4.

Введем в рассмотрение следующие понятия.

Пусть сеть  $G$  (без ограничений на достижимость) такова, что её множество дуг представлено в следующем виде:  $U = U^H \cup U^1 \cup \dots \cup U^k$ , причём  $|U^i| > 1$  для всех  $i \in [1; k]_Z$ . Будем считать, что пропускная способность  $c(u)$  задана для каждой дуги  $u \in U^H$ , а так же заданы «суммарные» пропускные способности  $c(U^i)$  для множеств  $U^i$   $i \in [1; k]_Z$ . Последнее можно интерпретировать следующим образом: сумма величин потоков, проходящих по дугам множества  $U^i$  не может превышать величину  $c(U^i)$ . Множества  $U^i$  будем называть множествами связанных дуг, а сеть  $G$  такого вида — сетью со связанными дугами.

**Определение 4.6.** *Связанно простым путем в сети  $G$  со связанными дугами будем называть простой путь  $\mu$  такой, что  $|\mu \cap U^i| \leq 1$  для всех  $i \in [1; k]_Z$ .*

**Определение 4.7.** *Пропускной способностью дуги  $u$  и связанно про-*

того пути  $\mu(s, t)$  будем называть величину  $c_\mu(u) = \begin{cases} c(u), & u \in U^H \\ c(U^i), & u \in U^i \end{cases}$ .

**Определение 4.8.** Пропускной способностью связанно простого пути  $\mu(s, t)$  в сети  $G$  со связанными дугами будем называть величину

$$c(\mu) = \min_{u \in \mu} \{c_\mu(u)\}.$$

Рассмотрим задачу о максимальном потоке в сети  $G$  со связанными дугами. Ясно, что в таком случае стандартные средства для нахождения максимального потока не являются применимыми, поскольку собственные пропускные способности заданы не для всех дуг, а только для дуг множества  $U^H$ . Для остальных дуг заданы только суммарные пропускные способности всего соответствующего подмножества  $U^i$ . Исходя из этого, для нахождения максимального потока будем пользоваться следующим эвристическим алгоритмом, который является модернизацией алгоритма Форда-Фалкерсона для сетей со связанными дугами.

**Алгоритм 4.1 (Прорыва).**

*Шаг 0.* Полагаем, что начальный поток в сети  $G$  является тривиальным:

$$F(u) = 0 \quad \forall u \in U.$$

*Шаг 1.* Находим некоторый связанно простой путь  $\mu(s, t)$  в сети  $G$  такой, что  $c(\mu) > 0$ .

*Шаг 2.* Полагаем  $F(u) := F(u) + c(\mu) \quad \forall u \in \mu$ .

*Шаг 3.* Полагаем  $c(u) := c(u) - c(\mu) \quad \forall u \in \mu \cap U^H$  и  $c(U^i) := c(U^i) - c(\mu) \quad \forall i \in \{j \in [1; k]_Z \mid \mu \cap U^j \neq \emptyset\}$ .

*Шаг 4.* Если существует связанно простой путь  $\mu(s, t)$  такой, что  $c(\mu) > 0$ , то переход на шаг 1. Иначе величина максимального потока равна сумме величин потоков проходящих по дугам, выходящим из источника.

Отметим, что поскольку по дугам каждого множества  $U_i^j \quad i \in [1; |U|]_Z$  нельзя пропустить суммарный поток величины, больше чем пропускная

способность соответствующей дуги  $u_i$ , следовательно, вспомогательная сеть  $G''$  является сетью со связанными дугами. Значит, воспользуемся алгоритмом прорыва для нахождения максимального потока во вспомогательной сети  $G''$  и перенесём результат на исходную сеть  $G$ . В результате переноса полученного алгоритмом прорыва максимального потока ни для одной дуги не возникнет ситуации, когда величина потока, пропущенного по этой дуге превышает её пропускную способность.

Снова рассмотрим задачу нахождения максимального потока на графе примера 4.1. Для решения этой задачи применим алгоритм прорыва на вспомогательном графе.

### Пример 4.2.

Рассмотрим граф  $G$  из примера 4.1. Построим вспомогательные графы  $G'$  и  $G''$ .

Для нахождения максимального потока в сети  $G''$  применяем алгоритм прорыва (см. рис.4.6).

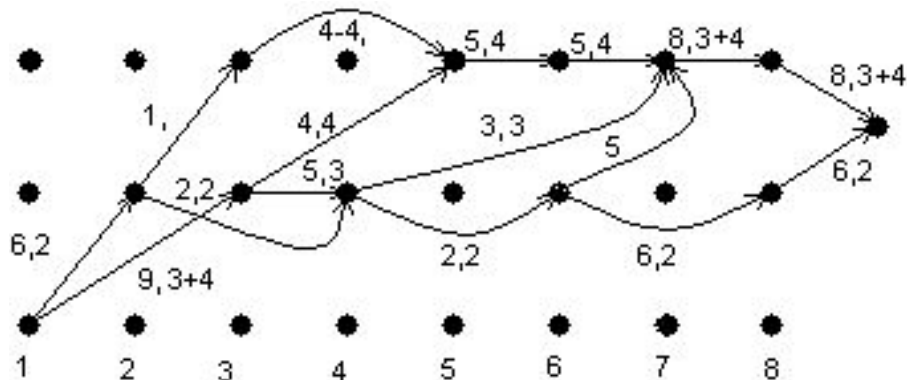


Рисунок 4.6 — Максимальный поток в сети  $G''$ , построенный в результате выполнения алгоритма прорыва.

Декомпозиция потока в этом случае имеет следующий вид.

$\mu_1: 1^{(0)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 4^{(1)} \rightarrow 6^{(1)} \rightarrow 8^{(1)} \rightarrow t$  — поток величины 2,

$\mu_2: 1^{(0)} \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 4^{(1)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)} \rightarrow t$  — поток величины 3,

$\mu_3: 1^{(0)} \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 5^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)} \rightarrow t$  — поток величины 4.

Найденный поток переносим на граф  $G$  (рис.4.7).

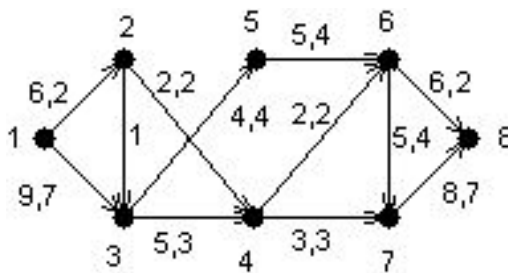


Рисунок 4.7 — Максимальный поток на исходном графе  $G$ .

### 4.3 Потоки в сетях с вентиляльными достижимостями

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в сети с вентиляльно-накопительной достижимостью на следующем примере. Покажем, что и в данном случае одного построения вспомогательного графа недостаточно.

#### Пример 4.3.

Рассмотрим граф из примера 4.1 (рис.4.2) с условием вентиляльно-накопительной достижимости порядка 2.

Положим  $U_0 = \{u_1, u_2, u_8\}$ ,  $U_1 = \{u_3, u_4, u_5, u_9\}$  и  $U_2 = \{u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}$ .

Вспомогательный граф  $G'(X', U', f')$  показан на рис.4.8.

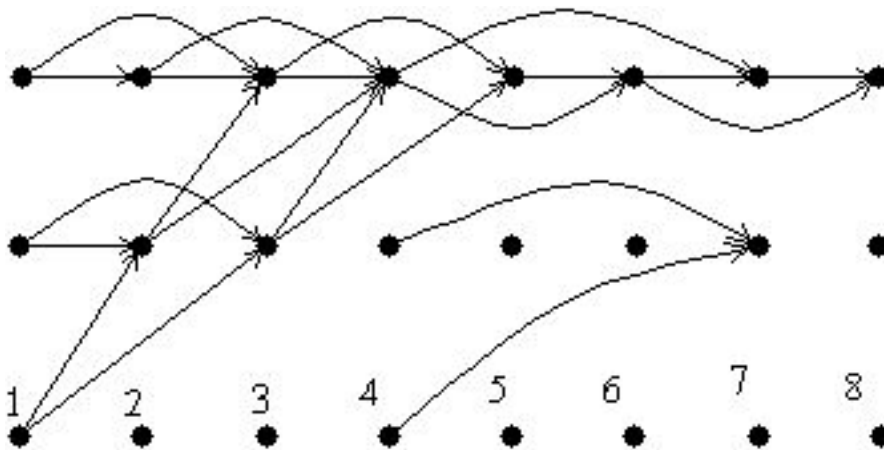


Рисунок 4.8 — Вспомогательный граф  $G'$ .

Удаляя псевдоисточники и псевдостоки, получим сеть  $G''$ . Затем при помощи классических алгоритмов найдём максимальный поток в сети  $G''$ . Результат показан на рис.4.9 (через запятую указаны пропускная способ-

ность и величина локального потока по соответствующей дуге найденная при помощи классического алгоритма).

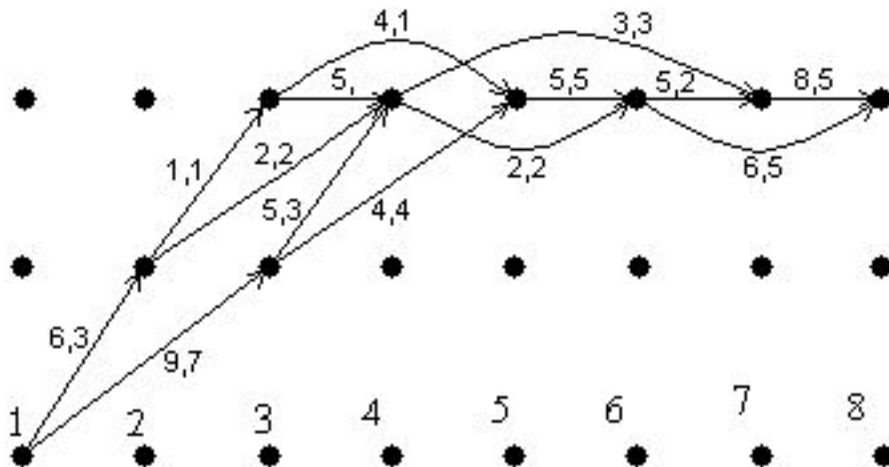


Рисунок 4.9 — Вспомогательный граф  $G''$ .

Декомпозиция потока имеет следующий вид. Для удобства — поскольку нет кратных дуг — используем запись пути как последовательности вершин:

- $\mu_1: 1^{(0)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 3^{(2)} \rightarrow 5^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 8^{(2)}$  — поток величины 1,
- $\mu_2: 1^{(0)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 4^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)}$  — поток величины 2,
- $\mu_3: 1^{(0)} \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 4^{(2)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)}$  — поток величины 3,
- $\mu_4: 1^{(0)} \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 5^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 8^{(2)}$  — поток величины 4.

Однако и в данном случае, собирая полученный поток на исходном графе, получаем, что величина потока, проходящего по дуге  $u_5$  ( $3 \rightarrow 5$ ) превышает пропускную способность этой дуги (рис. 4.10).

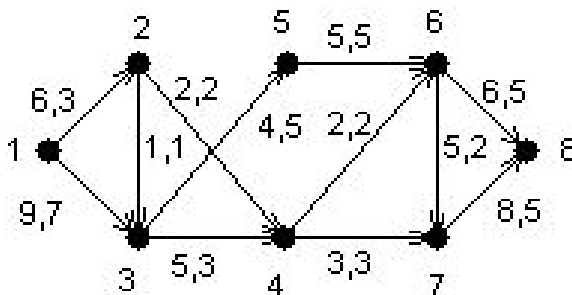


Рисунок 4.10 — Неверное решение: величина потока по дуге  $3 \rightarrow 5$  больше пропускной способности.

Для решения задачи о максимальном потоке в сети из примера 4.3

применим алгоритм прорыва. Результат работы алгоритма показан на рис. 4.11.

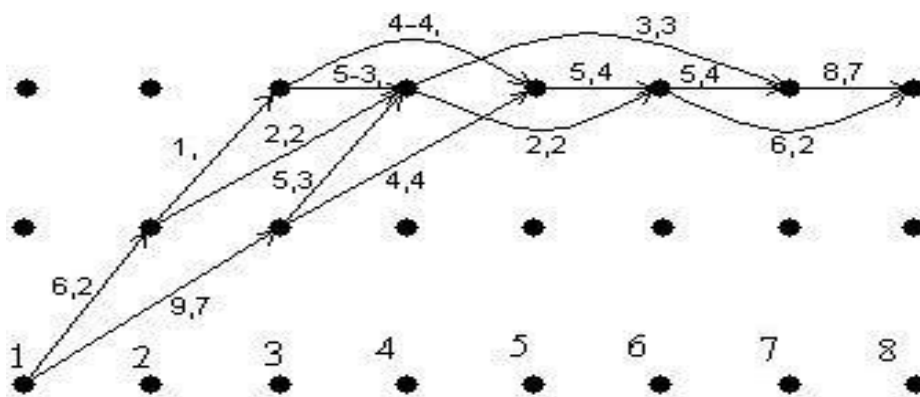


Рисунок 4.11 — Максимальный поток в сети  $G''$ , построенный в результате выполнения алгоритма прорыва.

Декомпозиция потока имеет следующий вид. Здесь также используем запись пути как последовательности вершин:

- $\mu_1: 1^{(0)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 4^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 8^{(2)}$  — поток величины 2,
- $\mu_2: 1^{(0)} \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 4^{(2)} \rightarrow 7^{(2)} \rightarrow 8^{(2)}$  — потоком величины 3,
- $\mu_4: 1^{(0)} \rightarrow 3^{(1)} \rightarrow 5^{(2)} \rightarrow 6^{(2)} \rightarrow 8^{(2)}$  — потоком величины 4.

Найденный поток переносим на исходный граф  $G$ . Результат показан на рис.4.12.

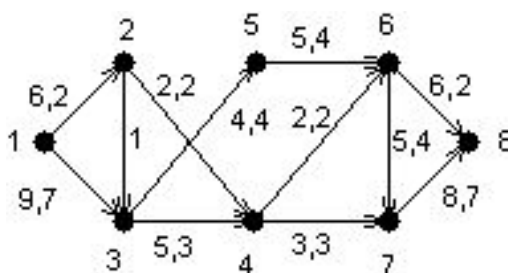


Рисунок 4.12 — Максимальный поток на исходном графе  $G$ .

**Замечание 4.1.** *Задача о нахождении максимального потока в сетях с любым условием венгильной достижимости может быть решена с использованием алгоритма прорыва.*

## 4.4 Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами

### 4.4.1 Основные понятия и определения

Далее введем в рассмотрение обобщение понятия сети со связанными дугами. Как рассматривалось ранее (раздел 4.2 или см. [23]) сеть со связанными дугами — это сеть, у которой множество дуг представлено как объединение попарно непересекающихся подмножеств  $U = U^H \cup \left( \bigcup_{i=1}^k U^i \right)$ . При этом,  $|U^i| \geq 1 \forall i \in [1; k]_Z$  и считается, что пропускные способности заданы для дуг множества  $U^H$  ( $c(u) \forall u \in U^H$ ), а также заданы суммарные пропускные способности для множеств  $U^i$  ( $c(U^i) \forall i \in [1; k]_Z$ ). Другими словами, дуги каждого множества  $U^i$  связаны некоторым соотношением, а именно, сумма величин потоков по каждой дуге множества  $U^i$  не может превышать суммарной пропускной способности множества  $c(U^i)$ , т.е.

$$\sum_{u \in U^i} F(u) \leq c(U^i).$$

**Определение 4.9.** *Отношением связанности дуг сети  $G$  будем называть характеристическую функцию  $\chi : U \times U \rightarrow \{0, 1\}$ , такую, что если  $\chi(u_1, u_2) = 1$ , то говорим, что дуга  $u_1$  влияет на дугу  $u_2$ . В противном случае ( $\chi(u_1, u_2) = 0$ ) — дуга  $u_1$  не влияет на дугу  $u_2$ .*

Отметим, что отношение связанности в произвольной вспомогательной сети  $G''$  для сети  $G$  с меняющейся длительностью прохождения обладает свойствами рефлексивности и симметричности, но не обладает свойством транзитивности (см. [16]).

**Определение 4.10.** *Обобщенной сетью со связанными дугами будем называть ориентированную сеть с введенным на множестве ее дуг отношением связанности.*

Заметим, что рассмотренные ранее сети со связанными дугами являются частным случаем обобщенных сетей со связанными дугами, если



определить отношение связности дуг сети следующим образом:

$$\chi(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & u_1, u_2 \text{ принадлежат одному подмножеству;} \\ 0 & u_1, u_2 \text{ принадлежат разным подмножествам.} \end{cases}$$

**Определение 4.11.** *Степенью влияния дуги  $u$  в обобщенной сети со связанными дугами  $G(X, U, f)$  будем называть величину  $\delta(u) = \sum_{v \in U} \chi(u, v)$ .*

Для произвольной цепи  $\eta$  можно аналогичным образом определить суммарную степень влияния дуг.

**Определение 4.12.** *Суммарной степенью влияния дуг цепи  $\eta$  в обобщенной сети со связанными дугами  $G(X, U, f)$  будем называть величину  $\delta(\eta) = \sum_{u \in \eta} \delta(u)$ .*

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами, считая, что если по некоторой дуге  $u$  пропустили поток величины  $F(u)$ , то для каждой дуги  $v$ , на которую влияет дуга  $u$ , пропускная способность становится равной величине  $\max\{0, c(v) - F(u)\}$  ( $\forall v : \chi(u, v) = 1$ ).

**Теорема 4.3.** *Для обобщенных сетей со связанными дугами вообще говоря не выполняется теорема Форда и Фалкерсона о том, что величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.*

В качестве доказательства этого утверждения приведем следующий пример.

**Пример 4.4.**

Пусть  $G$  – ориентированная сеть со связанными дугами на рис.4.13 такая, что  $\forall u \in U \ c(u) = 1$ .

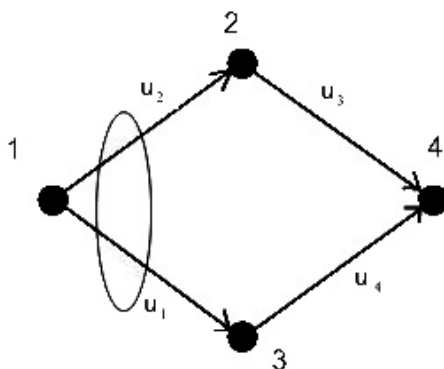


Рисунок 4.13 — Сеть  $G$  со связанными дугами.

Кроме этого,

$$\chi(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & (i = j) \vee (i + j = 3) \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Т.е. связанные дуги — это дуги  $u_1$  и  $u_2$ .

Рассмотрим произвольный разрез. Здесь возможны четыре варианта:  $\{u_1, u_2\}$ ,  $\{u_1, u_3\}$ ,  $\{u_2, u_4\}$  и  $\{u_3, u_4\}$ . В любом из этих случаев пропускная способность разреза равна двум, однако, величина максимального потока в рассматриваемой сети равна единице.

Возможны два варианта насыщения сети потоком целочисленной величины:

а) либо по пути  $\mu_1 = \{u_2, u_3\}$ , но тогда, так как дуги  $u_1$  и  $u_2$  связаны (влияют друг на друга), то пропускная способность дуги  $u_1$  становится равной нулю (рис.4.14).

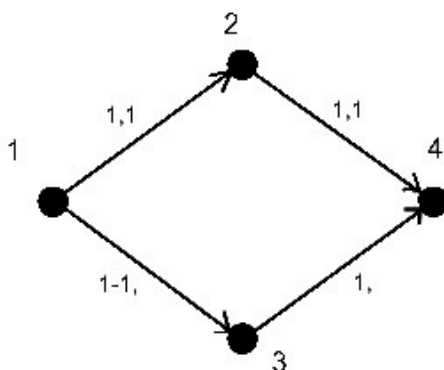


Рисунок 4.14 — Первый вариант насыщения сети целочисленным потоком.

б) либо по пути  $\mu_2 = \{u_1, u_4\}$ , но тогда по той же самой причине пропускная способность дуги  $u_2$  становится равной нулю (рис.4.15).

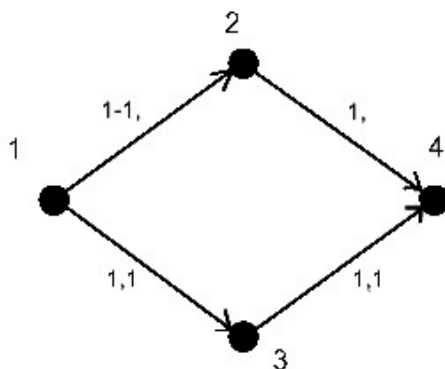


Рисунок 4.15 — Второй вариант насыщения сети целочисленным потоком.

В любом из рассмотренных случаев величина максимального потока в рассматриваемой сети останется равной единице. При насыщении сети нецелочисленными потоками, вариантов насыщения может быть бесконечно много, но ни при одном из них не получим общего потока величины большей единицы.

Таким образом, для решения задачи о максимальном потоке в сети со связанными дугами применять классические алгоритмы не представляется возможным.

#### 4.4.2 Верхняя оценка величины максимального потока

Построим оценку сверху для величины максимального потока в сети со связанными дугами. При этом будем считать, что если  $\chi(u, v) = 1$ , то  $c(u) = c(v)$ .

**Теорема 4.4.** Пусть  $(Y, Y')$  — некоторый разрез в сети со связанными дугами  $G$ , тогда величина максимального потока в сети  $G$  не превышает величины

$$v^* \leq \max_{M \subset (Y, Y')} \sum_{u \in M} c(u), \quad (4.1)$$

где  $M$  — максимальное по вложению подмножество дуг разреза, обладающее тем свойством, что ни одна дуга множества  $M$  не влияет ни на какую другую дугу этого же множества.

∇ *Доказательство.* Доказывать будем от противного.

Предположим, что существует такой поток, что для некоторого разреза  $(Y, Y')$  не выполняется неравенство (4.1), т.е.  $v^* > \sum_{u \in M} c(u)$ . Существование

потoka означает, что найдутся такие пути  $\mu_1, \dots, \mu_k$ , что  $\sum_{i=1}^k F(\mu_i) = v^*$ .

Обозначим дугу в пересечении  $\mu_i \cap (Y, Y')$  через  $u_i$ .

Ясно, что имеет место равенство

$$\sum_i F(u_i) = \sum_j F(\mu_j) = v^*,$$

или, что то-же самое,  $v^* = \sum_{u \in W} F(u)$ , где  $W$  – множество всех дуг разреза, на которых величина потока не равна нулю.

Отметим, что для пары дуг  $u, v \in W$  таких, что  $u \neq v$  если  $\chi(u, v) = 1$ , то  $F(u) + F(v) \leq \max\{c(u), c(v)\}$ . Таким образом, существует множество  $W'$  ( $\subset W$ ) – множество дуг попарно не влияющих друг на друга – такое, что  $\sum_{u \in W'} F(u) \leq \sum_{u \in W'} c(u)$ .

Собирая все соотношения, получим следующее выражение  $\sum_{u \in W'} c(u) \geq v^*$ . С другой стороны поток был выбран таким образом, чтобы  $v^* > \sum_{u \in M} c(u)$ ,

следовательно, имеет место неравенство  $\sum_{u \in W'} c(u) > \sum_{u \in M} c(u)$ , а это противоречит выбору множества  $M$ .

△

**Теорема 4.5.** *Величина максимального потока в сети  $G$  не превышает величины*

$$v^* \leq \min_{(Y, Y')} \left\{ \max_{M \subset (Y, Y')} \sum_{u \in M} c(u) \right\}, \quad (4.2)$$

где  $M$  – максимальное по вложению подмножество дуг разреза  $(Y, Y')$ , обладающее тем свойством, что ни одна дуга множества  $M$  не влияет ни на какую другую дугу этого же множества.

Последняя теорема является следствием предыдущей теоремы 4.4.

**Пример 4.5.**

Рассмотрим сеть  $G$  на рис.4.16. При этом,  $c(u_1) = c(u_2) = c(u_3) = 2$ ,

$c(u_4) = c(u_5) = 1$ . Пропускные способности остальных дуг рассматриваемой сети равны трем.

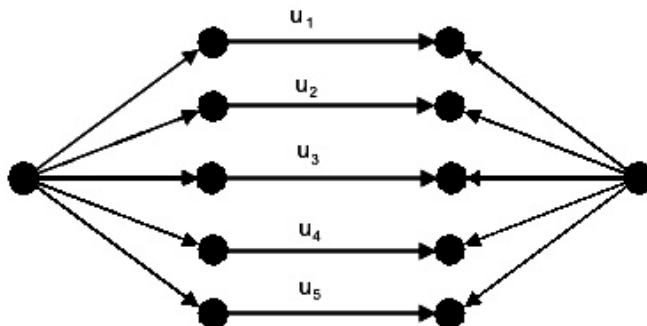


Рисунок 4.16 — Сеть  $G$  со связанными дугами.

Будем считать, что  $\chi(u_1, u_2) = \chi(u_2, u_3) = \chi(u_4, u_5) = 1$ . Для всех остальных пар дуг  $u, v$   $\chi(u, v) = 0$ .

Величина максимального потока в такой сети равна  $v^* = 5$ . Отметим, что для разреза  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  множество  $M$  имеет вид:  $M = \{u_1, u_3, u_4\}$  или  $M = \{u_1, u_3, u_5\}$ . В каждом из этих случаев имеет место равенство:  $\sum_{u \in M} c(u) = 5$ . Для всех остальных разрезов эта величина больше.

Таким образом, оценка, предложенная в предыдущей теореме 4.5, является точной. При этом, существуют сети, для которых в соотношении (4.2) имеет место строгое неравенство. Покажем такую ситуацию на следующем примере.

**Пример 4.6.**

Рассмотрим сеть  $G$  на рис.4.17. При этом, пропускные способности всех дуг рассматриваемой сети равны двум.

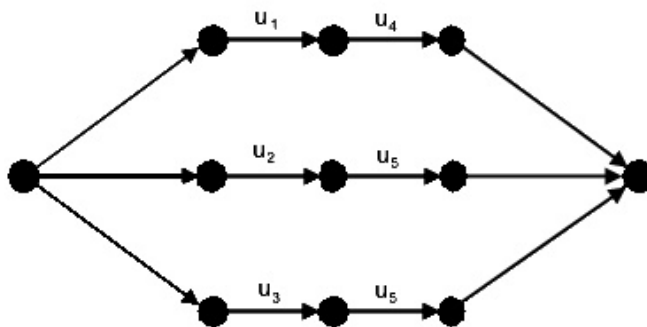


Рисунок 4.17 — Сеть  $G$  со связанными дугами.

Будем считать, что  $\chi(u_1, u_2) = \chi(u_2, u_3) = 1$  и  $\chi(u_4, u_5) = \chi(u_4, u_6) = 1$ . Для всех остальных пар дуг  $u, v$   $\chi(u, v) = 0$ .

По соотношению (4.2)  $v^* \leq 4$ . Однако, величина максимального целочисленного потока в рассматриваемой сети равна двум. На рис. 4.18 (а, б и в) показаны варианты насыщения сети целочисленным потоком.

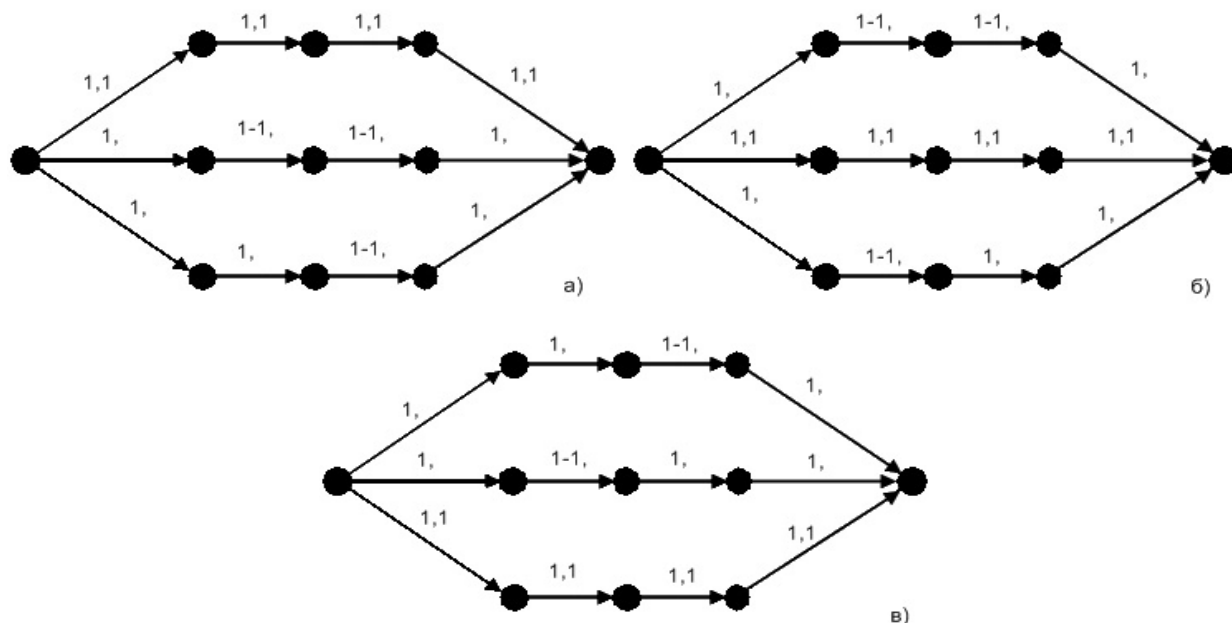


Рисунок 4.18 — Варианты насыщения сети целочисленным потоком.

Однако, действительная величина максимального потока равна трем: по каждой ветке следует пропустить единичный поток.

Рассмотрим вопрос о нахождении множества  $M$ , обладающего свойствами, описанными в теоремах 4.4 и 4.5, для некоторого разреза  $(Y, Y')$ . Для его нахождения построим вспомогательный неориентированный граф  $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$  по следующему правилу:

Каждой дуге  $u$  разреза  $(Y, Y')$  поставим в соответствие вершину  $x_u$  на вспомогательном графе  $\tilde{G}$ . Ребра графа  $\tilde{G}$  строятся следующим образом: если для пары дуг  $u, v \in (Y, Y')$  таких, что  $u \neq v$  выполняется  $\chi(u, v) = 1$ , то на графе  $\tilde{G}$  достраивается ребро, инцидентное вершинам  $x_u$  и  $x_v$ .

Ясно, что задача нахождения множества  $M$  для разреза  $(Y, Y')$  равносильна задаче нахождения на вспомогательном графе  $\tilde{G}$  внутренне устойчивого множества вершин (см. [8], [47]), имеющего наибольшее количество элементов. Более того, по теореме 2 гл. 5 в [8] такое множество является

ядром вспомогательного графа.

Для нахождения такого множества можно использовать метод Магу ([47]) или алгоритм построения ядра с наибольшим числом элементов при помощи паросочетаний для произвольного неориентированного графа ([8]).

#### 4.4.3 Нижняя оценка величины максимального потока

Построим оценку снизу для величины максимального потока в сети со связанными дугами.

Ранее было показано, что для обобщенных сетей со связанными дугами не выполняется теорема Форда и Фалкерсона. Покажем, что в сети с целочисленными пропускными способностями всех дуг максимальный поток может быть нецелочисленной величины.

#### Пример 4.7.

Рассмотрим сеть на рис.4.19. Будем считать, что все дуги этой сети являются связанными друг с другом. Найдем величину максимального потока в этой сети.

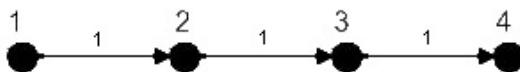


Рисунок 4.19 — Сеть со связанными дугами. Все три дуги этой сети связаны.

Поскольку существует всего один путь из источника в сток, то, очевидно, что только он будет насыщающим. Однако, величина максимального потока, который может быть пропущен через сеть будет равна  $\frac{1}{3}$ , т.к. насыщая одну дугу  $u$ , мы обязаны уменьшить на величину насыщения пропускные способности всех дуг, на которые влияет  $u$ . А поскольку все дуги связаны, то получаем, что для каждой дуги  $u$  единственного здесь пути  $3F(u) = c(u)$  и  $c(u) = 1$ .

**Теорема 4.6.** *Для величины максимального потока в сети  $G$  со связанными дугами имеет место соотношение*

$$v^* \geq \min_{(Y, Y')} \left\{ \min_{M \subset (Y, Y')} \left\{ \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|} \right\} \right\}, \quad (4.3)$$

где множество  $M$  является ядром вспомогательного графа  $\tilde{G}$  для выбранного разреза  $(Y, Y')$ , а  $m_u = \{v \in U \mid \chi(u, v) = 1\}$  – множество всех дуг исходной сети, на которые влияет дуга  $u$ .

$\nabla$  *Доказательство.* Доказывать будем от противного. Выберем множество  $M$ , на котором выполняются минимумы в соотношении (4.3) и предположим, что существует такой поток, для которого

$$v^* < \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|}.$$

Существование потока означает, что найдутся такие пути  $\mu_1, \dots, \mu_k$  такие, что  $v^* = \sum_{i=1}^k F(\mu_i)$ . Для определенности будем считать, что число  $k$  – наименьшее из значений для всевозможных наборов насыщающих путей  $\{\mu_i\}$ . Такой набор путей обладает свойством, что увеличение потока по каждому пути полностью насыщает хотя бы одну дугу сети.

Отметим, что  $F(\mu_i) = \min_{u \in \mu_i} \left\{ \frac{c_i(u)}{|W_i(u)|} \right\}$ , где  $W_i(u) = m_u \cap \mu_i$ ,  $c_i(u)$  – пропускная способность дуги  $u$  после насыщения сети потоком при помощи путей  $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}$ .

Так как при увеличении потока по каждому пути  $\mu_i$  полностью насыщается хотя бы одна дуга  $u_i$  сети, то выполняется, что

$$\sum_{i=1}^k F(\mu_i) \geq \sum_{i=1}^k \frac{c(u_i)}{|m_{u_i}|}.$$

Следовательно,  $v^* \geq \sum_{i=1}^k \frac{c(u_i)}{|m_{u_i}|}$ , а, значит, существует такое множество дуг  $M' = \{u_i\}_{i=1}^k$ , для которого  $v^* \geq \sum_{u \in M'} \frac{c(u)}{|m_u|}$ .

Таким образом, получим  $\sum_{u \in M'} \frac{c(u)}{|m_u|} \leq v^* < \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|}$ , т.е.

$$\sum_{u \in M'} \frac{c(u)}{|m_u|} < \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|},$$

а это противоречит выбору множества  $M$ .

$\triangle$



#### 4.4.4 Алгоритм нахождения максимального потока

Приведем алгоритм нахождения максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами. Этот алгоритм не является точным, т.е. не во всех случаях найденный поток является максимальным.

Далее потребуются следующие понятия.

**Определение 4.13.** Будем говорить, что цепь  $\eta_1$  влияет на цепь  $\eta_2$  если выполняется следующее условие

$$\exists u \in \eta_1 \exists v \in \eta_2 (u \neq v) \& (\chi(u, v) = 1).$$

#### Алгоритм 4.2.

1. Найдем все простые насыщающие цепи для сети  $G$ . Если насыщающих цепей нет, то алгоритм заканчивает работу.

2. Для найденного множества насыщающих цепей построим вспомогательный граф  $\tilde{G}$ , аналогичный вспомогательному графу для дуг разреза в пункте 4.4.2.

3. Для каждой вершины  $x$  графа  $\tilde{G}$  назначаем метку  $g(x) = -1$  и метку  $t(x)$ , равную степени этой вершины. Кроме этого, определяем множество  $S = \emptyset$ , которое будем называть множеством помеченных вершин.

4. Из множества  $T = \tilde{X} \setminus S$  выбираем вершину  $x$  с наименьшим значением метки  $t(x)$ .

5. Для выбранной вершины  $x$  назначаем метку  $g(x)$ , выбирая ее как наименьшее целое неотрицательное число, которое не равно значениям меток  $g(y)$  на смежных с  $x$  вершинах  $y$ .

6. Добавляем вершину  $x$  к помеченным вершинам:  $S := S \cup \{x\}$ . Для всех вершин  $y$ , смежных с  $x$  уменьшаем на единицу метку  $t(y)$ .

7. Если  $S \neq \tilde{X}$ , то возвращаемся на Шаг 4, иначе работу по назначению меток прекращаем и идем на Шаг 8.

8. Разбиваем множество вершин вспомогательного графа на подмножества  $\tilde{X} = \bigcup_{i=0}^k X_i$  ( $k = \max_{x \in \tilde{X}} g(x)$ ), отнеся к множеству  $X_i$  те вершины  $y$  графа  $\tilde{G}$ , для которых  $g(y) = i$ .

9. Из подмножеств разбиения выбираем подмножество  $Y = X_0$ .

10. Насыщаем исходную сеть  $G$  потоком, при помощи насыщающих цепей, соответствующих элементам множества  $Y$ . Насыщение будем производить в произвольном порядке, но с учетом уже произведенного насыщения. Возврат на Шаг 1.

Вспомогательный граф  $\tilde{G}$  неориентированный. Это означает, что согласно определениям в [8] он является симметрическим, а поскольку  $\tilde{G}$  не содержит петель, то по следствию к теореме 2 главы 5 в [8] он обладает хотя бы одним ядром.

С другой стороны, по следствию к теореме 5 главы 5 в [8] вспомогательный граф  $\tilde{G}$  допускает функцию Гранди.

Отметим, что первые пять шагов алгоритма 4.2 позволяют построить функцию Гранди на графе  $\tilde{G}$ . В данном случае построенная функция  $g$  (т.е. метки вершин графа) – это функция Гранди.

Известно, что для функции Гранди множества  $X_0 = g^{-1}(\{0\})$  и  $X_1 = g^{-1}(\{1\})$  обязательно являются ядрами (см. [8]). Однако, эти множества не всегда имеют наибольшее количество элементов. Например, для вспомогательного графа на рис.4.20 функция Гранди построена по правилам в алгоритме 4.2 (для удобства, вершины не помечены, а числа, рядом с вершинами являются значениями построенной функции Гранди). Видно, что множество с наибольшим числом элементов – это множество  $X_2$ .

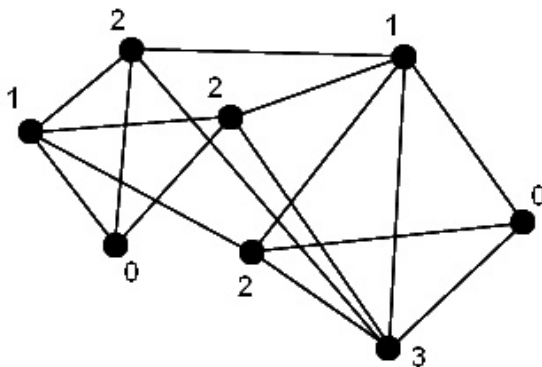


Рисунок 4.20 — Вспомогательный граф  $\tilde{G}$ .

Приведенный алгоритм предполагает нахождение какого-нибудь ядра, не обязательно с наибольшим числом элементов (как это требуется при

построении верхней оценки максимального потока).

Рассмотрим пример применения алгоритма 4.2.

### Пример 4.8.

Рассмотрим сеть  $G$  на рис.4.21. Пропускные способности заданы следующим образом:  $c(u_1) = c(u_6) = c(u_7) = 7$ ,  $c(u_2) = c(u_3) = c(u_5) = c(u_8) = 9$  и  $c(u_4) = c(u_9) = 10$ .

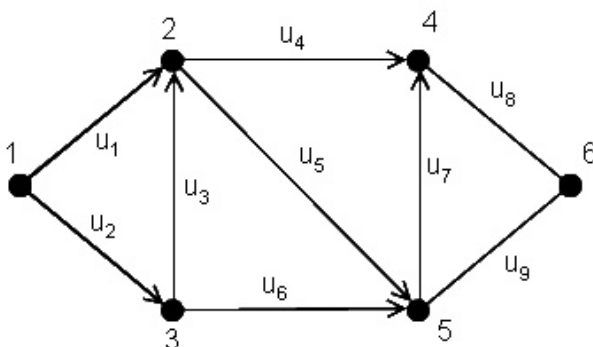


Рисунок 4.21 — Сеть  $G$  со связанными дугами.

Будем считать, что дуги предложенной сети влияют друг на друга следующим образом:

$$m_{u_1} = \{u_1, u_3\}, m_{u_2} = \{u_2\}, m_{u_3} = \{u_1, u_3, u_7\}, m_{u_4} = \{u_4\}, m_{u_5} = \{u_5, u_8\}, m_{u_6} = \{u_6\}, m_{u_7} = \{u_3, u_7\}, m_{u_8} = \{u_5, u_8\}, m_{u_9} = \{u_9\}.$$

Перечислим все простые насыщающие цепи в этой сети:

- $\eta_1 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$
- $\eta_2 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$
- $\eta_3 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$
- $\eta_4 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$
- $\eta_5 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$
- $\eta_6 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$
- $\eta_7 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$
- $\eta_8 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6.$

Для набора  $\{\eta_1, \dots, \eta_8\}$  построим вспомогательный граф  $\tilde{G}$ . На нем построим функцию Гранди согласно инструкциям алгоритма 4.2. Граф

представлен на рис.4.22 (большие цифры соответствуют номерам цепей, малые – значениям функции Гранди  $g$ ).

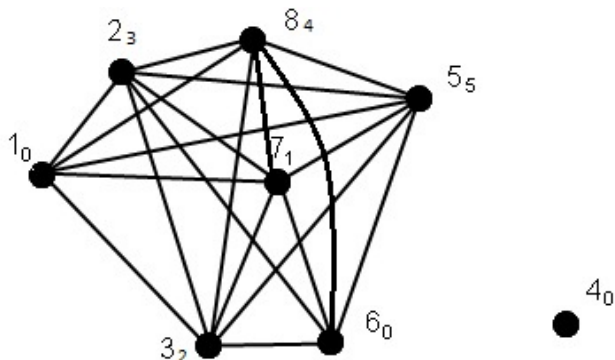


Рисунок 4.22 — Вспомогательный граф  $\tilde{G}$ .

Таким образом, насыщающие цепи, при помощи которых будем увеличивать поток – это цепи  $\eta_1$ ,  $\eta_4$  и  $\eta_6$ . Отметим, что удобнее начинать насыщение сети при помощи цепей, соответствующих изолированным вершинам вспомогательного графа  $\tilde{G}$ .

После увеличения имеем следующий поток в исходной сети (рис.4.23).

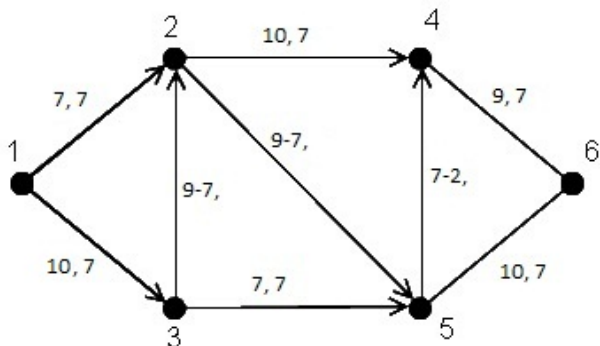


Рисунок 4.23 — Первый этап насыщения исходной сети потоком.

Снова построим все простые насыщающие цепи:

$$\eta_1 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

$$\eta_2 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$$

$$\eta_3 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6.$$

Для нового набора насыщающих цепей построим вспомогательный граф  $\tilde{G}$  и найдем на нем функцию Гранди (рис.4.24).

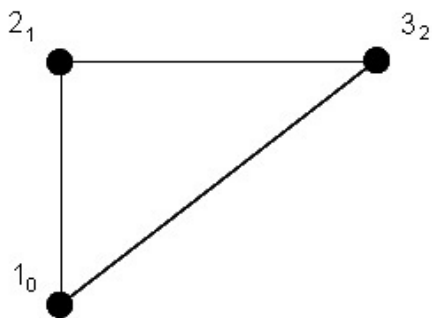


Рисунок 4.24 — Вспомогательный граф  $\tilde{G}$  для следующего этапа насыщения.

По рисунку видно, что есть одна насыщающая цепь, при помощи которой можно увеличить поток. В качестве такой цепи можно выбрать любую из трех построенных цепей. Возьмем  $\eta_1$ . После увеличения имеем следующий поток в исходной сети (рис.4.25).

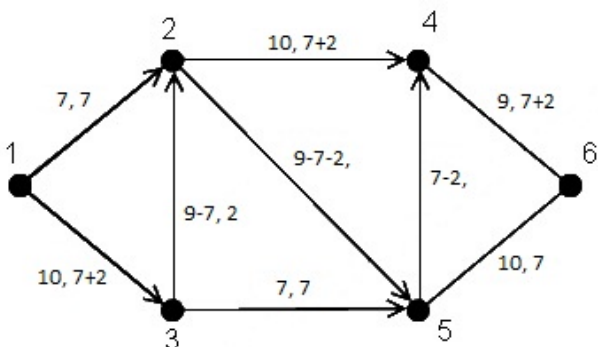


Рисунок 4.25 — Второй этап насыщения исходной сети потоком.

Для полученной сети не существует ни одной насыщающей цепи. Следовательно, работа алгоритма завершена. Заметим, что построенный поток является максимальным  $v^* = 16$ . Более того, на нем достигается равенство в соотношении 4.2 для верхней оценки величины максимального потока в сети со связанными дугами.

В следующем примере рассмотрим ситуацию, когда алгоритм находит поток близкий к максимальному, но который таковым не является.

**Пример 4.9.**

Рассмотрим сеть  $G$  на рис.4.26. При этом,  $c(u_1) = c(u_3) = 3$ ,  $c(u_2) = c(u_5) = 4$ ,  $c(u_4) = c(u_6) = c(u_7) = 5$  и связанными являются следующие

пары дуг:  $\chi(u_2, u_5) = 1$  и  $\chi(u_4, u_7) = 1$ .

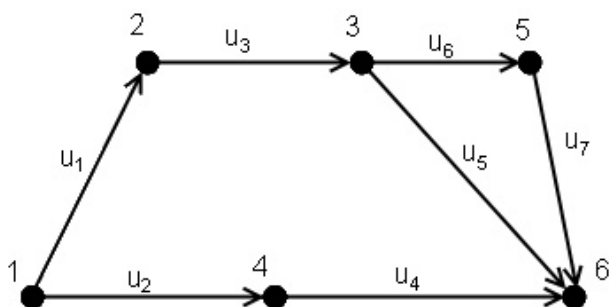


Рисунок 4.26 — Сеть  $G$  со связанными дугами.

Перечислим все простые насыщающие цепи для этой сети:

$$\eta_1: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6;$$

$$\eta_2: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$$

$$\eta_2: 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

Для найденного набора насыщающих цепей построим вспомогательный граф  $\tilde{G}$ . На нем построим функцию Гранди согласно инструкциям алгоритма 4.2. Граф представлен на рис.4.27.

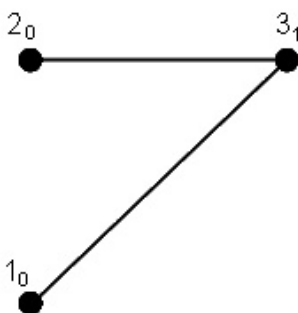


Рисунок 4.27 — Вспомогательный граф  $\tilde{G}$ .

Таким образом, насыщающие цепи, при помощи которых будем увеличивать поток – это цепи  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Заметим, что эти цепи накладываются друг на друга таким образом, что насыщая дуги сети по одной из них становится невозможным насыщение по другой. Выберем наугад для насыщения цепь  $\eta_1$ .

После увеличения имеем следующий поток в исходной сети (рис.4.28).

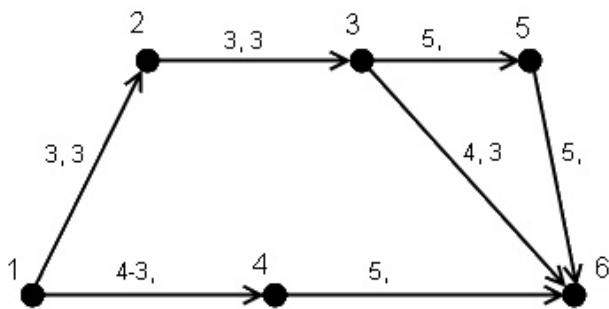


Рисунок 4.28 — Первый этап насыщения исходной сети потоком.

Снова построим все простые насыщающие цепи:

$$\eta_1 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

Так как насыщающая цепь одна, то ясно, что именно с ее помощью будем увеличивать поток. После увеличения имеем следующий поток в исходной сети (рис.4.29).

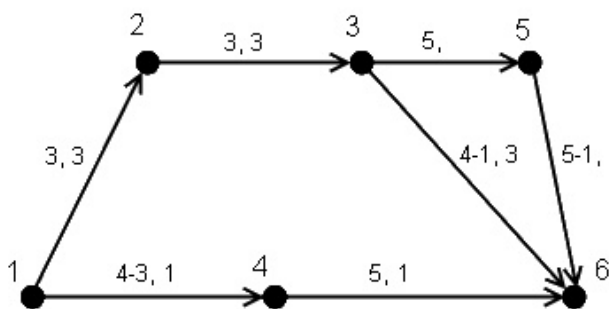


Рисунок 4.29 — Второй этап насыщения исходной сети потоком.

Для полученной сети не существует ни одной насыщающей цепи. Следовательно, работа алгоритма завершена. Величина построенного потока равна  $v = 4$ . Отметим, что найденный поток не удовлетворяет неравенствам (4.2) и (4.3) для оценки величины максимального потока. В таком случае должно выполняться следующее двойное неравенство:  $4,5 \leq v \leq 7$ , чего не может быть, поскольку  $v = 4$ . Следовательно, найденный поток не может быть максимальным и действительно, в сети может быть пропущен поток величины  $v^* = 5$  (рис.4.30), который будет максимальным.

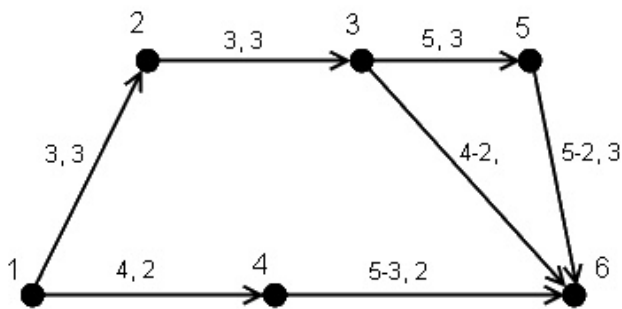


Рисунок 4.30 — Максимальный поток в исходной сети.

Таким образом, при помощи алгоритма был найден поток, не являющийся максимальным. Однако, если бы мы на первом этапе насыщения выбрали ведущей цепь  $\eta_2$ , то при дальнейших действиях найденный поток был бы максимальным. Этот же максимальный поток можно найти, если в качестве первого набора насыщающих цепей выбрать те, которые соответствуют ядру  $\tilde{G}$  с меньшим количеством элементов (т.е. цепь  $\eta_3$ ).

## 4.5 Задача о прибыли сети при заданной величине допустимого потока

### 4.5.1 Максимальная прибыль сети от прохождения по ней потока заданной величины

Рассмотрим сеть  $G(X, U, f)$ , для каждой дуги  $u$  которой наряду с пропускной способностью  $c(u)$  указаны ещё две величины:

1.  $p(u)$  — вероятность прохождения по дуге  $u$ ,
2.  $t(u)$  — величина прибыли от прохождения по ней единичного потока, которую также будем называть удельной прибылью.

Всюду в разделе 4.5 будем рассматривать бесконтурные сети, если не оговорено другое.

Прибыль всей сети от прохождения некоторого потока  $F$  может быть получена в виде следующей суммы:

$$t^* = \sum_{u \in U} F(u) \cdot t(u). \tag{4.4}$$

Для любой сети существует большое количество допустимых потоков



заданной величины  $v$ , которая меньше, чем величина максимального потока (величина  $v^*$ ). Однако, при помощи непосредственного задания вероятностей перехода по всем дугам, мы можем фиксировать некоторый один поток, поскольку в этом случае вероятность перехода по дуге указывает не предпочтение единичного потока (как в задаче о случайном блуждании частицы), а играет роль распределения потока, проходящего через некоторую вершину. При этом, будем считать, что распределение таково, что для каждой вершины  $x \in X \setminus \{t\}$  должны выполняться равенства

$$p(v) \cdot F(u) = p(u) \cdot F(v) \quad \forall u, v \in [x]^+ \setminus [x]^*, \quad (4.5)$$

где  $[x]^* = \{w \in [x]^+ \mid F(w) = c(w)\}$ . Другими словами, рассматриваемое распределение устанавливает обязательную пропорциональность только между ненасыщенными дугами сети  $G$ .

**Алгоритм 4.3** (*Нахождения потока заданной величины  $v$* ).

*Шаг 1. Производим правильную нумерацию сети  $G$ , т.е. нумеруем вершины сети  $G$  таким образом, чтобы из вершины с большим номером не было ни одной дуги в вершину с меньшим номером.*

*Полагаем, что начальный поток в сети  $G$  является тривиальным, т.е.  $F(u) = 0 \quad \forall u \in U$ . Отметим, что величины  $p(u)$  для каждой дуги  $u$  являются входными параметрами наряду с величиной  $v$ .*

*Шаг 2. Введём рассмотрение величину потока  $F^* = v$ , пришедшего в текущую вершину, положим значение  $i = 1$ .*

*Шаг 3. Определим множество дуг*

$$W^+(i) = [i]^+.$$

*Шаг 4. Если  $W^+(i) \neq \emptyset$ , то для каждой дуги  $u \in W^+(i)$  выполним пересчёт величины потока, проходящего по ней:*

$$F(u) := F(u) + \begin{cases} F^* \cdot p(u) & , F^* \cdot p(u) < c(u), \\ c(u) & , \text{ иначе.} \end{cases}$$

*Шаг 5. Уменьшим величину  $F^* := F^* - \sum_{u \in [i]^+} F(u)$ .*

Если  $F_i^* > 0$ , множество  $W^+(i) := W^+(i) \setminus [i]^*$ , пересчитаем величины

$$p(u) := \frac{p(u)}{\sum_{\substack{v \in W^+(i) \\ F(v) - c(v) < 0}} p(v)}$$

и возврат на шаг 4. Иначе, переход на шаг 6.

Шаг 6. Увеличим на единицу значение  $i$  и зададим следующее значение величины пришедшего в текущую вершину (вершину с номером  $i$ ):

$$F_i^* = \sum_{u \in [i]^-} F(u).$$

Если  $i = |X|$ , то алгоритм завершает работу. Иначе возврат на шаг 3.

Алгоритм 4.3 позволяет в бесконтурной сети находить поток заданной величины и соблюдающий распределение (4.5).

Рассмотрим задачу нахождения такого распределения потока в сети  $G$ , чтобы прибыль от фиксированного этой операцией потока заданной величины  $v$  ( $v < v^*$ ) была максимальной. При этом считаем, что при прохождении максимального потока через сеть  $G$  все ее дуги являются насыщенными.

**Алгоритм 4.4** (Нахождения распределения потока в сети).

Шаг 1. Положим  $v' = v$  и полагаем, что начальный поток в сети  $G$  является тривиальным, т.е.  $F(u) = 0 \forall u \in U$ .

Шаг 2. Просматриваем все дуги  $u$ , если пропускная способность дуги больше, чем  $v'$ , полагаем пропускную способность дуги равной  $v'$ .

Шаг 3. Находим путь  $\mu(s, t)$  (от источника до стока) максимальной прибыли. Пусть  $c(\mu)$  — его пропускная способность.

Для каждой дуги  $u$  пути  $\mu$  полагаем  $F(u)^+ = \min\{v', c(\mu)\}$  и пересчитываем значение  $v'^- = c(\mu)$ . Здесь обозначение  $a^+ = b$  означает увеличение значения  $a$  на величину  $b$ , также  $a^- = b$  означает уменьшение значения  $a$  на величину  $b$ .

Шаг 4. Если  $v' > 0$ , то переход на шаг 2. Иначе, переход на шаг 5.

Шаг 5. Для каждой дуги  $u \in U$  задаём величины

$$p(u) = \frac{F(u)}{\sum_{\nu \in [(p_1 \circ f)(u)]^+} F(\nu)}.$$

На каждой итерации данного алгоритма находится увеличивающий путь максимальной прибыли и насыщается он максимально возможным потоком. Следовательно, в результате выполнения алгоритма будут найдены вероятности перехода, фиксирующие поток, на котором прибыль сети максимальна.

#### 4.5.2 Случай сети с $k$ источниками и $m$ стоками

Пусть в сети  $G$  задано  $k$  источников  $\{s_1, \dots, s_k\}$  и  $m$  стоков  $\{t_1, \dots, t_m\}$ . Кроме этого, пусть для каждого источника  $s_i$  задана максимальная величина потока  $v_s^i$ , который может выйти из  $s_i$ , а для каждого стока  $t_j$  — величина потока  $v_t^j$ , который обязательно должен прийти в  $t_j$ . Рассмотрим задачу нахождения потока максимальной прибыли, удовлетворяющего указанным условиям.

Заметим, что если

$$\sum_{i=1}^k v_s^i < \sum_{i=1}^m v_t^i,$$

то рассматриваемая задача не имеет решений, поскольку хотя бы у одного стока  $t_q$  не будет достигнута обязательная величина локального потока  $v_t^q$ .

Поэтому полагаем, что

$$\sum_{i=1}^k v_s^i \geq \sum_{i=1}^m v_t^i. \quad (4.6)$$

Однако, и в этом случае задача может не иметь решений, поскольку даже при выполнении неравенства (4.6) может оказаться, что пропускная способность минимального разреза  $c^*(G)$  в сети  $G$  меньше, чем  $\sum_{i=1}^m v_t^i$ .

Таким образом, потребуем также выполнения следующего условия для рассматриваемой сети:

$$c^*(G) \geq \sum_{i=1}^m v_t^i. \quad (4.7)$$

Решение рассматриваемой задачи — искомый поток, удовлетворяющий всем требованиям, на котором достигается максимальная прибыль сети — будем находить следующим образом:

Для графа  $G$  строим граф  $G'$ , достраивая «фиктивные» источник  $s$  и сток  $t$ , и соединяем их дугами со всеми источниками  $s_j$  и со всеми стоками  $t_i$  соответственно. При этом, пропускные способности достроенных дуг равны:  $c(s, s_j) = v_s^j \ \forall j \in [1; k]_Z$ ;  $c(t_i, t) = v_t^i \ \forall i \in [1; m]_Z$ .

После этого к полученному графу применяем алгоритм 4.4 с величиной искомого потока

$$v = \sum_{i=1}^m v_t^i.$$

### Пример 4.10.

Рассмотрим граф  $G'$  на рис.4.31 такой, что  $v_s^1 = 3$ ,  $v_t^1 = 2$ ,  $v_t^2 = 1$ ,  $c(s_1, t_1) = 1$ ,  $c(s_1, t_2) = 2$ .

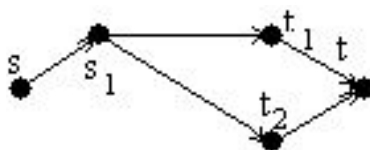


Рисунок 4.31 — Граф  $G'$ .

Заметим, что  $c^*(G) = 3 = \sum_{i=1}^2 v_t^i$ , однако, решения в этом случае нет.

Пример показывает, что кроме выполнения условий (4.6) и (4.7). Для определения разрешимости рассматриваемой задачи необходим более детальный анализ структуры сети.

Таким образом, условия (4.6) и (4.7) являются необходимыми, но не достаточными условиями разрешимости рассматриваемой задачи.

### 4.5.3 Прибыль от потоков с обратной связью в орсетях с ограничениями на достижимость

Пусть  $G(X, U, f)$  — орсеть, с каждой дугой которой связаны три числа:  $c(u)$ ,  $c_+(u)$  и  $c_-(u)$ , которые удовлетворяют равенству  $c(u) = c_+(u) + c_-(u)$ . Величина  $c(u)$  — это пропускная способность дуги  $u$ , величину  $c_+(u)$

будем называть пропускной способностью дуги  $u$  в прямом направлении, а  $c_-(u)$  — пропускной способностью дуги в обратном направлении.

Фактически, величины  $c_+(u)$  и  $c_-(u)$  позволяют рассматривать вместе с сетью  $G$  сети  $G_+$  и  $G_-$ , где  $G_+$  — это сеть  $G$ , пропускная способность каждой дуги  $u$  которой равна  $c_+(u)$ , сеть  $G_-$  получается из сети  $G$  обратной ориентацией каждой дуги  $u$  с получением дуги  $u'$ , при этом, пропускная способность дуги  $u'$  равна  $c_-(u)$ .

Сеть  $G_+$  будем называть прямой, а любой поток в ней — прямым потоком. Сеть  $G_-$  будем называть сетью обратной связи, а любой поток в ней — потоком обратной связи.

**Определение 4.14.** *Потоком с обратной связью в сети  $G$  будем называть пару потоков: один в сети  $G_+$ , другой в сети  $G_-$ .*

Под величиной потока с обратной связью  $v_0$  понимаем сумму величин прямого потока  $v_+$  и потока обратной связи  $v_-$ . Очевидно, что величина максимального потока с обратной связью  $v_0^* \leq v^*$ , где  $v^*$  — величина максимального классического потока в сети  $G$ .

**Пример 4.11.**

Рассмотрим сеть  $G_1$  на рис.4.32. Для каждой дуги  $u$  сверху указана выбранная величина  $c_+(u)$ , снизу — выбранная величина  $c_-(u)$ .

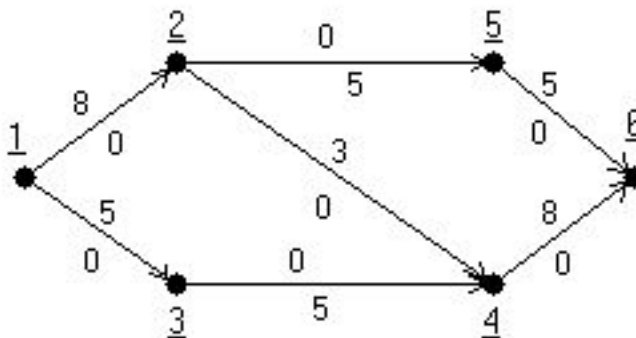


Рисунок 4.32 — Сеть  $G_1$ .

Ясно, что величина максимального потока с обратной связью в сети  $G_1$  равна  $v_0^* = 3$ , тогда, как величина максимального классического потока в сети  $G$  равна  $v^* = 13$ .

Пусть теперь для каждой дуги  $u$  сети  $G(X, U, f)$  указаны пропускная способность  $c(u)$  и прибыль от прохождения по ней единичного потока  $t(u)$ . Рассмотрим задачу назначения всех величин  $c_+(u)$  и  $c_-(u)$  таким образом, чтобы  $c_+(u) + c_-(u) = c(u) \quad \forall u \in U$  и прибыль сети была максимальной. При этом, будем считать, что прямой поток и поток обратной связи связаны некоторым условием. Для примера рассмотрим следующее соотношение

$$v_+^* = \delta \cdot v_-^*, \quad (4.8)$$

которое означает, что величина максимального прямого потока должна быть равна величине максимального потока обратной связи, умноженного на величину  $\delta \in \mathbb{R}_+$ .

### Пример 4.12.

Рассмотрим сеть  $G_2$  на рис.4.33, для каждой дуги  $u$  которой над дугой указана выбранная величина  $c_+(u)$ , под дугой — выбранная величина  $c_-(u)$ .  $\delta = 1$ .

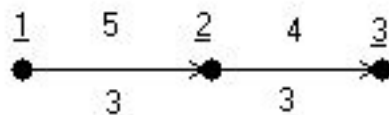


Рисунок 4.33 — Сеть  $G_2$ .

В сети обратной связи величина максимального потока равна трём. В прямой сети величина максимального потока равна четырём, однако, из-за условия связи (4.8) при  $\delta = 1$  в прямом направлении мы можем пустить поток только величины  $v_+^* = v_-^* = 3$ .

Ясно, что при любом условии, связывающем прямой поток и поток обратной связи, максимальная прибыль в классической сети  $G$  (без ограничения на достижимость) от потока с обратной связью равна максимальной прибыли от потока в сети  $G$  с пропускными способностями  $c(u)$ .

Однако, если есть условие на прохождение по дугам графа (когда не все пути являются допустимыми), то задача существенно меняется, поскольку величина  $v_+^* + v_-^* = v_0^*$  может быть больше, чем величина максимального потока в прямой сети  $G'_+$  или чем величина максимального

потока в сети обратной связи  $G'_-$  при условии на достижимость. Другими словами, возможно  $v'_+ \leq v_0^* \leq v^*$  или  $v'_- \leq v_0^* \leq v^*$ . При этом,  $G'_+$  – это сеть  $G$  (с условием на достижимость) пропускные способности –  $c(u) \forall u \in U$ , а  $G'_-$  – сеть, полученная обратной ориентацией дуг сети  $G$  с пропускными способностями  $c(u') = c(u) \forall u' \in U'$ .

Такая ситуация получается возможной из-за того, что для сети без ограничений на достижимость не имеет разницы, в прямом направлении пройдёт поток или в обратном: величина максимального потока в обоих случаях одинакова. Для сетей с ограничением на достижимость такое свойство вообще говоря не выполняется. Покажем данную ситуацию на следующем примере.

**Пример 4.13.**

Рассмотрим сеть  $G$  на рис.4.34. В качестве условия на достижимость рассмотрим условие неубывающей магнитности при  $k = 2$ .

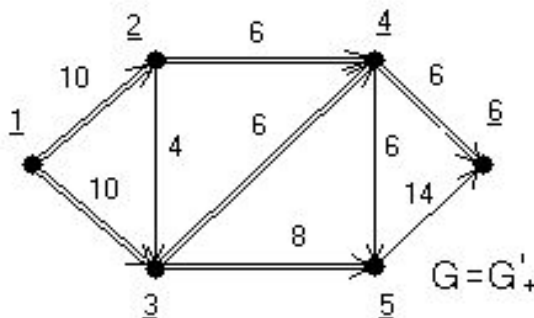


Рисунок 4.34 — Сеть  $G$  с условием неубывающей магнитности.

Здесь магнитные дуги указаны как «двойные».

Пропускные способности  $c(u)$ ,  $c_+(u)$  и  $c_-(u)$  соответственно для сетей  $G$ ,  $G_+$  и  $G_-$  указаны на рис.4.34–4.35. Не сложно показать, что  $v'_+ = 14$  и  $v'_- = 20 = v^*$ , а поскольку  $v_+^* = 7$ ,  $v_-^* = 10$ , то  $v_0^* = 17 > v'_+$ .

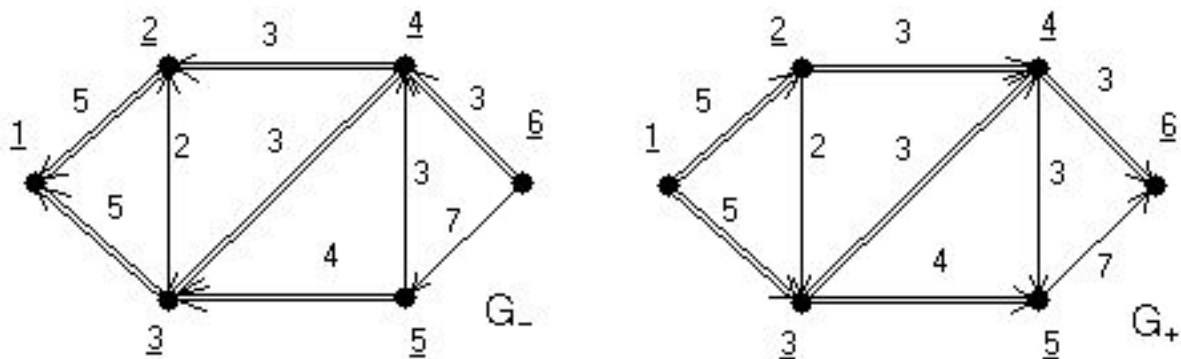


Рисунок 4.35 — Сети  $G_+$  и  $G_-$ .

Отметим, что максимальный поток с обратной связью достигается при другом распределении пропускных способностей в прямом и обратном направлении. Например, так, как показано на рис.4.36.

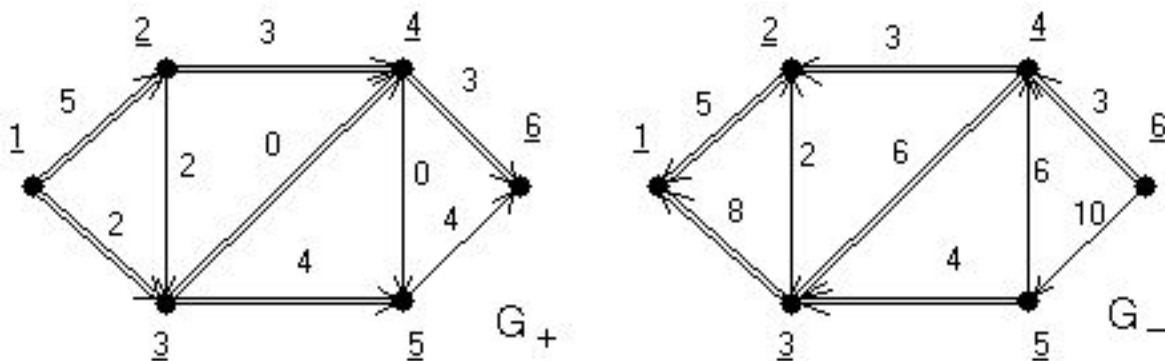


Рисунок 4.36 — Распределение пропускных способностей, при котором достигается максимальный поток с обратной связью.

Поскольку для  $G_+$  и  $G_-$  действует условие неубывающей магнитности, то максимальный поток в сети  $G_+$  остался прежним (таким же как в сети  $G_+$  на рис.4.35), а в сети  $G_-$  можно пропустить поток большей величины, чем в сети  $G_-$  на рис.4.35. Величины максимальных потоков для сетей на рис.4.35 равны  $v_+^* = 7$  и  $v_-^* = 13$ . Отсюда следует, что  $v_0^* = 20$  и выполняется  $v'_+ < v'_- \leq v_0^* \leq v^*$ .

Далее потребуется следующее понятие.

**Определение 4.15.** Обратной  $\sigma$ -разностью сетей  $G_1$  и  $G_2$  будем называть сеть  $[G_1 \setminus_{\sigma} G_2]_{об}$ , являющуюся частичным графом  $G_1$ , такую, что для любого пути  $\mu$  в сети  $G_2$ , его обратная ориентация не является путем в сети  $E$ .



Сеть  $[G_1 \setminus_{\sigma} G_2]_{o\delta}$  может быть получена при помощи следующего алгоритма.

**Алгоритм 4.5** (Построения обратной  $\sigma$ -разности двух сетей).

*Шаг 1.* Выбираем произвольный путь  $\mu$  в сети  $G_2$  такой, что его пропускная способность  $c(\mu)$  больше нуля.

*Шаг 2.* Находим его обратную ориентацию (путь  $\mu'$ ) в сети  $G_1$ . Если  $\mu'$  существует и является допустимым, то в сети  $G_1$  полагаем  $c(u) := c(u) - c(\mu) \quad \forall u \in \mu'$ .

*Шаг 3.* Для сети  $G_2$  выполняем аналогичные действия:  $c(u) := c(u) - c(\mu) \quad \forall u \in \mu$ .

*Шаг 4.* Если в сети  $G_2$  существует путь ненулевой пропускной способности, то возврат на шаг 1. Иначе полученная сеть  $G_1$ , после удаления дуг с нулевой пропускной способностью и изолированных вершин, является обратной  $\sigma$ -разностью исходных сетей  $G_1$  и  $G_2$ .

**Пример 4.14.**

Рассмотрим сети  $G_1$  и  $G_2$  на рис.4.37.

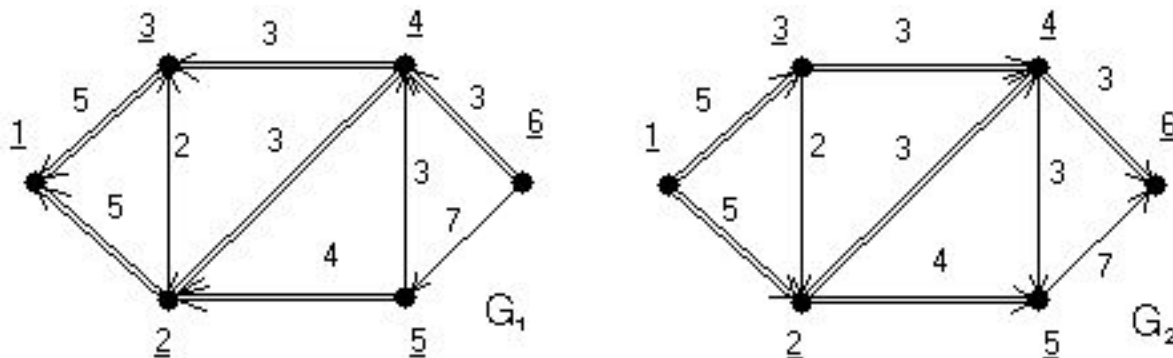


Рисунок 4.37 — Сети  $G_1$  и  $G_2$ .

Найдём обратную  $\sigma$ -разность  $E = [G_1 \setminus_{\sigma} G_2]_{o\delta}$  при помощи алгоритма 4.5. Результат показан на рис.4.38.

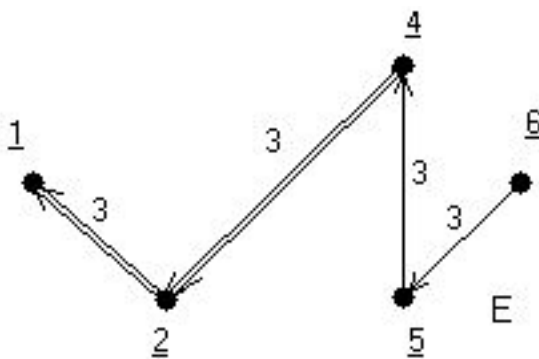


Рисунок 4.38 — Сеть  $E$  — обратная  $\sigma$ -разность сетей  $G_1$  и  $G_2$ .

Для решения поставленной задачи о назначении величин  $c_+(u)$  и  $c_-(u)$  при условии (4.8) будем пользоваться следующим подходом. При этом, для определённости будем считать, что  $\delta \geq 1$ .

1. Найдём величины  $v'_+$  и  $v'_-$ .
2. Построим следующие обратные  $\sigma$ -разности сетей  $G'_+$  и  $G'_-$ :

$$H_+ = [G'_+ \setminus_{\sigma} G'_-]_{o\delta} \text{ и } H_- = [G'_- \setminus_{\sigma} G'_+]_{o\delta}.$$

3. Найдём величины максимальных потоков в сетях  $H_+$  и  $H_-$ : величины  $v^*(H_+)$  и  $v^*(H_-)$  соответственно.

Очевидно, имеет место  $v'_+ - v^*(H_+) = v'_- - v^*(H_-) = v_{cm}$  и  $v_0^* = v'_+ + v^*(H_-) = v'_- + v^*(H_+)$ . Отсюда следует, что величина максимального потока с обратной связью может быть получена как сумма величины максимально возможного прямого потока (потока обратной связи) и величины максимального потока в сети, являющейся обратной  $\sigma$ -разностью  $[G'_- \setminus_{\sigma} G'_+]_{o\delta}$  ( $[G'_+ \setminus_{\sigma} G'_-]_{o\delta}$ ).

4. Положим величину  $\xi = \min \left\{ \frac{v'_+}{\delta}, v'_-, \frac{v_0^*}{\delta+1} \right\}$ . Возможны три варианта:

а) пусть  $\xi = \frac{v'_+}{\delta}$ , тогда в исходной сети  $G$  величина максимального потока с обратной связью равна  $v_0^* = v'_+ + \xi$  (что меньше, чем величина максимального потока с обратной связью в сети  $G$  без условия (4.8)). Значит, максимальная прибыль от потока с обратной связью равна  $t^* = t_+ + t'_-$ , где  $t_+$  — величина максимальной прибыли в сети  $G'_+$  от максимального потока  $F_+^*$ , а  $t'_-$  — величина максимальной прибыли от потока величины  $\xi$

в сети  $H_- = [G'_- \setminus_{\sigma} H_+^*]_{o\delta}$ , где  $H_+^*$  — это сеть  $G'_+$ , для которой пропускная способность каждой дуги  $u$  равна  $c_+(u) = F_+^*(u)$ .

б) пусть  $\xi = v'_-$ , тогда в исходной сети  $G$  величина максимального потока с обратной связью равна  $v_0^* = v'_- + \delta \cdot \xi$  (что меньше либо равно величине максимального потока с обратной связью в сети  $G$  без условия (4.8)). Значит, максимальная прибыль от потока с обратной связью равна  $t^* = t_- + t'_+$ , где  $t_-$  — величина максимальной прибыли в сети  $G'_-$  от максимального потока  $F_-^*$ , а  $t'_+$  — величина максимальной прибыли от потока величины  $\delta \cdot \xi$  в сети  $H_+ = [G'_+ \setminus_{\sigma} H_-^*]_{o\delta}$ , где  $H_-^*$  — это сеть  $G'_-$ , для которой пропускная способность каждой дуги  $u$  равна  $c_-(u) = F_-^*(u)$ .

в) пусть  $\xi = \frac{v_0^*}{\delta+1}$ . В этом случае условие связи (4.8) не влияет на величину максимального потока с обратной связью (в отличие от предыдущих случаев). Значит, максимальная прибыль в сети  $G$  от потока с обратной связью равна  $t^* = t_+ + t'_- = t_- + t'_+$ , где  $t_+$  и  $t_-$  — величины максимальной прибыли соответственно в сетях  $G'_+$  и  $G'_-$  от соответствующих максимальных потоков, а  $t'_+$  и  $t'_-$  — величины максимальной прибыли соответственно в сетях  $H_+$  и  $H_-$  от соответствующих максимальных потоков.

**Замечание 4.2.** В процессе решения поставленной задачи мы получили соотношение для величины максимального потока с обратной связью:

$$v_0^* = v'_+ + v^*(H_-) = v'_- + v^*(H_+)$$

**Замечание 4.3.** Все рассуждения в процессе решения поставленной задачи проведены для  $\delta \geq 1$ . Решение при  $0 < \delta < 1$  аналогично, если обозначить  $G'_+ = G'_-$ , а  $G'_- = G'_+$ .

#### 4.5.4 О влиянии ограничения на достижимость на максимальную прибыль сети

Рассмотрим несколько примеров решения задачи о максимальной прибыли в сетях с условиями магнитной достижимости.

##### Пример 4.15.

Рассмотрим граф  $G_1$  с условием магнитной достижимости показанный на рис.4.39. Здесь подчеркнутые числа обозначают вершины, рядом с каждой дугой указаны пропускная способность и удельная прибыль этой дуги — обведенные и обведенные числа соответственно. Кроме того, выделенные дуги являются магнитными.

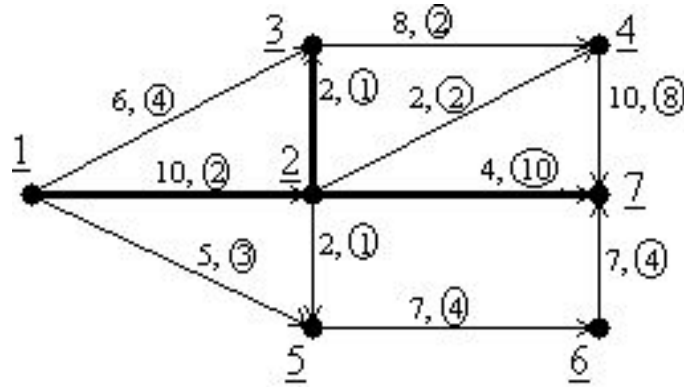


Рисунок 4.39 — Граф  $G_1$ .

Величина максимального потока в сети  $G_1$  равна 21 без условия магнитности, 17 при любом из рассмотренных видов магнитности для  $k = 1$ .

Максимальная прибыль от потока величины  $v^* = 14$  равна:

– 182 без условия магнитности,

– 180 при любом из рассмотренных видов магнитности для  $k = 1$ .

При этом варианты насыщения дуг сети потоками показано на рис. 4.40а–б (на рис.4.40а без условия магнитности).

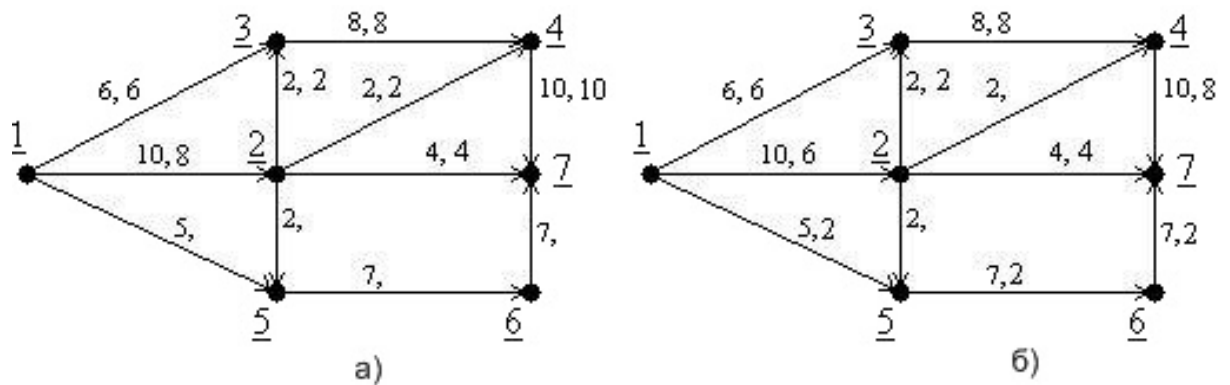


Рисунок 4.40 — Максимальный поток в сети  $G_1$  при условии магнитности и без условий на прохождение.

В данном случае условие магнитной достижимости слабо влияет на величину максимальной прибыли сети. Причём, это справедливо для любого

выбора разбиения множества дуг (т.е. как бы не были выбраны «магнитное» и «немагнитное» множества дуг, прибыль сети при условии магнитной достижимости не будет существенно отличаться от прибыли этой же сети без ограничений на достижимость).

**Пример 4.16.**

Рассмотрим граф  $G_2$  с условием магнитной достижимости на рис.4.41.

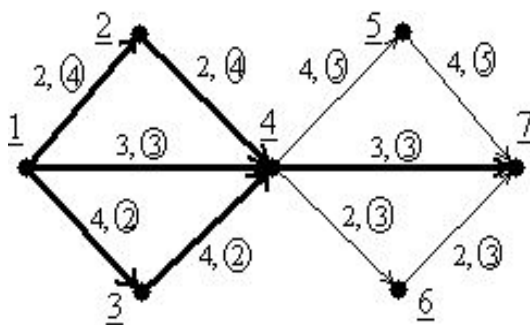


Рисунок 4.41 — Граф  $G_2$ .

Величина максимального потока в сети  $G_2$  равна 9 без ограничений на достижимость, равна 3 при условии неубывающей магнитности при  $k = 1$ , равна 6 при условии неубывающей магнитности при  $k = 2$  и равна 9 при условии неубывающей магнитности при  $k > 2$ .

Максимальная прибыль сети от максимального потока равна:

- 102 без ограничений на достижимость,
- 29 при условии неубывающей магнитности при  $k = 1$ ,
- 68 при условии неубывающей магнитности при  $k = 2$ .

При этом варианты насыщения дуг сети потоками показано на рис. 4.42а-б при условии неубывающей магнитности.

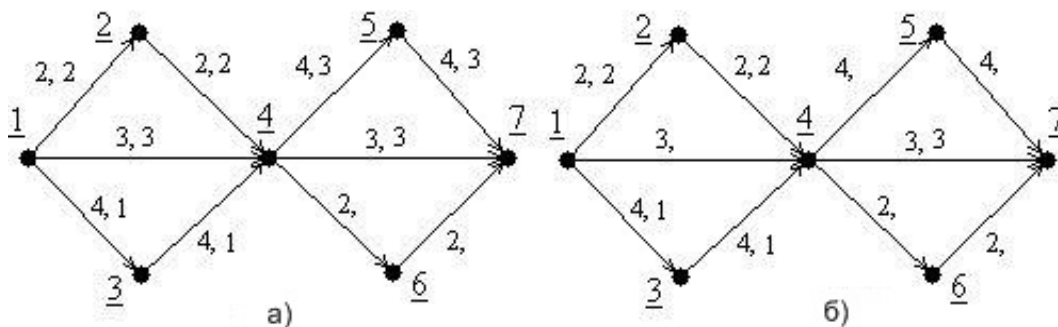


Рисунок 4.42 — Максимальный поток в сети  $G_2$  при условии неубывающей магнитности: а) при  $k = 2$ , б) при  $k = 1$ .

В этом случае, условие неубывающей магнитности при  $k = 1, 2$  существенно уменьшает величину максимального потока и, как следствие, существенно уменьшается и прибыль сети.

**Пример 4.17.**

Рассмотрим граф  $G_3$  с магнитной достижимостью на рис.4.43.

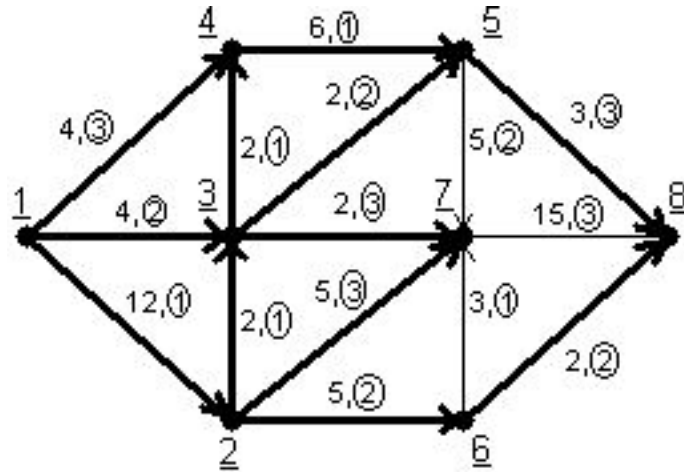


Рисунок 4.43 — Граф  $G_3$ .

Величина максимального потока в сети  $G_3$  равна 20 без условия магнитности, равна 12 при условии неубывающей магнитности для  $k = 1$ , равна 6 при условии неубывающей магнитности при  $k = 2$  и равна 20 при условии неубывающей магнитности при  $k > 2$ .

Максимальная прибыль сети  $G_3$  от потока величины 11 равна:

- 89 без условия магнитности,
- 75 при условии неубывающей магнитности при  $k = 1, 2$ .

Максимальная прибыль сети  $G_3$  от потока величины 7 равна:

- 61 без условия магнитности,
- 51 при условии неубывающей магнитности при  $k = 1, 2$ .

Максимальная прибыль сети  $G_3$  от потока величины 4 равна:

- 36 без условия магнитности,
- 30 при условии неубывающей магнитности при  $k = 1, 2$ .

**Замечание 4.4.** Примеры показывают, что для одного и того же графа при уменьшении величины искомого потока разница между прибылью сети с условием магнитности и без него уменьшается.

## 4.6 Задача о максимальном потоке в сетях с условиями распределения потока

Среди большого числа статей, изучающих различные постановки потоковых задач (см., например, [18], [23]–[27], [70], [71], [73]–[75], [102]–[121], [124]–[139]) особенно выделим работу А.И. Ерзина и И.И. Тахонова «Задача поиска сбалансированного потока» [14], в которой рассмотрена модель произвольной ориентированной сети с неограниченными пропускными способностями дуг, каждая из вершин которой производит некоторый поток ресурса. Предполагается, что время дискретно и на любом временном шаге каждая вершина распределяет пришедший в нее поток по исходящим дугам в заданной пропорции. Поток, пришедший в каждую вершину-сток, поглощается полностью. В статье [14] доказано, что в случае, когда каждая из вершин графа связана путем со стоком, при любом наборе величин производимого в вершинах потока существует единственный «сбалансированный» поток. Также приведены аналитические формулы для вычисления предельного потока.

Похожие модели, а именно динамические графовые модели распространения ресурса, названные авторами ресурсными сетями, рассмотрены в работах О.П. Кузнецова и Л.Ю. Жиликовой (см., например, [49]). Ресурсная сеть — это сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность, а для каждой вершины — величина находящегося в ней ресурса. В каждый момент времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по некоторым правилам, при этом в сети действует закон сохранения ресурса, т.е. ресурс не исчезает и не добавляется извне. Поскольку ресурс перераспределяется между вершинами в некоторой пропорции, то при наличии так называемых вершин-приёмников ресурса и вершин-источников ресурса задача предельного распределения ресурса, схожа как с задачей поиска сбалансированного потока в статье [14], так и с задачами о распределении потока, рассмотренными в данной работе.

В данном разделе рассмотрены задачи о максимальном потоке в произвольной ориентированной сети, для каждой дуги которой вместе с про-

пусковой способностью задана вторая величина — доля приходящего в её начальную вершину потока, которая должна быть пропущена по этой дуге. В работе [27] отмечено, что в таком случае в сети задано некоторое распределение потока. Показано, что даже в том случае, когда существует бесконечно много потоков заданной величины, задание долей потока для всех дуг фиксирует единственный поток указанной величины.

Рассмотрены два вида такого распределения потока: жёсткое и нежёсткое. В случае жёсткого распределения, приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам строго в указанных для дуг долях. В случае нежёсткого распределения, приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам таким образом, чтобы долевая пропорциональность величин потока выполнялась только для тех дуг, на которых полученная величина потока меньше пропускной способности. Последнее означает, что в некоторых случаях нежёстко распределённый поток приходящий в некоторую вершину можно «продавить» по выходящим дугам помимо того, что проходит через данную вершину при условии жёсткого распределения.

Ключевым и существенным отличием от сетей, рассмотренных в работе [14], является ограниченность пропускных способностей всех дуг сети. Таким образом, не весь возможный поток, приходящий из источника в некоторую вершину может быть распределён по выходящим из неё дугам в указанных долях, что существенно влияет на решение поставленных задач. И хотя при исследовании задачи о максимальном жёстко распределённом потоке рассматриваются системы уравнений, схожие с системами в [14], для доказательства некоторых утверждений (теоремы 4.8 и 4.9) и обоснования приведённого алгоритма нахождения максимального жёстко распределённого потока потребовалось другое доказательство однозначной разрешимости построенных систем.

#### **4.6.1 Максимальный поток в сети с условием жёсткого распределения потока**

Рассмотрим сеть  $G(X, U, f)$  — связный ориентированный граф с дву-



мя выделенными вершинами: источником  $s$  и стоком  $t$  — такую, что для каждой её дуги  $u \in U$  заданы две величины: пропускная способность  $c(u)$  и доля  $p(u)$  прохождения по ней потока, приходящего в начальную вершину дуги  $u$  (см. [27], [74]). Обозначим через  $F(u)$  величину потока  $F$ , проходящего по дуге  $u$ .

Ясно, что для величин  $p(u)$ ,  $c(u)$  и  $F(u)$  справедливы следующие выражения ([24], [27], [74]):

$$\begin{cases} \sum_{u \in [x]^+} p(u) = 1, & \forall x \neq t; \\ \sum_{u \in [x]^-} F(u) - \sum_{u \in [x]^+} F(u) = 0, \forall x \neq s, t; \\ 0 \leq F(u) \leq c(u), & \forall u \in U. \end{cases} \quad (4.9)$$

**Определение 4.16.** Поток  $F$  в сети  $G$  будем называть жёстко распределённым, если для него выполняются соотношения (4.9), и величины пропускаемого по дугам потока пропорциональны долям потока, проходящего по этим дугам, т.е.

$$F(u_i) \cdot p(u_j) = F(u_j) \cdot p(u_i), \quad \forall u_i, u_j \in [x]^+, \quad \forall x \in X \setminus \{t\}. \quad (4.10)$$

**Определение 4.17.** Сети, для которых рассматриваются только потоки, удовлетворяющие условиям (4.9) и (4.10) будем называть сетями с жёстким распределением потока.

### Пример 4.18.

Рассмотрим сеть  $G$  с условием жёсткого распределения потока на рис. 4.44, при этом величины  $c(u)$ ,  $p(u)$  и один из вариантов допустимого потока  $F$  для дуг сети  $G$  представлены в таблице 1.

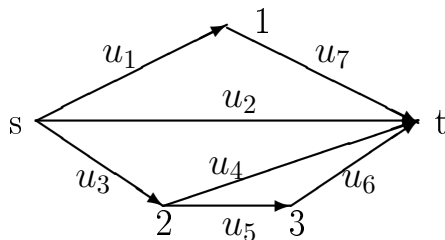


Рисунок 4.44 — Ориентированная сеть  $G$  с условием жёсткого распределения потока.

Таблица 1. Пропускные способности, доли и величины потока на дугах сети  $G$ .

$u$	$p(u)$	$c(u)$	$F(u)$
$u_1$	$\frac{1}{5}$	20	$8\frac{1}{3}$
$u_2$	$\frac{3}{5}$	25	25
$u_3$	$\frac{1}{5}$	40	$8\frac{1}{3}$
$u_4$	$\frac{7}{10}$	15	$5\frac{5}{6}$
$u_5$	$\frac{3}{10}$	8	$2\frac{1}{2}$
$u_6$	1	3	$2\frac{1}{2}$
$u_7$	1	10	$8\frac{1}{3}$

Для величин, представленных в таблице 1, выполнены условия (4.9). Можно видеть, что условие (4.10) также выполняется:

$$\frac{1}{5} : \frac{3}{5} = 8\frac{1}{3} : 25; \frac{1}{5} : \frac{1}{5} = 8\frac{1}{3} : 8\frac{1}{3}; \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = 25 : 8\frac{1}{3}; \frac{7}{10} : \frac{3}{10} = 5\frac{5}{6} : 2\frac{1}{2}.$$

#### 4.6.2 Нетривиальная разрешимость задачи нахождения максимального жёстко распределённого потока

Поскольку нулевой поток является жёстко распределённым, то рассмотрим вопрос о нетривиальной разрешимости задачи нахождения максимального жёстко распределённого потока в сети  $G$  с выделенными источником  $s$  и стоком  $t$ .

**Определение 4.18.** Будем говорить, что вершина  $x$  охватывается источником  $s$ , если существует путь из  $s$  в  $x$ . Также будем говорить, что вершина  $x$  охватывается стоком  $t$ , если существует путь из  $x$  в  $t$ .

Множества всех не охватываемых источником и стоком вершин будем соответственно обозначать  $Y_s$  и  $Y_t$ .

**Определение 4.19.** Сеть  $G$  с выделенными источником  $s$  и стоком  $t$  будем называть  $s$ -охватываемой, если  $Y_s = \emptyset$ .

**Определение 4.20.** Сеть  $G$  с выделенными источником  $s$  и стоком  $t$  будем называть  $t$ -охватываемой, если  $Y_t = \emptyset$ .

Рассмотрим все варианты охватываемости сетей.

1. Для сети, являющейся одновременно и  $s$ -охватываемой, и  $t$ -охватываемой, далее будет показано существование единственного ненулевого решения задачи нахождения максимального жёстко распределённого потока.

2. Для сети, которая является  $s$ -охватываемой и не является  $t$ -охватываемой, легко показать существование единственно возможного жёстко распределённого потока — нулевого потока.

3. Для сети, которая является  $t$ -охватываемой и не является  $s$ -охватываемой рассмотрим подсеть  $G'$ , порождённую множеством вершин  $Y' = X \setminus Y_s$ . Если сток  $t$  не принадлежит сети  $G'$ , то задача нахождения жёстко распределённого потока имеет только тривиальное решение, поскольку нет ни одного пути из источника в сток (см. [27], [74]). Если же сток  $t$  принадлежит сети  $G'$ , то задача нахождения максимального жёстко распределённого потока в сети  $G$  сводится к аналогичной задаче для сети  $G'$ , которая, в свою очередь, нетривиально разрешима по варианту 1. Решение в этом случае может быть получено следующим образом:

а) для каждой вершины  $x \in Y_s$  положить  $F(u) = 0$  для каждой дуги  $u \in [x]^+$ ;

б) для каждой  $x \in X \setminus Y_s$  положить  $F(u) = F'(u)$  для каждой дуги  $u \in [x]^+$ , где  $F'$  — решение задачи о максимальном жёстко распределённом потоке в сети  $G'$ .

4. Для сети, которая не является  $t$ -охватываемой и не является  $s$ -охватываемой, если  $Y_t \subset Y_s$ , то аналогично предыдущему варианту задача нахождения максимального жёстко распределённого потока в сети  $G$  сводится к аналогичной задаче для сети  $G'$ , которая нетривиально разрешима по варианту 1. Если же  $Y_t \not\subset Y_s$ , то для подсети  $G'$  имеет место второй вариант охватываемости, т.е. в сети  $G'$ , а следовательно, и в сети  $G$  существует только нулевой жёстко распределённый поток.

### 4.6.3 Задача о максимальном жёстко распределённом потоке

Рассмотрим для сети  $G(X, U, f)$  с условием жёсткого распределения потока задачу о максимальном потоке. Здесь и далее мы полагаем, что сеть

$G$  является одновременно и  $s$ -охватываемой, и  $t$ -охватываемой.

При введении условия распределения потока, применение классических алгоритмов не даёт решения поставленной задачи, поскольку в классических алгоритмах исходящие из вершины потоки не связаны между собой.

Для решения поставленной задачи будем использовать подход, согласно которому составим систему уравнений, описывающую жёсткое распределение потока в сети. Такую систему будем строить в три этапа:

Этап 1. Для каждой вершины  $x \neq s, t$  сети  $G$  составим уравнения двух видов:

$$p(u) \cdot \sum_{v \in [x]^+} F(v) - F(u) = 0, \quad \forall u \in [x]^+ \setminus w_x, \quad (4.11)$$

$$p(w_x) \cdot \sum_{v \in [x]^-} F(v) - F(w_x) = 0. \quad (4.12)$$

В обоих равенствах  $w_x$  — это произвольная (не обязательно одна и та же) дуга из множества  $[x]^+$ .

Отметим, что если составлять уравнения вида (4.11) для всех дуг вершины  $x$ , то одно из них обязательно будет линейной комбинацией остальных. В таком случае система будет избыточна. Таким образом выбирается одна дуга  $w_x$  для которой не составляется уравнений вида (4.11). Аналогично для уравнений вида (4.12) — если взять более одного уравнения, то снова получим избыточную систему.

Этап 2. Для вершины  $s$  составим лишь уравнения первого вида (4.11), поскольку входящих в вершину дуг нет. Для вершины  $t$ , так как нет исходящих дуг, уравнений составлено не будет.

**Замечание 4.5.** Уравнения (4.11) (первого вида) обеспечивают выполнение равенства (4.10). Уравнения (4.12) (второго вида) связывают величину входящего в вершину  $x$  потока с величиной потока, исходящего из этой вершины, таким образом обеспечивая выполнение второго соотношения в условиях (4.9).

Этап 3. К уравнениям, полученным на этапах 1 и 2, добавим уравнение вида  $F(w) = a$ , где  $a \in R_+$  и  $w$  — произвольная дуга сети  $G$ . Таким

образом, получили систему уравнений (4.13).

$$\begin{cases} p(u) \cdot \sum_{v \in [x]^+} F(v) - F(u) = 0, & \forall x \in X \setminus \{t\}, \forall u \in [x]^+ \setminus \{w_x\}; \\ p(w_x) \cdot \sum_{v \in [x]^-} F(v) - F(w_x) = 0, & \forall x \in X \setminus \{s, t\}; \\ F(w) = a. \end{cases} \quad (4.13)$$

Покажем, что решение системы (4.13) существует и единственно.

**Замечание 4.6.** *Множество уравнений первого и второго вида обеспечивают связь величин потоков на дугах только для тех сетей, которые являются одновременно  $s$ -охватываемой, и  $t$ -охватываемой. Если же это не так, то не все величины потоков на дугах будут связаны уравнениями первого и второго вида. В таком случае множество решений системы уравнений (4.13) может быть и пустым.*

Зафиксируем нумерации во множествах вершин и дуг:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  и  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Здесь и далее будем считать, что  $m = |U|$ . Также для определённости будем считать, что  $s = x_1$  и  $t = x_n$ . Основную матрицу системы (4.13) обозначим через  $A$ .

Разобьём всё множество вектор-строк матрицы  $A$  на подмножества  $g_i, i \in [1; n + 1]_Z$  следующим образом:

- к каждому  $g_i$  отнесём те строки, которые соответствуют всем уравнениям первого вида, построенным для вершины  $x_i$ ;
- к подмножеству  $g_n$  отнесем строки матрицы  $A$ , соответствующие уравнениям второго вида;
- в подмножестве  $g_{n+1}$  будет только одна строка, соответствующая последнему уравнению  $F(w) = a$ .

**Лемма 4.2.** *Система векторов  $g_i$  линейно независима для всех значений  $i \in [1; n - 1]_Z$ .*

$\nabla$  *Доказательство.* Вид рассматриваемых вектор-строк множества  $g_i$  таков, что для любой пары  $z = \{z_j\}_{j=1}^{|g_i|}$  и  $y = \{y_j\}_{j=1}^{|g_i|}$  из  $g_i$  ( $y \neq z$ ) выполняются два условия:

1. Если  $z_j = -1$ , то  $y_j \neq -1, \forall j \in [1; |g_i|]_Z$ ;

2.  $z_j \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $y_j \neq 0, \forall j \in [1; |g_i|]_Z$ .

Рассмотрим  $B$  — матрицу, вектор-строки которой являются элементами множества  $g_i$ . По [54], система вектор-строк  $g_i$  линейно независима тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $B$  равен количеству строк ( $\text{rank} B = |g_i|$ ).

Найдем ранг матрицы  $B$ .

Так как для всех вектор-строк  $g_i$  выполняется условие (4.10), то рассмотрим матрицу  $B'$ , полученную из матрицы  $B$  исключением столбцов, содержащих только нулевые элементы. При этом ранг матрицы  $B'$  равен рангу матрицы  $B$ .

Отметим, что число строк матрицы  $B'$  на единицу меньше числа столбцов этой матрицы. Следовательно,  $\text{rank} B = \text{rank} B' \leq |g_i|$ . Для нахождения ранга матрицы  $B'$ , элементарными преобразованиями из  $B'$  получим матрицу приведенного вида (см. [54]).

Рассмотрим две вектор-строки матрицы  $B'$ :  $B'_1$  и  $B'_k$ . Они имеют следующий вид:

$$B'_1 = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha, -1, \alpha, \dots, \alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha);$$

$$B'_k = (\beta, \beta, \dots, \beta, \beta, \beta, \dots, \beta, -1, \beta, \dots, \beta).$$

Будем считать, что элемент, равный минус единице, в строке  $B'_1$  стоит на  $j$ -том месте. Выполним следующее элементарное преобразование:  $\frac{1}{|-1+\alpha\beta|}(B'_k + \beta \cdot B'_1)$ . В результате получим вектор-строку  $B''_k$ , следующего вида:

$$B''_k = (\gamma, \dots, \gamma, 0, \gamma, \dots, \gamma, -1, \gamma, \dots, \gamma), \quad (4.14)$$

где  $\gamma = \frac{\beta+\alpha\beta}{|-1+\alpha\beta|}$ . Отметим, что  $\gamma > 0$ .

Также заметим, что на  $j$ -том месте в новой строке  $B''_k$  получили 0. Кроме того, элемент, равный минус единице, в новой строке стоит на том же месте, что и в строке  $B'_k$ .

Выполним указанные элементарные преобразования для всех  $k \neq 1$ . В результате получим матрицу  $B''$  такую, что в  $j$ -том столбце на первом месте будет стоять минус единица, а все остальные элементы этого столбца будут равны нулю.

Аналогичным образом поступим последовательно для каждого элемента, равного минус единице, в строках, начиная со второй и заканчивая  $(|g_i| - 1)$ -той строкой.

Заметим, что после преобразований вектор-строки вида (4.14) в получившейся вектор-строке остаётся элемент, равный минус единице. Значит, ни на одном из этапов выполнения элементарных преобразований в матрице  $B'$  не может быть получена нулевая строка. При этом любые две строки, полученные после каждой серии преобразований матрицы, будут иметь следующий вид (с точностью до перестановки элементов без нарушения условия 1):

$$(-1, \beta, \beta, \dots, 0, \dots) \text{ и } (\alpha, -1, \alpha, \dots, 0, \dots).$$

Таким образом, первые  $(|g_i| - 1)$  вектор-строк станут приведёнными, а последняя строка не будет являться нулевой. Следовательно, ранг матрицы  $B'$ , а, значит, и ранг матрицы  $B$  равен количеству строк в системе  $g_i$ . Это означает, что система векторов  $g_i$  линейно независима  $\forall i \in [1; n - 1]_Z$ .

△

**Лемма 4.3.** Система векторов  $\bigcup_{i=1}^{n-1} g_i$  линейно независима.

▽ *Доказательство.* Из того, что по лемме 4.2 каждая система  $g_i$  линейно независима и того, что любые две вектор-строки, не принадлежащие одной системе  $g_i$ , линейно независимы (так как ненулевые элементы одной из этих строк соответствуют нулевым элементам другой и наоборот) следует, что система векторов  $\bigcup_{i=1}^{n-1} g_i$  линейно независима.

△

**Лемма 4.4.** Система векторов  $g_n$  линейно независима.

▽ *Доказательство.* Рассмотрим матрицу  $B$ , строками которой являются вектор-строки системы  $g_n$ . Заметим, что для любого столбца матрицы  $B$  существует не более двух ненулевых элементов, при этом если их ровно два, то один из них обязательно равен минус единице.

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве леммы 4.2, из матрицы  $B$  получим матрицу  $B'$  приведённого вида:

Переставим строки матрицы  $B$  таким образом, чтобы в верхней части матрицы оказались все приведённые вектор-строки. Рассмотрим верхнюю из неприведённых строк. Будем считать, что это строка с номером  $j$ . Под элементом этой строки, равным минус единице (будем считать, что он стоит на  $i$ -том месте), найдется единственный элемент, не равный нулю (он также не равен и минус единице). Положим, что он находится в строке  $B_k$ . Но в строке  $B_k$  есть минус единица, над которой в строке  $B_j$  стоит нуль. Это следует из правил построения уравнений вида (4.12).

Общий вид описанных строк:

$$B_j = (\dots, -1, \dots, 0, \dots), \quad B_k = (\dots, a, \dots, -1, \dots).$$

Для рассматриваемой пары строк выполним элементарное преобразование  $B_k + a \cdot B_j$ . Заметим, что на  $i$ -том месте нового вектора  $B'_k$  стоит нуль, а элемент, равный минус единице, не изменился.

Выполняя аналогичным образом преобразования последовательно для каждой из неприведённых вектор-строк, получим матрицу  $B'$ , в которой нет нулевых строк (поскольку при каждом преобразовании все элементы, равные минус единице, сохраняются).

Это означает, что ранг матрицы  $B'$  равен количеству строк, а т.к.  $\text{rank} B = \text{rank} B'$ , значит, система векторов  $g_n$  линейно независима.

△

**Теорема 4.7.** *Решение системы уравнений (4.13) существует и единственно для любого действительного значения  $a$ .*

▽ *Доказательство.* Для доказательства теоремы преобразуем матрицу  $A$ , соответствующую системе (4.13), к приведённому виду.

Рассмотрим систему вектор-строк  $g = \bigcup_{i=1}^{n-1} g_i$ . По леммам 4.2 и 4.3, рассматриваемая система вектор-строк может быть приведена. В результате получим матрицу  $A'$  полученную из  $A$  приведением строк множества  $g$ . Обозначим приведенную систему вектор-строк через  $g'$ .



В каждой строке множества  $g'$  по лемме 4.2 существует элемент, равный минус единице и ещё ровно один элемент не равный нулю, причём для каждого множества приведённых вектор-строк  $g'_i$  элементы, не равные нулю и минус единице стоят в одном и том же столбце. Обозначим номер этого столбца через  $l_i$ .

Рассмотрим пару строк  $A'_j \in g'_i$  и  $A'_k \in g_n$  такую, что найдется номер  $p$ , для которого  $A'_{jp} = -1$  и  $A'_{kp} \neq 0$ . Произведем следующее элементарное преобразование для строки  $A'_k$ :  $\frac{1}{|B_{jl_i}|}(A'_k + A'_{kp} \cdot A'_j)$ . Указанное элементарное преобразование таково, что в новой вектор-строке  $A'_k$  элемент с номером  $l_i$  равен минус единице и есть ещё один элемент не равный нулю на том же самом месте, что и в старой строке  $A'_k$  до преобразования.

Выполним описанные преобразования для всех вектор-строк  $A'_j$  каждого из множеств  $g'_i \forall i \in [1, |g_i| - 1]_Z$ . В итоге все вектор-строки множества  $g' \cup g'_n$  будут обладать следующими свойствами (согласно правилам выполнения указанных преобразований и лемме 4.4):

- в каждой вектор-строке  $A'_j$  найдётся элемент, равный минус единице;
- для каждой пары строк  $A'_j$  и  $A'_k$  выполняется условие:  $\forall i \in [1; m]_Z$   
 $(A'_{ji} = -1) \Rightarrow (A'_{ki} \neq -1)$ ;
- общее количество минус единиц в преобразованной матрице равно  $m - 1$ .

В силу полученных свойств при помощи минус единицы в вектор-строке элементарными преобразованиями могут быть исключены все остальные ненулевые элементы в том же столбце полученной матрицы. Проводя такие исключения для каждой вектор-строки множества  $g' \cup g'_n$ , получим приведенную матрицу  $A''$  с единственным столбцом, содержащим ненулевые элементы не равные минус единице. Для определённости обозначим номер этого столбца через  $p$ .

Далее возможны два варианта:

1. Элемент, не равный нулю в последней строке (это единственный ненулевой элемент вектор-строки), находится также и в столбце с номером  $p$ . В данном случае при помощи этого элемента элементарными преобразованиями исключим все ненулевые элементы, стоящих выше него в том же столбце.

2. Элемент, не равный нулю в последней строке, находится в столбце с номером  $q \neq p$ . В данном случае найдётся такой номер  $j$ , что  $A''_{jq} = -1$ . Выполним элементарное преобразование для строки  $A''_j$ :  $\frac{1}{A''_{jp}}(A''_j + A_m)$ . В полученной строке  $A''_j$  остался единственный ненулевой элемент  $A''_{jp} = 1$ . При помощи последнего элементарными преобразованиями исключим остальные элементы столбца  $p$ .

В результате получили (с точностью до перестановки строк) диагональную матрицу размера  $m \times m$ . По [54], решение системы линейных уравнений, соответствующей такой матрице, существует и единственно.

△

Для одной и той же сети  $G$  с жёстким распределением потока рассмотрим две системы вида (4.13), которые отличаются лишь последним уравнением:  $F(u) = a_1$  – последнее уравнение первой системы,  $F(u) = a_2$  – последнее уравнение второй системы. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – соответственно решения первой и второй системы вида (4.13).

**Теорема 4.8.** *Если  $a_1 \geq a_2$ , то для любой дуги  $u_i$  сети  $G$  выполняется соотношение:  $F_1(u_i) \geq F_2(u_i)$ .*

▽ *Доказательство.* Представим решение системы (4.13) следующим образом:  $F = (F(u_1), \dots, F(u_m))$ , где  $m = |U|$ .

В доказательстве теоремы 4.7 побочным результатом получен следующий общий вид решения системы (4.13):

$$F = a \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix},$$

где  $\xi_i = 1$ , если  $u_i = u$ .

Таким образом, поскольку  $F_1(u_i) = a_1 \cdot \xi_i$ ,  $F_2(u_i) = a_2 \cdot \xi_i$  для всех значений  $i \in [1; m]_Z$  и  $a_1 \geq a_2$ , следовательно,  $\forall i \in [1; m]_Z \quad F_1(u_i) \geq F_2(u_i)$ .

△

**Следствие 1.** *Задача нахождения максимального потока в сети  $G$  с жёстким распределением потока может быть решена при помощи следующего алгоритма:*

**Алгоритм 4.6.**

*Шаг 0.* Положим  $V = \emptyset$ ,  $\bar{V} = U \setminus V$ .

*Шаг 1.* Выберем дугу  $u \in \bar{V}$  такую, что

$$\frac{c(u)}{p(u)} = \min_{w \in \bar{V}} \frac{c(w)}{p(w)}.$$

*Решаем систему уравнений (4.13), в качестве последнего уравнения используя уравнение  $F(u) = c(u)$ .*

*Шаг 2.* Выполняем проверку подстановкой решения рассмотренной на шаге 1 системы уравнений для каждой дуги  $w \in V$  и если третье соотношение условий (4.9) выполняется, то  $V := V \cup \{w\}$ .

*Шаг 3.* Если  $V = U$ , то полученное на шаге 1 решение системы вида (4.13), является искомым потоком. Иначе полагаем  $\bar{V} = U \setminus V$  и возвращаемся на шаг 1.

Таким образом, согласно теореме 4.8 на каждой итерации будет получаться решение системы вида (4.13) все элементы которого не превосходят соответствующие элементы решения, полученного на предыдущем этапе.

Если же на шаге 3 получили, что  $V = U$ , то по теореме 4.8 итоговое решение  $F$  системы вида (4.13) является решением задачи о максимальном жёстко распределённом потоке в рассматриваемой сети  $G$ , поскольку все элементы  $F$  удовлетворяют неравенству  $c(u) \geq F(u)$  и, при этом, для дуги последней из взятых дуг  $u$  имеет место равенство  $F(u) = c(u)$ .

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 4.6 определяется трудоёмкостью решения системы линейных алгебраических уравнений, которая исходя из общего вида системы (4.13) и доказательства теоремы 4.7 ограни-

чена величиной  $O(n \cdot d^3)$ , где  $n = |X|$ ,  $d = \max_{x \in X} \{\deg x\}$ . В худшем случае, когда рассматриваемый граф  $G$  является плотным трудоёмкость решения системы вида (4.13) ограничена величиной  $O(n^4)$ . Таким образом, вычислительная трудоёмкость алгоритма 4.6 в худшем случае ограничена величиной  $O(n^5)$ .

**Пример 4.19.**

Рассмотрим задачу о максимальном потоке в сети с условием жёсткого распределения  $G$ , показанной на рис. 4.45.

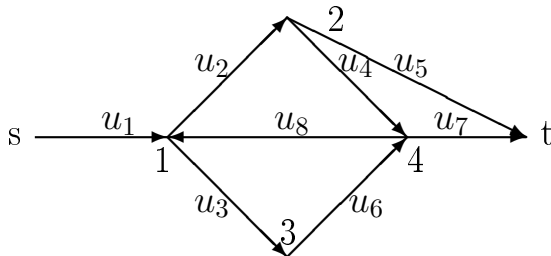


Рисунок 4.45 — Сеть  $G$  с жёстким распределением потока.

Доля потока ( $p(u)$ ) и пропускная способность ( $c(u)$ ) каждой из дуг сети  $G$  представлены в таблице 2.

Таблица 2. Доли потока, проходящего по дугам и пропускные способности дуг сети  $G$ .

$u$	$p(u)$	$c(u)$
$u_1$	1	30
$u_2$	0,3	11
$u_3$	0,7	20
$u_4$	0,6	7
$u_5$	0,4	3
$u_6$	1	22
$u_7$	0,8	10
$u_8$	0,2	8

По данным таблицы 2 составим систему уравнений (4.15), аналогичную системе (4.13). Следуя алгоритму 4.6, последним уравнением системы

(4.15) положим уравнение  $F(u_5) = 3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, 4(F(u_4) + F(u_5)) - F(u_5) = 0; \\ 0, 8(F(u_7) + F(u_8)) - F(u_7) = 0; \\ 0, 3(F(u_2) + F(u_3)) - F(u_2) = 0; \\ 0, 4F(u_2) - F(u_5) = 0; \\ 0, 8(F(u_4) + F(u_6)) - F(u_7) = 0; \\ 0, 3(F(u_8) + F(u_1)) - F(u_2) = 0; \\ F(u_6) - F(u_3) = 0; \\ F(u_5) = 3. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Результат решения системы уравнений (4.15) обозначим  $F_1$ :

$$F_1(u_1) = 20, 6; F_1(u_2) = 7, 5; F_1(u_3) = 17, 5; F_1(u_4) = 4, 5;$$

$$F_1(u_5) = 3; F_1(u_6) = 17, 5; F_1(u_7) = 17, 6; F_1(u_8) = 4, 4.$$

Полученное решение не является решением задачи о максимальном потоке в сети  $G$  с условием жёсткого распределения, поскольку  $F_1(u_7) > c(u_7)$ . Это означает, что множество  $V \neq U$ . Следовательно, полагаем  $\bar{V} = U \setminus V = \{u_7\}$  и возвращаемся на шаг 1 к составлению и решению системы линейных уравнений вида (4.13).

Преобразуем систему (4.15), заменив её последнее уравнение на уравнение  $F(u_7) = 10$ . Решение полученной системы обозначим  $F_2$  (значения приведены с округлением до второго знака после запятой):

$$F_2(u_1) = 11, 7; F_2(u_2) = 4, 26; F_2(u_3) = 9, 94; F_2(u_4) = 2, 56;$$

$$F_2(u_5) = 1, 7; F_2(u_6) = 9, 94; F_2(u_7) = 10; F_2(u_8) = 2, 5.$$

Полученное решение является решением задачи о максимальном потоке в сети  $G$  с условием жёсткого распределения, поскольку множество  $V = U$ .

Представим последовательность решений  $F_i$  в виде таблицы 3.

Таблица 3. Нахождение максимального потока в сети  $G$  с условием жёсткого распределения потока.

$u$	$c(u)$	$F_1(u)$	$F_2(u)$
$u_1$	30	20, 6	11, 7
$u_2$	11	7, 5	4, 26
$u_3$	20	17, 5	9, 94
$u_4$	7	4, 5	2, 56
$u_5$	3	3	1, 7
$u_6$	22	17, 5	9, 94
$u_7$	10	17, 6	10
$u_8$	8	4, 4	2, 5

По таблице 3 легко прослеживается, что решение каждой следующей системы (4.15) ближе к решению задачи о максимальном потоке в сети  $G$  с условием жёсткого распределения, поскольку в каждом следующем столбце количество элементов, при которых нарушается третье соотношение условий (4.9), меньше, чем в предыдущем. Последний столбец таблицы 3 является решением задачи о максимальном потоке в рассматриваемой сети  $G$ , так как все элементы этого столбца удовлетворяют неравенству  $c(u) \geq F(u)$  и для дуги  $u_7$  имеет место равенство  $F(u_7) = c(u_7)$ .

**Замечание 4.7.** *Исходя из вида общего решения системы (4.13), указанного в доказательстве теоремы 4.8, вычислительная трудоёмкость алгоритма 4.6 может быть уменьшена. Действительно, решив одну систему вида (4.13), кроме самого решения мы получим пропорциональность его элементов. Таким образом, можно сократить число решений систем вида (4.13) до одного, пользуясь пропорциональностью элементов решения и тем, что в итоге один из элементов решения должен совпадать с пропускной способностью соответствующей дуги. Поскольку приведение решение системы вида (4.13) может быть сведено к искомому решению не более чем за  $O(n \cdot t)$  (в случае плотного графа за  $O(n^3)$ ) операций, следовательно, вычислительная трудоёмкость может быть уменьшена до  $O(n^4)$ .*

**Лемма 4.5.** *Изменяя доли потока, проходящего по дугам сети  $G$  с условием жёсткого распределения потока, можно получить максимальный поток минимальной величины  $\rho = \rho_0$ , которая равна наименьшей из пропускных способностей дуг сети  $G$ .*

$\nabla$  *Доказательство.* Найдем в сети  $G$  путь из источника в сток, содержащий дугу  $u_0 : c(u_0) = \rho_0$ . Пусть этот путь состоит из множества дуг  $U_0 = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Всем дугам этого пути назначим  $p(u_i) = 1 (i \in [1, m])$ . Всем остальным дугам сети  $G$  назначим  $p(u_j) = 0 (u_j \in U \setminus U_0)$ .

Таким образом, получили единственный путь из источника в сток, пропускная способность которого ограничивается пропускной способностью дуги  $u_0$ . То есть, максимальный поток в сети  $G$  с условием жёсткого распределения потока равен  $\rho_0$ .

$\Delta$

Пусть сеть  $G'$  отличается от сети  $G$  лишь тем, что у дуг сети  $G'$  нет характеристики  $p(u)$ , то есть  $G'$  — обычная сеть, рассматриваемая в большинстве классических потоковых задач (см., например, [104], [116]). Обозначим величину максимального потока в сети  $G'$  через  $\rho'$ .

**Теорема 4.9.** *Для любого вещественного числа  $\rho$  такого, что  $\rho_0 \leq \rho \leq \rho'$ , расстановкой долей потока, проходящего по дугам сети  $G'$ , можно получить, что величина максимального потока в сети  $G$  с условием жёсткого распределения потока станет равной числу  $\rho$ .*

$\nabla$  *Доказательство.* Найдем в сети  $G'$  некоторый поток (обозначим его  $F^*$ ), величина которого равна  $V$ . При этом, поток  $F^*$  должен быть таким, что как минимум для одной дуги  $u$  выполняется равенство  $F^*(u) = c(u)$ . Поток с предложенными свойствами всегда может быть построен, поскольку  $\rho \geq \rho_0$  и в качестве дуги  $u$  можно взять дугу  $w$  такую, что  $c(w) = \rho_0$ .

Положим доли потока, проходящего по дугам сети  $G$  пропорциональными величине потока  $F^*$  по соответствующим дугам сети  $G'$ , то есть для каждой вершины  $x \in X \setminus \{t\}$  должно выполняться соотношение (4.10), и поскольку величина  $F^*(u)$  известна для каждой дуги  $u \in U$ , значит, достаточно просто можно определить доли потока, проходящего по дугам сети  $G$ .

По теореме 4.7 максимальным потоком в полученной сети  $G$  с условием жёсткого распределения потока является поток  $F^*$ , величина которого равна  $\rho$ .

△

#### 4.6.4 Максимальный поток на графе с условием нежёсткого распределения потока

Заметим, что при условии жёсткого распределения потока в сети многие дуги остаются не полностью насыщенными.

Пусть в сети  $G = (X, U, f)$  задан некоторый поток  $F$ .

**Определение 4.21.** Поток  $F$  будем называть нежёстко распределённым, если выполняются соотношения (4.9), и для каждой вершины  $x \in X \setminus \{t\}$  выполняются равенства

$$F(u_i) \cdot p(u_j) = F(u_j) \cdot p(u_i) \quad \forall u_i, u_j \in [x]^+ \setminus [x]^*, \quad (4.16)$$

где  $[x]^* = \{u \in [x]^+ \mid F(u) = c(u)\}$ .

**Определение 4.22.** Сети, для которых рассматриваются только потоки, удовлетворяющие условиям (4.9) и (4.16) будем называть сетями с нежёстким распределением потока.

Приведём жадный алгоритм нахождения максимального потока в сети с нежёстким распределением.

**Алгоритм 4.7.** Рассмотрим сеть  $G(X, U, f, c, p)$  с нежёстким распределением.

*Шаг 0.* Положим  $i = 0$ ,  $F(u) = 0 \quad \forall u \in U$ .

*Шаг 1.* Построим сеть  $G_i(X_i, U_i, f|_{U_i}, c_i, p_i)$ , вершинами которой являются вершины сети  $G$ , а дугами являются только не насыщенные дуги



и сети  $G$ .

*Шаг 2.* Для дуг сети  $G_i$  определим собственные пропускные способности и доли потока потока, проходящего по дугам следующим образом:

$$\forall u \in U_i \quad c_i(u) = c(u) - F(u);$$

$$\forall x \in X \setminus \{t\}, \forall u \in [x]^+ \cap U_i \quad p_i(u) = \frac{p(u)}{\sum_{w \in [x]^+ \cap U_i} p(w)}.$$

*Шаг 3.* Найдём максимальный поток в сети  $G_i$  при условии жёсткого распределения потока. Обозначим его  $F_i$ , а его величину —  $\rho_i$ .

*Шаг 4.* Увеличим поток по дугам сети  $G$  на величины  $F_i(u)$ , т.е. для каждой дуги  $u \in U_i$  выполним  $F(u) := F(u) + F_i(u)$ .

*Шаг 5.* Если  $\rho_i > 0$ , то увеличим значение переменной  $i$  на единицу ( $i := i + 1$ ) и перейдем к шагу 1. В противном случае найденный поток  $F$  в сети  $G$  считается максимальным.

Приведённый алгоритм в большинстве случаев находит максимальный поток в сети с нежёстким распределением, однако, существуют такие сети, для которых поток, построенный в результате применения алгоритма 4.7, не является максимальным.

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 4.7 определяется трудоёмкостью решения системы линейных алгебраических уравнений и в данном случае ограничена величиной  $O(m^4)$ , где  $m = |U|$ .

### Пример 4.20.

Рассмотрим сеть  $G$  с нежёстким распределением потока, изображённую на рис. 4.46. Найдём максимальный поток в сети  $G$ .

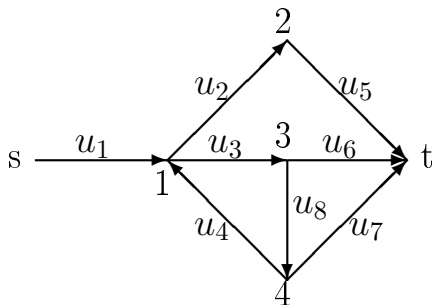


Рисунок 4.46 — Сеть  $G$  с нежёстким распределением потока.

Доля потока ( $p(u)$ ) и пропускная способность ( $c(u)$ ) каждой из дуг сети  $G$  представлены в таблице 4.

Таблица 4. Доли потока, проходящего по дугам и пропускные способности дуг сети  $G$ .

$u$	$p(u)$	$c(u)$
$u_1$	1	20
$u_2$	0,2	5
$u_3$	0,8	8
$u_4$	0,5	4
$u_5$	1	5
$u_6$	0,5	4
$u_7$	0,5	5
$u_8$	0,5	4

Изначально полагаем  $i = 0$ ,  $F(u) = F_0(u) = 0 \quad \forall u \in U$  и строим сеть  $G_0$  — дубликат сети  $G$ .

Решая задачу о максимальном потоке в сети  $G_0$  при условии жёсткого распределения, находим поток  $F_0$ :

$$F_0(u_1) = 8; F_0(u_2) = 2; F_0(u_3) = 8; F_0(u_4) = 2;$$

$$F_0(u_5) = 2; F_0(u_6) = 4; F_0(u_7) = 2; F_0(u_8) = 4.$$

Увеличиваем поток по дугам сети  $G$  на величины  $F_0(u)$  и поскольку величина полученного потока  $\rho_0 = 8$  больше нуля, то переходим на шаг 1 к построению вспомогательной сети  $G_1$ .

Дугами сети  $G_1$  являются дуги  $\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_7\}$  исходной сети  $G$ . Для них найдем пропускные способности и доли потока, проходящего по ним:

$$c_1(u_1) = 20 - 8 = 12, p_1(u_1) = 1;$$

$$c_1(u_2) = 5 - 2 = 3, p_1(u_2) = \frac{0,2}{0,2} = 1;$$

$$c_1(u_4) = 4 - 2 = 2, p_1(u_4) = \frac{0,5}{(0,5 + 0,5)} = 0,5;$$

$$c_1(u_5) = 5 - 2 = 3, p_1(u_5) = 1;$$

$$c_1(u_7) = 5 - 2 = 3, p_1(u_7) = \frac{0,5}{(0,5 + 0,5)} = 0,5.$$

Решая задачу о максимальном потоке в сети  $G_1$  при условии жёсткого распределения, находим поток  $F_1$ :

$$F_1(u_1) = 3; F_1(u_2) = 3; F_1(u_4) = 0; F_1(u_5) = 3; F_1(u_7) = 0.$$

Увеличиваем поток по дугам сети  $G$  на величины  $F_1(u)$  и поскольку величина полученного потока  $\rho_1 = 3$  больше нуля, то переходим на шаг 1 к построению вспомогательной сети  $G_2$ .

Дугами новой сети  $G_2$  являются дуги  $\{u_1, u_4, u_7\}$ . Поскольку сток  $t$  принадлежит множеству  $X_s^-$  (т.е. нет ни одного пути из  $s$  в  $t$ ), следовательно, в сети  $G_2$  может быть только нулевой жёстко распределённый поток.

В итоге получили, что искомый поток в сети  $G$  выглядит следующим образом:

$$F(u_1) = 11; F(u_2) = 5; F(u_3) = 8; F(u_4) = 2;$$

$$F(u_5) = 5; F(u_6) = 4; F(u_7) = 2; F(u_8) = 4.$$

Величина искомого максимального потока  $\rho^* = \rho_0 + \rho_1 = 11$ .

Заметим, что величина максимального потока в рассматриваемой сети  $G$  без ограничения на распределение потока равна  $\rho' = 13$ . Таким образом, в общем случае максимальный поток в сети с нежёстким распределением не является максимальным потоком в той же самой сети, но без ограничения на распределение.

## Глава 5

# Зависимость ограничений достижимости от времени

### 5.1 Графы с условием на прохождение и временными весами

В повседневной жизни все чаще встречаются ситуации, для которых в силу ряда обстоятельств имеют место некие временные рамки. Наиболее ярким примером такой ситуации являются «пробки» на дорогах крупных городов. Очевидно, что для одного и того же участка дороги в разные часы суток затраты на проезд по данному участку различны.

Во время существования «пробки» пропускная способность участка дороги падает, а затраты возрастают (например, «пережог» топлива). Таким образом, необходимо научиться решать задачи на графах с пропускной способностью дуг, зависящей от времени.

В настоящем разделе предложен еще один класс ограничений — ограничения, связанные с зависимостью весов дуг графа от времени. Показано, что такие ограничения аналогичны ограничениям нестандартной достижимости и предложены подходы для решения задач о потоках в сетях и о кратчайших путях на графах с нестандартной достижимостью, у которых вес каждой дуги меняется с течением времени.

#### 5.1.1 Достижимость на графах с временными весами

Введем в рассмотрение следующие понятия:

**Определение 5.1.** *Графом с временными весами будем называть ориентированный граф  $G^{t_0}(X, U, f, T)$ , вес каждой дуги  $u \in U$  которого зависит от времени  $t (\in [t_0; t_0 + T]_Z)$ , т.е.  $c(u) = c(u, t)$ .*

Другими словами, для каждой дуги такого графа задана не одна величина ее веса (в отличие от классического случая), но некоторая последовательность весов, каждый из которых ставится в соответствие данной

дуге только в свой, определенный момент времени  $t \in [t_0; t_0 + T]_Z$ .

**Определение 5.2.** *Величину  $t_0$  будем называть началом отсчета времени, а величину  $T$  — продолжительностью действия времени.*

Отметим, что при таком условии все возможные пути на графе с временными весами являются допустимыми, однако, решение некоторых классических задач (таких, как задача о кратчайшем пути или о максимальном потоке) существенно затрудняется. Эта ситуация возникает, поскольку несмотря на то, что сохраняется транзитивное свойство пути, экстремальное свойство нарушается по причинам, аналогичным для ограничений нестандартной достижимости.

Однако, есть и некоторые отличия (напомним экстремальное свойство: если существует кратчайший путь, то его части являются кратчайшими путями). Так для случая нестандартной достижимости части кратчайшего пути могут вообще не являться допустимыми путями или, являясь допустимыми путями не являться кратчайшими путями. Для случая же временных весов части кратчайшего пути являются допустимыми путями, но возникает вопрос о моменте времени начала движения по каждому пути.

Время начала движения по кратчайшему пути в данном случае является обязательной величиной, поскольку для различных моментов времени начала движения кратчайшие пути могут быть различны. Проиллюстрируем это следующим примером:

**Пример 5.1.**

Рассмотрим граф  $G^0(X, U, f, 4)$  с временными весами, показанный на рис.5.1.

Определим зависимость весов каждой дуги от времени  $t \in [0; 4]_Z$ :

$$c(u_1) = \{1, 2, 3, 1\}; c(u_2) = \{3, 1, 2, 4\}; c(u_3) = \{2, 4, 2, 5\};$$

$$c(u_4) = \{3, 4, 1, 2\}; c(u_5) = \{2, 4, 1, 2\}; c(u_6) = \{4, 3, 1, 1\};$$

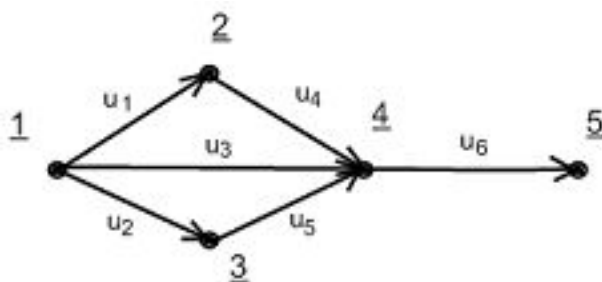


Рисунок 5.1 — Граф  $G^0$  с временными весами.

Для данного графа кратчайшим путем на отрезке времени  $[0; 4]_Z$  является путь  $\mu = \{u_2, u_5, u_6\}$  (его длина  $|\mu| = 3$ ). При этом, ближайшее время начала движения —  $t_* = 1$ , поскольку если начинать движение в момент  $t = 0$ , то кратчайшим путем является путь  $\mu_1 = \{u_3, u_6\}$  (его длина  $|\mu_1| = 5$ ). Если начинать движение в момент  $t = 2$ , то кратчайшим путем является единственно возможный путь  $\mu_2 = \{u_3, u_6\}$ . Его длина  $|\mu_2| = 3$ . Такая же длина и у пути  $\mu$ , однако, ближайшим временем начала движения, очевидно, является момент времени  $t_* = 1$ . Наконец, если начинать движение в момент  $t_0 = 3$ , то невозможно к моменту времени  $t = 4$  достичь вершины с номером 5.

Таким образом, для решения задачи о кратчайшем пути на графе с ограничением на достижимость, у которого вес каждой дуги зависит от времени необходимо кроме самого кратчайшего пути найти еще и время начала движения по этому пути.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий существенное усложнение решения задачи о кратчайшем пути при введении зависимости весов от времени.

### Пример 5.2.

Рассмотрим граф, из примера 5.1, у которого продолжительность действия  $T = 2$ .

Находя на таком графе с временными весами кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5 получим, что им является рассмотренный в примере 5.1 путь  $\mu_1 = \{u_3, u_6\}$  длины  $|\mu_1| = 5$ . При этом, время начала движения

по кратчайшему пути  $t = 0$ .

Заметим, что путь  $\mu = \{u_2, u_5, u_6\}$ , бывший в рассмотренном примере кратчайшим (его длина  $|\mu| = 3$ ), теперь таковым не является, поскольку на его прохождение потребуется три единицы времени. Это уже больше продолжительности действия  $T$ , но кроме этого необходимо еще учесть время начала движения по данному пути —  $t_* = 1$ . Таким образом, кратчайший путь  $\mu$  может быть пройден только к моменту времени  $t = 4$ , а этого не позволяет продолжительность действия  $T$ .

**Определение 5.3.** *Путь  $\mu$  будем называть допустимым на графе с временными весами если выполняется соотношение*

$$|\mu| \leq T - t_0 - t_\mu, \quad (5.1)$$

где  $t_\mu$  - время начала движения по пути  $\mu$ .

Очевидно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.1.** *Пусть  $G^{t_0}(X, U, f, T)$  — граф с временными весами. Тогда время начала движения  $t_*$  по кратчайшему допустимому пути между вершинами  $x$  и  $y$  данного графа с временными весами удовлетворяет соотношению:*

$$0 \leq t_* \leq T - t_0 - \min_{\mu(x,y)} |\mu(x, y)|, \quad (5.2)$$

где все возможные пути  $\mu$  из вершины  $x$  в вершину  $y$  рассматриваются при постоянных весах на исходном графе.

Задачу о достижимости на графах с временными весами будем решать аналогично задачам о достижимости для графов с ограничениями на прохождение по дугам — предложим построение вспомогательного графа, у которого вес каждой дуги не меняется с течением времени. Кроме этого, каждому пути на вспомогательном графе соответствует допустимый путь на исходном графе.

Таким образом, зависимость весов дуг исходного графа можно считать некоторым аналогом ограничения на достижимость и для решения

задачи о кратчайших путях использовать методы решения аналогичной задачи на графах с нестандартной достижимостью.

**Построение вспомогательного графа:**

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G_\varphi^{t_0}(X, U, f, T)$  поставим в соответствие  $(T + 1)$  вершину  $\{x_0, x_1, \dots, x_T\}$  на вспомогательном графе  $G'$ , а дуги строим следующим образом:

Каждой дуге  $u \in U$  (для определённости полагаем  $f(u) = (x, y)$ ) ставим в соответствие  $T$  дуг  $\{u_1, u_2, \dots, u_T\}$  таких, что  $f'(u_i) = (x_{i-1}, y_i)$ . Определим веса новых дуг  $\{u_i\}$  на вспомогательном графе так, что  $c(u_i) = c(u, t_0 + i) \quad \forall i \in [0; T - 1]_Z$ .

Поскольку зависимость дуг от времени на исходном графе считаем аналогом ограничения на достижимость, следовательно, справедлива следующая теорема:

**Теорема 5.2.** *Любому кратчайшему пути  $\mu'$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует кратчайший путь  $\mu$  на исходном графе  $G$  и вершина  $x$  достижима из  $y$  на исходном графе  $G$  тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе  $G'$  из вершин множества  $A_x = \{x_0, x_1, \dots, x_T\}$  достижима, по крайней мере, одна из вершин множества  $A_y = \{y_0, y_1, \dots, y_T\}$ .*

Доказательство данной теоремы следует из построения вспомогательного графа и практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.14.

Таким образом, применяя приведенную теорему о связи путей на исходном и вспомогательном графах, для решения задачи о кратчайшем пути из вершины  $x$  в вершину  $y$  на исходном графе достаточно решить задачу о кратчайшем пути из вершин множества  $A_x = \{x_0, x_1, \dots, x_T\}$  в вершины множества  $A_y = \{y_0, y_1, \dots, y_T\}$ , при этом, имеет место следующее соотношение между длинами кратчайших путей на исходном и вспомогательном графах:



$$|\mu_*(x, y)| = \min_{i \in [1; T-1]_N} \{|\mu'_*(x_i, A_y)|\} \quad (5.3)$$

Время начала движения по данному кратчайшему пути  $\mu_*$  равно  $t_* = t_0 + i$ , где  $i$  — это минимальный индекс вершины множества  $A_x$ , для которой достигается минимум в соотношении (5.3).

**Пример 5.3.**

Рассмотрим граф  $G$ , представленный в примере 5.1, при этом,  $t_0 = 0$ ,  $T = 4$ .

Вспомогательный граф  $G'$  имеет вид, показанный на рис.5.2.

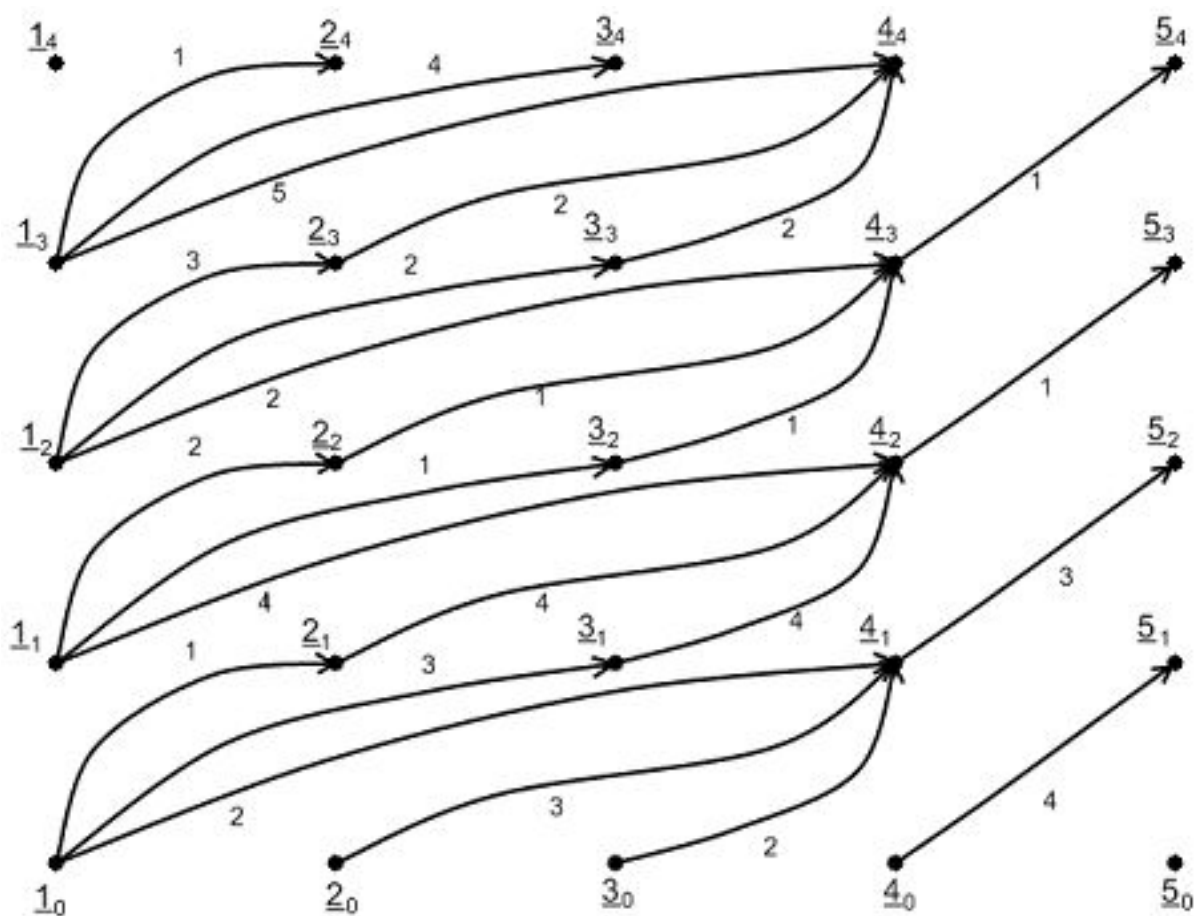


Рисунок 5.2 — Вспомогательный граф  $G'$  для графа  $G^0$  на рис. 5.1.

На построенном вспомогательном графе существуют следующие пути из вершин множества  $A_1 = \{1_0, 1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$  в вершины множества  $A_5 = \{5_0, 5_1, 5_2, 5_3, 5_4\}$ . Для удобства будем записывать их как последовательность вершин:

$$\mu'_1(1_0, 5_2): 1_0 \rightarrow 4_1 \rightarrow 5_2. \text{ Длина пути } - |\mu'_1| = 5.$$

$\mu'_2(1_0, 5_3): 1_0 \rightarrow 2_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 5_3$ . Длина пути —  $|\mu'_2| = 6$ .

$\mu'_3(1_0, 5_3): 1_0 \rightarrow 3_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 5_3$ . Длина пути —  $|\mu'_3| = 8$ .

Отметим, что  $\mu'_*(1_0, A_5)$  есть путь  $\mu'_1(1_0, 5_2): 1_0 \rightarrow 4_1 \rightarrow 5_2$  длины  $|\mu'_*(1_0, A_5)| = |\mu'_1| = 5$ .

Следующая группа путей — пути из вершины  $1_1$ .

$\mu'_4(1_1, 5_3): 1_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 5_3$ . Длина пути —  $|\mu'_4| = 5$ .

$\mu'_5(1_1, 5_4): 1_1 \rightarrow 2_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 5_4$ . Длина пути —  $|\mu'_5| = 4$ .

$\mu'_6(1_1, 5_4): 1_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 5_4$ . Длина пути —  $|\mu'_6| = 3$ .

Отметим, что  $\mu'_*(1_1, A_5)$  есть путь  $\mu'_1(1_1, 5_4): 1_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 5_4$  длины  $|\mu'_*(1_1, A_5)| = |\mu'_6| = 3$ .

Следующая (и последняя для данного графа) группа путей — пути из вершины  $1_2$ .

$\mu'_7(1_2, 5_4): 1_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 5_4$ . Длина пути —  $|\mu'_7| = 3$ .

Отметим, что  $\mu'_*(1_2, A_5)$  это единственно возможный путь из вершины  $1_2$  в вершины множества  $A_5$  —  $\mu'_7(1_2, 5_4): 1_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 5_4$  длины  $|\mu'_*(1_2, A_5)| = |\mu'_7| = 3$ .

Теперь сравнивая веса полученных путей  $\mu'_*(1_0, A_5)$ ,  $\mu'_*(1_1, A_5)$  и  $\mu'_*(1_2, A_5)$ , получим, что кратчайшими путями являются пути  $\mu'_*(1_1, A_5)$  и  $\mu'_*(1_2, A_5)$ . Их веса равны трем, однако, поскольку нас интересовало ближайшее время начала движения, то на вспомогательном графе в качестве оптимального кратчайшего пути выбираем путь  $\mu'_*(1_1, A_5): 1_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 5_4$ . Переносим результат на исходный граф, получим решением задачи о кратчайшем пути из вершины 1 в вершину 5 путь  $\mu_*(1, 5): 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  (этот путь соответствует найденному на вспомогательном графе пути  $\mu'_*(1_1, A_5)$ ), а время начала движения по нему  $t_0 = 1$ .

Отметим, что найденным кратчайшим путям  $\mu'_*(1_0, A_5)$ ,  $\mu'_*(1_1, A_5)$  и  $\mu'_*(1_2, A_5)$  вспомогательного графа соответствуют рассмотренные в примере 1 кратчайшие пути  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$  для исходного графа.

### 5.1.2 Задача о кратчайшем пути на графе с нестандартной достижимостью

Пусть теперь граф  $G$  — граф с заданной нестандартной достижимо-

стью  $\varphi$ , у которого веса всех дуг меняются в зависимости от времени  $t$  ( $t \in [t_0; t_0 + T - 1]_N$ ). Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути на графе такого вида.

Изменение весов дуг в зависимости от времени, как уже было показано в предыдущем пункте, может быть рассмотрено в качестве аналога ограничения на достижимость. Только в отличие от настоящего ограничения, оно не влечет за собой неравноправия дуг при формировании пути. Таким образом, для решения задачи о кратчайшем пути в новой постановке можно воспользоваться следующим подходом: вначале необходимо построить вспомогательный граф для ограничения на достижимость  $\varphi$ , затем на нем решать задачу о кратчайшем пути так, как это было сделано в предыдущем пункте. Т.е. фактически приходится строить вспомогательный граф в два этапа. Этап первый — это построение вспомогательного графа  $G'$  с использованием правил построения вспомогательного графа для ограничения на достижимость  $\varphi$ . Этап второй — это построение вспомогательного графа  $G''$  по вспомогательному графу  $G'$  так, как это было предложено в предыдущем пункте, поскольку на вспомогательном графе  $G'$  нет ограничения на прохождение по дугам.

Таким образом, при решении задачи о кратчайшем пути на графе  $G''$  будет найден кратчайший путь на графе  $G'$  и ближайшее время начала движения по этому пути. Затем, при переносе результата с вспомогательного графа  $G'$  на исходный граф  $G$ , будет найден кратчайший из допустимых при ограничении  $\varphi$  путей, что и является решением исходной задачи. Отметим, что время начала движения будет найдено при решении задачи на вспомогательном графе  $G''$ .

#### Пример 5.4.

Рассмотрим граф  $G$  с вентильной достижимостью при  $k = 2$ , показанный на рис.5.1.

Определим  $U_0 = \{u_1, u_3\}$ ,  $U_1 = \{u_2, u_4, u_5\}$  и  $U_2 = \{u_6\}$ .

Тогда кратчайшим путем из вершины 1 в вершину 5 на этом графе является единственно возможный допустимый путь  $\mu(1, 5)$ :  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ .

Время начала движения по этому пути равно  $t_* = 1$ . Длина этого кратчайшего пути равна  $|\mu(1, 5)| = 4$ .

Определим  $U_0 = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $U_1 = \{u_4, u_5\}$  и  $U_2 = \{u_6\}$ .

Тогда кратчайшим путем из вершины 1 в вершину 5 на этом графе является допустимый путь  $\mu_1(1, 5)$ :  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ . Время начала движения по этому пути равно  $t_* = 2$ . Длина этого кратчайшего пути равна  $|\mu(1, 5)| = 3$ .

### 5.1.3 Периодическая зависимость от времени весов дуг графа

Введем в рассмотрение следующие понятия:

**Определение 5.4.** *Граф  $G^{t_1}(X, U, f, T_0)_\tau$  будем называть периодическим по времени если  $G$  — граф с временными весами, но начиная с момента  $t_1$  ( $\geq 0$ ) зависимость весов дуг является периодической с периодом равным величине  $T_0$  ( $> 0$ ). Т.е. для каждого момента времени  $t$  ( $\geq t_1$ ) выполняется соотношение*

$$c(u, t) = c(u, t + T_0) \quad \forall u \in U.$$

В данном разделе будем рассматривать случай, когда величина  $t_0 = 0$ . Все рассуждения проведенные ниже легко можно перенести на случай, когда величина  $t_0$  отлична от нуля.

Поскольку  $t_0 = 0$  и существует периодическая зависимость от времени весов дуг графа, то в таком случае, отрезок времени  $[0; T]$ , на котором рассматривается поставленная задача можно расширить до полуинтервала  $[0; +\infty)$ .

Для решения задачи о кратчайшем пути модифицируем указанный в разделе 5.1.1 подход. Модификация состоит в построении такого вспомогательного графа, на котором возможно решение поставленной задачи о кратчайшем пути для периодической зависимости и неограниченного времени:

#### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине  $x$  исходного графа  $G^{t_1}(X, U, f, T_0)_\tau$  поставим в соот-

ветствие  $s (= t_1 + T_0)$  вершин  $\{x_0, x_1, \dots, x_{s-1}\}$  на вспомогательном графе  $G'$ , а дуги строим следующим образом:

Каждой дуге  $u \in U$  (для определённости полагаем  $f(u) = (x, y)$ ) ставим в соответствие  $s$  дуг  $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$  таких, что  $f'(u_i) = (x_{i-1}, y_i) \forall i \in [1; s-1]_Z$  и  $f'(u_s) = (x_{s-1}, y_{t_1})$ . Определим веса новых дуг  $\{u_i\}$  на вспомогательном графе так, что  $c(u_i) = c(u, i) \forall i \in [0; s-1]_Z$ .

Таким образом, исходную задачу о кратчайшем пути на исходном периодическом по времени графе  $G^{t_1}(X, U, f, T_0)_\tau$ , время действия которого  $T = \infty$ , удалось свести к аналогичной задаче на полученном (конечном!) вспомогательном графе  $G'$ .

### Пример 5.5.

Рассмотрим периодический по времени граф  $G$  на рис.5.3,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = T_0 = 2$ .

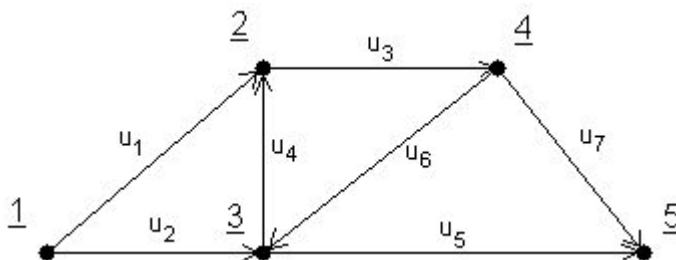


Рисунок 5.3 — Периодический по времени граф  $G$ .

Определим зависимость весов каждой дуги от времени:

$$c(u_1) = \{5; 5, 6\}; c(u_2) = \{1; 8, 8\}; c(u_3) = \{1; 9, 1\}; c(u_4) = \{9; 1, 7\};$$

$$c(u_5) = \{5; 6, 1\}; c(u_6) = \{7; 1, 7\}; c(u_7) = \{4; 5, 6\}.$$

Отметим, что для каждой дуги заданы три значения: первое — для неперодической части, затем, после точки с запятой, два значения для периодической части.

Вспомогательный граф  $G'$  представлен на рис.5.4.

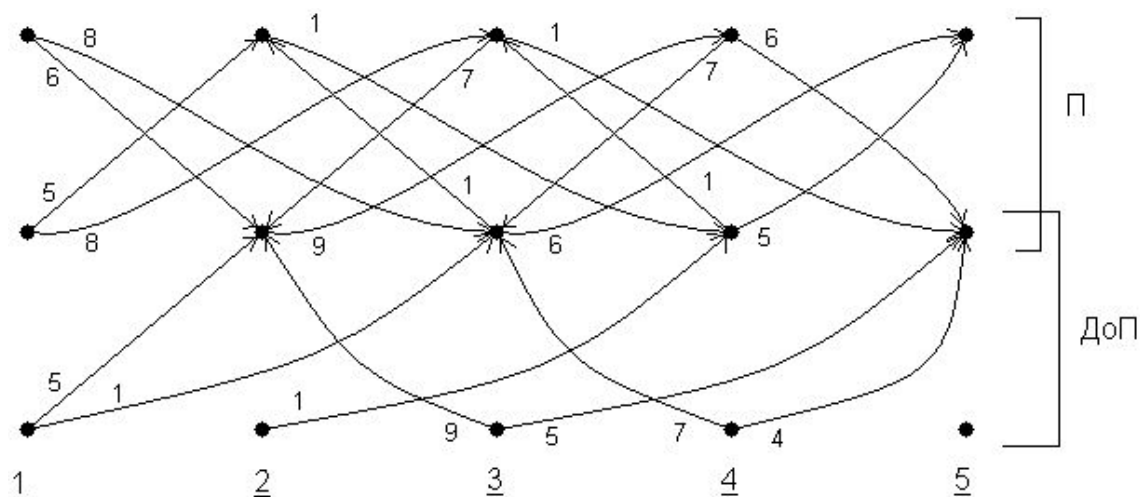


Рисунок 5.4 — Вспомогательный граф  $G'$ .

Граф разбит на два слоя: периодический слой ( $\Pi$ ) и допериодический (До $\Pi$ ). Отметим, что для периодического слоя существуют дуги от самого верхнего уровня к самому нижнему.

Кратчайшим путем из вершины 1 в вершину 5 на исходном периодическом по времени графе является путь  $\mu(1, 5) = \{u_2, u_4, u_3, u_6, u_5\}$  (в виде последовательности вершин:  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ ). Длина этого пути равна  $|\mu(1, 5)| = 5$ , ближайшее время начала движения  $t_* = 0$ . Найденный путь получен при переносе решения задачи о кратчайшем пути на вспомогательном графе из вершин множества  $A_1$  в вершины множества  $A_5$ . Решение, как видно на вспомогательном графе, можно представить в виде последовательности вершин следующим образом:  $1_0 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 5_1$ .

Отметим, что приведенный кратчайший путь содержит 5 дуг, что больше, чем величина  $|X| - 1$  ( $= 5 - 1 = 4$ ). В классической постановке любой кратчайший путь не превосходит эту величину ([43],[44]-[45], [48], [97]).

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.3.** Пусть  $G^{t_1}(X, U, f, T_0)_\tau$  — периодический по времени граф ( $t_1 > 0$ ),  $\mu$  — произвольный кратчайший путь на этом графе. Тогда количество дуг кратчайшего пути  $\mu$  ( $|\mu|$ ) удовлетворяет соотношению

$$|\mu| \leq t_1 + (|X| - 2) \cdot T_0. \tag{5.4}$$

∇ Доказательство.

Известно, что количество дуг любого кратчайшего пути некоторого графа не превосходит величины  $|X| - 1$ . Следовательно, количество дуг кратчайшего пути на вспомогательном графе не превосходит величины  $|X| \cdot (t_1 + T_0) - 1$ , поскольку вершин у вспомогательного графа  $|X| \cdot (t_1 + T_0)$ .

Однако, некоторые из этих вершин не могут быть пройдены одним и тем же путем. Это касается, в первую очередь, вершин допериодического слоя. Очевидно, что количество дуг любого пути в этом слое не превосходит числа  $t_1 - 1$ .

Кроме этого, в периодическом слое не все вершины будут участвовать в кратчайшем пути. Так, например, одним кратчайшим путем не могут быть пройдены различные вершины множеств  $A_x$  и  $A_y$ , где  $x$  и  $y$  начальная и конечная вершины данного пути. В таком случае путь не будет являться кратчайшим.

Таким образом, количество вершин периодического слоя, которые могут быть пройдены кратчайшим путем не более, чем  $(|X| - 2) \cdot T_0 + 2$ . Т.е. количество дуг не более, чем  $(|X| - 2) \cdot T_0 + 1$  (на единицу меньше).

Следовательно, собирая полученные результаты для периодического и допериодического слоев получим соотношение (5.4).

△

### Пример 5.6.

Рассмотрим периодический по времени граф  $G$  на рис.5.5,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = T_0 = 2$ .

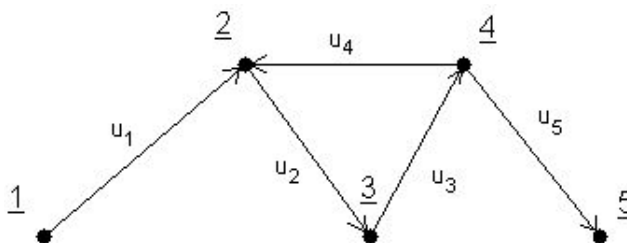


Рисунок 5.5 — Периодический по времени граф  $G$ .

Определим зависимость весов каждой дуги от времени:

$$c(u_1) = \{1; 5, 4\}; c(u_2) = \{4; 1, 1\}; c(u_3) = \{3; 1, 1\}; c(u_4) = \{5; 1, 8\}; c(u_5) = \{6; 7, 1\}.$$

Отметим, что для каждой дуги заданы три значения: первое — для неперiodической части, затем, после точки с запятой, два значения для периодической части.

Вспомогательный граф  $G'$  представлен на рис.5.6.

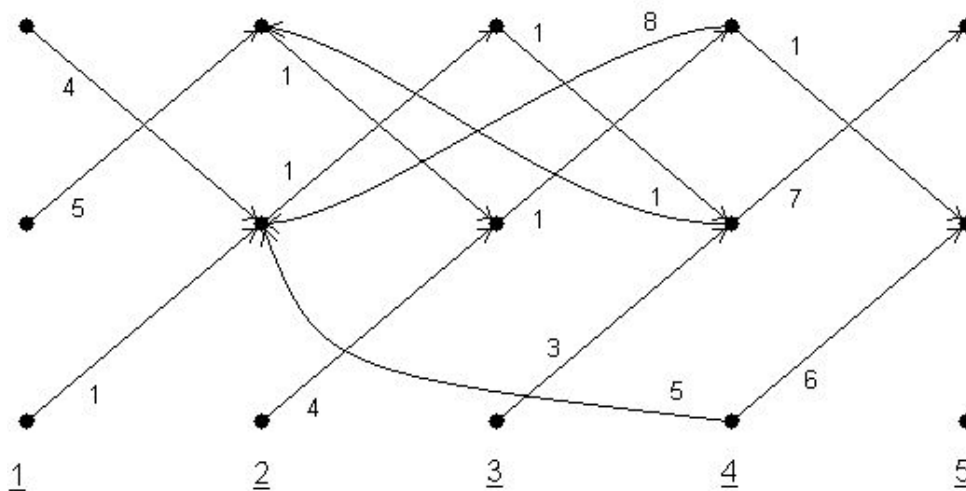


Рисунок 5.6 — Вспомогательный граф  $G'$ .

Кратчайшим путем из вершины 1 в вершину 5 на исходном графе является путь  $\mu(1, 5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_2, u_3, u_5\}$  (не является простым!). Ему соответствует путь на вспомогательном графе (для удобства, приведем его в виде последовательности вершин):  $1_0 \rightarrow 2_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 2_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 5_1$ .

Отметим, что количество дуг кратчайшего пути равно  $7 = t_1 + (|X| - 2) \cdot T_0$ . Таким образом, пример показывает, что оценка количества дуг кратчайшего пути (соотношение 5.4) — точная.

**Замечание 5.1.** В том случае, если величина  $t_1 = 0$  (т.е. на вспомогательном графе отсутствует допериодический слой), то из доказательства теоремы 5.3 следует, что количество дуг произвольного кратчайшего не превосходит величины  $(|X| - 2) \cdot T_0 + 1$ .

## 5.2 Зависимость от времени нестандартной достижимости

Рассмотрим граф  $G_{\varphi(t)}(X, U, f)$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$  (см. [26]), у которого для каждой дуги  $u \in U$  заданы две характери-



ческие функции:  $\kappa_u : T \times [0; m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}$  и  $\rho_u : T \times [0; k]_{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $T = [t_b; t_e]_{\mathbb{Z}_+}$  – некоторый промежуток дискретного времени. При этом,

$$\kappa_u(t, i) = \begin{cases} 1, & u \in U_i \text{ в момент времени } t; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases},$$

$$\rho_u(t, j) = \begin{cases} 1, & u \in U^{(j)} \text{ в момент времени } t; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}.$$

**Определение 5.5.** *Ориентированный граф  $G_{\varphi(t)}(X, U, f)$  такого вида будем называть графом с меняющейся нестандартной достижимостью.*

На таких гафах рассмотрим две классические задачи: задачу о кратчайших путях и задачу о случайных блужданиях частицы по вершинам графа.

### 5.2.1 Задача о кратчайших путях

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути на графе  $G_{\varphi(t)}$  с меняющейся нестандартной достижимостью. Как было показано в [26] классические алгоритмы для ее решения не могут быть применены, поскольку теряются два свойства пути (транзитивное и экстремальное), на которых строятся такие алгоритмы. Более того, сама нестандартная достижимость может меняться с течением времени.

Отметим тот факт, что для графов с меняющейся нестандартной достижимостью, так же как и в других случаях зависимости дуг от времени, в задаче нахождения кратчайшего пути возникает вопрос о моменте времени начала движения по такому пути, поскольку для различных моментов времени начала движения кратчайшие пути могут быть различны. Проиллюстрируем такую ситуацию следующим примером:

#### Пример 5.7.

Рассмотрим граф  $G(X, U, f)$  с меняющейся нестандартной достижимостью при  $T = \{0, 1\}$ , показанный на рис.5.7. В качестве ограничения на достижимость возьмем смешанную достижимость (см. [4]). В данном случае множество дуг разбито на два непересекающихся подмножества  $U_0, U_1$

(«разрешенных» и «запрещенных») дуг, и ставится условие, что по дугам «запрещенного» множества нельзя проходить два раза подряд. При этом  $c(u_1) = c(u_2) = 1$  и  $c(u_3) = c(u_4) = 2$ .

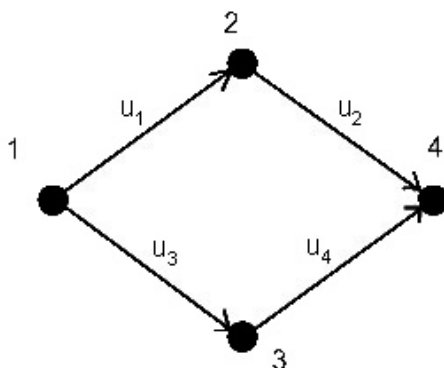


Рисунок 5.7 — : Граф  $G$  с меняющейся нестандартной достижимостью.

Определим зависимость характеристического и путевого наборов множеств для  $t \in \{0, 1\}$  следующим образом.

При  $t = 0$ :  $U_0(0) = \{u_3, u_4\}$ ,  $U_1(0) = \{u_1, u_2\}$ ,  $U^{(0)}(0) = U$  и  $U^{(1)}(0) = U_0(0)$ .

При  $t = 1$ :  $U_0(1) = \{u_1, u_4\}$ ,  $U_1(1) = \{u_2, u_3\}$ ,  $U^{(0)}(1) = U$  и  $U^{(1)}(1) = U_0(1)$ .

Будем считать, что характеристика  $\varphi_\mu(t) = \max\{0, \varphi_\mu(t-1) + a_u(t)\}$ ,  $\varphi_\mu(0) = 0$ , а величина  $a_u(t)$  определяется следующим образом:

$$a_u(t) = \begin{cases} -1, & \kappa_u(t, 0) = 1; \\ 0, & \kappa_u(t, 1) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, на рассматриваемом графе возможны два пути из вершины 1 в вершину 4:  $\mu_1 = \{u_1, u_2\}$  и  $\mu_2 = \{u_3, u_4\}$ . Следует заметить, что путь  $\mu_1$  не является допустимым, если начинать его обход в четные моменты времени, в отличие от пути  $\mu_2$ , который является допустимым всегда. Однако, кратчайшим путем на графе  $G$  является именно путь  $\mu_1$  с одним условием: начинать движение по этому пути следует только в нечетные моменты времени.

Для нахождения кратчайших путей будем применять описанный ранее подход (см. [4], [25], [26] и [65]). Построим вспомогательный граф  $G'$  по следующим правилам:

Для каждой вершины  $x$  исходного графа  $G_{\varphi(t)}$  поставим в соответствие  $(k+1) \cdot |T|$  вершин  $\{x_t^{(i)}\}$  ( $i \in [0; k]_Z$ ,  $t \in T \setminus \{t_e\}$ ) на вспомогательном графе  $G'$ . Дуги вспомогательного графа строятся по следующему правилу:

Для каждого момента времени  $t \in T \setminus \{t_e\}$  имеем

1. для всех индексов  $i \in [0; m]_Z$  и  $j \in [0; k]_Z$ , и каждой дуги  $u \in U$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ) если  $\kappa_u(t, i) \cdot \rho_u(t, j) = 1$  (т.е. в момент времени  $t$  дуга  $u$  принадлежит пересечению множеств  $U_i$  и  $U^{(j)}$ ), то на вспомогательном графе достраиваем дугу  $u_i^{(j)}(t)$  такую, что  $f'(u_i^{(j)}(t)) = (x_t^{(j)}, y_{t+1}^{(F(j, a_u(t)))})$ . При этом,  $F(a, b)$  — функция (см. [26]), определяющая характеристику нестандартной достижимости: для произвольного пути  $\mu$  характеристика строится по правилу

$$\varphi_\mu(t) = F(\varphi_\mu(t-1), a_u(t)), \quad \forall i > t_b, \varphi_\mu(t_b) = 0,$$

где число  $a_u(t)$  зависит от того, к какому множеству из набора  $U_\Delta$  принадлежит дуга  $\mu(t)$  ( $= u$ ) в момент времени  $t$ .

В том случае, если выбрано формальное ограничение  $\varphi$  нестроного типа, то кроме указанных дуг на вспомогательном графе строим дополнительные дуги по правилу:

2. для всех индексов  $i \in [0; m]_Z$  и  $j \in [0; k]_Z$ , и каждой дуги  $u \in U$  (для определённости положим  $f(u) = (x, y)$ ), для которой  $\kappa_u(t, i) \cdot (1 - \rho_u(t, j)) = 1$  (т.е. в момент времени  $t$  дуга  $u$  принадлежит множеству  $U_i$  и не принадлежит множеству  $U^{(j)}$ ), если выполняется, что среди дуг множества  $[x]^+$  не существует дуги, которая бы в момент времени  $t+1$  принадлежала бы множеству  $U^{(j)}$ , то строим дополнительную дугу  $u'$  такую, что  $f'(u') = (x^{(j)}, y^{(F(j, a_u(t)))})$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.4.** *Любому пути  $\mu'$  на вспомогательном графе  $G'$  соответствует допустимый путь  $\mu$  на исходном графе  $G$  и вершина  $y$  достижима из  $x$  на исходном графе с меняющейся нестандартной достижимостью  $G$  тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе  $G'$  из вершины  $x_{t_b}^{(0)}$  достижима, по крайней мере, одна из вершин множества  $V_y = \{y_t^{(j)}\}$  ( $j \in [0; k]_Z$ ,  $t \in T \setminus \{t_e\}$ ).*

Доказательство данной теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.14.

### 5.2.2 Случайные блуждания частицы на графах с меняющейся нестандартной достижимостью

Рассмотрим процесс случайного блуждания частицы по вершинам графа с меняющейся нестандартной достижимостью.

Как было показано ранее ([65]), такой процесс не является Марковским и предложен подход для различных ограничений достижимости, при помощи которого можно сводить полученный немарковский процесс на графе с нестандартной достижимостью к Марковскому процессу на вспомогательном графе. Таким образом, для нахождения вероятности перехода из одной вершины в другую на исходном графе достаточно построить вспомогательный граф и на нем найти соответствующую вероятность перехода.

Приведем общее правило для решения задачи о вероятностях перехода на графах с нестандартной достижимостью и графах с меняющейся нестандартной достижимостью.

Для начала рассмотрим случай, когда нестандартная достижимость не зависит от времени.

В данном случае, при решении задачи о кратчайших путях было предложено построение вспомогательного графа  $G'$  (см. [26]). Будем использовать его с некоторыми дополнениями, касающимися перестроения вероятностей перехода по дугам  $G'$ .

Вероятности перехода будем перестраивать следующим образом:

1. Перенесем вероятности перехода по дугам исходного графа на соответствующие им дуги вспомогательного графа.

2. Поскольку при наличии ограничения на достижимость не все пути являются допустимыми, значит, на вспомогательном графе будут существовать вершины, у которых общая (суммарная) вероятность перехода из них меньше единицы. Отсюда следует, что простого переноса вероятностей перехода недостаточно. Необходимо, кроме этого, произвести некоторое масштабирование. Такое масштабирование зависит от внутренних

свойств самой нестандартной достижимости. Так, к примеру, для магнитной достижимости (см. [65]) внутренним свойством выступает существенное увеличение вероятности перехода по магнитным дугам с увеличением характеристики  $\varphi$ . Для каждого такого свойства масштабирование будет проводиться по отдельным правилам. В самом простом случае, т.е. когда такие свойства не заданы, правила масштабирования будут иметь вид:

а) Для каждой вершины  $x$  вспомогательного графа  $G'$ , для которой существуют выходящие дуги

$$\forall u \in [x]^+ \quad p(u) ::= \frac{p(u)}{\sum_{v \in [x]^+} p(v)}.$$

б) Для каждой вершины  $x$  вспомогательного графа  $G'$ , для которой  $[x]^+ = \emptyset$  достраиваем дугу, являющуюся петлей. Вероятность перехода по этой петле полагается равной единице.

В результате таких действий получили Марковский процесс случайного блуждания. А поскольку каждому пути вспомогательного графа соответствует допустимый путь на исходном, то этот процесс соответствует (с некоторыми допущениями) процессу случайного блуждания частицы по вершинам исходного графа с нестандартной достижимостью.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.5.** *Вероятность перехода из вершины  $x$  в вершину  $y$  за  $t$  шагов на исходном графе  $G$  может быть найдена по формуле*

$$p_G^t(x, y) = \sum_{i=0}^k p_{G'}^t(x^{(0)}, y^{(i)}),$$

*т.е. как суммарную вероятность перехода из вершины  $x^{(0)}$  во множество вершин  $V_y = \{y^{(0)}, \dots, y^{(k)}\}$  за  $t$  шагов на вспомогательном графе.*

Доказательство данной теоремы следует из правил построения вспомогательного графа и вероятностей перехода по его дугам.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда нестандартная достижимость зависит от времени.

В этом случае процесс случайного блуждания частицы по вершинам, также как и в предыдущем случае, не является Марковским и для находж-

дения вероятностей перехода из одной вершины в другую можно использовать тот же самый подход.

Вспомогательный граф строится по правилам, описанным ранее (предыдущий пункт). Для вероятностей перехода по дугам вспомогательного графа будем использовать правило перестроения вероятностей, описанное для графов с нестандартной достижимостью, не зависящей от времени.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.6.** *Вероятность перехода из вершины  $x$  в момент времени  $t_0$  в вершину  $y$  за  $t$  шагов на исходном графе  $G$  с меняющейся нестандартной достижимостью может быть найдена по формуле*

$$p_G^t(x, y, t_0) = \sum_{i=0}^k p_{G'}^t(x_{t_0}^{(0)}, y_{t_0+t}^{(i)}),$$

*т.е. как суммарную вероятность перехода из вершины  $x_{t_0}^{(0)}$  во множество вершин  $V_{y_{t_0+t}} = \{y_{t_0+t}^{(0)}, \dots, y_{t_0+t}^{(k)}\}$  за  $t$  шагов на вспомогательном графе.*

Доказательство данной теоремы следует из правил построения вспомогательного графа и вероятностей перехода по его дугам.

Отметим, что в общем случае вспомогательный граф  $G'$  является достаточно громоздким и возникает вопрос об упрощении задачи нахождения вероятностей перехода. Поскольку в каждый момент времени на исходном графе действует вполне определенное ограничение на достижимость, значит, существует возможность «разделения» вспомогательного графа. Рассмотрим следующий возможный вариант такого разделения.

Так как при нахождении вероятности перехода из вершины в вершину приходится перемножать матрицы переходных вероятностей вспомогательного графа, значит, можно предположить, что можно построить матрицы переходных вероятностей вспомогательных графов  $\{G'_{t_b}, \dots, G'_{t_e}\}$  при каждом фиксированном времени, а затем, последовательно их перемножить. Такое действие существенно сократит время умножения, поскольку для каждого вспомогательного графа  $G'_{t_i}$  при фиксированном времени  $t_i$  вершин в  $|T|$  раз меньше, чем у вспомогательного графа  $G'$ . Однако, при таких действиях в результат закрадывается существенная ошибка, возник-

кающая из-за того, что на вспомогательном графе  $G'_{t_i}$  могут существовать вершины, для которых не было выходящих дуг и по правилу б) построения переходных вероятностей мы добавляем петлю с вероятностью прохождения по ней, равной единице. Но на следующем шаге вполне возможно, что для этой вершины будут существовать выходящие дуги. Ошибка состоит в том, что частица при таком построении вспомогательных графов  $G'_{t_i}$  может несколько раз пройти по петле и продолжить путь. Таким образом, частица задержится на несколько тактов в вершине, а значит, будет двигаться по недопустимому пути, поскольку для этих временных слоев на графе  $G'$  обозначенная вершина петли не имеет.

Проиллюстрируем такую ситуацию следующим примером.

**Пример 5.8.**

Рассмотрим граф  $G$  с циклически меняющейся смешанной достижимостью (период  $|T| = 2$ ) на рис. 5.8. Вероятности перехода по каждой дуге равны единице. Будем считать, что  $U_0(0) = \{u_1\}$ ,  $U_1(0) = \{u_2, u_3\}$  и  $U_0(1) = \{u_1, u_3\}$ ,  $U_1(1) = \{u_2\}$ .

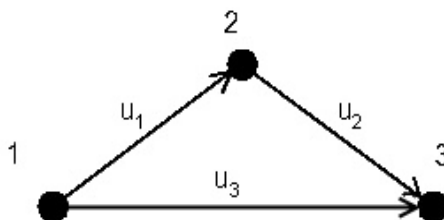


Рисунок 5.8 — Граф  $G$  с циклически меняющейся смешанной достижимостью

Вспомогательный граф  $G'$  будет иметь вид, представленный на рис.5.9.

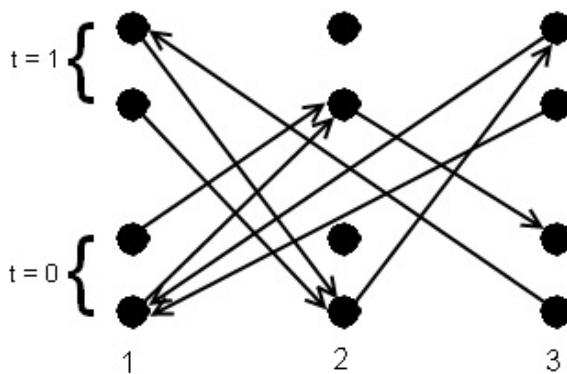


Рисунок 5.9 — Вспомогательный граф  $G'$ .

Видно, что вероятность перехода на исходном графе  $G$  из вершины 1 в начальный момент времени  $t = 0$  в любую вершину (за исключением вершины 3, поскольку там вершина «застревает») не менее, чем за три шага равна нулю, т.к. все пути на вспомогательном графе  $G'$ , начинающиеся в вершине 1 имеют длину не превосходящую двух.

Теперь попробуем уменьшить сложность так, как это было описано выше: строим два вспомогательных графа  $G'_0$  и  $G'_1$ , для которых определим матрицы переходных вероятностей и последовательно перемножая  $t$  раз эти матрицы получим вероятности перехода из каждой вершины в каждую за  $t$  шагов.

Вспомогательные графы  $G'_0$  и  $G'_1$  представлены на рис.5.10 (а и б соответственно).

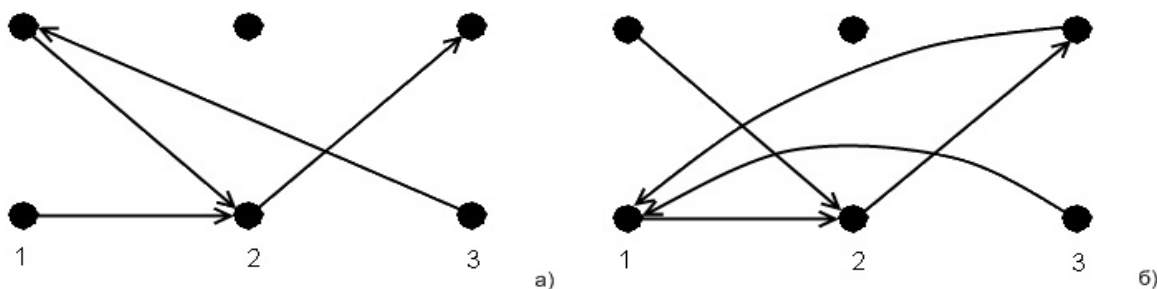


Рисунок 5.10 — Вспомогательные графы  $G'_0$  и  $G'_1$ .

Матрицы переходных вероятностей  $P_{G_0}$  и  $P_{G_1}$ , построенные по правилам для графов с не меняющейся нестандартной достижимостью, имеют следующий вид:

$$P_{G_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножим эти матрицы так, чтобы получить переходные вероятности за 4 шага.



$$P^4 = P_{G_0} \cdot P_{G_1} \cdot P_{G_0} \cdot P_{G_1} = \begin{pmatrix} 100000 \\ 000001 \\ 100000 \\ 100000 \\ 000010 \\ 000001 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили, что вероятность перехода из вершины 1 в начальный момент времени  $t = 0$  в саму себя за 4 шага равна единице (элемент  $P_{1,1}^4$ ). А этого, как было показано выше, не может быть.

### 5.3 Графы с меняющейся длительностью прохождения по дугам

Пусть  $G$  — оргграф такой, что для каждой его дуги указан вес — длительность (количество тактов) прохождения по ней. Будем считать, что длительность каждой дуги может меняться со временем и описывается функцией  $c(u) = c(u, t) \quad t \in [0; T]_Z$ .

**Определение 5.6.** *Граф  $G_T$  с указанными свойствами будем называть графом с меняющейся длительностью прохождения.*

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего (по длительности прохождения) пути на графе  $G_T$  с заданным условием.

В том случае, когда длительность прохождения по дугам не меняется со временем (т.е.  $c(u, t_1) = c(u, t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in [0; T]_Z$ ) поставленная задача является классической задачей о кратчайшем пути (см. [16],[45]).

Существенной особенностью поставленной нами задачи является то, что кроме нахождения самого кратчайшего пути (последовательности дуг [16]), необходимо найти еще и время начала движения по нему, поскольку кратчайшие пути могут меняться в зависимости от начальных моментов времени. Данную ситуацию проиллюстрируем следующим примером.

#### Пример 5.9.

Рассмотрим граф  $G_{10}$  на рис.5.11.

Его дуги  $\{u_1, \dots, u_7\}$  такие, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $c(u_1) = \{9, 9, 9, 9 \dots, 9\}$ ,

$$f(u_2) = (1, 3), c(u_2) = \{8, 3, 4, 4 \dots, 4\},$$

$$f(u_3) = (1, 4), c(u_3) = \{7, 1, 5, 5 \dots, 5\},$$

$$f(u_4) = (2, 4), c(u_4) = \{1, 1, 1, 1 \dots, 1\},$$

$$f(u_5) = (3, 2), c(u_5) = \{1, 1, 1, 1 \dots, 1\},$$

$$f(u_6) = (4, 3), c(u_6) = \{1, 1, 1, 1 \dots, 1\},$$

$$f(u_7) = (4, 5), c(u_7) = \{6, 5, 9, 3 \dots, 3\}.$$

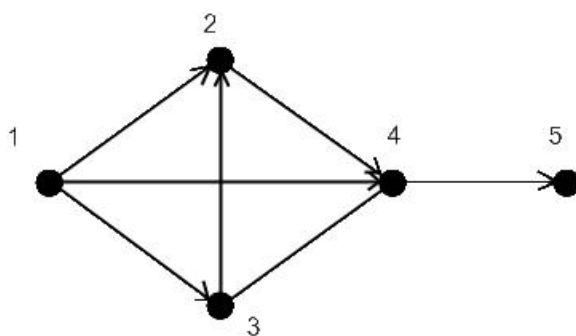


Рисунок 5.11 — Граф  $G_{10}$ .

Перебирая все возможные пути из вершины 1 в вершину 5 для каждого начального момента времени получим, что кратчайшим путем из вершины 1 в вершину 5 является путь  $\mu_*(1, 5) = \{u_3, u_6, u_5, u_4, u_7\}$  (в виде последовательности вершин —  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ) длительностью 7 тактов. Начало движения по этому пути  $t = 1$ .

Заметим, что вершина 4 пройдена в пути два раза, но отбросить замкнутый участок пути  $\{u_6, u_5, u_4\}$  (как это делается в классическом случае [16],[45]) нельзя, поскольку каждая дуга этого участка проходится за определенное количество моментов времени, а это значит, что движение по дуге  $u_7$  придется начинать сразу после завершения движения по дуге  $u_3$  (в таком случае образуется путь  $\{u_3, u_7\}$ , который не является кратчайшим — длительность прохождения по нему равна 10 тактов), либо следует сделать задержку в вершине 4. Такой вариант не возможен вследствие того, что в каждый момент времени должно происходить движение по какой-либо дуге графа  $G$  и нет петель инцидентных вершине 4, которые позволили бы

сделать такую задержку. Кроме этого, для данного примера такую задержку делать не имеет смысла, поскольку даже в том случае, если бы это было возможно, ее длительность была бы равна длительности прохождения по участку  $\{u_6, u_5, u_4\}$  пути  $\mu_*(1, 5)$ .

Отметим, что полученный кратчайший путь был найден путем полного перебора всех возможных путей из вершины 1 в вершину 5, а так как эти пути, вообще говоря, могут не быть простыми, то, очевидно, имеем существенную сложность для алгоритмов нахождения таких путей.

Для решения задачи о кратчайшем пути на графе  $G_T$  с зависимостью длительностей от времени будем использовать тот же самый подход, что и для нестандартной достижимости. Согласно этому подходу строится вспомогательный граф  $G'$  с большим количеством вершин и дуг. На вспомогательном графе каждая дуга имеет длительность перехода, равную единице (как и для классического случая) и каждому пути вспомогательного графа соответствует путь (с точностью до момента начала движения) на исходном графе.

#### Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине исходного графа  $G_T$  ставится в соответствие  $T + 1$  вершина  $x_0, \dots, x_T$  на вспомогательном графе  $G'$ . Дуги последнего строятся по следующему правилу:

Для каждой дуги  $u$  ( $f(u) = (x, y)$ ) исходного графа и каждого момента времени  $t \in [0; T]_Z$  если  $t + c(u, t) \leq T$ , то на вспомогательном графе достраивается дуга  $u_t$  такая, что  $f'(u_t) = (x_t, y_{t+c(u,t)})$ . Дуге  $u_t$  присваиваем вес равный значению  $c(u, t)$ .

После такого построения вспомогательного графа, задача о кратчайшем пути на исходном графе  $G_T$  с меняющейся длительностью прохождения сводится к задаче нахождения кратчайшего пути на вспомогательном графе  $G'$ .

Справедливы следующие теоремы о связи путей исходного и вспомогательного графов.

**Теорема 5.7.** *Вершина  $y$  достижима из вершины  $x$  на исходном графе  $G_T$  тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе  $G'$  из*

множества вершин  $A_x = \{x_0, x_1, \dots, x_T\}$  достижима хотя бы одна вершина множества  $A_y$ . Более того, каждому пути  $\mu'$  на вспомогательном графе однозначно соответствует путь  $\mu$  на исходном графе и имеет место равенство весов пути  $\mu$  и пути  $\mu'$ .

Доказательство данной теоремы практически дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы (теоремы 1.14) для графов с нестандартной достижимостью.

**Теорема 5.8.** *Кратчайшему пути  $\mu'$  на вспомогательном графе соответствует кратчайший путь  $\mu$  на исходном графе, причем время начала движения по пути  $\mu$  равно номеру уровня (см. [65]), которому принадлежит начальная вершина пути  $\mu'$ .*

$\nabla$  *Доказательство.* Рассмотрим кратчайший путь  $\mu(x_i, y_j)$  из вершин множества  $A_x$  в вершины множества  $A_y$  на вспомогательном графе  $G'$ . По предыдущей теореме, ему соответствует путь  $\mu(x, y)$  того же веса на исходном графе  $G_T$ .

Предположим теперь, что путь  $\mu$  не является кратчайшим путем из вершины  $x$  в вершину  $y$  на исходном графе, т.е. на исходном графе найдется путь  $\mu_1(x, y)$  вес которого меньше, чем вес пути  $\mu$ . Тогда из правил построения вспомогательного графа и предыдущей теоремы следует, что на вспомогательном графе существует путь  $\mu'_1(x_{i_1}, y_{j_1})$ , которому соответствует путь  $\mu_1$  исходного графа. Отметим, что вес пути  $\mu'_1$  меньше, чем вес пути  $\mu'$ . Это означает, что вес пути  $\mu_1$  меньше, чем вес пути  $\mu$ , что противоречит тому, что путь  $\mu$  является кратчайшим путем из вершин множества  $A_x$  в вершины множества  $A_y$ .

$\triangle$

### Пример 5.10.

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути на графе из предыдущего примера. Будем считать, что параметр  $T = 8$ .

Для решения данной задачи построим вспомогательный граф  $G'$ , для него найдем соответствующий кратчайший путь и перенесем результат на исходный граф.

Вспомогательный граф представлен на рис.5.12. Отметим, что для дуги  $u_1$  исходного графа нет дуг на вспомогательном, которые соответствовали бы ей.

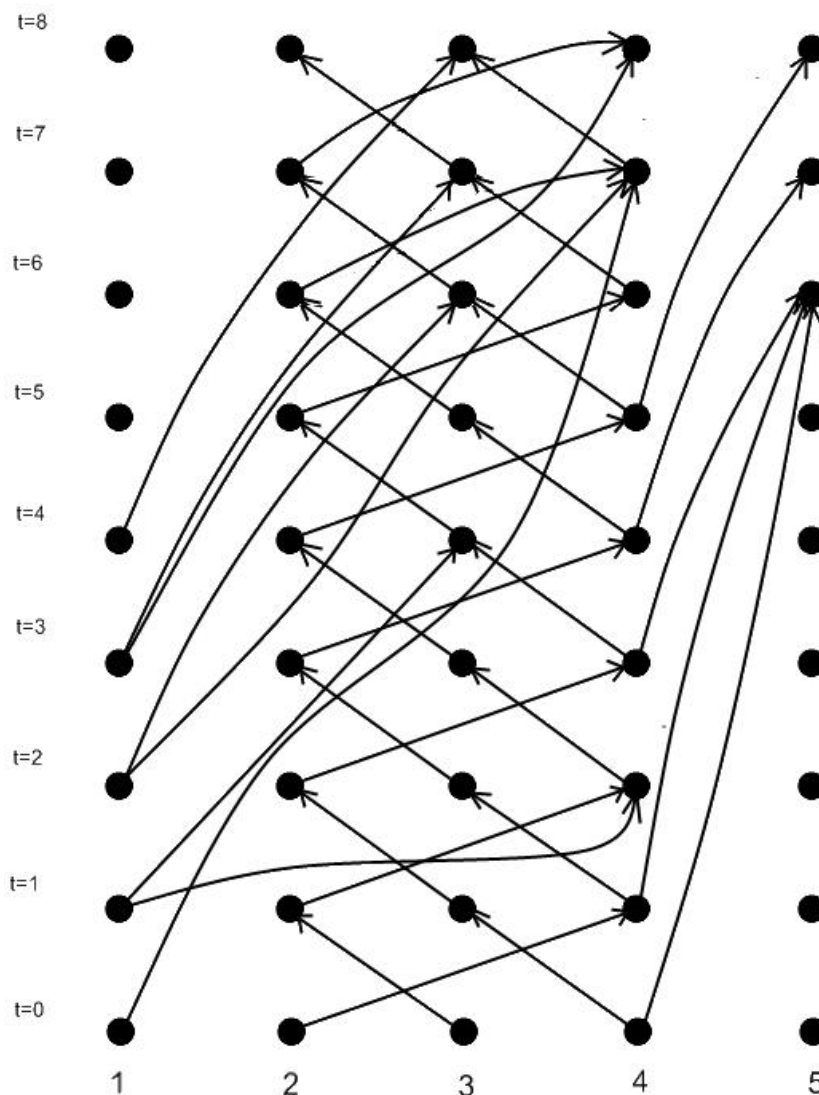


Рисунок 5.12 — Вспомогательный граф  $G'$ .

Найдем кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5 на исходном графе. Для этого на вспомогательном графе будем искать кратчайший путь из  $A_1$  в вершины множества  $A_5$ .

На построенном графе видно, что для  $T = 8$  из вершин множества  $A_1$  в вершины множества  $A_5$  существует только один возможный путь  $\mu'$  :  $1_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 2_4 \rightarrow 4_5 \rightarrow 5_8$ . Ему соответствует путь исходного графа  $\mu$  :  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  (т.е.  $\mu = \{u_1, u_6, u_5, u_4, u_7\}$ ).

## 5.4 Максимальный поток в сети с меняющейся длительностью прохождения

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в сети с меняющейся длительностью прохождения. Будем считать, что для каждой дуги  $u$  кроме пропускной способности ( $c(u)$ ) указана длительность прохождения по ней ( $d(u, t)$ ) единицы потока. Считаем, что зависимость длительностей прохождения по каждой дуге сети периодическая, с периодом равным  $T$  ( $\in N$ ), т.е.

$$\forall u \in U \forall t \in Z_+ d(u, t) = d(u, t + T).$$

Кроме этого, полагаем, что  $d(u, t) \in [1; T]_Z$ .

Задача о максимальном потоке в сети такого вида имеет существенные сложности для решения. Поскольку переход по некоторой дуге такой сети может производиться за разное количество тактов, то для каждого момента времени в конечную вершину может приходиться суммарный поток, состоящий из потоков, отправленных по одной дуге в различные начальные моменты времени. Покажем эту ситуацию на следующем примере.

### Пример 5.11.

Рассмотрим граф  $G_5$  на рис.5.13. Его единственная дуга  $u$  ( $f(u) = (1, 2)$ ) такая, что ее пропускная способность  $c(u) = 1$  и заданы длительности на полном периоде  $d(u) = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ .



Рисунок 5.13 — Граф  $G_5$ .

Тогда, если мы будем отправлять поток величины 1 по дуге  $u$  в каждый момент времени  $t \in [0; 4]_Z$ , то в момент времени  $t = 5$  в вершину 2 придет поток величины 5 (состоящий из всех отправленных потоков), что гораздо больше пропускной способности дуги  $u$ .

Таким образом, пример показывает, что для решения задачи о максимальном потоке в сети с меняющейся длительностью прохождения недостаточно даже построения вспомогательного графа (которое позволяло ре-

шать аналогичные задачи в сетях с нестандартной достижимостью [7]–[65]). Однако этот подход может быть применен с некоторой модификацией, аналогичной алгоритму прорыва в сетях со связанными дугами (см. [23]).

Таким образом, для решения потоковой задачи в исходной сети  $G_T$  построим вспомогательную сеть  $G'$  по правилам указанным в предыдущем параграфе с поправкой на периодичность зависимости длительностей прохождения по дугам:

Каждой вершине исходного графа  $G$  ставится в соответствие  $T$  вершин на вспомогательном графе  $G'$ . Дуги последнего строятся по следующему правилу:

Для каждой дуги  $u$  ( $f(u) = (x, y)$ ) исходного графа и каждого момента времени  $t \in [0; T - 1]_Z$  на вспомогательном графе достраивается дуга  $u_t$  такая, что  $f'(u_t) = (x_t, y_{a(t)})$ , где  $a(t) = t + d(u, t) \pmod T$ . Дуге  $u_t$  присваиваем величину пропускной способности, равную значению  $c(u)$ .

Отметим, что поскольку зависимость периодическая, то нас будет интересовать не величина потока в каждый отдельный момент времени, а некоторая суммарная величина таких потоков за один полный период. В соответствии с этим, построим вспомогательную сеть  $G''$  путем добавления фиктивных источника и стока к сети  $G'$ , соединив их с вершинами, соответствующими источнику и стоку исходного графа, дугами бесконечной пропускной способности. Это необходимо сделать, поскольку источник и сток разбиваются на  $T$  «двойников», каждый из которых действует в свой момент времени.

В сети  $G''$  находим поток из фиктивного источника в фиктивный сток при помощи алгоритма прорыва, считая пока связанными дугами дуги, соответствующие одной дуге исходного графа и имеющие общую концевую вершину на графе  $G''$  (далее будет показано, что условия связности дуг в таком виде недостаточно и будет предложено его уточнение). В результате получаем максимальный суммарный поток за один полный период.

Покажем все этапы нахождения максимального суммарного потока в сети с меняющейся длительностью прохождения на следующем примере.

**Пример 5.12.**

Рассмотрим сеть  $G_4$  на рис.5.14.

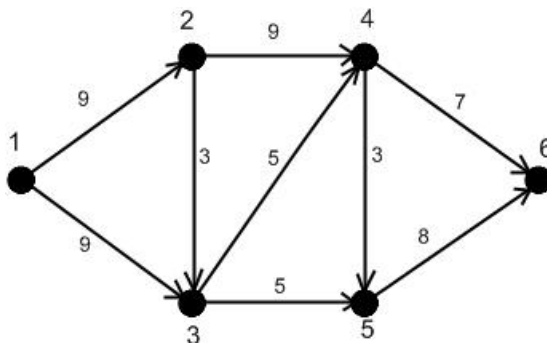


Рисунок 5.14 — Сеть  $G_4$ .

Ее дуги  $\{u_1, \dots, u_9\}$  такие, что

$$f(u_1) = (1, 2), c(u_1) = 9, d(u_1) = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f(u_2) = (1, 3), c(u_2) = 9, d(u_2) = \{4, 3, 2, 1\},$$

$$f(u_3) = (2, 3), c(u_3) = 3, d(u_3) = \{1, 2, 3, 1\},$$

$$f(u_4) = (2, 4), c(u_4) = 9, d(u_4) = \{1, 1, 1, 1\},$$

$$f(u_5) = (3, 4), c(u_5) = 5, d(u_5) = \{1, 2, 1, 2\},$$

$$f(u_6) = (3, 5), c(u_6) = 5, d(u_6) = \{1, 1, 1, 1\},$$

$$f(u_7) = (4, 5), c(u_7) = 3, d(u_7) = \{2, 2, 3, 1\},$$

$$f(u_8) = (4, 6), c(u_8) = 7, d(u_8) = \{1, 1, 1, 1\},$$

$$f(u_9) = (5, 6), c(u_9) = 8, d(u_9) = \{1, 1, 1, 1\}.$$

Очевидно, что без условий и зависимостей (т.е. в классическом случае), величина максимального потока равна  $v^* = 15$  и за один полный период величина максимального суммарного потока равна  $v_s^* = 60$ . Рассмотрим теперь задачу с зависимостью длительности прохождения по дугам сети.

Вспомогательный граф  $G'$  представлен на рис.5.15.



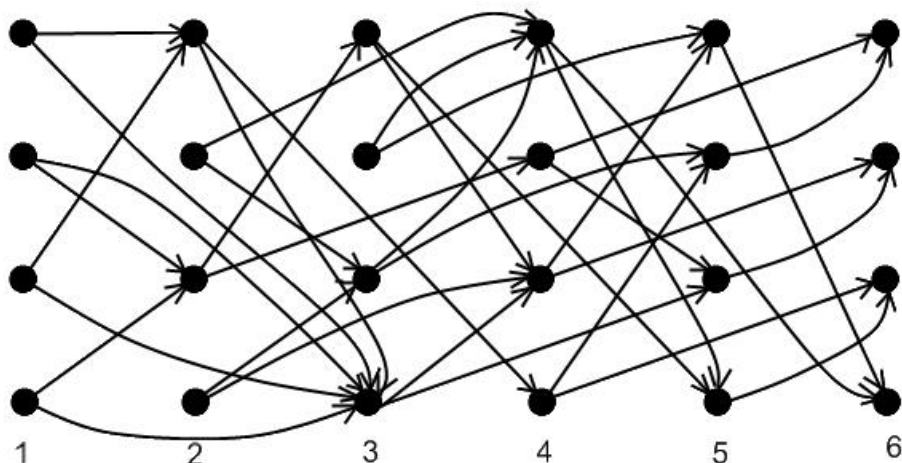


Рисунок 5.15 — Вспомогательный граф  $G'$ .

По этому графу построим вспомогательный граф  $G''$ , добавив фиктивный источник  $s$  и фиктивный сток  $q$ . Кроме этого, удалим все получившиеся псевдоисточники и псевдосток. Такое действие не влияет на результат, но, зачастую, сильно упрощает вид вспомогательного графа (см. [65]).

Вспомогательный граф  $G''$  представлен на рис.5.16.

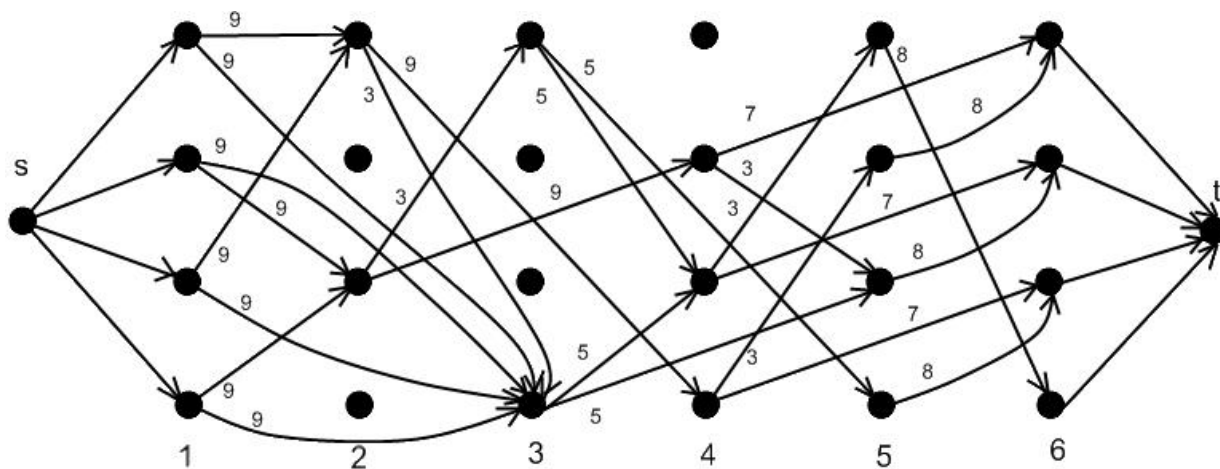


Рисунок 5.16 — Вспомогательный граф  $G''$ .

Перечислим множества связанных дуг (поскольку здесь нет кратных дуг и структура графа достаточно сложная, то дуги здесь будем представлять в виде упорядоченной пары вершин [45]):  $\{(1_0, 2_1); (1_2, 2_1)\}$ ,  $\{(1_2, 2_3); (1_3, 2_3)\}$ ,  $\{(1_0, 3_0); (1_1, 3_0); (1_2, 3_0); (1_3, 3_0)\}$ ,  $\{(3_0, 4_1); (3_3, 4_1)\}$ . Все остальные дуги не являются связанными, т.е. с ними можно работать так, как и с классическими дугами без зависимостей.

Проводя всю последовательность действий решения задачи о максимальном потоке на вспомогательном графе со связанными дугами ([23]) получим следующий результат (показан на рис.5.17.):

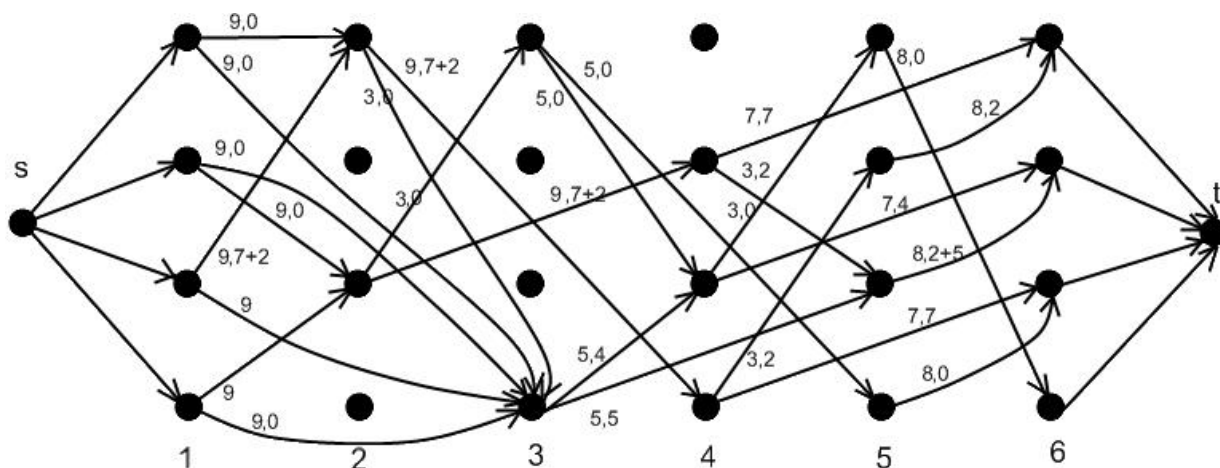


Рисунок 5.17 — Максимальный поток в сети  $G''$ .

Приведем решение — последовательность увеличивающих цепей (цепи представлены в виде последовательности вершин):

$$\mu_1 : s \rightarrow 1_0 \rightarrow 2_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 6_3 \rightarrow q, F(\mu_1) = 7, d(\mu_1) = 3;$$

$$\mu_2 : s \rightarrow 1_0 \rightarrow 2_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 5_1 \rightarrow 6_2 \rightarrow q, F(\mu_2) = 2, d(\mu_2) = 6;$$

$$\mu_3 : s \rightarrow 1_1 \rightarrow 3_0 \rightarrow 5_1 \rightarrow 6_2 \rightarrow q, F(\mu_3) = 5, d(\mu_3) = 5;$$

$$\mu_4 : s \rightarrow 1_1 \rightarrow 3_0 \rightarrow 4_1 \rightarrow 6_2 \rightarrow q, F(\mu_4) = 4, d(\mu_4) = 5;$$

$$\mu_5 : s \rightarrow 1_1 \rightarrow 2_3 \rightarrow 4_0 \rightarrow 6_1 \rightarrow q, F(\mu_5) = 7, d(\mu_5) = 4;$$

$$\mu_6 : s \rightarrow 1_1 \rightarrow 2_3 \rightarrow 4_0 \rightarrow 5_2 \rightarrow 6_3 \rightarrow q, F(\mu_6) = 2, d(\mu_6) = 6.$$

Получили, что величина максимального суммарного потока за один период гораздо меньше базового (т.е. без условия зависимости длительностей прохождения).

Отметим, что длительности путей  $\mu_2, \mu_3, \mu_4$  и  $\mu_6$  превышают период изменения длительностей прохождения по дугам сети  $G$ . Кроме этого, ни один путь не начинается в моменты времени  $t = 2 + T$  и  $t = 3 + T$ , однако, насыщая дуги вспомогательного графа потоком можно выбрать другие пути. Для рассмотренной сети существует вариант насыщения, при котором поток будет отправляться из источника в каждый момент времени.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.9.** *Величина суммарного потока произвольной сети  $G_T$  с меняющейся длительностью прохождения не превосходит величины*

$$v_s^* \leq \sum_{u \in (Y, Y')} c(u) \cdot |D_T(u, [0; T - 1]_Z)|, \quad (5.5)$$

где  $(Y, Y')$  – некоторый произвольный разрез в сети  $G_T$ , а  $|D_T(u, [0; T - 1]_Z)|$  – количество элементов в образе множества  $\{u\} \times [0; T - 1]_Z$  при отображении  $D_T : U \times [0; T - 1]_Z \rightarrow [0; T - 1]_Z$ , действующем по правилу  $D_T(u, t) = (t + d(u, t)) \bmod T$ .

∇ *Доказательство.*

Рассмотрим некоторый произвольный разрез  $(Y, Y')$  в сети  $G_T$ . Поток, проходящий через данный разрез равен сумме потоков по каждой его дуге. Это справедливо как в классическом случае, так и в случае, когда длительности прохождения по дугам рассматриваемой сети зависят от времени.

Теперь осталось подсчитать, сколько раз за полный период по некоторой дуге  $u \in (Y, Y')$  может быть пропущен поток. Отметим, что если для пары различных моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  выполняется  $D_T(u, t_1) = D_T(u, t_2)$ , то это означает, что поток не может быть пропущен два раза (и для начального момента  $t_1$ , и для начального момента  $t_2$ ). В таком случае поток может быть отправлен только один раз, поскольку иначе к моменту времени  $t_1 + d(u, t_1)$  в конечную вершину дуги  $u$  придет поток в два раза больший, чем пропускная способность этой дуги. Таким образом, поток может быть пропущен по дуге  $u$  не больше раз, чем количество различных значений функции  $D_T(u, t)$  для рассматриваемой дуги  $u$  и всех моментов времени  $t \in [0; T - 1]_Z$  (т.е. количество элементов в образе множества  $\{u\} \times [0; T - 1]_Z$  при отображении  $D_T$ ).

Таким образом, получили, что величина максимального суммарного потока, проходящего через разрез за полный период равна сумме величин потока по каждой его дуге  $u$  за полный период, которые не превышают величин  $c(u) \cdot |D_T(u, [0; T - 1]_Z)|$ .

△

В качестве следствия предыдущей теоремы выступает следующая теорема.

**Теорема 5.10.** *Величина суммарного потока произвольной сети  $G_T$  с меняющейся длительностью прохождения не превосходит величины*

$$v_s^* \leq \min_{Y \subset X} \left\{ \sum_{u \in (Y, Y')} c(u) \cdot |D_T(u, [0; T - 1]_Z)| \right\}. \quad (5.6)$$

Отметим, что неравенство (5.6) превращается в равенство в том случае, если для каждой дуги  $u$  разреза, на котором достигается минимум, выполняется следующее свойство: для каждой пары моментов времени  $t_1, t_2 \in [0; T - 1]_Z$  если  $t_1 \geq t_2$ , то  $t_1 + d(u, t_1) \geq t_2 + d(u, t_2)$ .

Приведенные теоремы об оценке величины максимального суммарного потока удобно проиллюстрировать следующими примерами.

**Пример 5.13.**

Рассмотрим сеть  $G_4$  из примера 5.11. Ее единственная дуга  $u$  такая, что  $c(u) = 1$  и  $d(u) = \{4, 1, 1, 2\}$ .

Очевидно, что здесь всего один разрез, состоящий из единственной дуги  $u$ .

Построим для исходной сети  $G_4$  вспомогательную сеть  $G_4''$  (рис.5.18.)

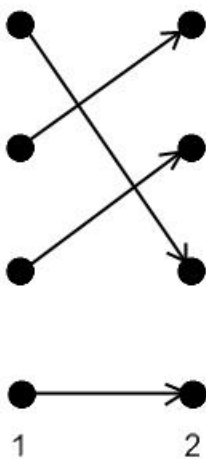


Рисунок 5.18 — Вспомогательная сеть  $G_4''$ .

По вспомогательному графу легко вычисляется количество элементов  $|D_T(u, [0; T - 1]_Z)|$ . Данная величина равна количеству вершин вспомогательного графа, которые являются концевыми для дуг, соответствующих

дуге  $u$  исходного графа. Для нашего графа  $|D_T(u, [0; T - 1]_Z)| = 4$ , т.е. величина максимального суммарного потока за полный период на превышает величины  $v_s^* \leq 1 \cdot 4$ . Однако, можно заметить, что если отправить поток по дуге  $u$  в момент времени  $t = 0$ , то этот поток будет идти по ней 4 такта, т.е. дуга будет некоторое время блокирована (в нашем случае время блокирования дуги составляет полный период). В этом случае за один полный период по сети будет проходить суммарный поток величины 1, тогда как если ничего не отправлять в момент времени  $t = 0$ , то за полный период через сеть может быть пропущен суммарный поток величины 3 (отправляя потоки величины 1 в моменты времени  $t = 1, 2, 3$ ), который и будет максимальным.

Отметим, что в данном случае, несмотря на то, что единственный разрез состоит только из одной дуги  $u$  и величина  $|D_T(u, [0; T - 1]_Z)| = T$ , нет равенства в соотношении (5.6)

**Пример 5.14.**

Рассмотрим сеть  $G$  из предыдущего примера. Пусть  $d(u) = \{4, 2, 1, 1\}$ . Вспомогательный граф  $G''$  представлен на рис.5.19.

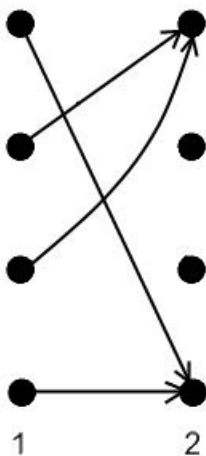


Рисунок 5.19 — Вспомогательный граф  $G''$ .

В данном случае  $|D_T(u, [0; T - 1]_Z)| = 2$ . Величина максимального суммарного потока за полный период равна  $v_s^* = 2$ . Этот результат получен следующим образом: момент времени  $t = 0$  следует пропустить, иначе дуга  $u$  будет блокирована, далее единица потока должна быть отправлена

либо в момент времени  $t = 1$ , либо в момент  $t = 2$  (эти две возможности блокируют друг друга) и, наконец, единица потока отправляется в момент времени  $t = 3$ .

Предложенные примеры показывают, что наше допущение о том, что связанными дугами в сети  $G''$  являются дуги, соответствующие некоторой одной дуге исходного графа и имеющие общую концевую вершину на графе  $G''$ , требует уточнения как это было сказано ранее. Отметим, однако, что в примере 5.12 действительно найден максимальный по величине суммарный поток за полный период.

## 5.5 Потоки в сетях с циклически меняющимися длительностями

Пусть  $G(X, U, f)$  — ориентированная сеть, у которой для каждой дуги  $u$  указана величина  $d(u, t)$  — длительность прохождения единицы потока по этой дуге в момент времени  $t \in [t_0; t_{T-1}]_{\mathbb{Z}}$ . Будем считать, что величины  $d(u, t)$  периодические по времени с периодом  $T$ , т.е.  $d(u, t + T) = d(u, t)$ . Кроме этого,  $0 < d(u, t) \leq T \quad \forall u \in U \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+$ .

**Определение 5.7.** *Ориентированную сеть  $G$  с рассмотренным свойством будем называть сетью с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени.*

Рассмотрим задачу о нахождении максимального потока в такой сети. Поскольку по одной и той же дуге поток может быть пропущен в разное время, то будем ставить задачу нахождения не классического стационарного потока (который для рассматриваемых сетей не является стационарным), а некоторого суммарного потока за один период.

Такую задачу достаточно сложно решать при помощи классических алгоритмов, поэтому для ее решения построим вспомогательный граф (аналогично тому, как это делается в [7] и [23]) по следующим правилам:

Каждой вершине  $x$  исходного графа поставим в соответствие  $T$  вершин  $\{x_i\}_{i=0}^{T-1}$  вспомогательного графа (в каждый момент времени  $t = t_i + n \cdot T$ , где  $n \in \mathbb{Z}_+$  вершине  $x$  исходного графа соответствует вершина  $x_i$  на вспомогательном).

Каждой дуге  $u$  (такой, что  $f(u) = (x, y)$ ) исходного графа будут соответствовать  $T$  дуг  $\{u_{t_i}\}_{i=0}^{T-1}$  на вспомогательном графе. При этом, дуга  $u_{t_i}$  такова, что  $f'(u_{t_i}) = (x_i, y_{i+d(u,t_i)-a \cdot T})$ , где значение величины  $a$  равно единице, если  $i + d(u, t_i) \geq T$  и нулю в противном случае. Веса исходной дуги присваиваются соответствующим дугам вспомогательного графа.

Однако, для решения задачи о максимальном потоке одного построения вспомогательного графа недостаточно, поскольку на вспомогательном графе дуги могут влиять друг на друга.

**Определение 5.8.** Через  $g(u_{t_i}, t)$  будем обозначать множество  $g(u_{t_i}, t) = (a_i(t); b_i(t)) \cap [0; t_{T-1} - t_0]$ , где

$$a_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{d(u, t_1)} \cdot (t - t_1), & t \geq t_i; \\ \frac{1}{d(u, t_1)} \cdot (t - t_i + T), & t < t_i. \end{cases}, \quad b_i(t) = a_i(t) + \frac{1}{d(u, t_1)}.$$

При этом,  $t, t_i \in [t_0; t_{T-1}]_Z$ . Будем говорить, что дуга  $u_{t_i}$  существует в момент времени  $t$ , если  $g(u_{t_i}, t) \neq \emptyset$ .

Каждой дуге  $u_{t_i}$  ставится в соответствие объединение промежутков

$$\bigcup_{k=0}^{T-1} g(u_{t_i}, t_k).$$

Теперь, если взять пересечение промежутков  $g(u', t_k)$  и  $g(u'', t_k)$ , то может получиться, что оно не пусто, т.е. в момент времени  $t_k$  существуют обе дуги. А так как  $u'$  и  $u''$  соответствуют одной «физической» дуге  $\tilde{u} \in U$ , то, очевидно, что величина двойного потока (по дугам  $u'$  и  $u''$ ) не должна превышать пропускную способность дуги  $\tilde{u}$ .

Использование классических методов для решения поставленной задачи о максимальном потоке в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени затруднительно. Более того, не выполняется теорема Форда и Фалкерсона о том, что величина максимального потока в сети равна пропускной способности минимального разреза (см. [95]).

Для решения поставленной задачи о максимальном суммарном потоке будем использовать обобщенные сети со связанными дугами (пункт 4.4).

В качестве сети со связанными дугами будем рассматривать вспомогательную сеть с фиктивными источником и стоком (аналогично тому, как это было сделано при решении задачи о максимальном потоке для графов с ограничениями на достижимость).

**Определение 5.9.** Будем говорить, что дуги  $u_{t_1}$  и  $u_{t_2}$  вспомогательной сети влияют друг на друга, если существует момент времени  $t$  из промежутка  $[t_0; t_{T-1}]_Z$  такой, что пересечение  $g(u_{t_1}, t)$  и  $g(u_{t_2}, t)$  не равно пустому множеству (т.е.  $\exists t \in [t_0; t_{T-1}]_Z: g(u_{t_1}, t) \cap g(u_{t_2}, t) \neq \emptyset$ ).

Взаимные влияния дуг вспомогательного графа друг на друга играют роль отношения связности для обобщенных сетей со связанными дугами. Можно оценить величину максимального суммарного потока.

### 5.5.1 Оценка величины максимального суммарного потока

Оценим величину максимального суммарного потока в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени. Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 5.11.** Пусть  $(Y, Y')$  некоторый разрез. Тогда величина максимального суммарного потока во вспомогательной сети  $G$  не превышает величины

$$v^* \leq \sum_{u \in M} c(u),$$

где  $M$  — максимальное подмножество разреза  $(Y, Y')$ , содержащее наибольшее число элементов множества  $(Y, Y')$  такое, что для каждой пары элементов  $u, v \in M$  выполняется  $h(u, v) = 0$  ( $h$  — отношение влияния дуг вспомогательной сети).

Данная теорема является частным случаем теоремы 4.4.

**Теорема 5.12.** Для величины максимального суммарного потока в сети  $G$ , с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени имеет место соотношение

$$v^* \geq \sum_{u \in M'} c(u),$$



где  $M'$  — максимальное по вложению подмножество разреза  $(Y, Y')$ , содержащее наименьшее число элементов, множества  $(Y, Y')$  такое, что для каждой пары элементов  $u, v \in M$  выполняется  $h(u, v) = 0$ .

Таким образом, как следствие первых двух теорем, справедлива следующая

**Теорема 5.13.** Для величины максимального потока в сети  $G$  с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени имеет место соотношение

$$\sum_{u \in M'} c(u) \leq v^* \leq \sum_{u \in M} c(u).$$

Для нахождения максимального потока можно воспользоваться алгоритмом 4.2.

**Пример 5.15.**

Рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.5.20. Пусть период, с которым изменяются веса его дуг, равен 3.

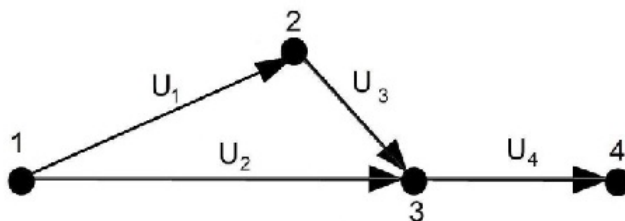


Рисунок 5.20 — Исходный граф  $G$ .

Его дуги  $\{u_1, \dots, u_4\}$  такие, что

$$f(u_1) = (1, 2), d(u_1) = \{1, 1, 2, \dots\},$$

$$f(u_2) = (1, 3), d(u_2) = \{2, 1, 2, \dots\},$$

$$f(u_3) = (2, 3), d(u_3) = \{3, 1, 2, \dots\},$$

$$f(u_4) = (3, 4), d(u_4) = \{1, 1, 1, \dots\}.$$

Пусть пропускная способность каждой дуги этого графа равна 1.

Для исходного графа  $G$  построим вспомогательный граф  $G''$  (рис. 5.21).

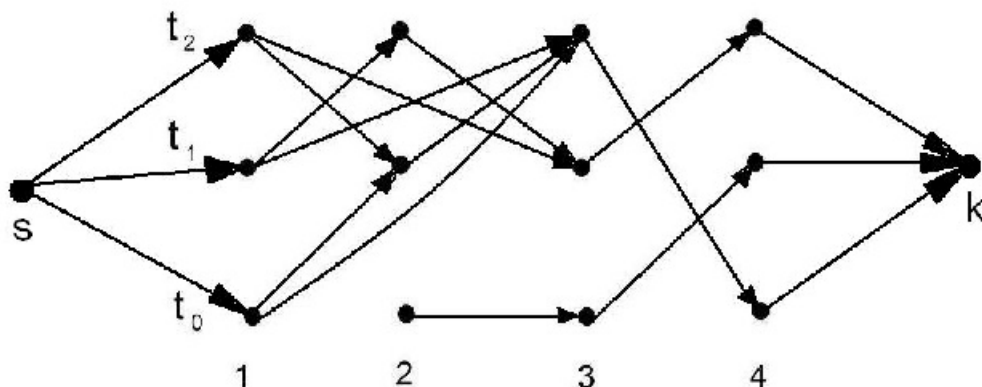


Рисунок 5.21 — Вспомогательный граф  $G''$ .

На рисунке 5.21 точки  $s$  и  $k$  — фиктивные источник и сток (пропускная способность всех дуг, выходящих из  $s$  и пропускная способность всех дуг, входящих в  $k$  считается равной бесконечности).

Видно, что существует шесть различных способов попасть из введенного фиктивного источника  $s$  в фиктивный сток  $k$ . Опишем и обозначим эти пути (здесь обозначение  $x_i$  означает вершина  $x$  в момент времени  $t_i$ ):

- $\mu_1: s \rightarrow 1_0 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_0 \rightarrow k;$
- $\mu_2: s \rightarrow 1_0 \rightarrow 2_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_0 \rightarrow k;$
- $\mu_3: s \rightarrow 1_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_0 \rightarrow k;$
- $\mu_4: s \rightarrow 1_1 \rightarrow 2_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow k;$
- $\mu_5: s \rightarrow 1_2 \rightarrow 2_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 4_0 \rightarrow k;$
- $\mu_6: s \rightarrow 1_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 4_0 \rightarrow k;$

Пути  $\mu_2$  и  $\mu_5$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_3$  некоторым образом влияют друг на друга, а пути  $\mu_6$  и  $\mu_4$  влияют друг на друга и не влияют на остальные.

Насыщая одну дугу, пропуская по ней поток некоторой величины, мы должны будем уменьшить на эту же величину пропускную способность всех дуг, на которые она влияет. Насыщая некоторый путь, мы также должны уменьшить пропускную способность всех дуг, по которым он проходит, так как возможны случаи, как в нашем примере, по дуге проходят сразу четыре пути. Ясно, что, насыщая путь  $\mu_2$  на некоторую величину, пропускная способность для других путей уменьшится на эту величину.

Получили, что, если мы выбираем и насыщаем путь  $\mu_2$  (пропускаем по нему поток величины 1), то на единицу необходимо уменьшить пропускную способность соответствующих дуг путей  $\mu_1$ ,  $\mu_3$  и  $\mu_5$ . А значит, эти пути становятся недоступными для дальнейшего насыщения по ним.

Остались доступными пути  $\mu_4$  и  $\mu_6$ . Выберем и насытим один из них, например, путь  $\mu_4$ . Уменьшим пропускную способность соответствующей дуги пути  $\mu_6$  и этот путь становится недоступным для насыщения по нему. Таким образом, величина потока в заданном графе равна 2. При любых других последовательностях насыщения путей больший поток, чем получили выше, мы пропустить не можем.

Теперь подсчитаем верхнюю и нижнюю оценки максимального суммарного потока во вспомогательной сети при помощи соотношения в теореме 5.13. Получили, что  $2 \leq v^* \leq 4$ . Таким образом, для рассмотренного графа достигается нижняя оценка величины максимального потока.

## 5.6 Случайные блуждания на графах с меняющимися длительностями

Рассмотрим процесс случайного блуждания частицы по вершинам графа, длительность каждой дуги которого зависит от времени начала движения по ней. Отметим, что рассматриваемый процесс, в отличие от процессов случайного блуждания по вершинам графа с нестандартной достижимостью, является Марковским, однако, и в данном случае задача нахождения вероятности перехода частицы из одной вершины в другую за некоторый промежуток времени представляется достаточно трудоемкой. Поскольку длительность прохождения по одной и той-же дуге может принимать различные значения в различные моменты времени, то решить эту задачу классическими методами можно лишь при помощи перебора всех возможных путей, а затем выбора из них подходящих и нахождения вероятностей перехода по ним.

### Пример 5.16.

Рассмотрим, граф на рис. 5.22. Дуги  $\{u_1, \dots, u_5\}$  такие, что  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (1, 3)$ ,  $f(u_3) = (2, 3)$ ,  $f(u_4) = (3, 4)$ ,  $f(u_5) = (4, 1)$ . Вероятно-

сти перехода по дугам указаны на рисунке рядом с дугами и не меняются с течением времени.

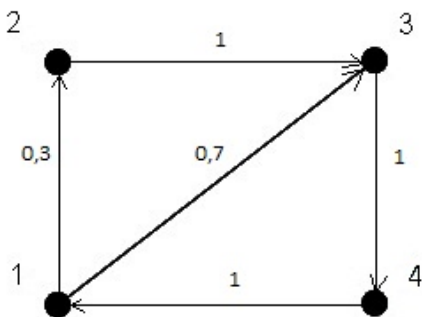


Рисунок 5.22 — Граф с циклически меняющейся длительностью прохождения по дугам.

Положим, что периодическая зависимость с периодом  $T = 3$  длительностей дуг задана следующим образом:  $d(u_1) = \{1, 1, 1\}$ ,  $d(u_2) = \{2, 2, 2\}$ ,  $d(u_3) = \{2, 2, 1\}$ ,  $d(u_4) = \{1, 1, 1\}$ ,  $d(u_5) = \{1, 1, 1\}$ .

Найдем вероятность перехода из вершины 1 в вершину 3 за два такта времени при условии начала движения в момент времени  $t_0 = 0$ .

Если мы возьмем матрицу вероятностей графа, изображенного на рис. 5.22, и возведем ее в квадрат, то элемент, стоящий на пересечении первой строки и третьего столбца окажется равным единице. Однако, из вершины 1 в вершину 3 попасть за два такта времени при условии начала движения в момент времени  $t_0 = 0$  можно лишь по дуге  $u_2$ , вероятность прохождения по которой равна 0,7. Двигаясь по другому пути, можно попасть в вершину 3 лишь в момент времени  $t = 3$ .

Для нахождения вероятностей перехода будем использовать вспомогательный граф, который строится по правилам, описанным выше для графов с меняющимися длительностями.

После построения вспомогательного графа задаем вероятности перехода по его дугам следующим образом: вероятность перехода по каждой дуге исходного графа  $G$  присваивается соответствующим ей дугам вспомогательного графа  $G'$ .

Теперь, если исходный граф  $G$  не являлся графом с циклической за-

висимостью длительностей прохождения, то необходим пересчет вероятностей перехода на вспомогательном графе. Это необходимо, т.к. существует возможность, что некоторые дуги не являются допустимыми в определенные моменты времени, а значит, на вспомогательном графе появятся вершины, для которых суммарная вероятность перехода из них не равна единице. Для случая исходного графа  $G$  с циклической зависимостью такой ситуации возникнуть не может, поскольку все дуги являются допустимыми в любой момент времени.

Пересчет вероятностей перехода по дугам вспомогательного графа  $G'$  будем производить по следующему правилу:

$$p(u) := \frac{p(u)}{\sum_{v \in [(p_2 \circ f')(u)]^+} p(v)} \quad \forall u \in U'.$$

Если же из некоторой вершины  $x$  исходного графа  $G$  в момент времени  $i$  выходят лишь недопустимые дуги, то на вспомогательном графе в вершине  $x_i$  необходимо достроить петлю с вероятностью прохождения по ней равной единице.

Заметим, что на вспомогательном графе длительность прохождения по каждой дуге не зависит от времени, однако, нельзя считать, что каждая дуга проходится за один такт времени. В связи с этим, матрицу переходных вероятностей вспомогательного графа необходимо разделить на несколько матриц, каждая из которых будет содержать переходные вероятности по дугам, имеющим одинаковую длительность прохождения. Полученные матрицы не зависят от времени.

Составим матрицу вероятностей перехода за один шаг по дугам длительности 1. Данная матрица будет состоять из нулевых элементов и элементов, соответствующих вероятностям тех дуг, длительность прохождения по которым равна единице.

Матрица вероятностей перехода за один шаг по дугам длительности 2, аналогично предыдущей, будет состоять из нулевых элементов и элементов, соответствующих вероятностям тех дуг, длительность прохождения по которым равна двум.

Аналогично можно составить матрицы вероятностей перехода за один

шаг по дугам большей длительности.

Каждая из этих матриц по отдельности не соответствует никакой Марковской цепи. Но матрица, равная сумме всех составленных матриц, соответствует цепи, которой является построенный вспомогательный граф.

**Теорема 5.14.** *Для вспомогательной цепи  $G'$ , имеет место следующее равенство:*

$$P^t = \sum_{i=1}^t P_i \cdot P^{t-i}, \quad (5.7)$$

где  $P^{t-i}$  — матрица переходных вероятностей за  $t - i$  шагов, а  $P_i$  — матрица вероятностей перехода по дугам длительности  $i$ . При этом, считаем, что  $P_0 = P^0 = E$  и  $P_1 = P^1$ .

∇ *Доказательство.* Рассмотрим произвольные вершины  $x$  и  $y$  вспомогательного графа  $G'$  и докажем, что

$$(P^t)_{x,y} = \left( \sum_{i=1}^t P_i \cdot P^{t-i} \right)_{x,y}$$

(здесь  $(P^t)_{x,y}$  — вероятность перехода из  $x$  в  $y$  за  $t$  шагов).

Обозначим через  $M^t$  — множество всех путей длительности  $t$  из вершины  $x$  в вершину  $y$ , тогда величина  $(P^t)_{x,y}$  представляется в виде:

$$(P^t)_{x,y} = \sum_{\mu \in M^t} p(\mu).$$

Если представить  $M^t = \bigcup_{i=1}^t M_i$  (где  $M_i$  — множество всех путей из  $x$  в  $y$ , которые начинаются дугой длительности  $i$ ), то справедливо следующее равенство:

$$(P^t)_{x,y} = \sum_{i=1}^t \sum_{\mu \in M_i} p(\mu). \quad (5.8)$$

Так как путь  $\mu$  принадлежит множеству  $M_i$ , т.е. является путем длины  $t$  из  $x$  в  $y$ , начинающимся дугой длительности  $i$ , то этот путь можно разделить на две части:

1) первая часть — дуга  $\mu(1)$  (дуга, длительность прохождения по которой равна  $i$ );

2) вторая часть –  $\mu \setminus \{\mu(1)\}$  (путь длины  $t - i$ ).

Обозначим эти части как  $\eta_i(\overline{x, c})$  и  $\eta_{t-i}(c, y)$  соответственно. При этом  $c$  — это вершина, инцидентная обеим частям пути  $\mu$ .

Таким образом,  $\mu = \eta_i(\overline{x, c}) \cup \eta_{t-i}(c, y)$ .

Тогда

$$\sum_{\mu \in M_i} p(\mu) = \sum_{c \in \Gamma_i^+(x)} [p(\eta_i(\overline{x, c})) \cdot p(\eta_{t-i}(c, y))],$$

здесь  $\Gamma_i^+(x)$  — все вершины, в которые можно попасть из вершины  $x$  преодолев одну дугу длительности  $i$ . А, так как вероятность перехода из вершины  $x$  в любую вершину  $z \in X' \setminus \Gamma_i^+(x)$  преодолев дугу длительности  $i$  равна нулю, то получили

$$\sum_{\mu \in M_i} p(\mu) = \sum_{c \in X'} [p(\eta_i(\overline{x, c})) \cdot p(\eta_{t-i}(c, y))],$$

а поскольку  $p(\eta_i(\overline{x, c})) = (P_i)_{x,c}$  и  $p(\eta_{t-i}(c, y)) = (P^{t-i})_{c,y}$ , то выполняется равенство

$$\sum_{\mu \in M_i} p(\mu) = \sum_{c \in X'} [(P_i)_{x,c} \cdot (P^{t-i})_{c,y}] = (P_i \cdot P^{t-i})_{x,y}. \quad (5.9)$$

Следовательно, подставляя правую часть выражения (5.9) в (5.8), получим:

$$(P^t)_{x,y} = \sum_{i=1}^t (P_i \cdot P^{t-i})_{x,y} = \left( \sum_{i=1}^t P_i \cdot P^{t-i} \right)_{x,y}.$$

В силу произвольности выбора вершин  $x$  и  $y$  теорема доказана. Δ

**Теорема 5.15.** *Вероятность перехода из вершины  $x$  в вершину  $y$  с начальным временем движения  $t_0$  за  $k$  шагов на исходном графе  $G$  равна вероятности перехода из  $x_{t_0}$  в  $y_{t_1}$  за  $k$  шагов на вспомогательном графе  $G'$ . Другими словами*

$$p_G^k(x, y, t_0) = (P^k)_{x_{t_0}, y_{t_1}}.$$

При этом, момент времени  $t_1$  определяется следующим образом:

$$t_1 = \begin{cases} t_0 + k, & t_0 + k \leq T; \\ t_0 + k - T, & t_0 + k > T. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5.15 следует из доказательства теоремы 5.14 и правил построения вспомогательного графа.

**Пример 5.17.**

Для графа, рассмотренного в примере 5.16 построим вспомогательный граф (рис. 5.23).

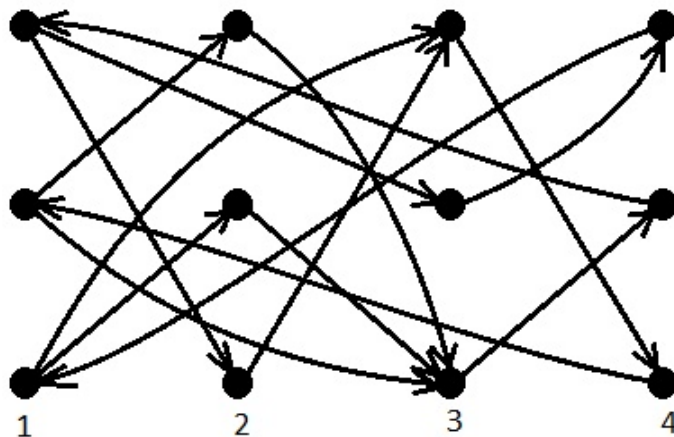


Рисунок 5.23 — Вспомогательный граф  $G'$ .

По теореме 5.14, согласно равенству (5.7), для того, чтобы найти вероятность перехода из вершины 1 в вершину 3 за два шага при условии начала движения в момент времени  $t_0 = 0$  необходимо найти матрицу  $P^2 = P_1 \cdot P^1 + P_2$ .

Интересующий нас элемент стоит на пересечении первой строки и одиннадцатого столбца матрицы  $P^2$ . Этот элемент равен 0,7.

Таким образом, мы нашли вероятность перехода из вершины 1 в вершину 3 за два шага при условии начала движения в момент времени  $t_0 = 0$ .



## Глава 6

# Оператор Лапласа и задача Дирихле на графах с нестандартной достижимостью

### 6.1 Оператор Лапласа на графах с нестандартной достижимостью

Рассмотрим граф  $G_\varphi(X, U, f)$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$ . Введем в рассмотрение понятия границы и внутренности графа с нестандартной достижимостью (см. [26]-[70]). Отметим, что для обыкновенных (классических) графов граница определялась следующим образом (см. [94]).

**Определение 6.1.** *Вершина  $x$  графа  $G$  называется граничной, если подграф, порожденный множеством  $\hat{\Gamma}(x)$  (множество всех вершин графа, достижимых из вершины  $x$ ) является сильно связным.*

**Определение 6.2.** *Множество всех граничных вершин графа  $G$  называется его границей и обозначается  $\partial G$ .*

Для графов с нестандартной достижимостью сами понятия «связность» и «сильная связность» имеют достаточно сложный характер, поскольку не все пути становятся допустимыми с введением ограничения на достижимость. Более того, некоторая вершина  $y$  может не быть достижимой из вершины  $x$ , если начальный уровень характеристики произвольного пути равен нулю, но  $y$  является достижимой из  $x$  при начальном уровне характеристики пути большем нуля. Таким образом, будем пользоваться следующим определением границы графа  $G_\varphi$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$ .

**Определение 6.3.** *Будем говорить, что вершина  $x$  является граничной вершиной графа с нестандартной достижимостью  $G_\varphi$ , если она является граничной на том же самом графе  $G$  без ограничения на достижимость.*

Другими словами,  $\partial G_\varphi = \partial G$ . На текущий момент нам достаточно

такого определения, однако, далее будет дано более точное определение границы графа с нестандартной достижимостью.

**Определение 6.4.** *Границу графа будем называть тривиальной, если  $\partial G_\varphi = X$ .*

**Определение 6.5.** *Внутренностью графа  $G_\varphi$  будем называть множество всех вершин, не являющихся граничными. Т.е.  $\text{int}G_\varphi = X \setminus \partial G_\varphi$ .*

Оператор Лапласа на обыкновенном ориентированном графе  $G$  задается следующим образом (см. [94]):

$$\Delta_p g(x) = \sum_{y \in \Gamma(x)} p(u_{xy}) \cdot g(y) - g(x),$$

где функция  $f : X \rightarrow R$ , вес  $p(u_{xy})$  задан для каждой дуги  $u_{xy}$  графа  $G$  и удовлетворяет неравенству

$$\sum_{u \in [x]^+} p(u) \leq 1, \tag{6.1}$$

здесь и далее  $[x]^+$  – множество дуг, выходящих из вершины  $x$ .

В том случае, если  $p(u_{xy}) = \frac{1}{|[x]^+|}$ , то говорят, что на графе задан классический лапласиан (см. [94]):

$$\Delta g(x) = \frac{1}{|[x]^+|} \sum_{y \in \Gamma(x)} g(y) - g(x).$$

Однако, для графов с нестандартной достижимостью, поскольку не все пути остаются допустимыми с введением ограничения на достижимость, такое определение лапласиана требует некоторого уточнения.

Поскольку в [27] ограничения на достижимость были разделены на два типа – строгие и нестрогие – с существенным отличием в построении вспомогательных графов для решения классических задач, то мы, придерживаясь этой позиции, дадим два определения оператора Лапласа: для графов с ограничением строгого типа и для графов с ограничением нестрогого типа.

Пусть задана функция  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$ , здесь  $k+1$  – число множеств в путевом наборе для графа с нестандартной достижимостью  $G_\varphi$ .

Оператор Лапласа на графе  $G_\varphi$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$  строгого типа зададим следующим образом:

$$\Delta_\varphi g(x, y) = \sum_{u \in [x]^+ \cap U(y)} \frac{p(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U(y)} p(v)} g((p_2 \circ f)(u), F(y, a_u)) - g(x, y),$$

где вершина  $z = (p_2 \circ f)(u)$  — это концевая вершина дуги  $u$ ,  $F$  — функция, используемая при вычислении характеристик путей для нестандартной достижимости (см. [26]).

Оператор Лапласа на графе  $G_\varphi$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$  нестрогого типа зададим следующим образом:

$$\Delta_\varphi g(x, y) = h_{xy} - g(x, y),$$

где величина  $h_{xy}$  определяется следующим образом:

$$h_{xy} = \begin{cases} \sum_{u \in [x]^+ \cap U(y)} \tilde{p}(u) \cdot g((p_2 \circ f)(u), F(y, a_u)), & [x]^+ \cap U(y) \neq \emptyset; \\ \sum_{u \in [x]^+ \cap (U \setminus U(y))} \bar{p}(u) \cdot g((p_2 \circ f)(u), F(y, a_u)), & [x]^+ \cap U(y) = \emptyset. \end{cases}$$

$$\text{здесь } \tilde{p}(u) = \frac{p(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap U(y)} p(v)}, \quad \bar{p}(u) = \frac{p(u)}{\sum_{v \in [x]^+ \cap (U \setminus U(y))} p(v)}.$$

Отметим, что  $\sum_u \tilde{p}(u) = 1$  и  $\sum_u \bar{p}(u) = 1$ , т.е. для весов графа выполняется основное неравенство (6.1).

**Замечание 6.1.** При  $k = 0$  для каждой вершины  $x$  графа  $G_\varphi$  выполняется  $\Delta_\varphi g(x, 0) = \Delta_p g(x, 0)$ , поскольку при  $k = 0$  имеем тривиальное ограничение на достижимость (все пути являются допустимыми).

**Определение 6.6.** Функцию  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$  будем называть гармонической на графе  $G_\varphi$ , если для каждой пары  $(x, y) \in X \times [0; k]_Z$  выполняется  $(\Delta_\varphi g)(x, y) = 0$ .

**Определение 6.7.** Функцию  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$  будем называть гармонической внутри графа  $G_\varphi$ , если для каждой пары  $(x, y) \in \partial G_\varphi \times [0; k]_Z$  выполняется  $(\Delta_\varphi g)(x, y) = 0$ .

Отметим, что функция, гармоническая на графе является гармонической и внутри графа, обратное вообще говоря не выполняется.

**Определение 6.8.** *Функцию  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$  будем называть субгармонической (супергармонической) на графе  $G_\varphi$ , если для каждой пары  $(x, y) \in X \times [0; k]_Z$  выполняется  $(\Delta_\varphi g)(x, y) \geq 0$  ( $(\Delta_\varphi g)(x, y) \leq 0$ ).*

**Определение 6.9.** *Функцию  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$  будем называть субгармонической (супергармонической) внутри графа  $G_\varphi$ , если для каждой пары  $(x, y) \in \partial G_\varphi \times [0; k]_Z$  выполняется  $(\Delta_\varphi g)(x, y) \geq 0$  ( $(\Delta_\varphi g)(x, y) \leq 0$ ).*

Многие классические задачи на графах с нестандартной достижимостью (к их числу относятся задачи о достижимости, о максимальном потоке, о случайных блужданиях частицы и др.) решены при помощи построения вспомогательного графа (см. [27]). Применим этот подход и в нашем случае, т.е. по правилам указанным в [26] и [27], для графа  $G_\varphi$  построим вспомогательный граф  $G'(X', U', f')$ . Отличительной чертой вспомогательного графа является то, что на нем нет ограничений на достижимость, а это означает, что вспомогательный граф является обыкновенным орграфом. Значит, оператор Лапласа, заданный для обыкновенных графов, очевидно задан и для  $G'$ . Кроме этого, каждому пути вспомогательного графа  $G'$  соответствует допустимый путь на исходном графе  $G_\varphi$ .

Зададим на вспомогательном графе  $G'$  функцию  $\tilde{g} : X' \rightarrow R$  по правилу  $\tilde{g}(x_y) = g(x, y)$ , где  $g$  – функция, заданная на исходном графе  $G_\varphi$ .

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 6.1.** *Функция  $\tilde{g}$  является гармонической на вспомогательном графе  $G'$  тогда и только тогда, когда функция  $g$  является гармонической на исходном графе  $G_\varphi$ .*

**Теорема 6.2.** *Функция  $\tilde{g}$  является субгармонической (супергармонической) на вспомогательном графе  $G'$  тогда и только тогда, когда функция  $g$  является субгармонической (супергармонической) на исходном графе  $G_\varphi$ .*

Доказательства данных теорем следуют из правил построения вспомогательного графа и определений операторов Лапласа для обыкновенных

графов и для графов с нестандартной достижимостью.

Заметим, однако, что на графе  $G'$  граничные вершины, не обязательно соответствуют граничным вершинам исходного графа  $G_\varphi$  и наоборот, для граничной вершины исходного графа не обязательно, что все соответствующие ей вершины вспомогательного графа являются граничными. Проиллюстрируем эту ситуацию на следующем примере.

**Пример 6.1.**

Рассмотрим граф  $G$  с магнитной достижимостью (см. [27]) при  $k = 1$  на рис.6.1. При этом будем считать, что  $U_0 = \{u_1, u_4, u_5\}$ ,  $U_1 = \{u_2, u_3, u_6, u_7\}$ ,  $U^{(0)} = U$  и  $U^{(1)} = U_1$ .

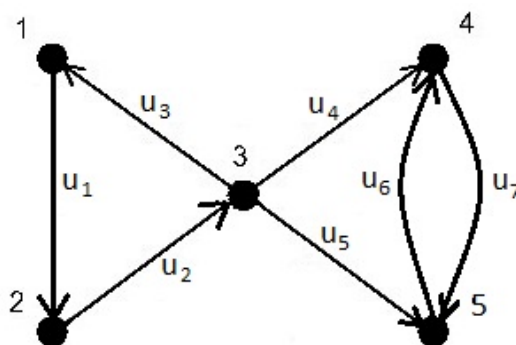


Рисунок 6.1 — Исходный граф  $G$  с магнитной достижимостью.

Вспомогательный граф  $G'$  показан на рис. 6.2.

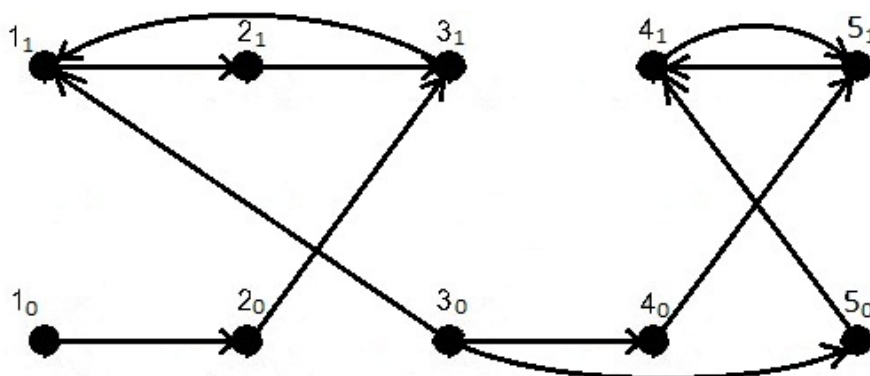


Рисунок 6.2 — Вспомогательный граф  $G'$ .

Для вспомогательного графа на рис. 6.2 определим границу:  $\partial G' = \{1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1\}$ . Вершины  $\{1_1, 2_1, 3_1\}$  соответствуют внутренним вершинам исходного графа  $G_\varphi$  и, наоборот, граничным вершинам 4 и 5 исходного

графа соответствуют вершины  $4_0$  и  $5_0$ , которые не являются граничными на  $G'$ .

Пример показывает, что необходимо уточнение понятий границ и внутренностей исходного и вспомогательного графов.

**Определение 6.10.** *Вершину  $x$  вспомогательного графа  $G'$  будем называть граничной, если она соответствует граничной вершине исходного графа  $G$  без ограничения на достижимость или подграф, порожденный множеством  $\hat{\Gamma}(x)$  является сильно связным.*

**Определение 6.11.** *Вершину  $x$  исходного графа  $G_\varphi$  на уровне достижимости  $j$  будем называть граничной, если вершина является граничной без ограничения на достижимость или вершина вспомогательного графа  $x_j$ , соответствующая паре  $(x, j)$ , является граничной на вспомогательном графе  $G'$ .*

Другими словами, на исходном графе границей является, строго говоря, не сама вершина, но пара – вершина и уровень достижимости для этой вершины. Таким образом, имеет место соотношение  $\partial G_\varphi = \{(x, j) \in X \times [0; k]_Z \mid x_j \in \partial G'\}$ . Аналогичным образом переопределяется и множество внутренних точек графа  $G_\varphi$ :  $\text{int}G_\varphi = (X \times [0; k]_Z) \setminus \partial G_\varphi$ .

Каждой вершине  $x$  с уровнем достижимости  $j$  исходного графа однозначно соответствует вершина  $x_j$  на вспомогательном графе  $G'$ . Введем следующие обозначения:  $\Gamma(x, j) = \{(y, i) \in X \times [0; k]_Z \mid y_i \in \Gamma(x_j)\}$  и  $d^+(x, j) = |\Gamma(x, j)|$ .

**Замечание 6.2.** *На вспомогательном графе множество граничных вершин разбивается на три подмножества:  $\partial G' = \partial G'_n \cup \partial G'_d \cup \partial G'_p$ :*

1. Множество  $\partial G'_n$ , содержащее все вершины, которые являются граничными в смысле определения для обыкновенных графов и соответствуют граничным вершинам исходного графа  $G$ , будем называть нормальной границей графа  $G'$ .
2. Множество  $\partial G'_d$ , содержащее все вершины, которые являются граничными в смысле определения для обыкновенных графов, но соответ-

ствуют внутренним вершинам исходного графа  $G$ , будем называть дополнительной границей графа  $G'$ .

3. Множество  $\partial G'_p$ , содержащее все вершины, которые не являются граничными в смысле определения для обыкновенных графов, но соответствуют граничным вершинам исходного графа  $G$ , будем называть псевдограницей графа  $G'$ .

Теперь, когда уточнены понятия границ для исходного и вспомогательного графа, справедливы следующие теоремы (аналоги теорем 6.1 и 6.2).

**Теорема 6.3.** *Функция  $\tilde{g}$  является гармонической внутри вспомогательного графа  $G'$  тогда и только тогда, когда функция  $g$  является гармонической внутри исходного графа  $G_\varphi$ .*

**Теорема 6.4.** *Функция  $\tilde{g}$  является субгармонической (супергармонической) внутри вспомогательного графа  $G'$  тогда и только тогда, когда функция  $g$  является субгармонической (супергармонической) внутри исходного графа  $G_\varphi$ .*

## 6.2 Принцип максимума. Формулы Грина

Для субгармонических функций, заданных на вспомогательном графе  $G'$  имеет место хорошо известный принцип максимума. Напомним основные определения и теоремы (см. [94]).

**Определение 6.12.** *Функция  $\tilde{g} : X \rightarrow R$  называется транзитивно постоянной в вершине  $x$ , если для каждой вершины  $y \in \hat{\Gamma}(x)$  выполняется  $g(y) \equiv g(x)$ .*

**Теорема 6.5.** *(Принцип максимума)*

*Субгармоническая функция, не являющаяся транзитивно постоянной ни в одной вершине  $x \in X \setminus X(0)$  (здесь  $X(0) = \{x \in X \mid \Gamma(x) = \emptyset\}$ ) графа  $G'$  не может достигать своего наибольшего значения на этом множестве вершин.*

**Теорема 6.6.** Пусть граф  $G'$  не содержит бесконечных компонент сильной связности, его конденсация прогрессивно конечна (см. [8]) и функция  $\tilde{g} : X \rightarrow R$  – субгармоническая внутри графа  $G'$ , тогда

$$\sup_{x \in X} \tilde{g}(x) = \sup_{x \in \partial G'} \tilde{g}(x). \quad (6.2)$$

Доказательства теорем 6.5 и 6.6 приведены в [94].

Отметим, что поскольку по теореме 6.5 супремум функции  $\tilde{g}$  не может достигаться в вершинах множества  $\partial G'_d$ , значит, возможны два случая выполнения равенства (6.2) для вспомогательного графа:

1.  $\sup_{x \in X} \tilde{g}(x) = \sup_{x \in \partial G'_n} \tilde{g}(x)$  и в этом случае приведенные выше теоремы 6.5 и 6.6 очевидно переносятся на случай исходного графа  $G_\varphi$  и определенной на нем субгармонической функции  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$ . Более того, в этом случае не требуется переопределения понятия границы исходного графа.
2.  $\sup_{x \in X} \tilde{g}(x) = \sup_{x \in \partial G'_d} \tilde{g}(x)$  и в этом случае теоремы 6.5 и 6.6 переносятся на случай исходного графа  $G_\varphi$  только в случае переопределения понятия границы исходного графа.

Приведем формулировку теоремы 6.6 на случай исходного графа с нестандартной достижимостью.

**Теорема 6.7.** Пусть граф  $G_\varphi$  не содержит бесконечных компонент сильной связности, его конденсация прогрессивно конечна и функция  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$  – субгармоническая внутри графа  $G_\varphi$ , тогда

$$\sup_{\substack{x \in X \\ y \in [0; k]_Z}} g(x, y) = \sup_{(x, y) \in \partial G_\varphi} g(x, y). \quad (6.3)$$

Равенство (6.3) фактически дает оценку для субгармонической дискретной функции двух переменных на графе с нестандартной достижимостью. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.8.** В условиях теоремы 6.7 следующие выражения равносильны:



1.  $\sup_{\substack{x \in X \\ y \in [0; k]_Z}} g(x, y) = \sup_{(x, y) \in \partial G_\varphi} g(x, y);$
2.  $g(x, y) \leq \sup_{(z, i) \in \partial G_\varphi} g(z, i) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in [0; k]_Z.$

Далее построим дискретные аналоги классических формул Грина для графов с нестандартной достижимостью.

**Теорема 6.9.** *Для любого графа  $G_\varphi$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$  и любых функций  $g, f : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$  имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} (f(\tilde{y}) - f(\tilde{x})) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) &= \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \partial G_\varphi}} f(\tilde{x}) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) - \\ &- \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} d^+(\tilde{x}) \cdot f(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi g(\tilde{x}) + \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} f(\tilde{y}) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})). \end{aligned} \quad (6.4)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} d^+(\tilde{x}) \cdot (f(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi g(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi f(\tilde{x})) &= \\ &= \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x})}} (f(\tilde{x})g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})f(\tilde{y})). \end{aligned} \quad (6.5)$$

$\nabla$  *Доказательство.* Доказательство проведем прямой проверкой равенства (6.4). Рассмотрим

$$\sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \partial G_\varphi}} f(\tilde{x}) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) - \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} d^+(\tilde{x}) \cdot f(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi g(\tilde{x}) =$$

преобразуем выражение  $\Delta_\varphi g(\tilde{x})$  согласно определению лапласиана,

получим

$$= \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \partial G_\varphi}} f(\tilde{x}) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) - \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} f(\tilde{x}) \cdot \sum_{\tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x})} (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) =$$

поскольку  $\Gamma(\tilde{x}) \setminus (\partial G_\varphi) = \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi$  для каждого элемента  $\tilde{x}$ , сле-

довательно,

$$\begin{aligned} &= - \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} f(\tilde{x}) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) = \\ &= - \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} (f(\tilde{x}) - f(\tilde{y}) + f(\tilde{y})) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) = \end{aligned}$$

таким образом, получили выражение

$$= \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} (f(\tilde{y}) - f(\tilde{x})) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) - \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} f(\tilde{y}) \cdot (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})).$$

Равенство (6.4) доказано.

Поменяем местами функции  $f$  и  $g$  в равенстве (6.4):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} (g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})) \cdot (f(\tilde{y}) - f(\tilde{x})) &= \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \partial G_\varphi}} g(\tilde{x}) \cdot (f(\tilde{y}) - f(\tilde{x})) - \\ &- \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} d^+(\tilde{x}) \cdot g(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi f(\tilde{x}) + + \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} g(\tilde{y}) \cdot (f(\tilde{y}) - f(\tilde{x})). \end{aligned}$$

Вычтем последнее равенство из равенства (6.4), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \partial G_\varphi}} (f(\tilde{x})g(\tilde{y}) - f(\tilde{x})g(\tilde{x}) - g(\tilde{x})f(\tilde{y}) + g(\tilde{x})f(\tilde{x})) - \\ - \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} d^+(\tilde{x}) \cdot (f(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi g(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi f(\tilde{x})) + \\ + \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} (f(\tilde{y})g(\tilde{y}) - f(\tilde{y})g(\tilde{x}) - g(\tilde{y})f(\tilde{y}) + g(\tilde{y})f(\tilde{x})) = 0 \end{aligned}$$

приводя подобные, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \partial G_\varphi}} (f(\tilde{x})g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})f(\tilde{y})) + \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x}) \cap \text{int}G_\varphi}} (g(\tilde{y})f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})g(\tilde{x})) - \\ - \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} d^+(\tilde{x}) \cdot (f(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi g(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi f(\tilde{x})) = 0 \end{aligned}$$

отсюда следует соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi} d^+(\tilde{x}) \cdot (f(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi g(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot \Delta_\varphi f(\tilde{x})) = \\ = \sum_{\substack{\tilde{x} \in \text{int}G_\varphi \\ \tilde{y} \in \Gamma(\tilde{x})}} (f(\tilde{x})g(\tilde{y}) - g(\tilde{x})f(\tilde{y})). \end{aligned}$$

Теорема доказана. △

Отметим, что равенство (6.4) является дискретным аналогом первой формулы Грина, а равенство (6.5) является дискретным аналогом второй формулы Грина для графов с нестандартной достижимостью.

### 6.3 Задача Дирихле

Рассмотрим граф  $G_\varphi(X, U, f)$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$  и лапласиан  $\Delta_\varphi$ , заданный на нем. Сформулируем задачу Дирихле:

Необходимо найти функцию  $g : X \times [0; k]_Z \rightarrow R$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{cases} \Delta_\varphi g(x, y) = 0, & (x, y) \in \text{int}G_\varphi; \\ g(x, y) = h(x, y), & (x, y) \in \partial G_\varphi. \end{cases} \quad (6.6)$$

т.е функция  $g$  должна быть гармонической внутри графа и на границе  $\partial G_\varphi$  совпадать с заданой функцией  $h$ . При этом функцию  $h : \partial G_\varphi \rightarrow R$  будем называть граничной функцией задачи Дирихле.

Покажем, что решение задачи Дирихле (6.6) существует и единственно для любого графа  $G_\varphi$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$ .

Как показано в [94], справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.10.** *Пусть для матрицы  $A$ , соответствующей некоторому сильно связному графу  $G$  выполняются следующие свойства:*

1.  $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \forall i \in [1; n]_N,$
2.  $\exists i \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$

*тогда столбцы этой матрицы образуют линейно независимую систему.*

**Теорема 6.11.** *(Теорема существования и единственности решения задачи Дирихле на графе с нестандартной достижимостью) Пусть граф  $G_\varphi$  с нестандартной достижимостью  $\varphi$  не имеет бесконечных компонент сильной связности и его конденсация прогрессивно конечна, тогда решение задачи Дирихле (6.6) существует и это решение единственно.*

$\nabla$  *Доказательство.* Из теоремы 6.3 следует, что задача Дирихле (6.6) на графе  $G_\varphi$  равносильна следующей задаче Дирихле на вспомогательном графе  $G'(X', U', f')$ :

$$\begin{cases} \Delta_p \tilde{g}(x_j) = 0, & x_j \in \text{int}G'; \\ \tilde{g}(x_j) = h(x, j), & x_j \in \partial G'. \end{cases} \quad (6.7)$$

Поскольку исходный граф не имеет бесконечных компонент сильной связности и его конденсация прогрессивно конечна, значит, и вспомогательный граф обладает такими же свойствами. Это следует из правил построения вспомогательного графа.

Для дальнейшего доказательства будем использовать подход, рассмотренный в [94].

Обозначим через  $G'_1(X'', U'', f'')$  конденсацию вспомогательного графа  $G'$ . Поскольку  $G'_1$  прогрессивно конечный, то порядковая функция существует на всем множестве  $X''$  (см. [8]). Доказательство существования и единственности задачи Дирихле (6.7) проведем методом трансфинитной индукции, взяв в качестве ее параметра порядок компонент сильной связности.

Поскольку компоненты сильной связности нулевого порядка совпадают с границей, то решение на этих компонентах определяется заданной функцией  $h$ . Поэтому, покажем, что решение задачи Дирихле существует и единственно для любой компоненты сильной связности первого порядка.

Рассмотрим на вспомогательном графе  $G'$  произвольную компоненту сильной связности  $K$  первого порядка. Отметим, что для каждой вершины  $x \in \text{int}K$  имеет место равенство

$$\tilde{g}(x) - \sum_{y \in \Gamma(x)} p(u_{xy}) \cdot \tilde{g}(y) = 0.$$

Занумеруем вершины компоненты сильной связности  $K$ , будем считать, что  $X_K = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $|X_K| = n$ . Обозначим через  $p_{ij} = p(u_{x_i x_j})$ . Тогда последнее равенство соответствует следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$g_i - \sum_{x_j \in \Gamma(x_i) \cap X_K} p_{ij} \cdot g_j = b_i \quad \forall i \in [1; n]_N, \quad (6.8)$$

где

$$b_i = \sum_{y \in \Gamma(x_i) \setminus X_K} p(u_{x_i y}) \cdot \tilde{g}(y). \quad (6.9)$$

Здесь мы разбили сумму на две части — по внутренним и по граничным вершинам —, и поскольку в правой части выражения для  $b_i$  все  $g(x_j)$  ( $= h(x, j)$ ) известны, следовательно правая часть системы (6.8) определена однозначно.

Осталось доказать, что система уравнений (6.8) имеет единственное решение. Заметим, что основная матрица этой системы удовлетворяет условиям теоремы 6.10, а значит, столбцы этой матрицы образуют линейно независимую систему векторов. Таким образом, система уравнений (6.8) имеет единственное решение при любой правой части, которое является решением задачи Дирихле для компоненты сильной связности  $K$ . Следовательно, мы показали, что решение задачи Дирихле для всех компонент сильной связности первого порядка существует и единственно.

Предположим, что решение задачи Дирихле существует и единственно для всех компонент сильной связности порядка, меньшего числа  $\alpha$ . Докажем, что для произвольной компоненты сильной связности порядка  $\alpha$  решение задачи Дирихле существует и единственно.

Пусть  $K_\alpha$  — компонента сильной связности порядка  $\alpha$ . Для того, чтобы найти решение задачи Дирихле, необходимо решить систему линейных уравнений (6.8) для компоненты  $K_\alpha$ . Поскольку вершины  $y$  в правой части (6.9) принадлежат компонентам сильной связности порядка, меньшего  $\alpha$ , а т.к. в этих вершинах функция гармоническая, то по теореме 6.6  $\tilde{g}(y) \leq \sup_{z_j \in \partial G'} h(z, j)$ . Из этого следует, что правая часть системы (6.8) для компоненты  $K_\alpha$  определена однозначно.

Отметим, что и в этом случае основная матрица системы удовлетворяет условиям теоремы 6.10, следовательно, столбцы этой матрицы образуют линейно независимую систему векторов. Это означает, что система уравнений (6.8) для компоненты  $K_\alpha$  имеет единственное решение.

Таким образом, мы показали, что решение задачи Дирихле для любой компоненты сильной связности порядка  $\alpha$  существует и единственно. Значит, по методу трансфинитной индукции решение задачи Дирихле (6.7) существует и единственно во всей внутренности вспомогательного графа.

△

## Заключение

**Основной результат диссертационной работы** заключается в развитии и обосновании общих методов решения классических задач о кратчайших путях, о случайных блужданиях и потоковых задач на графах и сетях с нестандартной достижимостью (статической и динамической), которые позволяют задачу, исходно поставленную на графе с нестандартной достижимостью, переносить на вспомогательный граф большего размера, но на котором нет ограничений на достижимость.

В рамках диссертационной работы **получены результаты, научная новизна** которых заключаются в следующем:

1. Введено общее понятие графа с нестандартной достижимостью. Для решения задач на графах с нестандартной достижимостью и их аналогах (динамические графы с зависимостью весов дуг от времени) обобщён и обоснован метод развёрток Басанговой-Ерусалимского.

2. Для графов с нестандартной достижимостью и графов с зависимостью дуг от времени получены оценки сверху для количества дуг кратчайшего пути.

3. Проведено исследование процессов случайного блуждания частицы по вершинам графа с нестандартной достижимостью. Доказана сводимость в общем случае немарковского процесса случайного блуждания по вершинам графа с нестандартной достижимостью или её аналогом к марковскому процессу на вспомогательном графе. Сформулирован и доказан критерий о структуре марковской цепи, для которой существует стационарное распределение.

4. Введены и изучены новые объекты — обобщённые сети со связанными дугами. Разработаны методы нахождения максимального потока в обобщённой сети со связанными дугами, получены точные верхняя и нижняя оценки его величины. Показано, корректный перенос задачи о максимальном потоке в сети с нестандартной достижимостью на её развёртку обеспечивается рассмотрением развёртки сети с нестандартной достижимостью как частного случая обобщённой сети со связанными дугами.

5. Для графов и сетей с нестандартной достижимостью и её аналогами разработаны эвристические алгоритмы решения задач о кратчайшем пути и о максимальном потоке. Для алгоритма нахождения кратчайшего пути на графе с нестандартной достижимостью получена оценка вычислительной трудоёмкости, учитывающая размер исходного графа и тип достижимости.

6. Доказана сводимость задач о достижимости и о максимальном потоке на графе с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени к аналогичным задачам на временной развёртке (вспомогательном графе).

7. Для дискретного аналога оператора Лапласа разработаны и обоснованы методы решения краевых задач, порождённых лапласианом, на графах с нестандартной достижимостью. Доказаны существование и единственность решения задачи Дирихле на графе с нестандартной достижимостью.

**Теоретическая и практическая значимость** результатов диссертации заключается в том, что полученные результаты существенно расширяют возможности использования аппарата теории графов к исследованию дискретных процессов и явлений, в которых имеют место реальные ограничения, в том числе к задачам навигации и потоковым задачам в информационных сетях. Использование методов, разработанных для графов с нестандартной достижимостью, позволяет учитывать такие особенности моделей и процессов, которые не могут быть учтены при использовании методов классической теории графов.

## Литература

1. Адельсон-Вельский, Г. М. Потокковые алгоритмы / Г. М. Адельсон-Вельский, Е. А. Диниц, А. В. Карзанов. — М.: Наука, 1975. — 119 с.
2. Ахо, А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
3. Басакер, Р. Д. Конечные графы и сети / Р. Д. Басакер, Т. Л. Саати; [Пер. с англ.]. — М.: Наука, 1974. — 366 с.
4. Басангова, Е. О. Смешанная достижимость на частично-ориентированных графах / Е. О. Басангова, Я. М. Ерусалимский // в сб.: Вычислительные системы и алгоритмы. — Ростов-на-Дону: РГУ, 1983. — С. 135–140.
5. Басангова, Е. О. Различные виды смешанной достижимости / Е. О. Басангова, Я. М. Ерусалимский // в сб.: Алгебра и дискретная математика. — Элиста: КГУ, 1985. — С. 70–75.
6. Басангова, Е. О. Смешанная достижимость на частично-ориентированных графах / Е. О. Басангова, Я. М. Ерусалимский // Ростов-на-Дону, 1982. — 17 С. — Деп в ВИНТИ, 1982, №5892-82.
7. Басангова, Е. О. Алгоритм нахождения максимального потока в частично-ориентированной сети / Е. О. Басангова, Я. М. Ерусалимский // в сб.: Дискретные структуры и их приложения. — Элиста: КГУ, 1988. — С. 23–28.
8. Берж, К. Теория графов и ее применения / К. Берж. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. — 319 с.
9. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М.: Наука, 1991. — 384 с.
10. Водолазов, Н. Н. Поток на графах с ограничениями на достижимость / Н. Н. Водолазов, Я. М. Ерусалимский // В сб. трудов научной школы Симоненко И. Б. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. — С. 44–57.



11. Водолазов, Н. Н. Максимальный всплеск в сети и максимальный объем сети / Н. Н. Водолазов, Я. М. Ерусалимский // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2010. — № 6. — С. 9–13.
12. Водолазов, Н. Н. Об особенностях потока в сетях с барьерной достижимостью / Н. Н. Водолазов // Вестник ДГТУ. — 2008 — Т. 8, № 2 (37). — С. 127–136.
13. Диниц, Е. А. Метод поразрядного сокращения невязок и транспортные задачи / Е. А. Диниц // В сб.: Исследования по дискретной математике. — М.: Наука, 1973. — С. 46–57.
14. Ерзин, А. И. Задача поиска сбалансированного потока / А. И. Ерзин, И. И. Тахонов // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. IX, № 4 (28). — С. 50–63.
15. Ерзин, А. И. Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели / А. И. Ерзин, И. И. Тахонов // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. VIII, № 3 (23). — С. 58–68.
16. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. — М.: Вузовская книга, 2001. — 279 с.
17. Ерусалимский, Я. М. Эйлеровость графов со смешанной достижимостью / Я. М. Ерусалимский // В сб.: Модели, графы и алгебраические структуры. — Элиста: КГУ, 1989. — С. 45–48.
18. Ерусалимский, Я. М. Нестационарный поток в сети / Я. М. Ерусалимский, Н. Н. Водолазов // Вестник ДГТУ. — 2009. — Т. 9, № 3 (42). — С. 402–409.
19. Ерусалимский, Я. М. Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями / Я. М. Ерусалимский, С. Ю. Логвинов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 1996, — № 2, — С. 14–17.
20. Ерусалимский, Я. М. Многопродуктовые потоки в сетях с нестандартной достижимостью / Я. М. Ерусалимский, А. Г. Петросян // Известия

- ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2005. — № 6, — С. 8–16.
21. Ерусалимский, Я. М. Случайные процессы в сетях с биполярной магнитностью / Я. М. Ерусалимский, А. Г. Петросян // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2005. — № 11. — С. 10–16.
22. Ерусалимский, Я. М. Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2003. — № 2, — С. 3–5.
23. Ерусалимский, Я. М. Потоки в сетях со связанными дугами / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2003. — № 8, — С. 3–8.
24. Ерусалимский, Я. М. Прибыль от потоков с обратной связью в орсетях с ограничениями на достижимость / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2003. — № 8. — С. 9–12.
25. Ерусалимский, Я. М. Достижимость на графах с условиями затухания и усиления / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2004. Спецвыпуск. Математика и механика. — С. 110–112.
26. Ерусалимский, Я. М. Общий подход к нестандартной достижимости на графах / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2005. Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — С. 64–67.
27. Ерусалимский, Я. М. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения: моногр. / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьмина, А. Г. Петросян. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.

28. Ерусалимский, Я. М. Достижимость на графах с зависимостью ограничений от времени / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): материалы V Международной научной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2012. — С. 111-112.
29. Ерусалимский, Я. М. Задача о кратчайшем пути на графах с меняющейся длительностью при условии случайных задержек на дугах / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXIV». — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 79–80.
30. Ерусалимский, Я. М. Уравнения математической физики на графах с нестандартной достижимостью / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сборник трудов VI международной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 96–99.
31. Ерусалимский, Я. М. О гармонических функциях на графах с нестандартной достижимостью / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — IV». Тезисы докладов. — Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. — С. 88–89.
32. Ерусалимский, Я. М. О потоках в сети с ограничениями на достижимость. Вычислительный эксперимент / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXVI». — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 89–90.
33. Жилиякова, Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах / Л. Ю. Жилиякова // Автоматика и

телемеханика. — 2011. — №4. — С. 133–143.

34. Жилякова, Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация / Л. Ю. Жилякова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — №6. — С. 103–118.
35. Жилякова, Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний / Л. Ю. Жилякова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — №7. — С. 67–77.
36. Жилякова, Л. Ю. Полные ресурсные сети. Случай одного приемника / Л. Ю. Жилякова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Ест. науки. — 2011. — №4. — С. 14–18.
37. Жилякова, Л. Ю. Применение ресурсных сетей для моделирования распространения веществ в водной среде / Л. Ю. Жилякова // Проблемы управления. — 2011. — №2. — С. 46–51.
38. Жилякова, Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети / Л. Ю. Жилякова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — №4. — С. 133–143.
39. Жилякова, Л. Ю. Исследование эйлеровых ресурсных сетей / Л. Ю. Жилякова // Управление большими системами. Выпуск 41. — М.: ИПУ РАН, 2013. — С. 28–50.
40. Жилякова, Л. Ю. Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях / Л. Ю. Жилякова // Проблемы управления. — 2013. — №3. — С. 51–59.
41. Жилякова, Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах / Л. Ю. Жилякова // Управление большими системами. Выпуск 43. — М.: ИПУ РАН, 2013. — С. 34–54.
42. Жилякова, Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы / Л. Ю. Жилякова // Управление большими системами. Выпуск 45. — М.: ИПУ РАН, 2013. — С. 6–29.

43. Замбицкий, Д. К. Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях / Д. К. Замбицкий, Д. Д. Лозовану. — Кишинев: Штиинца, 1983. — 171 с.
44. Зыков, А. А. Теория конечных графов / А. А. Зыков. — Новосибирск: Наука, 1969. — 543 с.
45. Зыков, А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. — М: Вузовская книга, 2004. — 584 с.
46. Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. П. Климов. — М.: МГУ, 1983. — 394 с.
47. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. — М.: Наука, 1975. — 480 С.
48. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес; [Пер. с англ.]. — М.: Наука, 1978. — 432 с.
49. Кузнецов, О. П. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель / О. П. Кузнецов, Л. Ю. Жилиякова // Доклады АН. — 2010. — Т. 433, № 5. — С. 609–612.
50. Кузнецов, О. П. Однородные ресурсные сети. I. Полные графы / О. П. Кузнецов // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 11. — С. 136–147.
51. Кузнецов, О. П. Полные ресурсные сети с произвольными пропускными способностями / О. П. Кузнецов, Л. Ю. Жилиякова // Управление большими системами: сборник трудов. — 2010. — № 30-1. — С. 640–664.
52. Кузьминова, М. В. Ограниченные магнитные достижимости на ориентированных графах / М. В. Кузьминова // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2006. — № 6. — С. 12–26.
53. Кузьминова, М. В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке / М. В. Кузьминова // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2008. — № 5. — С. 16–20.

54. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М: Наука, 1976. — 436 с.
55. Ловас, Л. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / Л. Ловас, М. Пламмер; [Пер. с англ.]. — М.: Мир, 1998. — 653 с.
56. Оре, О. Теория графов / О. Оре; [Пер. с англ.]. — М: Наука, 1980. — 334 с.
57. Петросян, А. Г. Многопродуктовые потоки в сетях с ограничениями на достижимость / А. Г. Петросян // В сб.: Математические методы в современных и классических моделях экономики и естествознания. — Ростов-на-Дону, 2005. — С. 136–138.
58. Петросян, А. Г. Потокосая задача в многопродуктовых сетях с нестандартной достижимостью / А. Г. Петросян // В сб.: Современные проблемы математического моделирования. — Ростов-на-Дону, 2005. — С. 334–340.
59. Петросян, А. Г. Потоки в сетях с биполярной достижимостью / А. Г. Петросян // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2006. — № 3, — С. 32–37.
60. Покорный, Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.
61. Провоторов, В. В. Единственность решения обратной задачи теплопроводности с особенностями / В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. — 2008. — № 1.1 (31). — С. 178–182.
62. Провоторов, В. В. Разностные схемы граничных задач на графе / В. В. Провоторов // Вестник Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2009. — Т. 5, № 10. — С. 14–18.
63. Провоторов, В. В. Устойчивость разностных схем граничных задач на графе / В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. — 2009. — № 2.2 (36). — С. 280–285.

64. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман; [Пер. с англ.]. — М: Мир, 1984. — 454 с.
65. Скороходов, В. А. Случайные блуждания и потоки в сетях с магнитной достижимостью / В. А. Скороходов // В сб.: Модели и дискретные структуры. — Элиста, 2002. — С. 93–100.
66. Скороходов, В. А. Графы с магнитной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях / В. А. Скороходов. — Ростов-на-Дону, 2003. — 16 С. Деп. в ВИНТИ 06.03.2003, № 410-В2003.
67. Скороходов, В. А. Устойчивость и стационарное распределение на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2007. — № 4. — С. 17–21
68. Скороходов, В. А. Достижимость на графах с ограничением на прохождение по дугам и зависимостью весов дуг от времени / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2009. — № 6. — С. 14–17.
69. Скороходов, В. А. Задача о перераспределении ресурсов на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2010. — № 1. — С. 22–26.
70. Скороходов, В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2011. — № 1, — С. 21–26.
71. Скороходов, В. А. Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами / В. А. Скороходов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 2. — С. 41–52.
72. Скороходов, В. А. Задача Дирихле на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 211–223.

73. Скороходов, В. А. Зависимость нестандартной достижимости от времени / В. А. Скороходов // В сб.: Труды научной школы Симоненко И.Б. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. — С. 235–242.
74. Скороходов, В. А. Нестандартная достижимость на графах: модели и алгоритмы / В. А. Скороходов, Я. М. Ерусалимский. — Lambert Academic Publishing (LAP, Saarbrücken, Germany), 2011. — 188 p., ISBN 978-3-8433-0592-1.
75. Скороходов, В. А. Максимальный поток в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2011. — № 5. — С. 23–27.
76. Скороходов, В. А. Графы с зависимостью некоторых характеристик от времени: достижимость, случайные процессы / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2012. — № 3. — С. 13–18.
77. Скороходов, В. А. Задача о случайных блужданиях на графах с зависимостью некоторых характеристик от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011): материалы IV Международной научной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2011. — С. 302–304.
78. Скороходов, В. А. Задача о случайных блужданиях на графах с зависимостью некоторых характеристик от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Сб. научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований 2011», 15-28 марта 2011г. — Т. 8. Физика и математика. — Одесса: Черноморье, 2011. — С. 63–72.
79. Скороходов, В. А. Задача теплопроводности на графах с циклической зависимостью весов дуг от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Современные проблемы прикладной математики, теории управ-



ления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): материалы V Международной научной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2012. — С. 261–262.

80. Скороходов, В. А. Задача Дирихле на графах с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени начала движения по ним / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сборник трудов VI международной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 223–224.
81. Скороходов, В. А. Задача о потере потока в ориентированных сетях / В. А. Скороходов, М. В. Шевелев // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сборник трудов VI международной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 275–277.
82. Скороходов, В. А. Оценка спектрального радиуса ориентированного графа при стягивании произвольной дуги / С. Ч. Муртузалиева, В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015): сборник трудов VIII международной конференции. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 261–263.
83. Скороходов, В. А. Задача о максимальном жёстко распределённом потоке / В. А. Скороходов // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — V». Тезисы докладов. — Ростов н/Д: Изд-во ДГТУ, 2015. — С. 172–173.
84. Скороходов, В. А. О классических задачах на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя школа «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. — С. 249–250.

85. Скороходов, В. А. Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 55–74.
86. Скороходов, В. А. Задачи о максимальном потоке в сетях с потерями в вершинах / В. А. Скороходов, М. В. Шевелев // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2015. — № 2 (186). — С. 47–53.
87. Скороходов, В. А. Полные двухресурсные сети с петлями / Х. Абдулрахман, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. — № 2 (190). — С. 10–16.
88. Скороходов, В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети / В. А. Скороходов // Управление большими системами. Выпуск 63. — М.: ИПУ РАН, 2016. — С. 6–23.
89. Скороходов, В. А. Ресурсные сети с магнитной достижимостью / Х. Абдулрахман, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. — № 4 (192). — С. 4–10.
90. Скороходов, В. А. О потоках в двухресурсных сетях / Х. Абдулрахман, Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя школа «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. — С. 3–4.
91. Скороходов, В. А. О распределении ресурсного потока в двухресурсных сетях / Х. Абдулрахман, В. А. Скороходов // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI». Материалы конференции. — Ростов-на-Дону: Изд. Центр ДГТУ, 2016. — С. 150.
92. Скороходов, В. А. О ресурсных сетях с вентильной достижимостью / Х. Абдулрахман, Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компью-

терных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». — Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. — С. 20–21.

93. Скороходов, В. А. О пороговом значении в ресурсных сетях с магнитной достижимостью / В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». — Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. — С. 319–321.
94. Степовой, Д. В. Оператор Лапласа на конечных ориентированных графах / Д. В. Степовой. — зерноград, 1996. — 12 с. — Деп. в ВИНТИ 27.09.96, №2899.
95. Форд, Л. Р. Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон; [Пер. с англ.]. — М: Мир, 1966. — 276 с.
96. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения: в 2 т. / В. Феллер; [Пер. с англ.]. — М.: Мир, 1967. — 2 т.
97. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари; [Пер.с англ.]. — М: Мир, 1973. — 300 с.
98. Харари, Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Е. Палмер; [Пер. с англ.]. — М.: Мир, 1977. — 324 с.
99. Цой, С. Прикладная теория графов / С. Цой, С. М. Цхай. — Алма-Ата: Наука, 1971. — 500 с.
100. Чеботарева, А. С. Гармонические функции на графах с зависимостью длительностей прохождения по дугам от начала движения по ним / А. С. Чеботарева // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2013. — № 6 (178). — С. 35–39.
101. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. — М: Наука, 1979. — 272 с.
102. Ahuja, R. K. A fast and simple algorithm for the maximum flow problem / R. K. Ahuja, J. B. Orlin // Oper. Res. — 1989. — No. 37. — P. 748–759.

103. Ahuja, R. K. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications / R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin. — New Jersey:Prentice-Hall, Inc., 1993. — 864 p.
104. Ahuja, R. K. Improved time bounds for the maximum flow problem / R. K. Ahuja, J. B. Orlin, R. E. Tarjan // SIAM J. Comput. — 1989. — No. 18. — P. 939–954.
105. Alon, N. Generating pseudo-random permutations and maximum flow algorithms / N. Alon // Inf. Proc. Lett. — 1990. — No. 35. — P. 201–204.
106. Aronson, J. E. A survey of dynamic network flows / J. E. Aronson // Annals of Operations Research. — 1989. — No. 20. — P. 1–66.
107. Dinic, E. A. Algorithm for Solution of a Problem of Maximum Flow in Networks with Power Estimation / E. A. Dinic // Soviet Math. Dokl., 11:1277-1280. — 1970.
108. Edmonds, J. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems / J. Edmonds, R. M. Karp // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1972. — Vol. 19, No. 2 — P. 248–264.
109. Even, S. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems / S. Even, A. Itai, A. Shamir // SIAM J. Comput. — 1976. — Vol. 5, No. 4. — P. 691–703.
110. Fonoberova, M. On determining the minimum cost flows in dynamic networks / Fonoberova M. // The Bulletin of Academy of Sciences of Moldova, Mathematics. — 2006, — No. 1(50). — P. 51–56.
111. Fonoberova, M. The optimal flow in dynamic networks with nonlinear cost functions on edges / Fonoberova M., D. Lozovanu // The Bulletin of Academy of Sciences of Moldova, Mathematics. — 2004. — No. 3 (46). — P. 10–16.
112. Fonoberova, M. The maximum flow in dynamic networks / Fonoberova M., D. Lozovanu // Computer Science Journal of Moldova. — 2004. — No. 3 (36). — P. 387–396.

113. Fonoberova, M. Optimal multicommodity flows in dynamic networks and algorithms for their finding / Fonoberova M., D. Lozovanu // The Bulletin of Academy of Sciences of Moldova, Mathematics. — 2005. No. 1 (47). — P. 19–34.
114. Fonoberova, M. The minimum cost multicommodity flow problem in dynamic networks and an algorithm for its solving / Fonoberova M., D. Lozovanu // Computer Science Journal of Moldova. — 2005. No. 1 (37). — P. 29–36.
115. Ford, L. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows / L. R. Ford, D. R. Fulkerson // Operations Research. — 1958. — Vol. 6. — P. 419–433.
116. Ford, L. R. Maximal flow through a network / L. R. Ford, D. R. Fulkerson // Canad. J. Math. — 1956. — No. 8. — P. 399–404.
117. Galiil, Z. An  $O(EV \log^2 V)$  algorithm for the maximal flow problem / Z. Galiil, A. Naamad // J. Comput. Syst. Sci. — 1980. — No. 21. — P. 203–217.
118. Glockner, G. A dynamic network flow problem with uncertain arc capacities: formulation and problem structure / G. Glockner, G. Nemhauser // Operations Research. — 2000. — No. 48 (2). — P. 233–242.
119. Goldberg, A. V. Beyond the Flow Decomposition Barrier / A. V. Goldberg, S. Rao // Journal of the ACM. — 1998. — Vol. 45, No. 5. — P. 783–797.
120. Goldberg, A. V. A New Approach to the Maximum Flow Problem / A. V. Goldberg, R. E. Tarjan // J. Assoc. Comput. Mach., 35:921-940. — 1988.
121. Graves, S. C. A Minimum Concave-Cost Dynamic Network Flow Problem with an Application to Lot-Sizing / S. C. Graves, J. B. Orlin // Networks. — 1985. — Vol. 15. — P. 59–71.
122. Hansen, P. Bicriterion path problems / P. Hansen // Lect. Notes Econ. and Math. Sypt. — 1980. — P. 109–127.

123. Harary, F. Conditional connectivity / F. Harary // Networks. — 1983. — Vol. 13, No. 3. — P. 347–357.
124. Karzanov, A. V. Determining the maximal flow in a network by the method of preflows / A. V. Karzanov // Sov. Math. Dokl. — 1974. — No. 15. — P. 434–474.
125. King, V. A faster deterministic maximum flow algorithm / V. King, S. Rao, R. Tarjan // J. Algorithms. — 1994. — No. 17. — P. 447–474.
126. Klinz, B. One, two, three, many, or: complexity aspects of dynamic network flows with dedicated arcs / B. Klinz, C. Woeginger // Operations Research Letters. — 1998. — No. 22, — P. 119–127.
127. Kuznetsov, O./,P. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states. // Management and Production Engineering Review. — 2011. — Vol. 2, No 3. — P. 33–39.
128. Lawler, E. L. Combinatorial optimization: networks and matroids / E. L. Lawler. — New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976. — 374 p.
129. Lozovanu, D. Optimal flows in dynamic networks: monograph / D. Lozovanu, M. Fonoberova. — Chisinau, CEP USM, 2006.
130. Lozovanu, D. The minimum cost flow problem on dynamic networks and algorithm for its solving / D. Lozovanu, D. Stratila // Bulletin of Academy of Sciences of Moldova, Mathematics. — 2001. — No. 3. — P. 38–56.
131. Lozovanu, D. Optimal flow in dynamic networks with nonlinear cost functions on edges / D. Lozovanu, D. Stratila // Analysis and optimization of differential systems. Kluwer Academic Publishers. — 2003. — P. 247–258.
132. Ma, Z. Dynamic network flow model for short-term air traffic flow management / Z. Ma, D. Cui, P. Cheng // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part A: Systems and Humans. — 2004. — No. 34 (3). — P. 351–358.
133. MacKie-Mason, J. Pricing congestible network resources / J. MacKie-Mason, H. Varian // IEEE Journal of selected areas in communications. —

1995. — No. 13 (7). — P. 1141–1149.

134. Mazzoni, G. The maximum flow problem: A max-preflow approach / G. Mazzoni, S. Pallottino, M. Scutella // European Journal of Operational Research. — 1991. — No. 53. — P. 257–278.
135. Ning, X. The Blocking Flow Theory and its Application to Hamiltonian Graph Problems / X. Ning, A. Ning. — Germany, Aachen: Shaker Verlag GmbH, 2006. — 249 p.
136. Orlin, J. B. Maximum-throughput dynamic network flows / J. B. Orlin // Math. Progr. — 1983. — Vol. 27. — P. 214–231.
137. Picard, J. C. Minimum Cuts and Related Problems / J. C. Picard, H. D. Ratliff // Networks, 5:357-370. — 1975.
138. Skorokhodov, V. A. The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution / V. A. Skorokhodov, A. S. Chebotareva // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — Vol. 9, No. 3. — P. 435–446.
139. Skutella M. An Introduction to Network Flows Over Time / M. Skutella // Research Trends in Combinatorial Optimization. — Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009. — P. 451–482.