на правах рукописи

ШАБРОВ СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Воронеж — 2017

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Научный консультант:

Доктор физико-математических наук, профессор,
Баев Александр Дмитриевич

Официальные оппоненты:

Постников Евгений Борисович, доктор физико–математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», факультет физики, математики, информатики, кафедра физики и нанотехнологий, профессор;

Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», институт экономики, менеджмента и информационных технологий, кафедра информационных технологий и автоматизированного проектирования в строительстве, профессор

Горбунов Вячеслав Алексеевич, доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», электроэнергетический факультет, кафедра информационных систем и технологий, заведующий

Ведущая организация

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Защита состоится «20» декабря 2017 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/4965/
Диссертация_Шабров_С.А..pdf

Автореферат разослан «18» сентября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико–математических наук,
профессор

Артемов Михаил Анатольевич

Настоящая работа посвящена математическому моделированию деформаций систем, состоящих из струн, стержней, имеющих внутренние особенности, и помещенных в неоднородную среду с локальными особенностями.

Проблемы, которые возникают при моделировании описанных выше систем, порождаемые как внутренними, так и внешними факторами, преодолеваются используя концепцию поточечного подхода Ю. В. Покорного к трактовке возникающих уравнений. Появляющиеся уравнения связывают неизвестную функцию и её производные до определенного порядка. Предложенный подход позволяет применять к анализу полученных моделей качественные методы. Последнее, в свою очередь, даёт возможность установить важные для приложений свойства решений дифференциальных моделей, например, количество нулей, экстремума, перемен знака и пр.

Актуальность темы. Несмотря на бурное развитие математического моделирования и расширение объектов, как с позиций увеличения размерности, так и учёта нелинейных составляющих изучаемого объекта, остаются объекты, моделирование различных процессов в которых либо трудно формалируемо, либо невозможно. В случае, когда математическая модель реализуется в виде граничной задачи, то, как правило, трудности, возникающие, как при анализе полученных моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения (а в ряде случаев и «разрывностью» решения). Подобные проблемы обычно решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М., Владимиров В.С., Егоров Ю.В., Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р., Маслов В.П., Цупин В.А., Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. и многие другие). Однако на этом пути возникает ряд проблем. Например, проблема умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерывных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима. Эту проблему пытаются «обойти», как правило, переходя к алгебре обобщенных функций Коломбо. Но и здесь возникают определенные трудности и неудобства при анализе решений. Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ-функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (Мышкис А.Д. и Владимиров А.А.). Другая проблема — слабая разрешимость краевых задач, что для приложений недостаточно.

Главное направление развития здесь диктовала спектральная теория. Теория обобщенных функций и теория операторов эффективны в спектральных вопросах (Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Левитан Б.М., Саргсян И.С., Като Т., Марченко В.А., Рид М., Саймон Б., Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х., Гасымов М.Г., Михайлец В.А., Винокуров В.А., Садовничий В.А., Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А., Korotyaev E., Митягин Б.С., Хромов А.П., Савчук А.М., Асташова И.В., Филиновский А.В., Бак Д.-Г., Свиридюк Г.А., Келлер А.В., Ширяев Е.А., Баскаков А.Г., Djakov P., Джаков П., Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. и многие другие).

Другое направление развития — это качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы, имеющей структуру графа. Такой подход очень эффективен, так как моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами, в частности, для объектов имеющих разную структуру, приводящую к разным порядкам на различных ребрах (Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В., Прядиев В.Л., Лазарев К.П., Nicaise S., Lumer G., Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G., Белоглазова Т.В., Дикарева Е.В., Перловская Т.В.). Однако, при создании названной теории предполагалась достаточная гладкость коэффициентов (за исключением, быть может конечного числа точек). В последнее время для негладких на ребрах коэффициентов стали появляться работы (Зверева М.Б.) устраняющие этот пробел.

Работы Стилтьеса о нити с бусинками, Крейна М.Г. и Гантмахера Ф.Р., Крейна М.Г. и Каца И.С. о произвольно нагруженной струне, работы Келлога О. обозначили направление исследований в интересах физической теории колебаний. Однако, через некоторое время исследования в этом направлении «замерли». И после выхода работ Ю.В. Покорного в 1999 и 2002 годах в Докладах Российской Академии Наук, это направление получило новую жизнь, наряду с интегралом Стилтьеса было предложено использование производных Радона–Никодима.

Цель работы. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложных физических систем, состоящих из струн, стержней, реализуемых в виде граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

— вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней, струн, помещенных во внешнюю с локализованными особенностями;

— доказательство корректности полученных математических моделей;

— изучение нелинейных математических моделей, возникающих при моделировании нелинейных деформаций изучаемых систем при учете нелинейности;

— изучение некоторых вопросов теории математических моделей с разрывными решениями; показать корректность моделей с решениями, имеющими не только разрывы, но и самостоятельное значение в точке разрыва, которое приходится учитывать для адекватности модели соответствующему процессу;

— изучить структуру спектра, а именно, доказать, что спектр математической модели, как второго, так и четвертого порядков, обладает свойство осцилляционности;

— получить достаточные условия при которых математические модели сингулярной и сильно сингулярной консоли обладают свойством податливости;

— разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений второго и четвертого порядков (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);

— разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

— решение задач прикладного характера:

а) приближенное решение математических моделей, описывающих деформации неоднородной струны (с одним или двумя закрепленными концами), находящейся во внешней среде с локализованными особенностями; б) приближенное решение дифференциальной модели, описывающей малые деформации консоли, находящейся в среде с особенностями; в) нахождение деформаций системы, состоящей из стержня и струны.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочлененные одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа. Адаптированный метод конечных элементов для граничных задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона–Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней и струн, имеющих внутренние особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Интегральная обратимость математических моделей с производными по мере; доказательство оценок функции влияния.

4. Изучение нелинейных математических моделей, возникающих при моделировании нелинейных деформаций изучаемых систем при учете «нелинейности».

5. Разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений второго и четвертого порядков (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

6. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим объектом которых является единое уравнение с производными по мере. 2. Результаты диссертационной работы содержат подробное исследование серии спектральных задач: изучена структура спектра спектральной задачи для граничных задач второго и четвертого порядков с производными Радона–Никодима. 3. Доказана возможность интегрального представления решения изученных дифференциальных моделей; показана корректность математических моделей второго и четвертого порядков с производными по мере. 4. Доказаны оценки функции влияния математических моделей второго и четвертого порядков; изучены нелинейные математические модели. 5. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающей деформации одномерных объектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающих из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, которые формализованы в виде единого уравнения с производными по Радону–Никодиму. При этом исследована структура спектра соответствующих граничных задач, построены функции влияния и получены их оценки. Проведено исследование нелинейных дифференциальных моделей второго и четвертого порядков; получены достаточные условия их разрешимости.

Разработаны эффективные численные методы применительно к математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных задач с производными Радона-Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского (Москва, 2004 г.), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения» (Санкт-Петербург, 1998 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы» на Саратовской зимней математической школы (Саратов, 1998 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы» на Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 1999, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015 гг.), «Современные методы теории краевых задач» на Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2006–2014 гг.), «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2012 г.), Международной молодежной научной школе «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Воронеж, 2012 г.), Всероссийской молодежной научной школе «Взаимодействие математики и физики: новые перспективы» (Воронеж, 2012 г.), на семинарах профессора Ю.В. Покорного (1997, 1999, 2004–2008 гг.), профессора В.Г. Задорожнего (1998 г.), профессора А.Д. Баева (2009–2016 гг.), профессора М.И. Каменского (2012–2015 гг.), семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством проф., д.ф.-м.н. Н.Х. Розова, проф., д.ф.-м.н. И.Н. Сергеева, проф., д.ф.-м.н. И.В. Асташовой, проф., д.ф.-м.н. А.В. Боровских (2016 г.), межвузовском научном семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений про руководством проф., д.ф.-м.н. И.В. Асташовой (МГУ им. М.В. Ломоносова — РЭУ им. Г.В. Плеханова), проф., д.ф.-м.н. А.В. Филиновского (МГТУ им. Н.Э. Баумана — МГУ им. М.В. Ломоносова).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 61 работе: [1]–[17], [23]–[61], из них [1]–[17] из перечня, рекомендованных ВАК, и в 5 монографиях — [18]–[22]. Получены два свидетельства [62], [63] о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты полученные лично автором.

Научные гранты и программы. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.574.21.0093 от 11.08.2014 г. Уникальный идентификатор прикладных научных исследований (проекта) RFMEFI57414X0093.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 7 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 215 наименований и 3 приложений, в котором приводятся листинги программ, написанных на Maple и Python и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 412 страницах и содержит 95 рисунков и 9 таблиц.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цели и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «**Математическая модель сингулярной струны**» исследуется математическая модель второго порядка

$$\begin{cases} -\left(p\frac{d}{dx}u\right)' + Q'u = F', \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

полученная как экстремаль функционала потенциальной энергии неоднородной струны, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, в естественных (с точки зрения механики) в предположениях, что $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации и $\inf\limits_{x\in[0;\ell]} p(x) > 0$, а штрихами обозначено обобщенное дифференцирование; уравнение (1) мы заменяем на привычное, с позиций обыкновенных дифференциальных уравнений, поточечно заданное уравнение

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p\frac{d}{dx}u\right) + \left(\frac{d}{d\sigma}Q\right)u = \frac{d}{d\sigma}F, \tag{2}$$

где производная $\dfrac{d}{d\sigma}$ понимается по Радону-Никодиму, т. е. по мере. Уравнение (1) в ряде случае удобнее изучать в интегро-дифференциальной форме

$$-\left(pu'_x\right)(x) + \int\limits_0^x u\,dQ = F(x) - F(0) - \left(pu'_x\right)(0).$$

Решения ищутся в классе непрерывных функций. Далее дает точное описание класса функций в котором рассматривается модель.

Естественность такой трактовки модели объясняется для случая, когда уравнение (1) имеет физическую природу, возникая по схеме Лагранжа из задачи минимизации функционала энергии

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\ell \frac{pu'^2}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{u^2}{2}\,dQ - \int\limits_0^\ell u\,dF \tag{3}$$

для неоднородной струны. Доказывается

Теорема 1 (1.2.1). *Пусть $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf p(x) > 0$. Тогда существует такая строго возрастающая функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру, что x, $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ-абсолютно непрерывными на $[0;\ell]$, а функция $u(x)$, приводящая на E (3) к минимуму, является решение дифференциальной модели*

$$\begin{cases} -(pu')'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Изучаются простейшие свойства модели; вводятся необходимые множества. Обозначим через $S(\sigma)$ множество точек разрыва $\sigma(x)$. Наиболее интересный для нас случай, когда $S(\sigma)$ непусто. При этом мы допускаем у функции $\sigma(x)$ счетное число точек разрыва. Каждая из таких точек имеет σ-меру, равную $\Delta\sigma(\xi) = \sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)$.

Пусть $J_\sigma = [0,\ell] \setminus S(\sigma)$. Введем на J_σ метрику равенством $\varrho(x,y) = \sigma(y+0) - \sigma(x-0)$ для $x < y$. Пополнение J_σ по этой метрике обозначим через $\overline{[0;\ell]}_S$. В этом множестве вместо прежних точек $\xi \in S(\sigma)$ появляется пара собственных элементов ξ_- и ξ_+. Индуцируя на $\overline{[0;\ell]}_S$ исходную упорядоченность, имеем $\xi_- < \xi_+$. Формальное объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ с $S(\sigma)$, при котором $\xi_- < \xi < \xi_+$ для каждой $\xi \in S(\sigma)$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. В этом множестве точки из $S(\sigma)$ как бы вставлены на прежние места, но теперь они обрамлены с боков уже собственными в $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ элементами ξ_-, ξ_+, а не символами предельных переходов в этих точках, как было ранее. Отметим, что в точках ξ_- и ξ_+ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ (когда $\xi \in S(\sigma)$) σ-абсолютно непрерывная функция $F(x)$ определена своими предельными значениями: $F(\xi_\pm) = F(\xi \pm 0)$; σ-абсолютно непрерывные функции, определенные на $\overline{[0;\ell]}_S$, достигают на $\overline{[0;\ell]}_S$ наибольшее и наименьшее значений, что на $[0;\ell]$ могло и не быть. Например, функция $F(x) = \dfrac{\ell - x}{\ell - \xi}\theta(x-\xi)$, очевидно, σ-абсолютно непрерывна при $\sigma(x) = x + \theta(x-\xi)$, здесь и далее, $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$, и единице при $x > 0$, наибольшее значение не достигает на $[0;\ell]$, а на $\overline{[0;\ell]}_S$ — в точке ξ_+. σ-производная σ-абсолютно непрерывной функции $v(x)$ определена почти всюду (относительно σ-меры) на множестве $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ как отношение скачков: $\dfrac{dv}{d\sigma}(\xi) = \dfrac{\Delta v(\xi)}{\Delta\sigma(\xi)}$.

Получены аналоги теорем Штурма о перемежаемости нулей; изучено свойство важное не только для приложений, но при анализе нелинейных математических моделей: свойство *неосцилляции однородного уравнения.*

Будем говорить, что однородное уравнение $-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, если любое нетривиальное решение имеет не более одного нуля.

Далее изучается проблема интегрального представления решения; проводятся анализ функции влияния дифференциальной модели.

Математическую модель

$$\begin{cases} Lu \equiv -\dfrac{d}{d\sigma}(pu') + \dfrac{dQ}{d\sigma}u = \dfrac{dF}{d\sigma}; \\ l_1 u \equiv pu'(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \quad l_2 u \equiv pu'(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

назовем невырожденной, если однородная модель (при $F(x) \equiv \mathrm{const}$) имеет только тривиальное решение.

В дальнейшем под записью $\gamma_1 = \infty$ ($\gamma_2 = \infty$) мы будем понимать условие $u(0) = 0$ ($u(\ell) = 0$).

Получены достаточные условия невырожденности математической модели.

Теорема 2 (1.5.1). *Пусть* $\min\limits_{\overline{[0;\ell]}_S} p(x) > 0$*,* $Q(x)$ *не убывает на* $\overline{[0;\ell]}_S$, $\gamma_1 \geqslant 0$ *и* $\gamma_2 \geqslant 0$*. Математическая модель* (5) *невырождена, если выполнено одно из следующих условий: 1)* $\gamma_1 = \infty$ *и/или* $\gamma_2 = \infty$*; 2)* $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$*; 3)* $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ *и* $Q(\ell) - Q(0) > 0$.

Также показана интегральная обратимость дифференциальной модели, при условии ее невырожденности.

Доказана корректность дифференциальной модели сингулярной струны. Доказательство основано на интегральном представлении решения.

Получены оценки функции влияния при $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$:

$$G(x,s) \geqslant \widetilde{u}_0(x) G(\tau, s), \tag{1.7.3}$$

где $u_0(x) = \widetilde{k}x(\ell - x)$, $\widetilde{k}$ — достаточно малое положительное число.

Показано, что линейная математическая модель обладает *осцилляционным спектром*, т. е. спектр модели состоит из счётной последовательности собственных положительных частот, единственная точка сгущения которых $+\infty$; амплитудные функции удовлетворяют следующим свойствам: первая (отвечающая ведущей частоте) нулей внутри интервала $(0;\ell)$ не имеет, каждая последующая имеет на один нуль больше, чем предыдущая, причем их нули перемежаются.

Вторая глава «**Математические модели с разрывными решениями и разнопорядковыми уравнениями**» посвящена двум направлениям развития качественной теории математического моделирования одномерных систем с внутренними и внешними особенностями: наличие разрыва у решения модели и разный порядок на различных частях системы. Ключевыми моментами здесь (как впрочем и в остальных главах) являются 1) поточечно заданное уравнение и 2) возникающее уравнение одно на всем отрезке.

Изучается математическая модель малых деформаций следующей системы: одномерный упругий континуум (стилтьесовскую струну), расположенный вдоль $[0, \ell]$ и упруго закрепленный на концах; в конечном числе точек, которые мы обозначим через ξ_i $(0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n)$, локализована особенность, порождаемая разрывом струны в этих точках, при этом мы предполагаем наличие в точке ξ_i упругой связи типа пружины жесткости γ_i, скрепляющей левый и правый части системы (на которые «разорвана» струна).

Обозная через $u(x)$ отклонение точки x от положения равновесия под влиянием внешней силы интенсивности $f(x)$, для малых деформаций рассматриваемого объекта в вертикальной плоскости (перпендикулярно положению равновесия) получаем дифференциальную модель

$$\begin{cases} -\left(pu'_\mu\right)'_x + qu = f, & \text{(а)} \\ pu'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) = 0, & \text{(б)} \\ pu'_\mu(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0, & \text{(в)} \end{cases} \tag{6}$$

причем (6а) в точках ξ разрыва функции $\mu(x)$ реализуется в виде равенств

$$\left(pu'_\mu\right)(\xi - 0) = p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} = \left(pu'_\mu\right)(\xi + 0),$$

γ_i — коэффициенты упругого закрепления концов. Заметим, что в точках $x = \xi_i$ функция $u(x)$ не определена, но определены и имеют физический смысл предельные значения $u(\xi_i - 0)$, $u(\xi_i + 0)$. Интенсивность внешней силы определена при $x \neq \xi_i$.

Для (6) показана интегральное представление решения.

Далее, изучается модель с сильными внутренними особенностями, когда в объекте каждая внутренняя особенность, реализуемая в виде пружины, заменяется на две различной жесткости, и, таким образом, приходится следить за точкой спайки, более того, к этой точке допускается приложение сосредоточенной силы. Тогда, у $u(x)$ — отклонения точки x от положения равновесия — в каждой такой точке помимо различных предельных значений, имеется самостоятельное значение, отличное от предельных, которое нельзя игнорировать. Используя развиваемый математический аппарат для дифференциальной модели, удалось показать корректность.

Рассматривается модель малых деформаций механической системы, состоящей из растянутого стержня, один из концов которого защемлён, а к свободному — прикреплена растянутая струна, второй конец которой закреплён; точку спайки стержня и струны обозначим через ξ. Эта модель реализуется в виде граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где коэффициент $p(x) \equiv 0$ на $[\xi;\ell]$, $p(x)$ и $r(x)$ отделены от нуля на оставшейся части отрезка $[0;\ell]$; $r(x) \geqslant 0$ для всех x. Для (7) показана невырожденность, интегральная обратимость, и доказано, что пространство решений имеет размерность три.

В третьем главе «**Граничные задачи с производными по мере при моделировании малых деформаций сложно-сочленённых стержневых систем**» изучены линейная модель, возникающая при моделировании малых деформаций стержневых систем, при этом используется поточечный подход.

В этой и последующих главах предполагаются выполненными условия: 1) x, $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$; 2) $p(x) > 0$ для всех $x \in [0;\ell]$, $\min\limits_{\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)} \setminus S(\mu)} p(x) > 0$; 3) интеграл $\int\limits_0^\ell \dfrac{d\mu(x)}{p(x)}$ конечен; 4) $r(x) \geqslant 0$ на всем $\overline{[0;\ell]}_S$; 5) $Q(x)$ не убывает.

Математическая модель, изучаемая в этой главе, возникает как необходимое условие экстремали функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\ell \frac{pu''^2_{x\mu}}{2}\,d\mu + \int\limits_0^\ell \frac{ru'^2_x}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{u^2}{2}\,dQ - \int\limits_0^\ell u\,dF +$$
$$+ \gamma_1 \frac{u'^2_x(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2_x(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}.$$

на множестве E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых μ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{x\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение.

Теорема 3 (3.1.1). *Необходимое условие экстремума функционала* $\Phi(u)$

реализуется в виде дифференциальной модели

$$\begin{cases} Lu \equiv \left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0) - \left(ru'_x\right)(0) + \gamma_2 u(0) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell) - \left(ru'_x\right)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Следует отметить, что уравнение в (8) в каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

здесь $\Delta v(\xi)(= v(\xi+0) - v(\xi-0))$ — скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

Показывается, что уравнение $\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + Q'_\sigma = F'_\sigma$ имеет единственное решение для любых начальных данных. Также исследуется структура решений: показано, что пространство решений однородного уравнения имеет размерность четыре, а неоднородного — сдвиг пространства решений однородного уравнения на некоторый фиксированный элемент.

Далее, изучается важное для приложений свойство *неосцилляции* однородного уравнения.

Точку x_0 назовем нулем решения $u(x)$ уравнения $Lu = 0$, кратности 1 (или простым нулём), если $u(x_0) = 0$ и $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) > 0$; кратности 2, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) \leqslant 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) \neq 0$; кратности 3, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) = u'_x(x_0 + 0) = 0$, $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0 - 0) \cdot \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0 + 0) > 0$.

Определение. Однородное уравнение $\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ назовем неосциллирующим на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, если любое нетривиальное решение этого уравнения имеет не более трех нулей (с учетом кратностей).

Определение. Будем говорить, что система непрерывных на $[0;\ell]$ функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является системой Чебышева порядка $n-1$ (T_{n-1}-системой) на I ($= [0;\ell]$, $(0;\ell]$, $[0;\ell)$ или $(0;\ell)$), если произвольный нетривиальный обобщённый многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более $n-1$ нуля на I с учётом кратности.

Определение. Систему $\{\varphi_i(x)\}$ непрерывных на $[0;\ell]$ функций (возможно состоящую и из счётного числа функций) назовём системой Маркова или M-системой, если для любого n система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является T_{n-1}-системой.

Следующая теорема играет ключевую роль при изучении нелинейных математических моделей.

Теорема 4 (3.3.1). *Следующие условия эквивалентны: 1) однородное уравнение* $Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\mu} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_\sigma$*; 2) справедливо представление Пойа–Маммана* $Lu = \psi_4\left(\psi_3\left(\psi_2\left(\psi_1(\psi_0 u)'_x\right)'_\mu\right)'_x\right)'_\sigma$, *где функции* $\psi_0(x)$, $\int\limits_0^x \psi_1(s)\,ds$, $\int\limits_0^x\int\limits_0^t \psi_2(s)\,ds\,d\mu(t)$, $\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau\int\limits_0^t \psi_3(s)\,dsd\mu(t)$ *принадлежат* E, $\psi_4(x)$ *—* σ*-суммируема на* $[0;\ell]$ *и* $\psi_i(x) > 0$ *(*$i = 0,1,2,3,4$*); 3) существует фундаментальная система* $\{u_i(x)\}_{i=1}^4$ *решений однородного уравнения* $Lu = 0$ *такая, что* $W_1(x) = u_1(x) > 0$, $W_2(x) = W[u_1,u_2](x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1{}'_x(x) & u_2{}'_x(x) \end{vmatrix} > 0$, $W_3(x) = W[u_1,u_2,u_3](x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ u_1{}'_x(x) & u_2{}'_x(x) & u_3{}'_x(x) \\ u_1{}''_{x\mu}(x) & u_2{}''_{x\mu}(x) & u_3{}''_{x\mu}(x) \end{vmatrix} > 0$ *и* $W_4(x) = W[u_1,u_2,u_3,u_4](x) =$

$$= \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & u_4(x) \\ u_1{}'_x(x) & u_2{}'_x(x) & u_3{}'_x(x) & u_4{}'_x(x) \\ pu_1{}''_{x\mu}(x) & pu_2{}''_{x\mu}(x) & pu_3{}''_{x\mu}(x) & pu_4{}''_{x\mu}(x) \\ (pu_1{}''_{x\mu})'_x(x) & (pu_2{}''_{x\mu})'_x(x) & (pu_3{}''_{x\mu})'_x(x) & (pu_4{}''_{x\mu})'_x(x) \end{vmatrix} > 0$$

4) в пространстве решений однородного уравнения $Lu = 0$ *существует фундаментальная система решений являющаяся* M*-системой на* $[0,\ell]$*; 5) существует фундаментальная система решений однородного уравнения, которая является системой Чебышева порядка 3.*

Получены достаточные условия невырожденности и доказана интегральная обратимость математической модели (8). Показано, что при условии невырожденности функция влияния существует и единственна в классе непрерывных функцию.

Функцией влияния математической модели (8) *будем называть любую непрерывную по совокупности переменных* x, s *(на квадрате* $\overline{[0;\ell]}_S \times \overline{[0;\ell]}_S$*) функцию* $G(x,s)$*, позволяющую получить решение* (3.1.16) *в виде*

$$u(x) = \int\limits_0^\ell G(x,s)F'_\sigma(s)\,d\sigma(s) \tag{9}$$

для любой σ*-абсолютной непрерывной функции* $F(x)$.

Получен явный вид функции влияния математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma = F'_\sigma, & (a) \\ u(0) = u'_x(0) = 0, & (b) \\ pu''_{x\mu}(\ell) = (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) = 0, & (c) \end{cases} \tag{10}$$

которая описывает малые деформации системы из растянутых балок, соединенных шарнирно, и имеющей в точках шарнирного соединения локальную особенность реагирующую на изгибающий момент; она имеет вид

$$G(x,s) = \int\limits_0^{\min\{x,s\}} \frac{(\psi(x)-\psi(t))\,(\psi(s)-\psi(t))}{p(t)\varphi(t-0)\varphi(t+0)}\,d\mu(t),$$

где $\varphi(x) = \psi'_x(x) > 0$ и $\psi(x)$ удовлетворяет условиям $pu''_{x\mu}(\ell) = 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) = 0$. Это представление справедливо при дополнительной предположении относительно меры μ (функции $\mu(x)$ ее порождающей): величины $\frac{\mu(x+\varepsilon)-\mu(x+0)}{\varepsilon}$ и $\frac{\mu(x-\varepsilon)-\mu(x-0)}{\varepsilon}$ ограничены для положительного ε.

Показана корректность математической модели (8).

Доказана осцилляционность спектра моделей

$$\begin{cases} \left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma = \lambda M'_\sigma u, \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_2 u'_x(0) = 0, \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0, \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + \\ +uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u, \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

соответственно. Здесь λ — спектральный параметр, $M(x)$ — строго возрастающая σ-абсолютно непрерывная функция.

В четвертой главе «**Податливость сингулярных математических моделей четвертого порядка**» изучается свойство двух сингулярных математических моделей четвертого порядка. Первая модель описывает малые деформации консоли, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, один конец которой свободен, а второй — защемлен; у второй модели — один конец свободен, а другой — закреплен шарнирно. Эти две модели реализуются в виде граничных задач

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_\sigma + \\ +u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x), \\ u(0) = u'_x(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_\sigma + \\ +u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x), \\ u(0) = (pu''_{xx})(0) = 0, \\ (pu''_{xx})(\ell) = (pu''_{xx})'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

соответственно (при условии $r(\ell) = 0$). Трудность изучения второй (по сравнению с первой) заключается в том, что при $Q(x) \equiv \mathrm{const}$ последняя модель не обладает свойством невырожденности. Тем не менее удалось показать, что жесткость внешней среды можно уменьшить так, чтобы модель стала податливой.

Получены оценки функции влияния дифференциальной модели, которые имеют не только самостоятельное значение, но и позволяют изучать некоторые нелинейные математические моделей четвертого порядка.

Пусть $G(x,s)$ — функция влияния дифференциальной модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

при этом (11) обладает свойством невырожденности; однородное уравнение $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 5 (4.4.3). *Пусть однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$; $G(x;s)$ — функция влияния модели* (11)*; $u_0(x) = \int\limits_0^x (x-\tau)\,d\mu(\tau) \cdot \int\limits_x^\ell (\tau - x)\,d\mu(\tau)$. Тогда существуют σ-суммируемые, положительные функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ такие, что*

$$u_0(x)v_1(s) \leqslant G(x,s) \leqslant u_0(x)v_2(s)$$

для всех x и s, принадлежащих $[0;\ell]$.

Теорема 6 (4.4.4). *Пусть однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$; $G(x,s)$ — функция влияния математической модели* (11). *Тогда существует положительная константа C такая, что неравенство*

$$G(x,s) \geqslant C\varphi_1(x)\varphi_3(x)G(\tau,s) \tag{12}$$

справедливо для всех $x, s, \tau \in [0;\ell]$.

Здесь $\varphi_1(x) = \int\limits_0^x (x-\tau)\,d\mu(\tau)$ и $\varphi_3(x) = \int\limits_x^\ell (\tau - x)\,d\mu(\tau)$.

В пятой главе «**Нелинейные модели порядка с негладкими решениями**» посвящена анализу нелинейных математических моделей

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d\sigma}(pu'_x)(x) + \dfrac{dQ}{d\sigma}(x)u(x) = f(x,u(x)), \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Доказана теорема

Теорема 7 (5.1.1). *Пусть выполнены следующие условия: 1) однородное уравнение* $Lu = 0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_\sigma$*; 2) функция* $f(x,u)$ *не убывает по* u *при каждом* $x \in [0;\ell]$ *и* $f(x,0) \geqslant 0$*; 3) существует* N *пар чисел* α_i, β_i*, удовлетворяющих неравенствам* $0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n$

$$f(x, \beta_k u_0(x)) \leqslant \beta_k \left(\int_0^\ell h_2(s)\, d\sigma(s) \right)^{-1} \quad (x \in [0;\ell]). \tag{14}$$

4) для каждого k *существует множество* $w_k \subset [0;\ell]$ *положительной* σ*-меры такое, что*

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) \geqslant \alpha_k \left(\int_{w_k} h_1(s)\, d\sigma(s) \right)^{-1} \quad (x \in [0;\ell],\, k = 1,\dots,N) \tag{15}$$

Если неравенства (14) *и* (15) *превращаются в строгие на множествах положительной* σ*-меры, то задача* (13) *имеет* $2N-1$ *нетривиальных решений* $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2N-1}$*, удовлетворяющих неравенствам* $u_i(x) \geqslant 0$ *(*$i = 1, 2, \dots, 2N-1$*) и* $u_{2i-1}(x) \leqslant u_{2i+1}(x)$ *(*$i = 1, 2, \dots, N-1$*).*

Через K обозначим конус неотрицательных непрерывных на $[0;\ell]$ функций.

Изучается нелинейная модель

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = f(x,u) \quad (x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma), \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

с неосциллирующим однородным уравнением $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = 0$.

Для точек $\xi \in S(\sigma)$ уравнение в (16) принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta\alpha(\xi) = \alpha(\xi+0) - \alpha(\xi-0)$ — полный скачок функции $\alpha(x)$ в точке ξ.

Решение модели (16) мы ищем в классе E — абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, производная $u'_x(x)$ которых μ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_S$, квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, $(pu''_{x\mu})'_x(x), ru'_x(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Также будем предполагать выполненным условие: оператор суперпозиции $(Fu)(x) = v_2(x) f(x, u_0(x)u(x))$ действует из $C[0;\ell]$ в $L_{p,\sigma}[0;\ell]$ — пространство измеримых на $[0,\ell]$ функций $f(x)$ для которых интеграл $\int\limits_0^\ell |f(x)|^p\, d\sigma(x)$ конечен, при некотором $p \in (1; +\infty]$.

Для выполнимости последнего условия достаточно, чтобы $f(x,u)$ удовлетворяла условиям Каратеодори: 1) $f(x,u)$ измерима при каждом u; 2) $f(x,u)$ при каждом x непрерывна по u; 3) существует σ-суммируемая на $[0,\ell]$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x,u)| \leqslant m(x)$.

Приводятся условия на «монотонный» рост нелинейности $f(x,u)$, для которой модель

$$\begin{cases} Lu = (pv''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = \lambda f(x,u), \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

может иметь не более одного нетривиального неотрицательного решения, т. е. решения, принадлежащего конусу K.

Теорема 8 (5.6.1). *Пусть выполнены следующие условия: 1) уравнения $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$; 2) $f(x,0) \equiv 0$; 3) $f(x,u)$ не убывает по u при $u \geqslant 0$ и каждом $x \in [0;\ell]$; 4) $\dfrac{f(x,u)}{u}$ убывает по u при $u > 0$; 5) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x,u_0(x)u)$ непрерывно действует из $C[0;\ell]$ в $L_{p,\sigma}[0;\ell]$ при некотором $p \in (1;+\infty]$.*

Тогда множество Λ неотрицательных значений λ, при которых задача (17) имеет хотя бы одно нетривиальное в K решение, обладает следующими свойствами: (а) Множество Λ непусто и совпадает с некоторым интервалом $(\lambda_0,\lambda_\infty)$, при $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_\infty \leqslant +\infty$; (б) Каждому $\lambda \in \Lambda$ отвечает лишь одно решение $u(x,\lambda) \in K$ решение модели (17), и $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \|u(\cdot,\lambda)\|_C = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_\infty} \|u(\cdot,\lambda)\|_C = \infty$. (в) Функция $u(x,\lambda)$ монотонна по λ: при всех $x \in [0;\ell]$ справедливо неравенство $(\lambda_1-\lambda_2)(u(x,\lambda_1)-u(x,\lambda_2)) \geqslant 0$. (г) При каждом фиксированном $\lambda^* \in \Lambda$ для любого начального приближения $u_0(x)$ итерационная последовательность $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$, определяемая как решение дифференциальной модели $Lu = \lambda^* f(x,u_{n-1}(x)), u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$, $n = 1,2,\ldots$, равномерно сходится к $u(x,\lambda^*)$.

Проводится анализ случая, когда нелинейная дифференциальная модель имеет одно известное решение (без ограничения общности мы можем считать его нулевым ввиду очевидной функциональной замены), ставится вопрос о наличии второго решения. Изучается модель с сильной нелинейностью.

В шестой главе «**Адаптация метода конечных элементов к изучаемым моделям**» к изучаемым моделям адаптируется метод конечных элементов, доказаны оценки близости приближенного решения к точному.

Построен алгоритм адаптированного метода конечного элементов для стилтьесовской струны, помещенной во внешнюю среду с локальными особенностями, точнее, для математической модели

$$\begin{cases} -\left(pu'\right)'_{\sigma}(x) + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x), \\ u(0) = u'_x(1) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Введем энергетическое скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^1 p\varphi'\psi'\,dx + \int\limits_0^1 \varphi\psi\,dQ$$

в пространстве непрерывных на $[0,1]$ функций, имеющих производную суммируемую с квадратом, и удовлетворяющих условию $u(0)=0$.

Для погрешности доказана теорема.

Теорема 9 (6.1.1). *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели* (6.1.1)*; $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда*

$$\langle u-v, u-v \rangle \leqslant \widetilde{C} \cdot h,$$

где константа $\widetilde{C}$ не зависит от $h = {}^1/_N$ (N — количество интервалов на которые производится разбиение отрезка $[0;1]$*, причем сетка предполагается равномерной).*

Несмотря на то, что в качестве базисных функций берутся классические функции, приближенное решение сходится к точному при измельчении сетки. Это вызвано тем обстоятельством, что при построении алгоритма интегрирование производится *по мере*, которая содержит *все (локализованные) особенности*, порожденные как внутренней структурой изучаемого объекта, так и внешними факторами (среда и сила).

Также для различных коэффициентов модели (18) проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретическую оценку.

Также метод конечных элементов адаптируется для разрывной стилтьесовской струны:

$$\begin{cases} -\left(pu'_{\mu}\right)(x) + \int\limits_0^x u(s)\,d[Q(s)] = F(x) - F(0) - \left(pu'_{\mu}\right)(0), \\ u(0) = u'_{\mu}(1) = 0. \end{cases}$$

Показано, что

$$a(w,w) = \int\limits_0^1 w'^2_{\mu}\,d\mu + \int\limits_0^1 w^2\,d[Q] \leqslant (C_1 + C_2)\cdot h,$$

где постоянные C_i не зависят от h.

Далее проводятся адаптация метода конечных элементов и оценка погрешности для математической модели $(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x)+u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x)$, $u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$. Доказана

Теорема 10 (6.3.1). *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели* (6.3.1), *$v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей отрезка* $[0;1]$. *Тогда справедлива оценка*

$$a(u-v,u-v) \leqslant C\cdot h^2,$$

где $h = {}^1\!/_N$, C не зависит от h и $a(u,u)$ — энергетическая норма:

$$a(u,u) = \int\limits_0^1 u''^2\,dx + \int\limits_0^1 ru'^2\,dx + \int\limits_0^1 u^2\,dQ.$$

Проведены численные эксперименты, которые подтверждают теоретическую оценку h^2.

Четвертый параграф посвящен адаптации метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = u'_x(0) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \tag{6.4.1}$$

где $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $\inf\limits_{[0,\xi]} p > 0$, $p(x) \equiv 0$ на $[\xi;1]$, $r(x) \geqslant 0$ и $r(x) > 0$ на $[\xi;1]$.

Получена оценка погрешности, и проведены численные эксперименты, которые подтверждают теоретическую оценку.

В седьмой главе «**Численные эксперименты**» приведены результаты численных экспериментов, проведенных с помощью программ, написанных в пакете символьной математики Maple и на языке высокого уровня Python.

Приложение содержит листинги программ, написанных для описанных выше моделей на Maple и Python.

Программы работают по следующему алгоритму. Задаются коэффициенты модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение. Строится либо график (Maple и Python), либо таблица значений, которая может быть записана для построения графика с помощью программы, написанной на языке Python3.2.

Приведем описание одной из программ, написанной в пакете символьной математики Maple. **Общие сведения о программе.** Программа называется String_Finish.mw. Для работы программы необходим пакет символьной математики Maple. Для нормальной работы программы необходимо порядка 2 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 49890 bytes. **Функциональное назначение.** Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций струны по заданных параметрам модели. **Структура программы.** В начале задаются параметры модели и количество интервалов на которые разбивается отрезок. Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Строится график приближенного решения. **Требования к программному окружению.** Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7. **Эксплуатация программы.** Для начала работы необходимо запустить Maple, открыть файл с именем String_Finish.mw. Затем задаем параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На рисунке 1 представлена рабочая область файла (после открытия файла и задания коэффициентов модели).

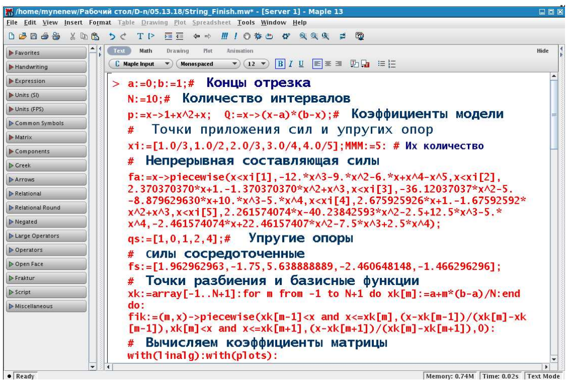

Рис. 1. *Вид программы на Maple до запуска*

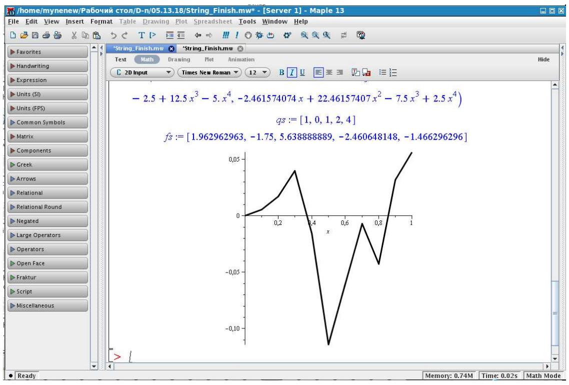

Рис. 2. *Вид программы на Maple после выполнения*

На выходе будет получен график приближенного решения модели. После задания параметров достаточно нажать <Enter>. Результат работы программы представлен (для заданной модели при разбиении на $n = 10$ равных частей) на рисунке 2.

Приведем описание одной из программ, для нахождения приближенного решения написанная на языке Python. Программа называется String.Final.2.1.1.py. Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 7352 bytes.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций струны по заданных параметрам модели.

Структура программы. В модуле, с названием DANNIE2.py, задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт String.Final.2.1.1.py, который спрашивает количество интервалов на которые разбивается отрезок и необходимое действие (построить график приближенного решения, вывести таблицу значений, записать значения в tex-файл, со структурой LaTeX, вычислить значение приближенного решения в конкретной точке, записать значения приближенного решения в текстовый файл). Далее вычисляются коэффициенты линейной системы и решается. Осуществляется выбранное действие.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. До запуска программы необходимо задать параметры модели: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, ξ_i, которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE2.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график приближенного решения модели, либо таблица приближенного решения, которая может быть выведена на монитор или записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем String.Final.2.1.1.py.

На рисунках 3–14 представлены геометрическая интерпретация некоторых фрагментов численных расчетов.

Все проведенные численные эксперименты подтверждают теоретическую оценку погрешности.

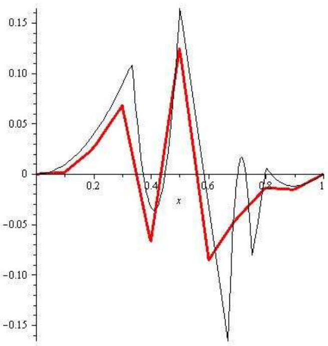

Рис. 3. *Точное и приближенное решения математической модели второго порядка при разбиении на 10 равных частей (Maple)*

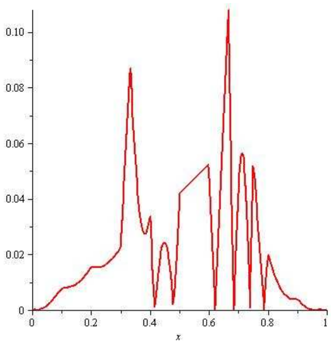

Рис. 4. *Погрешность при разбиении на 10 равных частей (Maple)*

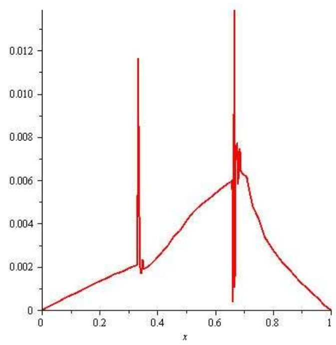

Рис. 5. *Погрешность при разбиении на 100 равных частей (Maple)*

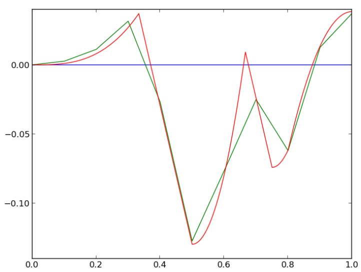

Рис. 6. *Графики точного и приближенного решений для математической модели второго порядка при $N = 10$ (Python)*

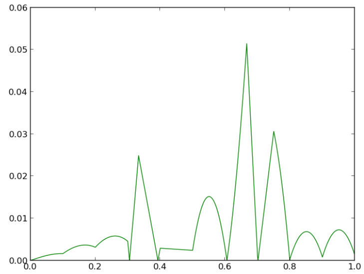

Рис. 7. *Погрешность для математической модели второго порядка при $N = 10$ (Python)*

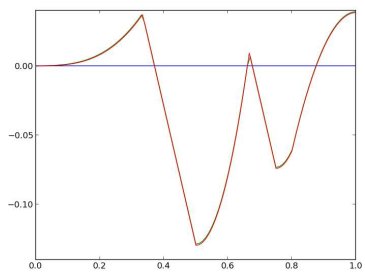

Рис. 8. *Графики точного и приближенного решений для математической модели второго порядка при $N = 100$ (Python)*

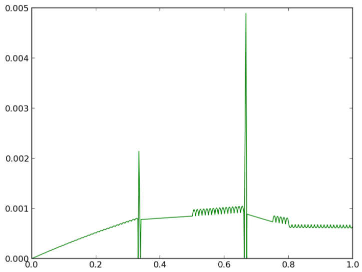

Рис. 9. *Погрешность для математической модели второго порядка при $N = 100$ (Python)*

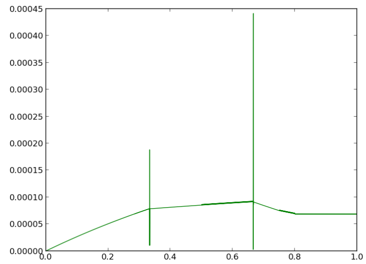

Рис. 10. *Погрешность для математической модели второго порядка при $N = 1000$ (Python)*

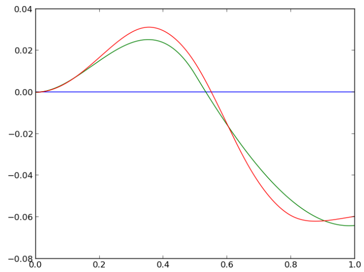

Рис. 11. *Графики точного и приближенного решений для математической модели четвертого порядка при $n = 2$ (Python)*

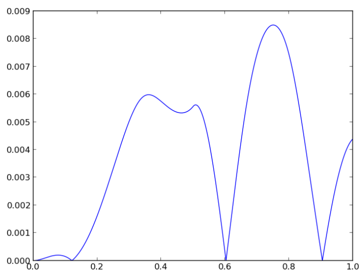

Рис. 12. *График погрешности для математической модели четвертого порядка при $n = 2$ (Python)*

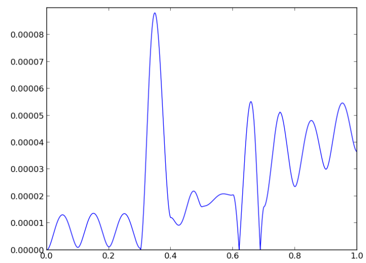

Рис. 13. *График погрешности для математической модели четвертого порядка при $n = 10$ (Python)*

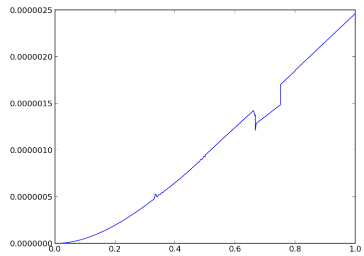

Рис. 14. *График погрешности для математической модели четвертого порядка при $n = 100$ (Python)*

Основные результаты диссертации

В диссертационной работе представлены новые качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, описывающие малые деформации струнных, стержневых и струнно-стержневых систем. Современный аналитический аппарат изучения таких моделей находится в начальной стадии формирования. Полученные качественные аналитические методы исследования основываются на эффективных результатах анализа граничных задач с производными Радона–Никодима. В настоящее время численные методы для уравнений с производными по мере, их обоснование также находятся в стадии формирования. В работе получены новые результаты, относящиеся к области приближенного решения граничных задач с производными Радона–Никодима, а также дана оценка погрешности. Представлены комплексы проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем.

1. Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде граничных задач с производными по мере. Дано вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней, струн, помещенных во внешнюю с локализованными особенностями. Доказана корректность полученных математических моделей.

2. Изучены нелинейные математические модели второго и четвертого порядков; рассмотрены различные типы нелинейностей, не содержащих производных, которые встречаются в прикладных задачах с «мягким» трением.

3. Рассмотрены некоторые вопросы теории математических моделей с разрывными решениями. Показана корректность моделей с решениями, имеющими не только разрывы, но и самостоятельное значение в точке разрыва, которое приходится учитывать для адекватности модели соответствующему процессу.

4. Изучена структура спектра, а именно, доказано, что спектр математической модели, как второго, так и четвертого порядков, обладает свойство осцилляционности.

5. Получены достаточные условия при которых математические модели сингулярной и сильно сингулярной консоли обладают свойством податливости; показано, что если внешняя среда имеет малую суммарную упругость, то обе модели податливы.

6. Разработаны и реализованы численные методы и алгоритмы приближенного решения изученных математических моделей, комплексы программ, выполненные в пакете символьной математики Maple и на языке высокого уровня Python. Представлены результаты численных экспериментов тестовых задач и листинги программ.

Публикации из перечня ВАК

1. Покорный Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141.

2. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров, М.Б. Давыдова // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

3. Pokornyi Yu.V. On extension of the Sturm-Liouville oscillation theory to problems with pulse parameters / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — T. 60, № 1. — C. 108–113.

4. Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, вып. 4. — С. 13–17.

5. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

6. Баев А.Д. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А.Д. Баев, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

7. Ткаченко А.А. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стилтьеса / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, вып. 2. — С. 36–39.

8. Шабров С.А. О нелинейной спектральной задаче с производными по мере / С.А. Шабров // Дифференциальные уравнения. — Т. 43, № 6. — 2007. — С. 856.

9. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, вып. 1. — С. 52–55.

10. Давыдова М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

11. Иванникова Т.А. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Ти-

машова, С. А. Шабров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 2, ч. 1. — С. 3–8.

12. Шабров С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

13. Шабров С.А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

14. Шабров С.А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

15. Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

16. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Головко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

17. Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Ж.О. Залукаева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 4. — С. 112–121.

Монографии

18. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. — М.: Физматлит, 2004. — 272с.

19. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.

20. Давыдова М.Б. О краевых задачах с негладкими и разрывными решениями / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров. — LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. — 91 p.

21. Шабров С.А. О функции Грина некоторых негладких задач / С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва. — Saarbrucrtn, Germany. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 92 с.

22. Шабров С.А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка / С.А. Шабров. — Saarbrücken, 2015. — 162 с.

Статьи, материалы конференций

23. Pokornyi, Yu.V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A.Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. – Vol.119, №6. – 2004. – P.769–787.

24. Голованёва Ф.В. Анализ дифференциальной модели, описывающую малые деформации сильно сингулярной консоли / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Взаимодействие математики и физики: новые перспективы. Материалы Всероссийской молодежной научной школы в рамках фестиваля науки (31 августа 2012 г.). – С. 8–9.

25. Голованёва Ф.В. Достаточные условия податливости сильно сингулярной математической модели / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Материалы Международной молодежной научной школы (22-23 июня 2012 г.), Воронеж. с. 29–30.

26. Голованева Ф.В. О достаточных условиях осцилляционности спектра одной краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ф.В. Голованева, С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2010. — № 2. — С. 112–121.

27. Голованёва Ф.В. О достаточных условиях податливости одной сильно сингулярной математической модели / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII». 2012. – С. 51–52.

28. Голованёва Ф.В. О достаточных условиях положительной обратимости одной сильно сингулярной математической модели / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // V Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012) Воронеж, 11 – 16 сентября 2012 г. – С. 90-91.

29. Голованёва Ф.В. О положительной обратимости краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. — 2009. — Воронеж. — С. 46–47.

30. Голованёва Ф.В. Осцилляционность спектра спектральной задачи четвертого порядка / Ф.В. Голованёва, С.А. Шабров // Материалы Во-

ронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». — 2011. — С. 79–81.
31. Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными по мере / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII». 2012. – С. 57–59.
32. Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений с производными по мере / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Материалы Международной молодежной научной школы (22-23 июня 2012 г.), Воронеж. — С. 39-41.
33. Давыдова М.Б. Об одной нелинейной математической модели с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // V Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012) Воронеж, 11–16 сентября 2012 г. С. 103-105.
34. Иванникова Т.А. Анализ математической модели струнно-стержневой системы с упругими опорами на концах / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // V Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012) Воронеж, 11–16 сентября 2012 г. С. 142–143.
35. Иванникова Т.А. О математической модели одной струнно-стержневой системы / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIII». 2012. — С. 78–79.
36. Иванникова Т.А. Об одной математической модели струнно-стержневой системы / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Материалы Международной молодежной научной школы (22-23 июня 2012 г.), Воронеж. — С. 36
37. Покорный Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами / Ю.В. Покорный, С.А. Шабров // Труды математического факультета ВГУ (новая серия). — 1999. — вып. 4. — С.84–96.
38. Покорный Ю.В. О задаче Штурма–Лиувилля с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Труды математического факультета. — вып. 10. — 2006. — Воронеж. — С. 119–130.

39. Покорный Ю.В. О неосцилляции интегро-дифференциального уравнения с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // «Понтрягинские чтения — XV» на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач": Тез. докл. — Воронеж, 2004. — С.173

40. Покорный Ю.В. О непрерывной зависимости от параметра решения краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ю.В. Покорный, Ф.В. Голованева, С.А. Шабров // Вестник физико-математического факультета Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина, вып. 1. – Елец. – 2006. С. 70–72.

41. Покорный Ю.В. О разрешимости полулинейной краевой задачи с квазипроизводной / Ю.В. Покорный, С.А. Шабров // «Понтрягинские чтения — X» на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач": Тез. докл. Воронеж, 1999. — С. 290.

42. Покорный Ю.В. Об одном классе обобщенных задач Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского. 2004. — С. 166–167.

43. Покорный Ю.В. Об особенностях упругих одномерных задач / Ю.В. Покорный, А.В. Копытин, С.А. Шабров // «Понтрягитнские чтения – VIII» на Воронежской весенней математической школе «Современные методы в теории краевых задач»: Тез. докл. – Воронеж, 1997. — С.184.

44. Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

45. Покорный Ю.В. О знакоопределённых решениях краевой задачи четвёртого порядка с производными по мере / Ю.В. Покорный, Ф.В. Голованева, С.А. Шабров // Труды математического факультета. — 2007. — Воронеж — вып. 11. — С. 155–159.

46. Покорный Ю.В. О неосцилляции интегро-дифференциального уравнения из задачи о стилтьесовской струне / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 136–138.

47. Покорный Ю.В. О разностных методах в вариационных моделях некоторых упругих систем / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищен-

ко, С.А. Шабров // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования. — 2007. — С. 157

48. Ткаченко А.А. О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с δ'-взаимодействием / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // «Понтрягинские чтения – XII» на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач": Тез. докл. Воронеж, 2001. — С. 196–197.

49. Ткаченко А.А. О неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с производными по дробным мерам / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской математической школы "Понтрягинские чтения — XVII". (доп. выпуск). — 2006. Воронеж. — С. 18.

50. Ткаченко А.А. Об одной краевой задаче с коэффициентами содержащими диполи второго порядка / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». — 2005. — Воронеж. Доп. вып. — С. 268–269.

51. Турыгина Е.А. О вполне непрерывности интегрального оператора, обращающего краевую задачу с производными по мере, в специальных пространствах / Е.А. Турыгина, С.А. Шабров // Труды математического факультета. — 2007. — Воронеж — вып. 11. — С. 203–214.

52. Шабров С.А. О μ-регуляризации функции с конечным изменением / С. А. Шабров // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж, 1999. С. 166–169.

53. Шабров С.А. О математической модели сложно-сочленной стержневой системы / С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2010, № 2. — С. 137–146.

54. Шабров С.А. О непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения с производными по мере от параметра / С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2008, № 2. — С. 57–69.

55. Шабров С.А. О разрешимости нелинейных квазидифференциальных уравнений второго порядка / С.А. Шабров // Воронежская зимняя математическая школа "Современные проблемы теории функций и их приложения": Тез. Докл. Воронеж, 1999. — С. 230.

56. Шабров С.А. О разрешимости нелинейных краевых задач второго порядка с производными по мере / С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2008, № 3. — С. 57–69.

57. Давыдова М. Б. О нелинейной математической модели с сильной

нелинейностью и производными Радона–Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 68–69.

58. Иванникова Т. А. О методе конечных элементов для одной разнопорядковой математической модели / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 99–101.

59. Голованева Ф. В. О непрерывной спектральной ветви нелинейной математической модели четвертого порядка с производными по мере / Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 274–275.

60. Голованева Ф. В. Непрерывная спектральная ветвь нелинейной математической модели четвертого порядка с производными по Радона–Никодима / Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIV». — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 53–55.

61. Головко Н. И. О методе конечных элементов для разнопорядковой модели / Н. И. Головко, Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIV». — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 55–57.

62. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Шабров С.А. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2012660327. 14.11.2012.

63. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Шабров С.А. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2012660330. 14.11.2012.